2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、　选择：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分.下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合要求的.

（1）　设 $a_1 = x(\cos\sqrt{x}-1)$，$a_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$.当 $x \to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶拓排序是

（A）a_1, a_2, a_3.　　（B）a_2, a_3, a_1.

（C）a_2, a_1, a_3.　　（D）a_3, a_2, a_1.

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases} 2(x-1), & x<1, \\ \ln x, & x\ge 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

（A）$F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1. \\ x(\ln x-1), & x\ge 1. \end{cases}$（B）$F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1. \\ x(\ln x+1)-1, & x\ge 1. \end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1. \\ x(\ln x+1)+1, & x\ge 1. \end{cases}$（D）$F(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & x<1. \\ x(\ln x-1)+1, & x\ge 1. \end{cases}$

（3）反常积分①$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，②$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为

（A）①收敛，②收敛.（B）①收敛，②发散.

（C）①收敛，②收敛.（D）①收敛，②发散.

（4）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，求导函数的图形如图所示，则

（A）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

（B）函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

（C）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

（D）函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

（5）设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i(x_0)<0(i=1,2)$，若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个领域内，有

（A）$f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$

（B）$f_2(x)\le f_1(x)\le g(x)$

（C） $f_1(x) \le g(x) \le f_2(x)$

（D） $f_2(x) \le g(x) \le f_1(x)$

（6）已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则

（A） $f_x^{'}-f_y^{'}=0$

（B） $f_x^{'}+f_y^{'}=0$

（C） $f_x^{'}-f_y^{'}=f$

（D） $f_x^{'}+f_y^{'}=f$

（7）设 A， B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是

（A） A^T 与 B^T 相似

（B） A^{-1} 与 B^{-1} 相似

（C） $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似

（D） $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

（8）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为 1,2，则

（A） $a>1$
（B） $a<-2$
（C） $-2<a<1$
（D） $a=1$ 与 $a=-2$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分。

（9）曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为___________.

（10）极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$___________.

（11）以 $y=x^2-e^x$ 和 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为___________.

（12）已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则当 $n\ge 2$ 时， $f^{(n)}(0)=$___________.

（13）已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l.若点 P 的横坐标时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时， l 对时间的变化率是_______.

（14）设矩阵 $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 等价，则 $a =$ ________.

解答题：15~23 小题，共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=\int_0^1 \left|t^2-x^2\right| dt (x>0)$，求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

（17）（本题满分 10 分）

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z=z(x,y)$ 的极值.

（18）（本题满分 10 分）

设 D 是由直线 $y=1$，$y=x$，$y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$.

（19）（本题满分 10 分）

已知 $y_1(x)=e^x$，$y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的解，若 $u(-1)=e$，$u(0)=-1$，求 $u(x)$，并写出该微分方程的通解。

（20）（本题满分 11 分）

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}\left(0\le t\le \frac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积。

（21）（本题满分 11 分）

已知 $f(x)$ 在 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数 $f(0)=0$。

（I）求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值；

（II）证明 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内存在唯一零点。

（22）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$，且方程组 $Ax=\beta$ 无解。

（I）求 a 的值；

（II）求方程组 $A^TAx=A^T\beta$ 的通解。

（23）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（I）求 A^{99}

（II）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$。记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合。