2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题:1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 ( )

(A) 比 x 高阶的无穷小　　(B) 比 x 低阶的无穷小

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小　　(D) 与 x 等价的无穷小

【答案】(C)

【解析】$\because \cos x-1=x\cdot\sin\alpha(x)$，$\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$

$\therefore x\cdot\sin\alpha(x)\sim-\dfrac{1}{2}x^2 \quad \therefore \sin\alpha(x)\sim-\dfrac{1}{2}x$

又 $\because \sin\alpha(x)\sim\alpha(x) \quad \therefore \alpha(x)\sim-\dfrac{1}{2}x$

$\therefore$ $\alpha(x)$ 与 x 同阶但不等价的无穷小. 所以选（C）.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n[f(\dfrac{2}{n})-1]=$ ( )

（A）2　（B）1　（C）-1　（D）-2

【答案】(A)

【解析】因为 $x=0$ 时，$y=1$ 即 $f(0)=1$.

$$\because \lim_{n\to\infty}n\left[f(\frac{2}{n})-1\right]=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{f(\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}-0}=2f'(0)=2y'|_{x=0}$$

又 $\because \cos(xy)+\ln y-x=1$

两边对 x 求导得：$-\sin(xy)\cdot y+\dfrac{1}{y}\cdot y'-1=0$，

将 $x=0,y=1$，代入上式得 $y'=1$.

$\therefore$ 选（A）.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, 0\le x<\pi\\ 2, \pi\le x\le 2\pi\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 ( )

（A） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点

（B） $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

（C） $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导

（D） $F(x)$ 在 x=π 处可导

【答案】（C）

【解析】因 $x=\pi$ 是 $f(x)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 唯一的第一类间断点，即 $f(x)$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 可积，故 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 在 $\left[0,2\pi\right]$ 连续.

因 $x=\pi$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，故 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 不可导. 所以选（C）.

（4）设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}},1<x<e\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x},x\ge e\end{cases}$，若反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛，则 （ ）

（A） $\alpha<-2$ （B） $\alpha>2$ （C） $-2<\alpha<0$ （D） $0<\alpha<2$

【答案】（D）

【解析】 $\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx+\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx$

$\int_1^e\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}dx$， $x=1$ 是瑕点，故 $\alpha-1<1$ 时，瑕积分收敛.

$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}dx=-\frac{1}{\alpha}(\ln x)^{-\alpha}\Big|_e^{+\infty}$，要使其收敛，需 $\alpha>0$.

综上所述 $0<\alpha<2$ $\therefore$ 选（D）.

（5）设 $z=\frac{y}{x}f(xy)$，其中函数 f 可微，则 $\frac{x\partial z}{y\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$ （ ）

(A) $2yf'(xy)$ (B) $-2yf'(xy)$ (C) $\frac{2}{x}f(xy)$ (D) $-\frac{2}{x}f(xy)$

【答案】（A）

【解析】 $\because\frac{\partial z}{\partial x}=(\frac{y}{x}f(xy))'=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)\cdot y=-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)$

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)\cdot x=\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)$$

$\therefore\frac{x}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2yf'(xy)$ $\therefore$ 选（A）.

（6）设 D_k 是圆域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$ 在第 k 象限的部分，记

$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy(k=2,2,3,4)$ 则 （ ）

(A) $I_1>0$ (B) $I_2>0$ (C) $I_3>0$ (D) $I_4>0$

【答案】(B)

【解析】$\because$ 第二象限中 $y>0$，$x<0$，始终 $y>x$ 即 $y-x>0$ $\therefore I_2>0 \therefore$ 选（B）.

(7) 设 A，B，C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，则 （ ）

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量等价

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量等价

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量等价

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量等价

【答案】(B)

【解析】将 A、C 按列分块，$A=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),C=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$

由于 $AB=C$，故

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ . & \ldots & . \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn}\end{pmatrix}=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$$

即 $\gamma_1=b_{11}\alpha_1+\ldots+b_{n1}\alpha_n,\ldots,\gamma_n=b_{1n}\alpha_1+\ldots+b_{nn}\alpha_n$

即 C 的列向量组可由 A 的列向量线性表示

由于 B 可逆，故 $A=CB^{-1}$，A 的列向量组可由 C 的列向量组线性表示 $\therefore$ 选（B）.

