2016 考研数学三真题及超详细答案解析

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）设函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导数如图所示，则（ ）

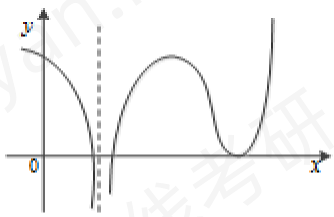
（A）函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

（B）函数有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

（C）函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

（D）函数有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

【答案】（B）



【解析】【解析】由图像易知选 B

2、已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

（A）$f'_x-f'_y=0$ （B）$f'_x+f'_y=0$ （C）$f'_x-f'_y=f$ （D）$f'_x+f'_y=f$

【答案】（D）

【解析】$f'_x=\dfrac{e^x(x-y-1)}{(x-y)^2}$ $f'_y=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$，所以 $f'_x+f'_y=f$

（3）设 $T_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}dxdy(i=1,2,3)$，其中 $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$，

$D_2=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,0\le y\le \sqrt{x}\right\},D_3=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,x^2\le y\le 1\right\}$，则

（A）$T_1<T_2<T_3$

（B）$T_3<T_1<T_2$

（C）$T_2<T_3<T_1$

（D）$T_2<T_1<T_3$

【答案】B

【解析】由积分区域的性质易知选 B.

（4）级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$，（K 为常数）

（A）绝对收敛

（B）条件收敛

（C）发散

（D）收敛性与 K 有关

【答案】A

【解析】由题目可得，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}\sin(n+k)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+k)}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

因为 $\left|\frac{\sin(n+k)}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\le\frac{1}{n\sqrt{n}}$，由正项级数的比较判别法得，该级数绝对收敛。

（5）设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（　　）

（A） A^T 与 B^T 相似

（B） A^{-1} 与 B^{-1} 相似

（C） $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似

（D） $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

【答案】（C）

【解析】此题是找错误的选项。由 A 与 B 相似可知，存在可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$，则

(1) $(P^{-1}AP)^T=B^T \Rightarrow P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T \Rightarrow A^T \sim B^T$,故（A）不选；

(2) $(P^{-1}AP)^{-1}=B^{-1} \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=B^{-1} \Rightarrow A^{-1} \sim B^{-1}$，故（$B$）不选；

(3) $P^{-1}(A+A^{-1})P=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=B+B^{-1} \Rightarrow A+A^{-1} \sim B+B^{-1}$,故（$D$）不选；

此外，在（C）中，对于 $P^{-1}(A+A^T)P=P^{-1}AP+P^{-1}A^TP$，若 $P^{-1}AP=B$，则 $P^TA^T(P^T)^{-1}=B^T$，而 $P^{-1}A^TP$ 未必等于 B^T，故（C）符合题意。综上可知，（C）为正确选项。

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为 $1,2$，则（　　）

（A） $a>1$

（B） $a<-2$

（C） $-2<a<1$

（D） $a=1$ 或 $a=-2$

【答案】（C）

【解析】考虑特殊值法，当 $a=0$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$，

其矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，由此计算出特征值为 $2,-1,-1$，满足题目已知条件，故 $a=0$ 成立，

因此（C）为正确选项。

7、设 A,B 为随机事件，$0<P(A)<1,0<P(B)<1,$ 若 $P(A|B)=1$ 则下面正确的是（　）

（A）$P(\bar{B}|\bar{A})=1$

（B）$P(A|\bar{B})=0$

（C）$P(A+B)=1$

（D）$P(B|A)=1$

【答案】（A）

【解析】根据条件得 $P(AB)=P(B)$

$$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{P(\overline{A+B})}{1-P(A)}=\frac{1-P(A+B)}{1-P(A)}=1$$

8、设随机变量 X,Y 独立，且 $X\sim N(1,2),Y\sim(1,4)$，则 $D(XY)$ 为

（A）6
（B）8
（C）14
（D）15

【答案】（C）

【解析】因为 X,Y 独立，

则$D(XY)=E(XY)^2-(EXY)^2=EX^2EY^2-(EXEY)^2$

$$=\left[DX+(EX)^2\right]\left[DY+(EY)^2\right]-(EXEY)^2=14$$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9)已知函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$____

【答案】6

【解析】因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{3}=2$

所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$

(10)极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\ldots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$____ .

【答案】$\sin 1-\cos 1$

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\ldots+n\sin\frac{n}{n}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n}\sin\frac{i}{n}=\int_0^1 x\sin x dx=\sin 1-\cos 1$$

(11)设函数$f(u,v)$可微，$z=z(x,y)$有方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定，则

$dz\big|_{(0,1)}=$____ .

【答案】$dz\big|_{(0,1)}=-dx+2dy$

【解析】$(x+1)x-y^2=x^2f(x-z,y)$ 两边分别关于 x,y 求导得

$$\begin{aligned}&z+(x+1)z'_x=2xf(x-z,y)+x^2f_1'(x-z,y)(1-z'_x)\\&(x+1)z'_y-2y=x^2(f_1'(x-z,y)(-z'_y)+f_2'(x-z,y))\end{aligned}$$，将 $x=0,y=1,z=1$ 代入得，

$$dz\Big|_{(0,1)}=-dx+2dy$$

(12)

（13）行列式 $\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\0 & \lambda & -1 & 0\\0 & 0 & \lambda & -1\\4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=$__________.

