

2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题及答案

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$ 收敛,则 ()

- (A) $a < 1$ 且 $b > 1$. (B) $a > 1$ 且 $b > 1$.
(C) $a < 1$ 且 $a + b > 1$. (D) $a > 1$ 且 $a + b > 1$.

【答案】(C)

【解析】排除法. 根据被积函数特点, 取 $a=0$, $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^b} = \frac{1}{1-b} (1+x)^{1-b} \Big|_0^{+\infty}$
 $= \frac{1}{1-b} [\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+x)^{b-1}} - 1]$ 收敛, 只需保证 $b > 1$ 即可. 说明, $a < 1$ 可以使原广义积分收敛, 排除 B 和 D.

再取 $a=-1, b=2$, $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x)-1 dx}{(1+x)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} - \int_0^{+\infty} \frac{1 dx}{(1+x)^2}$
 $= \ln(1+x) \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{1+x} \Big|_0^{+\infty} = +\infty$, 发散, 说明满足 A 的条件, 但是原广义积分发散, 排除 A.

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ()

- (A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$
(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1, \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

【答案】(D)

【解析】当 $x < 1$ 时, $F(x) = \int 2(x-1) dx = x^2 - 2x + C_1$;

当 $x \geq 1$ 时, $F(x) = \int \ln x dx = x \ln x - x + C_2$; 且 $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2x + C_1) = -1 + C_1$,

$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln x - x + C_2) = -1 + C_2$. 由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = F(1)$ 可知: $C_1 = C_2$.

取 $C_1 = C_2 = C$, 其原函数为 $F(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + C, & x < 1 \\ x \ln x - x + C, & x \geq 1 \end{cases}$. 当 $C = 1$ 时, 对应的原函数为 D.

(3) 若 $y = (1 + x^2)^2 - \sqrt{1 + x^2}$, $y = (1 + x^2)^2 + \sqrt{1 + x^2}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 则 $q(x) =$ ()

- (A) $3x(1 + x^2)$. (B) $-3x(1 + x^2)$. (C) $\frac{x}{1 + x^2}$. (D) $-\frac{x}{1 + x^2}$.

【答案】(A)

【解析】因为 $y_1(x) = (1 + x^2)^2 - \sqrt{1 + x^2}$ 和 $y_2(x) = (1 + x^2)^2 + \sqrt{1 + x^2}$ 为 $y' + p(x)y = q(x)$ 的两个解, 那么, $y_2(x) - y_1(x) = 2\sqrt{1 + x^2}$ 为 $y' + p(x)y = 0$ 的解. 代入该齐次方程可得

$\frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}} + p(x) \cdot 2\sqrt{1 + x^2} = 0$, 故, $p(x) = -\frac{x}{1 + x^2}$. 再将 $y_2(x) = (1 + x^2)^2 + \sqrt{1 + x^2}$ 代入原方程可得

$4x(1 + x^2) + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} - \frac{x}{1 + x^2}[(1 + x^2)^2 + \sqrt{1 + x^2}] = q(x)$, 所以, $q(x) = 3x(1 + x^2)$, 选择 A.

(4) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, & n = 1, 2, \dots, \end{cases}$ 则 ()

- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. (B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
(C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导. (D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

【答案】(D)

【解析】因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 可得, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$,

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续. 又因为 $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$,

$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{n}}{x - 0}$, 而 $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$, 有 $n \leq \frac{1}{x} < n+1$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $n \rightarrow \infty$,

可得 $1 \leq \frac{1}{nx} < \frac{n+1}{n} \rightarrow 1 (x \rightarrow 0^+)$, 那么 $f'_+(0) = 1$. 所以, $f(x)$ 在 $x = 0$ 点可导. 选择 D.

(5) 设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ()

- (A) A^T 与 B^T 相似. (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似..
(C) $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似. (D) $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似.

