2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1、当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】C

【解析】$x - \tan x \sim -\dfrac{x^3}{3}$，所以选 C.

2、设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, x,, 0, \\ x\ln x, x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

A. 可导点，极值点　　B. 不可导点，极值点.

C. 可导点，非极值点　　D. 不可导点，非极值点.

【答案】B

【解析】$f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x \to 0^-} x|x| = 0$，所以连续.

又 $f_+'(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x\ln x - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$，所以不可导.

$f'(x) = \begin{cases} -2x, \ x < 0, \\ \ln x + 1, x > 0, \end{cases}$ $f'(x)$ 在 $x = 0$ 的去心左右领域内异号，所以是极值点. 选 B.

3、设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{u_n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}})$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$

【答案】D

【解析】取 $u_n = -\dfrac{1}{\ln n}$，则 A 不对；取 $u_n = -\dfrac{1}{n}$，则 B、C 不对；

而 D 选项 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2) = (u_2^2 - u_1^2) + (u_3^2 - u_2^2) + \cdots = \lim\limits_{n \to \infty} u_{n+1}^2 - u_1^2$，$u_n$ 存在极限，选 D.

4、设函数 $Q(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$，如果对上半平面 $(y > 0)$ 内的任意有向光滑封闭曲线 C 都有

$\oint_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$，那么函数 $P(x, y)$ 可取为（　　）

A. $y-\dfrac{x^2}{y^3}$　　B. $\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$　　C. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$　　D. $x-\dfrac{1}{y}$

【答案】D

【解析】曲线积分与路径无关，则必须满足 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{1}{y^2}$，且 $\dfrac{\partial P}{\partial y},\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 必须满足在 $x=0$ 有定义，所以选 D.

5、设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶实对称矩阵，$\boldsymbol{E}$ 是3阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，且 $|\boldsymbol{A}|=4$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 规范形为（　　）

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

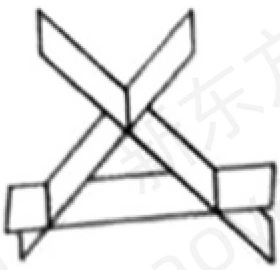
【答案】C

【解答】由 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，可知矩阵的特征值满足方程 $\lambda^2+\lambda-2=0$，解得，$\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$. 再由 $|\boldsymbol{A}|=4$，可知 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$，所以规范形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 故答案选 C.

6、如图所示，有3张平面两两相交，交线相互平行，它们的方程

$$a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i\ (i=1,2,3)$$

组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{A}}$，则（　　）



A. $r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=3.$

B. $r(\boldsymbol{A})=2,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2.$

C. $r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=2.$

D. $r(\boldsymbol{A})=1,r(\overline{\boldsymbol{A}})=1.$

【答案】A.

【解答】因为3张平面无公共交线，则说明方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 无解，即 $r(\boldsymbol{A})<r(\overline{\boldsymbol{A}})$.
又因为3张平面两两相交，且交线相互平行，则齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有一个线性无关解，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$，故答案选 A.

7、设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 充分必要条件是（　　）

A. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$　　　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\,\overline{B})$

【答案】C

【解析】$P(A\overline{B})=P(B\overline{A})\Leftrightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\Leftrightarrow P(A)=P(B)$；故选 C.

8、设随机变量 X 和 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-Y|<1\}$（　　）

A. 与 μ 无关，而与 σ^2 有关　　　　B. 与 μ 有关，而与 σ^2 无关

C. 与 μ，σ^2 都有关　　　　D. 与 μ，σ^2 都无关

【答案】A

【解析】$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，所以 $P\{|X-Y|<1\}=\Phi(\frac{1-0}{\sqrt{2}\sigma})-\Phi(\frac{-1-0}{\sqrt{2}\sigma})=2\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})-1$；

选 A

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9、设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$__________.

【答案】$\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$.

【解答】因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'(\sin y-\sin x)(-\cos x)+y$，$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(\sin y-\sin x)\cos y+x$，

所以 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$.

10、微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解 $y=$__________.

【答案】$y=\sqrt{3e^x-2}$.

【解析】因为 $2yy'-y^2-2=0$，可得 $\frac{2y}{y^2+2}dy=dx$，两边积分可得 $\ln(y^2+2)=x+C$.

代入 $y(0)=1$，得 $C=\ln 3$，故 $y=\sqrt{3e^x-2}$.

11、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$__________.

