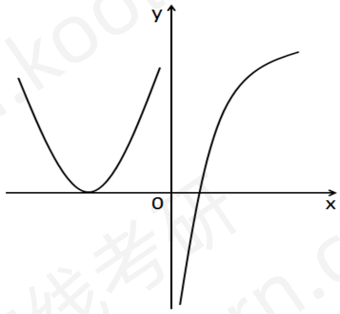
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题解析

一、选择题:1□8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为（　）

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3



【答案】(C)

【解析】拐点出现在二阶导数等于 0，或二阶导数不存在的点，并且在这点的左右两侧二阶导函数异号.因此，由 $f''(x)$ 的图形可得，曲线 $y=f(x)$ 存在两个拐点.故选（C）.

(2)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则(　)

(A) $a=-3,b=2,c=-1$

(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$

(D) $a=3,b=2,c=1$

【答案】(A)

【分析】此题考查二阶常系数非齐次线性微分方程的反问题——已知解来确定微分方程的系数，此类题有两种解法，一种是将特解代入原方程，然后比较等式两边的系数可得待估系数值，另一种是根据二阶线性微分方程解的性质和结构来求解，也就是下面演示的解法.

【解析】由题意可知，$\frac{1}{2}e^{2x}$、$-\frac{1}{3}e^{x}$ 为二阶常系数齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解，所以 2,1 为特征方程 $r^{2}+ar+b=0$ 的根，从而 $a=-(1+2)=-3$，$b=1\times2=2$，从而原方程变为 $y''-3y'+2y=ce^{x}$，再将特解 $y=xe^{x}$ 代入得 $c=-1$.故选（A）

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n}$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_{n}(x-1)^{n}$ 的（　）

(A) 收敛点，收敛点

(B) 收敛点，发散点

(C) 发散点，收敛点

(D) 发散点，发散点

【答案】(B)

【分析】此题考查幂级数收敛半径、收敛区间，幂级数的性质.

【解析】因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，即$x=2$为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$的条件收敛点，所以$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$的收敛半径为1，收敛区间为$(0,2)$.而幂级数逐项求导不改变收敛区间，故$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的收敛区间还是$(0,2)$.因而$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的收敛点，发散点.故选（B）.

(4) 设D是第一象限由曲线$2xy=1$，$4xy=1$与直线$y=x$，$y=\sqrt{3}x$围成的平面区域，函数$f(x,y)$在D上连续，则$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$（ ）

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$

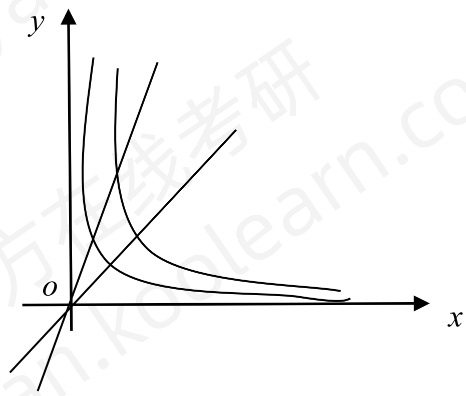
(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

【答案】(B)

【分析】此题考查将二重积分化成极坐标系下的累次积分

【解析】先画出D的图形，



所以$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr$，

故选（B）

(5) 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & a\\ 1 & 4 & a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ d\\ d^2\end{pmatrix}$，若集合$\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组$Ax=b$有无穷多解的充分必要条件为（ ）

(A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$

(B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$

(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$

(D) $a \in \Omega, d \in \Omega$

【答案】(D)

【解析】$(A,b)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{pmatrix}$,

由$r(A)=r(A,b)<3$，故$a=1$或$a=2$，同时$d=1$或$d=2$.故选（D）

(6)设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 在正交变换为$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ ，其中$\boldsymbol{P}=\left(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\right)$ ，若$\boldsymbol{Q}=\left(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2\right)$ ，则$f\left(x_1,x_2,x_3\right)$在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$下的标准形为（　）

