2019 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试题参考答案

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的.

1、当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k =$（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】C

【解析】当 $x \to 0$ 时，$x - \tan x \sim -\dfrac{x^3}{3}$，则 $k = 3$，所以选 C.

2、已知方程 $x^5 - 5x + k = 0$ 有 3 个不同的实根，则 k 的取值范围为（　）

A. $(-\infty, -4)$　　B. $(4, +\infty)$　　C. $[-4, 4]$　　D. $(-4, 4)$

【答案】D.

【解析】令 $f(x) = x^5 - 5x + k$，由 $f'(x) = 5x^4 - 5 = 0$ 得 $x = \pm 1$，当 $x < -1$ 时，$f'(x) > 0$，当 $-1 < x < 1$ 时，$f'(x) < 0$，当 $x > 1$ 时，$f'(x) > 0$，又由于 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$，方程要有三个不等实根，只需要 $f(-1) = 4 + k > 0$，$f(1) = -4 + k < 0$，因此 k 的取值范围为 $-4 < k < 4$.

3、已知微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + e^x$，则 a, b, c 依次为（　　）

A. $1,0,1$　　B. $1,0,2$　　C. $2,1,3$　　D. $2,1,4$

【答案】D.

【解析】由通解形式知，$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$，故特征方程为 $(\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$，所以 $a = 2, b = 1$，又由于 $y^* = e^x$ 是 $y'' + 2y' + y = ce^x$ 的特解，代入得 $c = 4$.

4、若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n u_n$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛，则（　　）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 条件收敛　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 绝对收敛　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 发散

【答案】B.

【解析】由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛知，$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{v_n}{n} = 0$，故当 n 充分大时，$\left|\dfrac{v_n}{n}\right| \leq 1$．所以

$|u_nv_n|=\left|nu_n\cdot\frac{v_n}{n}\right|$,, $|nu_n|$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$绝对收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$绝对收敛.

5、设$\boldsymbol{A}$是四阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$是$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵，若线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中只有 2 个向量，则$\boldsymbol{A}^*$的秩是（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】 A.

【解析】由于方程组基础解系中只有 2 个向量，则$4-r(\mathbf{A})=2$，所以$r(\mathbf{A}^*)=0$.

6、设$\boldsymbol{A}$是3阶实对称矩阵，$\boldsymbol{E}$是3阶单位矩阵. 若$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，且$|\boldsymbol{A}|=4$，则二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$规范形为（　　）

A. $y_1^2+y_2^2+y_3^2$　B. $y_1^2+y_2^2-y_3^2$　C. $y_1^2-y_2^2-y_3^2$　D. $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$

【答案】C

【解析】由$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$，可知矩阵的特征值满足方程$\lambda^2+\lambda-2=0$，解得，$\lambda=1$或$\lambda=-2$. 再由$|\boldsymbol{A}|=4$，可知$\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$，所以规范形为$y_1^2-y_2^2-y_3^2$. 故答案选 C.

7、设A,B为随机事件，则$P(A)=P(B)$充分必要条件是（　　）

A. $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$　　D. $P(AB)=P(\overline{A}\overline{B})$

【答案】C

【解析】$P(A\overline{B})=P(B\overline{A})\Leftrightarrow P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)\Leftrightarrow P(A)=P(B)$；故选 C.

8、设随机变量X和Y相互独立，且都服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则$P\{|X-Y|<1\}=$（　　）

A. 与μ无关，而与σ^2有关　　B. 与μ有关，而与σ^2无关

C. 与μ，σ^2都有关　　D. 与μ，σ^2都无关

【答案】A

【解析】$X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，所以$P\{|X-Y|<1\}=\Phi(\frac{1-0}{\sqrt{2}\sigma})-\Phi(\frac{-1-0}{\sqrt{2}\sigma})=2\Phi(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma})-1$；选 A

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分.

