

2.3 二次函数与一元二次方程、不等式

一、选择题

1. 不等式 $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$ 的解集是()

A. $\left\{x \mid x \neq -\frac{1}{3}\right\}$

B. $\left\{x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}\right\}$

C. \emptyset

D. $\left\{x \mid x = -\frac{1}{3}\right\}$

解析 原不等式可化为 $(3x + 1)^2 \leq 0$,

$$\therefore 3x + 1 = 0, \therefore x = -\frac{1}{3}.$$

答案 D

2. 不等式 $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ 的解集为()

A. $\{x \mid -1 < x \leq 1\}$

B. $\{x \mid -1 \leq x < 1\}$

C. $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

D. $\{x \mid -1 < x < 1\}$

解析 原不等式 $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-1) \leq 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$

$$\therefore -1 \leq x < 1.$$

答案 B

3. 如果关于 x 的不等式 $x^2 < ax + b$ 的解集是 $\{x \mid 1 < x < 3\}$, 那么 b^a 等于()

A. -81

B. 81

C. -64

D. 64

解析 不等式 $x^2 < ax + b$ 可化为

$$x^2 - ax - b < 0, \text{ 其解集是 } \{x \mid 1 < x < 3\}, \text{ 由根与系数的关系得 } \begin{cases} 1 + 3 = a, \\ 1 \times 3 = -b, \end{cases}$$

解得 $a = 4$, $b = -3$; 所以 $b^a = (-3)^4 = 81$. 故选 B.

答案 B

4. 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$ 的解集是()

A. $\left\{x \mid \frac{3}{4} \leq x \leq 2\right\}$

B. $\left\{x \mid \frac{3}{4} \leq x < 2\right\}$

C. $\left\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x \leq \frac{3}{4}\right\}$

D. $\left\{x \mid x \geq \frac{3}{4}\right\}$

解析 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$, 移项得 $\frac{3x-1}{2-x} - 1 \geq 0$, 即 $\frac{x-\frac{3}{4}}{x-2} \leq 0$, 可化为 $\begin{cases} x - \frac{3}{4} \geq 0, \\ x - 2 < 0 \end{cases}$ 或

$$\begin{cases} x - \frac{3}{4} \leq 0, \\ x - 2 > 0, \end{cases}$$

解得 $\frac{3}{4} \leq x < 2$, 则原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{3}{4} \leq x < 2\right\}$,

故选 B.

答案 B

5. 对于任意实数 x , 不等式 $(a-2)x^2 - 2(a-2)x - 4 < 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为()

A. $\{a \mid a < 2\}$

B. $\{a \mid a \leq 2\}$

C. $\{a \mid -2 < a < 2\}$

D. $\{a \mid -2 < a \leq 2\}$

解析 当 $a-2=0$, 即 $a=2$ 时, $-4 < 0$, 恒成立;

$$\text{当 } a-2 \neq 0 \text{ 时, } \begin{cases} a-2 < 0, \\ 4(a-2)^2 + 16(a-2) < 0, \end{cases}$$

解得 $-2 < a < 2$, $\therefore -2 < a \leq 2$, 故选 D.

答案 D

二、填空题

6. 不等式 $\frac{x+5}{(x-2)^2} > 0$ 的解集为_____.

解析 $\frac{x+5}{(x-2)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5 > 0, \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5, \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > -5 \text{ 且 } x \neq 2.$

答案 $\{x|x>-5 \text{ 且 } x\neq 2\}$

7. 不等式 $\frac{x+1}{x}\leq 3$ 的解集是_____.

解析 由 $\frac{x+1}{x}\leq 3$, 得 $\frac{x+1}{x}-3\leq 0$, 即 $\frac{2x-1}{x}\geq 0$, 则 $\begin{cases} x\neq 0, \\ x(2x-1)\geq 0, \end{cases}$ 解得 $x<0$ 或

$x\geq \frac{1}{2}$. \therefore 不等式 $\frac{x+1}{x}\leq 3$ 的解集是 $\left\{x|x<0 \text{ 或 } x\geq \frac{1}{2}\right\}$.

答案 $\left\{x|x<0 \text{ 或 } x\geq \frac{1}{2}\right\}$

8. 某产品的总成本 y (万元)与产量 x (台)之间的函数关系是 $y=3\,000+20x-0.1x^2$ ($0<x<240$), 若每台产品的售价为 25 万元, 则生产者不亏本(销售收入不小于总成本)时的最低产量是_____.

解析 依题意得 $25x\geq 3\,000+20x-0.1x^2$,

整理得 $x^2+50x-30\,000\geq 0$,

解得 $x\geq 150$ 或 $x\leq -200$ (舍去).

因为 $0<x<240$, 所以 $150\leq x<240$,

即最低产量是 150 台.

答案 150

三、解答题

9. 若关于 x 的不等式 $ax^2+2x+2>0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.

