2013 硕士研究生入学考试数学三真题及答案解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 当 $x\to 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是（ ）

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$

(D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

答案： **(**D)

解析： (A) $\dfrac{xo(x^2)}{x^3}=\dfrac{o(x^2)}{x^2}\to 0$

(B) $\dfrac{o(x)o(x^2)}{x^3}=\dfrac{o(x)}{x}\cdot\dfrac{o(x^2)}{x^2}\to 0$

(C) $\dfrac{o(x^2)+o(x^2)}{x^2}=\dfrac{o(x^2)}{x^2}\cdot\dfrac{o(x^2)}{x^2}\to 0$

(D) $\dfrac{o(x)+o(x^2)}{x^2}=\dfrac{o(x)}{x^2}+\dfrac{o(x^2)}{x^2}$推不出0　如：$x^2=o(x)$则$\dfrac{o(x)+o(x^2)}{x^2}\to 1$

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　）

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

答案：(B)

解析： $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln|x|}}{x(x+1)\ln|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=1.$

$\lim\limits_{x\to 1}$ *f(x)*= $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to -1}$ *f(x)*= $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x\ln|x|}{x(x+1)\ln|x|}=\infty$

而 f(0),f(1)无定义，故 x=0,x=1 为可去间断点.

（3）设 D_k 是圆域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 位于第 k 象限的部分，记 $I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy\ (k=1,2,3,4)$，则（ ）

（A） $I_1>0$

（B） $I_2>0$

（C） $I_3>0$

（D） $I_4>0$

答案： **(**B）

解析：

$$I_k=\iint\limits_{D_k}(y-x)dxdy=\int_{(k-1)\pi/2}^{k\pi/2}d\theta\int_0^1(r\sin\theta-r\cos\theta)rdr=\frac{1}{3}\int_{(k-1)\pi/2}^{k\pi/2}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_{(k-1)\pi/2}^{k\pi/2}(\sin\theta-\cos\theta)d\theta=\frac{1}{3}(\cos\theta+\sin\theta)\Big|_{(k-1)\pi/2}^{k\pi/2}，带入得 I_1=0,I_2=\frac{2}{3}>0,I_3=0,I_4=-\frac{2}{3}<0$$

故应选 B。

（4）设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是（ ）

（A）若 $a_n>a_{n+1}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

（B） 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n>a_{n+1}$

（C） 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $P>1$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^Pa_n$ 存在

（D）若存在常数 $P>1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}n^Pa_n$ 存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

答案：（D）

解析：因为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}(p>1)$收敛，$\lim_{n\to\infty}na_n$存在，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛。故应选 D。

（5）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若$AB=C$,则B可逆，则

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的列向量组与矩阵 B 的列向量组等价

答案：（B）

解析：∵B 可逆.∴$A(b_1\ldots b_n)=C=(c_1\ldots c_n)$

∴$Ab_i=C_i$.即 C 的列向量组可由 A 的列向量组表示.

∵AB=C　∴$A=CB^{-1}=CP$.

同理：A 的列向量组可由 C 的列向量组表示.

（6）矩阵$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

（A）$\mathrm{a}=0,\mathrm{b}=2$

（B）$a=0,b$为任意常数

（C）$a=2,b=0$

（D）$a=2,b$为任意常数

答案：（B）

解析：A 和 B 相似，则 A 和 B 的特征值相同.

∴A 和 B 的特征值为$\lambda_1=0$. $\lambda_2=b$. $\lambda_3=2$.

∴$|A-2E|=\begin{vmatrix}-1 & a & 1\\ a & b-2 & a\\ 1 & a & -1\end{vmatrix}=4a^2$　∴$a=0$

且$R(A)=R(B)$ $\quad A \to \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & b-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

当 a=0 时，$\forall b \in R$时，有$R(A)=R(B)$.

反之对于$\forall b \in R$、$a=0$时.有A和B相似..

