初高中衔接讲座（2）----因式分解　　姓名______

【知识归纳与讲解】

一、十字相乘法

1．$x^2+(p+q)x+pq$ 型的因式分解　　这类式子在许多问题中经常出现，其特点是：

(1) 二次项系数是 1；(2) 常数项是两个数之积；(3) 一次项系数是常数项的两个因数之和.

$x^2+(p+q)x+pq=x^2+px+qx+pq=x(x+p)+q(x+p)=(x+p)(x+q)$，

因此，$x^2+(p+q)x+pq=(x+p)(x+q)$。

2．一般二次三项式 ax^2+bx+c 型的因式分解

$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$.

$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$

3.拆项与添项来分解应该掌握的几个公式

$a^2-b^2=a^2-ab+ab-b^2=a(a-b)+b(a-b)=(a+b)(a-b)$,

$a^2+2ab+b^2=a^2+ab+ab+b^2=a(a+b)+b(a+b)=(a+b)^2$,

$a^2-2ab+b^2=a^2-ab-ab+b^2=a(a-b)-b(a-b)=(a-b)^2$,

$a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$,

$a^3-b^3=a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3=a^2(a-b)+ab(a-b)+b^2(a-b)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$,

$$\begin{aligned}a^n-b^n&=(a^n-a^{n-1}b)+(a^{n-1}b-a^{n-2}b^2)+\cdots+(a^2b^{n-2}-ab^{n-1})+(ab^{n-1}-b^n)\\&=a^{n-1}(a-b)+a^{n-2}b(a-b)+\cdots+ab^{n-2}(a-b)+b^{n-1}(a-b)\\&=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}),\end{aligned}$$

当 n 为奇数时, $a^n+b^n=a^n-(-b)^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$.

二、分组分解法

对于四项以上的多项式，如 $ma+mb+na+nb$ 既没有公式可用，也没有公因式可以提取．因此，可以先将多项式分组处理. 这种利用分组来因式分解的方法叫做分组分解法. 分组分解法的关键在于如何分组.

三、其他方法因式分解

有时分解因式可能要综合运用多种方法，比如公式法、分组分解法、添项或拆项、提取公因式等方法。

【例题讲解】

例 1 把下列各式因式分解：

(1) $x^2+5x-24$ ；　　(2) $x^2-2x-15$；　　（3）$12x^2-5x-2$。

解：(1) $\because\ -24=(-3)\times 8,(-3)+8=5$

$\therefore\ x^2+5x-24=[x+(-3)](x+8)=(x-3)(x+8)$

(2) $\because\ -15=(-5)\times 3,(-5)+3=-2$。

$\therefore\ x^2-2x-15=[x+(-5)](x+3)=(x-5)(x+3)$.

（3）$12x^2-5x-2=(3x-2)(4x+1)$。

$$\begin{matrix}3 & & -2\\ & \times & \\ 4 & & 1\end{matrix}$$

例 2 把下列各式因式分解：

(1) $x^2+xy-6y^2$；(2) $5x^2+6xy-8y^2$。

分析 (1) 把 $x^2+xy-6y^2$ 看成 x 的二次三项式，这时常数项是 $-6y^2$，一次项系数是 y，把 $-6y^2$ 分解成 $3y$ 与 $-2y$ 的积，而 $3y+(-2y)=y$，正好是一次项系数.

解 (1) $x^2+xy-6y^2=x^2+yx-6^2=(x+3y)(x-2y)$。

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3y \\ & \times & \\ 1 & & -2y \end{array}$$

(2) $5x^2+6xy-8y^2=(x+2y)(5x-4y)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 2y \\ & \times & \\ 5 & & -4y \end{array}$$

例 3 分解因式：

（1）$(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12$；（2）$6x^2-5xy+y^2+2x-y;$

(3) $6x^2-5xy+y^2-x-1;$ (4) $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6$.

分析 （1）把 x^2+x 整体看作一个字母 a，可不必写出，只当作分解二次三项式 $a^2-8a+12$，这是换元思想。

解 $(x^2+x)^2-8(x^2+x)+12=(x^2+x-6)(x^2+x-2)$

$=(x+3)(x-2)(x+2)(x-1)$。

（2）**分析**先把$6x^2-5xy+y^2$分解得到$(3x-y)(2x-y)$,这时发现余下的一次式$2x-y$正好和前面的因式$(3x-y)(2x-y)$提出$2x-y$，于是有下述解法。

解 $6x^2-5xy+y^2+2x-y=(3x-y)(2x-y)+2x-y=(2x-y)(x-y+1).$

（3）分析 本题与（2）类似，但后面一次项和常数项不与前面因式相同，不能像（2）那样直接提出公因式。注意到常数项是-1，所以原式分解因式后的两个因式常数项一个是 1，另一个是-1，因此可以考虑试分解：$6x^2-5xy+y^2-x-1=(3x-y+1)(2x-y-1)$，展开发现是正确的。如果先写出的是：$6x^2-5xy+y^2-x-1=(3x-y-1)(2x-y+1)$，展开发现不对，再修改。

说明 也可以采用待定系数法：设$6x^2-5xy+y^2-x-1=(3x-y+m)(2x-y+n)$，右边展开得$(3x-y+m)(2x-y+n)=6x^2-5xy+y^2+(2m+3n)x-(m+n)y+mn.$

