2010年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^{x}\right]=1$，则 a 等于

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解，若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解，$\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则

(A) $\lambda=\frac{1}{2}$，$\mu=\frac{1}{2}$　　(B) $\lambda=-\frac{1}{2}$，$\mu=-\frac{1}{2}$

(C) $\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{1}{3}$　　(D) $\lambda=\frac{2}{3}$，$\mu=\frac{2}{3}$

(3) 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数，且 $g'(x)<0, g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f(g(x))$ 在 x_0 的极大值的一个充分条件是

(A) $f'(a)<0$　　(B) $f'(a)>0$

(C) $f''(a)<0$　　(D) $f''(a)>0$

（4）设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有（）

（A） $g(x)<h(x)<f(x)$　　（B） $h(x)<g(x)<f(x)$

（C） $f(x)<g(x)<h(x)$　　（D） $g(x)<f(x)<h(x)$

（5）设向量组Ⅰ：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r$ 可由向量组Ⅱ：$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s$ 线性表示，下列命题正确的是（）

（A）若向量组Ⅰ线性无关，则 $r\le s$

（B）若向量组Ⅰ线性相关，则 $r>s$

（C）若向量组Ⅱ线性无关，则 $r\le s$

（D）若向量组Ⅱ线性相关，则 $r>s$

（6）设 A 为 4 阶对称矩阵，且 $A^2+A=O$，若 A 的秩为 3，则 A 相似于（）

（A） $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　（B） $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

（C） $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　（D） $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

（7）设随机变量的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{2} & 0\le x<1\\ 1-e^{-x} & x\ge 1\end{cases}$，则 $P\{x=1\}=$（）

（A）0　　（B） $\frac{1}{2}$　　（C） $\frac{1}{2}-e^{-1}$　　（D） $1-e^{-1}$

（8）设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若 $f(x)=\begin{cases}af_1(x) & x\le 0\\ bf_2(x) & x>0\end{cases}(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 a,b 应满足（）

（A） $2a+3b=4$　　（B） $3a+2b=4$

（C） $a+b=1$　　（D） $a+b=2$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

（9）设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-x^2}dx=\int_0^x x\sin^2 t dt$ 确定，则 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=$___

（10）设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x\left(1+\ln^2 x\right)}}\left(e\le x<+\infty\right)$ 下方，x 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积是_______

（11）设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$_______

（12）若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$_______

（13）设 A, B 为 3 阶矩阵，且 $|A|=3,|B|=2,\left|A^{-1}+B\right|=2$，则 $\left|A+B^{-1}\right|=$_______

（14）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自整体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 则 $ET=$_______

三、解答题：15~23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

（16）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D (x+y)^3 dxdy$，其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成。

（17）（本题满分 10 分）

求函数 $M=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值。

（18）（本题满分 10 分）

（Ⅰ）比较 $\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n|\ln t|dt\,(n=1,2,\cdots)$ 的大小，说明理由。

（Ⅱ）设 $u_n=\int_0^1|\ln t|\left[\ln(1+t)\right]^n dt\,(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且 $2f(0)=\int_0^2 f(x)dx=f(2)+f(3)$。

（Ⅰ）证明：存在 $\eta\in(0,2)$ 使 $f(\eta)=f(0)$

（Ⅱ）证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$

已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解

（Ⅰ）求 λ,a

（Ⅱ）求方程组 $Ax=b$ 的通解

（23）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ -1 & 3 & a\\ 4 & a & 0\end{pmatrix}$，正交矩阵 Q 使得 Q^TAQ 为对角矩阵，若 Q 的第一列为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，求 a,Q。

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$，

$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$，求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$。

（23）（本题满分 11 分）

箱内有 6 个球，其中红，白，黑球的个数分别为 1，2，3 个，现从箱中随机的取出 2 个球，记 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数。

（Ⅰ）求随机变量 (X,Y) 的概率分布

（Ⅱ）求 $\operatorname{cov}(X,Y)$