Исчисление предикатов первого порядка

Понятие алгебраической системы

Алгебраическая система (АС, система) – это упорядоченная тройка

$$\mathbf{A} = (A, \Omega, \Pi),$$

где A - непустое множество, называемое носителем,
$\Omega = \Omega^{(0)} \cup \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)} \cup \ldots \cup \Omega^{(n)} \cup \ldots$ - сигнатура операций, разбитая на подмножества операций различных арностей $n \geq 0$,
$\Pi = \Pi^{(1)} \cup \Pi^{(2)} \cup \ldots \cup \Pi^{(n)} \cup \ldots$ - сигнатура предикатов (или отношений), разбитая на подмножества предикатов различных арностей $n \geq 1$.

Следует напомнить понятия операции и предиката.
Операция арности $n \geq 0$ (n-арная, n-местная операция) на множестве A (непустом) - это отображение
$\omega : A^n \to A$.

Предикат арности $n \geq 1$ (n-арный, n-местный предикат) на множестве A (непустом) - это отображение
$p : A^n \to \{Л, И\}$.
Связь между предикатами и отношениями.
Как известно, n-арное отношение на множестве A - это произвольное подмножество $\rho \subseteq A^n$.
Тогда, если дан n-арный предикат p, то ему сопоставляется n-арное отношение $\rho_p = \{(a_1, \ldots, a_n) : p(a_1, \ldots, a_n) = И\}$, называемое областью истинности исходного предиката.
Например, пусть бинарный предикат на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел определен так, что $p(x, y) = И \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2, a > 0$. Тогда соответствующее бинарное отношение есть не что иное, как множество точек окружности радиуса a с центром в начале координат:
$\rho_p = \{(x, y) : p(x, y) = И\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2, a > 0\}$.
Наоборот, по отношению $\rho \subseteq A^n$ предикат p_ρ определяется так, что исходное отношение является для него областью истинности, то есть

$p_\rho(a_1,...,a_n) = И \Leftrightarrow (a_1,...,a_n) \in \rho$.

Это соответствие является взаимно однозначным, причем, если начать с предиката p и построить по нему отношение ρ_p, а потом по этому отношению построить предикат, то, как легко понять, вернемся к исходному предикату, то есть
$p \mapsto \rho_p \mapsto p_{\rho_p} = p$.
В силу этого, можно понятия предиката и отношения в определенных рамках отождествить и говорить о сигнатуре отношений АС.
АС с пустой сигнатурой предикатов называется алгеброй, а АС с пустой сигнатурой операций – моделью. Например, граф – это модель с одним бинарным отношением.
Следует при этом заметить, что по любой n-арной операции ω может быть определен предикат p_ω арности $n+1$ так, что $p_\omega(a_1,...,a_n,a_{n+1}) = И \Leftrightarrow a_{n+1} = \omega(a_1,...,a_n)$. Таким образом, формально алгебру можно считать частным случаем модели, но удобнее рассматривать алгебры как специальный класс алгебраических систем.

Примеры

1) Кольцо целых чисел с отношениями естественного числового порядка и делимости: $(\mathbb{Z},+,\cdot,0,1;\leq,|)$
2) Упорядоченное поле действительных чисел
3) Любое (идемпотентное) полукольцо, в котором сигнатура отношений состоит из его естественного порядка.

Язык исчисления предикатов. Термы и формулы

Алфавит теории (ИП 1-ого порядка) включает следующие множества символов:

1) множество X индивидных переменных;
2) множество C индивидных констант;
3) множество F функциональных символов;
4) множество P предикатных символов;
5) множество логических символов, содержащее оба квантора и обозначения логических связок и обе логические константы (0 и 1);
6) множество вспомогательных символов: скобки и т. п.

Множества X, C, F, P предполагаются счетными, причем множество F есть дизъюнктное объединение множеств $F^{(k)}$ функциональных символов арности $k, k \geq 0$. При этом все символы из $F^{(0)}$ отождествляются с индивидными константами, т.е. $C = F^{(0)}$.

Аналогично $P = \bigcup_{k \ge 1} P^{(k)}$, где $P^{(k)}$ - множество предикатных символов арности k.

Замечание. Строго говоря, указанные множества нельзя считать алфавитами, так как алфавит должен быть конечным. Однако можно их элементы закодировать в виде слов в конечном алфавите. Конкретные способы такой кодировки мы не обсуждаем. Мы предполагаем также, что элементы множеств X, C, F, P пронумерованы. Записывая x_i, мы имеем в виду переменную с номером i и т.д.

Чтобы определить понятие ***формулы*** в ИП, введем сначала понятие ***терма***.

1) Каждая переменная из X и каждая константа из C есть терм.
2) Если слова $t_1,...,t_n$ суть термы, а $f^{(n)} \in F^{(n)}$, то слово $f^{(n)}(t_1,...,t_n)$ есть терм.
3) Никаких других термов не существует.

Замечание. Часто используют упрощенные формы записи термов $f^{(n)}(t_1,...,t_n)$ при $n=1$ или $n=2$. В последнем случае как правило используют так называемую *инфиксную форму записи*: вместо $f(t_1,t_2)$ пишут $(t_1 f t_2)$.

Формула ИП определяется так.

1) Всякое слово вида $p^{(n)}(t_1,...,t_n)$, где $p^{(n)} \in P^{(n)}$, а $t_1,...,t_n$ - термы, есть формула.
2) Если слово Φ есть формула, то слова $\neg\Phi, (\forall x)\Phi$, где $x \in X$, суть формулы.
3) Если слова Φ и Ψ суть формулы, то слово $(\Phi \to \Psi)$ есть формула.
4) Никаких других формул не существует.

