2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题答案

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a \neq 0$，则当 n 充分大时有（ ）

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$ (B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$ (C) $a_n > a - \dfrac{1}{n}$ (D) $a_n < a + \dfrac{1}{n}$

【答案】(A)

【金程解析】本题主要考查极限的保号性：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，可得 $\exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$|a_n| > \dfrac{1}{2}|a|$. 故选(A).

(2) 下列曲线有渐近线的是（ ）

(A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin\dfrac{1}{x}$

【答案】(C)

【金程解析】本题主要考查渐近线的定义、分类及求法：

C 选项：$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x} = 1 + 0 = 1$，又 $\lim\limits_{x\to\infty}[x + \sin\dfrac{1}{x} - x] = \lim\limits_{x\to\infty} \sin\dfrac{1}{x} = 0$，

所以 $y = x + \sin\dfrac{1}{x}$ 存在斜渐近线 $y = x$. 故选(C). 对于(A)(B)(D)均可验证没有渐近线.

(3) 设 $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, 当 $x \to 0$ 时, 若 $P(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小, 则下列试题中错误的是（ ）

(A) $a = 0$ (B) $b = 1$ (C) $c = 0$ (D) $d = \dfrac{1}{6}$

【答案】(D)

【金程解析】当 $x \to 0$ 时由已知可得 $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ 是无穷小，所以 $a = 0$.

而 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{p(x) - \tan x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{bx + cx^2 + dx^3 - \tan x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b + 2cx - \sec^2 x}{3x^2} + d$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(b + 2cx - \sec^2 x) = 0, \therefore b = 1.$

原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{b + 2cx - \sec^2 x}{3x^2} + d = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2c}{3x} - \dfrac{1}{3} + d = 0, \therefore c = 0, d = \dfrac{1}{3}$. 故选(D).

(4) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上 (　)

(A)当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　　(B)当 $f'(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

(C)当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\ge g(x)$　　(D)当 $f''(x)\ge 0$ 时，$f(x)\le g(x)$

【答案】(D)

【金程解析】本题考查函数单调性与凸凹性的判别.

令 $F(x)=g(x)-f(x)=f(0)(1-x)+f(1)x-f(x)$，则 $F(0)=F(1)=0$,

$F'(x)=-f(0)+f(1)-f'(x), F''(x)=-f''(x)$.

若 $f''(x)\ge 0$，则 $F''(x)\le 0$，$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上为凸的.

又 $F(0)=F(1)=0$，所以当 $x\in[0,1]$ 时，$F(x)\ge 0$，从而 $g(x)\ge f(x)$.

故选(D).

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=$ (　)

(A) $(ad-bc)^2$　(B) $-(ad-bc)^2$　(C) $a^2d^2-b^2c^2$　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

【答案】(B)

【金程解析】本题考查行列式的计算和展开定理.由行列式的展开定理按照第一列展开

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix}-c\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & d & 0 \end{vmatrix}=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$

$=-(ad-bc)^2$.

故选(B).

(6) 设 a_1,a_2,a_3 均为三维向量，则对任意常数 k,l，向量组 a_1+ka_3，a_2+la_3 线性无关是向量 a_1,a_2,a_3 线性无关的 (　)

(A)必要非充分条件　　(B)充分非必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分也非必要条件

【答案】(A)

【金程解析】本题主要考查向量的线性无关性.

$(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$.

$\Leftarrow$) 记 $A=(\alpha_1+k\alpha_3 \quad \alpha_2+l\alpha_3)$，$B=(\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3)$，$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}$. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则 $r(A)=r(BC)=r(C)=2$，故 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关.

$\Rightarrow$) 反例. 令 $\alpha_3=0$，则 α_1,α_2 线性无关，但此时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 却线性相关.

综上所述，对任意常数 k,l，向量 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的必要非充分条件. 故选(A).

