

章末检测卷(一)

(时间：120 分钟 满分：150 分)

一、单项选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1.给出下列四个关系式：① $\sqrt{7} \in \mathbf{R}$ ；② $\mathbf{Z} \in \mathbf{Q}$ ；③ $0 \in \varnothing$ ；④ $\varnothing \subseteq \{0\}$ ，其中正确的个数是()

- A.1
C.3
B.2
D.4

解析 ①④正确；对于②， \mathbf{Z} 与 \mathbf{Q} 的关系是集合间的包含关系，不是元素与集合的关系；对于③， \varnothing 是不含任何元素的集合，故 $0 \notin \varnothing$ ，选 B.

答案 B

2.已知集合 $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ， $N = \{1, 3, 5\}$ ， $P = M \cap N$ ，则 P 的子集共有()

- A.2 个
C.6 个
B.4 个
D.8 个

解析 易知 $P = M \cap N = \{1, 3\}$ ，

故 P 的子集共有 $2^2 = 4$ 个.

答案 B

3.已知集合 $A = \{1, a\}$ ， $B = \{1, 2, 3\}$ ，则“ $a = 3$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的()

- A.充要条件
C.必要不充分条件
B.充分不必要条件
D.既不充分又不必要条件

解析 $\because a = 3 \Rightarrow A \subseteq B$ ，而 $A \subseteq B \not\Rightarrow a = 3$ ， \therefore “ $a = 3$ ”是“ $A \subseteq B$ ”的充分不必要条件.

答案 B

4.已知 $M = \{y \in \mathbf{R} | y = |x|\}$ ， $N = \{x \in \mathbf{R} | x = m^2\}$ ，则下列关系中正确的是()

- A. $M \sqsubset N$
C. $M \neq N$
B. $M = N$
D. $N \sqsubset M$

解析 $\because M = \{y \in \mathbf{R} | y = |x|\} = \{y \in \mathbf{R} | y \geq 0\}$ ， $N = \{x \in \mathbf{R} | x = m^2\} = \{x \in \mathbf{R} | x \geq 0\}$ ，

$\therefore M=N$.

答案 B

5. 命题 $p: ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根, 若 $\neg p$ 是假命题, 则实数 a 的取值范围为()

A. $\{a|a < 1\}$

B. $\{a|a \leq 1\}$

C. $\{a|a > 1\}$

D. $\{a|a \geq 1\}$

解析 因为 $\neg p$ 是假命题, 所以 p 为真命题, 即方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根.

当 $a = 0$ 时, 方程为 $2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, 满足条件. 当 $a \neq 0$ 时, 若使方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根, 则 $\Delta = 4 - 4a \geq 0$, 即 $a \leq 1$.

答案 B

6. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, \sqrt{1-x^2} \leq 1$, 则()

A. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, \sqrt{1-x^2} \geq 1$

B. $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, \sqrt{1-x^2} \geq 1$

C. $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, \sqrt{1-x^2} > 1$

D. $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, \sqrt{1-x^2} > 1$

解析 根据全称量词命题的否定方法, 当命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, \sqrt{1-x^2} \leq 1$ 时, $\neg p: \exists x \in \mathbf{R}, \sqrt{1-x^2} > 1$. 故选 C.

答案 C

7. 满足 “ $a \in A$, 且 $8-a \in A$, $a \in \mathbf{N}$ ” 的有且只有 2 个元素的集合 A 的个数是()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

解析 由题意可知, 满足题设条件的集合 A 有 $\{0, 8\}$, $\{1, 7\}$, $\{2, 6\}$, $\{3, 5\}$, 共 4 个.

答案 D

8. 已知集合 $A = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, 且 } y = x^2\}$, $B = \{(x, y) | x, y \text{ 为实数, 且 } y = 1 - x\}$, 则 $A \cap B$ 的元素个数为()

A.无数个

B.3

C.2

D.1

解析 联立 $\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 1, \end{cases}$ 消去 y 得 $x^2 + x - 1 = 0$,

$\because \Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 1 = 5 > 0$, \therefore 方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 有 2 个不同的实数解, \therefore 方程

组 $\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 1 \end{cases}$ 有 2 组解, $\therefore A \cap B$ 的元素有 2 个, 故选 C.

