# 2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题(1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．)

(1)【答案】(C).

【解析】因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin x\cos 2x-\cos x\sin 2x}{cx^k}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\left(3-\cos 2x-2\cos^2 x\right)}{cx^k}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\cos 2x-2\cos^2 x}{cx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-\left(2\cos^2 x-1\right)-2\cos^2 x}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4\cos^2 x}{cx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x}{cx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4}{cx^{k-3}}=1.$$

所以 $c=4,k=3$，故答案选(C).

(2)【答案】(B).

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f\left(x^3\right)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)-x^2 f(0)-2f\left(x^3\right)+2f(0)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-2\frac{f\left(x^3\right)-f(0)}{x^3}\right]$$

$$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0).$$

故答案选(B).

(3)【答案】(C).

【解析】$f(x)=\ln|x-1|+\ln|x-2|+\ln|x-3|$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

$$=\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

令 $f'(x)=0$，得 $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{3}}{3}$，故 $f(x)$ 有两个不同的驻点.

(4)【答案】(C).

【解析】微分方程对应的齐次方程的特征方程为$r^2-\lambda^2=0$，解得特征根$r_1=\lambda, r_2=-\lambda$.

所以非齐次方程$y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}$有特解$y_1=x\cdot a\cdot e^{\lambda x}$，

非齐次方程$y''-\lambda^2y=e^{-\lambda x}$有特解$y_2=x\cdot b\cdot e^{-\lambda x}$，

故由微分方程解的结构可知非齐次方程$y''-\lambda^2y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}$可设特解$y=x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

(5)【答案】(A).

【解析】由题意有$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(x)g(y)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f(x)g'(y)$

所以，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=f'(0)g(0)=0$，$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}=f(0)g'(0)=0$，即$(0,0)$点是可能的极值点.

又因为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(x)g(y)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'(x)g'(y)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=g''(y)f(x)$，

所以，$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(0,0)}=f''(0)\cdot g(0)$，$B=\dfrac{\alpha^2 z}{\partial x\partial y}|_{(0,0)}=f'(0)\cdot g'(0)=0$，

$C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(0,0)}=f(0)\cdot g''(0)$，

根据题意由$(0,0)$为极小值点，可得$AC-B^2=A\cdot C>0$, 且$A=f''(0)\cdot g(0)>0$，所以有

$C=f(0)\cdot g''(0)>0$. 由题意$f(0)>0, g(0)<0$，所以$f''(0)<0, g''(0)>0$，故选(A).

(6)【答案】(B).

【解析】因为$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时，$0<\sin x<\cos x<1<\cot x$，

又因$\ln x$是单调递增的函数，所以$\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$.

故正确答案为(B).

(7)【答案】(D).

【解析】由于将$A$的第2列加到第1列得矩阵$B$，故

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

即$AP_1=B$，$A=BP_1^{-1}$.

由于交换$B$的第2行和第3行得单位矩阵，故

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E,$$

即 $P_2B=E$, 故 $B=P_2^{-1}=P_2$．因此，$A=P_2P_1^{-1}$，故选(D)．

(8)【答案】(D)．

【解析】由于 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，所以 $A(1,0,1,0)^T=0$，且 $r(A)=4-1=3$，即 $\alpha_1+\alpha_3=0$，且 $|A|=0$．由此可得 $A^*A=|A|E=O$，即 $A^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=O$，这说明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $A^*x=0$ 的解.

由于 $r(A)=3$，$\alpha_1+\alpha_3=0$，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关．又由于 $r(A)=3$，所以 $r(A^*)=1$，因此 $A^*x=0$ 的基础解系中含有 $4-1=3$ 个线性无关的解向量．而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且为 $A^*x=0$ 的解，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可作为 $A^*x=0$ 的基础解系，故选(D)．

**二、填空题(9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．)**

(9)【答案】$\sqrt{2}$．

【解析】原式$=e^{\lim\limits_{x\to0}(\frac{1+2^x}{2}-1)\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x-1}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x\cdot\ln2}{2}}=e^{\frac{1}{2}\ln2}=\sqrt{2}$．

(10)【答案】$y=e^{-x}\sin x$．

【解析】由通解公式得

$$\begin{aligned}y&=e^{-\int dx}\left(\int e^{-x}\cos x\cdot e^{\int dx}dx+C\right)\\&=e^{-x}\left(\int\cos xdx+C\right)\\&=e^{-x}(\sin x+C).\end{aligned}$$

由于 $y(0)=0$, 故 $C=0$．所以 $y=e^{-x}\sin x$．

(11)【解析】选取 $x$ 为参数，则弧微元 $ds=\sqrt{1+(y')^2}dx=\sqrt{1+\tan^2x}dx=\sec xdx$

所以 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2})$．

(12)【答案】$\dfrac{1}{\lambda}$．

【解析】原式$=\int_0^{+\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}xde^{-\lambda x}$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}}+0-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda x}}-\frac{1}{\lambda}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{\lambda x}}-e^0\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

(13)【答案】$\frac{7}{12}$.