【答案】$\cos\sqrt{x}$.

【解析】$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x}$.

12、设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4\,(z\geq 0)$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

【答案】$\dfrac{32}{3}$.

【解析】$\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}|y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{x^2+y^2\leq 4,\,y\geq 0}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sin\theta r\mathrm{d}r=\frac{32}{3}.$$

13、设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为3阶矩阵. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为____________.

【答案】$\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

【解析】由条件 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，又 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，所以 $r(\boldsymbol{A})=2$.

由此可知方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系只包含一个线性无关解向量. 再由 $\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$ 可得

$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=0$，所以可取 $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ 为一个非零解，故通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$（$k$ 为任意常数）.

14、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$，$F(x)$ 为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$____________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$.

【解析】由条件可得 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\dfrac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$，且可求得分布函数

$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\leq x<2,\\ 1, & x\geq 2.\end{cases}$ 故可得 $P\{F(X)>EX-1\}=P\{F(X)>\dfrac{1}{3}\}=\dfrac{2}{3}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15、（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

（1）求 $y(x)$；

（2）求曲线 $y=y(x)$ 凹凸区间及拐点.

【解析】（1）可知方程为一阶线性方程，由通解公式可得通解为

$y(x)=e^{-\int xdx}\left[\int e^{-\frac{x^2}{2}}e^{\int xdx}dx+C\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}(x+C)$，再由 $y(0)=0$，解得 $C=0$，故特解为

$y(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$.

（2）因为 $y'=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2)$， $y''=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x^3-3x)$，由 $y''=0$ 得 $x=0,x=\sqrt{3},x=-\sqrt{3}$，再由二阶导数的符号可得其凹区间为 $(-\sqrt{3},0)\cup(\sqrt{3},+\infty)$，凸区间为 $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(0,\sqrt{3})$，

拐点为 $(0,0),(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}),(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}})$.

16、（本题满分 10 分）

设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿方向 $\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$ 的方向导数最大，最大值为10.

（1）求 a,b；

（2）求曲面 $z=2+ax^2+by^2\ (z\geq 0)$ 的面积.

【解析】（1） $z'_x=2ax,z'_y=2by$；

方向导数沿梯度的方向时最大，此时为梯度的模；而梯度

$$grad\ z(3,4)=(z'_x,z'_y)\big|_{(3,4)}=(6a,8b),$$

所以 $\dfrac{6a}{-3}=\dfrac{8b}{-4}>0$，且 $36a^2+64b^2=100$，解得 $a=b=-1$.

（2） $z=2-x^2-y^2$，所以所求面积

$$S=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2}\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\leq 2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{13\pi}{3}.$$

17、求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x\,(x\geq 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

【解析】设在区间$[n\pi,(n+1)\pi]$ $(n=0,1,2,\cdots)$上所围的面积记为u_n，则

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x\text{；}$$

记$I=\int\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$，则$I=-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\cos x=-(\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x})$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-\int\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}\sin x=-\mathrm{e}^{-x}\cos x-(\mathrm{e}^{-x}\sin x-\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x})$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)-I\text{，}$$

所以$I=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)+C$；

因此$u_n=(-1)^n(-\dfrac{1}{2})\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{-(n+1)\pi}+\mathrm{e}^{-n\pi})$；

（这里需要注意$\cos n\pi=(-1)^n$）

因此所求面积为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n\pi}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-1}$.

18、设$a_n=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}dx\left(n=0,1,2\cdots\right)$

（1）证明数列$\left\{a_n\right\}$单调递减；且$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3\cdots\right)$

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$

（1）【解析】$a_{n+1}-a_n=\int_0^1x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}dx<0$，所以$\left\{a_n\right\}$单调递减.

$$a_n=-\frac{1}{3}\int_0^1x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}[x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx^{n-1}]$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{n-1}{3}(\int_0^1x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x-\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{n-1}{3}(a_{n-2}-a_n),$$

从而有$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3\cdots\right)$；

（2）因为$\dfrac{a_n}{a_{n-2}}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<\dfrac{a_n}{a_n}=1$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+2}=1$，由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

19、设Ω是由锥面$x^2+\left(y-z\right)^2=\left(1-z\right)^2\left(0\le z\le1\right)$与平面$z=0$围成的锥体，求$\Omega$的形心坐标.

