2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\text{-}\arctan x}{x^k}=c$，其中 k,c 为常数，且 $c\neq 0$，则（　）

(A) $k=2,c=\dfrac{-1}{2}$　(B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$　(C) $k=3,c=\dfrac{-1}{3}$　(D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

【答案】D

【解析】因为 $c\neq 0$

$$c=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}\overset{洛}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{kx^{k-1}(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{kx^{k-1}}=\frac{1}{k}\lim_{x\to 0}x^{3-k}$$

所以 $3-k=0,k=3,c=\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{3}$,故选D

(2) 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 的切平面方程为（　）

(A) $x-y+z=-2$　(B) $x+y+z=0$　(C) $x-2y+z=-3$　(D) $x-y-z=0$

【答案】A

【解析】曲面在点 $(0,1,-1)$ 处的法向量为

$$\vec{n}=(F'_x,F'_y,F'_z)\big|_{(0,1,-1)}=(2x-y\sin(xy)+1,-x\sin(xy)+z,y)\big|_{(0,1,-1)}=(1,-1,1)$$

故曲面在点 $(0,1,-1)$ 处的切面方程为 $1\cdot(x-0)-(y-1)+(z+1)=0$,

即 $x-y+z=-2$，选 A

(3) 设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|,b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\cdots)$. 令 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $s(-\dfrac{9}{4})=$（　）

(A) $\dfrac{3}{4}$　(B) $\dfrac{1}{4}$　(C) $-\dfrac{1}{4}$　(D) $-\dfrac{3}{4}$

【答案】C

【解析】$f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|=\begin{cases}\frac{1}{2}-x, & x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ x-\frac{1}{2}, & x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$

将 $f(x)$ 作奇延拓，得周期函数 $F(x)$，周期T=2

则 $F(x)$ 在点 $x=-\frac{9}{4}$ 处连续，从而

$S(-\frac{9}{4})=F(-\frac{9}{4})=F(-\frac{1}{4})=-F(\frac{1}{4})=-\mathrm{f}(\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$

故选 C

(4) 设 $L_1:x^2+y^2=1, L_2:x^2+y^2=2, L_3:x^2+2y^2=2, L_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记 $I_i=\oint_{L_i}(y+\frac{y^3}{6})dx+(2x-\frac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$．则 $\max\left\{I_1,I_2,I_3,I_4\right\}=$ （　）

（A）I_1　（B）I_2　（C）I_3　(D) I_4

【答案】D

【解析】记 $P=y+\frac{y^3}{6},Q=2x-\frac{x^3}{3}$，则 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2-x^2-1-\frac{y^2}{2}=1-\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)$，

$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)dx+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)dy=\iint_{D_i}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_{D_i}\left[1-\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)\right]dxdy$.

用 D_i 表示 L_i 所围区域，则有 $I_1=\frac{5}{8}\pi,I_2=\frac{1}{2}\pi,I_3=\frac{3\sqrt{2}}{8},I_4=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi,I_4>I_1>I_3>I_2$.

故选 D

(5) 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$，且 B 可逆，则 （　）

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

(D) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

【答案】B

【解析】将 A,C 按列分块，$A=(\alpha_1,...,\alpha_n),C=(\gamma_1,...,\gamma_n)$

由于 $AB=C$，故

$$(\alpha_1,...,\alpha_n)\begin{pmatrix}b_{11} & ... & b_{1n}\\ . & ... & .\\ b_{n1} & ... & b_{nn}\end{pmatrix}=(\gamma_1,...,\gamma_n)$$

即 $\gamma_1 = b_{11}\alpha_1 + \ldots + b_{n1}\alpha_n, \ldots, \gamma_n = b_{1n}\alpha_1 + \ldots + b_{nn}\alpha_n$

即 C 的列向量组可由 A 的列向量线性表示

由于 B 可逆，故 $A = CB^{-1}$， A 的列向量组可由 C 的列向量组线性表示，选 B

(6) 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充要条件为 ( )

(A) $a = 0, b = 2$ (B) $a = 0, b$ 为任意常数

(C) $a = 2, b = 0$ (D) $a = 2, b$ 为任意常数

【答案】B

【解析】令 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$， $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

因为 A 为实对称矩阵， B 为对角阵，则 A 与 B 相似的充要条件是 A 的特征值分别为 $2, b, 0$

A 的特征方程 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ 0 & \lambda - b & -a \\ -\lambda & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & -a & -1 \\ 0 & \lambda - b & -a \\ 0 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda\left[(\lambda - 2)(\lambda - b) - 2a^2\right],$$

因为 $\lambda = 2$ 是 A 的特征值，所以 $|2E - A| = 0$

所以 $-2a^2 = 0$，即 $a = 0$.

