2010年考研数学二真题（强烈推荐）

一 填空题(8×4=32分)

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点数为

(A) 0.　　(B)1.　　(C) 2.　　(D) 3.　　【　】

(2) 设y_1, y_2是一阶线性非齐次微分方程$y'+p(x)y=q(x)$的两个特解．若常数λ，μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$是对应的齐次方程的解，则

(A) $\lambda=\dfrac{1}{2},\mu=\dfrac{1}{2}$.　　(B) $\lambda=-\dfrac{1}{2},\mu=-\dfrac{1}{2}$.

(C) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{1}{3}$.　　(D) $\lambda=\dfrac{2}{3},\mu=\dfrac{2}{3}$.　　【　】

(3) 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切，则 $a=$

(A)4e　　(B)3e　　(C)2e　　(D)e　　【　】

(4) 设 m,n 是正整数，则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性：

(A) 仅 m 与值有关.　　(B) 仅 n 与值有关.

(C) 与 m,n 值都有关.　　(D) 与 m,n 值都无关.　　【　】

(5) 设函数$z=z(x,y)$ 由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定，其中F为可微函数，且$f_2'\neq 0$，则

$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

(A) x.　　(B) z.　　(C) $-x$.　　(D) $-z$.　　【　】

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.　　(B) $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.

(C) $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}dy$.　　(D) $\displaystyle\int_0^1dx\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$.　　【　】

(7) 设向量组I: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由向量组II: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，则列命题正确的是

(A) 若向量组 I 线性无关，则 $r\leq s$.　　(B) 若向量组 I 线性相关，则 $r>s$.

(C) 若向量组 II 线性无关，则 $r\leq s$.　　(D) 若向量组 II 线性相关，则 $r>s$.　　【　】

(8) 设A为 4 阶实对称矩阵，且$A^2+A=O$，若A的秩为 3，则A与相似于

(A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$.　　【　】

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 3 阶常系数线性齐次微分方程 $y'''-2y''+y'-2y=0$ 的通解为 $y=$ ________.

(10) 曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为 ________.

(11) 函数 $y=\ln(1-2x)$在$x=0$ 处的 n 阶导数 $y^{(n)}(0)=$ ________.

(12) 当 $0\le\theta\le\pi$ 时，对数螺线 $r=e^{\theta}$的弧长为 ________.

(13) 已知一个长方形的长 l 以 $2cm/s$ 的速率增加，宽 w 以 3 cm/s 的速率增加，则当 $l=12cm$，$w=5cm$ 时，它的对角线增加的速率为 ________.

(14) 设A, B为 3 阶矩阵，且$|A|=3$, $|B|=2$, $|A^{-1}+B|=2$，则 $|A+B^{-1}|=$ ________.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

(16) (本题满分 10 分)

(Ⅰ) 比较 $\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt$ $(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由；

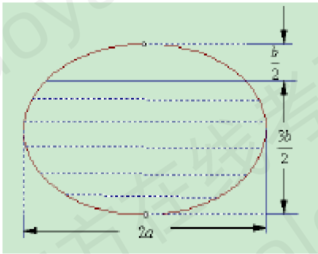
(Ⅱ) 记$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ $(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$.

(17) (本题满分 11 分)

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程$\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$, $(t>-1)$ 所确定，其中$\psi(t)$ 具有 2 阶导数，且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$，$\psi'(1)=6$, 已知 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$, 求函数$\psi(t)$.

(18) (本题满分 10 分)

一个高为 l 的柱体形贮油罐，底面是长轴为 $2a$ ，短轴为 $2b$ 的椭圆，现将贮油罐平放，当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时(如图)，计算油的质量.



（长度单位为 m，质量单位为 kg，油的密度为常数 $\rho kg/m^3$）

【分析】先求油的体积，实际只需求椭圆的部分面积.

