2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）试题

一、选择题:1□ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设$\{x_n\}$是数列,下列命题中不正确的是 (   )

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

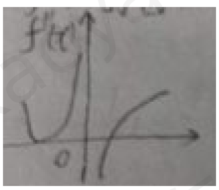
(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

【答案】(D)
【解析】考查数列极限与子列极限的关系。
数列收敛，那么它的任何无穷子列均收敛，所以 A 与 C 正确；一个数列存在多个无穷子列并集包含原数列所有项，且这些子列均收敛于同一个值，则原数列是收敛的。B 正确，D 错,故选 D

(2) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续,其 2 阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示,则曲线

$y=f(x)$的拐点个数为 (   )



(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【答案】(C)

【解析】根据拐点的必要条件，拐点可能是$f''(x)$不存在的点或$f''(x)=0$的点处产生。所以

$y=f(x)$有三个点可能是拐点，根据拐点的定义，即凹凸性改变的点；二阶导函数$f''(x)$符号发生改变的点即为拐点。所以从图可知，拐点个数为 2，故选 C.

(3) 设 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 2x, x^2+y^2\le 2y\right\}$,函数$f(x,y)$在$D$上连续,则

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ( )

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$

(D) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$

【答案】(B)

【解析】根据图可得，在极坐标系下该二重积分要分成两个积分区域

$$D_1 = \left\{(r,\theta)\middle|0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, 0 \le r \le 2\sin\theta\right\}\ D_2 = \left\{(r,\theta)\middle|\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\theta\right\}$$

所以 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$，选 B。

(4) 下列级数中发散的是( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

【答案】(C)

【解析】A 为正项级数，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3} < 1$，所以根据正项级数的比值判别法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛；B 为正项级数，因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$ □ $\frac{1}{n^{3/2}}$，根据 P 级数收敛准则，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$ 收敛；

C，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$，根据莱布尼茨判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ 发散，

所以根据级数收敛定义知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$发散；D 为正项级数，因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1$$，所以根据正项级数的比值判别法

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$收敛，所以选 C。

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为：（　）

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$　　(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$　　(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$

【答案】(D)

【解析】$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$,

由 $r(A)=r(A,b)<3$，故 $a=1$ 或 $a=2$，同时 $d=1$ 或 $d=2$。故选（D）

(6)_设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ 则 $f=(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为(　)

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$　　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$

(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$　　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由 $x=Py$，故 $f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.且

$$P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

$$Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=PC$$

$$Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

所以 $f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$。选（A）

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件,则: ( )

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$

(B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

(D) $P(AB)\ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

【答案】(C)

【解析】由于 $AB\subset A, AB\subset B$，按概率的基本性质，我们有 $P(AB)\le P(A)$ 且 $P(AB)\le P(B)$，从而 $P(AB)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$，选(C) .

(8) 设总体 $X\sim B(m,\theta)$, $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值,则 $E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=$ ( )

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$

(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$

(D) $mn\theta(1-\theta)$

【答案】(B)

【解析】根据样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2$ 的性质 $E(S^2)=D(X)$，而 $D(X)=m\theta(1-\theta)$，

从而 $E[\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2]=(n-1)E(S^2)=m(n-1)\theta(1-\theta)$，选(B) .

二、填空题：9□14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ ________.

【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【解析】原极限 $=\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

(10)设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)\mathrm{d}t$, 若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$, 则 $f(1)=$ ________.

【答案】2

【解析】因为 $f(x)$ 连续，所以 $\varphi(x)$ 可导，所以 $\varphi'(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt+2x^2 f(x^2)$；

因为 $\varphi(1)=1$，所以 $\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1$

又因为 $\varphi'(1)=5$，所以 $\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt+2f(1)=5$

故 $f(1)=2$

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$ ________.

【答案】$-\dfrac{1}{3}dx-\dfrac{2}{3}dy$

【解析】当 $x=0$，$y=0$ 时带入 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$，得 $z=0$。

对 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 求微分，得

$$
\begin{aligned}
d(e^{x+2y+3z}+xyz)&=e^{x+2y+3z}d(x+2y+3z)+d(xyz)\\
&=e^{x+2y+3z}(dx+2dy+3dz)+yzdx+xzdy+xydz\\
&=0
\end{aligned}
$$

把 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 代入上式，得 $dx+2dy+3dz=0$

所以 $dz\big|_{(0,0)}=-\dfrac{1}{3}dx-\dfrac{2}{3}dy$

(12) 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处取得极值 3，则 $y(x)=$________.