比较系数可得 $2m+3n=-1, m+n=0$，$mn=-1$，解得 $m=1$，$n=-1$，从而

$6x^2-5xy+y^2-x-1=(3x-y-1)(2x-y+1)$。

本题还可以把 x 看作主元，把 y 看作常数，整体看成 x 的二次三项式，采用十字相乘法：

$6x^2-5xy+y^2-x-1=6x^2-(5y+1)x+y^2-1$

$=6x^2-(5y+1)x+(y-1)(y+1)=(3x-y+1)(2x-y-1)$。

实际解题个人根据自己情况选择合适的解法。

本题在高中数学中的背景是方程$6x^2-5xy+y^2-x-1=0$表示两条直线。因为由

$$6x^2-5xy+y^2-x-1=(3x-y+1)(2x-y-1)=0$$

可得$3x-y+1=0$ 或 $2x-y-1=0$表示两条直线。

(4) 仿照（3）可得

$$2x^2+xy-y^2-4x+5y-6=2x^2+(y-4)x-y^2+5y-6$$

$$=2x^2+(y-4)x-(y-2)(y-3)=(2x-y+2)(x+y-3).$$

或 $2x^2+xy-y^2-4x+5y-6=(2x^2+xy-y^2)-(4x-5y)-6$

$=(2x-y)(x+y)-(4x-5y)-6$

$=(2x-y+2)(x+y-3)$.

例 4 把下列各式分解因式：

（1）$2ax-10ay+5by-bx$；（2）$ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$；

（3）$x^2-y^2+ax+ay$；（4）$2x^2+4xy+2y^2-8z^2$。

（1）分析 把多项式的四项按前两项与后两项分成两组，并使两组的项按 x 的降幂排列，然后从两组分别提出公因式 $2a$ 与 $-b$，这时另一个因式正好都是 $x-5y$，这样可以继续提取公因式.

解 $2ax-10ay+5by-bx=2a(x-5y)-b(x-5y)=(x-5y)(2a-b)$

说明 本题也可以将一、四项为一组，二、三项为一组.

（2）分析 按照原先分组方式，无公因式可提，需要把括号打开后重新分组，然后再分解因式.

解 $ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd=abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cd$

$=(abc^2-a^2cd)+(b^2cd-abd^2)$

$=ac(bc-ad)+bd(bc-ad)=(bc-ad)(ac+bd)$

说明 由（1）、（2）可以看出，分组时运用了加法结合律，而为了合理分组，先运用了加法交换律，分组后，为了提公因式，又运用了分配律．由此可以看出运算律在因式分解中所起的作用.

（3）分析 把第一、二项为一组，这两项虽然没有公因式，但可以运用平方差公式分解因式，其中一个因式是 $x+y$；把第三、四项作为另一组，在提出公因式 a 后，另一个因式也是 $x+y$.

解 $x^2-y^2+ax+ay=(x+y)(x-y)+a(x+y)=(x+y)(x-y+a)$

（4）**分析** 提取系数 2，前三项作为一组，它是一个完全平方式，再和第四项形成平方差形式，可继续分解因式.

解 $2x^2+4xy+2y^2-8z^2=2(x^2+2xy+y^2-4z^2)$

$=2[(x+y)^2-(2z)^2]=2(x+y+2z)(x+y-2z)$

例 3 把下列多项式分解成一次因式的积：

（1）$f(x)=x^3+2x^2-x-2$; (2) $f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$；

（3）$f(x)=x^4-4x^2+x+2$;（4）$f(x)=3x^4+4x^3-11x^2+2x+2$.

分析 根据因式定理需要确定 a，使 $f(a)=0$,怎么确定 a？其实 a 就是 $f(x)$ 常数项的约数。为什么？

记 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$,若 $f(a)=0$,则有

$f(a)=a_0a^n+a_1a^{n-1}+\cdots+a_{n-1}a+a_n=a(a_0a^{n-1}+a_1a^{n-2}+\cdots+a_{n-1})+a_n=0$,

当 a 和 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为整数时,a_n 必能被 a 整除.

于是，a 就是多项式中常数项的约数（最高次项系数为 1，若最高次系数不为 1，则 a 是最高次项的系数除以常数项的约数，想一想为什么？）。

解（1）分别把$x=\pm1,x=\pm2$代入$f(x)$可得$f(1)=0,f(-1)=0,f(-2)=0$，所以$(x+1),(x-1),(x+2)$是其因式，从而$f(x)=x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x-1)(x+2)$。

（2）分别将 $x=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ 代入 $f(x)$ 中,容易得到 $f(1)=0,f(-1)=0$， $f(-2)=0$ 、 $f(3)=0$.

知 $f(x)$ 必有因式$(x+1)$、$(x-1)$、$(x+2)$、$(x-3)$, 从而得到

$f(x)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-3)$ 。

（3）分别把$x=\pm1,x=\pm2$ 代入 $f(x)$得$f(1)=0,f(-2)=0$，所以$f(x)$必有因式$(x-1)(x+2)$，利用综合除法（竖式除法）得商式x^2-x-1，所以

$$\begin{aligned}f(x)&=x^4-4x^2+x+2=(x-1)(x+2)(x^2-x-1)\\&=(x-1)(x+2)\left(x-\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt5}{2}\right).\end{aligned}$$

（4）分别把$x=\pm1,x=\pm\frac{1}{3}$，$x=\pm\frac{2}{3}$代入 $f(x)$得$f(1)=0,f\left(-\frac{1}{3}\right)=0$,所以必有因式$(x-1)(3x+1)$，利用综合除法（竖式除法）得商式$x^2+2x-2$，所以

$$\begin{aligned}f(x)&=3x^4+4x^3-11x^2+2x+2=(x-1)(3x+1)(x^2+2x-2)\\&=(x-1)(3x+1)(x+1-\sqrt3)(x+1+\sqrt3).\end{aligned}$$