【答案】(C)

【解析】 A 与 B 相似, 即存在可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$, 则

$$B^T = (P^{-1}AP)^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^T)^{-1} = \left((P^T)^{-1}\right)^{-1} A^T (P^T)^{-1}, \text{ 即 (A) 是正确说法;}$$

$$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}A^{-1}P, \text{ 进一步有}$$

$$B + B^{-1} = P^{-1}AP + P^{-1}A^{-1}P = P^{-1}(A + A^{-1})P, \text{ 即 (B) (D) 都是正确说法;}$$

故选 (C) .

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$, 则 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为 ()

- (A) 单叶双曲面. (B) 双叶双曲面.
(C) 椭球面. (D) 柱面.

【答案】(B)

【解析】二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, 由

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 1)^2 = 0$$

得, A 的特征值为 $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, 所以经过正交变换后, $f(x_1, x_2, x_3) = 5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$,

于是 $f(x_1, x_2, x_3) = 2$ 表示曲面 $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 2$, 是双叶双曲面. 故选 (B) .

(7) 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则 ()

- (A) p 随着 μ 的增加而增加. (B) p 随着 σ 的增加而增加.

(C) p 随着 μ 的增加而减少.

(D) p 随着 σ 的增加而减少.

【答案】B

【解析】

$$P\{X \leq \mu + \sigma^2\} = \Phi\left(\frac{\mu + \sigma^2 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(\sigma)$$

由于正态分布的分布函数是单调递增的, 所以 $P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$ 随着 σ 的增加而增加.

(8) 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3 , 且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$, 将试验 E 独

立重复做 2 次, X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数, Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数,

则 X 与 Y 的相关系数为

()

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{2}$

【答案】(A)

【解析】方法一:

(X, Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

$$E(X) = E(Y) = \frac{2}{3}, \quad E(XY) = \frac{2}{9}, \quad \text{所以 } \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{2}{9}$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{8}{9}, \quad D(X) = D(Y) = \frac{4}{9}$$

$$\text{所以相关系数 } \rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}} = -\frac{1}{2}$$

方法二:

设 Z 表示 2 次试验中结果 A_3 发生的次数, 则 $X + Y + Z = 2$ 。

根据方差的性质有 $D(Y) = D(2 - X - Z) = D(X + Z) = D(X) + D(Z) + 2\text{Cov}(X, Z)$, 注意到 $D(Y) = D(X) = D(Z)$, $\text{Cov}(X, Z) = \text{Cov}(X, Y)$, 从而 $D(X) = -2\text{Cov}(X, Y)$ 。所以根据相关

系数的定义有 $\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -\frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(X)}} = -\frac{1}{2}$ 。

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上。

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{【解析】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1 + t \sin t) dt}{\frac{1}{2}x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1 + x \sin x)}{2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{2x^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$(10) \text{向量场 } A(x, y, z) = (x + y + z)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k} \text{ 的旋度 } \text{rot} A = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $(0, 1, y - 1)$

$$\text{【解析】 } \text{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y + z & xy & z \end{vmatrix} = (0, 1, y - 1)$$

$$(11) \text{设函数 } f(u, v) \text{ 可微, } z = z(x, y) \text{ 由方程 } (x + 1)z - y^2 = x^2 f(x - z, y) \text{ 确定, 则}$$

$$dz|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $-dx + 2dy$

【解析】 将 $x=0, y=1$ 代入 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 得 $z=1$.

$(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 两边对 x 求偏导得:

$$z + (x+1) \frac{\partial z}{\partial x} = 2xf + x^2 f'_1 \cdot (1 - \frac{\partial z}{\partial x})$$

将 $x=0, y=1, z=1$ 代入上式得 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,1)} = -1$.

$(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 两边对 y 求偏导得:

$$(x+1) \frac{\partial z}{\partial y} - 2y = x^2 (f'_1 \cdot (-\frac{\partial z}{\partial y}) + f'_2)$$

将 $x=0, y=1, z=1$ 代入上式得 $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,1)} = 2$, 所以 $dz|_{(0,1)} = -dx + 2dy$.

