

2013 硕士研究生入学考试

数学一

1. 已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^k} = c$, 其中 k, c 为常数, 且 $c \neq 0$, 则 ()

A. $k=2, c=-\frac{1}{2}$ B. $k=2, c=\frac{1}{2}$ C. $k=3, c=-\frac{1}{3}$ D. $k=3, c=\frac{1}{3}$

2. 曲面 $x^2 + \cos(xy) + yz + x = 0$ 在点 $(0, 1, -1)$ 处的切平面方程为 ()

A. $x - y + z = -2$ B. $x + y + z = 0$ C. $x - 2y + z = -3$ D. $x - y - z = 0$

3. 设 $f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|$, $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx (n=1, 2, \dots)$, 令 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$,

则 $S(-\frac{9}{4}) =$ ()

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{4}$ D. $-\frac{3}{4}$

4. 设 $L_1: x^2 + y^2 = 1$, $L_2: x^2 + y^2 = 2$, $L_3: x^2 + 2y^2 = 2$, $L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条

逆时针方向的平面曲线, 记 $I_i = \oint_{L_i} (y + \frac{y^3}{6}) dx + (2x - \frac{x^3}{3}) dy (i=1, 2, 3, 4)$, 则

$\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} =$

A. I_1 B. I_2 C. I_3 D. I_4

5. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB=C$, 且 B 可逆, 则 ()

A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

D. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

6. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 ()

A. $a=0, b=2$ B. $a=0, b$ 为任意常数

C. $a=2, b=0$ D. $a=2, b$ 为任意常数

7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量, 且 $X_1 \sim N(0, 1)$, $X_2 \sim N(0, 2^2)$, $X_3 \sim N(5, 3^2)$,

$P_i = P\{-2 \leq X_i \leq 2\} (i=1, 2, 3)$, 则 ()

A. $P_1 > P_2 > P_3$ B. $P_2 > P_1 > P_3$

C. $P_3 > P_2 > P_1$ D. $P_1 > P_3 > P_2$

8. 设随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1, n)$, 给定 $a (0 < a < 0.5)$, 常数 c 满足

$P\{X > c\} = a$, 则

$P\{Y > c^2\} = ()$

9. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(I-y)}$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow 0} n[f(\frac{1}{n})-1] = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

10. 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$, $y_2=e^x-xe^{2x}$, $y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解, 则该方程的通解 $y = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

11. 设 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \sin t + \cos t \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

12. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

13. 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵, $|A|$ 为 A 的行列式, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 若 $a_{ij}+A_{ij}=0 (i, j=1, 2, 3)$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

14. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零, 则

$P\{Y \leq a+1 | Y > a\} =$

三. 解答题:

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.

(16)(本题 10 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \geq 2)$. $S(x)$ 是幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数.

(1) 证明: $S''(x) - S(x) = 0$;

(2) 求 $S(x)$ 的表达式.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x, y) = (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$.

(II) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

19.(本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0)$, $B(0,1,1)$ 两点将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ , Σ 与平面 $z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω 。

(1) 求曲面 Σ 的方程;

(2) 求 Ω 的形心坐标。

20. (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C 使得 $AC - CA = B$,

并求所有矩阵 C 。

21. (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$, 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$,

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(2) 若 α, β 正交且均为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$ 。

22. (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 令随机变量

$$Y = \begin{cases} 2, & x \leq 1, \\ x, & 1 < x < 2, \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

(1) 求 Y 的分布函数;

(2) 求概率 $P\{X \leq Y\}$.

23.(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{\theta^2}{x^3} e^{-\frac{\theta}{x}}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大

于零, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本。

(1) 求 θ 的矩估计量;

求 θ 的最大似然估计量。