2015年全国硕士研究生入学统一考试数学（二）试题

一、选择题:1～8小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列反常积分收敛的是 (　　)

(A) $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

(B) $\int_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$

(C) $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx$

(D) $\int_{2}^{+\infty}\frac{x}{e^{x}}dx$

【答案】(D)

【解析】$\int\frac{x}{e^{x}}dx=-(x+1)e^{-x}$，则 $\int_{2}^{+\infty}\frac{x}{e^{x}}dx=-(x+1)e^{-x}\Big|_{2}^{+\infty}=3e^{-2}-\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-x}=3e^{-2}$.

(2) 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 (　　)

(A) 连续

(B) 有可去间断点

(C) 有跳跃间断点

(D) 有无穷间断点

【答案】(B)

【解析】$f(x)=\lim\limits_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{x}\frac{x^2}{t}}=e^{x}$， $x\neq0$， 故 $f(x)$ 有可去间断点 $x=0$.

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}},x>0\\0,x\le0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$,若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续则:(　　)

(A) $\alpha-\beta>0$　　　　(B) $0<\alpha-\beta\le1$

(C) $\alpha-\beta>2$ (D) $0<\alpha-\beta\le 2$

【答案】(A)

【解析】$x<0$ 时，$f'(x)=0$ $f'_-(0)=0$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^\alpha\cos\frac{1}{x^\beta}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}$$

$x>0$ 时，$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+(-1)x^\alpha\sin\frac{1}{x^\beta}(-\beta)\frac{1}{x^{\beta+1}}$

$$=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$$

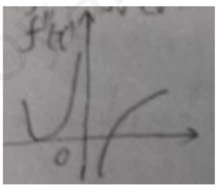
$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续则：$f'_-(0)=f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}=0$ 得 $\alpha-1>0$

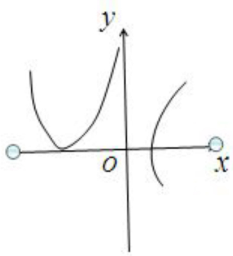
$$f'(0)=\lim_{x\to0^+}f'(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}\right)=0$$

得：$\alpha-\beta-1>0$，答案选择 A

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为 ( )

(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3





【答案】(C)

【解析】根据图像观察存在两点，二阶导数变号. 则拐点个数为 2 个。

(5) 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是 ( )

(A) $\dfrac{1}{2},0$

(B) $0,\dfrac{1}{2}$

(C) $-\dfrac{1}{2},0$

(D) $0,-\dfrac{1}{2}$

【答案】(D)

【解析】此题考查二元复合函数偏导的求解.

令 $u=x+y, v=\dfrac{y}{x}$，则 $x=\dfrac{u}{1+v}, y=\dfrac{uv}{1+v}$，从而 $f(x+y,\dfrac{y}{x})=x^2-y^2$ 变为

$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{u^2(1-v)}{1+v}.\text{故}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u(1-v)}{1+v},\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{2u^2}{(1+v)^2},$$

因而 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0,\left.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\dfrac{1}{2}$.故选（D）

(6)设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$ ( )

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

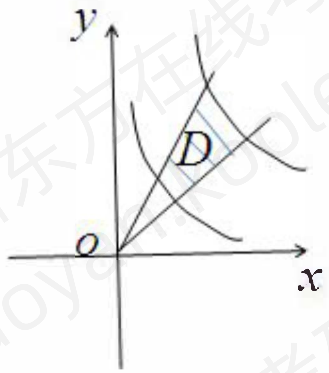
(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

【答案】(B)

【解析】根据图可得，在极坐标系下计算该二重积分的积分区域为



$$D=\left\{(r,\theta)\left|\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{3},\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}\le r\le\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}\right.\right\}$$

所以

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$$

故选 B.

(7) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$. 若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解的充分必要条件为： (　)

(A) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$　　(B) $a\notin\Omega, d\in\Omega$

(C) $a\in\Omega, d\notin\Omega$　　(D) $a\in\Omega, d\in\Omega$

【答案】D

【解析】$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}$,

由 $r(A)=r(A,b)<3$，故 $a=1$ 或 $a=2$，同时 $d=1$ 或 $d=2$。故选（D）

(8) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$，若 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,-\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_2)$ 则 $f=(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 下的标准形

为:　　(　　)

(A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$　　　　(B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$　　　　(D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

【答案】(A)

【解析】由 $x = Py$，故 $f = x^T Ax = y^T(P^T AP)y = 2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.且