【答案】 $y(x)=e^{-2x}+2e^{x}$

【解析】 $y''+y'-2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+\lambda-2=0$，特征根为 $\lambda=-2$，$\lambda=1$，所以该齐次微分方程的通解为 $y(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$，因为 $y(x)$ 可导，所以 $x=0$ 为驻点，即 $y(0)=3$，$y'(0)=0$，所以 $C_1=1$，$C_2=2$，故 $y(x)=e^{-2x}+2e^{x}$

(13)设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2,-2,1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$________.

【答案】 21

【解析】 A 的所有特征值为 $2,-2,1$. B 的所有特征值为 $3,7,1$.

所以 $|B|=3\times7\times1=21$。

(14)设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$________.

【答案】 $\dfrac{1}{2}$

【解析】由题设知，$X\sim N(1,1),Y\sim N(0,1)$，而且 X、Y 相互独立，从而

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}$$

$$=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=c=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

【答案】 $a=-1,b=\dfrac{-1}{2},k=\dfrac{-1}{3}$

【解析】法一：

因为$\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$， $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+o(x^3)$，

那么，

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+(b-\frac{a}{2})x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)}{kx^3},$$

可得：$\begin{cases}1+a=0\\ b-\dfrac{a}{2}=0\\ \dfrac{a}{3k}=1\end{cases}$，所以，$\begin{cases}a=-1\\ b=-\dfrac{1}{2}\\ k=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$.

法二：

解：由题，得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$$

由分母$\lim\limits_{x\to 0}3kx^2=0$，得分子$\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+a)=0$，求得 c；

于是$1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\frac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+b\sin x+b(1+x)\cos x+b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x}{6kx}$$

由分母$\lim\limits_{x\to 0}6kx=0$，得分子

$\lim\limits_{x\to 0}[1+b\sin x+2b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x]$ $=\lim\limits_{x\to 0}(1+2b\cos x)=0$ ， 求 得

$b=-\frac{1}{2}$；

进一步，b 值代入原式

$$1=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{2}\sin x-(1+x)\cos x-\frac{1}{2}x\cos x+\frac{1}{2}x(1+x)\sin x}{6kx}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}\cos x-\cos x+(1+x)\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}(1+x)\sin x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}x(1+x)\cos x}{6k}$$

$=\frac{-\frac{1}{2}}{6k}$，求得 $k=-\frac{1}{3}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\le 2, y\ge x^2\}$.

【答案】 $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}$

【解析】 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy$

$$=2\int_0^1dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}}x^2dy$$

$$=2\int_0^1x^2(\sqrt{2-x^2}-x^2)dx$$

$$=2\int_0^1x^2\sqrt{2-x^2}dx-\frac{2}{5}\overset{x=\sqrt{2}\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sin^2t2\cos^2tdt-\frac{2}{5}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2tdt-\frac{2}{5}\overset{u=2t}{=}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2udu-\frac{2}{5}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{5}.$$

(17)(本题满分 10 分)

为了实现利润的最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量，P 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性 $(\eta>0)$.

(I) 证明定价模型为 $P=\frac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$；

(II) 若该商品的成本函数为$C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为$Q=40-P$，试由（I）中的定价模型确定此商品的价格.

【答案】(I)略(II) $P=30$.

【解析】(I)由于利润函数$L(Q)=R(Q)-C(Q)=PQ-C(Q)$，两边对Q求导，得

$$\frac{dL}{dQ}=P+Q\frac{dP}{dQ}-C'(Q)=P+Q\frac{dP}{dQ}-MC.$$

当且仅当$\frac{dL}{dQ}=0$时，利润$L(Q)$最大，又由于$\eta=-\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}$，所以$\frac{dP}{dQ}=-\frac{1}{\eta}\cdot\frac{P}{Q}$，

故当$P=\frac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$时，利润最大.

(II)由于$MC=C'(Q)=2Q=2(40-P)$，则$\eta=-\frac{P}{Q}\cdot\frac{dQ}{dP}=\frac{P}{40-P}$代入(I)中的定价模型，

得$P=\frac{2(40-P)}{1-\frac{40-P}{P}}$，从而解得$P=30$.

(18)(本题满分 10 分)

设函数$f(x)$在定义域I上的导数大于零，若对任意的$x_0\in I$，曲线$y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线与直线$x=x_0$及x轴所围成区域的面积恒为 4，且$f(0)=2$，求$f(x)$表达式.

【答案】$f\left(x\right)=\frac{8}{4-x}$

【解析】曲线的切线方程为$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$，切线与$x$轴的交点为$\left(x_0-\frac{f\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)},0\right)$

故面积为：$S=\frac{1}{2}\frac{f^2\left(x_0\right)}{f'\left(x_0\right)}=4$.