【解析】原式$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r\cos\theta\cdot r\sin\theta rdr=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta\cdot\sin\theta d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^3dr$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{4}\cdot16\sin^4\theta d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos\theta\cdot\sin^5\theta d\theta=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta d\sin\theta$$

$$=\frac{4}{6}\sin^6\theta\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{7}{12}.$$

(14)【答案】2.

【解析】方法 1： $f$ 的正惯性指数为所对应矩阵的特征值中正的个数.

二次型 $f$ 对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&-\lambda\\-1&\lambda-3&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&0&0\\-1&\lambda-3&-2\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}$$

$$=\lambda\begin{vmatrix}\lambda-3&-2\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda-4),$$

故 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$. 因此 $f$ 的正惯性指数为 2.

方法 2： $f$ 的正惯性指数为标准形中正的平方项个数.

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2-x_2^2-2x_2x_3-x_3^2+3x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+2x_2^2,$$

令 $\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3,\\y_2=x_2,\\y_3=x_3,\end{cases}$ 则 $f=y_1^2+2y_2^2$，故 $f$ 的正惯性指数为 2.

三、解答题(15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．)

(15)（本题满分 10 分）

【解析】如果 $a\le 0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{-a}\cdot\int_0^x\ln(1+t^2)dt=+\infty$，

显然与已知矛盾，故 $a>0$．

当 $a>0$ 时，又因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{a}\cdot x^{3-a}=0$．

所以 $3-a>0$ 即 $a<3$．

又因为 $0=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x\ln(1+t^2)dt}{x^a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{ax^{a-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{a(a-1)x^{a-2}}=\dfrac{2}{a(a-1)}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{3-a}}{1+x^2}$

所以 $3-a<2$，即 $a>1$，综合得 $1<a<3$．

(16)（本题满分 11 分）

【解析】因为 $y'(x)=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$，

$$y''(x)=\frac{d(\frac{t^2-1}{t^2+1})}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t(t^2+1)-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{1}{t^2+1}=\frac{4t}{(t^2+1)^3},$$

令 $y'(x)=0$ 得 $t=\pm1$，

当 $t=1$ 时，$x=\frac{5}{3}$，$y=-\frac{1}{3}$，此时 $y''>0$，所以 $y=-\frac{1}{3}$ 为极小值．

当 $t=-1$ 时，$x=-1$，$y=1$，此时 $y''<0$，所以 $y=1$ 为极大值．

令 $y''(x)=0$ 得 $t=0$，$x=y=\frac{1}{3}$．

当 $t<0$ 时，$x<\frac{1}{3}$，此时 $y''<0$；当 $t>0$ 时，$x>\frac{1}{3}$，此时 $y''>0$．

所以曲线的凸区间为 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$，凹区间为 $\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$，拐点为 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$．

(17)（本题满分 9 分）

【解析】$z=f\left[xy,yg(x)\right]$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left[xy,yg(x)\right]\cdot y+f_2'\left[xy,yg(x)\right]\cdot yg'(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'[xy,yg(x)]+y\left[f_{11}''(xy,yg(x))x+f_{12}''(xy,yg(x))g(x)\right]$$

$$+g'(x)\cdot f_2'[xy,yg(x)]+yg'(x)\left\{f_{12}''[xy,yg(x)]\cdot x+f_{22}''[xy,yg(x)]g(x)\right\}.$$

因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 可导，且为极值,所以 $g'(1)=0$，则

$$\frac{d^2 z}{dxdy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

(18)（本题满分 10 分）

【解析】由题意可知当 $x=0$ 时，$y=0$，$y'(0)=1$，由导数的几何意义得 $y'=\tan\alpha$，

即 $\alpha=\arctan y'$，由题意 $\frac{d}{dx}\left(\arctan y'\right)=\frac{dy}{dx}$，即 $\frac{y''}{1+y'^2}=y'$ .