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$ (　)

(A) 0.1　　(B) 0.2　　(C) 0.3　　(D) 0.4

【答案】(B)

【金程解析】本题考查随机事件的减法公式. 由于 $P(A-B)=0.3$，且 A 与 B 独立，$P(B)=0.5$，

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B) \quad =P(A)-0.5P(A)=0.5P(A)=0.3$，

则　$P(A)=0.6$，

则 $P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.5-0.5\times0.6=0.5-0.3=0.2$. 故选(B).

(8) 设 X_1,X_2,X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $S=\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为 (　)

(A) $F(1,1)$　　(B) $F(2,1)$　　(C) $t(1)$　　(D) $t(2)$

【答案】(C)

【金程解析】本题考查数理统计的三大分布. 因为 X_1,X_2,X_3 来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$，则

X_1-X_2 与 $|X_3|$ 独立. $X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，则 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$.

$\frac{X_3}{\sigma} \sim N(0,1)$，则 $\frac{X_3^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$. 利用分布的典型模式得到 $\frac{\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\frac{X_3^2}{\sigma^2} / 1}} \sim t(1)$，

即 $\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|} \sim t(1)$. 故选(C).

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2p$（p 为商品的价格），则该商品的边际收益为 ________.

【答案】$20 - Q$

【金程解析】本题考查导数的经济意义. 价格 $p = \frac{40 - Q}{2}$，收益函数 $R = P \cdot Q = \frac{40 - Q}{2} \cdot Q$，故边际收益为 $\frac{dR}{dQ} = 20 - Q$.

(10) 设 D 是由曲线 $xy + 1 = 0$ 与直线 $y + x = 0$ 及 $y = 2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为 ____.

【答案】$\frac{3}{2} - \ln 2$

【金程解析】本题考查定积分的应用-求面积. $S = \int_1^2 (y - \frac{1}{y}) dy = \frac{3}{2} - \ln 2$.

(11) 设 $\int_0^a x e^{2x} dx = \frac{1}{4}$，则 $a =$ ________.

【答案】$\frac{1}{2}$

【金程解析】本题考查定积分的参数计算. 因为 $\int x e^{2x} dx = (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) e^{2x} + C$

则 $\int_0^a x e^{2x} dx = (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) e^{2x} \Big|_0^a = (\frac{a}{2} - \frac{1}{4}) e^{2a} + \frac{1}{4}$，又 $\int_0^a x e^{2x} dx = \frac{1}{4}$ 所以 $(\frac{a}{2} - \frac{1}{4}) e^{2a} = 0$ 即 $a = \frac{1}{2}$

(12) 二次积分 $\int_0^1 dy \int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x} - e^{y^2}) dx =$ ________.

【答案】$\frac{1}{2}(e - 1)$

【金程解析】本题考查二重积分的计算.

$$\int_0^1 dy\int_y^1 (\frac{e^{x^2}}{x}-e^{y^2})dx=\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{e^{x^2}}{x}dx-\int_0^1 dy\int_y^1 e^{y^2}dx$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x \frac{e^{x^2}}{x}dy-\int_0^1 (1-y)e^{y^2}dy \qquad =\int_0^1 e^{x^2}dx-\int_0^1 (1-y)e^{y^2}dy$$

$$=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\frac{1}{2}e^{y^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$$

(13) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围 ________.

【答案】$[-2,2]$

【金程解析】本题考查二次型的相关概念.二次型化标准形可以选择正交变换法和配方法，本题可采用配方法：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2$

因为二次型负惯性指数为 1，所以 $4-a^2\ge 0$，即 $-2\le a\le 2$.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2}, \theta<x<2\theta,\\ 0, \quad 其他,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本，若 $E(c\sum_{i=1}^n X_i^2)=\theta^2$，则 $c=$________.

【答案】 $\frac{2}{5n}$

【金程解析】本题考查样本期望的计算.