9、$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\text{L}\ +\frac{1}{n(n+1)}\right]^n=$____________

【答案】e^{-1}.

【解析】$\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]^n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}$.

10、曲线$y=x\sin x+2\cos x(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2})$的拐点坐标为____________

【答案】 $(\pi,-2)$.

【解析】令$y''=-x\sin x=0$，可得$x=0$，$x=\pi$，又$y'''=-\sin x-x\cos x$，因$y'''(0)=0$，

$y'''(\pi)=\pi\neq 0$，因此拐点坐标为$(\pi,-2)$.

11、已知$f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t$，则$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=$____________

【答案】 $\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2})$.

【解析】 $f'(x)=\sqrt{1+x^4}$，且$f(1)=0$. 因此

$$\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x^3=\frac{1}{3}\left[x^3 f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{18}(1-2\sqrt{2}).$$

12、A、B两商品的价格分别为P_A、P_B，需求函数$Q_A=500-P_A{}^2-P_AP_B+2P_B{}^2$，

$P_A=10$，$P_B=20$，求A商品对自身价格的需求弹性$h_{AA}=$____________$(h>0)$.

【答案】0.4.

【解析】因为$\eta_{AA}=-\frac{P_A}{Q_A}\cdot\frac{\mathrm{d}Q_A}{\mathrm{d}P_A}=-\frac{P_A}{Q_A}\cdot(-2P_A-P_B)$，将$P_A=10$，$P_B=20$，$Q_A=1000$

代入，可得$\eta_{AA}=\frac{10}{1000}\cdot 40=0.4$.

13、$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有无穷多解，求$a=$____________

【答案】1.

【解析】因为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$由无穷多解，故$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<3$，对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$作初等行变换，因为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&a^2-1&a-1\end{bmatrix},$$

故$a^2-1=a-1=0$，因此$a=1$.

14、设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$，$F(x)$为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$____________.

【答案】$\dfrac{2}{3}$.

【解析】由条件可得 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^2\dfrac{x^2}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{4}{3}$，且可求得分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

故可得 $P\{F(X)>EX-1\}=P\{F(X)>\dfrac{1}{3}\}=P\{\dfrac{2}{\sqrt{3}}<X<2\}=\dfrac{2}{3}$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、已知 $f(x)=\begin{cases}x^{2x}, x>0,\\ xe^x+1, x\le 0,\end{cases}$ 求 $f'(x)$，并求 $f(x)$ 的极值.

【解析】$x>0$时，$f'(0)=(\mathrm{e}^{2x\ln x})'=\mathrm{e}^{2x\ln x}(2\ln x+2)$；$x<0$时，$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$；

又 $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{2x\ln x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}2\ln x=-\infty$，

所以 $f'(0)$不存在，因此

$$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(1+\ln x), & x>0,\\ (x+1)\mathrm{e}^x, & x<0.\end{cases}$$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-1, x_3=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$；另外 $f(x)$还有一个不可导点 $x_2=0$；

又$(-\infty,-1)$为单调递减区间，$(-1,0)$为单调递增区间，$(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$为单调递减区间，$(\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty)$为单调递增区间；因此有极小值$f(-1)=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$和极小值$f(\frac{1}{\mathrm{e}})=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}$，极大值$f(0)=1$.

16、已知$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，且$g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【解析】依题意知，

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_1'(x+y,x-y)-f_2'(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_1'(x+y,x-y)+f_2'(x+y,x-y).$$

因为$f(u,v)$具有二阶连续偏导数，故$f_{12}''=f_{21}''$，因此，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-(f_{11}''+f_{12}'')-(f_{21}''+f_{22}'')=-f_{11}''-2f_{12}''-f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-(f_{11}''-f_{12}'')-(f_{21}''-f_{22}'')=1-f_{11}''+f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-(f_{11}''-f_{12}'')+(f_{21}''-f_{22}'')=-f_{11}''+2f_{12}''-f_{22}''.$$

所以，$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f_{11}''-f_{22}''$.

