2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题:1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合
题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1.设$\{x_k\}$是数列，下列命题中不正确的是（）

(A)若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a$.

(B)若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$

(C) 若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{3k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a$

(D)若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{3k} = \lim\limits_{k\to\infty} x_{3k+1} = a$，则 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$

2.设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，其二阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（）

（A）0 (B)1 (C)2 (D)3

3.设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2x, x^2+y^2\le 2y\right\}$，函数 $f(x,y)$ D 上连续， 则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ =（）

$$(A)\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

$$(B)\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$$

$$(C)2\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x}}^{x} f(x,y)dy$$

$$(D)2\int_0^1 dx \int_X^{\sqrt{2x-x}} f(x,y)dy$$

4.下列级数中发散的是（）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ (B)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$ (C)$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ (D)$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

5.设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$,若集合 $\Omega=(1,2)$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件为（）

$(A) a\notin\Omega, d\notin\Omega$ $(B) a\notin\Omega, d\in\Omega$ $(C) a\in\Omega, d\notin\Omega$ $(D) a\in\Omega, d\in\Omega$

6.设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $p=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$,则 (x_1,x_2,x_3) 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为（）

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ (B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ (C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ (D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

7.设 A,B 为任意两个随机事件，则（）

（A）$P(AB)\le P(A)P(B)$ (B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le\frac{P(A)+P(B)}{2}$ (D) $P(AB)\ge\frac{P(A)+P(B)}{2}$

8.设总体 X □ $B(m,\theta)$， $x_1,x_2\dots,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则

$E\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\right]=$（）

（A）$(m-1)n\theta(1-\theta)$　　(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$　　(D) $mn\theta(1-\theta)$

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

9 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ 。

10 设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2}xf(t)$，若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$

11 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $dz|_{(0,0)}=$

12 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$

13 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2，-2,1，$B=A^2-A+E$,其中 E 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|B|=$

14 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$,则 $P(XY-Y<0)=$

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=x+\alpha\ln(1+x)+bx\cdot\sin x, g(x)=kx^3$, 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值。

16、（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le2, y\ge x^2\right\}$

17、（本题满分 10 分）

为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量，p 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性（η＞0）

（i）证明定价模型为 $p=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$

（ii）若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-p$，试由（1）中的定价模型确定此商品的价格。

18、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式。

19、（本题满分 10 分）

（i）设函数 $u(x)$，$v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（ii）设函数 $u_1(x),u_2(x),K,u_*(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)Ku_*(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式。

20（本题满分 11 分）

（20）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$,且 $A^3=0$.

（i）求 a 的值；

（ii）若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$,其中 E 为 3 阶单位矩阵，求 X .

21（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$，相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

（i）求 a,b 的值（ii）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

22（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}\ln 2, x>0, \\ 0, x\le 0 \end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数。

（1） 求 Y 的概率分布；

（2） 求 EY 。

23（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x:\theta)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1 \\ 0,\text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数， $X_{1,}X_2,L,X_R$ 为来自该总体的简单随机样本。、

（1） 求 θ 的矩估计量；

（2） 求 θ 的最大似然估计量