故$f\left(x\right)$满足的方程为$f^2\left(x\right)=8f'\left(x\right)$,此为可分离变量的微分方程,

解得$f\left(x\right)=\frac{-8}{x+C}$，又由于$f\left(0\right)=2$，带入可得$C=-4$，从而$f\left(x\right)=\frac{8}{4-x}$

(19)(本题满分 10 分)

（I）设函数$u(x),v(x)$可导，利用导数定义证明$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x);$

（II）设函数$u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出$f(x)$的求导公式.

【答案】$f'(x)=[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'$

$$=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

【解析】（I）$[u(x)v(x)]'=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x+h)v(x)+u(x+h)v(x)-u(x)v(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x)$$

$$=u(x)v'(x)+u'(x)v(x)$$

（II）由题意得

$$f'(x)=[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]'$$

$$=u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

(20)（本题满分 11 分）

设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

（I）求a的值；

（II）若矩阵$\boldsymbol{X}$满足$\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，其中$\boldsymbol{E}$为3阶单位矩阵，求$\boldsymbol{X}$.

【答案】$a=0,X=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$

【解析】

(I) $A^3=O\Rightarrow|A|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1-a^2&a&-1\\-a&1&a\end{vmatrix}=a^3=0\Rightarrow a=0$

(II)由题意知

$$X-XA^2-AX+AXA^2=E\Rightarrow X\left(E-A^2\right)-AX\left(E-A^2\right)=E$$

$$\Rightarrow\left(E-A\right)X\left(E-A^2\right)=E\Rightarrow X=\left(E-A\right)^{-1}\left(E-A^2\right)^{-1}=\left[\left(E-A^2\right)\left(E-A\right)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow X=\left(E-A^2-A\right)^{-1}$$

$$E-A^2-A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&1\\-1&-1&2\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc}0&-1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\-1&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&-1&0&-1&0\\0&-1&1&1&0&0\\-1&-1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&-1&0&-1&0\\0&1&-1&-1&0&0\\0&-2&1&0&-1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&-1&0&-1&0\\0&1&-1&-1&0&0\\0&0&-1&-2&-1&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&2&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&3&1&-2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right)$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

(21)（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

（I）求 a,b 的值；

（II）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

【答案】$a=4,b=5,P=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

【解析】(1) $A\sim B\Rightarrow tr(A)=tr(B)\Rightarrow 3+a=1+b+1$

$$|A|=|B|\Rightarrow\begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}a-b=-1\\2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=E+C$$

$$C=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&3\end{pmatrix}$$

C 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$

$\lambda=0$ 时 $(0E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(2,1,0)^T;\xi_2=(-3,0,1)^T$

$\lambda=5$ 时 $(4E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_3=(-1,-1,1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A=1+\lambda_C:1,1,5$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$$

(22)（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, x>0\\0,\quad x\le 0\end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数

(I) 求 Y 的概率分布；

(II) 求 $E(Y)$.

【答案】(I) $P\{Y=n\}=C_{n-1}^{1}p(1-p)^{n-2}p=(n-1)(\frac{1}{8})^{2}(\frac{7}{8})^{n-2}$， $n=2,3,\cdots$ ；

(II) $E(Y)=16$.

【解析】(I) 记 p 为观测值大于 3 的概率，则 $p=P(X>3)=\int_{3}^{+\infty}2^{-x}\ln 2dx=\frac{1}{8}$，

从而 $P\{Y=n\}=C_{n-1}^{1}p(1-p)^{n-2}p=(n-1)(\frac{1}{8})^{2}(\frac{7}{8})^{n-2}$， $n=2,3,\cdots$

为 Y 的概率分布；

(II) 将随机变量 Y 分解成 $Y=M+N$ 两个过程,其中 M 表示从1到 $n(n<k)$ 次试验观测值大于3首次发生， N 表示从 $n+1$ 次到第 k 试验观测值大于3首次发生.
则

$$M\sim Ge(n,p)，\ N\sim Ge(k-n,p)$$

所以

$$E(Y)=E(M+N)=E(M)+E(N)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}=\frac{2}{p}=\frac{2}{\frac{1}{8}}=16.$$

(23)（本题满分 11 分）
设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{1-\theta},\theta\le x\le 1,\\ 0,\qquad 其他,\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量；
(II)求 θ 的最大似然估计量.

【答案】(I) $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$, $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ ；

(II) $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

【解析】(I) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_{\theta}^{1}x\cdot\frac{1}{1-\theta}dx=\frac{1+\theta}{2}$，

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\frac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，解得 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$, $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 为 θ 的矩估计量 ；

(II)似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$，

当 $\theta \le x_i \le 1$ 时，$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-\theta}=(\frac{1}{1-\theta})^n$，则 $\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$.

从而 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{1-\theta}$，关于 θ 单调增加，

所以 $\hat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 为 θ 的最大似然估计量.