研究生考试题目

2011 年研究生考试数学（三）试题

一．选择题：

1． 已知当 $x \to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则（　　　）

（A）$k=1, c=4$．　　（B）$k=1, c=-4$．　　（C）$k=3, c=4$．　　（D）$k=3, c=-4$．

解：因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\cos x-3\cos 3x}{ckx^{k-1}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3\sin x+9\sin 3x}{ck(k-1)x^{k-2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1(k-2)x^{k-3}}$，

当 $k=3$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{cx^k}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-3\cos x+27\cos 3x}{ck(k-1(k-2)}=\dfrac{-3+27}{6c}=\dfrac{4}{c}$，

则 $k=3, c=4$，

选择：（C）.

2． 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　　）

（A）$-2f'(0)$．　　（B）$-f'(0)$．　　（C）$f'(0)$．　　（D）0.

解：因 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)}{x^3}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)-f(0)}{x^3}$

$=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)$，

选择：（B）.

3． 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是（　　　）

（A）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.　　（B）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（C）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.　　（D）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

解：若一个级数收敛，则对其加括号后的级数也收敛，

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 每两项加括号后所成的级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，

选择：（A）.

4． 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x dx$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx$，则 I, J, K 的大小关系是（　　　）

（A）$I<J<K$．　　（B）$I<K<J$．　　（C）$J<I<K$．　　（D）$K<J<I$．

解：当 $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\sin x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\cos x<1<\cot x$，有 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$，

则 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x dx<K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx<J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x dx$，

选择：（B）.

5． 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B，再交换 B 的第二行与第三行得单位矩阵，记

$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=$（　　）

（A）P_1P_2.　（B）$P_1^{-1}P_2$.　（C）P_2P_1.　（D）$P_2P_1^{-1}$.

解：因 $AP_1=B$，$P_2B=E$，有 $P_2AP_1=P_2B=E$，即 $A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$，

选择：(D).

6. 设 A 为 4×3 矩阵，η_1,η_2,η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为（　　）

（A）$\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$.　（B）$\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_2-\eta_1)$.

（C）$\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_3-\eta_1)+k_2(\eta_2-\eta_1)$.　（D）$\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_2(\eta_2-\eta_1)+k_3(\eta_3-\eta_1)$.

解：因 η_1,η_2,η_3 是 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关的解，有 $\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$ 是 $Ax=0$ 的 2 个线性无关的解，

则排除选项（A）、(B)，

又因 $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}$ 是 $Ax=\beta$ 的一个特解，而 $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}$ 是 $Ax=0$ 的解

则排除选项（D），

选择：(C).

7. 设 $F_1(x),F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x),f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是（　　）

（A）$f_1(x)f_2(x)$.　（B）$2f_2(x)F_1(x)$.

（C）$f_1(x)F_2(x)$.　（D）$f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

解：因 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\ge0$，

且 $\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}[F_1(x)F_2(x)]'dx=F_1(x)F_2(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=1-0=1$，

取 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别是区间 $(0,1)$ 与 $(0,2)$ 上均匀分布的分布函数，可排除选项（A）、(B)、(C)，

选择：(D).

8. 设总体 X 服从参数为 λ $(\lambda>0)$ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ $(n>2)$ 为来自总体的简单随机样本，则对应的统计量 $T_1=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$T_2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{1}{n}X_n$（　　）

（A）$E(T_1)>E(T_2),\ D(T_1)>D(T_2)$.　（B）$E(T_1)>E(T_2),\ D(T_1)<D(T_2)$.

（C）$E(T_1)<E(T_2),\ D(T_1)>D(T_2)$.　（D）$E(T_1)<E(T_2),\ D(T_1)<D(T_2)$.

解：因 X 服从参数为 λ $(\lambda>0)$ 的泊松分布，有 $E(X_i)=\lambda,\ D(X_i)=\lambda,\quad i=1,2,\cdots,n$，

则 $E(T_1)=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}\times n\lambda=\lambda,\quad D(T_1)=\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\times n\lambda=\frac{\lambda}{n}$，

且 $E(T_2)=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}E(X_i)+\frac{1}{n}E(X_n)=\frac{1}{n-1}\times(n-1)\lambda+\frac{1}{n}\lambda=\left(1+\frac{1}{n}\right)\lambda$，

$$D(T_2)=\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1}D(X_i)+\frac{1}{n^2}D(X_n)=\frac{1}{(n-1)^2}\times(n-1)\lambda+\frac{1}{n^2}\lambda=\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2}\right)\lambda，$$

可得 $E(T_1)<E(T_2),\ D(T_1)<D(T_2)$，

选择：（D）.