【详解】建立如图所示的直角坐标系. 则油罐底面椭圆

(19)　(本题满分 11 分)

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，确定 a ，b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下化简为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$.

(20)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,drd\theta$，其中 $D=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\}$.

(21) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间[0, 1]上连续，在开区间(0, 1)内可导，且 $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{3}$，证明：存在 $\xi\in(0,\frac{1}{2})$, $\eta\in(\frac{1}{2},1)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$.

(22)　(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$,

已知线性方程组 $Ax=b$ 存在 2 个不同的解,

(I)　求 λ,a ;

(II) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

(23)　(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵，若 Q 的第 1 列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$,求 a, Q.

2009年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1~8小题，每小题8分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

（1）函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin nx}$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）无穷多个

（2）当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（）

（A）$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　（B）$a=1,b=\dfrac{1}{6}$　（C）$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　（D）$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

（3）设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点（0，0）（）

（A）不是 $f(x,y)$ 的连续点　　（B）不是 $f(x,y)$ 的极值点

（C）是 $f(x,y)$ 的极大值点　　（D）是 $f(x,y)$ 的极小值点

（4）设函数 $f(x,y)$ 连续，则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$（）

（A）$\int_1^2 dx\int_1^{4-y} f(x,y)dy$　　（B）$\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$

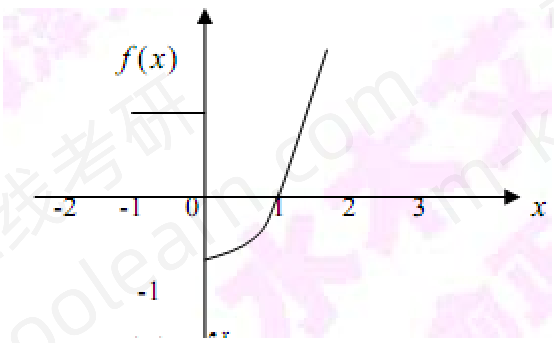
（C）$\int_1^2 dx\int_1^{4-y} f(x,y)dx$　　（D）$\int_1^2 dx\int_y^2 f(x,y)dx$

