2017 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题:1□ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的.

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则(　　)

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　　(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

(2) 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是(　　)

(A)（0，0）　　(B) （0，3）　　(C) （3，0）　　(D) （1，1）

(3) 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则(　　)

(A) $f(1)>f(-1)$　　(B) $f(1)<f(-1)$　　(C) $|f(1)|>|f(-1)|$　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

(4)若续数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})\right]$ 收敛，则 k =(　　)

(A)1　　(B) 2　　(C) -1　　(D) -2

(5) 设 α 为 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则(　　)

(A) $E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(B) $E+\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆

(C) $E+2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆　　(D) $E-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$ 不可逆

(6)已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,则(　　)

(A) A 与 C 相似, B 与 C 相似　　(B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似

(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似　　(D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似

(7)设 A，B，C 为三个随机事件，且 A 与 C 相互独立，B 与 C 相互独立，则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件是（　　）

(A) A 与 B 相互独立　　（B） A 与 B 互不相容

（C） AB 与 C 相互独立　　（D） AB 与 C 互不相容

(8)设 $X_1, X_2, \dots X_n (n\ge 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随机样本，记 $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 则下列结论正确的是（　　）

(A) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ 服从 x^2 分布　　(B) $2(x_n-x_1)^2$ 服从 x^2 分布

(C) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2$ 服从 x^2 分布　　(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 x^2 分布

二、填空题：9□ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.

(9) $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})dx=$ ________.

(10)差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 通解为 $y_t=$ ___________

(11) 设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(q)=1+e^{-q}$，其中产量为 q，则边际成本为 ________

(12)设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $df(x,y)=ye^{y}dx+x(1+y)e^{y}dy$，$f(0,0)=0$，则 $f(x,y)$ =________

(13)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1$、$\alpha_2$、$\alpha_3$ 为线性无关的3维列向量组。则向量组 $A\alpha_1$、$A\alpha_2$、$A\alpha_3$ 的秩为 ________

(14)设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=-2\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=a$，$P\{X=3\}=b$，若 $EX=0$，则 $DX=$ ________

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

(16)(本题满分 10 分)

计算积分 $\iint\limits_D\dfrac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dxdy$，其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

(17)(本题满分 10 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}ln(1+\dfrac{k}{\lambda})$

(18)(本题满分 10 分)

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间（0,1）内有实根，确定常数 k 的取值范围.

(19)(本题满分 10 分)

设 $a_0=1$，$a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1、2、3\cdots)$，$S_{(x)}$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数

(I)证幂 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1.

(II)证 $(1-X)S'(x)-xS(x)=0\left(x\in(-1,1)\right)$，并求 $S(x)$ 表达式.

(20)(本题满分 11 分)

设 3 阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

(I)证明 $r(A)=2$；

(II)若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变来那个为 X，Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\left(X=0\right)=P\left(X=2\right)=\frac{1}{2}$，$Y$

的概率密度为 $f\left(y\right)=\begin{cases}2y, & 0<y<1 \\ 0, & 其他\end{cases}$

(I)求 $P(Y\le EY)$；

(II)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_{2,},...,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$.该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=\left|X_i-\mu\right|\left(i=1,2,\cdots n\right)$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 估计 σ.

(I)求 Z_1 的概率密度；

(II)利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(III)求 σ 的最大似然估计量.