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$

(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由$x=Py$，故$f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

且$P^TAP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

由已知可得:$Q=P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}=PC$

故有$Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

所以$f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.选（A）

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件，则　　（　）

(A) $P(AB) \le P(A)P(B)$ (B) $P(AB) \ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB) \le \dfrac{P(A)P(B)}{2}$ (D) $P(AB) \ge \dfrac{P(A)P(B)}{2}$

【答案】(C)

【解析】由于 $AB \subset A, AB \subset B$，按概率的基本性质，我们有 $P(AB) \le P(A)$ 且 $P(AB) \le P(B)$，从而 $P(AB) \le \sqrt{P(A) \cdot P(B)} \le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$，选(C).

(8)设随机变量 X, Y 不相关，且 $EX = 2, EY = 1, DX = 3$，则 $E\left[X(X+Y-2)\right] =$ ( )

(A) -3 (B) 3 (C) -5 (D) 5

【答案】(D)

【解析】$E[X(X+Y-2)] = E(X^2 + XY - 2X) = E(X^2) + E(XY) - 2E(X)$

$$= D(X) + E^2(X) + E(X) \cdot E(Y) - 2E(X)$$

$= 3 + 2^2 + 2\times1 - 2\times2 = 5$，选(D).

二、填空题：9□ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2} =$ ________.

【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【分析】此题考查 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限，可直接用洛必达法则，也可以用等价无穷小替换.

【解析】方法一：$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-\tan x}{2x} = -\dfrac{1}{2}$.

方法二：$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+\cos x - 1)}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + |x|)\mathrm{d}x =$ ________.

【答案】$\dfrac{\pi^2}{4}$

【分析】此题考查定积分的计算，需要用奇偶函数在对称区间上的性质化简.

【解析】$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x} + |x|\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx = \dfrac{\pi^2}{4}$.

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$__________.

【答案】$-dx$

【分析】此题考查隐函数求导.

【解析】令 $F(x,y,z)=e^z+xyz+x+\cos x-2$，则

$$F_x'(x,y,z)=yz+1-\sin x, F_y'=xz, F_z'(x,y,z)=e^z+xy$$

又当 $x=0,y=1$ 时 $e^z=1$，即 $z=0$.

所以 $\frac{\partial z}{\partial x}\big|_{(0,1)}=-\frac{F_x'(0,1,0)}{F_z'(0,1,0)}=-1, \frac{\partial z}{\partial y}\big|_{(0,1)}=-\frac{F_y'(0,1,0)}{F_z'(0,1,0)}=0$，因而 $dz\big|_{(0,1)}=-dx.$

(12)设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域，则

$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$____________.

【答案】$\frac{1}{4}$

【分析】此题考查三重积分的计算，可直接计算，也可以利用轮换对称性化简后再计算.

【解析】由轮换对称性，得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=6\int_0^1 zdz\iint\limits_{D_z}dxdy,$$

其中 D_z 为平面 $z=z$ 截空间区域 Ω 所得的截面，其面积为 $\frac{1}{2}(1-z)^2$.所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=6\iiint\limits_{\Omega}zdxdydz=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2dz=3\int_0^1(z^3-2z^2+z)dz=\frac{1}{4}.$$

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$____________.

【答案】$2^{n+1}-2$

【解析】按第一行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\&&\cdots&&\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=2D_{n-1}+(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2$$

$$=2(2D_{n-2}+2)+2=2^2D_{n-2}+2^2+2=2^n+2^{n-1}+\cdots+2=2^{n+1}-2$$

(14)设二维随机变量(x,y)服从正态分布$N(1,0;1,1,0)$，则

$P\{XY-Y<0\}=$________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】由题设知，$X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1)$，而且$X$、$Y$相互独立，从而

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}$$

$$=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

三、解答题：15～23小题,共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分10分) 设函数$f\left(x\right)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若$f\left(x\right)$与$g\left(x\right)$在$x\to0$是等价无穷小，求$a,b,k$的值.