（5）若 $f''(x)$ 不变号，且曲线 $y=f(x)$ 在点（1，1）的曲率圆为 $x^2+y^2=2$，则 $f(x)$ 在区间（1，2）内（）

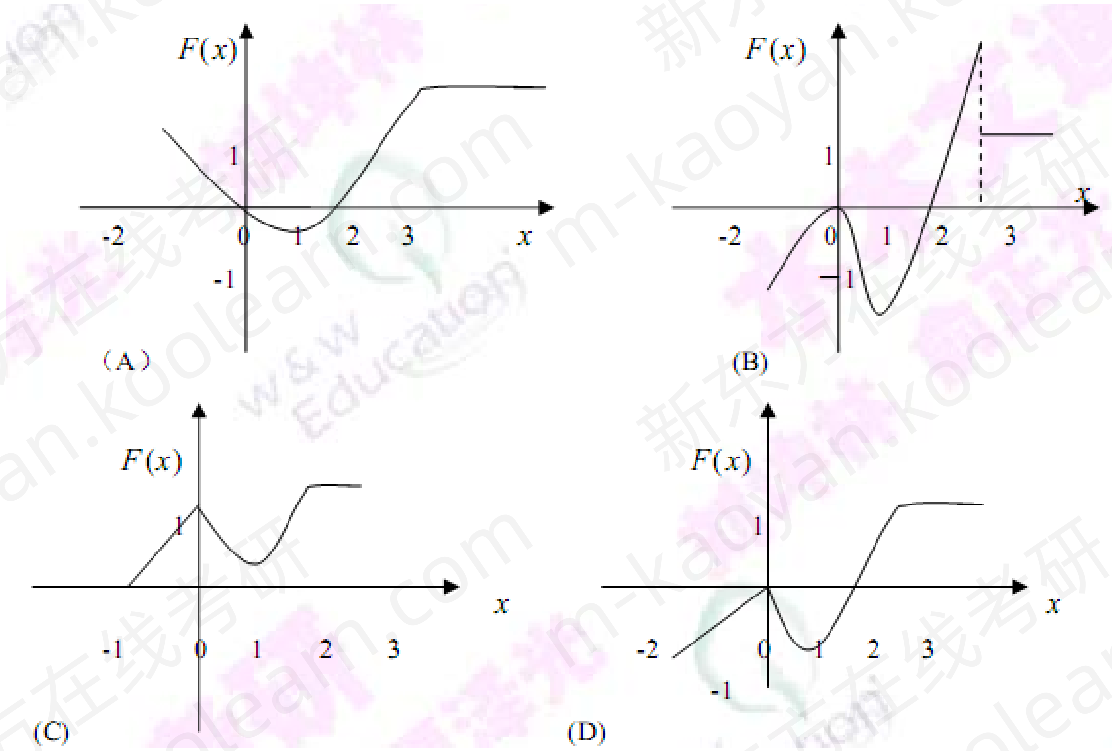
（A）有极值点，无零点　　（B）无极值点，有零点

（C）有极值点，有零点　　（D）无极值点，无零点

（6）设函数 $y=f(x)$ 在区间[-1,3]上的图形为



则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 为（）



（7）设A、B均为2阶矩阵，A^*,B^*分别为A、B的伴随矩阵。若|A|=2，|B|=3，则分块矩阵$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$的伴随矩阵为（）

（A）$\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$　（C）$\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$

（8）设A，P均为3阶矩阵，P^T为P的转置矩阵，且$P^TAP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，若

$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则$Q^TAQ$为（）

（A）$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$（B）$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$（C）$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$（D）$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

（9）曲线$\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}du \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$在（0，0）处的切线方程为____________

（10）已知$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}dx=1$，则 k=____________

（11）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx dx=$__________

（12）设 $y=y(x)$ 是方程 $xy+e^y=x+1$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{dy^2}{dx^2}|_{x=0}=$__________

（13）函数 $y=x^{2x}$ 在区间(0,1]上的最小值为________

（14）设 α,β 为 3 维列向量，β^T 为 β 的转置，若 β^T 相似于 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则

$\beta^T\alpha=$__________

三、解答题：15-23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 9 分）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$

（16）（本题满分 10 分）计算不定积分 $\int\ln(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}})dx(x>0)$

（17）（本题满分 10 分）设 $z=f(x+y,x-y,xy)$，其中 f 具有 2 阶连续偏导数，求 dz 与

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

（18）（本题满分 10 分）设非负函数 y=y(x)(x$\geq$0)，满足微分方程 $xy''-y'+2=0$，当曲线 y=y(x)过原点时，其与直线 x=1 及 y=0 围成平面区域的面积为 2，求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积。

（19）（本题满分 10 分）求二重积分 $\iint\limits_D (x-y)dxdy$，其中

$D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\leq2,y\geq x\}$

（20）（本题满分 12 分）设 y=y(x)是区间 $(\pi,-\pi)$ 内过点 $(-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线，当

$-\pi<x<0$ 时，曲线上任一点处的发现都过原点，当 $0\leq x<\pi$ 时，函数 y(x)满足

$y''+y+x=0$。求 y(x)的表达式。

（21）（本题满分 11 分）（I）证明拉格朗日中值定理：若函数 $f(x)$ 在[a,b]上连续，在（a,b）

可导，则存在 $\zeta\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\zeta)(b-a)$。（II）证明：若函数 $f(x)$ 在

x=0 处连续，在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=A$ 则 $f'_+(0)$

存在，且 $f'_+(0)=A$。

（22）（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix},\zeta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$

（I）求满足 $A\zeta_2=\zeta_1,A^2\zeta_3=\zeta_1$ 的所有向量 ζ_2,ζ_3；

（II）对（I）中的任一向量 ζ_2,ζ_3，证明：ζ_1,ζ_2,ζ_3 线性无关。

（23）（本题满分 11 分）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

（I）求二次型 f 的矩阵的所有特征值；（II）若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值。

2008 考研数学二真题

一、选择题：（本题共 8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

(1)设 $f(x)=x^2(x-1)(x+2)$，则 $f'(x)$ 的零点个数为(　　).