(8) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 （ ）

(A) $a=0,b=2$ (B) $a=0,b$ 为任意实数 (C) $a=2,b=0$ (D) $b=0,a$ 为任意实数

【答案】(B)

【解析】令 $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，

因为 A 为实对称矩阵，B 为对角阵，则 A 与 B 相似的充要条件是 A 的特征值分别为 $2,b,0$

A 的特征方程 $\left|\lambda A-E\right|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ a & \lambda-b & -a\\ -1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -a & -1\\ 0 & \lambda-b & -a\\ -\lambda & -a & \lambda-1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda & -a & -1\\ 0 & \lambda-b & -a\\ 0 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda\left[(\lambda-2)(\lambda-b)-2a^2\right],$$

因为 $\lambda=2$ 是 A 的特征值，所以 $\left|2A-E\right|=0$

所以 $-2a^2=0$，即 $a=0$.

当 $a=0$ 时，$\left|\lambda A-E\right|=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)$，

A 的特征值分别为 $2,b,0$ 所以 b 为任意常数即可. 故选(B).

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=$____________.

【答案】$e^{\frac{1}{2}}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(1-\frac{\ln(1+x)}{x})\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

(10) 设函数 $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-e^t}\,dt$，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=0$ 处的导数

$\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}=$________.

【答案】$\dfrac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}$

【解析】

$f(-1)=0, f'(x)=\sqrt{1-e^{x}}, f'(-1)=\sqrt{1-e^{-1}}$

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=0}=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}.$$

（11）设封闭曲线 L 的极坐标方程为 $r=\cos 3\theta(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6})$，则 L 所围平面图形的面积是__________.

【答案】$\frac{\pi}{12}$

【解析】$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{\sin 6\theta}{6}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}$.

（12）曲线 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln\sqrt{1+t^2}\end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为__________.

【答案】$y=-x+\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}$

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t}{\frac{1}{1+t^2}}=t$,

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=t|_{t=1}=1.$

当 $t=1$ 时 $x_0=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，$y_0=\ln\sqrt{1+1}=\ln\sqrt{2}$，

所以法线方程 $y-y_0=-1(x-x_0)$，即 $y-\ln\sqrt{2}=-x+\frac{\pi}{4}$.

（13）已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程满足条件 $y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$____________.

【答案】$e^{3x}-e^x-xe^{2x}$

【解析】$y_1-y_2=e^{3x}-e^x, y_1-y_3=e^{3x}$

故该方程组的通解为 $y=C_1\left(e^{3x}-e^x\right)+C_2e^{3x}-xe^{2x}$. 由 $y(0)=0, y'(0)=1,$ 得 $C_1=1, C_2=0$. 从而满足初始条件的解为 $y=e^{3x}-e^x-xe^{2x}$.

（14）设$A=(a_{ij})$是3阶非零矩阵，$|A|$为A的行列式，A_{ij}为a_{ij}的代数余子式，若

$a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则$|A|=$__________.

【答案】-1

【解析】由于$a_{ij}+A_{ij}=0,$ 故 $A_{ij}=-a_{ij},(i,j-1,2,3)$

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-(a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2) \qquad ①$$

$$|A|=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=-(a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2) \qquad ②$$

$$|A|=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=-(a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2) \qquad ③$$

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{21} & -a_{31} \\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A^*|=-|A^T|=-|A|$$

而$|A^*|=|A|^2,|A|^2=-|A|,\Rightarrow|A|$=-1 或$|A|=0$；又$|A|\neq 0$，否则由①②③得 A=0 与题设矛盾.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小. 求$n$与$a$的值.

【答案】$n=2$，$a=7$

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x+1}{4}}{ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3-\cos 6x-\cos 4x-\cos 2x}{4ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x+4\sin 4x+2\sin 2x}{4a\cdot n\cdot x^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{36\cos 6x+16\cos 4x+4\cos 2x}{4a\cdot n(n-1)x^{n-2}}$$

$\therefore n-2=0$，即$n=2$时，上式极限存在.

当$n=2$时，由题意$\dfrac{36+16+4}{4a\cdot 2\cdot 1}=1\Rightarrow a=7 \quad \therefore n=2,a=7$.

