2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题：1-8 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

（1）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则（）

A.函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

B.函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

C.函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

D.函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

（2）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则（）

A. $f_x'-f_y'=0$

B. $f_x'+f_y'=0$

C. $f_x''-f_y''=f$

D. $f_x''-f_y''=f$

（3）设 $J_k=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}dxdy(i=1,2,3)$，其中 $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le \sqrt{x}\right\}$ $D_3=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\right\}$ 则（）

A. $J_1<J_2<J_3$

B. $J_3<J_1<J_2$

C. $J_2<J_3<J_1$

D. $J_2<J_1<J_3$

（4）级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}})\sin(n+k)$（$k$ 为常数）（）

A.绝对收敛

B.条件收敛

C.发散

D.收敛性与 k 有关

（5）设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（）

A. A^T 与 B^T 相似

B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似

C. $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似

D. $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 1,2，则（）

A. $a>1$　　　B. $a<-2$

C. $-2<a<1$　　　D. $a=1$ 或 $a=-2$

（7）设 A,B 为两个随机变量，且 $0<P(A)<1,0<P(B)<1$，如果 $P(A|B)=1$，则（）

A. $P(\overline{B}|\overline{A})=1$

B. $P(A|\overline{B})=0$

C. $P(A\cup B)=1$

D. $P(B|A)=1$

（8）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(1,2),Y\sim N(1,4)$，则 $D(XY)=$（）

A.6B.8　　C.14　　D.15

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

（9）已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$_________.

（10）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$__________.

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)x-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$_________.

（12）设 $D=\{(x,y)||x|\le y\le 1,-1\le x\le 1\}$，则 $\iint\limits_D x^2e^{-y^2}dxdy=$__________.

（13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$________.

（14）设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回地取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到时停止，则取球次数恰好为 4 的概率为_________.

三、解答题：15-23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$。

（16）（本题满分 10 分）

设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性 $\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$，$p$ 为单价（万元）。

（I）求需求函数的表达式；

（II）求 $p=100$ 万元时的边际效益，并说明其经济意义。

（17）

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t+e^{-x}-1$，求 $f(x)$。

（19）（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n-2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数。

（20）（本题满分 11 分）

设矩形 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1-a\\ 1 & 0 & a\\ a+1 & 1 & a+1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $AX=\beta$ 无解，

求：（1）求 a 的值

（2）求方程组 $A^TAX=A^T\beta$ 的通解.

（21）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（I）求 A^{99}

（II）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$。记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1, & X\le Y.\\ 0, & X>Y.\end{cases}$

（I）写出 (X,Y) 的概率密度；

（II）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（III）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta\\ 0\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$.。

（1）求 T 的概率密度；

（2）确定 a，使得 $E(aT)=\theta$.