# 2019 年全国硕士研究生入学统一考试

# 数学（二）试题参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1、当 $x \to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 $x^k$ 是同阶无穷小，则 $k=$（　　）

A. $1$　　B. $2$　　C. $3$　　D. $4$

【答案】C

【解析】$x-\tan x \sim -\dfrac{x^3}{3}$，所以选 C.

2、函数 $y = x\sin x + 2\cos x(-\dfrac{\pi}{2}$剟$x$　$\dfrac{3\pi}{2})$ 的拐点为（　　）

A. $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$　　B. $(0,2)$　　C. $(\pi,-2)$　　D. $(\dfrac{3\pi}{2},-\dfrac{3\pi}{2})$

【答案】C.

【解析】令 $y''=-x\sin x=0$，可得 $x=0$，$x=\pi$，又 $y'''=-\sin x - x\cos x$，因 $y'''(0)=0$，$y'''(\pi)=\pi \neq 0$，因此拐点坐标为 $(\pi,-2)$.

3、下列反常积分发散的是（　　）

A. $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$　　C. $\int_0^{+\infty} \dfrac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

【答案】D

【解析】$\int_0^{+\infty} \dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^{+\infty} = +\infty$，其他的都收敛，选 D.

4、已知微分方程 $y''+ay'+by=c\mathrm{e}^x$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x$，则 $a,b,c$ 依次为（　　）

A. $1,0,1$　　B. $1,0,2$　　C. $2,1,3$　　D. $2,1,4$

【答案】D.

【解析】由通解形式知，$\lambda_1=\lambda_2=-1$，故特征方程为 $(\lambda+1)^2=\lambda^2+2\lambda+1=0$，所以 $a=2,b=1$，又由于 $y^*=\mathrm{e}^x$ 是 $y''+2y'+y=ce^x$ 的特解，代入得 $c=4$.

5 、 已 知 积 分 区 域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|,, \dfrac{\pi}{2}\}$ ， $I_1=\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ， $I_2=\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$I_3=\iint_D (1-\cos\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，试比较 $I_1,I_2,I_3$ 的大小（　　）

A. $I_3<I_2<I_1$　　B. $I_1<I_2<I_3$　　C. $I_2<I_1<I_3$　　D. $I_2<I_3<I_1$

【答案】A

【解析】在区域 D 上 $0\le x^2+y^2\le\frac{\pi^2}{4}$，令 $\sqrt{x^2+y^2}=u$，所以 $\sin\sqrt{x^2+y^2}\le\sqrt{x^2+y^2}$，

从而 $I_2<I_1$，构造函数 $f(u)=1-\cos u-u$，$f'(u)=\sin u-1\le 0$，单调递减，

所以 $1-\cos u-u\le f(0)=0$，即 $(1-\cos\sqrt{x^2+y^2})\le\sqrt{x^2+y^2}$，所以 $I_3<I_1$

构造函数 $g(u)=\sin u-1+\cos u$，$g'(u)=\cos u-\sin u$，在 $u\in[0,\frac{\pi}{4})$ 时 $g(u)$ 单调递增，

在 $u\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$g(u)$ 单调递减，$g(0)=0,g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1>0$，

所以 $\sin u\ge 1-\cos u$，即 $\sin\sqrt{x^2+y^2}\ge 1-\cos\sqrt{x^2+y^2}$，所以 $I_3<I_2$.

所以 $I_3<I_2<I_1$，答案选 A

6、已知 $f(x),g(x)$ 的二阶导数在 $x=a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 在 $x=a$ 处相切及曲率相等的（　　）

A. 充分非必要条件.　　B. 充分必要条件.

C. 必要非充分条件.　　D. 既非充分又非必要条件.

【答案】A

【解析】充分性:利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)-g''(x)}{2}=0.$$

从而有 $f(a)=g(a),f'(a)=g'(a),f''(a)=g''(a)$，即相切，曲率也相等.