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Q = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = PC$$

$$Q^T AQ = C^T(P^T AP)C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以 $f = x^T Ax = y^T(Q^T AQ)y = 2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$。选（A）

二、填空题：9～14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\begin{cases} x = \arctan t \\ y = 3t + t^3 \end{cases}$ 则 $\dfrac{d^2 y}{dx^2}\Big|_{t=1} =$ ____________

【答案】48

【解析】 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\Big/\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{3+3t^2}{\dfrac{1}{1+t^2}} = 3(1+t^2)^2$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[3(1+t^2)^2] = \frac{d[3(1+t^2)^2]}{dt}\Big/\frac{dx}{dt} = \frac{12t(1+t^2)}{\dfrac{1}{1+t^2}} = 12t(1+t^2)^2$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=48.$$

(10)函数 $f(x)=x^2\cdot 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^n(0)=$________

【答案】$n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$

【解析】根据莱布尼茨公式得：

$$f^{(n)}(0)=C_n^2 2\left(2^x\right)^{(n-2)}\Big|_{x=0}=\frac{n(n-1)}{2}2(\ln 2)^{n-2}=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$$

(11) 设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)dt$，若 $\varphi(1)=1,\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$ ________

【答案】2

【解析】 已知 $\varphi(x)=x\int_0^{x^2} f(t)dt$，求导得 $\varphi'(x)=\int_0^{x^2} f(t)dt+2x^2f(x^2)$，故有 $\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1$, $\varphi'(1)=1+2f(1)=5$, 则 $f(1)=2$.

(12)设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$________。

【答案】$e^{-2x}+2e^x$

【解析】由题意知：$y(0)=3$，$y'(0)=0$，由特征方程：$\lambda^2+\lambda-2=0$ 解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=-2$

所以微分方程的通解为：$y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$ 代入 $y(0)=3$，$y'(0)=0$ 解得：$C_1=2\ C_2=1$

解得：$y=2e^x+e^{-2x}$

(13)若函数 $Z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$________________。

【答案】$-\frac{1}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$

【解析】当 $x=0,y=0$ 时 $z=0$，则对该式两边求偏导可得 $(3e^{x+2y+3z}+xy)\frac{\partial z}{\partial x}=-yz-e^{x+2y+3z}$

$(3e^{x+2y+3z}+xy)\frac{\partial z}{\partial y}=-xz-2e^{x+2y+3z}$。将（0,0,0）点值代入即有

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\frac{1}{3},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)}\ \frac{2}{3}$$

则可得 $dz\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy=-\frac{1}{3}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$.

(14) 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,-2,1$， $B=A^2-A+E$，其中 E 为 3 阶单位阵，则行列式 $|B|=$____.

【答案】21

【解析】 A 的所有特征值为 $2,-2,1$. B 的所有特征值为 $3,7,1$.

所以 $|B|=3\times7\times1=21$。

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$， $g(x)=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

【答案】 $a=-1,k=-\frac{1}{3},b=-\frac{1}{2}$

【解析】

方法一：

因为 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$， $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$，

那么，

$$1=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to0}\frac{(1+a)x+(b-\frac{a}{2})x^2+\frac{a}{3}x^3+o(x^3)}{kx^3},$$

可得：$\begin{cases} 1+a=0 \\ b-\dfrac{a}{2}=0 \\ \dfrac{a}{3k}=1 \end{cases}$，所以，$\begin{cases} a=-1 \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ k=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

方法二：

由题意得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$$

由分母 $\lim\limits_{x\to 0}3kx^2=0$，得分子 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{a}{1+x}+b\sin x+bx\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}(1+a)=0$，求得 c；

$$于是1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}+b\sin x+bx\cos x}{3kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+b(1+x)\sin x+bx(1+x)\cos x}{3kx^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+b\sin x+b(1+x)\cos x+b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x}{6kx}$$

由分母 $\lim\limits_{x\to 0}6kx=0$，得分子

$$\lim_{x\to 0}[1+b\sin x+2b(1+x)\cos x+bx\cos x-bx(1+x)\sin x]=\lim_{x\to 0}(1+2b\cos x)=0，$$

求得 $b=-\dfrac{1}{2}$；

进一步，b 值代入原式

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{2}\sin x-(1+x)\cos x-\dfrac{1}{2}x\cos x+\dfrac{1}{2}x(1+x)\sin x}{6kx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cos x-\cos x+(1+x)\sin x-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}(1+x)\sin x+\frac{1}{2}x\sin x+\frac{1}{2}x(1+x)\cos x}{6k}$$

$=\dfrac{-\frac{1}{2}}{6k}$，求得 $k=-\dfrac{1}{3}$.

