2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)【答案】(C).

【解析】记 $y_1=x-1, y_1'=1, y_1''=0$， $y_2=(x-2)^2, y_2'=2(x-2), y_2''=2,$

$y_3=(x-3)^3, y_3'=3(x-3)^2, y_3''=6(x-3),$

$y_4=(x-4)^4, y_4'=4(x-4)^3, y_4''=12(x-4)^2,$

$y''=(x-3)P(x)$，其中 $P(3)\neq 0$， $y''\big|_{x=3}=0$，在 $x=3$ 两侧，二阶导数符号变化，

故选(C).

(2)【答案】(C).

【解析】观察选项：(A)，(B)，(C)，(D)四个选项的收敛半径均为 1，幂级数收敛区间的中心在 $x=1$ 处，故(A)，(B)错误；因为 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以 $a_n\geq 0$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，将 $x=2$ 代入幂级数得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，而已知 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 无界，故原幂级数在 $x=2$ 处发散，(D)不正确．当 $x=0$ 时，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 满足莱布尼茨判别法收敛，故 $x=0$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛．故正确答案为(C).

(3)【答案】(A).

【解析】 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=f'(x)\cdot\ln f(y)\big|_{(0,0)}=f'(0)\ln f(0)=0$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=f(x)\cdot\dfrac{f'(y)}{f(y)}\Big|_{(0,0)}=f'(0)=0,$ 故 $f'(0)=0$，

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{(0,0)}=f''(x)\cdot\ln f(y)\big|_{(0,0)}=f''(0)\cdot\ln f(0)>0,$$

$$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=f'(x)\cdot\frac{f'(y)}{f(y)}\Big|_{(0,0)}=\frac{[f'(0)]^2}{f(0)}=0,$$

$$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{(0,0)}=f(x)\cdot\frac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{f^2(y)}\Big|_{(0,0)}=f''(0)-\frac{[f'(0)]^2}{f(0)}=f''(0).$$

又 $AC-B^2=[f''(0)]^2\cdot\ln f(0)>0,$ 故 $f(0)>1, f''(0)>0$.

(4)【答案】(B).

【解析】因为 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时， $0<\sin x<\cos x<1<\cot x$，

又因 $\ln x$ 是单调递增的函数，所以 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$.
故正确答案为(B).
(5)【答案】 (D).
【解析】由于将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B ，故

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

即 $AP_1=B$ ， $A=BP_1^{-1}$.

由于交换 B 的第 2 行和第 3 行得单位矩阵，故

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=E,$$

即 $P_2B=E,$ 故 $B=P_2^{-1}=P_2$. 因此， $A=P_2P_1^{-1}$ ，故选(D).

(6)【答案】(D).

【解析】由于 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，所以 $A(1,0,1,0)^T=0$ ，且 $r(A)=4-1=3$ ，即 $\alpha_1+\alpha_3=0$ ，且 $|A|=0$. 由此可得 $A^*A=|A|E=O$ ，即 $A^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=O$ ，这说明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $A^*x=0$ 的解.

由于 $r(A)=3$ ， $\alpha_1+\alpha_3=0$ ，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. 又由于 $r(A)=3$ ，所以 $r(A^*)=1$ ，因此 $A^*x=0$ 的基础解系中含有 $4-1=3$ 个线性无关的解向量. 而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且为 $A^*x=0$ 的解，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可作为 $A^*x=0$ 的基础解系，故选(D).

(7)【答案】(D).
【解析】选项(D)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\right]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[F_2(x)dF_1(x)+F_1(x)dF_2(x)\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}d\left[F_1(x)F_2(x)\right]=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1.$$

所以 $f_1F_2(x)+f_2F_1(x)$ 为概率密度.

(8)【答案】(B).

【解析】因为 $U=\max\{X,Y\}=\begin{cases}X, & X\geq Y,\\ Y, & X<Y,\end{cases}$ $\quad V=\min\{X,Y\}=\begin{cases}Y, & X\geq Y,\\ X, & X<Y.\end{cases}$

所以， $UV=XY$ ，于是 $E(UV)=E(XY)=E(X)E(Y)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上．

(9)【答案】$\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$．

【解析】选取 x 为参数，则弧微元 $ds=\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx=\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\sec xdx$

所以 $s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec xdx=\ln\left|\sec x+\tan x\right|_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2})$．

(10)【答案】$y=e^{-x}\sin x$．

【解析】由通解公式得

$$
\begin{aligned}
y&=e^{-\int dx}\left(\int e^{-x}\cos x\cdot e^{\int dx}dx+C\right)\\
&=e^{-x}\left(\int\cos xdx+C\right)\\
&=e^{-x}(\sin x+C).
\end{aligned}
$$

由于 $y(0)=0$, 故 $C=0$．所以 $y=e^{-x}\sin x$．

(11)【答案】4．

【解析】$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\sin xy}{1+(xy)^2}\cdot y$，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=y\cdot\frac{y\cos xy-\sin xy\cdot 2xy^2}{[1+(xy)^2]^2},$$