(16)(本题满分 10 分)

设D是由曲线$y=x^{\frac{1}{3}}$，直线$x=a(a>0)$及x轴所围成的平面图形，$V_{x,}V_y$分别是D绕x轴，y轴旋转一周所得旋转体的体积，若$V_y=10V_x$，求a的值.

【解析】由旋转体积公式得：

$$V_x=\int_0^a \pi(x^{\frac{1}{3}})^2dx=\pi\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_0^a=\pi\frac{3}{5}a^{\frac{5}{3}},$$

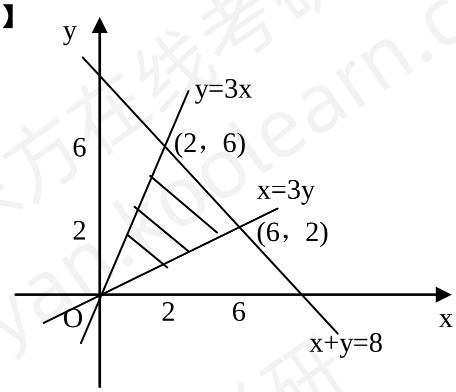
$$V_y=\int_0^a 2\pi x(x^{\frac{1}{3}})dx=\frac{3}{7}2\pi x^{\frac{7}{3}}\Big|_0^a=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$$

由已知条件知V_y=10V_x, 故$\dfrac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$=10$\pi\dfrac{3}{5}a^{\frac{5}{3}}$, 所以$a$=7$\sqrt{7}$.

(17)(本题满分 10 分)

设平面区域D由直线$x=3y,y=3x$及$x+y=8$围成. 计算$\iint\limits_D x^2dxdy$.

【解析】



由$\begin{cases}x=3y\\x+y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\y=2\end{cases}$，$\begin{cases}y=3x\\x+y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$

故

$$\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^2dx\int_{\frac{x}{3}}^{3x}x^2dy+\int_2^6dx\int_{\frac{x}{3}}^{8-x}x^2dy$$

$$=\frac{2}{3}x^4\Big|_0^a+\left(\frac{8}{3}x^3-\frac{1}{3}x^4\right)\Big|_0^a=\frac{32}{3}+128=\frac{416}{3}.$$

(18)(本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$. 证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,1)$. 使得 $f'(\xi)=1$;

（Ⅱ）存在 $\eta\in(0,1)$ 使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

【解析】

（I）由于 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数，故 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(0)=0$

令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(1)=f(1)-1=0$

$F(0)=f(0)-0=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=1$.

（II）由于 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数，则 $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为偶函数，所以由（I）

$f'(-\xi)=f'(\xi)=1$.

令 $G(x)=e^x\left[f'(x)-1\right]$，则 $G(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 内可导，且

$G(\xi)=G(-\xi)=0$，由罗尔定理存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(0,1)$，使得 $G'(\eta)=0$

即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19)(本题满分 10 分)

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\ge 0,y\ge 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

【解析】设 $d=\sqrt{x^2+y^2}$

建立拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda)=(x^2+y^2)+\lambda(x^3-xy+y^3-1)$

$$\text{令}\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda(3x^2-y)=0 & ①\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda(3y^2-x)=0 & ②\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^3-xy+y^3-1=0 & ③\end{cases}$$

（i） 若 $\lambda=0$，得 $x=y=0$ 不合题意.

（ii） 若 $\lambda\ne 0$，得 $y-3x^2=0$ 或 $x-3y^2=0$，均得 $x=y=0$ 不合题意.

若 $\lambda\ne 0$，得 $y\ne 3x^2$ 或 $x\ne 3y^2$，由①②得 $(x-y)(x+y+3xy)=0$

$x+y+3xy\ne 0$，$x=y$ 代入③得 $2x^3-x^2-1=0$，即 $(x-1)(2x^2+x+1)=0$ 得 $x=y=1$，故

距离为$\sqrt{2}$.

又$x=0,y=1,d=1$； $y=0,x=1,d=1$

所以最长距离为$\sqrt{2}$，最短距离为 1.

(20)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅱ)设数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$.证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求此极限.

【解析】(I) $f(x)=\ln x+\frac{1}{x},x>0,f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

令 $f'(x)=0,x=1$是唯一驻点，且当$0<x<1,f'(x)<0$，当$x>1,f'(x)>0$

所以$x=1$是 $f(x)$ 的极小值点，故 $f(1)=1$是最小值.