反之，由曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 在 $x=a$ 处相切及曲率相等得 $f(a)=g(a),f'(a)=g'(a)$，$\frac{|f''(a)|}{\{1+[f'(a)]^2\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{|g''(a)|}{\{1+[g'(a)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$，所以 $|f''(a)|=|g''(a)|$，即 $f''(a)=g''(a)$ 或 $f''(a)=-g''(a)$；此时 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-g'(x)}{2(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)-g''(x)}{2}$ 未必是 $0$，

故选 A.

7、设 $\mathbf{A}$ 是四阶矩阵，$\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，若线性方程组 $\mathbf{Ax=0}$ 的基础解系中只有 2 个

向量，则 $\mathbf{A}^*$ 的秩是（　　）

A. 0　　　　　　B. 1　　　　　　C. 2　　　　　　D. 3

【答案】 A.

【解析】由于方程组基础解系中只有 2 个向量，则 $4-r(\mathbf{A})=2$，所以 $r(\mathbf{A}^*)=0$.

8、设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 规范形为（　　）

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】C

【解答】由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，可知矩阵的特征值满足方程 $\lambda^2+\lambda-2=0$，解得，$\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$. 再由 $|\boldsymbol{A}|=4$，可知 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$，所以规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 故答案选 C.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9、$\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$__________.

【答案】$4e^2$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(x+2^x)}$，

其中

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\ln(x+2^x)=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+(x+2^x-1)\right]}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{x+2^x-1}{x}=2\lim_{x\to 0}(1+2^x\ln 2)=2(1+\ln 2)$$

所以

$$\lim_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^{2+2\ln 2}=4e^2$$

10、曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 对应点处切线在 $y$ 轴上的截距__________.

【答案】$\dfrac{3}{2}\pi+2$

【解析】因 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$，当 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 时，$x=\dfrac{3}{2}\pi+1, y=1, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-1$，所以在 $t=\dfrac{3}{2}\pi$ 对应点处切线方程为 $y=-x+\dfrac{3}{2}\pi+2$，得切线在 $y$ 轴上的截距为 $\dfrac{3}{2}\pi+2$

11、设函数 $f(u)$ 可导，$z=yf(\dfrac{y^2}{x})$，则 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________.

【答案】$yf(\frac{y^2}{x})$

【解析】$\frac{\partial z}{\partial x}=yf'(\frac{y^2}{x})(-\frac{y^2}{x^2})=-\frac{y^3}{x^2}f'(\frac{y^2}{x})$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f(\frac{y^2}{x})+yf'(\frac{y^2}{x})(\frac{2y}{x})=f(\frac{y^2}{x})+\frac{2y^2}{x}f'(\frac{y^2}{x})$$

所以 $2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=yf(\frac{y^2}{x})$

12、设函数 $y=\ln\cos x(0\leq x\leq\frac{\pi}{6})$ 的弧长为__________.

【答案】$\frac{1}{2}\ln 3$

【解析】弧长 $s=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{1+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sec x\mathrm{d}x$

$$=\ln|\sec x+\tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}=\ln\sqrt{3}=\frac{1}{2}\ln 3$$

13、已知函数 $f(x)=x\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$__________.

【答案】$\frac{1}{4}(\cos 1-1)$

【解析】设 $F(x)=\int_1^x\frac{\sin t^2}{t}\mathrm{d}t$，则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xF(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}[x^2F(x)]\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\mathrm{d}F(x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2F'(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\frac{\sin x^2}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 x\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cos x^2\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\cos 1-1)$$

14、已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{bmatrix}$，$A_{ij}$ 表示 $|\boldsymbol{A}|$ 中 $(i,j)$ 元的代数余子式，则

$A_{11}-A_{12}=$__________.