(16) (本题满分 10 分)

设 A>0，D 是由曲线段 $y=A\sin x(0\le x\le \frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0$， $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域， V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转成旋转体的体积，若 $V_1=V_2$，求 A 的值。

【答案】$\dfrac{8}{\pi}$

【解析】由旋转体的体积公式，得

$$\mathrm{V}_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi f^2(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi(A\sin x)^2dx=\pi A^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{\pi^2A^2}{4}$$

$$\mathrm{V}_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi xf(x)dx=\text{-}2\pi A\int_0^{\frac{\pi}{2}}x d\cos x=2\pi A$$

由题 $\mathrm{V}_1=\mathrm{V}_2$, 求得 $\mathrm{A}=\dfrac{8}{\pi}$.

(17) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f_{xy}''(x,y)=2(y+1)e^x$， $f_x'(x,0)=(x+1)e^x$， $f(0,y)=y^2+2y$， 求 $f(x,y)$ 的极值。

【答案】极小值 $f(0,-1)=-1$

【解析】 $f_{xy}''(x,y)=2(y+1)e^x$ 两边对 y 积分，得

$$f_x'(x,y)=2(\frac{1}{2}y^2+y)e^x+\varphi(x)=(y^2+2y)e^x+\varphi(x),$$

故 $f_x'(x,0)=\varphi(x)=(x+1)e^x$，

求得 $\varphi(x)=e^x(x+1)$，

故 $f_x'(x,y)=(y^2+2y)e^x+e^x(1+x)$，两边关于 x 积分，得

$$
\begin{aligned}
f(x,y)&=(y^2+2y)e^x+\int e^x(1+x)dx \\
&=(y^2+2y)e^x+\int(1+x)de^x \\
&=(y^2+2y)e^x+(1+x)e^x-\int e^x dx \\
&=(y^2+2y)e^x+(1+x)e^x-e^x+C \\
&=(y^2+2y)e^x+xe^x+C
\end{aligned}
$$

由 $f(0,y)=y^2+2y+C=y^2+2y$，求得 $C=0.$

所以 $f(x,y)=(y^2+2y)e^x+xe^x.$

令 $\begin{cases} f_x'=(y^2+2y)e^x+e^x+xe^x=0 \\ f_y'=(2y+2)e^x=0 \end{cases}$，求得 $\begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$.

又 $f''_{xx}=(y^2+2y)e^x+2e^x+xe^x$，

$f''_{xy}=2(y+1)e^x$， $f''_{yy}=2e^x$，

当 $x=0,y=-1$ 时， $A=f''_{xx}(0,-1)=1,\ B=f''_{xy}(0,-1)=0,\ C=f''_{yy}(0,-1)=2$，

$AC-B^2>0,\ f(0,-1)=-1$ 为极小值.

(18) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2, y\ge x^2\}$

【答案】 $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{5}$

【解析】 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy$

$$= 2\int_0^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} x^2 dy$$

$$= 2\int_0^1 x^2(\sqrt{2-x^2} - x^2)dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2\sqrt{2-x^2}dx - \frac{2}{5} \overset{x=\sqrt{2}\sin t}{=} 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 t 2\cos^2 t dt - \frac{2}{5}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt - \frac{2}{5} \overset{u=2t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 u du - \frac{2}{5} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{5}.$$

(19)(本题满分 11 分)

已知函数 $f(x) = \int_x^1 \sqrt{1+t^2}dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}dt$，求 $f(x)$ 零点的个数？

【答案】2 个

【解析】$f'(x) = -\sqrt{1+x^2} + 2x\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2}(2x-1)$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点为 $x = \frac{1}{2}$,

在 $(-\infty, \frac{1}{2})$, $f(x)$ 单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, $f(x)$ 单调递增

故 $f(\frac{1}{2})$ 为唯一的极小值, 也是最小值.

$$而\ f(\frac{1}{2}) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t^2}dt + \int_1^{\frac{1}{4}} \sqrt{1+t}dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t^2}dt - \int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{1+t}dt$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t^2}dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t}d - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t}d$$

在 $(\frac{1}{2}, 1)$, $\sqrt{1+t^2} < \sqrt{1+t}$, 故 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t^2}dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1+t}dt < 0$

从而有 $f(\frac{1}{2}) < 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}[\int_x^1 \sqrt{1+t^2}dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}dt] = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[\int_x^1 \sqrt{1+t^2}dt + \int_1^{x^2} \sqrt{1+t}dt] = \lim_{x\to+\infty}[\int_1^{x^2} \sqrt{1+t}dt - \int_1^x \sqrt{1+t^2}dt]$$

考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt}{\int_1^x\sqrt{1+t^2}dt}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}=+\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\dfrac{1}{2})$ 及 $(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 上各有一个零点，所以零点个数为 2.

