2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为 ( )

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$ ( )

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　(B) $(-1)^n(n-1)!$　　(C) $(-1)^{n-1}n!$　　(D) $(-1)^n n!$

(3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{2\cos\theta}^{2}f(r^2)r\mathrm{d}r=$ ( )

(A) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^2\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x$

(4) 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 ( )

(A) $0<\alpha\le\dfrac{1}{2}$　　(B) $\dfrac{1}{2}<\alpha\le 1$　　(C) $1<\alpha\le\dfrac{3}{2}$　　(D) $\dfrac{3}{2}<\alpha<2$

(5)设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为( )

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　(C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　(D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 $Q^{-1}AQ=$ ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(C) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(7)设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间（0.1）上的均匀分布，则 $P\left\{X^2+Y^2\le 1\right\}=$ ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{\pi}{8}$　　(D) $\dfrac{\pi}{4}$

(8)设 X_1,X_2,X_3,X_4 为来自总体 $N(1,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为 ( )

(A) N（0,1）　　(B) t(1)　　(C) $\chi^2(1)$　　(D) $F(1,1)$

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\tan x\right)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$________

(10)设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln\sqrt{x} & ,x\geq 1\\ 2x-1 & ,x<1\end{cases}$， $y=f\left(f\left(x\right)\right)$，则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e}=$________

(11)设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 则 $\mathrm{d}z\,|_{(0,1)}=$______

(12)由曲线 $y=\dfrac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中围成的平面图形的面积为________

(13)设 A 为 3 阶矩阵，$\left|A\right|=3$，A^* 为 A 的伴随矩阵。若交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，则 $\left|BA^*\right|=$________

(14)设 A、B、C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\dfrac{1}{2},P(C)=\dfrac{1}{3}$,则 $P(AB\,|\,\overline{C})=$_

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}$

(16)计算二重积分 $\iint e^x xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x},y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

(17)某企业为生产甲、乙两种型号的产品，投入的固定成本为 10000（万元），设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x（件）和 y（件），且这两种产品的边际成本分别为 $20+\dfrac{x}{2}$（万元/件）与 $6+y$（万元/件）。

（I）求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$（万元）；

（II）当总产量为 50 件时，甲、乙两种产品的产量各为多少时可使总成本最小？求最小成本；

（III）求总产量为 50 件且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义.

(18)证明：$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\dfrac{x^2}{2}(-1<x<1)$

(19)已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$

（I）求 $f(x)$ 的表达式；

（II）求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

(20)设 $A=\begin{bmatrix}1 & a & 0 & 0\\ 0 & 1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1 & a\\ a & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

（I）计算行列式 $\left|A\right|$；

（II）当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

(21)已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & a\\ 0 & a & -1\end{pmatrix}$，二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=x^T\left(A^TA\right)x$ 的秩为 2，

（I）求实数 a 的值；

（II）求正交变换 $x = Qy$ 将 f 化为标准形.

（22）

设二维离散型随机变量 X 、Y 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$

（I）求 $P\{X = 2Y\}$；

（II）求 $\mathrm{Cov}(X - Y, Y)$.

（23）设随机变量 X 与 Y 相互独立，且服从参数为 1 的指数分布. 记 $U = \max\{X, Y\}$，$V = \min\{X, Y\}$

（I）求 V 的概率密度 $f_V(v)$；

（II）求 $E(U + V)$.