2019年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试题参考答案

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1、当$x\to 0$时，若$x-\tan x$与x^k是同阶无穷小，则$k=$（　　）

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

【答案】C

【解析】当$x\to 0$时，$x-\tan x\sim -\dfrac{x^3}{3}$，则$k=3$，所以选C.

2、已知方程$x^5-5x+k=0$有3个不同的实根，则k的取值范围为（　）

A. $(-\infty,-4)$　　　　B. $(4,+\infty)$　　　　C. $[-4,4]$　　　　D. $(-4,4)$

【答案】D.

【解析】令$f(x)=x^5-5x+k$，由$f'(x)=5x^4-5=0$得$x=\pm1$，当$x<-1$时，$f'(x)>0$，当$-1<x<1$时，$f'(x)<0$，当$x>1$时，$f'(x)>0$，又由于$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，方程要有三个不等实根，只需要$f(-1)=4+k>0$，$f(1)=-4+k<0$，因此$k$的取值范围为$-4<k<4$.

3、已知微分方程$y''+ay'+by=ce^x$的通解为$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+e^x$，则a,b,c依次为（　　）

A. $1,0,1$　　　　B. $1,0,2$　　　　C. $2,1,3$　　　　D. $2,1,4$

【答案】D.

【解析】由通解形式知，$\lambda_1=\lambda_2=-1$，故特征方程为$(\lambda+1)^2=\lambda^2+2\lambda+1=0$，所以$a=2,b=1$，又由于$y^*=e^x$是$y''+2y'+y=ce^x$的特解，代入得$c=4$.

4、若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{v_n}{n}$条件收敛，则（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$条件收敛　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$绝对收敛　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$发散

【答案】B.

【解析】由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{v_n}{n}$条件收敛知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{n}=0$，故当$n$充分大时，$\left|\dfrac{v_n}{n}\right|\leq 1$．所以

$|u_n v_n| = \left|nu_n \cdot \frac{v_n}{n}\right|,, |nu_n|$，由于$\sum_{n=1}^{\infty} nu_n$绝对收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$绝对收敛.

5、设$\boldsymbol{A}$是四阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，若线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中只有 2 个向量，则$\boldsymbol{A}^*$的秩是（　　）

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 3

【答案】 A.

【解析】由于方程组基础解系中只有 2 个向量，则$4-r(\mathbf{A})=2$，所以$r(\mathbf{A}^*)=0$.

6、设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵，$\boldsymbol{E}$是3阶单位矩阵. 若$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，且$|\boldsymbol{A}|=4$，则二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$规范形为（　　）

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】C

【解析】由$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，可知矩阵的特征值满足方程$\lambda^2+\lambda-2=0$，解得，$\lambda=1$或$\lambda=-2$. 再由$|\boldsymbol{A}|=4$，可知$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$，所以规范形为$y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 故答案选 C.

7、设A,B为随机事件，则$P(A)=P(B)$充分必要条件是（　　）

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

【答案】C

【解析】$P(A\overline{B})=P(B\overline{A}) \Leftrightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB) \Leftrightarrow P(A)=P(B)$；故选 C.

8、设随机变量X和Y相互独立，且都服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P\{|X-Y|<1\}=$（　　）

A. 与μ无关，而与σ^2有关　　　　B. 与μ有关，而与σ^2无关

C. 与μ，σ^2都有关　　　　D. 与μ，σ^2都无关

【答案】A

【解析】$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，所以$P\{|X-Y|<1\}=\Phi(\frac{1-0}{\sqrt{2}\sigma})-\Phi(\frac{-1-0}{\sqrt{2}\sigma})=2\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})-1$；选 A

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9、$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^n=$___________

【答案】e^{-1}.

【解析】$\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$.

10、曲线 $y=x\sin x+2\cos x(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2})$ 的拐点坐标为___________

【答案】 $(\pi,-2)$.

【解析】令 $y''=-x\sin x=0$，可得 $x=0$，$x=\pi$，又 $y'''=-\sin x-x\cos x$，因 $y'''(0)=0$，

$y'''(\pi)=\pi\neq 0$，因此拐点坐标为 $(\pi,-2)$.

11、已知 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$___________

【答案】 $\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$.