答案 C

二、多项选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中有 2 项符合题目要求, 全部选对得 5 分, 选对但不全的得 3 分, 有选错的不得分)

9. 对任意实数 a, b, c , 下列命题中, 假命题是()

A. “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的必要条件

B. “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的必要条件

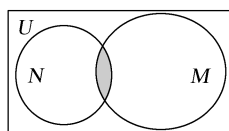
C. “ $ac > bc$ ”是“ $a > b$ ”的充分条件

D. “ $ac = bc$ ”是“ $a = b$ ”的充分条件

解析 $a = b \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow (a - b)c = 0 \Rightarrow ac = bc$, $\therefore ac = bc$ 是 $a = b$ 的必要条件.

答案 ACD

10. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $M = \{x | -2 \leq x - 1 \leq 2\}$ 和 $N = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^*\}$ 关系的 Venn 图如图所示, 则阴影部分表示的集合中的元素有()



A. -1

B. 0

C. 1

D. 3

解析 $\because M = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, $N = \{x | x = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^*\}$,

$\therefore M \cap N = \{1, 3\}$, 故选 CD.

答案 CD

解析 因为 $U = \{n | n \text{ 是小于 } 9 \text{ 的正整数}\}$, 所以 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
 则 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 6\}$, 所以 $\complement_U A = \{2, 4, 6, 8\}$, $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7\}$,
 所以 $(\complement_U A) \cap B = \{6\}$, $\complement_U (A \cup B) = \{2, 4, 8\}$.

答案 $\{6\}$ $\{2, 4, 8\}$

16. 设集合 $S = \{x | x > 5 \text{ 或 } x < -1\}$, $T = \{x | a < x < a + 8\}$, $S \cup T = \mathbf{R}$, 则 a 的取值范围是
 _____.

解析 借助数轴可知 $\begin{cases} a < -1, \\ a + 8 > 5. \end{cases} \therefore -3 < a < -1.$

答案 $\{a | -3 < a < -1\}$

四、解答题(本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17.(本小题满分 10 分) 已知集合 $A = \{x | -4 \leq x \leq -2\}$, 集合 $B = \{x | x + 3 \geq 0\}$.

求: (1) $A \cap B$;

(2) $A \cup B$;

(3) $\complement_{\mathbf{R}}(A \cap B)$.

解 由已知得 $B = \{x | x \geq -3\}$,

(1) $A \cap B = \{x | -3 \leq x \leq -2\}$.

(2) $A \cup B = \{x | x \geq -4\}$.

(3) $\complement_{\mathbf{R}}(A \cap B) = \{x | x < -3 \text{ 或 } x > -2\}$.

18.(本小题满分 12 分) 写出下列命题的否定, 并判断其真假性.

(1) $\forall x \in \mathbf{Z}, |x| \in \mathbf{N}$;

(2) 每一个平行四边形都是中心对称图形;

(3) 有些三角形是直角三角形;

(4) $\exists x \in \mathbf{R}, x + 1 \leq 0$;

(5) $\exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 2x + 3 = 0$.

解 (1) $\exists x \in \mathbf{Z}, |x| \notin \mathbf{N}$, 假命题.

(2)有些平行四边形不是中心对称图形，假命题.

(3)所有三角形都不是直角三角形，假命题.

(4) $\forall x \in \mathbf{R}, x+1>0$ ，假命题.

(5) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2+2x+3 \neq 0$ ，真命题.

19.(本小题满分 12 分)已知集合 $A=\{-4, 2a-1, a^2\}$, $B=\{a-5, 1-a, 9\}$, 分别求适合下列条件的 a 的值.

(1) $9 \in (A \cap B)$;

(2) $\{9\} = A \cap B$.

解 (1) $\because 9 \in (A \cap B)$, $\therefore 2a-1=9$ 或 $a^2=9$,

$\therefore a=5$ 或 $a=3$ 或 $a=-3$.