(7) 设X_1，X_2，X_3是随机变量，且X_1~N(0,1)，X_2~N(0, 2^2)，$X_3 \sim N(5,3^2)$，

$P_j=P\{-2 \le X_j \le 2\}(j=1,2,3)$,则（ ）

(A) $P_1>P_2>P_3$

(B) $P_2>P_1>P_3$

(C) $P_3>P_1>P_2$

(D) $P_1>P_3>P_2$

答案： **(**A)

解析：

$P_1=P(-2<X_1<2)=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1$

$P_2=P(-1<\frac{X_2-0}{2}<1)=2\Phi(1)-1 \qquad \therefore P_1>P_2$

$P_3=P\left(-\frac{7}{3}<\frac{X_3-5}{3}<-1\right)=\Phi\left(\frac{7}{3}\right)-\Phi(1) \quad P_2>P_3 \therefore P_1>P_2>P_3$

(8) 设随机变量 X 和 Y 相互独立，则 X 和 Y 的概率分布分别为，

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则$P\{X+Y=2\}=$（ ）

(A) $\frac{1}{12}$

(B) $\frac{1}{8}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{1}{2}$

答案：（C）

解析：

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=1，Y=1\}+P\{X=2，Y=0\}+P\{X=3，Y=-1\}$$
$$=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=2\}P\{Y=0\}+P\{X=3\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设曲线 $y=f(x)$ 和 $y=x^2-x$ 在点 $(0,1)$ 处有公共的切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$________。

答案：-2

解析：

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+2}\cdot\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)}{-\frac{2}{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+2}\cdot\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\frac{2}{n+2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n}{n+2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1-\frac{2}{n+2}\right)-f(1)}{-\frac{2}{n+2}}=-2f'(1)=-2$$

（10）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=$________。

答案：2-2ln2

解析：

把点 $(1,2)$ 代入 $(z+y)^x=xy$，得 $z(1,2)=0$

在 $(z+y)^x=xy$ 两边同时对 x 求偏导数，有

$$(z+y)^x\left[\ln(z+y)+x\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{z+y}\right]=y，将x=1,y=2,z(1,2)=0代入得\frac{\partial z}{\partial x}=2-2\ln 2$$

（11）求$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx$ ________。

答案： ln2

解析： $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}dx=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)x}$

$=0+\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=0-\ln\frac{1}{2}=\ln 2.$

（12）微分方程$y''-y'+\frac{1}{4}y=0$通解为$y=$________。

答案： $y=e^{\frac{1}{2}x}(c_1+c_2x)$

解析：

二阶齐次微分方程的特征方程为$\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$,解得$\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$,

所以齐次方程的通解为$y=e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1+c_2x\right)$

（13）设 $A=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$,则$|A|=$____。

答案： -1

解析： $\because a_{ij}+A_{ij}=0$

$\therefore A_{ij}=-a_{ij}$

$\therefore A^*=-A^T\Rightarrow AA^*=-AA^T=|A|E$

取行列式得：　$-|A|^2=|A|^3\Rightarrow|A|=0$或$|A|=-1$

若$|A|=0,\Rightarrow -AA^T=0,\Rightarrow A=0$(矛盾)

$\therefore|A|=-1$

（14）设随机变量 X 服从标准正态分布$X\sim N(0,1)$,则$E(Xe^{2X})=$________。

答案： $2e^2$

解析：

标准正态分布的概率密度$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$E\left(Xe^{2X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{1}{2}(x-2)^2-2}dx=e^2\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-2)^2}dx=2e^2$$

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小，求$n$与$a$的值。

解析：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x+1}{4}}{ax^n}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\cos 6x-\cos 4x-\cos 2x}{4ax^n}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6\sin 6x+4\sin 4x+2\sin 2x}{4anx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{36\cos 6x+16\cos 4x+4\cos 2x}{4an(n-1)x^{n-2}}$$

所以$n=2$

当$n=2$时，由题意$\frac{36+16+4}{4a\cdot 2\cdot 1}=1\Rightarrow a=7$

所以$n=2$，$a=7$

（16）（本题满分 10 分）

设D是由曲线$y=x^{\frac{1}{3}}$，直线$x=a(a>0)$及x轴所围成的平面图形，V_x,V_y分别是D绕x轴，y轴旋转一周所得旋转体的体积，若$V_y=10V_x$，求a的值。