17、$y=y(x)$是微分方程$y'-xy=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$满足$y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$的特解.

（1）求$y(x)$；

（2）设平面区域$D=\{(x,y\}|1\le x\le 2,0\le y\le y(x)\}$，求$D$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积.

【解析】$y(x)=\mathrm{e}^{\int x\mathrm{d}x}(\int \mathrm{e}^{\int -x\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(\int\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x+C)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}(\sqrt{x}+C)$；

又由$y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$得$C=0$，最终有$y(x)=\sqrt{x}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

（2）所求体积

$$V=\int_1^2 \pi(\sqrt{x}e^{\frac{x^2}{2}})^2 dx=\pi\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{x^2}\Big|_1^2=\frac{\pi}{2}(e^4-e).$$

18、求曲线 $y=e^{-x}\sin x\left(x..0\right)$ 与 x 轴之间图形的面积.

【解析】设在区间 $[n\pi,(n+1)\pi]$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 上所围的面积记为 u_n，则

$$u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}|\sin x|dx=(-1)^n\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin xdx;$$

记 $I=\int e^{-x}\sin xdx$，则 $I=-\int e^{-x}d\cos x=-(e^{-x}\cos x-\int \cos xde^{-x})$

$=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}d\sin x=-e^{-x}\cos x-(e^{-x}\sin x-\int \sin xde^{-x})=-e^{-x}(\cos x+\sin x)-I$ ，

所以 $I=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x+\sin x)+C$ ；

因此 $u_n=(-1)^n(-\frac{1}{2})e^{-x}(\cos x+\sin x)\Big|_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\frac{1}{2}(e^{-(n+1)\pi}+e^{-n\pi})$；

（这里需要注意 $\cos n\pi=(-1)^n$ ）

因此所求面积为 $\sum_{n=0}^{\infty}u_n=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\pi}=\frac{1}{2}+\frac{e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}$.

19、设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx\left(n=0,1,2\cdots\right)$

（1）证明数列 $\left\{a_n\right\}$ 单调递减；且 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3\cdots\right)$

（2）求 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$

【解析】（1） $a_{n+1}-a_n=\int_0^1 x^n(x-1)\sqrt{1-x^2}dx<0$，所以 $\left\{a_n\right\}$ 单调递减.

$$a_n=-\frac{1}{3}\int_0^1 x^{n-1}d(1-x^2)^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}[x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx^{n-1}]$$

$$=\frac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}dx=\frac{n-1}{3}(\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1-x^2}dx-\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}dx)$$

$$=\frac{n-1}{3}(a_{n-2}-a_n),$$

从而有$a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\left(n=2,3\cdots\right)$；

（2）因为$\dfrac{a_n}{a_{n-2}}<\dfrac{a_n}{a_{n-1}}<\dfrac{a_n}{a_n}=1$，而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n+2}=1$，由夹逼准则知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

20、已知向量组

（Ⅰ）$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\4\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\a^2+3\end{bmatrix}$，（Ⅱ）$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\a+3\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1-a\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\a^2+3\end{bmatrix}$，

若向量组（Ⅰ）和向量组（Ⅱ）等价，求a的取值，并将$\boldsymbol{\beta}_3$用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

【解析】令$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，因向量组（Ⅰ）与（Ⅱ）等价，故$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$，对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$作初等行变换.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&1\\1&0&2&1&2&3\\4&4&a^2+3&a+3&1-a&a^2+3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&1\\0&-1&1&0&2&2\\0&0&a^2-1&a-1&1-a&a^2-1\end{bmatrix}$$

当$a=1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$；当$a=-1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，但$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$；

当$a\neq\pm1$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$. 综上，只需$a\neq-1$即可.

