2013 硕士研究生入学考试数学三真题

1. 当 x→0 时，用“o（x）”表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是

A. $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　B.$o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

C.$o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　D.$o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

2. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

3. 设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$ 位于第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy$（k=1,2,3,4），则

A.$I_1>0$,　　B. $I_2>0$,　　C. $I_3>0$,　　B. $I_4>0$

4. 设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是

A. 若 $a_n>a_{n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n>a_{n+1}$

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 p>1，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n$ 存在

D. 若存在常数 p>1，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pa_n$ 存在,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

5. 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 AB=C,且 B 可逆，则

A. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

B. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

C. 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

D. 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

6. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&b&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为（　　）

A. a=0,b=2　　B. $a=0,b$ 为任意常数

C. a=2,b=0　　D. $a=2,b$ 为任意常数

7. 设 x_1, x_2, x_3 是随机变量，且 $x_1\sim N(0,1),x_2\sim N(0,2^2),x_3\sim N(5,3^2),P_j=P\{-2\le x_j\le 2\}(j=1,2,3)$,则

A.$P_1>P_2>P_3$　　B.$P_2>P_1>P_3$　　C.$P_3>P_1>P_2$　　D.$P_1>P_3>P_2$

8. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 P{X+Y=2}=

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{2}$

9. 设曲线 y=f(x)与 $y=x^2-x$ 在点（1，0）处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)$=________.

10. 设函数 z=z(x,y)由方程（z+y）^{x}=xy 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}$=________.

11. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$________.

12. 微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解为 y=________.

13. 设 $A=(a_{ij})$是 3 阶非零矩阵，$|A|$为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0$(i，j=1,2,3)，则$|A|$=__________.

14. 设随机变量 X 服从标准正态分布 N（0，1），则 $E(Xe^{2X})=$__________.

三、解答题

15.当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x,\cos 2x,\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小，求 n 与 a 的值。

16.设 D 是由曲线 $y=x^{\frac{1}{3}}$，直线 $x=a(a>0)$ 及 x 轴所围成的平面图形，V_x,V_y 分别是 D 绕 x 轴，y 轴旋转一周所得旋转体的体积，若 $V_y=10V_x$，求 a 的值。

17.设平面区域 D 由直线 $x=3y,y=3x$ 及 $x+y=8$ 围成，计算 $\iint\limits_D x^2dxdy$。

18.设生产某产品的固定成本为 6000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为 $P=60-\frac{Q}{1000}$,(P 是单价，单位：元，Q 是销量，单位：件)，已知产销平衡，求：

（1）该商品的边际利润；

（2）当 P=50 时的边际利润，并解释其经济意义；

（3）使得利润最大的定价 P。

19.设函数 f(x)在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$，证明

（1）存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；

（2）对（1）中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{a}$。

20. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 AC-CA=B,并求所有矩阵 C。

21. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

(A) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

(B) 若 α,β 正交且均为单位向量，证明 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$。

22.设（X,Y）是二维随机变量，X 的边缘概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}3x^3, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$ 在给定 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，Y 的条件概率密度为 $f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

（1）求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；

（2）求 Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$。

（3）求 $P\{X>2Y\}$.

23. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其他\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

（1） 求 θ 的矩估计量;

（2） 求 θ 的最大似然估计量。