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x;\theta)dx=\int_\theta^{2\theta} x^2\cdot\frac{2x}{3\theta^2}dx =\frac{2}{3\theta^2}\cdot\frac{1}{4}x^4\Big|_\theta^{2\theta}=\frac{5\theta^2}{2},$$

$$E[c\sum_{i=1}^n X_i^2]=ncE(X^2)=\frac{5n}{2}\theta^2\cdot c=\theta^2, \quad \therefore\ c=\frac{2}{5n}.$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x \left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

【金程解析】本题考查极限的计算.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_1^x\left[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t\right]dt}{x^2\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1-t}{t^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{2t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t}{2t}=\frac{1}{2}.$$

(16) (本题满分 10 分)

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le4,x\ge0,y\ge0\right\}$，计算 $\iint\limits_D\frac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

【金程解析】本题考查二重积分的计算和性质. 因为区域 D 关于 $y=x$ 对称，满足轮换对称性，则有 $\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\iint\limits_D\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$

$$I=\iint\limits_D\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}+\frac{y\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}\right]dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_1^2\sin\pi r\cdot rdr$$

$$=\frac{\pi}{4}(-\frac{1}{\pi})\int_1^2 rd\cos\pi r=-\frac{1}{4}\left[\cos\pi r\cdot r|_1^2-\int_1^2\cos\pi rdr\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\left[2+1-\frac{1}{\pi}\sin\pi r|_1^2\right]=-\frac{3}{4}$$

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+e^x\cos y)e^x.$$

若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

【金程解析】本题考查多元函数偏导数的计算和微分方程的求解，属于综合性题目.

容易计算：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(e^x\cos y)\cdot e^x\cos y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(e^x\cos y)\cdot(-e^x\sin y),$

$$\therefore\cos y\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=f'(e^x\cos y)\cdot e^x\cos^2y+f'(e^x\cos y)\cdot e^x\sin^2y$$

$=f'(e^x\cos y)\cdot e^x$,

由已知，$f'(e^x\cos y)\cdot e^x=(4f+e^x\cos y)e^x$,

即 $f'-4f=e^x\cos y$, 令 $e^x\cos y=t$，则 $f'(t)-4f(t)=t$，这是一阶线性微分方程。

由公式得 $f(t)=e^{\int 4dt}\left[\int te^{\int -4dt}dt+C\right]=-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}+Ce^{4t}$.

由 $f(0)=0$ 得 $C=\frac{1}{16}$.∴ $f(t)=-\frac{1}{4}t-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}e^{4t}$.∴ $f(u)=-\frac{1}{4}u-\frac{1}{16}+\frac{1}{16}e^{4u}$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

【金程解析】本题考查幂级数的收敛域的概念与和函数的求法.

(I) 因为 $a_n=(n+1)(n+3)$ $\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，所以 R=1

当 $x=\pm1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 发散. 故收敛域为（-1, 1）

(II) 记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=(\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+1})'=(g(x))'$

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2})'+\frac{x}{1-x}$$

$$=(\frac{x^2}{1-x})'+\frac{x}{1-x}=\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2},\quad -1<x<1$$

$$\therefore S(x)=[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}]'=\frac{3-x}{(1-x)^3},-1<x<1$$

(19)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$，证明：

(I) $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a, x\in[a,b]$；

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt}f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

【金程解析】本题考查不等式的证明和积分的性质.

(I) 由积分中值定理得：$\int_a^x g(t)dt=g(\xi)(x-a),\xi\in[a,x]$

$\because 0\le g(x)\le 1$，$\therefore 0\le g(\xi)(x-a)\le (x-a)$ $\therefore 0\le \int_a^x g(t)dt\le (x-a)$

（II）令 $F(u)=\int_a^u f(x)g(x)dx-\int_a^{a+\int_a^u g(t)dt} f(x)dx$

$$F'(u)=f(u)g(u)-f\left(a+\int_a^u g(t)dt\right)\cdot g(u)=g(u)\left[f(u)-f\left(a+\int_a^u g(t)dt\right)\right]$$

由（I）知 $0\le \int_a^u g(t)dt\le (u-a)$ $\qquad \therefore a\le a+\int_a^u g(t)dt\le$

又由于 $f(x)$ 单增，所以 $f(u)-f\left(a+\int_a^u g(t)dt\right)\ge 0$

$\therefore F'(u)\ge 0, \therefore F(u)$ 单调不减，$\therefore F(u)\ge F(a)=0$

取 $u=b$，得 $F(b)\ge 0$，即（II）成立.

