

2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 曲线 $y = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是()

- (A) $(1,0)$. (B) $(2,0)$. (C) $(3,0)$. (D) $(4,0)$.

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n=1,2,\dots$) 无界, 则幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为()

- (A) $(-1,1]$. (B) $[-1,1)$. (C) $[0,2)$. (D) $(0,2]$.

(3) 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x) > 0$, $f'(0) = 0$, 则函数 $z = f(x) \ln f(y)$

在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是()

- (A) $f(0) > 1$, $f''(0) > 0$. (B) $f(0) > 1$, $f''(0) < 0$.

- (C) $f(0) < 1$, $f''(0) > 0$. (D) $f(0) < 1$, $f''(0) < 0$.

(4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sin x dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cot x dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$, 则 I, J, K 的大

小关系是()

- (A) $I < J < K$. (B) $I < K < J$.

- (C) $J < I < K$. (D) $K < J < I$.

(5) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B , 再交换 B 的第 2 行与第 3

行得单位矩阵, 记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $A =$ ()

- (A) $P_1 P_2$. (B) $P_1^{-1} P_2$. (C) $P_2 P_1$. (D) $P_2 P_1^{-1}$.

(6) 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组

$Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为()

- (A) α_1, α_3 . (B) α_1, α_2 . (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

(7) 设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是()

(A) $f_1(x)f_2(x)$.

(B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$.

(D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在, 记 $U = \max\{X, Y\}$, $V = \min\{X, Y\}$ 则 $E(UV) =$ ()

(A) $E(U) \cdot E(V)$.

(B) $E(X) \cdot E(Y)$.

(C) $E(U) \cdot E(Y)$.

(D) $E(X) \cdot E(V)$.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____.

(10) 微分方程 $y' + y = e^{-x} \cos x$ 满足条件 $y(0) = 0$ 的解为 $y =$ _____.

(11) 设函数 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{\substack{x=0 \\ y=2}} =$ _____.

(12) 设 L 是柱面方程 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz dx + x dy + \frac{y^2}{2} dz =$ _____.

(13) 若二次曲面的方程 $x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axy + 2xz + 2yz = 4$, 经过正交变换化为 $y_1^2 + 4z_1^2 = 4$, 则 $a =$ _____.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$.

(16)(本题满分 9 分)

设函数 $z = f(xy, yg(x))$ ，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$

处取得极值 $g(1)=1$ ，求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$ 。

(17)(本题满分 10 分)

求方程 $k \arctan x - x = 0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数。

(18)(本题满分 10 分)

(I)证明：对任意的正整数 n ，都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立。

(II)设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n (n=1, 2, \cdots)$ ，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1, y) = 0$ ， $f(x, 1) = 0$ ，

$\iint_D f(x, y) dx dy = a$ ，其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ，

计算二重积分 $I = \iint_D xy f_{xy}''(x, y) dx dy$ 。

(20)(本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$ ， $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$ ， $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ ，不能由向量组 $\beta_1 = (1, 1, 1)^T$ ，

$\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (3, 4, a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

(21)(本题满分 11 分)

A 为三阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 即 $r(A) = 2$, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A .

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$.

(I) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) 求 $Z = XY$ 的概率分布;

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

(23)(本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ_0 已知, $\sigma^2 > 0$ 未

知. \bar{X} 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.