当 $a = 0$ 时， $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - b)$，

A 的特征值分别为 $2, b, 0$ 所以 b 为任意常数即可. 故选 B.

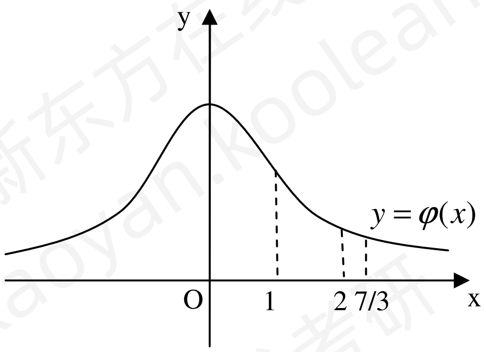
(7) 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,2^2), X_3 \sim N(5,3^2)$，

$p_i = P\{-2 \le X_i \le 2\} (i = 1,2,3)$,则 ( )

(A) $p_1 > p_2 > p_3$ (B) $p_2 > p_1 > p_3$ (C) $p_3 > p_1 > p_2$ (D) $p_1 > p_3 > p_2$

【答案】A
【解析】
$p_1 = P\{-2 \le X_1 \le 2\} = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1,$
$p_2 = P\{-2 \le X_2 \le 2\} = P\left\{\frac{-2-0}{2} \le \frac{X_2 - 0}{2} \le \frac{2-0}{2}\right\} = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1,$
$p_3 = P\{-2 \le X_3 \le 2\} = P\left\{\frac{-2-5}{3} \le \frac{X_3 - 5}{3} \le \frac{2-5}{3}\right\} = \Phi(-1) - \Phi\left(-\frac{7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{7}{3}\right) - \Phi(1),$

由下图可知，$p_1 > p_2 > p_3$，选 A.



（8）设随机变量 $X \sim t(n)$，$Y \sim F(1,n)$，给定 $\alpha\ (0<\alpha<0.5)$，常数 c 满足 $P\left\{X > c\right\} = \alpha$，

则 $P\left\{Y > c^2\right\} =$（　）

（A）α　　（B）$1-\alpha$　　（C）2α　　（D）$1-2\alpha$

【答案】C

【解析】$X \sim t(n)$，则 $X^2 \sim F(1,n)$

$$P\left\{Y > c^2\right\} = P\left\{X^2 > c^2\right\} = P\left\{X > c\right\} + P\left\{X < -c\right\} = 2P\left\{X > c\right\} = 2\alpha，选 C.$$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y - x = e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right] =$ ________

【答案】1
【解析】 $x = 0$ 时，$y = 1$
方程两边对 x 求导得 $y' - 1 = e^{x(1-y)}(1 - y - xy')$ 所以 $y'(0) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f(\frac{1}{n})-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f(\frac{1}{n})-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=1$$

（10）已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}, y_2=e^x-xe^{2x}, y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，则该方程的通解 $y=$__________

【答案】 $y=c_1(e^{3x}-e^x)+c_2e^x-xe^{2x}$

【解析】 $y_1-y_2=e^{3x}-e^x, y_2-y_3=e^x$,

对应齐次微分方程的通解 $y^2=c_1(e^{3x}-e^x)+c_2e^x$

非齐次微分方程的通解 $y=c_1(e^{3x}-e^x)+c_2e^x-xe^{2x}$

(11) 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ （t 为常数），则 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$__________

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}=t$,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\cos t},\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$$

(12) $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ _______.

