2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x \to 0^+$ 时,若 $\ln^{\alpha}(1+2x)$,$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小,则 α 的取值范围是(　　)

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $(\frac{1}{2},1)$　　(D) $(0,\frac{1}{2})$

(2) 下列曲线有渐近线的是　　(　　)

(A) $y=x+\sin x$　　(B) $y=x^2+\sin x$

(C) $y=x+\sin\frac{1}{x}$　　(D) $y=x^2+\sin^2 x$

(3) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数,$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$,则在区间 $[0,1]$ 上　　(　　)

(A)当 $f'(x)\geq 0$ 时,$f(x)\geq g(x)$　　(B)当 $f'(x)\geq 0$ 时,$f(x)\leq g(x)$

(C)当 $f''(x)\geq 0$ 时,$f(x)\geq g(x)$　　(D)当 $f''(x)\geq 0$ 时,$f(x)\leq g(x)$

(4) 曲线 $\begin{cases} x=t^2+7 \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是　　(　　)

(A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$　　(B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$　　(C) $10\sqrt{10}$　　(D) $5\sqrt{10}$

(5) 设函数 $f(x)=\arctan x$,若 $f(x)=xf'(\xi)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$　　(　　)

(A) 1　　(B) $\frac{2}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{1}{3}$

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续,在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数,且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,则　　(　　)

(A) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

(B) $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部上取得

(C) $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，最小值在 D 的边界上取得

(D) $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，最大值在 D 的边界上取得

(7) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

(A) $(ad-bc)^2$　　(B) $-(ad-bc)^2$

(C) $a^2d^2-b^2c^2$　　(D) $b^2c^2-a^2d^2$

(8) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\ \alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的　　(　　)

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) $\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$ ________.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$，则 $f(7)=$ ________.

(11) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x^2+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz\big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$ ________.

(12) 曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程是 ________.

(13) 一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1)$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心

坐标 $\bar{x}$ = ________.

(14) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(16)（本题满分 10 分）

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值．

(17)（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le4,x\ge0,y\ge0\right\}$，计算 $\iint\limits_D\dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}dxdy$.

(18)（本题满分 10 分）设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$\dfrac{\partial^2z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$．若 $f(0)=0,f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式．

(19)（本题满分 10 分）设函数 $f(x),g(x)$ 的区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le1$，证明：

（I）$0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,x\in[a,b]$，

（II）$\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt}f(x)\,dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

(20)（本题满分 11 分）设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x},x\in[0,1]$，定义函数列

$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\cdots$，记 S_n 是曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$

及 x 轴所围成平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

(21)（本题满分 11 分）已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y)y(= \; y+ (1^{2} \;\; \not{b}2 \quad y \quad y$

求曲线 $f(x,y)=0$ 所围成的图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成的旋转体的体积.

(22)（本题满分 11 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$，$E$ 为3阶单位矩阵.

（I）求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（II）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

(23)（本题满分 11 分）证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.