2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \to 0^+$ 时,若 $\ln^\alpha(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是(　　)

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(\frac{1}{2},1)$　　(D) $(0,\frac{1}{2})$

(2) 下列曲线中有渐近线的是　　(　　)

(A) $y = x + \sin x$　　(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin\frac{1}{x}$　　(D) $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数,$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上　　(　　)

(A) 当 $f'(x) \ge 0$ 时,$f(x) \ge g(x)$　　(B) 当 $f'(x) \ge 0$ 时,$f(x) \le g(x)$

(C) 当 $f''(x) \ge 0$ 时,$f(x) \ge g(x)$　　(D) 当 $f''(x) \ge 0$ 时,$f(x) \le g(x)$

(4) 曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7 \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t = 1$ 的点处的曲率半径是　　(　　)

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$　　(C) $10\sqrt{10}$　　(D) $5\sqrt{10}$

(5) 设函数 $f(x) = \arctan x$,若 $f(x) = xf'(\xi)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2} =$　　(　　)

(A) 1　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \ne 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,则　　(　　)

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得

(7) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ (　　)

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

(8) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的 (　　)

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题：9□14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

((9) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$__________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1),\quad x\in[0,2]$，则 $f(7)=$ __________.

(11) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$__________.

(12) 曲线 $r=r(\theta)$ 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是__________.

(13) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho\left(x\right)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\overline{x}=$__________.

(14) 设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2}+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围为_______.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4,x\ge 0,y\ge 0\right\}$, 计算 $\iint\limits_D\dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数， $z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$ ，若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 的区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加， $0\le g(x)\le 1$. 证明：

(I) $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,x\in[a,b]$,

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt}f(x)\,\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\mathrm{g}(x)dx$.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(\mathrm{x})=\dfrac{x}{1+x},x\in[0,1]$，定义函数列 $f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots$, $f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$，记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围成平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵.

(I)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵.

(23)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x\to 0^{+}$ 时，若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是(　　)

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(\frac{1}{2},1)$　　(D) $(0,\frac{1}{2})$

【答案】B

【解析】由定义 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^{\alpha}(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2x)^{\alpha}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2^{\alpha}x^{\alpha-1}=0$

所以 $\alpha-1>0$，故 $\alpha>1$.

当 $x\to 0^+$ 时，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}} \sim \dfrac{x^{\frac{2}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ 是比 x 的高阶无穷小，所以 $\dfrac{2}{\alpha}-1>0$，即 $\alpha<2$.

故选 B

(2) 下列曲线中有渐近线的是 ( )

(A) $y=x+\sin x$ (B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ (D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

【答案】C

【解析】关于 C 选项：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x}=1+0=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}[x+\sin\dfrac{1}{x}-x]=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$，所以 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$ 存在斜渐近线 $y=x$.

故选 C

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上 ( )

(A) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (B) 当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(C) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$ (D) 当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【答案】D

【解析】令 $F(x)=g(x)-f(x)=f(0)(1-x)+f(1)x-f(x)$，则

$$F(0)=F(1)=0,$$

$$F'(x)=-f(0)+f(1)-f'(x),F''(x)=-f''(x).$$

若 $f''(x)\ge 0$，则 $F''(x)\le 0$，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为凸的.

又 $F(0)=F(1)=0$，所以当 $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\ge 0$，从而 $g(x)\ge f(x)$.

故选 D.

(4) 曲线 $\begin{cases}x=t^2+7\\ y=t^2+4t+1\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\dfrac{\sqrt{10}}{100}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

【答案】C

【解析】

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{2t+4}{2t}\right|_{t=1}=3$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\left.\frac{dy'}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{-\frac{2}{t^2}}{2t}\right|_{t=1}=-1$$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(1+q)^{\frac{3}{2}}},\therefore R=\frac{1}{k}=10\sqrt{10}$$

故选 C

(5) 设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$ (　　)

(A) 1　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

【答案】D

【解析】因为 $\frac{f(x)}{x}=f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi^2}$，所以 $\xi^2=\frac{x-f(x)}{f(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-f(x)}{x^2 f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

故选 D.