故 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\Big|_{(0,2)}=4$．

(12)【答案】π．

【解析】取 $S:x+y-z=0,x^2+y^2\le 1$，取上侧，则由斯托克斯公式得，

$$原式=\iint\limits_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xz & x & \dfrac{y^2}{2}\end{vmatrix}=\iint\limits_S ydydz+xdzdx+dxdy.$$

因 $z=x+y,z_x^{'}=1,z_y^{'}=1$. 由转换投影法得

$$\iint\limits_S ydydz+xdzdx+dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}[y\cdot(-1)+x(-1)+1]dxdy.$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (-x-y+1)dxdy = \pi$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} dxdy = \pi .$$

(13)【答案】$a=1$.

【解析】由于二次型通过正交变换所得到的标准形前面的系数为二次型对应矩阵 A 的特征值，故 A 的特征值为 0，1，4．二次型所对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

由于 $|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=0$，故 $\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=1$.

(14)【答案】$\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)$.

【解析】根据题意，二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 服从 $N\left(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0\right)$．因为 $\rho_{xy}=0$，所以由二维正态分布的性质知随机变量 X,Y 独立，所以 X,Y^2．从而有

$$E\left(XY^2\right)=E\left(X\right)E\left(Y^2\right)=\mu\left[D\left(Y\right)+E^2\left(Y\right)\right]=\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right).$$

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 10 分)

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+x)}{x}]^{\frac{1}{e^x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}[\frac{\ln(1+x)}{x}-1]\cdot\frac{1}{e^x-1}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(16)(本题满分 9 分)

【解析】$z=f\left[xy,yg(x)\right]$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\left[xy,yg(x)\right]\cdot y+f_2'\left[xy,yg(x)\right]\cdot yg'(x)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1'[xy, yg(x)] + y\left[f_{11}''(xy, yg(x))x + f_{12}''(xy, yg(x))g(x)\right]$$

$$+g'(x) \cdot f_2'[xy, yg(x)] + yg'(x)\left\{f_{12}''[xy, yg(x)] \cdot x + f_{22}''[xy, yg(x)]g(x)\right\}.$$

因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 可导，且为极值,所以 $g'(1)=0$，则

$$\frac{d^2 z}{dxdy}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}} = f_1'(1,1) + f_{11}''(1,1) + f_{12}''(1,1).$$

(17)（本题满分 10 分）

【解析】显然 $x=0$ 为方程一个实根.

当 $x \neq 0$ 时，令 $f(x) = \dfrac{x}{\arctan x} - k,$

$$f'(x) = \frac{\arctan x - \dfrac{x}{1+x^2}}{(\arctan x)^2}.$$

令 $g(x) = \arctan x - \dfrac{x}{1+x^2}$　　$x \in R$，

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} > 0,$$

即 $x \in R,\ g'(x) > 0$.

又因为 $g(0)=0$，

即当 $x<0$ 时，$g(x)<0$；　当 $x>0$ 时，$g(x)>0$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$.

所以当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递减，当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递增

又由 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arctan x} - k = 1-k$，

$\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{\arctan x} - k = +\infty$，

所以当 $1-k<0$ 时，由零点定理可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内各有一个零点；

当 $1-k \geq 0$ 时，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内均无零点.

综上所述，当 $k>1$ 时，原方程有三个根. 当 $k \leq 1$ 时，原方程有一个根.

(18)(本题满分 10 分)

【解析】(Ⅰ)设 $f\left(x\right)=\ln\left(1+x\right),x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]$

显然 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{n}\right]$ 上满足拉格朗日的条件，

$$f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(0\right)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln 1=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n},\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$$

所以 $\xi\in\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 时，

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{1+0}\cdot\frac{1}{n}，即：\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n}<\frac{1}{n},$$

$$亦即：\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

结论得证.

(II)设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$.

先证数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调递减.

$$a_{n+1}-a_n=\left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln\left(n+1\right)\right]-\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right]=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

利用(I)的结论可以得到 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})$，所以 $\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$ 得到 $a_{n+1}<a_n$，即数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调递减.

再证数列 $\left\{a_n\right\}$ 有下界.

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)=\ln\left(n+1\right),$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n>\ln\left(n+1\right)-\ln n>0.$$

得到数列$\{a_n\}$有下界．利用单调递减数列且有下界得到$\{a_n\}$收敛．

(19)（本题满分 11 分）

【解析】$I=\int_0^1 xdx\int_0^1 yf''_{xy}(x,y)dy=\int_0^1 xdx\int_0^1 ydf'_x(x,y)$

$$=\int_0^1 xdx\left[yf'_x(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right]$$

$$=\int_0^1 xdx\left(f'_x(x,1)-\int_0^1 f'_x(x,y)dy\right).$$

因为$f(x,1)=0$，所以$f'_x(x,1)=0$．

$$I=-\int_0^1 xdx\int_0^1 f'_x(x,y)dy=-\int_0^1 dy\int_0^1 xf'_x(x,y)dx$$

$$=-\int_0^1 dy\left[xf(x,y)\big|_0^1-\int_0^1 f(x,y)dx\right]=-\int_0^1 dy\left[f(1,y)-\int_0^1 f(x,y)dx\right]$$

$$=\iint_D fdxdy=a.$$

(20)（本题满分 11 分）

【解析】(I) 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，对$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$进行初等行变换：

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{array}\right).$$

当$a=5$时，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=2\neq r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1)=3$，此时，$\alpha_1$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示，

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$不能由$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性表示．

(II) 对$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$进行初等行变换：

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{array}\right),$$

故 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$.

