2012 年全国硕士研究生入学统一考试
数学三试题解析

一、 选择题

(1) 【答案】C

【分析】本题考查渐近线的概念与求法.

【详解】水平渐近线：

因为 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以该曲线只有一条水平渐近线；

铅直渐近线：

函数 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的定义域为 $x\neq\pm1$，又因为 $\lim\limits_{x\to1} y=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，$\lim\limits_{x\to-1} y=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$，所以该曲线只有一条铅直渐近线；

斜渐近线：

因为 $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以该曲线没有斜渐近线。

故应选(C).

(2) 【答案】A

【分析】考查导数定义或求导公式。本题既可以用导数定义求，也可求出导函数再代入点。

【详解】法一：由题设知 $f(0)=0$

而 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

法二：因为 $f'(x)=e^x(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)2e^{2x}\cdots(e^{nx}-n)$

$$+\cdots+(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots ne^{nx}$$

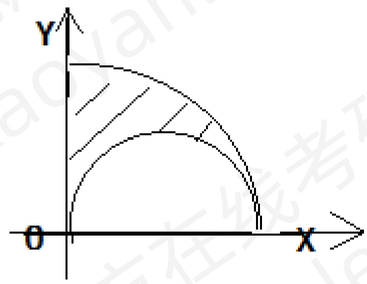
所以 $f'(0)=1(-1)(-2)\cdots(-(n-1))=(-1)^{n-1}(n-1)!$，故应选（A）

(3) **【答案】** B

【分析】 考查不同坐标系下交换二次积分的次序。写出对用的二重积分积分域 D 的不等式，画出草图，即可完成。

【详解】 由题意知积分区域 D 不等式是

$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}, 2\cos\theta\le r\le 2$，从而积分区域 D 是由 $r=2\cos\theta$，$r=2$，（$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$）围成，即 $(x-1)^2+y^2=1$，$x^2+y^2=2^2$ 围成的第一象限的区域，如图所示 。 所以



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)rdr$$

$$=\iint_D f(x^2+y^2)dxdy \;=\int_0^2 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)dy$$

故应选（B）。

(4) **【答案】** D

【分析】 本题考查绝对收敛与条件收敛的概念与级数敛散的判定。

【详解】 由级数 $\sum_{i=1}^{n}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛知，正项级数 $\sum_{i=1}^{n}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 收敛，因为 $\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}\sim\frac{\sqrt{n}}{n^\alpha}=\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}(n\to\infty)$，所以级数 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$ 收敛，故 $\alpha-\frac{1}{2}>1$，即 $\frac{3}{2}<\alpha$；

又级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，所以 $0<2-\alpha\le 1$，解得 $1\le\alpha<2$；

综上可得 $\frac{3}{2}<\alpha<2$。故应选（D）。

(5) **【答案】** C

【分析】 考查向量组线性相关的判定. 三个三维向量构成的向量组既可以用行列式是否为零来判是否线性相关，又可以利用矩阵的秩来讨论。本题利用行列式判定快速、直接。

【详解】 因为$|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=-c_1$；

$$|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4)|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\0&1&1\\c_1&c_2&c_4\end{vmatrix}=c_1;$$

$$|(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=0;$$

$$|(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\1&-1&1\\c_2&c_3&c_4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&-1\\1&0&1\\c_2&c_3+c_4&c_4\end{vmatrix}=(c_3+c_4)。$$

由于c_1,c_2,c_3,c_4为任意常数，所以$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$线性相关。故应选（C）。

（6）**【答案】**B

【分析】考查矩阵的运算。将Q用P表示，即$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，然后代入计算即可。

【详解】由于$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，所以$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}，故$$

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

故应选（B）。

（7）**【答案】**D

【分析】考查均匀分布的概念、随机变量独立的概念、二维随机变量概率的计算。

【详解】X 与 Y 都服从区间 $[0,1]$ 上的均匀分布，所以 X 与 Y 的概率密度函数分别为，

$$f_X(x)=\begin{cases}1,0\le x\le 1\\ 0,\text{其它}\end{cases}\quad ,\ f_Y(y)=\begin{cases}1,0\le y\le 1\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$

又因为随机变量 X 与 Y 相互独立，所以随机变量 X 与 Y 的联合概率密度函数为：

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}1,\ 0\le x,y\le 1\\ 0,\quad \text{其他}\end{cases},$$

所以 $P\{X^2+Y^2\le 1\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D} dxdy=\dfrac{\pi}{4}$ （其中 D 是 $x^2+y^2\le 1$ 在第一象限部分）

