2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

(A) 选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

（1）已知当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　　）

（A）$k=1, c=4$　　（B）$k=1, c=-4$

（C）$k=3, c=4$　　（D）$k=3, c=-4$

（2）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$（　　）

（A）$-2f'(0)$　　（B）$-f'(0)$　　（C）$f'(0)$　　（D）0

（3）函数 $f(x) = \ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为（　　）

（A）0　　（B）1　　（C）2　　（D）3

（4）微分方程 $y'' - \lambda^2 y = e^{\lambda x} + e^{-\lambda x} (\lambda > 0)$ 的特解形式为（　　）

（A）$a(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$　　（B）$ax(e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$

（C）$x(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$　　（D）$x^2(ae^{\lambda x} + be^{-\lambda x})$

（5）设函数 $f(x)$，$g(x)$ 均有二阶连续导数，满足 $f(0) > 0$，$g(0) < 0$，$f'(0) = g'(0) = 0$ 则函数 $z = f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（　　）

（A）$f''(0) < 0$，$g''(0) > 0$　　（B）$f''(0) < 0$，$g''(0) < 0$

（C）$f''(0) > 0$，$g''(0) > 0$　　（D）$f''(0) > 0$，$g''(0) < 0$

（6）设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x dx$，$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x dx$，$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x dx$，则 I，J，K 的大小关系为（　　）

（A）$I < J < K$　　（B）$I < K < J$

（C）$J < I < K$　　（D）$K < J < I$

（7）设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵。记 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $A =$（　　）

（A）P_1P_2　　（B）$P_1^{-1}P_2$　　（C）P_2P_1　　（D）$P_2P_1^{-1}$

(8)设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵。若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为（　　）

（A）α_1,α_3　　（B）α_1,α_2　　（C）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分。请将答案写在答题纸指定位置上。

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$________。

（10）微分方程 $y'+y=e^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$________。

（11）曲线 $y=\int_0^x \tan t dt\quad (0\le x\le \dfrac{\pi}{4})$ 的弧长 $s=$________。

（12）设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-kx}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ $\lambda>0$，则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=$________。

（13）设平面区域 D 由直线 $y=x$，圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成，则二重积分 $\iint\limits_D xyd\sigma=$________。

（14）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$，则 f 的正惯性指数为________。

三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上，解答应字说明、

证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$，设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$，试求 α 的取值范围。

（16）（本题满分 11 分）

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点。

（17）（本题满分 9 分）

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1,\\ y=1}}$。

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数，且曲线 $l:y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点，记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角，

若 $\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{dx}$，求 $y(x)$ 的表达式。

（19）（本题满分 10 分）

（I）证明：对任意的正整数 n，都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立。

（II）设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

（20）（本题满分 11 分）

一容器的内侧是由图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面，该曲线由 $x^2+y^2=2y(y\geq\frac{1}{2})$ 与 $x^2+y^2=1(y\leq\frac{1}{2})$ 连接而成。

（I）求容器的容积；

（II）若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出，至少需要做多少功？

（长度单位：m，重力加速度为 $g\,m/s^2$，水的密度为 $10^3\,kg/m^3$）

（21）（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且 $f(1,y)=0$，$f(x,1)=0$，$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=a$，其中 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$。

（22）（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示。

（I）求 a 的值；

（II）将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示。

（23）（本题满分 11 分）

设 A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$。

（I）求 A 的所有的特征值与特征向量；

（II）求矩阵 A。