2011年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 已知当 $x \to 0$ 时，$f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　　）

(A) $k=1, c=4$　　(B) $k=1, c=-4$　　(C) $k=3, c=4$　　(D) $k=3, c=-4$

(2) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$（　　）

(A) $-2f'(0)$　　(B) $-f'(0)$　　(C) $f'(0)$　　(D) 0.

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是（　　）

(A)若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛　(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛　(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx$，$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\,dx$，$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,dx$，则 I, J, K 的大小关系是(　　)

(A) $I < J < K$　　(B) $I < K < J$　　(C) $J < I < K$　　(D) $K < J < I$

(5) 设 A 为3阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第三行得单位矩阵，记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A =$(　　)

(A) P_1P_2　　(B) $P_1^{-1}P_2$　　(C) P_2P_1　　(D) $P_2P_1^{-1}$

(6) 设 A 为 4×3 矩阵，η_1,η_2,η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的3个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为(　　)

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$　　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$　　(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$

(7) 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是（　　）

(A) $f_1(x)\,f_2(x)$　　(B) $2\,f_2(x)\,F_1(x)$

(C) $f_1(x)\,F_2(x)$　　(D) $f_1(x)\,F_2(x)+f_2(x)\,F_1(x)$

(8) 设总体 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n (n\geq 2)$ 为来自该总体的简

单随机样本，则对于统计量$T_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$和$T_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\frac{1}{n}X_n$，有（　　）

(A) $ET_1>ET_2, DT_1>DT_2$　　(B) $ET_1>ET_2, DT_1<DT_2$

(C) $ET_1<ET_2, DT_1>DT_2$　　(D) $ET_1<ET_2, DT_1<DT_2$

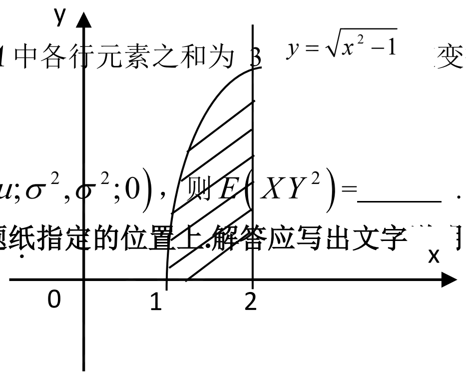
二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则$f'(x)=$ ＿＿＿.

(10) 设函数$z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则$dz\big|_{(1,1)}=$＿＿＿.

(11) 曲线$\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^y$在点$(0,0)$处的切线方程为＿＿＿＿.

(12) 曲线$y=\sqrt{x^2-1}$，直线$x=2$及x轴所围成的平面图形绕x轴旋转所成的旋转体的体积为＿＿＿＿ .



(13) 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$的秩为 1，A中各行元素之和为 3 变换 $x=Qy$下的标准形为＿＿＿＿ .

(14) 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则$E(XY^2)=$＿＿＿ .

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字 、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$

(16) (本题满分 10 分)

已知函数$f(u,v)$具有连续的二阶偏导数，$f(1,1)=2$是$f(u,v)$的极值，$z=f(x+y,f(x,y))$.求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(1,1)}$

(17) (本题满分 10 分)

求不定积分$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$

(18) (本题满分 10 分)

证明方程$4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$恰有两个实根.

(19)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$具有连续导数，$f(0)=1$，且满足

$\iint\limits_{D_t}f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t}f(t)dxdy$，$D_t=\{(x,y)|0\le y\le t-x,0\le x\le t\}(0<t\le 1)$，求$f(x)$的表达式.

(20) (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表出.

(I)求 a 的值 ；

(II)将 β_1，β_2，β_3 用 α_1，α_2，α_3 线性表出.

(21) (本题满分 11 分)

A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$

(I) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 A.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$1/3$	$2/3$

Y	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

且 $P(X^2=Y^2)=1$.

(I) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(II) 求 $Z=XY$ 的概率分布；

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 $x-y=0,x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角形区域.

(I) 求 X 的概率密度 $f_X(x)$；

(II) 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.