【答案】$\ln 2$

【解析】$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\left.\frac{\ln x}{(1+x)}\right|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(1+x)}=\ln\left.\frac{x}{(1+x)}\right|_1^{+\infty}=\ln 2$

(13) 设 $A=(a_{ij})$ 是 3 阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$ 则 $|A|=$__________

【答案】-1.

【解析】方法一：取矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，满足题设条件，$|A|=-1$.

方法二：$A^*=-A^T$，则 $|A^*|=|-A^T|$，整理得到 $|A|^{3-1}=(-1)^3|A|$，即 $|A|=-1$ 或者 $|A|=0$.

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-\left(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2\right)\le 0$$

又因为 $A\ne O$，所以至少有一个 $a_{ij}\ne 0$，所以

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}=-\left(a_{i1}^2+a_{i2}^2+a_{i3}^2\right)<0$$

从而 $|A|=-1$.

（14）设随机变量 Y 服从参数为1的指数分布，a 为常数且大于零，则 $P\{Y\le a+1|Y>a\}=$____.

【答案】$1-\frac{1}{e}$

【解析】$f(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\0, & y\le 0,\end{cases}$

$$P\{Y\le a+1|Y>a\}=\frac{P\{Y>a,Y\le a+1\}}{P\{Y>a\}}=\frac{\int_a^{a+1}f(y)dy}{\int_a^{+\infty}f(y)dy}=\frac{e^{-a}-e^{-(a+1)}}{e^{-a}}=1-\frac{1}{e}$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$

【解析】$f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}dt$，则 $f'(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$，$f(1)=0$

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\int_0^1 f(x)d\sqrt{x}=2\left[f(x)\sqrt{x}\right]\Big|_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}f'(x)dx$$

$$=2f(1)-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{x}\sqrt{x}dx=-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}dx=-4\int_0^1\ln(x+1)d\sqrt{x}$$

$$=-4\left[\ln(x+1)\sqrt{x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx\right]=-4\ln 2+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

其中 $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx \underset{\substack{x=t^2\\dx=2tdt}}{\overset{\sqrt{x}=t}{=}} \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}.2tdt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}dt = 2\int_0^1 dt - 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

$= 2\left[t - \arctan t\right]\Big|_0^1 = 2(1-\frac{\pi}{4})$

所以原式 $= -4\ln 2 + 8(1-\frac{\pi}{4}) = 8 - 2\pi - 4\ln 2$

(16) (本题满分 10 分)

设数列$\{a_n\}$满足条件：$a_0 = 3, a_1 = 1, a_{n-2} - n(n-1)a_n = 0 (n \ge 2)$, $S(x)$ 是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数

(I) 证明：$S''(x) - S(x) = 0$

(II) 求 $S(x)$ 的表达式

【解析】 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$

$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$

$S''(x) - S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n\right]x^n$

因为$n(n-1)a_n - a_{n-2} = 0, n \ge 2$，所以$(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n = 0 (n \ge 0)$.

所以$\begin{cases} S''(x) - S(x) = 0, \\ S(0) = a_0 = 3, \\ S'(0) = a_1 = 1. \end{cases}$

(II) $\lambda^2 - 1 = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$，所以 $S(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x$.

又 $S(0) = 3, S'(0) = 1$，所以 $C_1 = 1, C_2 = 2$，$S(x) = e^{-x} + 2e^x$.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x,y) = (y + \frac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值

【解析】令 $f_x' = e^{x+y}(x^2 + y + \frac{x^3}{3}) = 0$，$f_y' = e^{x+y}(1 + y + \frac{x^3}{3}) = 0$

解得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -1 \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$

$f''_{xx}=e^{x+y}(2x+2x^2+y+\frac{x^3}{3})$ $f''_{xy}=e^{x+y}(1+x^2+y+\frac{x^3}{3})$ $f''_{yy}=e^{x+y}(2+y+\frac{x^3}{3})$

$A=f''_{xx}\big|_{\left(1,-\frac{4}{3}\right)}=3e^{\frac{-1}{3}}$ ，$B=f''_{xy}\big|_{\left(1,-\frac{4}{3}\right)}=e^{\frac{-1}{3}}$ ，$C=f''_{yy}\big|_{\left(1,-\frac{4}{3}\right)}=e^{\frac{-1}{3}}$

