

2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题 1—8 小题. 每小题 4 分, 共 32 分.

1. 设 $\cos x - 1 = x \sin \alpha(x)$, $|\alpha(x)| < \frac{\pi}{2}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x)$ ()
 (A) 比 x 高阶的无穷小 (B) 比 x 低阶的无穷小
 (C) 与 x 同阶但不等价无穷小 (D) 与 x 等价无穷小
2. 已知 $y = f(x)$ 是由方程 $\cos(xy) - \ln y + x = 1$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(f\left(\frac{2}{n}\right) - 1 \right) =$ ()
 (A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2
3. 设 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi) \\ 2, & x \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 则 ()
 (A) $x = \pi$ 为 $F(x)$ 的跳跃间断点. (B) $x = \pi$ 为 $F(x)$ 的可去间断点.
 (C) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 连续但不可导. (D) $F(x)$ 在 $x = \pi$ 可导.
4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1 < x < e \\ \frac{1}{x \ln^{\alpha+1} x}, & x \geq e \end{cases}$, 且反常积分 $\int^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 ()
 (A) $\alpha < -2$ (B) $\alpha > 2$ (C) $-2 < \alpha < 0$ (D) $0 < \alpha < 2$
5. 设函数 $z = \frac{y}{x} f(xy)$, 其中 f 可微, 则 $\frac{x}{y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ ()
 (A) $2yf'(xy)$ (B) $-2yf'(xy)$ (C) $\frac{2}{x} f(xy)$ (D) $-\frac{2}{x} f(xy)$
6. 设 D_k 是圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的第 k 象限的部分, 记 $I_k = \iint_{D_k} (y-x) dx dy$, 则 ()
 (A) $I_1 > 0$ (B) $I_2 > 0$ (C) $I_3 > 0$ (D) $I_4 > 0$
7. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, 若 $AB = C$, 且 B 可逆, 则
 (A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.
 (B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.
 (C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.
 (D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价.
8. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是
 (A) $a=0, b=2$ (B) $a=0, b$ 为任意常数
 (C) $a=2, b=0$ (D) $a=2, b$ 为任意常数

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分. 把答案填在题中横线上）

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{\frac{1}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. 设函数 $f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$, 则 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y = 0$ 处的导数 $\frac{dx}{dy} \Big|_{y=0} = \underline{\hspace{2cm}}.$

11. 设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r = \cos 3\theta \left(-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \right)$ t 为参数, 则 L 所围成的平面图形的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

12. 曲线上 $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln \sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 对应于 $t = 1$ 处的法线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

13. 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}, y_2 = e^x - xe^{2x}, y_3 = -xe^{2x}$ 是某个二阶常系数线性微分方程三个解, 则满足 $y(0) = 0, y'(0) = 1$ 方程的解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

14. 设 $A = (a_{ij})$ 是三阶非零矩阵, $|A|$ 为其行列式, A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 且满足 $A_{ij} + a_{ij} = 0 (i, j = 1, 2, 3)$, 则 $|A| = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题

15. (本题满分 10 分)

当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \cos 2x \cos 3x$ 与 ax^n 是等价无穷小, 求常数 a, n .

16. (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y = \sqrt[3]{x}$, 直线 $x = a (a > 0)$ 及 x 轴所转成的平面图形, V_x, V_y 分别是 D 绕 x 轴和 y 轴旋转一周所形成的立体的体积, 若 $10V_x = V_y$, 求 a 的值.

17. (本题满分 10 分)

设平面区域 D 是由曲线 $x = 3y, y = 3x, x + y = 8$ 所围成, 求 $\iint_D x^2 dx dy$.

18. (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上具有二阶导数, 且 $f(1) = 1$, 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 1$;

(2) 存在 $\eta \in (-1, 1)$, 使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

19. (本题满分 10 分)

求曲线 $x^3 - xy + y^3 = 1 (x \geq 0, y \geq 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离和最短距离.

20. (本题满分 11)

设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$, 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

21. (本题满分 11)

设曲线 L 的方程为 $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x (1 \leq x \leq e)$.

(1) 求 L 的弧长.

(2) 设 D 是由曲线 L , 直线 $x=1, x=e$ 及 x 轴所围成的平面图形, 求 D 的形心的横坐标.

22. 本题满分 11 分)

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, 问当 a, b 为何值时, 存在矩阵 C , 使得 $AC - CA = B$, 并求出所有矩阵 C .

23 (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2$. 记 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$;

(2) 若 α, β 正交且为单位向量, 证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