【答案】$a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}.$

【解析】**法一**：原式$\lim\limits_{x\to0}\frac{x+a\ln\left(1+x\right)+bx\sin x}{kx^3}=1$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{kx^3}=1$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(1+a\right)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3-\frac{b}{6}x^4+o\left(x^3\right)}{kx^3}=1$$

即$1+a=0,b-\frac{a}{2}=0,\frac{a}{3k}=1$

$\therefore a=-1,b=-\frac{1}{2},k=-\frac{1}{3}$

法二：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=1$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}=1$

因为分子的极限为 0，则 $a=-1$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{-1}{(1+x)^2}+2b\cos x-bx\sin x}{6kx}=1$，分子的极限为 0，$b=-\dfrac{1}{2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\dfrac{2}{(1+x)3}-2b\sin x-b\sin x-bx\cos x}{6k}=1$，$k=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore a=-1,b=-\dfrac{1}{2},k=-\dfrac{1}{3}$

(16)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，由线 y=$f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

【答案】$f(x) = \dfrac{8}{4-x}$.

【解析】设 $f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为：$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$,

令 $y=0$，得到 $x=-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}+x_0$，

故由题意，$\dfrac{1}{2}f(x_0)\cdot(x_0-x)=4$，即 $\dfrac{1}{2}f(x_0)\cdot\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=4$，可以转化为一阶微分方程，

即 $y'=\dfrac{y^2}{8}$，可分离变量得到通解为：$\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{8}x+C$，

已知 $y(0)=2$，得到 $C=\dfrac{1}{2}$，因此 $\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{2}$；

即 $f(x)=\dfrac{8}{-x+4}$.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 C：$x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

【答案】3

【解析】因为 $f(x,y)$ 沿着梯度的方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模.

$f_x'(x,y)=1+y, f_y'(x,y)=1+x$，

故 $gradf(x,y)=\{1+y,1+x\}$，模为 $\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$，

此题目转化为对函数 $g(x,y)=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 在约束条件 $C: x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.即为条件极值问题.

为了计算简单，可以转化为对 $d(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$ 在约束条件

$C: x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

构造函数：$F(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$

$\begin{cases} F_x'=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0 \\ F_y'=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0 \\ F_\lambda'=x^2+y^2+xy-3=0 \end{cases}$，得到 $M_1(1,1), M_2(-1,-1), M_3(2,-1), M_4(-1,2)$.

$d(M_1)=8, d(M_2)=0, d(M_3)=9, d(M_4)=9$

所以最大值为 $\sqrt{9}=3$.

(18)(本题满分 10 分)

（I）设函数 $u(x), v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

（II）设函数 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导，$f(x) = u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

【解析】（I）$[u(x)v(x)]'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)$$

$$=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$$

（II）由题意得

$f'(x)=[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'$

$$=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$起点为$A\left(0,\sqrt{2},0\right)$，终点为$B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$，计算曲线积分$I=\int_L\left(y+z\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2+y\right)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

【解析】由题意假设参数方程$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \\ z=\cos\theta \end{cases}$ $\theta:\dfrac{\pi}{2}\to-\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[-(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2}\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

(20) (本题满 11 分)

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$内$\mathrm{R}^3$的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\left(k+1\right)\boldsymbol{\alpha}_3$.

（I）证明向量组$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$为$\mathrm{R}^3$的一个基;

（II）当 k 为何值时，存在非 0 向量$\boldsymbol{\xi}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$下的坐标相同，并求所有的$\boldsymbol{\xi}$.

【答案】

【解析】(I)证明：

$$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(2\alpha_1+2k\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_1+\left(k+1\right)\alpha_3\right)$$

$$=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\2k&k+1\end{vmatrix}=4\neq0$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 为 R^3 的一个基.