$AC-B^2=3e^{\frac{-2}{3}}-e^{\frac{-2}{3}}=2e^{\frac{-2}{3}}>0$

又 $A>0$

所以 $\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)$ 为 $f(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $f\left(1,-\dfrac{4}{3}\right)=-e^{\frac{-1}{3}}$

$A=f''_{xx}\big|_{\left(1,-\frac{2}{3}\right)}=-e^{\frac{-5}{3}}$，$B=f''_{xy}\big|_{\left(1,-\frac{2}{3}\right)}=e^{\frac{-5}{3}}$，$C=f''_{yy}\big|_{\left(1,-\frac{2}{3}\right)}=e^{\frac{-5}{3}}$

因为 $AC-B^2<0$，所以 $(-1,-\dfrac{2}{3})$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(18) (本题满分 10 分)

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$.

证明:（I）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$.

（II）存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

【解析】（I）由于 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数，故 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(0)=0$
令 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(1)=f(1)-1=0$
$F(0)=f(0)-0=0$，由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0,$ 即 $f'(\xi)=1$.

（II）由于 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为奇函数，则 $f'(x)$ 在 $[-1,1]$ 上为偶函数，所以由（1）

$f'(-\xi)=f'(\xi)=1$.

令 $G(x)=e^x\left[f'(x)-1\right]$，则 $G(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $\left(-1,1\right)$ 内可导，且

$G(\xi)=G(-\xi)=0$，由罗尔定理存在 $\eta\in(-\xi,\xi)\subset(0,1)$，使得 $G'(\eta)=0$

即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

(19) (本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0)$，$B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面

$z=0, z=2$ 所围成的立体为 Ω.（I）求曲面 Σ 的方程，（II）求 Ω 的形心坐标.

【解析】

（I）$\overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$，所以直线 L 方程 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

设 Σ 上任一点 y 由直线 L 上的点 $F(y)$ 绕 z 轴旋转一周得到，则

$$\begin{cases} x^2+y^2={x_0}^2+{y_0}^2 \\ z=z_0 \end{cases}$$

又 $\dfrac{x_0-1}{-1}=\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{z_0}{1}$，所以 Σ 方程为 $x^2+y^2=(1-z)^2+z^2=2z^2-2z+1$

（II）$x^2+y^2-2(z-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{2}$

设形心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，几何体关于 xoz, yoz 对称，$\bar{x}=\bar{y}=0$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} z dv}{\iiint\limits_{\Omega} dv}=\frac{\int_0^2 z dz \iint\limits_{x^2+y^2\le 2z^2-2z+1} dxdy}{\int_0^2 dz \iint\limits_{x^2+y^2\le 2z^2-2z+1} dxdy}=\frac{\pi\int_0^2(2z^3-z^2+z)dz}{\pi\int_0^2(2z^2-2z+1)dz}=\frac{7}{5}.$$

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a，b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$. 并求所有矩阵 C.

【解析】设 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}$，由于 $AC-CA=B$，故

$$\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix},$$

即 $\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}.$

$$\begin{cases} -x_2+ax_3=0 \\ -ax_1+x_2+ax_4=1 \\ x_1-x_3-x_4=1 \\ x_2-ax_3=b \end{cases} \quad (\mathrm{I})$$

由于矩阵C存在，故方程组(I)有解. 对(I)的增广矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & \vdots & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & \vdots & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & b \end{pmatrix}$$

方程组有解，故$a+1=0$, $b=0$，即$a=-1,b=0$，此时存在矩阵C使得$AC-CA=B$.

当$a=-1,b=0$时，增广矩阵变为$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$

x_3,x_4为自由变量，令$x_3=1,x_4=0$，代为相应齐次方程组，得$x_2=-1,x_1=1$.

令$x_3=0,x_4=1$，代为相应齐次方程组，得$x_2=0,x_1=1$.