故应选（D）。

（8）**【答案】**B

【分析】本题考查统计量的分布，只需记住常用的统计量的分布即可得到答案。

【详解】因为 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，所以
$X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)$，$\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，$X_3+X_4\sim N(2,2\sigma^2)$，
$\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)$，$(\dfrac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma})^2=\dfrac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}\sim\chi^2(1)$，所以
$\dfrac{\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\dfrac{(X_3+X_4-2)^2}{2\sigma^2}}}\sim t(1)$，即 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}\ \square\ t(1)$。故应选（B）。

二、填空题

（9）**【分析】**考查未定式的极限、洛必达法则。将幂指函数写成指数形式。

【详解】法一：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln\tan x}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\sin x\cos x}}{-\sin x-\cos x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{-(\sin x+\cos x)\sin x\cos x}}=e^{-\sqrt{2}}$$

法二：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[1+(\tan x-1)]^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2 t}{-\sin x-\cos x}}=e^{\frac{2}{-\sqrt{2}}}=e^{-\sqrt{2}}$$

（10）$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=(\ln x-1)'\big|_{x=e}=\frac{1}{e}$

【分析】本题主要考查复合函数求表达式及复合函数求导数。先利用分析法得到 $y=f(f(x))$ 的表达式，再求导数，或直接根据分段函数的定义用复合函数求导法求导数。

【详解】法一：由于 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, x\ge 1\\ 2x-1, x<1\end{cases}$，所以

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2x}, x>1\\ 2, x<1\end{cases}$， $f(e)=\frac{1}{2}$， $f'(e)=\frac{1}{2e}$， $f'(\frac{1}{2})=2$

从而 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=\left\{f'[f(x)]f'(x)\right\}\big|_{x=e}=f'[f(e)]f'(e)==f'(\frac{1}{2})f'(e)=\frac{1}{e}$

法二：$y=f(f(x))=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)}, f(x)\ge 1\\ 2f(x)-1, f(x)<1\end{cases}$，而 $f(x)\ge 1\Leftrightarrow x\ge e^2$，$f(x)<1\Leftrightarrow x<e^2$

所以 $y=f(f(x))=\begin{cases}\ln\sqrt{f(x)}, x\ge e^2\\ 2f(x)-1, x<e^2\end{cases}=\begin{cases}\ln\sqrt{\ln\sqrt{x}}, x\ge e^2\\ 2\ln\sqrt{x}-1, 1\le x<e^2\\ 2(2x-1)-1, x<1\end{cases}$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln(\ln x)-\ln 2), x\ge e^2\\ \ln x-1, 1\le x<e^2\\ 4x-3, x<1\end{cases}$$

从而 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=e}=(\ln x-1)'\big|_{x=e}=\frac{1}{e}$

（11）$dz\big|_{(0,1)}=2dx-dy$。

【分析】本题考查全微分的概念与多元函数连续的定义。

【详解】由于 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，，所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}[f(x,y)-2x+y-2]=0$

又由于函数 $z=f(x,y)$ 连续，从而 $f(0,1)=1$。

令 $x=0+\Delta x, y=1+\Delta y$，则

$$0=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[f(0+\Delta x,1+\Delta y)-f(0,1)]-2\Delta x+\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

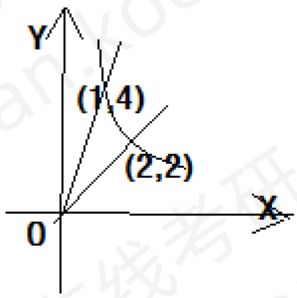
从而 $[f(0+\Delta x,1+\Delta y)-f(0,1)]=2\Delta x-\Delta y+o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

故由全微分的定义知：$dz\big|_{(0,1)}=2dx-dy$。

(12) 【分析】本题考查定积分应用. 画出草图, 求出交点, 代公式计算即可.