Формулы, определенные согласно п. (1), называются ***атомарными***.

Связки дизъюнкции и конъюнкции вводятся так же, как и в исчислении высказываний. Кроме этого, вводится квантор существования, формально в виде сокращения записи некоторой формулы, а именно, полагаем

$(\exists x)\Phi = \neg(\forall x)\neg\Phi$.

Интерпретации. Выполнимость, истинность, логическая общезначимость[1]

Интерпретация I считается заданной, если фиксирована алгебраическая система $\Im = (A, \Omega, \Pi)$ и пара отображений $i_F : F \to \Omega$ и $i_P : P \to \Pi$, сопоставляющие каждому функциональному и предикатному символу операцию и предикат системы $\Im$ соответственно, причем каждому функциональному (предикатному) символу арности n сопоставляется операция (предикат) *той же* арности n. Множество A называется ***областью интерпретации***.

Пусть задана последовательность $\sigma = \{s_n\}_{n \in N}$ элементов множества A. Определим понятие ***значения терма*** t ***в интерпретации*** I ***на последовательности*** σ. Будем использовать при этом обозначение $t_I[\sigma]$, опуская, как правило, упоминание интерпретации I.

Если $t = x_i$, то $x_i[\sigma] = s_i$, т.е. значение i-ой переменной равно i-ому члену последовательности. Таким образом, задание последовательности σ означает приписывание значений индивидным переменным так, что переменная x_i получает значение s_i.

Если $t = \varphi(\theta_1, ..., \theta_n)$ для некоторого $\varphi \in F^{(n)}$ и некоторых термов $\theta_1, ..., \theta_n$, то $t[\sigma] = i_F(\varphi)(\theta_1[\sigma], ..., \theta_1[\sigma])$. В частности, при $n = 0$ $t[\sigma] = i_F(\varphi) \in A, \varphi \in C$.

Определим теперь понятие ***истинностного значения формулы*** Φ ***в интерпретации*** I ***на последовательности*** σ. Будем использовать при этом обозначение $\Phi_I[\sigma]$, опуская, как правило, упоминание интерпретации I.

Для атомарной формулы $p(t_1, ..., t_n)$ по определению $p(t_1, ..., t_n)[\sigma] = i_P(p)(t_1[\sigma], ..., t_n[\sigma])$.

Далее:

$$(\neg\Phi)[\sigma] = \neg(\Phi[\sigma]);$$

$$(\Phi \to \Psi)[\sigma] = \Phi[\sigma] \to \Psi[\sigma].$$

И, наконец, истинностное значение $((\forall x_i)\Phi)[\sigma] = 1$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности σ', отличающейся от

[1] Вариант изложения нижеследующих понятий через определение состояния см. в Приложении.

последовательности σ, быть может, только в i-ом члене, имеет место равенство $\Phi[\sigma']=1$.

Истинностные значения остальных формул определяются на основе истинностных значений формул, рассмотренных выше. Так, значение формулы $(\exists x_i)\Phi$ равно, по определению, значению формулы $\neg((\forall x_i)(\neg\Phi))$; значение формулы $(\Phi\vee\Psi)$ равно значению формулы $(\neg\Phi\to\Psi)$ и т.д.

Формула Φ называется ***выполнимой в интерпретации*** I, если *существует последовательность* σ, для которой $\Phi[\sigma]=1$. Формула Φ называется ***истинной в интерпретации*** I, если *для каждой последовательности* σ имеет место $\Phi[\sigma]=1$. Формула называется ***логически общезначимой***, если она истинна в каждой интерпретации.

Рассмотрим некоторые примеры логически общезначимых формул.

Утверждение 1. Всякая тавтология логически общезначима.

Доказательство. Тривиально.

Перед рассмотрением дальнейших примеров необходимо ввести некоторые определения.

Пусть формула Φ содержит вхождение переменной x_i. Будем обозначать это так: $\Phi\langle x_i\rangle$[2]. Тогда в формулах $(\forall x_i)\Phi\langle x_i\rangle$ и $(\exists x_i)\Phi\langle x_i\rangle$ формула $\Phi\langle x_i\rangle$ называется ***областью действия квантора*** (общности или существования соответственно) ***по переменной*** x_i, и при этом всякое вхождение переменной x_i, находящееся в области действия некоторого квантора по этой переменной, называется ***связанным***. В противном случае вхождение переменной называется ***свободным***.

Так в формуле $(\forall x_1)(x_1>x_2)\wedge(\exists x_2)(x_1=x_2)$ первое вхождение переменной x_1 связанное, а второе свободное; первое вхождение переменной x_2 - свободное, а второе связанное. В формуле же $(\forall x_1)(\exists x_2)((x_1>x_2)\vee(x_1\le x_2))$ все вхождения переменных связанные.

Введем теперь понятие терма, свободного для переменной формуле. Говорят, что ***терм*** t ***свободен для переменной*** x_i ***в формуле*** $\Phi\langle x_i\rangle$, если

[2] Аналогично, для нескольких переменных используем обозначение $\Phi\langle x_{i_1},\dots x_{i_m}\rangle$.

никакое свободное вхождение переменной x_i в формулу $\Phi\langle x_i\rangle$ не находится в области действия никакого квантора по переменной, входящей в терм.

