2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三. 试题详解

2010 年考研真题数三试卷详解

一 选择题

（1） $\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}-(\frac{1}{x}-a)e^x]=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}(1-e^x)+ae^x]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^x}{x}+a\lim\limits_{x\to 0}e^x=-1+a=1$，

因此 $a=2$，选 C

（2） 根据已知有 $\lambda y_1''+y_1p(x)=q(x)$， $\lambda y_2''+y_2p(x)=q(x)$。于是将

$\lambda y_1+\mu y_2$ 和 $\lambda y_1-\mu y_2$ 分别代入方程左边得

$(\lambda y_1+\mu y_2)''+p(x)(\lambda y_1+\mu y_2)=(\lambda+\mu)q(x)$

$(\lambda y_1-\mu y_2)''+p(x)(\lambda y_1-\mu y_2)=(\lambda-\mu)q(x)$

$\lambda y_1+\mu y_2$ 为方程解 $\Rightarrow\lambda+\mu=1$，$\lambda y_1-\mu y_2$ 为其次方程解 $\Rightarrow\lambda-\mu=0$，解得

$\lambda=\mu=\frac{1}{2}$。选 A

（3） 根据已知得 $g'(x_0)=0$， $g''(x_0)<0$。因此

$[f(g(x))]'\big|_{x=x_0}=f'(g(x_0))g'(x_0)=0$，故要想 x_0 为 $f(g(x))$ 的极大值点，

只需 $[f(g(x))]''\big|_{x=x_0}<0$ 即可。即

$[f(g(x))]''\big|_{x=x_0}=f''(g(x_0))[g'(x_0)]^2+f'(g(x_0))g''(x_0)=f'(a)g''(x_0)<0$。因此只

需 $f'(a)>0$。选 B

（4） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{h(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g'(x)}{h'(x)}=\dfrac{1}{\dfrac{e^{x/10}}{10}}=0$，

$r>s\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[10]{f(x)}}{\sqrt[10]{g(x)}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt[10]{f(x)})'}{(\sqrt[10]{g(x)})'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\ln x)'}{\sqrt[10]{x}'}=\lim\limits_{x\to\infty}10\dfrac{1}{\sqrt[10]{x}}=0$。

因此 $f(x)<g(x)<h(x)$，选 C

（5）选 A，如果 $r>s$ 则向量组 I 一定线性相关。选项 B、D 反例：向量组 1 为 $(1,0)$、$(2,0)$，向量组 II 也为 $(1,0)$、$(2,0)$。选项 C 反例向量组 1 为 $(1,0)$、$(2,0)$，向量组 II 为 $(1,0)$

（6）根据已知，方阵 A 的特征值应满足 $\lambda^2+\lambda=0$，即 $\lambda=0$ 或 -1。又 $r(A)=3$。因此 A 的特征值为 0（一重）和 -1（三重）。故 A 相似于 $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$，选 D

（7） $P(X=1)=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-e^{-1}$，选 C

（8）根据密度函数的性质，

$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)dx+\int_{0}^{+\infty}bf_2(x)dx=\frac{a}{2}+\frac{3b}{4}$，因此$2a+3b=4$，选A

二 填空题

（9） $\int_0^{x+y}e^{-t^2}dt=\int_0^x x\sin t^2dt$ 两边对x求导得

$e^{-(x+y)^2}(1+y')=\int_0^x\sin t^2dt+x\sin x^2$。

代入$x=0$得$e^{-y^2}(1+y'|_{x=0})=0\Rightarrow 1+y'|_{x=0}\Rightarrow y'|_{x=0}=-1$

（10） 体积$V=\int_e^{+\infty}\pi y^2dx=\int_e^{+\infty}\frac{\pi}{x(1+\ln^2x)}dx$（做变量替换$x=e^t$）

$=\int_1^{+\infty}\frac{\pi}{e^t(1+t^2)}e^tdt=\int_1^{+\infty}\frac{\pi}{e^t(1+t^2)}e^tdt=\pi\arctan t\Big|_1^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}$

（11） 设某商品的收益函数为$R(P)$，收益弹性为$1+P^3$，其中为P价格，且$R(1)=1$，则$R(P)=$_______

由已知条件有$\frac{\partial R}{\partial P}\cdot\frac{P}{R}=1+P^3$，即$\frac{R'(P)}{R}=\frac{1+P^3}{P}=\frac{1}{P}+P^2$（分离变量）

两边同时积分有$\ln R=\ln P+\frac{P^3}{3}+C_1$，即$\ln\frac{R}{P}=\frac{P^3}{3}+C_1$

所以有 $\frac{R}{P}=Ce^{\frac{p^3}{3}}, R=CPe^{\frac{p^3}{3}}$ ，再由条件 $R(1)=1$，代入，得 $C=e^{-\frac{1}{3}}$

所以 $R(P)=Pe^{\frac{P^3-1}{3}}$

（12） 根据条件得 $y|_{x=-1}=0$， $y''|_{x=-1}=0$。其中 $y''=6x+2a$。于是得到方程 $\begin{cases}-1+a-b+1=0\\-6+2a=0\end{cases}$，解得 $a=b=3$

（13） 注意到 $A+B^{-1}=A(A^{-1}+B)B^{-1}$，因此

$$|A+B^{-1}|=|A||A^{-1}+B||B^{-1}|=3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=3$$

（14） $EX_i^2=DX_i+(EX_i)^2=\sigma^2+\mu^2$，因此

$$ET=E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\frac{1}{n}n(\sigma^2+\mu^2)=\sigma^2+\mu^2$$

三、解答题

15 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{L'P}{=\!=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$$

$$\therefore\lim_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}=(-1)^0=1$$

16 计算二重积分 $\iint\limits_D(x+y)^3dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{y^2+1}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成。

