2010年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一选择题

(A) 函数$f(x)=\frac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$的无穷间断点的个数为

A0　B1　C2　D3

2.设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

A $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$　B $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$

C $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$　D $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$

(1) 曲线$y=x^2$与曲线$y=a\ln x(a\neq 0)$相切，则$a=$

A4e　B3e　C2e　De

4.设 m,n 为正整数,则反常积分 $\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

A 仅与 m 取值有关　B 仅与 n 取值有关

C 与 m,n 取值都有关　D 与 m,n 取值都无关

5.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\frac{y}{x},\frac{z}{x})=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$

A x　B z　C $-x$　D $-z$

6.(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

A $\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　B $\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

C $\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　D $\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

7.设向量组 $I:\alpha_1,\alpha_2,\ldots$，$\alpha_{r}$可由向量组II：$\beta_1$，$\beta_2,\ldots$，$\beta_s$线性表示，下列命题正确的是：

A 若向量组 I 线性无关，则 $r\leq s$　B 若向量组 I 线性相关，则 r>s

C 若向量组 II 线性无关，则 $r\leq s$　D 若向量组 II 线性相关，则 r>s

15.设 $\mathbf{A}$ 为 4 阶对称矩阵,且 $\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=0$, 若 $\mathbf{A}$ 的秩为 3,则 $\mathbf{A}$ 相似于 A $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$ B $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

C $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$ D $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

二填空题

9.3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解 y=__________

(1) 曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为______________

(2) 函数 $y=\ln(1-2x)$在$x=0$处的n阶导数$y^{(n)}(0)=$ ___________

(3) 当$0\le\theta\le\pi$时，对数螺线$r=e^{\theta}$的弧长为____________

(4) 已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速率增加，宽 w 以 3cm/s 的速率增加，则当 l=12cm,w=5cm 时，它的对角线增加的速率为___________

(5) 设 A，B 为 3 阶矩阵，且$|A|=3,|B|=2,|A^{-1}+B|=2,$则$|A+B^{-1}|=$ ___________

三解答题

(6) 求函数$f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$的单调区间与极值。

16.(1)比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt(n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由.

(2)记 $u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}u_n$.

九、设函数 y=f(x)由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi(t),\end{cases}(t>-1)$所确定，其中$\psi(t)$具有2阶导数，且$\psi(1)=\dfrac{5}{2}$, $\psi'(1)=6$，已知$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$,求函数$\psi(t)$。

十、一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 2a,短轴为 2b 的椭圆。现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\dfrac{3}{2}b$ 时，计算油的质量。

（长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为 $\rho kg/m^3$ ）

十一、

设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足等式$4\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+12\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$

确定a,b的值，使等式在变换$\xi=x+ay,\eta=x+by$下简化$\dfrac{\partial^2u}{\partial\xi\partial\eta}=0$

十二、计算二重积分$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos2\theta}drd\theta$,其中$D=\{(r,\theta)|0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4}\}$.

十三、设函数 f(x) 在闭区间 [0,1] 上连续，在开区间 (0,1) 内可导，且 f(0)=0,f(1)= $\frac{1}{3}$,证明：存在 $\xi \in (0,\frac{1}{2}),\eta \in (\frac{1}{2},1)$,使得$f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

十四、

设$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.已知线性方程组$Ax=b$存在2个不同的解。

(1) 求λ、a.

(2)求方程组$Ax=b$的通解。

23.设 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{pmatrix}$,

正交矩阵 Q 使得Q^TAQ为对角矩阵，若 Q 的第一列为$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a、Q.