(12) 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0) = 1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 由已知得 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-ax^2}{(1+ax^2)^2}$, $f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2ax(3-ax^2)}{(1+ax^2)^3}$,

$$\text{所以 } f'''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2ax(3-ax^2)}{(1+ax^2)^3}}{x} = -2 + 6a,$$

即 $-2 + 6a = 1$, 所以 $a = \frac{1}{2}$.

$$(13) \text{ 行列式 } \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$

$$\begin{aligned}
 \text{【解析】} & \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 4(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\
 & + 2(-1)^{4+3} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (\lambda+1)(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 4 + 3\lambda + 2\lambda^2 + (\lambda+1)\lambda^3 \\
 & = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.
 \end{aligned}$$

(14) 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{x} = 9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 _____.

【答案】(8.2, 10.8)

【解析】 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\bar{x}-a, \bar{x}+a)$

已知 $\bar{x} = 9.5$, 置信上限是 10.8 即 $\bar{x} + a = 10.8$

解得 $a = 1.3$, 所以置信区间为 $(9.5-1.3, 9.5+1.3)$, 即 (8.2, 10.8).

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

已知平面区域 $D = \left\{ (r, \theta) \mid 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$, 计算二重积分 $\iint_D x dx dy$.

【解析】

二重积分为

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D x dx dy \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2 \cos\theta dr \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\
&= \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1+\cos\theta)^3 - 1] \cos\theta d\theta \\
&= \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta] \cos\theta d\theta \\
&= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta + 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta \\
&= 16 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 16 \cdot \frac{2}{3} + \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= 5\pi + \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + ky = 0$, 其中 $0 < k < 1$.

(I) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 收敛;

(II) 若 $y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x) dx$ 的值.

【解析】(I) 证明: 原方程对应的特征方程为 $\lambda^2 + 2\lambda + k = 0$, 则 $\Delta = 2^2 - 4k = 4(1-k) > 0$, 即方程有两个不同的实根, 从而由根与系数的关系可得 $\lambda_1 + \lambda_2 = -2, \lambda_1 \lambda_2 = k$, 再由 $0 < k < 1$ 得

$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, 且原方程的通解为 $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, 则

$$\int_0^{+\infty} y(x) dx = \int_0^{+\infty} (C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}) dx = \left(\frac{C_1}{\lambda_1} e^{\lambda_1 x} + \frac{C_2}{\lambda_2} e^{\lambda_2 x} \right) \Big|_0^{+\infty} = - \left(\frac{C_1}{\lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda_2} \right), \text{ 即 } \int_0^{+\infty} y(x) dx \text{ 收敛.}$$

(II) 有 $y(0)=1, y'(0)=1$ 及 $y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$ 可得
$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1\lambda_1+C_2\lambda_2=1 \end{cases}$$

对 $C_1+C_2=1$ 两端分别同除以 λ_1, λ_2 可得 $\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_1}=\frac{1}{\lambda_1}$ ①

$$\frac{C_1}{\lambda_2}+\frac{C_2}{\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_2} \quad \text{②}$$

则①+②= $\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_2}+\frac{C_2}{\lambda_1}+\frac{C_1}{\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$, 则

$$\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_2}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}-\frac{C_2}{\lambda_1}-\frac{C_1}{\lambda_2}=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}-\frac{C_1\lambda_1+C_2\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}=\frac{-2}{k}-\frac{1}{k}=\frac{-3}{k}, \text{ 从而}$$

$$\int_0^{+\infty} y(x)dx = -\left(\frac{C_1}{\lambda_1}+\frac{C_2}{\lambda_2}\right) = -\left(\frac{-3}{k}\right) = \frac{3}{k}$$

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 且 $f(0, y) = y+1$, L_t 是从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, t)$ 的光滑

曲线, 计算曲线积分 $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$, 并求 $I(t)$ 的最小值.