【答案】$\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$

【解析】

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0\\0 & \lambda & -1 & 0\\0 & 0 & \lambda & -1\\4 & 3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0\\0 & \lambda & -1\\3 & 2 & \lambda+1\end{vmatrix}+4\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\\lambda & -1 & 0\\0 & \lambda & -1\end{vmatrix}=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.$$

14、设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回的取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到为止，则取球次数恰为 4 的概率为________

【答案】$\dfrac{2}{9}$

【解析】$P(A)=C_3^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{1}{3}\times 2\cdot C_3^1\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$

三、解答题：15—23小题，共94分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15 （本题满分10分）求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\cos 2x+2x\sin x-1}{x^4}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1-\frac{4x^2}{2}+\frac{2^4x^4}{4!}+2x\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)-1+o(x^4)}{x^4}}$$

$$=e^{\frac{1}{3}}$$

16、（本题满分10分）

设某商品的最大需求量为1200件，该商品的需求函数$Q=Q(p)$，需求弹性$\eta=\dfrac{p}{120-p}(\eta>0)$，$p$为单价（万元）

(1)求需求函数的表达式

(2)求$p=100$万元时的边际收益，并说明其经济意义。

【解析】（1）由弹性的计算公式得

$$\eta=\left|\frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}\right| \text{可知} \frac{p}{Q}\frac{dQ}{dp}=\frac{-p}{120-p}$$

分离变量可知$\dfrac{dQ}{Q}=\dfrac{dp}{p-120}$

两边同时积分可得 $\ln Q=\ln(p-120)+C$

解得 $Q=C(p-120)$

由最大需求量为 1200 可知

$Q(0)=1200$，解得 $C=-10$

故 $Q=-10(p-120)=1200-10p$

（2）收益 $R=Qp=(1200-10P)P$

边际收益：$\frac{dR}{dQ}=\frac{dR}{dp}\frac{dp}{dQ}=(1200-20p)(-10)=200p-12000$

已知 $\left.\frac{dR}{dQ}\right|_{p=100}=8000$

经济学意义是需求量每提高 1 件，收益增加 8000 万元.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1\left|t^2-x^2\right|dt\ (x>0)$,求 $f'(x)$，并求 $f(x)$的最小值。

【解析】当 $-1<x<1$时，$f(x)=\int_0^{|x|}\left(x^2-t^2\right)dt+\int_{|x|}^1\left(t^2-x^2\right)dt=\frac{4}{3}|x|^3-x^2+\frac{1}{3}$

当 $|x|\geq1$时，$f(x)=\int_0^1\left(x^2-t^2\right)dt=x^2-\frac{1}{3}$

则 $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{3} & x\le -1 \\ -\dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3} & -1<x<0 \\ \dfrac{4}{3}x^3-x^2+\dfrac{1}{3} & 0\le x<1 \\ x^2-\dfrac{1}{3} & x\ge 1 \end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases} 2x & x<-1 \\ -4x^2-2x & -1<x<0 \\ 4x^2-2x & 0<x<1 \\ 2x & x>1 \end{cases}$

由导数的定义可知，$f'(-1)=-2, f'(0)=0, f'(1)=2$

故 $f'(x)=\begin{cases} 2x & x\le -1 \\ -4x^2-2x & -1<x<0 \\ 4x^2-2x & 0\le x<1 \\ 2x & x\ge 1 \end{cases}$

由于 $f(x)$ 是偶函数，所以只需求它在 $[0,+\infty)$ 上的最小值。

易知 $f'(x)<0, x\in(0,1); f'(x)>0, x\in(1,+\infty);$

可知 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=\dfrac{2}{3}$。

（18）（本题满分 10 分）设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+e^{-x}-1$，

求 $f(x)$

【解析】令 $u=x-t$，则 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_x^0 f(u)(-du)=\int_0^x f(u)du$

代入方程可得

$$\int_0^x f(u)du = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt + e^{-x} - 1$$

两边同时求导可得

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt - e^{-x} \qquad (1)$$

由于 $f(x)$ 连续，可知 $\int_0^x f(t)dt$ 可导，从而 $f(x)$ 也可导。

故对上式两边再求导可得

$$f'(x) = f(x) + e^{-x}$$

在(1)式两边令 $x=0$ 可得

$$f(0) = -1$$

解此微分方程可得

$$f(x) = -\frac{3}{2}e^x + \frac{e^{-x}}{2}$$

（19）（本题满分 10 分）求 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域和和函数。

【解析】令 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$

两边同时求导得

$$S'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

两边同时求导得

$$S''(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}$$

两边积分可得

$$S'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+C$$

由 $S'(0)=0$ 可知，$S'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

两边再积分可知

$$S(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$$

易知，$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛半径为 1，

且当 $x=1, x=-1$ 时级数收敛，可知幂级数的收敛域为[-1,1]