【详解】 画出草图如右下图所示，可求得曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 的交点分别为 $(2,2)$，$(1,4)$ 所以

$$S=\int_0^1(4x-x)dx+\int_1^2(\frac{4}{x}-x)dx=\frac{3}{2}+(4\ln x-\frac{x^2}{2})\Big|_1^2=4\ln 2$$ 。



(13) $|BA^*|=-27$

【分析】考查伴随矩阵的性质与矩阵行列式的性质与运算。

【详解】由于 $|B|=-|A|=-3$，$|A^*|=|A|^2=9$，所以 $|BA^*|=-27$。

(14) 3/4

【分析】本题考查事件的概率、条件概率、 互不相容的概念。

【详解】由条件概率的定义，$P(AB|\overline{C})=\dfrac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}$，因为 A,C 互不相容，所以 $AC=\varnothing$，$ABC=\varnothing$，故 $P(ABC)=0$，$P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)=P(AB)$，从而原式 $=\dfrac{P(AB)}{1-P(C)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$。

三、解答题

（15）**【分析】**本题是未定式的极限、主要考查等价无穷小代换、洛必达法则或泰勒公式。

【详解】 法一：
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{x^2-2+2\cos x}-1)e^{2-2\cos x}}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{x^2-2+2\cos x}-1)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{6x^2}$$
$$=\frac{1}{12}$$

法二：
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{(e^{x^2-2+2\cos x}-1)e^{2-2\cos x}}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{x^2-2+2\cos x}-1)}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4))}{x^4}=\frac{1}{12}$$

（16）**【分析】**考查无界区域上二重积分的计算。

【详解】由题意知 $\displaystyle\iint_D e^x xydxdy=\lim_{a\to0^+}\int_a^1dx\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}xye^xdy=\lim_{a\to0^+}\int_a^1e^xx\frac{y^2}{2}\Big|_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to0^+}\int_a^1(1-x^2)e^xdx=\frac{1}{2}\lim_{a\to0^+}[(1-x^2)e^x\Big|_a^1+2\int_a^1xe^xdx]$$

$$=\frac{1}{2}(-1+2\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 xe^x dx)=\frac{1}{2}[-1+2\lim_{a\to 0^+}(x-1)e^x\Big|_a^1]=\frac{1}{2}$$

（17）**【分析】**本题考查微积分在经济中的用应。主要涉及的知识点、边际的概念及经济意义、成本函数的概念、条件极值。

【详解】（Ⅰ）由题意知 $C_x'(x,y)=20+\frac{x}{2}$，对 x 积分得

$$C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+\varphi(y)$$

从而 $C_y'(x,y)=\varphi'(y)$，由题设 $\varphi'(y)=6+y$，故 $\varphi(y)=6y+\frac{1}{2}y^2+C$

综上可得：$C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{1}{2}y^2+C$。

因为固定成本为 10000（万元）即 $C(0,0)=10000$（万元），求得 $C=10000$，所以求生产甲乙两种产品的总成本函数为 $C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{1}{2}y^2+10000$（万元）

（Ⅱ）即求 $C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{1}{2}y^2+10000$ 在条件 $x+y=50$ 下的最小值。

法一：构造拉格朗日函数

$$L=C(x,y)+\lambda(x+y-50)$$

解方程组 $\begin{cases} L_x'=20+\frac{1}{2}x+\lambda=0 \\ L_y'=6+y+\lambda=0 \\ L_\lambda'=x+y-50=0 \end{cases}$ 可得驻点 $(x,y)=(24,26)$。

由于实际问题必存在最小值，且有唯一驻点，所以当 $x=24$，$y=26$ 时，即甲乙两种的产量分别为 24、26 时，可以使总成本最小。最小总成本是 $C(24,26)=11118$（万元）

法二：因为 $x+y=50$，所以 $y=50-x$，所以成本函数化为

$$Z=C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6(50-x)+\frac{1}{2}(50-x)^2+10000$$

$$=\frac{3}{4}x^2-36x+11550$$

则$Z'=\frac{3}{2}x-36$，可求得驻点$x=24$，此时$y=26$。

由于实际问题必存在最小值，且有唯一驻点，所以当$x=24$，$y=26$时，即甲乙两种的产量分别为 24、26 时，可以使总成本最小。最小总成本是$C(24,26)=11118$（万元）

（Ⅲ）当总产量为 50 件时且总成本最小时$x=24$，$y=26$边际成本$C_x'(24,26)=32$，表示在总产量为 50 件时，甲产品为 24 件时，这时改变甲产品一个单位的产量，成本会发生 32 万元的改变。

(18) **【分析】**证明函数不等式，由于不等式的形状为$f(x)\le g(x)$，故用最大最小值法完成。

【详解】令$f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2},-1<x<1$，则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x})-\sin x-x=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x$$

$$f''(x)=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}-\cos x-1=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1>0,(-1<x<1)$$