【解析】设形心坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，$\bar{x}=0$，且有

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

由对称性知，$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，

$\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 dz\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，令$x=r\cos\theta,y-z=r\sin\theta$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{1-z}(z+r\sin\theta)rdr,$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}z(1-z)^2+\frac{1}{3}(1-z)^3\sin\theta\right]d\theta=\pi\int_0^1 z(1-z)^2dz=\frac{\pi}{12},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+(y-z)^2\le(1-z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^1 z(1-z)^2\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12},$$

故$\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=0$，$\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{4}$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\dfrac{1}{4}$，因此形心坐标为$(0,\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4})$.

20、设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,3,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(1,a,3)^T$为$R^3$的一个基，$\boldsymbol{\beta}=(1,1,1)^T$在这个基下的坐标$(b,c,1)^T$.

（1）求a,b,c；

（2）证明$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$为$R^3$的一个基，并求出$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$到$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$,的过渡矩阵.

【解析】（1）易知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则其行列式不为零，即$a\ne 4$.

由$b\boldsymbol{\alpha}_1+c\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$可得$\begin{cases}1+b+c=1,\\2b+3c+a=1,\\b+2c+3=1,\end{cases}$从而$a=3,b=2,c=-2$.

（2）因为$|\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{vmatrix}=2\ne 0$，所以也是$R^3$的一个基；

方法一：设过渡矩阵为P，则有$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，从而

$$P=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{bmatrix}.$$

方法二：设过渡矩阵为P，则有$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，又由（1）有

$$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}，所以 P=\begin{bmatrix}0&0&2\\1&0&-2\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{bmatrix}$$

21、已知矩阵$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&-2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{bmatrix}$与$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{bmatrix}$相似，

（1）求x,y；

（2）求可逆矩阵$\mathbf{P}$使得$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$

【解析】（1）

方法二相似矩阵有相同的特征值，因此有$\begin{cases}-2+x-2=2-1+y,\\|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\end{cases}$

又$|\boldsymbol{A}|=-2(4-2x)$，$|\boldsymbol{B}|=-2y$，所以$x=3,y=-2$.

方法二，观察得$\mathbf{A}$必有一个特征值为-2，$\mathbf{B}$的特征值为$2,-1,y$，因此由$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$相似得两个矩阵特征值相等得$y=-2$，再由$-2+x-2=2-1+y$，得$x=3$

（2）易知B的特征值为$2,-1,-2$；因此

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}，取 \boldsymbol{\xi}_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}}，$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$，取 $\boldsymbol{\xi}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}4&0&1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$，取 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,2,4)^{\mathrm{T}}$

令 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则有 $P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$；

同理可得，对于矩阵 $\boldsymbol{B}$，有矩阵 $P_2=\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$，所以

$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$，即 $B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}$，所以

$$P=P_1P_2^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\2&1&2\\0&0&4\end{bmatrix}.$$

22、设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p$，$P(Y=1)=1-p$，（$0<p<1$），令 $Z=XY$.

（1）求 Z 的概率密度；

（2）p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（3）X 与 Z 是否相互独立?

【解析】（1）Z 的分布函数为 $F_Z(z)=P(XY\le z)=P(Y=-1,X\ge -z)+P(Y=1,X\le z)$，

因为 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$，

因此，$F_Z(z)=p[1-F_X(-z)]+(1-p)F_X(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ p+(1-p)(1-\mathrm{e}^{-z}), & z\ge 0.\end{cases}$

所以，Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}p\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z\ge 0.\end{cases}$

（2）当 $Cov(X,Z)=EXZ-EX\cdot EZ=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY=0$ 时，X 与 Z 不相关. 因为 $DX=1$，$EY=1-2p$，故 $p=\dfrac{1}{2}$.

（3）不独立. 因为 $P(0\le X\le 1, Z\le 1)=P(0\le X\le 1, XY\le 1)=P(0\le X\le 1)=1-e^{-1}$,

而 $P(Z\le 1)=F_Z(1)=p+(1-p)(1-\mathrm{e}^{-1})$，故 $P(0\le X\le 1, Z\le 1)\ne P(0\le X\le 1)P(Z\le 1)$，

所以 X 与 Z 不独立.

23、（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\ge\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 简单随机样本.

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

【解析】（1）由密度函数的规范性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$，即

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{A}{\sigma}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,$$

得 $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

（2）设似然函数 $L(\sigma^2)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\sigma^{-n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$,

取对数，$\ln L(\sigma^2)=\dfrac{n}{2}\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$；

对 σ^2 求导，$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$,

令导数为零，解得 $\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.