(21)(本题满分 11 分)

【解析】(I)由于 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$，设 $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，则

$A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)$，即 $A\alpha_1=-\alpha_1,A\alpha_2=\alpha_2$，而 $\alpha_1\neq0,\alpha_2\neq0$，知 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$，对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1(k_1\neq0)$，$k_2\alpha_2(k_2\neq0)$.

由于 $r(A)=2$，故 $|A|=0$，所以 $\lambda_3=0$.

由于 A 是三阶实对称矩阵，故不同特征值对应的特征向量相互正交，设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则

$$\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\\alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x_1-x_3=0,\\x_1+x_3=0.\end{cases}$$

解此方程组，得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$，故 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq0)$.

(II) 由于不同特征值对应的特征向量已经正交，只需单位化：

$$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,-1)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt2}(1,0,1)^T,\beta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=(0,1,0)^T.$$

令 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}$,

$$A=Q\Lambda Q^T$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\\-\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&0&-\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

（22）（本题满分 11 分）

【解析】(I)因为$P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$，所以$P\left\{X^2\neq Y^2\right\}=1-P\left\{X^2=Y^2\right\}=0$.

即 $P\left\{X=0,Y=-1\right\}=P\left\{X=0,Y=1\right\}=P\left\{X=1,Y=0\right\}=0$.

利用边缘概率和联合概率的关系得到

$P\left\{X=0,Y=0\right\}=P\left\{X=0\right\}-P\left\{X=0,Y=-1\right\}-P\left\{X=0,Y=1\right\}=\frac{1}{3}$；

$P\left\{X=1,Y=-1\right\}=P\left\{Y=-1\right\}-P\left\{X=0,Y=-1\right\}=\frac{1}{3}$；

$P\left\{X=1,Y=1\right\}=P\left\{Y=1\right\}-P\left\{X=0,Y=1\right\}=\frac{1}{3}$.

即$\left(X,Y\right)$的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

(II) Z 的所有可能取值为$-1,0,1$.

$P\left\{Z=-1\right\}=P\left\{X=1,Y=-1\right\}=\frac{1}{3}$.

$P\left\{Z=1\right\}=P\left\{X=1,Y=1\right\}=\frac{1}{3}$.

$P\left\{Z=0\right\}=1-P\left\{Z=1\right\}-P\left\{Z=-1\right\}=\frac{1}{3}$.

$Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

(III)因为$\rho_{XY}=\frac{Cov\left(XY\right)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{E\left(XY\right)-E\left(X\right)\cdot E\left(Y\right)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$,

其中

$E(XY)=E(Z)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$，$E(Y)=-1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=0$.

所以$E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0$，即X，Y的相关系数$\rho_{XY}=0$.

（23）（本题满分 11 分）

【解析】因为总体X服从正态分布，故设X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$，$-\infty<x<+\infty$.

(I) 似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}]=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}；$$

取对数：$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}$；

求导：$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2(\sigma^2)^2}=\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu_0)^2-\sigma^2]$.

令$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=0$，解得$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$.

σ^2的最大似然估计量为$\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

(II) 方法 1：

$X_i\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，令$Y_i=X_i-\mu_0\sim N(0,\sigma^2)$，则$\hat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2$.

$$E(\hat{\sigma^2})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)=E(Y_i^2)=D(Y_i)+[E(Y_i)]^2=\sigma^2.$$

$$D(\hat{\sigma^2})=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2)=\frac{1}{n^2}D(Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2)=\frac{1}{n}D(Y_i^2)$$

$$=\frac{1}{n}\{E(Y_i^4)-[E(Y_i^2)]^2\}=\frac{1}{n}(3\sigma^4-\sigma^4)=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

方法 2：

$X_i\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，则$\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$，得到$Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$，即

$\sigma^2Y=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

$$E\left(\hat{\sigma^2}\right)=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\frac{1}{n}E\left(\sigma^2 Y\right)=\frac{1}{n}\sigma^2 E\left(Y\right)=\frac{1}{n}\sigma^2\cdot n=\sigma^2 .$$

$$D\left(\hat{\sigma^2}\right)=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\frac{1}{n^2}D\left(\sigma^2 Y\right)=\frac{1}{n^2}\sigma^4 D\left(Y\right)=\frac{1}{n^2}\sigma^4\cdot 2n=\frac{2}{n}\sigma^4 .$$