(20)（本题满分 10 分）

已知高温物体置于低温介质中，任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比，现将一初始温度为$120°C$的物体在$20°C$的恒温介质中冷却，30min 后该物体降至$30°C$，若要将该物体的温度继续降至$21°C$，还需冷却多长时间？

【答案】30 min

【解析】设 t 时刻物体温度为 $x(t)$，比例常数为 $k(>0)$，介质温度为 m，则

$\dfrac{dx}{dt}=-k(x-m)$，从而 $x(t)=Ce^{-kt}+m$，

$x(0)=120, m=20$，所以 $C=100$，即 $x(t)=100e^{-kt}+20$

又 $x(\dfrac{1}{2})=30$, 所以 $k=2\ln 10$，所以 $x(t)=\dfrac{1}{100^{t-1}}+20$

当 $x=21$ 时，$t=1$，所以还需要冷却 3 0 min.

(21)（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty]$ 上具有 2 阶导数，$f(a)=0$，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，设 $b>a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,f(b))$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,0)$，证明 $a<x_0<b$。

【证明】根据题意得点 $(b,f(b))$ 处的切线方程为 $y-f(b)=f'(b)(x-b)$

令 $y=0$，得 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$

因为 $f'(\mathrm{x})>0$ 所以 $f(\mathrm{x})$ 单调递增，又因为 $f(\mathrm{a})=0$

所以 $f(\mathrm{b})>0$，又因为 $f'(b)>0$

所以 $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$

又因为$x_0-a=b-a-\dfrac{f(b)}{f'(b)}$，而在区间（a,b）上应用拉格朗日中值定理有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\xi\in(a,b)$$

所以$x_0-a=b-a-\dfrac{f(b)}{f'(b)}=\dfrac{f(b)}{f'(\xi)}-\dfrac{f(b)}{f'(b)}=f(b)\dfrac{f'(b)-f'(\xi)}{f'(b)f'(\xi)}$

因为$f''(x)>0$所以$f'(x)$单调递增

所以$f'(b)>f'(\xi)$

所以$x_0-a>0$，即$x_0>a$，所以$a<x_0<b$，结论得证.

(22)（本题满分 11 分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$且$A^3=O$.

(1) 求a的值；

(2) 若矩阵X满足$X-XA^2-AX+AXA^2=E$，E为3阶单位阵，求X.

【答案】

$$a=0,X=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

【解析】

(I) $A^3=O\Rightarrow |A|=0\Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-a^2 & a & -1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix}=a^3=0\Rightarrow a=0$

(II)由题意知

$$X-XA^2-AX+AXA^2=E\Rightarrow X\left(E-A^2\right)-AX\left(E-A^2\right)=E$$

$$\Rightarrow (E-A)X\left(E-A^2\right)=E\Rightarrow X=(E-A)^{-1}\left(E-A^2\right)^{-1}=\left[\left(E-A^2\right)(E-A)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow X=\left(E-A^2-A\right)^{-1}$$

$$E-A^2-A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&1\\-1&-1&2\end{pmatrix},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&-1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\-1&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&-1&0\\0&-1&1&1&0&0\\-1&-1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&-1&0\\0&1&-1&-1&0&0\\0&-2&1&0&-1&1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&-1&0&-1&0\\0&1&-1&-1&0&0\\0&0&-1&-2&-1&1\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&2&0&-1\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&1&-2\\0&1&0&1&1&-1\\0&0&1&2&1&-1\end{array}\right)$$

$$\therefore X=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

(23)（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

（1）求 a,b 的值；

（2）求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

【答案】

（1）$a=4,b=5$；

（2）

$$P=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

【解析】（I）$A\sim B\Rightarrow tr(A)=tr(B)\Rightarrow 3+a=1+b+1$

$$|A|=|B|\Rightarrow\begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}$$

$$\therefore\begin{cases}a-b=-1\\2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$$

（II）

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=E+C$$

$$C=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2&3\end{pmatrix}$$

C 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=4$

$\lambda=0$ 时 $(0E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_1=(2,1,0)^T;\xi_2=(-3,0,1)^T$

$\lambda=5$ 时 $(4E-C)x=0$ 的基础解系为 $\xi_3=(-1,-1,1)^T$

A 的特征值 $\lambda_A=1+\lambda_C:1,1,5$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$,

$$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}$$