解 当 $a=0$ 时, 原不等式可化为 $2x+2>0$, 其解集不为 \mathbf{R} , 故 $a=0$ 不满足题意, 舍去;

当 $a\neq 0$ 时, 要使原不等式的解集为 \mathbf{R} ,

只需 $\begin{cases} a>0, \\ \Delta=2^2-4\times 2a<0, \end{cases}$ 解得 $a>\frac{1}{2}$.

综上, 所求实数 a 的取值范围为 $\left\{a|a>\frac{1}{2}\right\}$.

10. 已知不等式 $x^2+x-6<0$ 的解集为 A , 不等式 $x^2-2x-3<0$ 的解集为 B .

(1)求 $A \cap B$;

(2)若不等式 $x^2 + ax + b < 0$ 的解集为 $A \cap B$, 求不等式 $ax^2 + bx + 3 < 0$ 的解集.

解 (1)由 $x^2 + x - 6 < 0$ 得 $-3 < x < 2$.

$\therefore A = \{x \mid -3 < x < 2\}$. 由 $x^2 - 2x - 3 < 0$, 得 $-1 < x < 3$,

$\therefore B = \{x \mid -1 < x < 3\}$. $\therefore A \cap B = \{x \mid -1 < x < 2\}$.

(2)由已知得 $\begin{cases} 1 - a + b = 0, \\ 4 + 2a + b = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -1, \\ b = -2. \end{cases}$

$\therefore -x^2 - 2x + 3 < 0$, 即 $x^2 + 2x - 3 > 0$,

解得 $x < -3$ 或 $x > 1$.

\therefore 原不等式的解集为 $\{x \mid x < -3 \text{ 或 } x > 1\}$.

11. 解关于 x 的不等式 $ax^2 - 2(a+1)x + 4 > 0$.

解 (1)当 $a = 0$ 时, 原不等式可化为 $-2x + 4 > 0$,

解得 $x < 2$, 所以原不等式的解集为 $\{x \mid x < 2\}$.

(2)当 $a > 0$ 时, 原不等式可化为 $(ax - 2) \cdot (x - 2) > 0$,

对应方程的两个根为 $x_1 = \frac{2}{a}$, $x_2 = 2$.

①当 $0 < a < 1$ 时, $\frac{2}{a} > 2$,

所以原不等式的解集为 $\left\{x \mid x > \frac{2}{a} \text{ 或 } x < 2\right\}$;

②当 $a = 1$ 时, $\frac{2}{a} = 2$, 所以原不等式的解集为 $\{x \mid x \neq 2\}$;

③当 $a > 1$ 时, $\frac{2}{a} < 2$, 所以原不等式的解集为 $\left\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x < \frac{2}{a}\right\}$.

(3)当 $a < 0$ 时, 原不等式可化为 $(-ax + 2)(x - 2) < 0$, 对应方程的两个根为 $x_1 = \frac{2}{a}$, x_2

$= 2$, 则 $\frac{2}{a} < 2$, 所以原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{a} < x < 2\right\}$.

综上, $a < 0$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{a} < x < 2\right\}$;

$a = 0$ 时, 原不等式的解集为 $\{x \mid x < 2\}$;

$0 < a \leq 1$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x > \frac{2}{a} \text{ 或 } x < 2\right\}$;

$a > 1$ 时, 原不等式的解集为 $\left\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x < \frac{2}{a}\right\}$.

12.(1) 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 不等式 $x^2 + mx + 4 < 0$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

(2) 对任意 $-1 \leq x \leq 1$, 函数 $y = x^2 + (a-4)x + 4 - 2a$ 的值恒大于 0, 求 a 的取值范围.

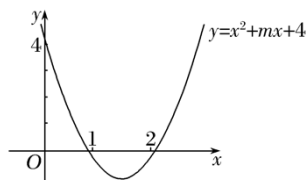
解 (1) 令 $y = x^2 + mx + 4$.

$\because y < 0$ 在 $1 \leq x \leq 2$ 上恒成立.

$\therefore y = 0$ 的根一个小于 1, 另一个大于 2.

如图, 可得 $\begin{cases} m + 5 < 0, \\ 4 + 2m + 4 < 0. \end{cases}$

$\therefore m$ 的取值范围是 $\{m \mid m < -5\}$.



(2) $\because x^2 + (a-4)x + 4 - 2a > 0$ 恒成立,

即 $x^2 + ax - 4x + 4 - 2a > 0$ 恒成立.

$\therefore (x-2) \cdot a > -x^2 + 4x - 4$.

$\because -1 \leq x \leq 1, \therefore x-2 < 0$.

$\therefore a < \frac{-x^2 + 4x - 4}{x-2} = \frac{x^2 - 4x + 4}{2-x} = 2 - x$.

令 $y = 2 - x$, 则当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, y 的最小值为 1, $\therefore a < 1$.

故 a 的取值范围为 $\{a|a<1\}$.