故$\xi_1=(1,-1,1,0)^T$, $\xi_2=(1,0,0,1)^T$, 令$x_3=0,x_4=0$，得特解$\eta=(1,0,0,0)^T$，方程组的通解

为$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\eta=(k_1+k_2+1,-k_1,k_1,k_2)^T$, 所以$C=\begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

（I） 证明二次型f对应的矩阵为$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$；

（II） 若α,β正交且为单位向量，证明f在正交交换下的标准形为$2y_1^2+y_2^2$.

【解析】证明：(I) $f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$

$$= 2(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(a_1,a_2,a_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} + (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}(b_1,b_2,b_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$= (x_1,x_2,x_3)\left(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$= x^T Ax$，其中 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$，其中 $x = (x_1,x_2,x_3)^T$.

所以二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$.

(II) 由于 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$，$\alpha$ 与 β 正交, 故 $\alpha^T\beta = 0$，α，β 为单位向量, 故 $\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^T\alpha} = 1$,

故 $\alpha^T\alpha = 1$, 同样 $\beta^T\beta = 1$.

$A\alpha = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha$, 由于 $\alpha \neq 0$, 故 A 有特征值 $\lambda_1 = 2$.

$A\beta = (2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T)\beta = \beta$, 由于 $\beta \neq 0$, 故 A 有特征值 $\lambda_2 = 1$.

$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \le r(2\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 1+1 = 2 < 3$.

所以 $|A| = 0$, 故 $\lambda_3 = 0$.

因此, f 在正交变换下的标准形为 $2{y_1}^2 + {y_2}^2$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & 其他, \end{cases}$，令随机变量 $Y = \begin{cases} 2, & X \le 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \ge 2 \end{cases}$

(I) 求 Y 的分布函数;

(II) 求概率 $P\{X \le Y\}$.

【解析】设 y 的分布函数为 $F(y)$，则

$F(y) = P\{Y \le y\} = P\{Y \le y, X \le 1\} + P\{Y \le y, 1 < X < 2\} + P\{Y \le y, X \ge 2\}$

$= P\{2 \le y, X \le 1\} + P\{X \le y, 1 < X < 2\} + P\{1 \le y, X \ge 2\}$

当 $y < 1$ 时，$F(y) = 0$，

当$1 \le y < 2$时，$F(y)=P\{X \le y, 1 < X < 2\}+P\{X \ge 2\}=P\{1 < X \le y\}+P\{X \ge 2\}$

$$=\int_1^y \frac{1}{9}x^2dx+\int_2^3 \frac{1}{9}x^2dx=\frac{1}{27}(y^3-1)+\frac{1}{27}(3^3-2^3)=\frac{1}{27}(y^3+18)$$

当$y \ge 2$时，$F(y)=P\{X \le 1\}+P\{1 < X < 2\}+P\{X \ge 2\}=1$

(23)(本题满分 11 分)

设总体X的概率密度为$f(x;\theta)=\begin{cases} \dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$其中$\theta$为未知参数且大于零，

$X_1, X_2, \cdots X_n$为来自总体X的简单随机样本

(I)求θ的矩估计量；

(II)求θ的最大似然估计量.

【解析】

(I) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x;\theta)dx=\int_0^{+\infty} x\cdot\frac{\theta^2}{x^3}\cdot e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}\cdot e^{-\frac{\theta}{x}}dx=\theta\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\theta}{x}}d\left(-\frac{\theta}{x}\right)=-\theta$

令$\overline{X}=E(X)$，则$\overline{X}=-\theta$，即θ的矩估计量为$\theta=-\overline{X}$，其中$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

(II) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}(\dfrac{\theta^2}{x_i^3}e^{-\frac{\theta}{x_i}}), x_i>0(i=1,2,\cdots n) \\ 0, \qquad 其它\end{cases}$

当$x_i>0(i=1,2,\cdots n)$时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\frac{\theta^2}{x_i^3}\cdot e^{-\frac{\theta}{x_i}})$

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}[2\ln\theta-\ln x_i^3-\frac{\theta}{x_i}]$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{2}{\theta}-\frac{1}{x_i})=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=0$$

解得$\theta=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}$　　所以θ的最大似然估计量$\widehat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}}$