【解析】因 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$, 则 $f(x, y) = xe^{2x-y} + \varphi(y)$

又有 $f(0, y) = y+1$, 则 $\varphi(y) = y+1$, $f(x, y) = xe^{2x-y} + y+1$,

又 $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$, 则 $I(t)$ 与路径无关, 即 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$ 是 $f(x, y)$ 的全微分, 则

$$I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy = \int_{L_t} d(f(x, y)) = f(x, y) \Big|_{(0,0)}^{(1,t)}$$

$$= f(1, t) - f(0, 0) = e^{2-t} + t$$

$$I'(t) = 1 - e^{2-t}, \text{ 令 } I'(t) = 0, \Rightarrow t = 2.$$

当 $t > 2$ 时, $I'(t) > 0$, $I(t)$ 是递增的;

当 $t < 2$ 时, $I'(t) < 0$, $I(t)$ 是递减的;

故 $I(t)$ 在 $t = 2$ 时取得最小值, 故 $I(t)_{\min} = I(2) = 3$

(18) (本题满分 10 分)

设有界区域 Ω 由平面 $2x + y + 2z = 2$ 与三个坐标平面围成, Σ 为 Ω 整个表面的外侧, 计算曲

$$\text{面积分 } I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1) dydz - 2y dzdx + 3z dx dy.$$

$$\text{【解析】 } I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1) dydz - 2y dzdx + 3z dx dy$$

$$= \iiint_{\Omega} (2x + 1) dv \therefore I = \int_0^1 (2x + 1) dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{1-x-\frac{y}{2}} dz = \int_0^1 (2x + 1) dx \int_0^{2-2x} \left(1 - x - \frac{y}{2}\right) dy = \frac{1}{2}$$

(19) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 可导, 且 $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 证明:

(I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛;

(II) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$.

【解析】(I) 已知函数 $f(x)$ 可导, 数列满足 $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$,

在 x_n 和 $x_{n-1} (n = 2, 3, \dots)$ 构成的区间上使用拉格朗日中值定理, 得

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}), \quad (\xi_n \text{ 介于 } x_n \text{ 和 } x_{n-1} \text{ 之间})$$

由 $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$, 得

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})| < \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1|,$$

即 $|u_n| = |x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1|$, 又正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} |x_2 - x_1| = |x_2 - x_1| \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛,

由比较审敛法和绝对收敛的定义, 得级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛.

(II) 由(I)中的推导可知, $x_{n+1} - x_n = f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$, 且 $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$,

故 $x_{n+1} - x_n$ 与 $x_n - x_{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$) 同号, 不妨设 $x_2 - x_1 > 0$,

此时级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_{n+1} - x_n)$ 为一个收敛的正项级数, 设 $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)$, 则

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_2 - x_1) = x_n - x_1,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} + x_1$ 存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

由拉格朗日定理得, $f(x) - f(0) = f'(\xi)x$ (ξ 介于 0 和 x 之间)

即 $x_{n+1} = f(x_n) = f(0) + f'(\xi)x_n = 1 + f'(\xi)x_n$, 两边同时取极限得,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + f'(\xi)x_n], \text{ 即 } A = 1 + f'(\xi)A, \text{ 解得 } A = \frac{1}{1 - f'(\xi)},$$

且 $0 < f'(\xi) < \frac{1}{2}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \in (0, 2)$

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设矩阵 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}.$$

当 a 为何值时, 方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求此方程.

【解析】 $(A, B) = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & -a+1 & 0 \end{array} \right)$

(1) $a \neq -2$ 且 $a \neq 1$, 则方程有唯一解. 此时

$$(A, B) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{3a}{a+2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

所以

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3a}{a+2} \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(2) $a = -2$ 时,

$$(A, B) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

$r(A) = 2, r(A, B) = 3$, 方程 $AX = B$ 无解.

(3) $a = 1$ 时

$$(A, B) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

方程 $AX = B$ 的解为 $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1-k_1 & -1-k_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$, 其中 k_1, k_2 为任意常数.

(21) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(I) 求 A^{99}

(II) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

【解析】(I) $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2).$

所以得 A 的特征值为

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 0$$

其对应的特征向量分别为

$$\xi_1 = (1, 1, 0)^T, \xi_2 = (1, 2, 0)^T, \xi_3 = (3, 2, 2)^T$$

$$\text{令 } P = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{有 } P^{-1}AP = \Lambda, \text{ 易知 } P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