Пусть x_j - какая-либо переменная, входящая в терм t (будем в такой ситуации использовать обозначение $t\langle x_j\rangle$). Тогда терм t *не* свободен для переменной x_i в формуле $\Phi\langle x_i\rangle$, если в этой формуле содержится такое свободное вхождение переменной x_i, которое попадает в область действия некоторого квантора $(\mathrm{Q}x_j)$, т.е. $\Phi\langle x_i\rangle$ содержит подформулу $(\mathrm{Q}x_j)\Psi\langle x_i, x_j\rangle$, в которой вхождение x_i свободно. Таким образом, если терм t свободен для переменной x_i в формуле $\Phi\langle x_i\rangle$, то замена указанного в определении свободного вхождения x_i в формулу $\Phi\langle x_i\rangle$ термом t приведет к тому, что вхождение каждой переменной терма, которое возникает при такой замене, будет свободным в формуле $\Phi\langle x_i\rangle$; в противном же случае это условие будет нарушено.

Обозначим через $\Phi\langle t\rangle$ формулу, полученную в результате замены в формуле $\Phi\langle x_i\rangle$ каждого *свободного* вхождения переменной x_i термом t.

Утверждение 2. Формула $(\forall x_i)\mathrm{A}\langle x_i\rangle \to \mathrm{A}\langle t\rangle$, при условии, что терм t свободен для переменной x_i в формуле $\mathrm{A}\langle x_i\rangle$, является логически общезначимой.

Доказательство. Зафиксируем произвольно интерпретацию I и последовательность σ элементов области интерпретации. Достаточно тогда доказать, что $\mathrm{A}\langle t\rangle[\sigma]=1$ при том, что $(\forall x_i)\mathrm{A}\langle x_i\rangle[\sigma]=1$. Действительно, последнее равенство означает, что для любой последовательности σ', отличающейся от σ разве лишь в i-ом члене, $\mathrm{A}\langle x_i\rangle[\sigma']=1$. Вычисление истинностного значения формулы $\mathrm{A}\langle t\rangle$ на последовательности σ равносильно вычислению истинностного значения формулы $\mathrm{A}\langle x_i\rangle$ на последовательности, отличающейся от σ разве лишь в i-ом члене (переменная x_i получит значение терма t на σ). Этого достаточно, чтобы заключить к истинности формулы $\mathrm{A}\langle t\rangle$, так как, в силу ограничений на терм t, после замены им переменной x_i не возникнет новых связанных вхождений переменных. Следовательно, истинностное значение формулы $\mathrm{A}\langle t\rangle$ останется таким же, как и истинностное значение формулы $\mathrm{A}\langle x_i\rangle$.

Более подробно: нетрудно показать, то если формула А не содержит кванторов, то утверждение о логической общезначимости формулы, получаемой из схемы (4), истинно (см. Приложение 2).
Далее индукция по числу кванторов в формуле A. Пусть $A = (\forall x_j)B$, где для формулы B справедливо индукционное предположение, т.е. из того, что B истинна на любой последовательности, отличающейся от σ, может быть, только в i-ом члене, следует истинность формулы B(t), полученной подстановкой терма t вместо свободных вхождений переменной x_i. При этом понятно, что переменная x_j не входит в терм t, так как иначе любое свободное вхождение переменной x_i в формулу B окажется в области действия квантора по переменной терма t.
Пусть теперь посылка $(\forall x_i)(\forall x_j)B$ истинна на некоторой последовательности σ. Это значит, что формула B истинна на любой последовательности τ, отличающейся от σ разве лишь в i-ом и j-ом членах, в том числе на любой последовательности, отличающейся от σ только, может быть, в i-ом члене. Тогда, по предположению индукции, формула B(t) также будет истинна (в рассматриваемой произвольно фиксированной интерпретации), а так как сама формула B (до подстановки терма t) истинна на любой упомянутой выше последовательности τ, а терм t не содержит переменной x_j (и в силу этого подстановка терма сохранит независимость значения формулы B от значения переменной x_j), то и формула $A(t) = (\forall x_j)B(t)$ будет истинна на последовательности σ, что и требовалось доказать.

Добавлено примечание ([ab1]): Последовательности можно заменить состояниями.

Утверждение 3. Если формула A не содержит свободных вхождений переменной x_i, то формула $(\forall x_i)(A \to B) \to (A \to (\forall x_i)B)$ является логически общезначимой.

Доказательство аналогично доказательству утверждения 2.

(В терминах состояний: пусть нашлась интерпретация I и состояние σ такие, что $(\forall x_i)(A \to B)^\sigma = И$, но $(A \to (\forall x_i)B)^\sigma = Л$, т.е. $A^\sigma = И, (\forall x_i)B^\sigma = Л$. Тогда для любого состояния $\sigma' \underset{i}{=} \sigma$ имеем $(A \to B)^{\sigma'} = И$. Так как в A нет свободных вхождений x_i, то $A^{\sigma'} = И$, но в силу предположения $((\forall x_i)B)^\sigma = Л$, откуда для некоторого состояния $\sigma' \underset{i}{=} \sigma$ будет $B^{\sigma'} = Л$. Но это невозможно ввиду истинности $A \to B$ в состоянии в *любом* состоянии $\sigma' \underset{i}{=} \sigma$.)

Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов 1-го порядка

Исчисление предикатов первого порядка (сокращенно ИП1) является формальной теорией, теоремы которой суть логически общезначимые формулы.