【解析】

$$A_{11}-A_{12}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&-1&1\\3&-2&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\-2&-1&-1&1\\3&1&2&-1\\0&0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\1&2&-1\\0&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1&1\\0&1&0\\0&3&4\end{vmatrix}=-4$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15、（本题满分 10 分）

已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, x>0,\\ xe^{x}+1, x\le 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值．

【解析】$x>0$ 时，$f'(x)=(e^{2x\ln x})'=e^{2x\ln x}(2\ln x+2)$；$x<0$ 时，$f'(x)=(x+1)e^{x}$；

又 $f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{e^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{2x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}2\ln x=-\infty$，

所以 $f'(0)$ 不存在，因此

$$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(1+\ln x), & x>0,\\ (x+1)e^{x}, & x<0.\end{cases}$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1, x_3=\dfrac{1}{e}$；另外 $f(x)$ 还有一个不可导点 $x_2=0$；

又 $(-\infty,-1)$ 为单调递减区间，$(-1,0)$ 为单调递增区间，$(0,\dfrac{1}{e})$ 为单调递减区间，$(\dfrac{1}{e},+\infty)$ 为单调递增区间；因此有极小值 $f(-1)=1-\dfrac{1}{e}$ 和极小值 $f(\dfrac{1}{e})=e^{-\frac{2}{e}}$，极大值 $f(0)=1$.

16、（本题满分 10 分）

求不定积分 $\displaystyle\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx.$

【解析】$\displaystyle\int\frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx=\int[-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{(x-1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}]dx$

$$=-2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\ln(x^2+x+1)+C$$

17、（本题满分 10 分）

$y=y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}$ 满足 $y(1)=\sqrt{e}$ 的特解.

（1）求 $y(x)$；

（2）设平面区域 $D=\{(x,y\}|1\le x\le 2, 0\le y\le y(x)\}$，求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的

体积.

【解析】$y(x)=e^{\int x\mathrm{d}x}\left(\int e^{\int -x\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+C\right)=e^{\frac{x^2}{2}}(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x+C)=e^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+C)$；

又由 $y(1)=\sqrt{e}$ 得 $C=0$，最终有 $y(x)=\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}}$.

（2）所求体积

$$V=\int_1^2\pi(\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}})^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}(e^4-e).$$

18、已知平面区域 $D$ 满足 $|x|\le y,(x^2+y^2)^3\le y^4$，求 $\iint_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解析】由 $|x|\le y$ 可知区域 $D$ 关于 $y$ 轴对称，在极坐标系中，$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{3\pi}{4}$；将

$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 代入 $(x^2+y^2)^3\le y^4$ 得 $r\le\sin^2\theta$；

由奇偶对称性，有

$$\iint_D\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin^2\theta}\frac{r\sin\theta}{r}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\theta\mathrm{d}\theta=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\theta)^2\mathrm{d}\cos\theta=\frac{43\sqrt{2}}{120}$$

19、设 $n$ 为正整数，记 $S_n$ 为曲线 $y=e^{-x}\sin x(0\le x\le n\pi)$ 与 $x$ 轴所围图形的面积，求 $S_n$，

并求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

【解析】设在区间 $[n\pi,(n+1)\pi]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 上所围的面积记为 $u_n$，则

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-x}\sin x\mathrm{d}x;$$

记 $I=\int e^{-x}\sin x\mathrm{d}x$，则 $I=-\int e^{-x}\mathrm{d}\cos x=-(e^{-x}\cos x-\int\cos x\mathrm{d}e^{-x})$

$$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\mathrm{d}\sin x=-e^{-x}\cos x-(e^{-x}\sin x-\int\sin x\mathrm{d}e^{-x})$$

$$=-e^{-x}(\cos x+\sin x)-I,$$

所以 $I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C$；

因此 $u_n=(-1)^n(-\frac{1}{2})e^{-x}(\cos x+\sin x)\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\frac{1}{2}(e^{-(n+1)\pi}+e^{-n\pi})$；

（这里需要注意 $\cos n\pi=(-1)^n$）

因此所求面积为$\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}$.

20、已知函数$u(x,y)$满足$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=0$，求$a,b$的值，使得在变换$u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$下，上述等式可化为$v(x,y)$不含一阶偏导数的等式.