解析：由题意可得:

$$V_x=\pi\int_0^a(x^{\frac{1}{3}})^2dx=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$$

$$V_y=2\pi\int_0^a x\cdot x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}$$

因为：$V_y=10V_x$ 所以$\frac{6\pi}{7}a^{\frac{7}{3}}=10\cdot\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}\Rightarrow a=7\sqrt{7}$

（17）（本题满分 10 分）

设平面内区域D由直线$x=3y, y=3x$及$x+y=8$围成.计算$\iint_D x^2dxdy$。

解析： $y=3x$与$x+y=8$的交点为$(2,6)$， $y=\frac{1}{3}x$与$x+y=8$的交点为$(6,2)$。

$$\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^2 dx\int_{\frac{1}{3}x}^{3x}x^2dy+\int_2^6 dx\int_{\frac{1}{3}x}^{8-x}x^2dy=\int_0^2(3x-\frac{1}{3}x)x^2dx+\int_2^6(8-x-\frac{1}{3}x)x^2dx=\frac{416}{3}$$

（18）（本题满分 10 分）

设生产某产品的固定成本为 6000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为 $P=60-\frac{Q}{1000}$，（P 是单价，单位：元，Q 是销量，单位：件），已知产销平衡，求：

（1）该商品的边际利润。

（2）当 P=50 时的边际利润，并解释其经济意义。

（3）使得利润最大的定价 P。

解析：（1）总收入 $R(P)=PQ=1000P(60-P)=60000P-1000P$

总成本 $C(P)=60000-20Q=1260000-20000P$

总利润 $L(P)=R(P)-C(P)=-1000P^2+80000P-1260000$

边际利润 $L'(P)=-2000P+80000$

（2）当 P=50 时的边际利润为 $L'(50)=-2000\times 50+80000=-2000$，其经济意义为在 P=50 时，价格每提高 1 元，总利润减少 2000 元。

（3）由于 $L'(P)=-2000P+80000\begin{cases}>0,P<40\\<0,P>40\end{cases}$，$L(P)$ 在 $(0,40)$ 递增，在 $(40,+\infty)$ 递减，当 P=40 时，总利润最大。

（19）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上可导，$f(0)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，证明

（1）存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$

（2）对（1）中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$,使得 $f'(\xi)=\frac{1}{a}$.

证明：（1）因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，存在 $A>0$,使得当 $x\geq A$ 时，$|f(x)-2|<\frac{1}{2}$，因此 $f(A)>\frac{3}{2}$，由连续函数的介值性，存在 $a\in(0,A)$，使得 $f(a)=1$。

（2）由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,a)$,使得 $f'(\xi)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{1}{a}$.

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

解析： 令 $C=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{pmatrix}$，则

$$AC=\begin{pmatrix}1 & a\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\x_1 & x_2\end{pmatrix}$$

$$CA=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\x_3 & x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\x_3+x_4 & ax_3\end{pmatrix}$$

$$AC-CA=\begin{pmatrix}-x_2+ax_3 & -ax_1+x_2+ax_4\\x_1-x_3-x_4 & x_2-ax_3\end{pmatrix},$$

则由 $AC-CA=B$ 得

$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\-ax_1+x_2+ax_4=1\\x_1-x_3-x_4=1\\x_2-ax_3=b\end{cases}$，此为 4 元非齐次线性方程组，欲使 C 存在，此线性方程组必须有解，于是

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\-a & 1 & 0 & a & 1\\1 & 0 & -1 & -1 & 1\\0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -1 & a & 0 & 0\\0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\1 & 0 & -1 & -1 & 1\\0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\0 & 1 & -a & 0 & 0\\0 & 1 & -a & 0 & 1+a\\0 & 1 & -a & 0 & b\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\0 & 1 & -a & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1+a\\0 & 0 & 0 & 0 & b\end{pmatrix}$$

所以，当 $a=-1,b=0$ 时，线性方程组有解，即存在 C，使 $AC-CA=B$。

又 $\overline{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，

所以 $X=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+c_2+1\\-c_1\\c_1\\c_2\end{pmatrix}$