二．填空题：

9． 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$，则 $f'(x)=$__________.

解：因 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to0}(1+3t)^{\frac{1}{3t}\cdot3x}=x\mathrm{e}^{3x}$，有 $f'(x)=\mathrm{e}^{3x}+x\cdot\mathrm{e}^{3x}\cdot3=(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$，

填空：$(1+3x)\mathrm{e}^{3x}$.

10．设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $dz\big|_{(1,1)}=$__________.

解：因 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y}\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}-1}\cdot\frac{1}{y}+\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}$，有 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=1+2\ln2$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{y}\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}-1}\cdot\left(-\frac{x^2}{y}\right)+\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x^2}{y}\right)，有 \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=-1-2\ln2，$$

则 $dz\big|_{(1,1)}=(1+2\ln2)dx+(-1-2\ln2)dy$.

填空：$(1+2\ln2)dx+(-1-2\ln2)dy$.

11．曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=\mathrm{e}^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为__________.

解：方程两边关于 x 求导，得 $\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cdot(1+y')=\mathrm{e}^y\cdot y'$，

则 $y'=\dfrac{\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{e}^y-\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)}$，即 $y'\big|_{x=0}=\dfrac{\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{e}^0-\sec^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2}{1-2}=-2$，

可得点 $(0,0)$ 处的切线方程为 $y-0=(-2)\cdot(x-0)$，即 $y=-2x$，
填空：$y=-2x$.

12．曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$，直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为__________.

解：$V_x=\pi\int_1^2(\sqrt{x^2-1})^2dx=\pi\int_1^2(x^2-1)dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^2=\pi\left(\frac{8}{3}-2\right)-\pi\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{4\pi}{3}$，

填空：$\frac{4\pi}{3}$.

13．设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1，A 中行元素之和为 3，则 f 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为__________.

解：因 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1，即 A 只有一个非零特征值，且 A 中行元素之和为 3，

则 A 有一个特征值等于 3，即 A 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$，

可得 f 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=3y_1^2$，

填空：$3y_1^2$.

14．设二维随机变量 (X,Y) 服从 $N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$，则 $E(XY^2)=$__________.

解：因二维正态分布的第 5 个参数 $\rho=0$，有 X 与 Y 相互独立，

则 $E(XY^2)=E(X)E(Y^2)=E(X)\{[E(Y)]^2+D(Y)\}=\mu(\mu^2+\sigma^2)$，

填空：$\mu(\mu^2+\sigma^2)$.

三．解答题：

15．求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

解：$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{2\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{-\sin x}{\sqrt{1+2\sin x}}+\cos x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+2\sin x)^{-\frac{3}{2}}\cdot2\cos x}{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}}$$

$$=\frac{0-1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

16．已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f[(x+y),f(x,y)]$．求 $\left.\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

解：因 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'[(x+y),f(x,y)]+f_2'[(x+y),f(x,y)]\cdot f_1'(x,y)$，

则 $$\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=f_{11}''[(x+y),f(x,y)]+f_{12}''[(x+y),f(x,y)]\cdot f_2'(x,y)+f_{21}''[(x+y),f(x,y)]\cdot f_1'(x,y)$$

$$+f_{22}''[(x+y),f(x,y)]\cdot f_2'(x,y)\cdot f_1'(x,y)+f_2'[(x+y),f(x,y)]\cdot f_{12}''(x,y),$$

因 $f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，有 $f_1'(1,1)=f_2'(1,1)=0$，

$$故\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f_{11}''(2,2)+f_{12}''(2,2)\cdot f_2'(1,1)+f_{21}''(2,2)\cdot f_1'(1,1)$$

$$+f_{22}''(2,2)\cdot f_2'(1,1)\cdot f_1'(1,1)+f_2'(2,2)\cdot f_{12}''(1,1),$$

$$=f_{11}''(2,2)+f_2'(2,2)\cdot f_{12}''(1,1).$$

17．求 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

解：令 $t=\arcsin\sqrt{x}$，有 $\sqrt{x}=\sin t$， $x=\sin^2 t$， $dx=2\sin t\cos tdt$，

$$故\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{t+\ln\sin^2 t}{\sin t}\cdot 2\sin t\cos tdt=2\int t\cos tdt+4\int\ln\sin t\cdot\cos tdt$$

$$=2\int td\sin t+4\int\ln\sin td\sin t=2t\sin t-2\int\sin tdt+4\sin t\ln\sin t-4\int\sin t\cdot\frac{1}{\sin t}\cdot\cos tdt$$

$$=2t\sin t+2\cos t+4\sin t\ln\sin t-4\sin t+C$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+4\sqrt{x}\ln\sqrt{x}-4\sqrt{x}+C.$$

18．证明 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有 2 实根.