ИП1 имеет пять схем аксиом, из которых первые три схемы совпадают со схемами аксиом исчисления высказываний (ИВ), а еще две схемы имеют вид:

(4) $(\forall x_i)\mathrm{A}\langle x_i\rangle \to \mathrm{A}\langle t\rangle$, где терм t свободен для переменной x_i в формуле $\mathrm{A}\langle x_i\rangle$;

(5) $(\forall x_i)(A \to B) \to (A \to (\forall x_i)B)$, где формула A не содержит свободных вхождений переменной x_i.

Полезно рассмотреть контрпримеры, показывающие важность условий логической общезначимости формул схем аксиом (4) и (5).

1) Пусть формула А в схеме (4) есть $\neg(\forall x_2)\,p^{(2)}(x_1, x_2)$, где $p^{(2)}$ - какой-нибудь предикатный символ арности 2, а терм $t = x_2$. Очевидно, этот терм не свободен для переменной x_1 в формуле А. Согласно схеме (4) получим формулу $(\forall x_1)(\neg(\forall x_2)\,p^{(2)}(x_1, x_2)) \to \neg(\forall x_2)\,p^{(2)}(x_2, x_2)$. Возьмем интерпретацию, в которой символу $p^{(2)}$ сопоставляется предикат тождества (совпадения элементов области интерпретации), а область интерпретации содержит не менее двух различных элементов. Тогда посылка записанной выше импликации истинна в выбранной интерпретации, а заключение ложно. Стало быть, и вся импликация ложна, и формула, полученная из схемы (4), не является логически общезначимой.
2) Пусть в схеме (5) формула *A* совпадает с формулой *B* и совпадает с атомарной формулой $p^{(1)}(x_1)$ для какого-то предикатного символа $p^{(1)}$ арности 1.

Тогда формула $(\forall x_1)(p^{(1)}(x_1) \to p^{(1)}(x_1)) \to (p^{(1)}(x_1) \to (\forall x_1)\,p^{(1)}(x_1))$, полученная из схемы (5), не является логически общезначимой, так как ее посылка истинна в любой интерпретации, а для заключения можно найти интерпретацию, в которой оно ложно[3].

---

[3] Например, для области интерпретации, совпадающей с множеством целых чисел, и при сопоставлении предикатному символу $p^{(1)}$ предиката «быть четным».

ИП1 имеет два правила (точнее, две схемы правил) вывода, из которых первое есть известное нам правило MP, а второе, называемое правилом обобщения (сокращенное обозначение – Gen), есть однопосылочное правило вида:

$$\frac{A}{(\forall x_i)A}.$$

Заметим, что неверно полагать, будто логически общезначимая формула не может иметь свободных вхождений переменных. Любая тавтология, составленная из произвольных атомарных формул, содержащих какие угодно переменные (свободные или связанные), будет логически общезначимой.

Например, для произвольного предикатного символа $p^{(1)}$ арности 1 формула $p^{(1)}(x_1) \to p^{(1)}(x_1)$ будет логически общезначимой, так как является тавтологией вида $A \to A$.

Следует заметить, что терм, совпадающий с переменной, свободен для нее в любой формуле. Поэтому, из схемы (4) следует логическая общезначимость любой формулы вида

$$(\forall x_i)A \to A$$

Также всегда свободен терм, являющийся константой.

Как и ИВ, ИП1 является теорией полной и непротиворечивой, т.е. может быть доказана следующая теорема:

Теорема 1. 1) Теория ИП1 непротиворечива, т.е. если доказана формула Ф, то ее отрицание не является теоремой ИП1.

2) Теория ИП1 полна, т.е. формула есть теорема теории ИП1 тогда и только тогда, когда она логически общезначима. #

Как и в ИВ, в ИП1 может быть доказана теорема дедукции, но при некоторых ограничениях на вывод.

Рассмотрим в этой связи понятие ***зависимости формул*** в выводе.

Пусть

$\Phi_0, \Phi_1, ..., \Phi_n, ...$

некоторый вывод в ИП1 из множества формул Г, и пусть формула А $\in$Г. Тогда, по определению, формула Φ_i указанного вывода, совпадающая с А, зависит от А, и если Φ_i есть результат применения правила MP или Gen к формулам, зависящим от А, то она также считается зависящей от А.

Например, построим вывод

$A, (\forall x_1)A \to B \vdash (\forall x_1)B$.

Имеем:

1. A – гипотеза;
2. $(\forall x_1)A$ - правило Gen, шаг 1;

3. $(\forall x_1)A \to B$ - гипотеза;
4. B – правило МР, шаги 2 и 3;
5. $(\forall x_1)B$ - правило Gen, шаг 4.

В приведенном выводе от формулы A зависят формулы 2, 4 и 5 шагов.

С учетом понятия зависимости формул теорема дедукции для ИП1 формулируется следующим образом:

Теорема 2 (*теорема дедукции для исчисления предикатов 1-го порядка*). Если Γ, $A \vdash B$, причем существует такой вывод формулы B из множества формул $\Gamma \cup \{A\}$, в котором ни при каком применении правила Gen к формулам, зависящем в этом выводе от формулы A, не связывается квантором никакая свободная переменная формулы A, то $\Gamma \vdash A \to B$. #

Доказательство основано на двух утверждениях:

Утверждение 1. Если формула Φ есть тавтология, то Φ есть теорема ИП1, причем она может быть выведена применением только схем (1) – (3) и правила МР.

Утверждение 2. Если формула B не зависит от формулы A в выводе $\Gamma, A \vdash B$, то $\Gamma \vdash B$.

