2.1 等式性质与不等式性质

第一课时 等式性质与不等式的性质

一、选择题

1.下面能表示“a与b的和是非正数”的不等式为(　　)

A.$a+b<0$　　B.$a+b>0$

C.$a+b\leqslant 0$　　D.$a+b\geqslant 0$

解析　a与b的和是非正数，即$a+b\leqslant 0$.

答案　C

2.大桥桥头竖立的“限重40吨”的警示牌，是指示司机要安全通过该桥，应使车和货的总重量T满足关系为(　　)

A.$T<40$　　B.$T>40$

C.$T\leqslant 40$　　D.$T\geqslant 40$

解析　“限重40吨”用不等式表示为$T\leqslant 40$.

答案　C

3.设$M=x^2$，$N=-x-1$，则M与N的大小关系是(　　)

A.$M>N$　　B.$M=N$

C.$M<N$　　D.与x有关

解析　$\because M-N=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，$\therefore M>N$.

答案　A

4.下列不等式，正确的个数为(　　)

①$x^2+3>2x(x\in\mathbf{R})$；②$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$；③$a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$.

A.0　　B.1

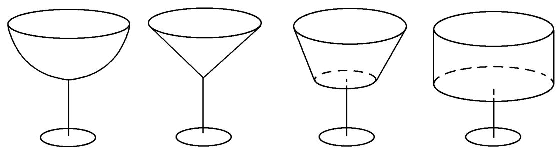
C.2　　D.3

解析　①$x^2+3-2x=(x-1)^2+2>0$，$\therefore x^2+3>2x$；②$a^3+b^3-a^2b-ab^2=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2$，$(a-b)^2\geqslant 0$，但 $a+b$

的符号不能确定，∴②不一定正确；③$a^2+b^2-2(a-b-1)=(a-1)^2+(b+1)^2\geqslant 0$，∴$a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$.故①③正确，选C.

答案　C

5.四位好朋友在一次聚会上，他们按照各自的爱好选择了形状不同、内空高度相等、杯口半径相等的圆口酒杯，如图所示.盛满酒后他们约定：先各自饮杯中酒的一半.设剩余酒的高度从左到右依次为 h_1，h_2，h_3，h_4，则它们的大小关系正确的是(　　)



A.$h_2>h_1>h_4$　　　　B.$h_1>h_2>h_3$

C.$h_3>h_2>h_4$　　　　D.$h_2>h_4>h_1$

解析　根据四个杯的形状分析易知 $h_2>h_1>h_4$ 或 $h_2>h_3>h_4$.

答案　A

二、填空题

6.不等式 $a^2+4\geqslant 4a$ 中，等号成立的条件为________.

解析　令 $a^2+4=4a$，则 $a^2-4a+4=0$，∴$a=2$.

答案　$a=2$

7.已知 a，$b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq 0$，则 $ab-a^2$________b^2(填“<”，“>”，“＝”).

解析　两式作差得，$ab-a^2-b^2=-\left(a-\frac{b}{2}\right)^2-\frac{3}{4}b^2<0$，所以，$ab-a^2<b^2$.

答案　<

8.(多空题)一辆汽车原来每天行驶 x km，如果该辆汽车每天行驶的路程比原来多19 km，那么在8天内它的行程就超过2 200 km，写出不等式为______________；如果它每天行驶的路程比原来少12 km，那么它原来行驶8天的路程就得花9天多的时间，用不等式表示为____________.

解析　由题意知，汽车原来每天行驶 x km，8天内它的行程超过2 200 km，则 $8(x+19)>2\ 200$.若每天行驶的路程比原来少12 km，则原来行驶8天的路程就要用9

天多，即$\frac{8x}{x-12}>9$.

答案　$8(x+19)>2\ 200$　$\frac{8x}{x-12}>9$

第二课时　等式性质与不等式的性质

一、选择题

1.已知$a<b<0$，则下列式子中恒成立的是(　　)

A.$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B.$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

C.$a^2<b^2$　　D.$\frac{a}{b}<1$

解析　因为$a<b<0$，不妨令$a=-3$，$b=-2$，

则$-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$，可排除A；

$(-3)^2>(-2)^2$，可排除C；

$\frac{a}{b}=\frac{-3}{-2}>1$，可排除D；

而$-\frac{1}{3}>-\frac{1}{2}$，即$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，B正确.

答案　B

2.设$x<a<0$，则下列不等式一定成立的是(　　)

A.$x^2<ax<a^2$　　B.$x^2>ax>a^2$

C.$x^2<a^2<ax$　　D.$x^2>a^2>ax$

解析　$\because x<a<0$，$\therefore x^2>a^2$.

$\because x^2-ax=x(x-a)>0$，$\therefore x^2>ax$.

又$ax-a^2=a(x-a)>0$，$\therefore ax>a^2$.

$\therefore x^2>ax>a^2$.

答案　B

3.(多选题)设$a<b<0$，则下列不等式中正确的是(　　)

A.$\frac{2}{a}>\frac{2}{b}$

B.$ac<bc$

C.$|a|>-b$

D.$\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$

解析　$a<b<0$，则$\frac{2}{a}>\frac{2}{b}$，选项 A 正确；当 $c>0$ 时选项 B 成立，其余情况不成立，则选项 B 不正确；$|a|=-a>-b$，则选项 C 正确；由 $-a>-b>0$，可得$\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$，则选项 D 正确.