【解析】 $f'(x)=\sqrt{1+x^4}$，且 $f(1)=0$. 因此

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}\left[x^3 f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2}).$$

12、 A、B 两商品的价格分别为 P_A、P_B，需求函数 $Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2$，

$P_A=10$，$P_B=20$，求 A 商品对自身价格的需求弹性 $\eta_{AA}=$___________$(\eta>0)$.

【答案】0.4.

【解析】因为 $\eta_{AA}=-\frac{P_A}{Q_A}\cdot\frac{\mathrm{d}Q_A}{\mathrm{d}P_A}=-\frac{P_A}{Q_A}\cdot(-2P_A-P_B)$，将 $P_A=10$，$P_B=20$，$Q_A=1000$

代入，可得 $\eta_{AA}=\frac{10}{1000}\cdot 40=0.4$.

13、$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，求 $a=$___________

【答案】1.

【解析】因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 由无穷多解，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 作初等行变换，因为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b}) \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-1 & a-1 \end{bmatrix},$$

故 $a^2-1=a-1=0$，因此 $a=1$.

14、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & 0<x<2, \\ 0, & 其他, \end{cases}$，$F(x)$ 为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$____________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$.

【解析】由条件可得 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 \dfrac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$，且可求得分布函数

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2, \\ 1, & x\ge 2. \end{cases}$$

故可得 $P\{F(X)>EX-1\}=P\{F(X)>\dfrac{1}{3}\}=P\{\dfrac{2}{\sqrt{3}}<X<2\}=\dfrac{2}{3}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、已知 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}, x>0, \\ xe^x+1, x\le 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

【解析】$x>0$ 时，$f'(0)=(\mathrm{e}^{2x\ln x})'=\mathrm{e}^{2x\ln x}(2\ln x+2)$；$x<0$ 时，$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$；

又 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}2\ln x=-\infty$，

所以 $f'(0)$ 不存在，因此

$$f'(x)=\begin{cases} 2x^{2x}(1+\ln x), & x>0, \\ (x+1)\mathrm{e}^x, & x<0. \end{cases}$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1, x_3=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；另外 $f(x)$ 还有一个不可导点 $x_2=0$；

又 $(-\infty,-1)$ 为单调递减区间，$(-1,0)$ 为单调递增区间，$(0,\frac{1}{e})$ 为单调递减区间，$(\frac{1}{e},+\infty)$ 为单调递增区间；因此有极小值 $f(-1)=1-\frac{1}{e}$ 和极小值 $f(\frac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$，极大值 $f(0)=1$.

16、已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【解析】依题意知，

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_1'(x+y,x-y)-f_2'(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_1'(x+y,x-y)+f_2'(x+y,x-y).$$

因为 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，故 $f_{12}''=f_{21}''$，因此，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-(f_{11}''+f_{12}'')-(f_{21}''+f_{22}'')=-f_{11}''-2f_{12}''-f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-(f_{11}''-f_{12}'')-(f_{21}''-f_{22}'')=1-f_{11}''+f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-(f_{11}''-f_{12}'')+(f_{21}''-f_{22}'')=-f_{11}''+2f_{12}''-f_{22}''.$$

所以，$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f_{11}''-f_{22}''$.

17、$y=y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

（1）求 $y(x)$；

（2）设平面区域 $D=\{(x,y)|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解析】$y(x)=e^{\int x\mathrm{d}x}(\int e^{\int -x\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+C)=e^{\frac{x^2}{2}}(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x+C)=e^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+C)$；

又由 $y(1)=\sqrt{e}$ 得 $C=0$，最终有 $y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

（2）所求体积

$$V=\int_1^2\pi(\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}})^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^4-\mathrm{e}).$$

18、求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(x..0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

【解析】设在区间 $[n\pi,(n+1)\pi]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 上所围的面积记为 u_n，则

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x;$$

记 $I=\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$，则 $I=-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\cos x=-(\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x})$

$=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\sin x=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-(\mathrm{e}^{-x}\sin x-\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x})=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)-I$，

所以 $I=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)+C$；

因此 $u_n=(-1)^n(-\dfrac{1}{2})\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}+\mathrm{e}^{-n\pi})$；

（这里需要注意 $\cos n\pi=(-1)^n$）

因此所求面积为 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}$.