证：设 $f(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$，有 $f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=\frac{3-x^2}{1+x^2}$，令 $f'(x)=0$，可得 $x=\pm\sqrt{3}$，

当 $x<-\sqrt{3}$ 时， $f'(x)<0$；当 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时， $f'(x)>0$；当 $x>\sqrt{3}$ 时， $f'(x)<0$，

则 $f(-\sqrt{3})=4\arctan(-\sqrt{3})-(-\sqrt{3})+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 为极小值，

$f(\sqrt{3})=4\arctan\sqrt{3}-\sqrt{3}+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$ 为极大值，

当 $x<-\sqrt{3}$ 时， $f'(x)<0$，有 $f(x)>f(-\sqrt{3})=0$；

当 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时， $f'(x)>0$，有 $f(x)>f(-\sqrt{3})=0$；

可得在 $(-\infty,\sqrt{3})$ 内 $x=-\sqrt{3}$ 是唯一实根，

因 $f(\sqrt{3})=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，不妨取 $f(100)=4\arctan 100-100+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}<0$，

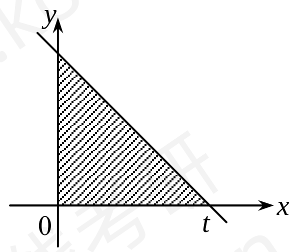
由介值定理知存在 $\xi\in(\sqrt{3},100)$，使得 $f(\xi)=0$，

当 $x>\sqrt{3}$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调下降，可得在 $(\sqrt{3},+\infty)$ 内 $x=\xi$ 是唯一实根，

故 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有 2 实根 $x=-\sqrt{3}$ 与 $x=\xi$.

19. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续的导数， $f(0)=1$ ，且 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy=\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy$ ，

$D_t=\{(x,y)\,|\,0\le x+y\le t\}\quad(0<t\le 1)$，求 $f(x)$ 的表达式.



解：因 $\iint\limits_{D_t} f'(x+y)dxdy=\int_0^t dx\int_0^{t-x} f'(x+y)dy=\int_0^t dx\cdot f(x+y)\Big|_0^{t-x}$

$$=\int_0^t [f(t)-f(x)]dx=tf(t)-\int_0^t f(x)dx\,,$$

且 $\iint\limits_{D_t} f(t)dxdy=f(t)\iint\limits_{D_t} dxdy=\frac{1}{2}t^2 f(t)$ ，即 $tf(t)-\int_0^t f(x)dx=\frac{1}{2}t^2 f(t)$ ，

则两边关于 t 求导，可得 $f(t)+tf'(t)-f(t)=tf(t)+\frac{1}{2}t^2 f'(t)$ ，即 $(t-2)f'(t)+2f(t)=0$ ，

转化为求解微分方程 $(t-2)y'+2y=0$ ， $y|_{t-0}=1$ ，

分离变量，得 $\frac{dy}{y}=-\frac{2dt}{t-2}$ ，两边积分，得 $\ln y=-2\ln(t-2)+\ln C$ ，即 $y=\frac{C}{(t-2)^2}$ ，

因 $y|_{t-0}=1$ ，得 $1=\frac{C}{4}$ ，有 $C=4$ ，即 $y=f(t)=\frac{4}{(t-2)^2}$ ，

故 $f(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$.

20. $\alpha_1=(1,0,1)^T$， $\alpha_2=(0,1,1)^T$， $\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由 $\beta_1=(1,a,1)^T$， $\beta_2=(1,2,3)^T$， $\beta_3=(1,3,5)^T$ 线性表出.

（1）求 a ；

（2）将 β_1,β_2,β_3 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出.

