2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线条数 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$ ( )

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$ (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

(3) 设 $a_n>0\ (n=1,2,3\cdots)$, $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ( )

(A) 充分必要条件 (B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件 (D) 非充分也非必要

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi}e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x,(k=1,2,3)$, 则有 ( )

(A) $I_1<I_2<I_3$ (B) $I_3<I_2<I_1$ (C) $I_2<I_3<I_1$ (D) $I_2<I_1<I_3$

(5) 设函数 $f(x,y)$ 为可微函数，且对任意的 x,y 都有 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial x}>0,\dfrac{\partial(x,y)}{\partial y}<0,$ 则使不等式 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是 ( )

(A) $x_1>x_2,y_1<y_2$ (B) $x_1>x_2,y_1>y_2$ (C) $x_1<x_2,y_1<y_2$ (D) $x_1<x_2,y_1>y_2$

(6) 设区域 D 由曲线 $y=\sin x,x=\pm\dfrac{\pi}{2},y=1$ 围成，则 $\iint\limits_D(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ( )

(A) π (B) 2 (C) -2 (D) -π

(7) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$,其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的为 ( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ (C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

(8) 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.若 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$Q=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=$ ( )

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

二、填空题：9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的隐函数，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$__________.

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$________________.

(11) 设 $z=f\left(\ln x+\dfrac{1}{y}\right)$,其中函数 $f(u)$ 可微，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=$____________.

(12) 微分方程 $y\mathrm{d}x+\left(x-3y^2\right)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$____________.

(13) 曲线 $y=x^2+x\left(x<0\right)$ 上曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是____________.

(14) 设 A 为3阶矩阵，$|A|=3$，A^* 为 A 伴随矩阵，若交换 A 的第1行与第2行得矩阵 B，则 $\left|BA^*\right|=$________.

三、解答题：15-23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$，

(I)求 a 的值;

(II)若 $x\to 0$ 时，$f\left(x\right)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小，求常数 k 的值.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f\left(x,y\right)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

(17)(本题满分 12 分)

过 $(0,1)$ 点作曲线 $L: y=\ln x$ 的切线,切点为 A,又 L 与 x 轴交于 B 点,区域 D 由 L 与直线 AB 围成,求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

(18)(本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中区域 D 为曲线 $r=1+\cos\theta\left(0\le\theta\le\pi\right)$ 与极轴围成.

(19)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^x$,

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)\mathrm{d}t$ 的拐点.

(20)(本题满分 10 分)

证明 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2}, (-1<x<1)$.

(21)(本题满分 10 分)

(I)证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1\ (n>1$的整数$)$，在区间$\left(\frac{1}{2},1\right)$内有且仅有一个实根；

(II)记(I)中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

(22)(本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

(I) 计算行列式$|A|$；

(II) 当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=\beta$ 有无穷多解，并求其通解.

(23)(本题满分 11 分)

已知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^T(A^TA)x$ 的秩为 2，

(I) 求实数 a 的值；

(II) 求正交变换 $x=Qy$ 将 f 化为标准形.