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则 (　　)

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得

【答案】A

【解析】记 $A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},B\neq 0,A,C$相反数

则 $\Delta=\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2<0$，所以 $u(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 在 D 内无极值，则极值在边界处取得.

故选 A

(7) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$ (　　)

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$　　(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

【答案】B

【解析】由行列式的展开定理展开第一列

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}-c\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$

$$=-(ad-bc)^2.$$

(8) 设 a_1,a_2,a_3 均为三维向量，则对任意常数 k,l，向量组 a_1+ka_3，a_2+la_3 线性无关是向量组 a_1,a_2,a_3 线性无关的 (　　)

(A)必要非充分条件　　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分也非必要条件

【答案】A

【解析】$\left(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3\right)=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$.

$\Leftarrow$) 记 $A=\left(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3\right)$，$B=\left(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3\right)$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无

关，则$r(A)=r(BC)=r(C)=2$，故$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关.

$\Rightarrow$) 举反例. 令$\alpha_3=0$，则α_1,α_2线性无关，但此时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$却线性相关.

综上所述，对任意常数k,l，向量$\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关的必要非充分条件.

故选 A

二、填空题：9□ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$__________.

【答案】$\frac{3}{8}\pi$

【解析】

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{(x+1)^2+4}dx=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}\Big|_{-\infty}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{3}{8}\pi$$

(10) 设$f(x)$是周期为4的可导奇函数,且$f'(x)=2(x-1),\quad x\in[0,2]$,则$f(7)=$ __________.

【答案】1

【解析】$f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$且为偶函数

则$f'(x)=2(-x-1)$，$x\in[-2,0]$

又$f(x)=-x^2-2x+c$且为奇函数，故$c=0$

$\therefore f(x)=-x^2-2x,\ x\in[-2,0]$

又$\because f(x)$的周期为 4，$\therefore f(7)=f(-1)=1$

(11) 设$z=z(x,y)$是由方程$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$确定的函数，则$dz\Big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$__________.

【答案】$-\frac{1}{2}(dx+dy)$

【解析】对$e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$方程两边同时对$x,y$求偏导

$$\begin{cases} e^{2yz}\cdot 2y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ e^{2yz}(2z+2y\dfrac{\partial z}{\partial y})+2y+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$$

当 $x=\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{2}$ 时, $z=0$

故 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2},\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2}$

故 $\left.dz\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=-\dfrac{1}{2}dx+(-\dfrac{1}{2})dy=-\dfrac{1}{2}(dx+dy)$

(12) 曲线 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$ 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是__________.

【答案】 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$

【解析】由直角坐标和极坐标的关系 $\begin{cases} x=r\cos\theta=\theta\cos\theta \\ y=r\sin\theta=\theta\sin\theta \end{cases}$,

于是 $(r,\theta)=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, 对应于 $(x,y)=\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

切线斜率 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{\theta\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$ $\quad\therefore \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}=-\dfrac{2}{\pi}$

所以切线方程为 $y-\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{2}{\pi}(x-0)$

即 $y=-\dfrac{2}{\pi}x+\dfrac{\pi}{2}$

(13) 一根长为1的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上, 若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$, 则该细棒的质心坐标 $\overline{x}=$__________.

【答案】 $\dfrac{11}{20}$

【解析】质心横坐标 $\bar{x}=\dfrac{\int_0^1 x\rho(x)dx}{\int_0^1 \rho(x)dx}$

$$\int_0^1 \rho(x)dx=\int_0^1(-x^2+2x+1)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_0^1=\frac{5}{3}$$

$$\int_0^1 x\rho(x)dx=\int_0^1 x(-x^2+2x+1)dx=\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{11}{12}$$

$$\therefore \bar{x}=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{3}}=\frac{11}{20}$$

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围________.

【答案】$[-2,2]$

【解析】配方法：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_3)^2-a^2x_3^2-(x_2-2x_3)^2+4x_3^2$

由于二次型负惯性指数为 1，所以 $4-a^2\geq 0$，故 $-2\leq a\leq 2$.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

【解析】
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x^2(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)-x]$$

$$\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}^t-1}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2t}=\frac{1}{2}.$$

(16)(本题满分 10 分)

已知函数 $y=y\left(x\right)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y\left(2\right)=0$，求 $y\left(x\right)$ 的极大值与极小值.

