1.5.2　全称量词命题和存在量词命题的否定

基础达标

一、选择题

1.命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|+x^2\geqslant 0$”的否定是(　　)

A.$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|+x^2<0$　　B.$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|+x^2\leqslant 0$

C.$\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|+x^2<0$　　D.$\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|+x^2\geqslant 0$

解析　此全称量词命题的否定为：$\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|+x^2<0$.

答案　C

2.下列命题中，为真命题的全称量词命题是(　　)

A.对任意的 a，$b\in\mathbf{R}$，都有 $a^2+b^2-2a-2b+2<0$

B.菱形的两条对角线相等

C.$\exists x\in\mathbf{R}$，$\sqrt{x^2}=x$

D.一次函数 $y=kx+b(k>0)$，y 随 x 的增大而增大

解析　A 中含有全称量词“任意”,因为 $a^2+b^2-2a-2b+2=(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$，是假命题；B，D 在叙述上没有全称量词，但实际上是指“所有的”，菱形的对角线不一定相等；C 是存在量词命题，所以选 D.

答案　D

3.已知命题 p：实数的平方是非负数，则下列结论正确的是(　　)

A.命题綈 p 是真命题

B.命题 p 是存在量词命题

C.命题 p 是全称量词命题

D.命题 p 既不是全称量词命题也不是存在量词命题

解析　命题 p：实数的平方是非负数，是真命题，故綈 p 是假命题，命题 p 是全称量词命题，故选 C.

答案　C

4.下列存在量词命题是假命题的是(　　)

A.存在实数 a，b，使 $ab=0$

B.有些实数 x，使得$|x+1|<1$

C.有些直角三角形，其中一条直角边长度是斜边长度的一半

D.有些实数 x，使得 $x^2<0$

解析　任意实数 x，$x^2\geqslant 0$，故选 D.

答案　D

5.下列命题中的假命题是(　　)

A.$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x|+1>0$　　B.$\forall x\in\mathbf{N}^*$，$(x-1)^2>0$

C.$\exists x\in\mathbf{R}$，$|x|<1$　　D.$\exists x\in\mathbf{R}$，$\frac{1}{|x|}+1=2$

解析　A 中命题是全称量词命题，易知$|x|+1>0$ 恒成立，故是真命题；B 中命题是全称量词命题，当 $x=1$ 时，$(x-1)^2=0$，故是假命题；C 中命题是存在量词命题，当 $x=0$ 时，$|x|=0$，故是真命题；D 中命题是存在量词命题，当 $x=\pm 1$ 时，$\frac{1}{|x|}+1=2$，故是真命题.

答案　B

二、填空题

6.命题“任意 $x\in\mathbf{R}$，$3x\geqslant 0$”的否定是________.

解析　全称量词命题的否定是存在量词命题，故“任意 $x\in\mathbf{R}$，$3x\geqslant 0$”的否定是“存在 $x\in\mathbf{R}$，$3x<0$”.

答案　存在 $x\in\mathbf{R}$，$3x<0$

7.命题“对任意 $x\in\mathbf{R}$，$|x-2|+|x-4|>3$”的否定是________________.

解析　由定义知命题的否定为“存在 $x\in\mathbf{R}$，使得$|x-2|+|x-4|\leqslant 3$”.

答案　存在 $x\in\mathbf{R}$，使得$|x-2|+|x-4|\leqslant 3$

8.命题“每个函数都有最大值”的否定是______________.

解析　命题的量词是“每个”，即为全称量词命题，因此其否定是存在量词命题，用量词“有些、有的、存在一个、至少有一个”等，再否定结论.故应填：有些函

数没有最大值.

答案　有些函数没有最大值

三、解答题

9.写出下列命题的否定，并判断其真假.

(1)p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}\geqslant 0$；

(2)q：所有的正方形都是矩形；

(3)r：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant 0$.

解　(1)綈 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}<0$，假命题.

$\because\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$，

$\therefore$綈 p 是假命题.

(2)綈 q：有的正方形不是矩形，假命题.

(3)綈 r：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2>0$，真命题.

$\because\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geqslant 1>0$，

$\therefore$綈 r 是真命题.

10.写出下列命题的否定，并判断真假：

(1)不论 m 取何实数，方程 $x^2+x-m=0$ 必有实数根；

(2)所有末位数字是 0 或 5 的整数都能被 5 整除；

(3)某些梯形的对角线互相平分；

(4)被 8 整除的数能被 4 整除.

解　(1)这一命题可以表述为 p：“对所有的实数 m，方程 $x^2+x-m=0$ 都有实数根”，其否定是綈 p；“存在实数 m，使得 $x^2+x-m=0$ 没有实数根”，注意到当 $\varDelta=1+4m<0$，即 $m<-\frac{1}{4}$时，一元二次方程没有实根，因此綈 p 是真命题.

(2)命题的否定是：存在末位数字是 0 或 5 的整数不能被 5 整除，是假命题.

(3)命题的否定：任一个梯形的对角线都不互相平分，是真命题.

(4)命题的否定：存在一个数能被 8 整除，但不能被 4 整除，是假命题.

能力提升

11.已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+m=0$，若綈 p 为假命题，则实数 m 的取值范围为________.

解析　因为綈 p 为假命题，所以命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-2x+m=0$ 为真命题，则方程 $x^2-2x+m=0$ 的判别式 $\Delta=4-4m\geqslant0$，即 $m\leqslant1$.故实数 m 的取值范围为 $\{m|m\leqslant1\}$.

答案　$\{m|m\leqslant1\}$

12.已知命题 p：$\forall 1\leqslant x\leqslant3$，都有 $m\geqslant x$，命题 q：$\exists 1\leqslant x\leqslant3$，使 $m\geqslant x$，若命题 p 为真命题，綈 q 为假命题，求实数 m 的取值范围.

解　由题意知命题 p，q 都是真命题.

由$\forall 1\leqslant x\leqslant3$，都有 $m\geqslant x$ 都成立，只需 m 大于或等于 x 的最大值，即 $m\geqslant3$.由$\exists 1\leqslant x\leqslant3$，使 $m\geqslant x$ 成立，只需 m 大于或等于 x 的最小值，即 $m\geqslant1$，因为两者同时成立，故实数 m 的取值范围为$\{m|m\geqslant3\}\cap\{m|m\geqslant1\}=\{m|m\geqslant3\}$.

创新猜想

13.(多选题)下列命题的否定中，是全称量词命题且为真命题的有(　　)

A.$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+\frac{1}{4}<0$

B.所有的正方形都是矩形

C.$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+2x+2\leqslant0$

D.至少有一个实数 x，使 $x^3+1=0$

解析　命题的否定是全称量词命题，即原命题为存在量词命题，故排除 B.再根据命题的否定为真命题，即原命题为假命题.又 D 为真命题，故选 AC.

答案　AC

14.(多空题)命题$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+3>0$ 的否定是________，命题$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+1<0$ 的否定是________.

答案　$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2-x+3\leqslant0$　$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\geqslant0$