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

(2)曲线方程为 $y=f(x)$，函数在区间 $[0,a]$ 上有连续导数，则定积分 $\int_0^a xf'(x)dx$ 在几何上表示(　　).

(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.　　(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 面积.　　(D) 三角形 ACD 面积.

(3)在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意的常数）为通解的是(　　).

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 判定函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$ 间断点的情况(　　).

(A) 有 1 可去间断点，1 跳跃间断点. (B) 有 1 跳跃间断点，1 无穷间断点.

(C) 有 2 个无穷间断点.　　(D)有 2 个跳跃间断点.

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是(　　).

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

(C) 若$\{f(x_n)\}$收敛，则$\{x_n\}$收敛.　　(D) 若$\{f(x_n)\}$单调，则$\{x_n\}$收敛.

(6)设函数f连续，若$F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，其中区域$D_{uv}$为图中阴影部分，则$\dfrac{\partial F}{\partial u}=$(　　).

(A) $vf(u^2)$　　(B) $vf(u)$　　(C) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$

(7)设A为n阶非零矩阵，E为n阶单位矩阵．若$A^3=0$，则下列结论正确的是(　　).

(A) $E-A$不可逆，$E+A$不可逆.　　(B) $E-A$不可逆，$E+A$可逆.

(C) $E-A$可逆，$E+A$可逆.　　(D) $E-A$可逆，$E+A$不可逆.

(8) 设$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$，则在实数域上，与 A 合同矩阵为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$.

二、填空题：(9－14 小题，每小题 4 分，共 24 分．把答案填在题中横线上）

(9)已知函数$f(x)$连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^x-1)f(x)}=1$，则$f(0)=$

(10)微分方程$(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$的通解是______________ .

(11)曲线$\sin(xy)+\ln(y-x)=x$在点$(0,1)$处的切线方程为______________ .

(12)曲线$y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$的拐点坐标为____________ .

(13)设$z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则$\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$____________ .

(14)设 3 阶矩阵A的特征值为$2,3,\lambda$．若行列式$|2A|=-48$，则$\lambda=$____________.

三、解答题(15－23 小题，共 94 分).

(15)(本题满分 9 分)

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=x(t)\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)du\end{cases}$确定，其中$x=x(t)$是初值问题

$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0 \\ x|_{t=0}=0 \end{cases}$ 的解，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(17)（本题满分 9 分）计算 $\int_0^1 \dfrac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(18)(本题满分 11 分)

计算 $\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,0\le y\le 2\}$.

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数的单调增加函数，且 $f(0)=1$．对任意的 $t\in[0,+\infty)$，直线 $x=0,x=t$，曲线 $y=f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体，若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍，求函数 $f(x)$ 的表达式.

(20)(本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$；

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，证明至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

(21)(本题满分 11 分)

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值和最小值.

(22) (本题满分 12 分).

设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

（I）证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$；

（II）当 a 为何值时，该方程组有惟一解，并求 x_1.

（III）当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求其通解.

(23) (本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足

$$A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3,$$

(I)证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(II)令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$.