（II）由题意知，$\xi = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3, \xi \neq 0$

即 $k_1(\beta_1-\alpha_1)+k_2(\beta_2-\alpha_2)+k_3(\beta_3-\alpha_3)=0, \quad k_i \neq 0, i=1,2,3$

$k_1(2\alpha_1+2k\alpha_3-\alpha_1)+k_2(2\alpha_2-\alpha_2)+k_3(\alpha_1+(k+1)\alpha_3-\alpha_3)=0$

$k_1(\alpha_1+2k\alpha_3)+k_2(\alpha_2)+k_3(\alpha_1+k\alpha_3)=0$有非零解

即 $|\alpha_1+2k\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1+k\alpha_3|=0$

即 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2k & 0 & k \end{vmatrix}=0$，得 k=0

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_1 = 0$

$\therefore k_2 = 0, k_1 + k_3 = 0$

$\xi = k_1\alpha_1 - k_1\alpha_3, k_1 \neq 0$

(21) (本题满分 11 分)

设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a,b 的值；

（II）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵..

【解析】(I) $A \sim B \Rightarrow tr(A) = tr(B) \Rightarrow 3+a = 1+b+1$

$$|A| = |B| \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} a-b=-1 \\ 2a-b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}$$

$$\text{(II) } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = E + C$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

C 的特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 4$

$\lambda=0$ 时 $(0E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(2,1,0)^T;\xi_2=(-3,0,1)^T$

$\lambda=5$ 时 $(4E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_3=(-1,-1,1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A=1+\lambda_C:1,1,5$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,

$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$

(22) (本题满分 11 分) 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0,\\0, \quad x\le 0.\end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测,直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止.记 Y 为观测次数.

(I)求 Y 的概率分布;

(II)求 EY

【解析】(I) 记 p 为观测值大于 3 的概率，则 $p=P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2dx=\frac{1}{8}$,

从而 $P\{Y=n\}=C_{n-1}^1p(1-p)^{n-2}p=(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}$， $n=2,3,\cdots$

为 Y 的概率分布;

(II) **法一:分解法:**

将随机变量 Y 分解成 $Y=M+N$ 两个过程,其中 M 表示从1到 $n(n<k)$ 次试验观测值大于3首次发生， N 表示从 $n+1$ 次到第 k 试验观测值大于3首次发生.

则 $M\sim Ge(n,p)$， $N\sim Ge(k-n,p)$ (注：Ge 表示几何分布)

所以 $E(Y)=E(M+N)=E(M)+E(N)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{2}{p}=\frac{2}{\frac{1}{8}}=16$.

法二:直接计算

$$E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P\{Y=n\}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)[(\frac{7}{8})^{n-2}-2(\frac{7}{8})^{n-1}+(\frac{7}{8})^n]$$

记 $S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)x^{n-2}\quad -1<x<1$，则

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)x^{n-2}=(\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot x^{n-1})'=(\sum_{n=2}^{\infty} x^{n})''=\frac{2}{(1-x)^3},$$

$$S_2(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)x^{n-1}=x\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)x^{n-2}=xS_1(x)=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

$$S_3(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)x^{n}=x^2\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)x^{n-2}=x^2S_1(x)=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

所以 $S(x)=S_1(x)-2S_2(x)+S_3(x)=\dfrac{2-4x+2x^2}{(1-x)^3}=\dfrac{2}{1-x}$,

从而 $E(Y)=S(\frac{7}{8})=16$.

(23) (本题满分 11 分)设总体 X 的概率密度为:

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, \theta\le x\le 1,\\ 0, \quad 其他.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量.

(II)求 θ 的最大似然估计量.

【解析】(I) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)dx=\int_{\theta}^{1} x\cdot\dfrac{1}{1-\theta}dx=\dfrac{1+\theta}{2}$,

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\dfrac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，解得 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$, $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为 θ 的矩估计量;

(II) 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{1-\theta}\right)^n, \theta\le x_i\le 1\\ 0, \quad 其他\end{cases}$,

当 $\theta\le x_i\le 1$ 时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1-\theta}=(\dfrac{1}{1-\theta})^n$，则 $\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$.

从而 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{n}{1-\theta}$，关于 θ 单调增加,

所以 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 为 θ 的最大似然估计量.