(II) 由 (I) 知$\ln x_n+\frac{1}{x_n}\geq 1$，又由已知$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$

可得$\frac{1}{x_n}>\frac{1}{x_{n+1}}$，即$x_n<x_{n+1}$，所以$\{x_n\}$单调递增.

又由$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$，可得$\ln x_n<1,0<x_n<e$，所以$\{x_n\}$有上界

由单调有界定理，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设为$A$.

对于$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$两边取极限得$\ln A+\frac{1}{A}\leq 1$，

又$\ln A+\frac{1}{A}\geq 1$，所以$\ln A+\frac{1}{A}=1$，又由（I）可知$A=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

(21)(本题满分 11 分)

设曲线L的方程为$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x \quad (1\leq x\leq e)$.

(Ⅰ)求L的弧长;

(Ⅱ)设D是由曲线L，直线$x=1$，$x=e$及x轴所围成平面图形，求D的形心的横坐标.

【解析】(I) 设弧长为s，由弧长的计算公式，得

$$s=\int_1^e\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^e\sqrt{1+(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x})^2}dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x})^2}dx=(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x)\Big|_1^e$$

$$=\frac{1+e^2}{4}.$$

（II）由形心的计算公式，得 $\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D xdxdy}{\iint\limits_D dxdy}=\dfrac{\int_0^1 dx\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}xdy}{\int_1^e(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x)dx}=\dfrac{\int_1^e x(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x)dx}{\int_1^e(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x)dx}$

$$\frac{\frac{1}{16}e^4-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}(e^2-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2})}{\frac{1}{12}e^3-\frac{1}{12}-\frac{1}{2}}=\frac{3(e^4-2e^2-3)}{4(e^3-7)},$$

其中 D 为 $x=1,x=e,x$ 轴以及所围成的图形.

(22)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C，使得 $AC-CA=B$，并求所有 矩阵 C.

【解析】设 $C=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，由于 $AC-CA=B$，故 $\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$,

即 $\begin{pmatrix}x_1+ax_3&x_2+ax_4\\x_1&x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1+x_2&ax_1\\x_3+x_4&ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$.

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}\qquad(\text{I})$$

由于矩阵 C 存在，故方程组(I)有解. 对(I)的增广矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & \vdots & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b \end{pmatrix}$$

方程组有解，故$a+1=0$，$b=0$，即$a=-1,b=0$.

当$a=-1,b=0$时，增广矩阵变为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

x_3,x_4为自由变量，令$x_3=1,x_4=0$，代为相应的齐次方程组，得$x_2=-1,x_1=1$.

令$x_3=0,x_4=1$，代为相应齐次方程组，得$x_2=0,x_1=1$.

故$\xi_1=(1,-1,1,0)^T$，$\xi_2=(1,0,0,1)^T$，令$x_3=0,x_4=0$，得特解，$\eta=(1,0,0,0)^T$，方程组的通解为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=(k_1+k_2+1,-k_1,k_1,k_2)^T$，所以$C=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$，其中$k_1,k_2$为任意常数.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$. 记

$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(Ⅰ)证明二次型f对应的矩阵为$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

(Ⅱ)若α，β正交且均为单位向量. 证明f在正交变换下的标准型为$2y_1^2+y_2^2$.

【解析】证明：(Ⅰ) $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

$$=2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$+\ (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2,x_3)\left(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$=x^T Ax$，其中 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.

由于 $A^T=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)^T=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T=A,$ 所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$.

(II) 由于 $A=2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$，$\alpha$ 与 β 正交，故 $\alpha^T\beta=0$，α，β 为单位向量，故 $\|\alpha\|=\sqrt{\alpha^T\alpha}=1$，故 $\alpha^T\alpha=1$，同样 $\beta^T\beta=1$. $A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha\alpha^T\alpha+\beta\beta^T\alpha=2\alpha$，由于 $\alpha\neq 0$，故 A 有特征值 $\lambda_1=2$. $A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=\beta$，由于 $\beta\neq 0$，故 A 有特征值 $\lambda_2=1$.

$r(A)=r(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\le r(2\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)=r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\ 1+1=2<3$.

所以 $|A|=0$，故 $\lambda_3=0$.

因此 f 在正交变换下的标准型为 $2{y_1}^2+{y_2}^2$.