当 $a=5$ 时, $A=\{-4, 9, 25\}$, $B=\{0, -4, 9\}$;

当 $a=3$ 时, $a-5=1-a=-2$, 不满足集合元素的互异性;

当 $a=-3$ 时, $A=\{-4, -7, 9\}$, $B=\{-8, 4, 9\}$,

所以 $a=5$ 或 $a=-3$.

(2)由(1)可知,

当 $a=5$ 时, $A \cap B = \{-4, 9\}$, 不合题意,

当 $a=-3$ 时, $A \cap B = \{9\}$, 所以 $a=-3$.

20.(本小题满分 12 分)已知 $A=\{x|x^2-ax+a^2-12=0\}$, $B=\{x|x^2-5x+6=0\}$, 且满足下列三个条件:

① $A \neq B$; ② $A \cup B = B$; ③ $\emptyset \subset (A \cap B)$, 求实数 a 的值.

解 $B = \{2, 3\}$, $\because A \cup B = B$, $\therefore A \subseteq B$,

$\because A \neq B$, $\therefore A \subset B$.

又 $\because \emptyset \subset (A \cap B)$, $\therefore A \neq \emptyset$, $\therefore A = \{2\}$ 或 $A = \{3\}$,

∴方程 $x^2 - ax + a^2 - 12 = 0$ 只有一解，

由 $\Delta = (-a)^2 - 4(a^2 - 12) = 0$ 得 $a^2 = 16$ ，

∴ $a = 4$ 或 $a = -4$.

当 $a = 4$ 时，

集合 $A = \{x | x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\}$ 符合；

当 $a = -4$ 时，

集合 $A = \{x | x^2 + 4x + 4 = 0\} = \{-2\}$ (舍去).

综上， $a = 4$.

21.(本小题满分 12 分)求证：方程 $x^2 - 2x - 3m = 0$ 有两个同号且不相等的实根的充要条件是 $-\frac{1}{3} < m < 0$.

证明 (1)充分性：∵ $-\frac{1}{3} < m < 0$ ，

∴方程 $x^2 - 2x - 3m = 0$ 的判别式 $\Delta = 4 + 12m > 0$ ，

且 $-3m > 0$ ，

∴方程 $x^2 - 2x - 3m = 0$ 有两个同号且不相等的实根.

(2)必要性：若方程 $x^2 - 2x - 3m = 0$ 有两个同号且不相等的实根，

则有
$$\begin{cases} \Delta = 4 + 12m > 0, \\ x_1 x_2 = -3m > 0, \end{cases} \text{ 解得 } -\frac{1}{3} < m < 0.$$

综合(1)(2)知，方程 $x^2 - 2x - 3m = 0$ 有两个同号且不相等的实根的充要条件是 $-\frac{1}{3} < m < 0$.

22.(本小题满分 12 分)设集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ， $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + (a^2 - 5) = 0\}$ ，

(1)若 $A \cap B = \{2\}$ ，求实数 a 的值；

(2)若 $A \cup B = A$ ，求实数 a 的取值范围.

解 (1) $A = \{1, 2\}$. $\because A \cap B = \{2\}$,

$\therefore 2 \in B$, 代入 B 中方程, 得 $a^2 + 4a + 3 = 0$,

所以 $a = -1$ 或 $a = -3$.

当 $a = -1$ 时, $B = \{-2, 2\}$, 满足条件;

当 $a = -3$ 时, $B = \{2\}$, 也满足条件.

综上, a 的值为 -1 或 -3 .

(2) $\because A \cup B = A$, $\therefore B \subseteq A$.

①当 $\Delta = 4(a+1)^2 - 4(a^2 - 5) = 8(a+3) < 0$, 即 $a < -3$ 时, $B = \varnothing$ 满足条件;

②当 $\Delta = 0$, 即 $a = -3$ 时, $B = \{2\}$, 满足要求;

③当 $\Delta > 0$, 即 $a > -3$ 时,

$B = A = \{1, 2\}$ 才能满足要求, 经检验不可能成立.

综上可知 a 的取值范围是 $\{a | a \leq -3\}$.