答案　ACD

4.已知 $a>b>c$，则$\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}$的值是(　　)

A.正数

B.负数

C.非正数

D.非负数

解析　$\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}=\frac{c-a+b-c}{(b-c)(c-a)}=\frac{b-a}{(b-c)(c-a)}$，

$\because a>b>c$，$\therefore b-c>0$，$c-a<0$，$b-a<0$，

$\therefore \frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}>0$，故选 A.

答案　A

5.若 $1<a<3$，$-4<b<2$，那么 $a-|b|$的范围是(　　)

A.$-3<a-|b|\leqslant 3$

B.$-3<a-|b|<5$

C.$-3<a-|b|<3$

D.$1<a-|b|<4$

解析　$\because -4<b<2$，$\therefore 0\leqslant |b|<4$，$\therefore -4<-|b|\leqslant 0$.

又$\because 1<a<3$，$\therefore -3<a-|b|<3$.

答案　C

二、填空题

6.不等式 $a>b$ 和$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$同时成立的条件是________.

解析　$\because \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$，

$\therefore a>b$ 和$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$同时成立的条件是 $a>0>b$.

答案　$a>0>b$

7.若 $a<b<0$，则$\frac{1}{a-b}$与$\frac{1}{a}$的大小关系是________.

解析　$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}=\frac{a-(a-b)}{(a-b)a}=\frac{b}{(a-b)a}$，

$\because a<b<0$，$\therefore a-b<0$，则$\frac{b}{(a-b)a}<0$，$\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$.

答案　$\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$

8.已知$-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则$\frac{\alpha-\beta}{2}$的取值范围是________.

解析　$\because -\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，$\therefore -\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\alpha}{2}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$.

$\therefore -\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$，①

$-\frac{\pi}{4}<\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\therefore -\frac{\pi}{4}\leqslant-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$.②

由①+②得$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

又知 $\alpha<\beta$，$\therefore \alpha-\beta<0$.$\therefore -\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$.

答案　$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2}<0$

三、解答题

9.判断下列各命题的真假，并说明理由.

(1)若 $a<b$，$c<0$，则$\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$;

(2)若 $ac^3<bc^3$，则 $a>b$;

(3)若 $a>b$，且 $k\in\mathbf{N}^*$，则 $a^k>b^k$;

(4)若 $a>b$，$b>c$ 则 $a-b>b-c$.

解　(1)$\because a<b$，不一定有 $ab>0$，

$\therefore \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$不一定成立，

$\therefore$推不出$\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$，$\therefore$是假命题.

(2)当 $c>0$ 时，$c^3>0$，$\therefore a<b$，$\therefore$是假命题.

(3)当 $a=1$，$b=-2$，$k=2$ 时，显然命题不成立，$\therefore$是假命题.

(4)当 $a=2$，$b=0$，$c=-3$ 时，满足 $a>b$，$b>c$ 这两个条件，但是 $a-b=2<b-c=3$，$\therefore$是假命题.

10.已知 $c>a>b>0$，求证：$\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

证明　$\frac{a}{c-a}-\frac{b}{c-b}=\frac{a(c-b)-b(c-a)}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{ac-ab-bc+ab}{(c-a)(c-b)}=\frac{c(a-b)}{(c-a)(c-b)}$.

$\because c>a>b>0$，$\therefore c-a>0$，$c-b>0$，$a-b>0$.

$\therefore \frac{c(a-b)}{(c-a)(c-b)}>0$.$\therefore \frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$.

11.已知 $x>y>z$，$x+y+z=0$，则下列不等式中一定成立的是(　　)

A.$xy>yz$　　B.$xz>yz$

C.$xy>xz$　　D.$x|y|>z|y|$

解析　因为 $x>y>z$，$x+y+z=0$，

所以 $3x>x+y+z=0$，$3z<x+y+z=0$，所以 $x>0$，$z<0$.

所以由$\begin{cases}x>0,\\y>z,\end{cases}$可得 $xy>xz$.

答案　C

12.已知 $1\leqslant a+b\leqslant 4$，$-1\leqslant a-b\leqslant 2$，求 $4a-2b$ 的取值范围.

解　法一　设 $u=a+b$，$v=a-b$ 得 $a=\frac{u+v}{2}$，$b=\frac{u-v}{2}$，

$\therefore 4a-2b=2u+2v-u+v=u+3v.$

$\because 1\leqslant u\leqslant 4$，$-1\leqslant v\leqslant 2$，$\therefore -3\leqslant 3v\leqslant 6.$

则 $-2\leqslant u+3v\leqslant 10$，即 $-2\leqslant 4a-2b\leqslant 10.$

法二　令 $4a-2b=x(a+b)+y(a-b)$，

$\therefore 4a-2b=(x+y)a+(x-y)b.$

$\therefore \begin{cases} x+y=4, \\ x-y=-2, \end{cases} \therefore \begin{cases} x=1, \\ y=3. \end{cases}$

又 $\begin{cases} 1\leqslant a+b\leqslant 4, \\ -3\leqslant 3(a-b)\leqslant 6. \end{cases} \therefore -2\leqslant 4a-2b\leqslant 10.$