[Мендельсон, с. 68-69.]

Далее индукция по длине вывода.

Базис и переход при применении правила МР доказываются точно так же, как и ИВ (с учетом утверждения 1).

Пусть теперь формула B в выводе из Γ, A получена применением правила Gen к некоторой формуле Φ, т.е. B есть $(\forall x_k)\Phi$. Тогда формула Φ не зависит в выводе из Γ, A от формулы A или x_k не является свободной переменной формулы A.

Если Φ не зависит от A, то, согласно утверждению 2, имеем $\Gamma \vdash \Phi$, и, применяя Gen, получим $\Gamma \vdash (\forall x_k)\Phi$, т.е. $\Gamma \vdash B$. Тогда по первой схеме аксиом имеем $B \to (A \to B)$, и после применения МР получим $\Gamma \vdash A \to B$.

Пусть теперь переменная x_k не есть свободная переменная формулы A. Тогда используем схему (5):

$(\forall x_k)(A \to \Phi) \to (A \to (\forall x_k)\Phi)$.

Далее: $\Gamma \vdash A \to \Phi$ (по предположению индукции) ; $(\forall x_k)(A \to \Phi)$ (Gen).

Итак, $\Gamma \vdash (\forall x_k)(A \to \Phi)$. Применяя МР к полученной формуле и к подстановке в схему (5), получим $\Gamma \vdash A \to (\forall x_k)\Phi$, что и требовалось.

Так, в рассмотренном выше примере при условии, что в формулах A и B нет свободных вхождений переменной x_1, то применение теоремы дедукции даст секвенцию $(\forall x_1)A \to B \vdash A \to (\forall x_1)B$. В этом случае можно применить теорему дедукции второй раз и доказать формулу $((\forall x_1)A \to B) \to (A \to (\forall x_1)B)$.

Важное свойство ИП1 характеризует также следующая метатеорема, называемая ***правилом индивидуализации***.

Теорема 3. Имеет место следующая секвенция:

$$(\forall x)A\langle x\rangle \vdash A\langle t\rangle,$$

каков бы ни был терм *t*, свободный для переменной *x* в формуле *A*.

Доказательство немедленно получается из схемы (4) применением правила MP.

Рассмотрим еще некоторые примеры.

(1) $\vdash (\forall x_1)(A \to B) \to ((\forall x_1)A \to (\forall x_1)B)$

1. $(\forall x_1)(A \to B)$ – гипотеза
2. $(\forall x_1)A$ – гипотеза
3. $(\forall x_1)(A \to B) \to (A \to B)$ – схема (4) при $t = x_1$
4. $A \to B$ – MP, (1) и (3)
5. $(\forall x_1)((\forall x_1)A \to B) \to ((\forall x_1)A \to (\forall x_1)B)$ – схема (5) (формула $(\forall x_1)A$ не содержит свободных вхождений переменной x_1)
6. $(\forall x_1)A \to A$ – схема (4)
7. $(\forall x_1)A \to B$ – секвенция (1); (6) и (4)
8. $(\forall x_1)((\forall x_1)A \to B)$ – Gen, (7)
9. $(\forall x_1)A \to (\forall x_1)B$ – MP, (5) и (8)
10. $(\forall x_1)B$ – MP, (2) и (9)

Другое решение:

1. $(\forall x_1)(A \to B)$ – гипотеза
2. $A \to B$ – A4, (1)
3. $(\forall x_1)A \to A$ – схема (4)
4. $(\forall x_1)A \to B$ – секвенция (1) (правило R1), (3) и (2)
5. $(\forall x_1)((\forall x_1)A \to B) \to ((\forall x_1)A \to (\forall x_1)B)$ – схема (5) (формула $(\forall x_1)A$ не содержит свободных вхождений переменной x_1)
6. $(\forall x_1)((\forall x_1)A \to B)$ – Gen, (4)
7. $(\forall x_1)A \to (\forall x_1)B$ – MP, (5) и (6)

Теорема дедукции применима, так как применение правила обобщения в построенном выводе не связывает свободное вхождение переменной ни в одной из гипотез.

(2) $\vdash \neg A \to \neg (\forall x)A$

По закону контрапозиции достаточно доказать секвенцию $\vdash \neg\neg (\forall x)A \to \neg\neg A$, что очевидно в силу схемы (4) и снятия двойного отрицания.

(3) $\vdash (\forall x)A \to (\exists x)A$

Равносильно:

$\vdash \neg(\exists x)A \rightarrow \neg (\forall x)A$

1. $\neg(\exists x)A = \neg\neg (\forall x)(\neg A)$ – гипотеза
2. $\neg\neg (\forall x)(\neg A) \rightarrow (\forall x)(\neg A)$ – секвенция (3)
3. $(\forall x)(\neg A)$ – MP, (1) и (2)
4. $(\forall x)(\neg A) \rightarrow \neg A$ – схема (4)
5. $\neg A$ – MP, (3) и (4)
6. $\neg A \rightarrow \neg (\forall x)A$ – пример (2)
7. $\neg (\forall x)A$ – MP, (5) и (6)

Теорема дедукции применима, так как нигде не применялось правило обобщения.

С учетом примеров (1) и (3) в формуле примера (1) в следствии импликации можно кванторы общности заменить кванторами существования.

Непротиворечивость исчисления предикатов

Теорема. Всякая теорема ИП1 логически общезначима.