令 $y'=p$，$y''=p'$，则 $\frac{p'}{1+p^2}=p$，$\int\frac{dp}{p^3+p}=\int dx$，即

$$\int\frac{dp}{p}-\int\frac{p}{p^2+1}dp=\int dx,\quad \ln|p|-\frac{1}{2}\ln(p^2+1)=x+c_1,\text{ 即 } p^2=\frac{1}{ce^{-2x}-1}.$$

当 $x=0$，$p=1$，代入得 $c=2$，所以 $y'=\frac{1}{\sqrt{2e^{-2x}-1}}$，

则 $y(x)-y(0)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{2e^{-2t}-1}}=\int_0^x\frac{e^t dt}{\sqrt{2-e^{2t}}}$

$$=\int_0^x\frac{d\left(\frac{e^t}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1-(\frac{e^t}{\sqrt{2}})^2}}=\arcsin\frac{e^t}{\sqrt{2}}\Big|_0^x=\arcsin\frac{e^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}.$$

又因为 $y(0)=0$，所以 $y(x)=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}e^x-\frac{\pi}{4}$ .

(19)（本题满分 10 分）

【解析】(Ⅰ)设 $f(x)=\ln(1+x),x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$

显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 上满足拉格朗日的条件，

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n},\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$$

所以$\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$时，

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+0}\cdot\frac{1}{n}\text{，即：}\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n},$$

亦即：$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

结论得证.

（II）设$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

先证数列$\{a_n\}$单调递减.

$$a_{n+1}-a_n=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

利用（I）的结论可以得到$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})$，所以$\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$得到$a_{n+1}<a_n$，即数列$\{a_n\}$单调递减.

再证数列$\{a_n\}$有下界.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1),$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n>\ln(n+1)-\ln n>0.$$

得到数列$\{a_n\}$有下界．利用单调递减数列且有下界得到$\{a_n\}$收敛.

(20)（本题满分 11 分）

【解析】(I)容器的容积即旋转体体积分为两部分

$$V=V_1+V_2=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2y-y^2\right)dy+\pi\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(1-y^2\right)dy$$

$$=\pi\left(y^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}+\pi\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{\frac{1}{2}}=\pi\left(5+\frac{1}{4}-3\right)=\frac{9}{4}\pi .$$

（II）所做的功为

$$dw=\pi\rho g(2-y)(1-y^2)dy+\pi\rho g(2-y)(2y-y^2)dy$$

$$w=\pi\rho g\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2-y)(1-y^2)dy+\pi\rho g\int_{\frac{1}{2}}^{2}(2-y)(2y-y^2)dy$$

$$=\pi\rho g\left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(y^3-2y^2-y+2)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{2}+y^3-4y^2+4y)dy\right)$$

$$=\pi\rho g\left(\frac{y^4}{4}\Bigg|_{-1}^{\frac{1}{2}}-\frac{2y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{\frac{1}{2}}-\frac{y^2}{2}\Bigg|_{-1}^{\frac{1}{2}}+2y\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+\frac{y^2}{4}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}-\frac{4y^3}{3}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{2}+2y^2\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}\right)$$

$$=\frac{27\times10^3}{8}\pi g=3375g\pi .$$

（21）（本题满分 11 分）

【解析】因为 $f(x,1)=0$， $f(1,y)=0$，所以 $f_x'(x,1)=0$ .

$$I=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf_{xy}''(x,y)dy=\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf_x'(x,y)$$

$$=\int_0^1 xdx\left[yf_x'(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f_x'(x,y)dy\right]=\int_0^1 xdx\left(f_x'(x,1)-\int_0^1 f_x'(x,y)dy\right)$$

$$=-\int_0^1 xdx\int_0^1 f_x'(x,y)dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf_x'(x,y)dx=-\int_0^1 dy\left[xf(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dx\right]$$

$$=-\int_0^1 dy\left[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right]=\iint_D f(x,y)dxdy=a .$$

（22）（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 线性表示，对 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 进行初等行变换：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right).$$

当$a=5$时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\neq r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1)=3$，此时，$\alpha_1$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示.

(II)对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故$\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$.

(23)（本题满分 11 分）

【解析】(I)由于$A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，设$\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，则

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)$，即$A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$，而$\alpha_1\neq 0,\alpha_2\neq 0$，知$A$的特征值为$\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，对应的特征向量分别为$k_1\alpha_1(k_1\neq 0)$，$k_2\alpha_2(k_2\neq 0)$.

由于$r(A)=2$，故$|A|=0$，所以$\lambda_3=0$.

由于$A$是三阶实对称矩阵，故不同特征值对应的特征向量相互正交，设$\lambda_3=0$对应的特征向量为$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\ \alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_1+x_3=0.\end{cases}$$

解此方程组，得$\alpha_3=(0,1,0)^T$，故$\lambda_3=0$对应的特征向量为$k_3\alpha_3(k_3\neq 0)$.

(II) 由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=(0,1,0)^T.$$

令$Q=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)$，则$Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，

$$A=Q\Lambda Q^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$