解：（1）因 $|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&3\\1&1&5\end{vmatrix}=5+0+0-1-3-0=1\ne 0$ ，有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，

又因 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出，有 β_1,β_2,β_3 线性相关，

则 $|B|=|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&2&3\\1&3&5\end{vmatrix}=10+3+3a-2-9-5a=2-2a=0$ ，

故 $a=1$ ；

（2）设

$$\begin{cases}\beta_1=c_{11}\alpha_1+c_{21}\alpha_2+c_{31}\alpha_3,\\ \beta_2=c_{12}\alpha_1+c_{22}\alpha_2+c_{32}\alpha_3,\\ \beta_3=c_{13}\alpha_1+c_{23}\alpha_2+c_{33}\alpha_3,\end{cases}$$

则 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$，即 $B=AC$，

可得 $C=A^{-1}B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

即 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

故

$$\begin{cases} \beta_1 = 2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3, \\ \beta_2=\alpha_1+2\alpha_2, \\ \beta_3=\alpha_3. \end{cases}$$

21．A 为三阶实对称矩阵，$R(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

（1）求 A 的特征值与特征向量;

（2）求 A.

解：（1）因 $A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，有 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=-1\times\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，

且 $R(A)=2<3$，即 A 有一个零特征值，

故 A 的特征值 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=1\ \ \lambda_3=0$，

且 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量；$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是对应于 $\lambda_2=1$ 的特征向量，

因 A 为三阶实对称矩阵，即对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 两两正交，

则

$$\begin{cases} x_1-x_3=0, \\ x_1+x_3=0, \end{cases}$$

可得基础解系 $\eta=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量，

故对应于$\lambda_1=-1$的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$k_1\neq 0$，对应于$\lambda_2=1$的特征向量为$k_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_2\neq 0$，

对应于$\lambda_3=0$的特征向量为$k_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$k_3\neq 0$.

22. $\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{array}$，$\begin{array}{c|ccc} Y & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{array}$，$P\{X^2=Y^2\}=1$．求：

（1）(X,Y)的分布；

（2）$Z=XY$的分布；

（3）ρ_{XY}.

解：（1）因$P\{X^2=Y^2\}=1$，有$P\{X^2\neq Y^2\}=0$，

则$P\{X=0,Y=-1\}=P\{X=0,Y=1\}=P\{X=1,Y=0\}=0$，

可得$P\{X=1,Y=-1\}=P\{Y=-1\}-P\{X=0,Y=-1\}=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$，

$P\{X=0,Y=0\}=P\{Y=0\}-P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$，

$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$，

故(X,Y)的联合分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

（2）因$Z=XY$的全部可能取值为$-1,0,1$，

且$P\{Z=-1\}=P\{X=1,Y=-1\}=\frac{1}{3}$，$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{3}$，

$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{3}$，

故$Z=XY$的分布列为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

（3）因$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$，$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$，

$E(Y)=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0$，$E(Y^2)=(-1)^2\times\frac{1}{3}+0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

$$E(XY)=(-1)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0,$$

有 $\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$， $\mathrm{Var}(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{2}{3}-0^2=\frac{2}{3}$，

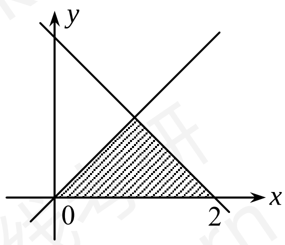
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0-\frac{2}{3}\times 0=0,$$

故 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}=0$．

23．(X,Y) 在 G 上服从均匀分布，G 由 $x-y=0,\ x+y=2$ 与 $y=0$ 围成.

（1）求边缘密度 $f_X(x)$；

（2）求 $f_{X|Y}(x|y)$．



解：（1）因 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布，且 G 的面积等于 1，
则 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$

因 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$，

则当 $x\le 0$ 或 $x\ge 2$ 时， $f_X(x)=0$，

当 $0<x\le 1$ 时， $f_X(x)=\int_0^x 1dy=x$，

当 $1<x<2$ 时， $f_X(x)=\int_0^{2-x}1dy=2-x$，

故 $f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x\le 1,\\ 2-x, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（2）因 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$，

则当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时， $f_Y(y)=0$，

当 $0<y<1$ 时， $f_Y(y)=\int_y^{2-y}1dx=2-2y$，

故当 $0<y<1$ 时， $f_Y(y)>0$， $f_{X|Y}(x|y)=\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y<x<2-y,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$