从而$f'(x)$单调递增，又因为$f'(0)=0$，所以当$-1<x<0$时，$f'(x)<0$；当$0<x<1$时，$f'(x)>0$，从而$f(0)=0$是$f(x)$在区间$(-1,1)$内的最小值，从而当$-1<x<1$时，恒有$f(x)\ge f(0)$，即$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ge 0$，亦即

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$$

(19) **【分析】**（Ⅰ）求出方程$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$的通解代入方程$f'(x)+f(x)=2e^x$确定任意常数即可，或方程$f'(x)+f(x)=2e^x$两端求导数与$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$解出$f(x)$;（Ⅱ）将（Ⅰ）中得到的函数表达式代入$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$，然后利用常规方法求得拐点。

【详解】（Ⅰ）法一：$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$的特征方程为$\lambda^2+\lambda-2=0$，解得$\lambda_1=-2,\lambda_2=1$,所以$f(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x$；

将$f(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$代入$f'(x)+f(x)=2e^{x}$，得$-C_1e^{-2x}+2C_2e^{x}=2e^{x}$，所以$C_1=0$，$C_2=1$，故$f(x)=e^{x}$。

法二：方程$f'(x)+f(x)=2e^{x}$两端求导数得

$$f''(x)+f'(x)=2e^{x}$$

将上式代入$f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$，可得$f(x)=e^{x}$。

（Ⅱ）由于$y=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$，从而

$$y'=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+1$$

$$y''=2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+4x^2e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x=2(1+2x^2)e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+2x$$

从而定义域内y''为零或不存在点只有$x=0$，而

当$x>0$时，$2(1+2x^2)e^{x^2}>0$，因为$e^{-t^2}>0$，所以$\int_0^x e^{-t^2}dt>0$，$2x>0$，所以$y''>0$

当$x<0$时，$2(1+2x^2)e^{x^2}>0$，因为$e^{-t^2}>0$，所以$\int_0^x e^{-t^2}dt<0$，$2x<0$，所以$y''<0$

又$y(0)=0$，所以$(0,0)$是曲线$y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$的拐点。

（20）**【分析】**考查行列式的计算、线性方程组解的存在性定理。（Ⅰ）按第一列展开；（Ⅱ）对增广矩阵进行初等航变换化为阶梯型求出a，进一步化为行最简形求通解。

【详解】（Ⅰ） $|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$

（Ⅱ）对增广矩阵进行初等行变换，有

$$(A\vdots b)=\begin{bmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & a & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & a & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & a & 0\\0 & 0 & 0 & 1-a^4 & -a-a^2\end{bmatrix}$$

因为线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，所以 $\begin{cases}1-a^4=0\\-a-a^2=0\end{cases}$，解得 $a=-1$。

将增广矩阵进一步化为行最简形，有

$$(A\vdots b)\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1 & -1\\0 & 0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

从而可知导出组的基础解系为 $\eta=(1,1,1,1)^T$，非齐次方程的特解为 $\eta^*=(0,-1,0,0)^T$，所以通解为 $x=k(1,1,1,1)^T+(0,-1,0,0)^T$，其中 k 为任意常数。

（21）**【分析】**考查矩阵秩的概念与求法及其性质、特征值与特征向量的求法。（Ⅰ）利用秩的性质得到矩阵 A 的秩为 2，再利用初等行变换将 A 化为阶梯型即可求出 a；（Ⅱ）求出矩阵 B 的特征值与全部线性无关的特征向量，将他们正交化、单位化可得到正交矩阵 Q。

【详解】（Ⅰ）由于 $r(A)=r(A^TA)$，而二次型的秩为 2，即 $r(A^TA)=2$，故 $r(A)=2$。

对矩阵 A 作初等行变换化为阶梯型，有

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & a\\0 & a & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & a+1\\0 & a+1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & a+1 & 0\\0 & 0 & a+1\end{pmatrix}$$

从而 $r(A)=2\Leftrightarrow a=-1$。此时

$$\text{二次型矩阵 } B=A^TA=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & 0 & -1\\1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\-1 & 0 & -1\\0 & -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\0 & 2 & 2\\2 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

（Ⅱ）由于 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & (2-\lambda) & 0\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-4\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & -2\\ -2 & -4 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda)$$

所以矩阵 B 的特征值为 $\lambda_1=0,\quad \lambda_2=2,\quad \lambda_3=6$

解方程组 $(0E-B)X=0$，得其基础解系为 $\alpha_1=(1,1,-1)^T$，即矩阵 B 属于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量为 α_1；

