

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

一、选择题

1. 不等式 $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$ 的解集是(D)

A. $\{x|x \neq -\frac{1}{3}\}$

B. $\{x|-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}\}$

C. \emptyset

D. $\{x|x = -\frac{1}{3}\}$

2. 不等式 $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ 的解集为(C)

A. $\{x|-1 < x \leq 1\}$

B. $\{x|-1 \leq x < 1\}$

C. $\{x|-1 \leq x \leq 1\}$

D. $\{x|-1 < x < 1\}$

3. 如果关于 x 的不等式 $x^2 < ax + b$ 的解集是 $\{x|1 < x < 3\}$, 那么 b^a 等于(B)

A. -81

B. 81

C. -64

D. 64

4. 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$ 的解集是(A)

A. $\{x|\frac{3}{4} \leq x \leq 2\}$

B. $\{x|\frac{3}{4} \leq x < 2\}$

C. $\{x|x > 2 \text{ 或 } x \leq \frac{3}{4}\}$

D. $\{x|x \geq \frac{3}{4}\}$

5. 对于任意实数 x , 不等式 $(a-2)x^2 - 2(a-2)x - 4 < 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为(C)

A. $\{a|a < 2\}$

B. $\{a|a \leq 2\}$

C. $\{a|-2 < a < 2\}$

D. $\{a|-2 < a \leq 2\}$

二、填空题

6. 不等式 $\frac{x+5}{(x-2)^2} > 0$ 的解集为 $(-5, 2)$ $(2, \text{无穷})$

7. 不等式 $\frac{x+1}{x} \leq 3$ 的解集是 $(-\text{无穷}, 0]$ $[1/2, \text{无穷})$

8. 某产品的总成本 y (万元)与产量 x (台)之间的函数关系是 $y = 3\,000 + 20x - 0.1x^2$ ($0 < x < 240$), 若每台产品的售价为 25 万元, 则生产者不亏本(销售收入不小于

总成本)时的最低产量是 150.

三、解答题

9. 若关于 x 的不等式 $ax^2 + 2x + 2 > 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

i > $a=0$ $2x+2>0$ 不符
ii > $a \neq 0$ $a < 0$ 不符
 $a > 0$ < 0 $4 - 4 \cdot 2 \cdot a < 0$ $a > 1/2$

10. 已知不等式 $x^2 + x - 6 < 0$ 的解集为 A , 不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为 B .

(1) 求 $A \cap B$;

(2) 若不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $A \cap B$, 求不等式 $ax^2 + bx + 3 < 0$ 的解集.

(1) $A = (-3, 2)$ $B = (-1, 3)$ $A \cap B = (-1, 2)$
(2) $-a = -1 + 2 = 1$ $a = -1$
 $b = -1 \cdot 2 = -2$
所以 $-x^2 - 2x + 3 < 0$
所以解集为 $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

11. 解关于 x 的不等式 $ax^2 - 2(a+1)x + 4 > 0$.

$a=0$ 不符, 舍去
 $a \neq 0$ $a > 0$ < 0
所以 $4(a+1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot a < 0$ $(a-1)^2 < 0$ 无解
 $a \neq 0$ $a < 0$ ≥ 0
 $(a-1)^2 \geq 0$ 所以 $a < 0$

综上所述 $a < 0$

12. (1) 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 不等式 $x^2 + mx + 4 < 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

(2) 对任意 $-1 \leq x \leq 1$, 函数 $y = x^2 + (a-4)x + 4 - 2a$ 的值恒大于 0, 求 a 的取值范围.

(1) 设 $f(x) = x^2 + mx + 4$ 所以 $f(x) < 0, x \in [1, 2]$
因为 $a > 0$ 所以 $f(1) < 0$ $f(2) < 0$
所以 $m < -5$

(2) 设 $f(x) = x^2 + (a-4)x + 4 - 2a$
对称轴为 $x = (a-4)/-2$
i > $(a-4)/-2 > 1$ 所以 $f(1) > 0$ 所以 $a < 1$
ii > $(a-4)/-2 < -1$ 所以 $f(-1) > 0$ 所以 $a > 6$ 且 $a < 3$ 无解
iii > $-1 < (a-4)/-2 < 1$ 所以 $2 < a < 6$
因为 $f((a-4)/-2) > 0$ 所以 $a^2 < 0$ 无解

综上所述 $a < 1$