（1）当$a=1$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，故$\boldsymbol{\beta}_3=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$的等价

方程组为$\begin{cases}x_1=3-2x_3,\\x_2=-2+x_3.\end{cases}$，得通解为$\mathbf{x}=k\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-2\\0\end{bmatrix}$（$k$为任意常数），

从而$\boldsymbol{\beta}_3=(3-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(k-2)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$（$k$为任意常数）；

（2）当$a\neq\pm1$时，$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3)\to\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$，得$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，

所以$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

21、已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\\ 2 & x & -2\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ 与 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & y\end{bmatrix}$ 相似，

（Ⅰ）求 x, y；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\mathbf{P}$ 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{B}$

【解析】(1)

方法一：相似矩阵有相同的特征值，因此有 $\begin{cases}-2+x-2=2-1+y,\\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\end{cases}$

又 $|\boldsymbol{A}|=-2(4-2x)$，$|\boldsymbol{B}|=-2y$，所以 $x=3, y=-2$.

方法二：

观察得 $\mathbf{A}$ 必有一个特征值为 -2，$\mathbf{B}$ 的特征值为 $2,-1,y$，因此由 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 相似得两个矩阵特征值相等，得 $y=-2$，再由 $-2+x-2=2-1+y$，得 $x=3$

(2) 易知 B 的特征值为 $2,-1,-2$；因此

$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，取 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,2,0)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，取 $\boldsymbol{\xi}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}\xrightarrow{r}\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，取 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,2,4)^{\mathrm{T}}$

令 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则有 $P_1^{-1}AP_1=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$；

同理可得，对于矩阵 $\boldsymbol{B}$，有矩阵 $P_2=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$P_2^{-1}BP_2=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$，所以

$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$，即 $B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}$，所以

$$P = P_1P_2^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

22、设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为 $P(Y=-1)=p$，$P(Y=1)=1-p$，（$0<p<1$），令 $Z=XY$.

（1）求 Z 的概率密度；

（2）p 为何值时，X 与 Z 不相关；

（3）X 与 Z 是否相互独立?

【解析】（1）Z 的分布函数为 $F_Z(z)=P(XY\le z)=P(Y=-1,X\geq -z)+P(Y=1,X\le z)$，

因为 X 与 Y 相互独立，且 X 的分布函数为 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$，

因此，$F_Z(z)=p[1-F_X(-z)]+(1-p)F_X(z)=\begin{cases} p\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ p+(1-p)(1-\mathrm{e}^{-z}), & z\geq 0.\end{cases}$

所以，Z 的概率密度为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases} p\mathrm{e}^{z}, & z<0,\\ (1-p)\mathrm{e}^{-z}, & z\geq 0.\end{cases}$

（2）当 $Cov(X,Z)=EXZ-EX\cdot EZ=EX^2\cdot EY-(EX)^2\cdot EY=DX\cdot EY=0$ 时，X 与 Z 不相关. 因为 $DX=1$，$EY=1-2p$，故 $p=\dfrac{1}{2}$.

（3）不独立. 因为 $P(0\le X\le 1,Z\le 1)=P(0\le X\le 1,XY\le 1)=P(0\le X\le 1)=1-e^{-1}$，

而 $P(Z\le 1)=F_Z(1)=p+(1-p)(1-\mathrm{e}^{-1})$，故 $P(0\le X\le 1,Z\le 1)\neq P(0\le X\le 1)P(Z\le 1)$，

所以 X 与 Z 不独立.

23、设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geq\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

μ 是已知参数，$\sigma>0$ 是未知参数，A 是常数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 简单随机样本.

（1）求 A；

（2）求 σ^2 的最大似然估计量.

【解析】（1）由密度函数的规范性可知 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=1$，即

$$\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=\frac{A}{\sigma}\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}A}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t=A\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1,$$

得 $A=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

（2）设似然函数 $L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\sigma^{-n}\cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$，

取对数，$\ln L(\sigma^2)=\frac{n}{2}\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2$；

对 σ^2 求导，$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$，

令导数为零，解得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.