所以 $A = P\Lambda P^{-1}$,

$$A^{99} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -2^{99} & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(II) $B^2 = BA \Rightarrow B^3 = BBA = B^2A = BAA = BA^2$, $B^4 = B^2A^2 = BAA^2 = BA^3$ 依次类推得

$$B^{100} = BA^{99}, \text{ 所以有 } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) A^{99} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而有

$$\beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2$$

$$\beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2$$

$$\beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2$$

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

(I) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(II) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(III) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

【解析】(I) 由于区域 D 的面积

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

(X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}; \\ 0, & \text{其他} \end{cases};$$

(II) U 与 X 不独立. 因为

$$P\{U \leq \frac{1}{2}, X \leq \frac{1}{2}\} = P\{X > Y, X \leq \frac{1}{2}\}$$

$$= 3 \int_0^{\frac{1}{2}} (x - x^2) dx = 3 \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24} \right) = \frac{1}{4},$$

$$\text{而 } P\{U \leq \frac{1}{2}\} = P\{X > Y\} = \frac{1}{2},$$

$$P\{X \leq \frac{1}{2}\} = 3 \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{x} - x^2) dx = 3 \left[\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \right]$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{8},$$

从而 $P\{U \leq \frac{1}{2}, X \leq \frac{1}{2}\} \neq P\{U \leq \frac{1}{2}\} P\{X \leq \frac{1}{2}\}$, U 与 X 不独立.

(III) Z 的分布函数

$$F_Z(z) = P\{U + X \leq z\} = P\{U + X \leq z, X > Y\} + P\{U + X \leq z, X \leq Y\}$$

$$= P\{X \leq z, X > Y\} + P\{X \leq z - 1, X \leq Y\},$$

当 $z < 0$ 时, $P\{X \leq z, X > Y\} = 0 = P\{X \leq z - 1, X \leq Y\}$, $F_Z(z) = 0$;

当 $0 \leq z < 1$ 时, $P\{X \leq z - 1, X \leq Y\} = 0$, 而

$$P\{X \leq z, X > Y\} = 3 \int_0^z (x - x^2) dx = \frac{3}{2} z^2 - z^3, \quad F_Z(z) = \frac{3}{2} z^2 - z^3;$$

当 $1 \leq z < 2$ 时, $P\{X \leq z, X > Y\} = P\{X > Y\} = \frac{1}{2}$, 而

$$P\{X \leq z-1, X \leq Y\} = 3 \int_0^{z-1} (\sqrt{x} - x) dx = 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2,$$

此时, $F_Z(z) = \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2$;

当 $z \geq 2$ 时, $P\{X \leq z, X > Y\} = \frac{1}{2} = P\{X \leq z-1, X \leq Y\}$, $F_Z(z) = 1$.

总之, Z 的分布函数

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}.$$

(23) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数, X_1, X_2, X_3 为

来自总体 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

(I) 求 T 的概率密度;

(II) 确定 a , 使得 aT 为 θ 的无偏估计.

【解析】

(I) X 的分布函数为 $F_X(x) = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(u) du$

当 $x \leq 0$ 时, $F_X(x) = 0$

当 $0 < x < \theta$ 时, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du = \int_0^x \frac{3u^2}{\theta^3} du = \frac{x^3}{\theta^3}$

当 $x \geq \theta$ 时, $F_X(x) = 1$

所以 X 的分布函数为 $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{\theta^3}, & 0 \leq x < \theta \\ 1, & x \geq \theta \end{cases}$

设 T 的分布函数为 $F_T(t)$

$$\text{则 } F_T(t) = P\{T \leq t\} = P\{\max(X_1, X_2, X_3) \leq t\} = P\{X_1 \leq t\} \cdot P\{X_2 \leq t\} \cdot P\{X_3 \leq t\} = F_X^3(t)$$

所以 T 的概率密度为

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F^3(t) = 3F_X^2(t) \cdot f(t) = \begin{cases} \frac{9t^8}{\theta^9}, & 0 < t < \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(II) 因为 aT 是 θ 的无偏估计, 所以 $E(aT) = \theta$.

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_T(t) dt = \int_0^\theta \frac{9t^9}{\theta^9} dt = \frac{9}{10} \theta,$$

$$E(aT) = \frac{9}{10} a \theta = \theta \text{ 可得 } a = \frac{10}{9}.$$