Доказательство. Можно доказать, что каждая формула, получаемая из схемы аксиомы, логически общезначима. Для первых трех схем это доказывается точно так же, как в исчислении высказываний, а для схем (4) и (5) доказано выше.

Следовательно, достаточно доказать, что применение правил MP и Gen сохраняет свойство логической общезначимости.

Пусть формулы A и $A \rightarrow B$ логически общезначимы, но формула B не является логически общезначимой. Это значит, что в некоторой интерпретации и в некотором состоянии эта формула ложна. Но тогда, поскольку формула A истинна в этом состоянии, то импликация $A \rightarrow B$ будет ложна в противоречии с ее логической общезначимостью.

Итак, применение правила MP к двум логически общезначимым формулам дает логически общезначимую формулу.

Пусть теперь к логически общезначимой формуле A применяется правило Gen, что дает формулу $(\forall x_i)A$. Если предположить, что эта формула не является логически общезначимой, то придется признать, что в некотором состоянии формула A ложна. Но это противоречит ее логической общезначимости.

Теорема. ИП1 непротиворечиво.

Доказательство. В силу доказанного выше достаточно доказать, что отрицание логически общезначимой формулы не является логически общезначимой формулой. Но это легко видеть: если некоторая формула A логически общезначима, а также логически общезначимо ее отрицание, то существует (при некоторой интерпретации) состояние, в котором истинна формула вместе с ее отрицанием, что невозможно.

Понятие теории 1-го порядка

Теория первого порядка есть некоторое расширение исчисления предикатов 1-го порядка путем добавления к составу аксиом ИП1 так называемых ***нелогических аксиом***.

Нелогическая аксиома – это формула, не являющаяся логически общезначимой, но истинная в некотором непустом множестве интерпретаций. Тогда, если формула Ф истинна в некоторой интерпретации I, то алгебраическая система, заданная в этой интерпретации, называется ***моделью*** теории 1-ого порядка, множество нелогических аксиом которой составляет формула Ф. Зачастую, допуская вольность речи, моделью теории называют саму интерпретацию I, в которой истинная каждая нелогическая аксиома теории. ***Логической аксиомой*** теории 1-ого порядка называют всякую аксиому ИП1.

Теория 1-ого порядка с равенством

Эта теория, в предположении, что среди предикатных символов есть символ «=», характеризуется двумя схемами нелогических аксиом:

(НЛ1) $(\forall x)(x = x)$ (*аксиома рефлексивности равенства*);

(НЛ2) $(x = y) \to (A\langle x, x\rangle \to A\langle x, y\rangle)$, где предполагается, что формула $A<x,\ y>$ получена из формулы $A<x,\ x>$ заменой некоторых (всех, в частности) свободных вхождений переменной x переменной y при условии, что терм y свободен для всех заменяемых вхождений x в формуле A, т.е. ни одно из заменяемых вхождений x не попадает в область действия квантора по y [4]. Эта аксиома называется *аксиомой подстановочности равенства*.

Исходя из этих аксиом, можно доказать следующие свойства равенства (формально: бинарного отношения, обозначенного значком «=»).

Теорема 4. 1) Для любого терма $t \vdash (t = t)$.

2) $\vdash (x = y) \to (y = x)$;

3) $\vdash (x = y) \to ((y = z) \to (x = z))$[5].

Доказательство. 1) Из аксиомы (НЛ1) по правилу индивидуализации получаем для любого терма t, так как исходная формула $(x = x)$ не содержит никаких связанных вхождений переменных, $\vdash (t = t)$.

2) Положим, что формула $A<x,\ x>$ есть $(x = x)$, а $A<x,\ y>$ есть $(y = x)$. Тогда, согласно (НЛ2) имеем:

$(x = y) \to ((x = x) \to (y = x))$.

Пусть формула $(x = y)$ есть гипотеза. Тогда, применяя MP, получим $((x = x) \to (y = x))$. По правилу индивидуализации из аксиомы (НЛ1) при $t = x$ получим формулу $(x = x)$. Откуда, еще раз применяя MP, получим $(y = x)$. Так как в построенном выводе правило Gen нигде не использовалось, применив теорему дедукции, получим требуемую формулу[6].

[4] Если это справедливо для всех свободных вхождений x в A, то терм y будет свободен для переменной x в формуле A.

[5] Содержательно: первое свойство состоит в том, что всякий терм равен самому себе, а второе и третье свойства называются соответственно *симметричностью* и *транзитивностью* равенства.

3) Полагая, что A<y, y> есть (y = z), а A<y, x> есть (x = z), построим вывод:

1. (y=x) $\to$ ((y=z) $\to$ (x=z)) – аксиома (НЛ2);
2. (x=y) – гипотеза;
3. (x = y) $\to$ (y = x) – п. (2) настоящей теоремы;
4. (y = x) – MP, шаги (2) и (3);
5. ((y=z) $\to$ (x=z)) – MP, шаги (1) и (4).

Итак, мы доказали секвенцию (x=y) $\vdash$ ((y=z) $\to$ (x=z)), откуда по теореме дедукции получим требуемое.

Свойства симметричности и транзитивности равенства можно распространить на произвольные термы.

Теорема 5. Для любых термов s,t,u выполняется:

1) $\vdash (s=t)\to(t=s)$

2) $\vdash (s=t)\to((t=u)\to(s=u))$

Доказательство. 1) Пусть переменные x и y выбраны так, что не входят ни в один из термов.