画图有该区域 D 关于 x 轴对称，令区域 D 在第一象限的区域为 D_1

$$\iint_D (x+y)^3 dxdy = \iint_D (x^3+3x^2y+3xy^2+y^3)dxdy$$

$$= \iint_D (x^3+3xy^2)dxdy = 2\iint_{D_1} (x^3+3xy^2)dxdy$$

$$= 2\int_0^1 \int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{y^2+1}} (x^3+3xy^2)dxdy$$

则有 $= 2\int_0^1 (\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2y^2)\Big|_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{y^2+1}} dy$

$$= 2\int_0^1 (-\frac{9y^4}{4}+2y^2+\frac{1}{4})dy$$

$$= 2(-\frac{9y^5}{20}+\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{4}y)\Big|_0^1$$

$$= \frac{14}{15}$$

17

令 $u = f(x,y,z) = xy+2yz$， $\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-10$

构造辅助函数 $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2-10)$，

求解下列方程组： $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=\varphi(x,y,z)=0$$

解得$\lambda=\frac{\sqrt{5}}{2}$时点$(-1,\sqrt{5},-2)$和点$(1,-\sqrt{5},2)$

$\lambda=-\frac{\sqrt{5}}{2}$时点$(1,\sqrt{5},2)$和点$(-1,-\sqrt{5},-2)$

将得到的 4 个点代入$u=f(x,y,z)=xy+2yz$中可得：

$u=f(-1,\sqrt{5},-2)=-5\sqrt{5}$， $u=f(1,-\sqrt{5},2)=-5\sqrt{5}$

$u=f(1,\sqrt{5},2)=5\sqrt{5}$ ， $u=f(-1,-\sqrt{5},-2)=5\sqrt{5}$

可知函数在条件$x^2+y^2+z^2=0$下的最大值为$5\sqrt{5}$，最小值为$-5\sqrt{5}$

18

（1）.由题意可知积分区域相同，比较两式的大小只需要比较被积函数在区域内的大小即可

即比较$|\ln t|[\ln(1+t)]^n$和$t^n|\ln t|$的大小

在$(0,1)$区间上$\ln t<0$所以上边两式变为

$f_1=(-\ln t)[\ln(1+t)]^n$， $f_2=(-\ln t)t^n$

令 $f=\dfrac{(-\ln t)\left[\ln(1+t)\right]^n}{(-\ln t)t^n}=\dfrac{\left[\ln(1+t)\right]^n}{t^n}=(\dfrac{\ln(1+t)}{t})^n$

当 $n\ge 1$ 时，上式 $f>-1$，所以积分面积 $\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt<\int_0^1 t^n|\ln t|dt$

（2）因为 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt=-\int_0^1 t^n\ln tdt=-\dfrac{1}{n+1}\int_0^1\ln tdt^{n+1}$

$$=-\frac{1}{n+1}t^{n+1}\ln t\Big|_0^1+\frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}d\ln t$$

又因为 $\lim\limits_{t\to 0}t^{n+1}\ln t=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln t}{t^{-(n+1)}}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n|\ln t|dt=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1[\ln(1+t)]^n|\ln t|dt\ge\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 0dt=0$

由夹逼定理可知 $0=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n|\ln t|dt\ge\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1[\ln(1+t)]^n|\ln t|dt\ge\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 0dt=0$

所以所求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1[\ln(1+t)]^n|\ln t|dt=0$

19：解

1、利用中值定理

2、利用两次罗尔定理可得

20、

解：

写出增广矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

初等行变换

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda^2 & a-\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 1+a-\lambda \end{pmatrix}$$

由题意解得

$\lambda=-1$

$a=-2$

将 λ, a 代入得通解为：

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}+k & -\frac{1}{2} & k \end{pmatrix}^T$$

21、

解：

由题意：

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 4 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -1 & 3-\lambda & a & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 4 & a & -\lambda & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = 0$$

则

$\lambda = 2$

$a = -1$

将 $a = -1$ 代入，又由 $|\lambda E - A| = 0$ 得特征值：

$\lambda_1 = -4$

$\lambda_2 = 2$

$\lambda_3 = 5$

由 $\lambda_1 = -4$ 求特征向量为

$x_2 = k(-1 \quad 0 \quad 1)$

由 $\lambda_1 = 5$ 求特征向量为

$x_3 = k(1 \quad -1 \quad 1)$

所以 Q 矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

22. f(x,y)=A exp^{-2x^2+2xy-y^2}

条件概率密度公式 $f(y|x)=\frac{f(x,y)}{f\_x(x)}$

$f\_x(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} A\ exp\verb|^|\{-2x\verb|^|2+2xy-y\verb|^|2\}dy = A\sqrt{\pi}\ e\verb|^|\{-x\verb|^|2\}$

上式利用了公式 $\int_{-\infty}^{\infty} exp\verb|^|\{-y\verb|^|2\}dy=\sqrt{\pi}$。

$$f(y\mid x)=\frac{A\ exp\verb|^|\{-2x\verb|^|2+2xy-y\verb|^|2\}}{A\sqrt{\pi}\ e\verb|^|\{-x\verb|^|2\}}=\frac{exp\verb|^|\{-(x-y)\verb|^|2\}}{\sqrt{\pi}}$$

23：解：

1、

随机变量（X,Y）的概率分布：

Y \ X	0	1
0	$\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}$	$\frac{C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}$

1	$\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}$	$\frac{C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15}$
2	$\frac{1}{C_6^2}=\frac{1}{15}$	0

2、

$$E(X)=1\times\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$
$$E(Y)=1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3}$$
$$E(XY)=\frac{2}{15}\times 1=\frac{2}{15}$$
$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$
$$=\frac{2}{15}-\frac{2}{9}=-\frac{2}{45}$$