所以 $C=\begin{pmatrix}c_1+c_2+1&-c_1\\c_1&c_2\end{pmatrix}$，（其中$c_1,c_2,c_3$为任意常数）。

（21）（本题满分 11 分）

设二次型$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$。

(I) 证明二次型f对应的矩阵为$2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

(II) 若α,β正交且均为单位向量，证明二次型f在正交变化下的标准形为二次型$2y_1^2+y_2^2$。

证明：

$(1)\ f=2\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\left(a_1,a_2,a_3\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\left(x_1,x_2,x_3\right)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\left(b_1,b_2,b_3\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$=X^T\left(2\alpha\alpha^T\right)X+X^T\left(\beta\beta^T\right)X=X^T\left(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T\right)X$

故f的矩阵A=$2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$

$(2)\because A\alpha=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\alpha=2\alpha\left|\alpha\right|^2+\beta\beta^T\alpha=2\alpha$

$\therefore\alpha$为A的对应于λ_1=2的特征向量

又$A\beta=(2\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\beta=2\alpha\alpha^T\cdot\beta+\beta\cdot\left|\beta\right|^2=\beta$

β为A的对应于λ_2=1的特征向量

$\because r\left(A\right)\le r\left(2\alpha\alpha^T\right)+r\left(\beta\beta^T\right)=r\left(\alpha\right)+r\left(\beta\right)=2<3$

$\therefore\lambda_3=0$

故f在正交变换下的标准型为$2y_1^2+y_2^2$.

(22) （本题满分 11 分）

设(X,Y)是二维随机变量，X的边缘概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$，在给定$X=x(0<x<1)$的条件下，$Y$的条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

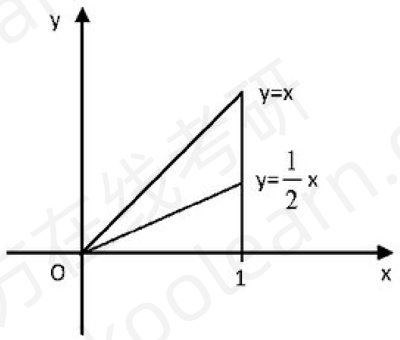
(1) 求(X,Y)的概率密度$f(x,y)$；

(2) Y的边缘概率密度$f_Y(y)$；

(3) 求$P\{X>2Y\}$。

解析：(I) $f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}3x^2\cdot\dfrac{3y^2}{x^3} & 0<x<1,0<y<x\\ 0 & 其他\end{cases}$。

(II) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$



当$0<y<1$时，$f_Y(y)=\int_y^1\dfrac{9y^2}{x}dx=-9y^2\cdot\ln y$

所以y的边缘概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}-9y^2\cdot\ln y & 0<y<1\\ 0 & 其他\end{cases}$

(III) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{X>2Y}f(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_0^{\frac{x}{2}}\dfrac{9y^2}{x}dy=\dfrac{1}{8}$

(23) （本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_N$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量.

解析：（1）$EX=\int_0^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\theta^2}{x^2}e^{-\frac{\theta}{x}}dx=-\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{\theta}{x}}d(\frac{\theta}{x})=-\theta\int_{+\infty}^{0}e^{-t}d(t)=\theta$，令 $EX=\bar{X}$，得到矩估计 $\theta=\bar{X}$。

（2）
$$l(\theta)=f(x_1,\theta)f(x_2,\theta)\cdots f(x_n,\theta)=\theta^{2n}(x_1x_2\cdots x_n)^{-3}e^{-\theta(\frac{1}{x_1}+\cdots\frac{1}{x_n})}$$
$$L=\ln(l(\theta))=2n\ln\theta-3\ln(x_1x_2\cdots x_n)-\theta(\frac{1}{x_1}+\cdots\frac{1}{x_n})$$
$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=\frac{2n}{\theta}-(\frac{1}{x_1}+\cdots\frac{1}{x_n})=0$$

得到最大似然估计：$\theta=\dfrac{2n}{\frac{1}{x_1}+\cdots\frac{1}{x_n}}$。