19、设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx(n=0,1,2\cdots)$

（1）证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减；且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3\cdots)$

（2）求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

【解析】（1）$a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}dx<0$，所以 $\{a_n\}$ 单调递减.

$$a_n=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}[x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx^{n-1}]$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{n-1}{3}(\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{n-1}{3}(a_{n-2}-a_n),$$

从而有 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3\cdots\right)$；

（2）因为 $\dfrac{a_n}{a_{n-2}}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<\dfrac{a_n}{a_n}=1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+2}=1$，由夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

20、已知向量组

（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix}$，（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}$，

若向量组（Ⅰ）和向量组（Ⅱ）等价，求 a 的取值，并将 $\boldsymbol{\beta}_3$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

【解析】令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，因向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，对矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ 作初等行变换.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{bmatrix}$$

当 $a=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$；当 $a=-1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，但 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$；

当 $a\neq\pm1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$. 综上，只需 $a\neq-1$ 即可.

（1）当 $a=1$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，故 $\boldsymbol{\beta}_3=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$ 的等价

方程组为 $\begin{cases}x_1=3-2x_3,\\x_2=-2+x_3.\end{cases}$，得通解为 $\mathbf{x}=k\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}$（$k$ 为任意常数），

从而 $\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(k-2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$（$k$ 为任意常数）；

（2）当 $a\neq\pm1$ 时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，得 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，

所以 $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

21、已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ 与 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{bmatrix}$ 相似，

（Ⅰ）求 x, y；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$

【解析】(1)

方法一：相似矩阵有相同的特征值，因此有 $\begin{cases}-2+x-2=2-1+y,\\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\end{cases}$

又 $|\boldsymbol{A}|=-2(4-2x)$，$|\boldsymbol{B}|=-2y$，所以 $x=3, y=-2$.

方法二：

观察得 $\mathbf{A}$ 必有一个特征值为 -2，$\mathbf{B}$ 的特征值为 $2,-1,y$，因此由 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 相似得两个矩阵特征值相等，得 $y=-2$，再由 $-2+x-2=2-1+y$，得 $x=3$

(2) 易知 B 的特征值为 $2,-1,-2$；因此

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}，取 \boldsymbol{\xi}_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}}，$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}，取 \boldsymbol{\xi}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}，$$

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}，取 \boldsymbol{\xi}_3=(-1,2,4)^{\mathrm{T}}$$

令 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则有 $P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$；

同理可得，对于矩阵 $\boldsymbol{B}$，有矩阵 $P_2=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，所以

$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$，即 $B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}$，所以

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

22、设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p$，$P(Y=1)=1-p$，（$0<p<1$），令 $Z=XY$.

（1）求 Z 的概率密度；

（2）p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（3）X 与 Z 是否相互独立?

【解析】（1）Z 的分布函数为 $F_Z(z)=P(XY\le z)=P(Y=-1,X\ge -z)+P(Y=1,X\le z)$，

因为 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$，

因此，$F_Z(z)=p[1-F_X(-z)]+(1-p)F_X(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ p+(1-p)(1-\mathrm{e}^{-z}), & z\ge 0.\end{cases}$

所以，Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z\ge 0.\end{cases}$

（2）当 $Cov(X,Z)=EXZ-EX\cdot EZ=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY=0$ 时，X 与 Z 不相关. 因为 $DX=1$，$EY=1-2p$，故 $p=\dfrac{1}{2}$.

（3）不独立. 因为 $P(0\le X\le 1,Z\le 1)=P(0\le X\le 1,XY\le 1)=P(0\le X\le 1)=1-e^{-1}$，而 $P(Z\le 1)=F_Z(1)=p+(1-p)(1-\mathrm{e}^{-1})$，故 $P(0\le X\le 1,Z\le 1)\ne P(0\le X\le 1)P(Z\le 1)$，所以 X 与 Z 不独立.

23、设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 简单随机样本.

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

【解析】（1）由密度函数的规范性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，即

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{A}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,$$

得 $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

（2）设似然函数 $L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\sigma^{-n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$，

取对数，$\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$；

对 σ^2 求导，$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$，

令导数为零，解得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.