1.5.1　全称量词与存在量词

基础达标

一、选择题

1.下列命题：

①中国公民都有受教育的权利；

②每一个中学生都要接受爱国主义教育；

③有人既能写小说，也能搞发明创造；

④任何正方形都是平行四边形.

其中全称量词命题的个数是(　　)

A.1　　B.2

C.3　　D.4

解析　命题①②④都是全称量词命题.

答案　C

2.下列命题中存在量词命题的个数是(　　)

①有些自然数是偶数；②正方形是菱形；③能被 6 整除的数也能被 3 整除；④对于任意 $x\in\mathbf{R}$，总有$|x|\geqslant 0$.

A.0　　B.1

C.2　　~~D.3~~

解析　命题①含有存在量词；命题②可以叙述为“所有的正方形都是菱形”，是全称量词命题；命题③可以叙述为“一切能被 6 整除的数也都能被 3 整除”，是全称量词命题；而命题④是全称量词命题.故有一个存在量词命题.

答案　B

3.已知命题 p：$\exists x\in\mathbf{R}$，$x^2+4x+a=0$，若命题 p 是假命题，则实数 a 的取值范围是(　　)

A.$0<a<4$　B.$a>4$

C.$a<0$　D.$a\geqslant 4$

解析　$\because p$ 是假命题，$\therefore$方程 $x^2+4x+a=0$ 没有实数根，即 $\Delta=16-4a<0$，即 $a>4$.

答案　B

4.下列四个命题：

①一切实数均有相反数；②$\exists a\in \mathbf{N}$，使得方程 $ax+1=0$ 无实数根；③梯形的对角线相等；④有些三角形不是等腰三角形.

其中，真命题的个数为(　　)

~~A.1~~　　B.2

C.3　　D.4

解析　①为真命题；对于②，当 $a=0$ 时，方程 $ax+1=0$ 无实数根；对于③，等腰梯形的对角线相等，故③错误；④为真命题.

答案　C

5.下列全称量词命题中真命题的个数为(　　)

①对于任意实数 x，都有 $x+2>x$；

②对任意的实数 a，b，都有若$|a|>|b|$，则 $a^2>b^2$ 成立；

③二次函数 $y=x^2-ax-1$ 与 x 轴恒有交点；

④$\forall x\in \mathbf{R}$，$y\in \mathbf{R}$，都有 $x^2+|y|>0$.

A.1　　~~B.2~~

C.3　　D.4

解析　①②③为真命题.

答案　C

二、填空题

6.给出下列三个命题：

①$\forall x\in \mathbf{R}$，$x^2+1\neq 0$；②矩形都不是梯形；

③$\exists x$，$y\in \mathbf{R}$，$x^2+y^2\leqslant 1$.

其中全称量词命题是________(填序号).

解析　②省略了量词“所有的”.

答案　①②

7.命题“有些负数满足不等式$(1+x)(1-9x)^2>0$”用“$\exists$”写成存在量词命题为________.

解析　存在量词命题“存在 M 中的元素 x，使 $p(x)$成立”可用符号简记为“$\exists x\in$

M，$p(x)$”.

答案　$\exists x<0$，$(1+x)(1-9x)^2>0$

8.下列全称量词命题中真命题的个数为________.

①$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2>0$；

②$\forall x\in\mathbf{N}$，$x^4\geqslant 1$；

③对任意 x，y，都有 $x^2+y^2\neq 0$.

解析　①由于$\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $x^2\geqslant 0$，因而有 $x^2+2\geqslant 2>0$，即 $x^2+2>0$，所以命题“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+2>0$”是真命题.

②由于 $0\in\mathbf{N}$，当 $x=0$ 时，$x^4\geqslant 1$ 不成立，所以命题“$\forall x\in\mathbf{N}$，$x^4\geqslant 1$”是假命题.

③当 $x=y=0$ 时，$x^2+y^2=0$，所以是假命题.

答案　1

三、解答题

9.试判断下列全称量词命题的真假：

(1)$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\geqslant 2$；

(2)直角坐标系内任何一条直线都与 x 轴有交点；

(3)每个二次函数都有最小值.

解　(1)取 $x=0$，则 $x^2+1=1<2$，所以“$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2+1\geqslant 2$”是假命题.

(2)与 x 轴平行的直线与 x 轴无交点，所以该命题为假命题.

(3)对于 $y=ax^2+bx+c$，当 $a<0$ 时函数有最大值无最小值，所以“每个二次函数都有最小值”是假命题.

10.判断下列存在量词命题的真假：

(1)$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^3<1$；

(2)存在一个四边形不是平行四边形；

(3)存在一对整数 x，y，使得 $2x+4y=6$.

解　(1)$\because -1\in\mathbf{Z}$，且$(-1)^3=-1<1$，

$\therefore$“$\exists x\in\mathbf{Z}$，$x^3<1$”是真命题.

(2)真命题，如梯形.

(3)取 $x=3$，$y=0$，则 $2x+4y=6$，故为真命题.

能力提升

11.下列说法正确的是(　　)

A.对所有的正实数 t，有$\sqrt{t}<t$

B.存在实数 x，使 $x^2-3x-4=0$

C.不存在实数 x，使 $x<4$ 且 $x^2+5x-24=0$

D.任意实数 x，使得$|x+1|\leqslant 1$ 且 $x^2>4$

解析　$t=\frac{1}{4}$时，$\sqrt{t}>t$，所以 A 选项错；由 $x^2-3x-4=0$，得 $x=-1$ 或 $x=4$，因此当 $x=-1$ 或 $x=4$ 时，$x^2-3x-4=0$，故 B 选项正确；由 $x^2+5x-24=0$，得 $x=-8$ 或 $x=3$，所以 C 选项错；$x=0$ 时，不成立，所以 D 选项错.

答案　B

12.若$\forall x\in \mathbf{R}$，函数 $y=mx^2+x-m-a$ 的图象和 x 轴恒有公共点，求实数 a 的取值范围.

解　(1)当 $m=0$ 时，$y=x-a$ 与 x 轴恒有公共点，

所以 $a\in \mathbf{R}$.

(2)当 $m\neq 0$ 时，二次函数 $y=mx^2+x-m-a$ 的图象和 x 轴恒有公共点的充要条件是 $\Delta=1+4m(m+a)\geqslant 0$ 恒成立，即 $4m^2+4am+1\geqslant 0$ 恒成立.

设 $y_1=4m^2+4am+1$，则可转化为此关于 m 的二次函数的图象恒在 m 轴上方(或图象顶点在 m 轴上)的充要条件是 $\Delta_1=(4a)^2-16\leqslant 0$，可得 $-1\leqslant a\leqslant 1$.

综上所述，当 $m=0$ 时，$a\in \mathbf{R}$；

当 $m\neq 0$ 时，$a\in \{a|-1\leqslant a\leqslant 1\}$.