【解析】 由 $x^2+y^2y'=1-y'$，得

$(y^2+1)y'=1-x^2$ ……………………………………………………①

此时上面方程为变量可分离方程，解的通解为

$$\frac{1}{3}y^3+y=x-\frac{1}{3}x^3+c$$

由 $y(2)=0$ 得 $c=\dfrac{2}{3}$

又由①可得 $y'(x)=\dfrac{1-x^2}{y^2+1}$

当 $y'(x)=0$ 时，$x=\pm1$，且有：

$x<-1, y'(x)<0$

$-1<x<1, y'(x)>0$

$x>1, y'(x)<0$

所以 $y(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值，在 $x=1$ 处取得极大值

$y(-1)=0, y(1)=1$

即：$y(x)$ 的极大值为 1，极小值为 0.

(17)（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|1\le x^2+y^2\le4, x\ge0, y\ge0\right\}$，计算 $\displaystyle\iint\limits_D\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

【解析】D 关于 $y=x$ 对称，满足轮换对称性，则：

$$\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint\limits_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$$

$$\therefore I=\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}+\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_1^2 \sin\pi r\cdot rdr$$

$$=\frac{\pi}{4}(-\frac{1}{\pi})\int_1^2 rd\cos\pi r$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\cos\pi r\cdot r\big|_1^2-\int_1^2\cos\pi rdr\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\left[2+1-\frac{1}{\pi}\sin\pi r\big|_1^2\right]$$

$$=-\frac{3}{4}$$

(18)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}$，若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

【解析】由 $z=f\left(e^x\cos y\right),\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)\cdot e^x\cos y,\frac{\partial z}{\partial y}=f'(e^x\cos y)\cdot\left(-e^x\sin y\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(e^x\cos y)\cdot e^x\cos y\cdot e^x\cos y+f'(e^x\cos y)\cdot e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(e^x\cos y)\cdot\left(-e^x\sin y\right)\cdot\left(-e^x\sin y\right)+f'(e^x\cos y)\cdot\left(-e^x\cos y\right)$$

由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4z+e^x\cos y\right)e^{2x}$，代入得，

$$f''\left(e^x\cos y\right)\cdot e^{2x}=[4f\left(e^x\cos y\right)+e^x\cos y]e^{2x}$$

即

$$f''\left(e^x\cos y\right)-4f\left(e^x\cos y\right)=e^x\cos y,$$

令 $e^x\cos y=t$, 得 $f''\left(t\right)-4f\left(t\right)=t$

特征方程 $\lambda^2-4=0,\lambda=\pm 2$　　得齐次方程通解 $\overline{y}=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$

设特解 $y^*=at+b$，代入方程得 $a=-\dfrac{1}{4},b=0$，特解 $y^*=-\dfrac{1}{4}t$

则原方程通解为 $y=f(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}-\dfrac{1}{4}t$

由 $f(0)=0,f'(0)=0$，得 $c_1=\dfrac{1}{16},c_2=-\dfrac{1}{16}$，则

$$y=f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u.$$

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：(I) $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,x\in[a,b]$，

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

【解析】(I) 由积分中值定理 $\int_a^x g(t)dt=g(\xi)(x-a),\xi\in[a,x]$

$\because 0\le g(x)\le 1$，$\therefore 0\le g(\xi)(x-a)\le(x-a)$

$\therefore 0\le\int_a^x g(t)dt\le(x-a)$

(II) 直接由 $0\le g(x)\le 1$，得到

$0\le\int_a^x g(t)dt\le\int_a^x 1dt=(x-a)$

(II) 令 $F(u)=\int_a^u f(x)g(x)dx-\int_a^{a+\int_a^u g(t)dt} f(x)dx$

$F'(u)=f(u)g(u)-f\left(a+\int_a^u g(t)dt\right)\cdot g(u)$

$=g(u)\left[f(u)-f\left(a+\int_a^u g(t)dt\right)\right]$

由 (I) 知 $0\le\int_a^u g(t)dt\le(u-a)$　　$\therefore a\le a+\int_a^u g(t)dt\le u$

又由于 $f(x)$ 单增，所以 $f(u)-f\left(a+\int_a^u g(t)dt\right)\ge 0$

$\therefore F'(u)\ge 0,\therefore F(u)$ 单调不减，$\therefore F(u)\ge F(a)=0$

取 $u=b$，得 $F(b)\ge 0$，即 (II) 成立.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(\mathrm{x})=\dfrac{x}{1+x},x\in[0,1]$，定义函数列