【解析】$\frac{\partial u}{\partial x}=v'_x\mathrm{e}^{ax+by}+va\mathrm{e}^{ax+by}$，

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=v''_{xx}\mathrm{e}^{ax+by}+v'_xa\mathrm{e}^{ax+by}+v'_xa\mathrm{e}^{ax+by}+va^2\mathrm{e}^{ax+by}=v''_{xx}\mathrm{e}^{ax+by}+2av'_x\mathrm{e}^{ax+by}+a^2v\mathrm{e}^{ax+by}$

同理，可得$\frac{\partial u}{\partial y}=v'_y\mathrm{e}^{ax+by}+bv\mathrm{e}^{ax+by}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=v''_{yy}\mathrm{e}^{ax+by}+2bv'_y\mathrm{e}^{ax+by}+b^2v\mathrm{e}^{ax+by}$；

将所求偏导数代入原方程，有

$$\mathrm{e}^{ax+by}[2v''_{xx}-2v''_{yy}+(4a+3)v'_x+(3-4b)v'_y+(2a^2-2b^2+3a+3b)v]=0,$$

从而$4a+3=0,3-4b=0$，因此$a=-\frac{3}{4},b=\frac{3}{4}$.

21、已知函数$f(x,y)$在$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(0)=0,f(1)=1,\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$，证明：

（1）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$；

（2）存在$\eta\in(0,1)$，使得$f''(\eta)<-2$.

【解析】(1) 由积分中值定理可知，存在$c\in(0,1)$，使得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=(1-0)f(c)$，即$f(c)=1$.

因此$f(c)=f(1)=1$，由罗尔定理知存在$\xi\in(c,1)\subset(0,1)$，使得$f'(\xi)=0$.

（2）设$F(x)=f(x)+x^2$，则有$F(0)=0,F(c)=1+c^2,F(1)=2$；由拉格朗日中值定理可得：存在$\eta_1\in(0,c)$，使得$F'(\eta_1)=\frac{F(c)-F(0)}{c-0}=\frac{c^2+1}{c}$；存在$\eta_2\in(c,1)$，使得$F'(\eta_2)=\frac{F(1)-F(c)}{1-c}=\frac{1-c^2}{1-c}=1+c$；对于函数$F'(x)$，由拉格朗然中值定理同样可得，

存在$\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(0,1)$，使得$F''(\eta)=\frac{F'(\eta_2)-F'(\eta_1)}{\eta_2-\eta_1}=\frac{(c+1)-\frac{c^2+1}{c}}{\eta_2-\eta_1}=\frac{1-\frac{1}{c}}{\eta_2-\eta_1}<0$，

即$f''(\eta)+2<0$；结论得证.

22、已知向量组

（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix}$，（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}$，

若向量组（Ⅰ）和向量组（Ⅱ）等价，求$a$的取值，并将$\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

【解析】令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，因向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，故

$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$作初等行变换：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{bmatrix}$$

当$a=1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$；当$a=-1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，但$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$；

当$a\neq\pm1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$. 综上，只需$a\neq-1$即可.

（1）当$a=1$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{\beta}_3=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$的等价

方程组为$\begin{cases}x_1=3-2x_3,\\x_2=-2+x_3.\end{cases}$，通解为$x=k\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}$ （$k$为任意常数）

从而$\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(k-2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$（$k$为任意常数）；

（2）当$a\neq\pm1$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，求解得$x=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

所以$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

23、已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$与$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$相似，

（1）求$x,y$；

（2）求可逆矩阵$\mathbf{P}$使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$

【解析】（1）

方法一，相似矩阵有相同的特征值，因此有$\begin{cases}-2+x-2=2-1+y, \\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\end{cases}$

又$|\boldsymbol{A}|=-2(4-2x)$，$|\boldsymbol{B}|=-2y$，所以$x=3, y=-2$.

方法二，观察得$\mathbf{A}$必有一个特征值为$-2$，$\mathbf{B}$的特征值为$2,-1,y$，因此由$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$相似得

两个矩阵特征值相等，得$y=-2$，再由$-2+x-2=2-1+y$，得$x=3$

（2）易知$B$的特征值为$2,-1,-2$；因此

$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，取$\boldsymbol{\xi}_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，取$\boldsymbol{\xi}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，取$\boldsymbol{\xi}_3=(-1,2,4)^{\mathrm{T}}$

令$P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则有$P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$；

同理可得，对于矩阵$\boldsymbol{B}$，有矩阵$P_2=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，所以

$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$，即$B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}$，所以

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$