(20)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$E$ 为三阶单位矩阵.

(I)求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

(II)求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

【金程解析】本题考查线性方程组基础解系和矩阵方程的计算.

$$(A|E)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -4 & 1\end{pmatrix},$$

(I) $Ax=0$ 的基础解系为 $\xi=(-1,2,3,1)^T$

(II) $e_1=(1,0,0)^T, e_2=(0,1,0)^T, e_3=(0,0,1)^T$

$Ax=e_1$ 的通解为 $x=k_1\xi+(2,-1,-1,0)^T=(2-k_1,-1+2k_1,-1+3k_1,k_1)^T$

$Ax=e_2$ 的通解为 $x=k_2\xi+(6,-3,-4,0)^T=(6-k_2,-3+2k_2,-4+3k_2,k_2)^T$

$Ax=e_3$ 的通解为 $x=k_3\xi+(-1,1,1,0)^T=(-1-k_3,1+2k_3,1+3k_3,k_3)^T$

$$\therefore B=\begin{pmatrix}2-k_1 & 6-k_2 & -1-k_3\\ -1+2k_1 & -3+2k_2 & 1+2k_3\\ -1+3k_1 & -4+3k_2 & 1+3k_3\\ k_1 & k_2 & k_3\end{pmatrix}\qquad（k_1,k_2,k_3 为任意常数）$$

(21)(本题满分 11 分)

证明n阶矩阵$\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$相似.

【金程解析】本题考查相似矩阵的概念和判定.

已知$A=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\\vdots\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$，

则A的特征值为n，0（$n-1$重).

A属于$\lambda=n$的特征向量为$(1,1,\cdots,1)^T$；$r(A)=1$，故$Ax=0$基础解系有$n-1$个线性无关的解向量，即A属于$\lambda=0$有$n-1$个线性无关的特征向量；故A相似于对角阵

$$\Lambda=\begin{pmatrix}n&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}.$$

B的特征值为n，0（$n-1$重)，同理B属于$\lambda=0$有$n-1$个线性无关的特征向量, 故B相似于对角阵Λ.

由相似关系的传递性，A相似于B.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$,在给定$X=i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i),(i=1,2)$.

(I)求Y的分布函数$F_Y(y)$；

(II)求EY.

【金程解析】本题考查随机变量分布函数和期望的计算.

(I)设Y的分布函数为$F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X=1\}P\{Y\le y|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\le y|X=2\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}$$

当$y<0$时，$F_Y(y)=0$；

当$0\le y<1$时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}(y+\frac{y}{2})=\frac{3y}{4}$；

当$1\le y<2$时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}(1+\frac{y}{2})$；

当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$.

所以 Y 的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \dfrac{3y}{4}, & 0\le y<1\\ \dfrac{1}{2}(1+\dfrac{y}{2}), & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$

(II) Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1\le y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\,\mathrm{d}\,y=\int_0^1 y\frac{3}{4}dy+\int_1^2 y\frac{1}{4}dy=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}(4-1)=\frac{3}{4}$$

(23)(本题满分 11 分)

设随机变量 X，Y 的概率分布相同，X 的概率分布为 $P\{X=0\}=\frac{1}{3},P\{X=1\}=\frac{2}{3}$，且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

(I)求 (X,Y) 的概率分布；

(II)求 $P\{X+Y\le 1\}$.

【金程解析】本题考查二维随机变量的联合分布和概率的计算.

(I) $\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\dfrac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

$E(XY)=P\{X=1,Y=1\},E(X)=\frac{2}{3},E(Y)=\frac{2}{3},\ D(X)=D(Y)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$,

代入 ρ_{XY} 得 $P\{X=1,Y=1\}=\frac{5}{9}$.

(X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

(II) $P\{X+Y\le 1\}=1-P\{X+Y>1\}=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.