RMEC 13

Resolução dos Problemas Propostos

Cesar M. Tessarin

&

Daniel M. Doine

1 de Setembro de 2010

Problema 1

Parte A

Escrever na forma polar a equação cartesiana $y = x^2$.

Resolução:

Conhecendo '$x = r\cos\theta$' e '$y = r \operatorname{sen}\theta$':

$$y = x^2$$

$$r\operatorname{sen}\theta = (r\cos\theta)^2 \quad \rightarrow \quad r\operatorname{sen}\theta = r^2\cos^2\theta \quad (\div r)$$

$$\operatorname{sen}\theta = r \cdot \cos^2\theta \quad (\div \cos\theta)$$

$$r \cdot \cos\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad \rightarrow \quad r \cdot \cos\theta = \operatorname{tg}\theta$$

$$\boxed{r = \frac{\operatorname{tg}\theta}{\cos\theta}}$$

Parte B

Caracterizar a curva com a equação polar $r = 2 \cdot \cos\theta - 4 \cdot \operatorname{sen}\theta$.

Resolução:

(Multiplicando a equação por r, e sabendo que $r^2 = x^2 + y^2$)

$$r^2 = r(2 \cdot \cos\theta - 4 \cdot \operatorname{sen}\theta) \quad \rightarrow \quad r^2 = 2 \cdot r\cos\theta - 4 \cdot r\operatorname{sen}\theta \quad \rightarrow \quad \underbrace{x^2 + y^2}_{r^2} = 2x - 4y$$

(Completando os quadrados perfeitos)

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 1 + 4$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5}$$

$$\boxed{\text{Uma circunferência com o centro em } (1, -2) \text{ e raio } \sqrt{5}}$$

Fórmula geral de uma circunferência de centro (a, b) e raio r:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Problema 2

O primeiro passo a ser tomado é encontrar a coordenada de cada ponto. Sem seguir a ordem alfabética, temos:

Ponto E

Nota-se que está a mesma "altura" do ponto da parábola que cruza o eixo y. Logo, $y_E = 12$ *(Função: $y = x^2 - 6x + \underline{\mathbf{12}}$).*
Aplicando y_E na função obtemos seu x:

$$12 = x^2 - 6x + 12 \quad \rightarrow \quad x^2 - 6x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x-6) = 0$$

$$\begin{cases} x' \rightarrow 0 & \text{(Intersecção com eixo } y\text{)} \\ x'' \rightarrow 6 & \end{cases}$$

$$\boxed{E(6, 12)}$$

Ponto D

Simplesmente observando o gráfico: $\boxed{D(20, 0)}$

Ponto C

Obviamente: $\boxed{C(0, 0)}$

Ponto B

A reta mostrada intercepta a parábola em dois pontos (B e E). Sabemos ainda que (-10,0) pertence a esta reta. Assim, podemos calcular sua função:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad m = \frac{12-0}{6-(-10)} \quad \rightarrow \quad m = \frac{12}{16} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$(y - y_0) = m(x - x_0) \quad \rightarrow \quad (y - 0) = \frac{3}{4}(x + 10) \quad \rightarrow \quad \boxed{y = \frac{3}{4}x + \frac{15}{2}}$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{15}{2} = x^2 - 6x + 12 \quad (\times 4) \quad \rightarrow \quad 3x + 30 = 4x^2 - 24x + 48 \quad \rightarrow \quad \boxed{4x^2 - 27x + 18 = 0}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \rightarrow \quad \Delta = 27^2 - 4 \cdot 4 \cdot 18 \quad \rightarrow \quad \Delta = 729 - 288 \quad \rightarrow \quad \Delta = 441$$

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x' = \frac{27 + 21}{8} \quad \rightarrow \quad \boxed{x' = 6}$$
$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \rightarrow \quad x'' = \frac{27 - 21}{8} \quad \rightarrow \quad \boxed{x'' = \frac{3}{4}}$$

x' já era um ponto conhecido. Assim, $x_B = x''$. Para calcular seu y:

$$y_B = \frac{3}{4}x + \frac{15}{2} \quad \rightarrow \quad y_B = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{15}{2} \quad \rightarrow \quad y_B = \frac{9}{16} + \frac{15}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{y_B = \frac{129}{16}}$$
$$\boxed{B\left(\frac{3}{4}, \frac{129}{16}\right)}$$

Ponto A

Vértice da função. Pode ter seu x descoberto facilmente pela média de pontos simétricos, como E e o ponto de intersecção com o eixo y:

$$\frac{6+0}{2} = 3\,, \quad \longrightarrow \quad y_A = x_A^2 - 6x_A + 12 \quad \rightarrow \quad y_A = 3^2 - 6 \cdot 3 + 12 \quad \rightarrow \quad y_A = 3$$

$$\boxed{A(3,3)}$$

Calculando a área

Através da fórmula demonstrada por F.P.Garpelli, temos:

$$S = \frac{1}{2} \times \left\langle \begin{matrix} x_A & x_B & x_C & x_D & x_E \\ y_A & y_B & y_C & y_D & y_E \end{matrix} \right\rangle \quad \rightarrow \quad S = \frac{1}{2} \times \left\{ \begin{matrix} x_A & x_B & x_C & x_D & x_E & x_A \\ y_A & y_B & y_C & y_D & y_E & y_A \end{matrix} \right\}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ \begin{matrix} 3 & \frac{3}{4} & 0 & 20 & 6 & 3 \\ 3 & \frac{129}{16} & 0 & 0 & 12 & 3 \end{matrix} \right\}$$

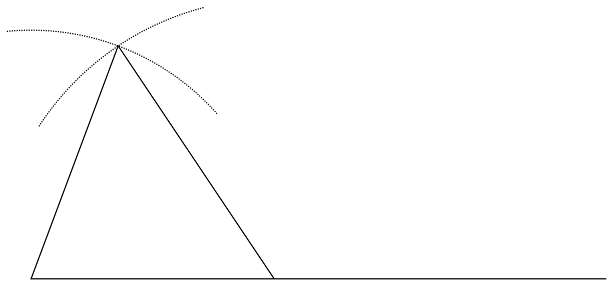
$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ \left(3 \cdot \frac{129}{16} + 0 + 0 + 240 + 18\right) - \left(3 \cdot \frac{3}{4} + 0 + 0 + 0 + 36\right) \right\}$$

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{387}{16} + 258 - \frac{9}{4} - 36 \right\} \quad \rightarrow \quad S = \frac{1}{2} \times \left\{ 222 + \frac{351}{16} \right\} \quad \rightarrow \quad S = 111 + \frac{351}{32}$$

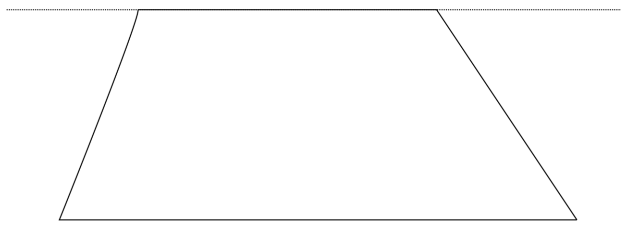
Como $352 \div 32 = 11$, pode-se dizer que $\boxed{S \approx 122}$

Problema 3

O primeiro passo, é posicionar a base e construir sobre ela um triângulo com os dois lados não paralelos:



Em seguida, basta deslocar um dos lados para a outra extremidade da base e adicionar o 4° lado (paralelo com a base):



Formando o trapézio: