□□

1.4.2　充要条件

基础达标

一、选择题

1.设 a，b，c 分别是△ABC 的三条边，且 $a\leqslant b\leqslant c$，则“$a^2+b^2=c^2$”是“△ABC 为直角三角形”的(　　)

A.充分不必要条件　　　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　D.既不充分又不必要条件

解析　$a^2+b^2=c^2\Leftrightarrow$△$ABC$ 为直角三角形，故选 C.

答案　C

2.已知 p：$-2<x<2$，q：$-1<x<2$，则 p 是 q 的(　　)

A.充分不必要条件　　　　B.必要不充分条件

C.充要条件　　　　D.既不充分又不必要条件

解析　p：$-2<x<2$.

q：$-1<x<2$.

∵$\{x|-1<x<2\}\subsetneqq\{x|-2<x<2\}$，

∴p 是 q 的必要不充分条件，选 B.

答案　B

3.如果 A 是 B 的必要不充分条件，B 是 C 的充要条件，D 是 C 的充分不必要条件，那么 A 是 D 的(　　)

A.必要不充分条件　　　　B.充分不必要条件

C.充要条件　　　　D.既不充分又不必要条件

解析　由条件，知 $D\Rightarrow C\Leftrightarrow B\Rightarrow A$，即 $D\Rightarrow A$，但 $A\nRightarrow D$，故选 A.

答案　A

4.使“$x\in\left\{x|x\geqslant 3或x\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$”成立的一个充分不必要条件是(　　)

A.$x\geqslant 0$　　　　B.$x<0$ 或 $x>2$

C.$x\in\{-1,3,5\}$　　　　D.$x\leqslant -\frac{1}{2}$或$x\geqslant 3$

解析　选项中只有$x\in\{-1,3,5\}$是使“$x\in\left\{x|x\geqslant 3或x\leqslant -\frac{1}{2}\right\}$”成立的一个充分不必要条件.

答案　C

5.“$x=1$”是“$x\in\{x|x\leqslant a\}$”的充分条件，则实数a的取值范围为(　　)

A.$\left\{\frac{1}{2}\right\}$　　　　B.$\left\{a\middle|a<\frac{1}{2}\right\}$

C.$\{a|a<1\}$　　　　D.$\{a|a\geqslant 1\}$

解析　由题意，$\{1\}$是$\{x|x\leqslant a\}$的子集，$\therefore a\geqslant 1$.故选D.

答案　D

二、填空题

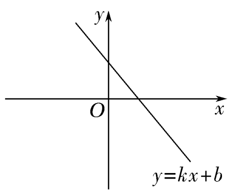
6.p：两个三角形的三条边对应相等，q：两个三角形全等，则p是q的________条件.

解析　$p\Rightarrow q$，$q\Rightarrow p$，故p是q的充要条件.

答案　充要

7.一次函数$y=kx+b(k\neq 0)$的图象不过第三象限的充要条件是________.

解析　如图所示，



要使一次函数$y=kx+b(k\neq 0)$不过第三象限，则需$k<0$且$b\geqslant 0$.

答案　$k<0$且$b\geqslant 0$

8.若“$x\leqslant -1$或$x\geqslant 1$”是“$x<a$”的必要不充分条件，则实数a的最大值为________.

解析　“$x\leqslant -1$或$x\geqslant 1$”是“$x<a$”的必要不充分条件，则由“$x<a$”可以推出“$x\leqslant -1$或$x\geqslant 1$”，但由“$x\leqslant -1$或$x\geqslant 1$”推不出“$x<a$”，所以$a\leqslant -1$，所以实数a的最大值为-1.

答案　-1

三、解答题

9.指出下列各题中 p 是 q 的什么条件(在“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”“既不充分又不必要条件”中选一个作答).

(1)p：$x-3=0$，q：$(x-2)(x-3)=0$；

(2)p：两个三角形相似，q：两个三角形全等；

(3)p：$a>b$，q：$a+c>b+c$.

解　(1)$x-3=0\Rightarrow(x-2)(x-3)=0$，但$(x-2)(x-3)=0\not\Rightarrow x-3=0$，故 p 是 q 的充分不必要条件.

(2)两个三角形相似$\not\Rightarrow$两个三角形全等，但两个三角形全等$\Rightarrow$两个三角形相似，故 p 是 q 的必要不充分条件.

(3)$a>b\Rightarrow a+c>b+c$，且 $a+c>b+c\Rightarrow a>b$，故 p 是 q 的充要条件.

10.不等式 $3x+a\geqslant 0$ 成立的充要条件为 $x\geqslant 2$，求 a 的值.

解　$3x+a\geqslant 0$ 化为 $x\geqslant -\frac{a}{3}$.

由题意$\left\{x|x\geqslant -\frac{a}{3}\right\}=\{x|x\geqslant 2\}$，

所以 $-\frac{a}{3}=2$，$a=-6$.

能力提升

11.已知 $P=\{x|-2\leqslant x\leqslant 10\}$，非空集合 $S=\{x|1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$.若 $x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，则 m 的取值范围为________.

解析　$\because x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件，则 $S\subseteq P$.

$\therefore\begin{cases}1-m\geqslant -2,\\1+m\leqslant 10,\end{cases}$解得 $m\leqslant 3$.

又$\because S$ 为非空集合，$\therefore 1-m\leqslant 1+m$，解得 $m\geqslant 0$.

综上，可知 $0\leqslant m\leqslant 3$ 时，$x\in P$ 是 $x\in S$ 的必要条件.

答案　$\{m|0\leqslant m\leqslant 3\}$

12.已知 a，b，c 均为实数，证明"$ac<0$"是"关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根"的充要条件.

证明　充分性：∵$ac<0$，∴$a\neq0$，∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 为一元二次方程，且 $\Delta=b^2-4ac\geqslant-4ac>0$，∴$ax^2+bx+c=0$ 有两个不相等的实数根，分别设为 x_1，x_2.

∵$ac<0$，∴$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$，∴$x_1$，$x_2$ 为一正一负，即 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根.

必要性：∵$ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根，∴$a\neq0$，

∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 为一元二次方程.

设两个根分别为 x_1，x_2，则 $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$，∴$ac<0$.

综上知，"$ac<0$"是"关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0$ 有一正根和一负根"的充要条件.