2007 年研究生入学考试数学二试题

一、选择题：1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

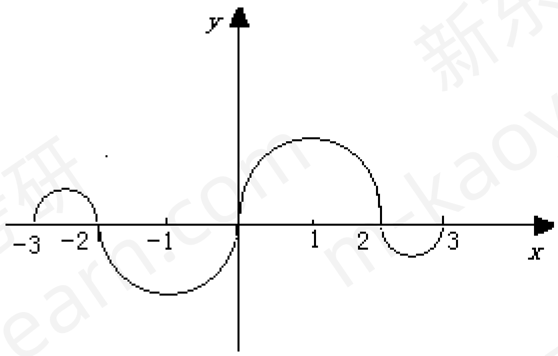
（1）当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$　（B）$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　（D）$1-\cos\sqrt{x}$　[　　]

（2）函数 $f(x)=\dfrac{(e^x+e)\tan x}{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e\right)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$　（　　）

（A）0　（B）1　（C）$-\dfrac{\pi}{2}$　（D）$\dfrac{\pi}{2}$

（3）如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0],[0,2]$ 的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周，设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是：



（A）$F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$　(B) $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

（C）$F(3)=\dfrac{3}{4}F(2)$　（D）$F(3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$　[　　]

（4）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是：

（A）若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则$f(0)=0$　（B）若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在，则$f(0)=0$.

（B）若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在，则$f'(0)=0$　（D）若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在，则$f'(0)=0$.

[　　]

（5）曲线$y=\dfrac{1}{x}+\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$的渐近线的条数为

（A）0.　（B）1.　（C）2.　（D）3.　[　　]

（6）设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有二阶导数，且$f''(x)>0$，令$u_n=f(n)$，则下列结论正确的是：

(A)　若$u_1>u_2$，则$\{u_n\}$必收敛.　(B)　若$u_1>u_2$，则$\{u_n\}$必发散

(C) 若$u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必收敛.　(D)　若$u_1<u_2$，则$\{u_n\}$必发散.　[　　]

（7）二元函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的一个充要条件是

（A）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left[f(x,y)-f(0,0)\right]=0$.

（B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$,且$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$.

（C）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

（D）$\lim\limits_{x\to 0}\left[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)\right]=0$,且$\lim\limits_{y\to 0}\left[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)\right]=0$.

（8）设函数$f(x,y)$连续，则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$等于

（A）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$　（B）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$

（C）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$　（D）$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$

（9）设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则下列向量组线性相关的是

线性相关，则

(A)　$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$　(B)　$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

(C)　$\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$.　(D)　$\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$.　[　　]

（10）设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则$A$与$B$

(A) 合同且相似　　　　　　　　　　（B）合同，但不相似.

(C) 不合同，但相似.　　　　　　　　(D) 既不合同也不相似　　　　　　　　[　　]

二、填空题：11～16 小题，每小题 4 分，共 24 分. 把答案填在题中横线上.

（11） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$ ________.

（12）曲线 $\begin{cases}x=\cos t+\cos^2 t\\ y=1+\sin t\end{cases}$ 上对应于 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 的点处的法线斜率为________.

（13）设函数 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $y^{(n)}(0)=$________.

（14） 二阶常系数非齐次微分方程 $y''-4y'+3y=2\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

（15） 设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{x}{y}\right)$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

（16）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为________ .

三、解答题：17～24 小题，共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（17） (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 上单调、可导的函数，且满足 $\displaystyle\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$，其中 f^{-1} 是 f 的反函数，求 $f(x)$.

（18）（本题满分 11 分）

设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}(a>1,0\le x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域.

（Ⅰ）求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$；

（Ⅱ）当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值.

（19）（本题满分 10 分）求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解

（20）（本题满分 11 分）已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数，且 $f'(0)=1$，函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 所确定，设 $z=f\left(\ln y-\sin x\right)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0},\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

（21） (本题满分 11 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，

$f(a)=g(a), f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

（22） (本题满分 11 分)

设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases} x^2, & |x|+|y|\le 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & 1<|x|+|y|\le 2 \end{cases}$，计算二重积分 $\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，

其中 $D=\left\{(x,y)\big||x|+|y|\le 2\right\}$.

（23） (本题满分 11 分)

设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2+ax_3=0 \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$ 与方程 $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.