Строим такой вывод:

1. $(x=y)\to(y=x)$ - теорема 4, п. 1
2. $(\forall y)((x=y)\to(y=x))$ - Gen, (1)
3. $(\forall x)(\forall y)((x=y)\to(y=x))$ - Gen, (2)
4. $(\forall y)((s=y)\to(y=s))$ - A4, (3); корректно, так как свободное вхождение переменной x содержится в области действия квантора по y, а эта переменная не входит ни в один из термов
5. $(s=t)\to(t=s)$ - A4, (4); здесь же вообще формула под квантором не содержит кванторов.

П. (2) теоремы доказывается аналогично.

На основании доказанного можно ввести дополнительные правила вывода в теорию:

$\dfrac{s=t}{t=s}$ - правило t1;

$\dfrac{s=t,t=u}{s=u}$ - правило t2.

Можно показать, что и свойство подстановочности равенства обобщается для произвольных термов, то есть, говоря содержательно, истинностное значение формулы не изменится, если в ней произвести замену некоторых вхождений терма на равный ему (при соблюдении, конечно, ограничений в духе схемы (4)).

Рассмотрим в качестве примера формальное доказательство единственности нейтрального элемента в теории групп.

Эта теория 1-го порядка определяется тремя нелогическими аксиомами:

---

[6] Подробная запись этого вывода:
1. (x=y) $\to$ ((x=x) $\to$ (y=x)) – НЛ2; 2. (x=y) – гипотеза; 3. (x=x) $\to$(y=x) – MP, (1) и (2); 4. ($\forall$x)(x=x) – НЛ1; 5. ($\forall$x)(x=x) $\to$ (x=x) – правило инд. при t=x; 6. (x=x) – MP, (4) и (5); 7. (y=x) – MP, (3) и (6).

(ТГ1) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ - ассоциативность бинарной операции
(ТГ2) $(\exists\varepsilon)(\forall x)(\varepsilon \cdot x = x \cdot \varepsilon = x)$ - существование нейтрального элемента
(ТГ3) $(\forall x)(\exists x')(x \cdot x' = x' \cdot x = \varepsilon)$ - существование обратного элемента.
Двойное равенство вида $s = t = u$ понимается как сокращение записи конъюнкции $(s = u)\,\&\,(t = u)$.

Пишем такой вывод:

1. $(\forall x)(\varepsilon' \cdot x = x \cdot \varepsilon' = x)$ - гипотеза
2. $(\forall x)(\varepsilon'' \cdot x = x \cdot \varepsilon'' = x)$ - гипотеза (в этих гипотезах ε' и ε'' суть предметные константы)
3. $\varepsilon' \cdot \varepsilon'' = \varepsilon'' \cdot \varepsilon' = \varepsilon''$ - A4, (1), $x := \varepsilon''$
4. $\varepsilon'' \cdot \varepsilon' = \varepsilon' \cdot \varepsilon'' = \varepsilon'$ - A4, (2), $x := \varepsilon'$
5. $\varepsilon' \cdot \varepsilon'' = \varepsilon''$ - свойства конъюнкции, (3)
6. $\varepsilon' \cdot \varepsilon'' = \varepsilon'$ - свойства конъюнкции, (4)
7. $\varepsilon'' = \varepsilon' \cdot \varepsilon''$ - правило t1, (5)
8. $\varepsilon'' = \varepsilon'$ - правило t2, (6) и (7).

Приложение 1. Интерпретации и состояния.

При заданной интерпретации $I = (\Im = (A, \Omega, \Pi), i_F, i_P)$ ***состояние*** – это отображение $\sigma : X \to A$ множества переменных в область интерпретации. Попросту, это присваивание значений переменным. Для простоты мы считаем, что значение присваивается каждой переменной, но, как правило, нас интересуют значения только некоторых переменных. Состояние может быть определено только, если задана интерпретация.

Значение t^σ ***терма*** t ***в состоянии*** σ определяется следующим образом.

Если $t = x \in X$, то, то $t^\sigma = \sigma(x)$ (значение переменной); если $t = f^{(0)} \in F^{(0)} = C$, то $t^\sigma = i_F(f^{(0)})$ (значение константы); если $t = \varphi(\theta_1, ..., \theta_n)$ для некоторого $\varphi \in F^{(n)}$ и некоторых термов $\theta_1, ..., \theta_n$, то $t^\sigma = i_F(\varphi)(\theta_1^\sigma, ..., \theta_n^\sigma)$.

Истинностное значение Φ^σ ***формулы*** Φ ***в состоянии*** σ определяется аналогично понятию истинностного значения формулы Φ в интерпретации I на последовательности σ.

Удобно ввести такое отношение на множестве состояний: $\sigma \underset{x}{=} \tau$ означает, что для каждой переменной $y \neq x$ выполняется $\sigma(y) = \tau(y)$, т.е. состояние τ отличается от состояния σ, может быть, только значением переменной x. Если $x = x_i$ (переменная с номером i), то будем писать $\sigma \underset{i}{=} \tau$ вместо $\sigma \underset{x_i}{=} \tau$.

В этих обозначениях $((\forall x_i)\Phi)^{\sigma} = 1$ тогда и только тогда, когда для каждого состояния $\tau \underset{i}{=} \sigma$ имеет место $\Phi^{\tau} = 1$.

Выполнимость формулы Φ в интерпретации означает, что для *некоторого* состояния σ имеет место $\Phi^{\sigma} = 1$; истинность формулы Φ в интерпретации означает, что для *каждого* состояния σ имеет место $\Phi^{\sigma} = 1$.