解方程组 $(2E-B)X=0$，得其基础解系为 $\alpha_2=(1,-1,0)^T$，即矩阵 B 属于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量为 α_2；

解方程组 $(6E-B)X=0$，得其基础解系为 $\alpha_3=(1,1,2)^T$，即矩阵 B 属于特征值 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量为 α_3。

由于实对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 相互正交，再将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化得：

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T,\qquad \beta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T,\qquad \beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$，则 Q 是正交矩阵，则在正交变换 $x=Qy$ 下，二次型 f 化为标准型为 $f=2y_2^2+6y_3^2$。

（22）**【分析】**考查离散型随机变量分布律的性质、联合概率分布，数字特征。（Ⅰ）根据概率性质及所给条件写出 (X,Y) 联合概率分布，即可求出；（Ⅱ）$Cov(X-Y,Y)$ 的计算，注意 $Cov(X-Y,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)-DY$。

【详解】（Ⅰ）由题设知 $P\{XY=2\}=0$，

而　$P\{XY=2\}=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=1\}$

由概率性质可知$P\{X=1,Y=2\}\geq 0$，$P\{X=2,Y=1\}\geq 0$，从而

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=2,Y=1\}=0$$

又$P\{X=2,Y=2\}=P\{XY=4\}=\frac{1}{12}$，$P\{X=1,Y=1\}=P\{XY=1\}=\frac{1}{3}$

而

$X \backslash Y$	0	1	2	P_i
0	a	b	c	$\frac{1}{2}$
1	d	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
2	e	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
P_j	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

显然由表及概率性质可得$b=0$，$c=\frac{1}{4}$，$d=0$，$e=\frac{1}{12}$，进而得到$a=\frac{1}{4}$。

从而$P\{X=2Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$

（Ⅱ）$Cov(X-Y,Y)=Cov(X,Y)-Cov(Y,Y)=Cov(X,Y)-D(Y)$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)-DY$$

而 $EX=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，$EY=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}=1$

$E(XY)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{1}{3}+2\times 0+4\times\frac{1}{12}=\frac{2}{3}$，$EY^2=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

所以$Cov(X-Y,Y)==E(XY)-E(X)E(Y)-[E(Y^2)-(E(Y))^2]$

$$=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 1-[\frac{5}{3}-1]=-\frac{2}{3}$$

因为$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，所以$\rho_{XY}=0$

（23）**【分析】**考查了随机变量独立的概念、概率密度的概念及求法、随机变量的数字特征等知识点。（Ⅰ）先求分布函数，进而得到概率密度；（Ⅱ）求出随机变量U的概率密度，利用数学期望的公式分别计算EV,EU。

【详解】（Ⅰ）由已知条件知，随机变量X和Y的概率密度分别为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-x},x>0\\0,x\le 0\end{cases}，\quad f(y)=\begin{cases}e^{-y},y>0\\0,y\le 0\end{cases}$$

所以随机变量X和Y的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-x},x>0\\0,x\le 0\end{cases}，\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-y},y>0\\0,y\le 0\end{cases}$$

从而$V=\min(X,Y)$的分布函数为

$$F_V(v)=P\{\min(X,Y)\le v\}=1-P\{\min(X,Y)>v\}$$

$$=1-P\{X>v,Y>v\}\overset{X,Y独立}{=}1-P\{X>v\}P\{Y>v\}$$

$$=1-(1-F_X(v))(1-F_Y(v))$$

$$=\begin{cases}1-(e^{-v})^2,v>0\\0,v\le 0\end{cases}$$

故随机变量V的概率密度$f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases}2e^{-2v},v>0\\0,v\le 0\end{cases}$

（Ⅱ）$U=\max(X,Y)$的分布函数为

$$F_U(u)=P\{\max(X,Y)\le u\}=P\{X\le u,Y\le u\}\overset{X,Y独立}{=}P\{X\le u\}P\{Y\le u\}$$

$$=\begin{cases}(1-e^{-u})^2,u>0\\0,u\le 0\end{cases}$$

所以U的密度函数为$f_U(u)=F_U'(u)=\begin{cases}2e^{-u}-2e^{-2u},u>0\\0,u\le 0\end{cases}$

又$E(V)=\int_{-\infty}^{+\infty}vf_V(v)dv=\int_0^{+\infty}2ve^{-2v}dv=\frac{1}{2}$

$$E(U)=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)dv=\int_0^{+\infty}u(2e^{-u}-2e^{-2u})du=\frac{3}{2}$$

所以$E(U+V)=E(U)+E(V)=2$