$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$，记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围成平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

【解析】 $f_1(x)=\dfrac{x}{1+x},f_2(x)=\dfrac{x}{1+2x},f_3(x)=\dfrac{x}{1+3x},\cdots,f_n(x)=\dfrac{x}{1+nx},$

$$\therefore S_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1\frac{x}{1+nx}dx=\int_0^1\frac{x+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}}{1+nx}dx$$
$$=\frac{1}{n}\int_0^1 1dx-\frac{1}{n}\int_0^1\frac{1}{1+nx}dx=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+nx)\Big|_0^1$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\ln(1+n)$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}nS_n=1-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}=1-0=1$$

(21)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y,$ 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

【解析】因为 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$,所以 $f(x,y)=y^2+2y+\varphi(x),$ 其中 $\varphi(x)$ 为待定函数.

又因为 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y,$ 则 $\varphi(y)=1-(2-y)\ln y$，从而

$f(x,y)=y^2+2y+1-(2-x)\ln x=(y+1)^2-(2-x)\ln x$.

令 $f(x,y)=0,$ 可得 $(y+1)^2=(2-x)\ln x$，当 $y=-1$ 时，$x=1$ 或 $x=2$，从而所求的体积为

$$V=\pi\int_1^2(y+1)^2dx=\pi\int_1^2(2-x)\ln xdx$$
$$=\pi\int_1^2\ln xd\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$=\pi\left[\ln x(2x-\frac{x^2}{2})\right]_1^2-\pi\int_1^2\left(2-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\pi 2\ln 2-\pi(2x-\frac{x^2}{4})\Big|_1^2=\pi 2\ln 2-\pi\cdot\frac{5}{4}=\pi\left(2\ln 2-\frac{5}{4}\right).$$

(22)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵.

(I)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

【解析】

$$\left(A\,|\,E\right)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix},$$

(I) $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi=\left(-1,2,3,1\right)^T$

(II) $e_1=\left(1,0,0\right)^T,e_2=\left(0,1,0\right)^T,e_3=\left(0,0,1\right)^T$

$Ax=e_1$ 的通解为 $x=k_1\xi+\left(2,-1,-1,0\right)^T=\left(2-k_1,-1+2k_1,-1+3k_1,k_1\right)^T$

$Ax=e_2$ 的通解为 $x=k_2\xi+\left(6,-3,-4,0\right)^T=\left(6-k_2,-3+2k_2,-4+3k_2,k_2\right)^T$

$Ax=e_3$ 的通解为 $x=k_3\xi+\left(-1,1,1,0\right)^T=\left(-1-k_3,1+2k_3,1+3k_3,k_3\right)^T$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}2-k_1&6-k_2&-1-k_3\\-1+2k_1&-3+2k_2&1+2k_3\\-1+3k_1&-4+3k_2&1+3k_3\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}\qquad（k_1,k_2,k_3\text{ 为任意常数}）$$

(23)(本题满分 11 分)

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

【解析】已知 $A=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & \cdots & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ \vdots\\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$，

则 A 的特征值为 n，0（$n-1$ 重）.

A 属于 $\lambda=n$ 的特征向量为 $(1,1,\cdots,1)^T$；$r(A)=1$，故 $Ax=0$ 基础解系有 $n-1$ 个线性无关的解向量，即 A 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量；故 A 相似于对角阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}n & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 n，0（$n-1$ 重），同理 B 属于 $\lambda=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，故 B 相似于对角阵 Λ.

由相似关系的传递性，A 相似于 B.