2017年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 x=0 连续，则

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　　(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

（2）设二阶可到函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$，则

(A) $\int_{-1}^{1} f(x)dx>0$

(B) $\int_{-2}^{1} f(x)dx<0$

(C) $\int_{-1}^{0} f(x)dx>\int_{0}^{1} f(x)dx$

(D) $\int_{-1}^{1} f(x)dx<\int_{0}^{1} f(x)dx$

（3）设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则

(A)当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(B)当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}=0$

(D)当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

（4）微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^k=$

(A) $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(B) $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(C) $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

(D) $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$

（5）设 $f(x)$ 具有一阶偏导数，且在任意的 (x,y)，都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 则

(A) $f(0,0)>f(1,1)$

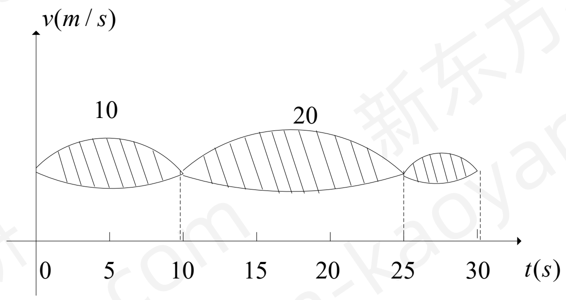
(B) $f(0,0)<f(1,1)$

(C) $f(0,1)>f(1,0)$

(D) $f(0,1) < f(1,0)$

（6）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位:m）处,图中，实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ （单位:m/s）虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位:s），则

(A) $t_0 = 10$　(B) $15 < t_0 < 20$　(C) $t_0 = 25$　(D) $t_0 > 25$



（7）设 A 为三阶矩阵，$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 为可逆矩阵，使得 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，则 $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) =$

(A) $\alpha_1 + \alpha_2$

(B) $\alpha_2 + 2\alpha_3$

(C) $\alpha_2 + \alpha_3$

(D) $\alpha_1 + 2\alpha_2$

（8）已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则

(A) A 与 C 相似，B 与 C 相似
(B) A 与 C 相似，B 与 C 不相似
(C) A 与 C 不相似，B 与 C 相似
(D) A 与 C 不相似，B 与 C 不相似

二、填空题：9~14 题，每小题 4 分，共 24 分.

（9）曲线 $y = x\left(1 + \arcsin^2 x\right)$ 的斜渐近线方程为________

（10）设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$ 确定，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=0}$ ________

（11）$\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx =$____________

（12）设函数 $f\left(x, y\right)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df\left(x, y\right) = ye^{y}dx + x\left(1 + y\right)e^{y}dy$, $f\left(0, 0\right) = 0$，则 $f\left(x, y\right)=$

（13）$\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx =$________

（14）设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，则 $a =$________

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \sqrt{x - t}e^{t}dt}{\sqrt{x^3}}$

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $f\left(u, v\right)$ 具有 2 阶连续性偏导数，$y = f\left(e^{x}, cosx\right)$,求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

（17）（本题满分 10 分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$

（18）（本题满分 10 分）

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值

（19）（本题满分 10 分）

$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，$f(1) > 0, \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} < 0$，证明

（1）方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(0,1)$ 至少存在一个根

（2）方程 $f(x) + f''(x) + \left[f'(x)\right]^2 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根

（20）（本题满分 11 分）

已知平面区域 $D = \left\{\left(x, y\right)\middle| x^2 + y^2 \le 2y\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D \left(x + 1\right)^2 dxdy$

（21）（本题满分 11 分）

设 $y(x)$ 是区间 $(0,\frac{3}{2})$ 内的可导函数，且 $y(1) = 0$，点 P 是曲线 $L: y = y(x)$ 上的任意一点，L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0, Y_P)$，法线与 x 轴相交于点 $(X_P, 0)$，若 $X_p = Y_P$

，求 L 上点的坐标 (x, y) 满足的方程。

（22）（本题满分 11 分）

三阶行列式 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2$

（1）证明 $r(A) = 2$

（2）如果 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 求方程组 $Ax=b$ 的通解

（23）（本题满分 11 分）

设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$ 求 a 的值及一个正交矩阵 Q.