

1.5.1 全称量词与存在量词

基础达标

一、选择题

1. 下列命题:

- ①中国公民都有受教育的权利;
- ②每一个中学生都要接受爱国主义教育;
- ③有人既能写小说, 也能搞发明创造;
- ④任何正方形都是平行四边形.

其中全称量词命题的个数是()

- A.1
- B.2
- C.3
- D.4

解析 命题①②④都是全称量词命题.

答案 C

2. 下列命题中存在量词命题的个数是()

- ①有些自然数是偶数; ②正方形是菱形; ③能被 6 整除的数也能被 3 整除; ④对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 总有 $|x| \geq 0$.

- A.0
- B.1
- C.2
- D.3

解析 命题①含有存在量词; 命题②可以叙述为“所有的正方形都是菱形”, 是全称量词命题; 命题③可以叙述为“一切能被 6 整除的数也都能被 3 整除”, 是全称量词命题; 而命题④是全称量词命题. 故有一个存在量词命题.

答案 B

3. 已知命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 + 4x + a = 0$, 若命题 p 是假命题, 则实数 a 的取值范围是()

- A. $0 < a < 4$
- B. $a > 4$
- C. $a < 0$
- D. $a \geq 4$

解析 $\because p$ 是假命题, \therefore 方程 $x^2 + 4x + a = 0$ 没有实数根, 即 $\Delta = 16 - 4a < 0$, 即 $a > 4$.

答案 B

4. 下列四个命题:

①一切实数均有相反数; ② $\exists a \in \mathbf{N}$, 使得方程 $ax+1=0$ 无实数根; ③梯形的对角线相等; ④有些三角形不是等腰三角形.

其中, 真命题的个数为()

- A.1 B.2
C.3 D.4

解析 ①为真命题; 对于②, 当 $a=0$ 时, 方程 $ax+1=0$ 无实数根; 对于③, 等腰梯形的对角线相等, 故③错误; ④为真命题.

答案 C

5. 下列全称量词命题中真命题的个数为()

- ①对于任意实数 x , 都有 $x+2>x$;
②对任意的实数 a, b , 都有若 $|a|>|b|$, 则 $a^2>b^2$ 成立;
③二次函数 $y=x^2-ax-1$ 与 x 轴恒有交点;
④ $\forall x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2+|y|>0$.

- A.1 B.2
C.3 D.4

解析 ①②③为真命题.

答案 C

二、填空题

6. 给出下列三个命题:

- ① $\forall x \in \mathbf{R}, x^2+1 \neq 0$; ②矩形都不是梯形;
③ $\exists x, y \in \mathbf{R}, x^2+y^2 \leq 1$.

其中全称量词命题是_____ (填序号).

解析 ②省略了量词“所有的”.

答案 ①③

7. 命题“有些负数满足不等式 $(1+x)(1-9x)^2>0$ ”用“ \exists ”写成存在量词命题为_____.

解析 存在量词命题“存在 M 中的元素 x , 使 $p(x)$ 成立”可用符号简记为“ $\exists x \in$

$M, p(x)$ ”.

答案 $\exists x < 0, (1+x)(1-9x)^2 > 0$

8. 下列全称量词命题中真命题的个数为_____.

① $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$;

② $\forall x \in \mathbf{N}, x^4 \geq 1$;

③ 对任意 x, y , 都有 $x^2 + y^2 \neq 0$.

解析 ① 由于 $\forall x \in \mathbf{R}$, 都有 $x^2 \geq 0$, 因而有 $x^2 + 2 \geq 2 > 0$, 即 $x^2 + 2 > 0$, 所以命题 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$ ” 是真命题.

② 由于 $0 \in \mathbf{N}$, 当 $x = 0$ 时, $x^4 \geq 1$ 不成立, 所以命题 “ $\forall x \in \mathbf{N}, x^4 \geq 1$ ” 是假命题.

③ 当 $x = y = 0$ 时, $x^2 + y^2 = 0$, 所以是假命题.

答案 1

三、解答题

9. 试判断下列全称量词命题的真假:

(1) $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \geq 2$;

(2) 直角坐标系内任何一条直线都与 x 轴有交点;

(3) 每个二次函数都有最小值.

解 (1) 取 $x = 0$, 则 $x^2 + 1 = 1 < 2$, 所以 “ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \geq 2$ ” 是假命题.

(2) 与 x 轴平行的直线与 x 轴无交点, 所以该命题为假命题.

(3) 对于 $y = ax^2 + bx + c$, 当 $a < 0$ 时函数有最大值无最小值, 所以 “每个二次函数都有最小值” 是假命题.

10. 判断下列存在量词命题的真假:

(1) $\exists x \in \mathbf{Z}, x^3 < 1$;

(2) 存在一个四边形不是平行四边形;

(3) 存在一对整数 x, y , 使得 $2x + 4y = 6$.

解 (1) $\because -1 \in \mathbf{Z}$, 且 $(-1)^3 = -1 < 1$,

\therefore “ $\exists x \in \mathbf{Z}, x^3 < 1$ ” 是真命题.

(2)真命题，如梯形.

(3)取 $x=3$, $y=0$, 则 $2x+4y=6$, 故为真命题.

能力提升

11.下列说法正确的是()

A.对所有的正实数 t , 有 $\sqrt{t}<t$

B.存在实数 x , 使 $x^2-3x-4=0$

C.不存在实数 x , 使 $x<4$ 且 $x^2+5x-24=0$

D.任意实数 x , 使得 $|x+1|\leq 1$ 且 $x^2>4$

解析 $t=\frac{1}{4}$ 时, $\sqrt{t}>t$, 所以 A 选项错; 由 $x^2-3x-4=0$, 得 $x=-1$ 或 $x=4$, 因此

当 $x=-1$ 或 $x=4$ 时, $x^2-3x-4=0$, 故 B 选项正确; 由 $x^2+5x-24=0$, 得 $x=-8$ 或 $x=3$, 所以 C 选项错; $x=0$ 时, 不成立, 所以 D 选项错.

答案 B

12.若 $\forall x \in \mathbf{R}$, 函数 $y=mx^2+x-m-a$ 的图象和 x 轴恒有公共点, 求实数 a 的取值范围.

解 (1)当 $m=0$ 时, $y=x-a$ 与 x 轴恒有公共点,

所以 $a \in \mathbf{R}$.

(2)当 $m \neq 0$ 时, 二次函数 $y=mx^2+x-m-a$ 的图象和 x 轴恒有公共点的充要条件是 $\Delta = 1+4m(m+a) \geq 0$ 恒成立, 即 $4m^2+4am+1 \geq 0$ 恒成立.

设 $y_1 = 4m^2+4am+1$, 则可转化为关于 m 的二次函数的图象恒在 m 轴上方(或图象顶点在 m 轴上)的充要条件是 $\Delta_1 = (4a)^2 - 16 \leq 0$, 可得 $-1 \leq a \leq 1$.

综上所述, 当 $m=0$ 时, $a \in \mathbf{R}$;

当 $m \neq 0$ 时, $a \in \{a | -1 \leq a \leq 1\}$.