因此，$S(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x)$，$x\in[-1,1]$

（20）（本题满分 11 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解，

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解

【解析】

（Ⅰ）由方程组 $Ax=\beta$ 无解，可知 $r(A)\neq r(A,\beta)$，故这里有 $|A|=0$，

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=0$ 或 $a=2$。由于当 $a=0$ 时，$r(A)\neq r(A,\beta)$，而当 $a=2$ 时，$r(A)=r(A,\beta)$。综上，故 $a=0$ 符合题目。

（Ⅱ）当 $a=0$ 时，$A^TA=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$, $A^T\beta=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$，故

$$(A^TA,A^T\beta)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

因此，方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解为 $x=k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$，其中 k 为任意实数。

（21）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。

【解析】

（Ⅰ）利用相似对角化。

由 $|\lambda E-A|=0$，可得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$，故 $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_1=0$ 时，由 $(0E-A)x=0$，解出此时 A 的属于特征值 $\lambda_1=0$ 的特征向量为 $\gamma_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_2=-1$ 时，由 $(-E-A)x=0$，解出此时 A 的属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量为 $\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(-2E-A)x=0$，解出此时 A 的属于特征值 $\lambda_3=-2$ 的特征向量为 $\gamma_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

设 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，由 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$ 可得 $A=P\Lambda P^{-1}$，

$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}$，

对于 $P=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，利用初等变换，可求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，故

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（Ⅱ）$B^2=BA\Rightarrow B^3=BBA=B^2A=BAA=BA^2\Rightarrow\cdots\Rightarrow B^{100}=BA^{99}$，由于 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，故

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{99}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$，因此，

$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2,\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2,\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2.$

设 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，由 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$ 可得 $A=P\Lambda P^{-1}$，

$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}$，

对于 $P=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，利用初等变换，可求出 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，故

$$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

（Ⅱ）$B^2=BA\Rightarrow B^3=BBA=B^2A=BAA=BA^2\Rightarrow\cdots\Rightarrow B^{100}=BA^{99}$，由于 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，故

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{99}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$，因此，

$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2,\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2,\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2.$

(22)(本题满分 11 分)设二维随机变量(X,Y)在区域$D=\{(x,y)|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1,X\le Y\\0,X>Y\end{cases}$$

(I) 写出(X,Y)的概率密度；

(II) 问U与X是否相互独立？并说明理由；

(III) 求$Z=U+X$的分布函数$F(z)$.

【答案】

(I) $f(x,y)=\begin{cases}3,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\\0,其他\end{cases}$

(II) U与X不独立，因为$P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$；

(III) Z的分布函数

$$F_zZ=\begin{cases}0,z<0\\\frac{3}{2}z^2-z^3,0\le z<1\\\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2,1\le z<2\\1,z\ge 2\end{cases}$$

【解析】(1) 区域 D 的面积$s(D)=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)=\frac{1}{3}$，因为$f(x,y)$服从区域 D 上的均匀分布，所以

$$f(x,y)=\begin{cases}3 & x^2<y<\sqrt{x}\\0 & 其他\end{cases}$$

（2）X 与 U 不独立.

因为 $P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{U=0,X\le\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{12}$

$P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2},P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$

所以 $P\left\{U\le\frac{1}{2},X\le\frac{1}{2}\right\}\ne P\left\{U\le\frac{1}{2}\right\}P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}$,故 X 与 U 不独立。

（3）$F(z)=P\{U+X\le z\}=P\{U+X\le z\,|U=0\}P\{U=0\}+P\{U+X\le z\,|U=1\}P\{U=1\}$

$$=\frac{P\{U+X\le z,U=0\}}{P\{U=0\}}P\{U=0\}+\frac{P\{U+X\le z,U=1\}}{P\{U=1\}}P\{U=1\}$$

$$=P\{X\le z,X>Y\}+P\{1+X\le z,X\le Y\}$$

又 $P\{X\le z,X>Y\}=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}, & z\ge 1\end{cases}$，$P\{X+1\le z,X\le Y\}=\begin{cases}0, & z<1\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ \frac{1}{2}, & z\ge 2\end{cases}$

所以 $F(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$.

（23）设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\0,其他\end{cases}$，其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$。

（1）求 T 的概率密度

（2）当 a 为何值时，aT 的数学期望为 θ

【解析】（1）根据题意，X_1,X_2,X_3 独立同分布，T 的分布函数为

$$F_T(t)=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le t\}=P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t\}$$

$$=P\{X_1\le t\}P\{X_2\le t\}P\{X_3\le t\}=\left(P\{X_1\le t\}\right)^3$$

当 $t<0$ 时，$F_T(t)=0$；

当 $0<t<\theta$ 时，$F_T(t)=\left(\int_0^t\frac{3x^2}{\theta^3}d\theta\right)^3=\frac{t^9}{\theta^9}$；

当 $t\ge 0$ 时，$F_T(t)=1$，

所以 $f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta\\ 0, & others\end{cases}$。

（2）$E(aT)=aET=a\int_0^\theta t\frac{9t^8}{\theta^9}dt=\frac{9}{10}a\theta$，

根据题意，$E(aT)=\frac{9}{10}a\theta=\theta$，即 $a=\frac{10}{9}$