Приложение 2. Доказательство логической общезначимости формулы, получаемой из схемы (4), при условии, что формула А не содержит кванторов.

Строгое доказательство предполагает индукцию по числу связок в формуле А.

Базис: формула А является атомарной: $A = p(t_1,...,t_n)(x_i)$ и содержит вхождение переменной x_i.

Тогда, если формула $(\forall x_i)\, p(t_1,...,t_n)(x_i)$ истинна в некотором состоянии σ, то это значит (по определению), что для любого состояния τ, отличного от σ, может быть, только значением переменной x_i (будем это обозначать так: $\tau =_i \sigma$) формула $p(t_1,...,t_n)(x_i)$ будет истинна. Следовательно, если заменить везде переменную x_i термом t, то значение переменной x_i станет равным значению терма t в состоянии σ. Это значит, что оценка формулы $p(t_1,...,t_n)(t)$ в состоянии σ даст тот же результат, что и оценка формулы $p(t_1,...,t_n)(x_i)$ в каком-то состоянии $\tau =_i \sigma$. Но значение последней формулы в любом таком состоянии τ равно «истине», т.е. и формула $p(t_1,...,t_n)(t)$ в состоянии σ будет истинна. Тем самым формула

$(\forall x_i)\, p(t_1,...,t_n)(x_i) \to p(t_1,...,t_n)(t)$

будет истинна в состоянии σ.

Переход: 1) пусть формула А = В → С, где формулы $(\forall x_i)B(x_i) \to B(t)$ и $(\forall x_i)C(x_i) \to C(t)$ логически общезначимы, причем $D(t)^{\sigma} = D(x_i)^{\tau}$, где $\tau =_i \sigma$, а $D \in \{B, C\}$. Пусть формула $(\forall x_i)(B \to C)(x_i)$ истинна в некотором состоянии σ, т.е. для любого состояния $\tau =_i \sigma$ формула $(B \to C)(x_i)$ истинна. Значит, если формула В в состоянии τ истинна, то и формула С в этом состоянии также будет истинна. Но истинность формулы В в любом указанном выше состоянии τ означает, по предположению индукции, что и формула B(t) будет истинна в исходном состоянии σ. Точно также заключаем к истинности формулы C(t). Следовательно, импликация (B $\rightarrow$C)(t) будет истинна.

2) Теперь пусть формула A = ¬B, где для формулы B справедливо предположение индукции, т.е. формула $(\forall x_i)B(x_i) \rightarrow B(t)$ логически общезначима, причем $B(t)^\sigma = B(x_i)^\tau$ для некоторого $\tau =_i \sigma$ (а следовательно, и $\neg B(t)^\sigma = \neg B(x_i)^\tau$).

Пусть тогда формула $(\forall x_i)\neg B(x_i)$ истинна в некотором состоянии σ. Тогда в любом состоянии $\tau =_i \sigma$ формула $\neg B(x_i)$ будет истинна, а формула $B(x_i)$ в любом таком состоянии будет ложна. Аналогично предыдущему заключаем, что и формула $B(t)$ в состоянии σ будет ложна (по предположению индукции
оценка последней формулы в состоянии σ даст тот же результат, что и оценка формулы $B(x_i)$ в некотором состоянии $\tau =_i \sigma$, но в любом таком состоянии эта формула ложна) а, стало быть, формула A(t) = ¬B(t) будет истинна в состоянии σ, и формула $(\forall x_i)A(x_i) \rightarrow A(t)$ логически общезначима.

Индукция по числу кванторов в терминах состояний

Пусть $A = (\forall x_j)B$, где для формулы B справедливо индукционное предположение, т.е. из того, что B истинна в любом состоянии, отличающимся от σ, может быть, значением i-ой переменной, следует истинность формулы B(t), полученной подстановкой терма t вместо свободных вхождений переменной x_i. При этом понятно, что переменная x_j не входит в терм t, так как иначе любое свободное вхождение переменной x_i в формулу B окажется в области действия квантора по переменной терма t (по условию этот терм свободен для переменной x_i в формуле A).
Пусть теперь посылка $(\forall x_i)(\forall x_j)B$ истинна в некотором состоянии σ. Это значит, что формула B истинна в любом состоянии τ, отличающимся от σ разве лишь значениями i-ой и j-ой переменной, в том числе в любом состоянии ρ , отличающимся от σ только, может быть, значением i-ой переменной. Тогда, по предположению индукции, формула B(t) также будет истинна (в рассматриваемой произвольно фиксированной интерпретации), а так как сама формула B (до подстановки терма t) истинна в любом упомянутом выше состоянии τ, а терм t не содержит переменной x_j (и в силу этого подстановка терма сохранит независимость значения формулы B от значения переменной x_j), то и формула $A(t) = (\forall x_j)B(t)$ будет истинна в состоянии σ, что и требовалось доказать.

Приложение 3. Правила индивидуализации и существования. Переименование связанных переменных

1) Правило индивидуализации A4:

$$\frac{(\forall x)A(x)}{A(t)}, x \in FV(A), Free(t,x,A)$$

Это правило есть прямое следствие схемы аксиом (4). При $t = x$ это правило можно называть правилом сброса квантора (общности).

2) Правило существования E4:

$$\frac{A(t)}{(\exists x)A(x)}, x \in FV(A), Free(t,x,A)$$

Это правило производно от предыдущего, что доказывается следующим образом:

1. $(\forall x)\neg A(x) \to \neg A(t), x \in FV(A), Free(t,x,A)$ - схема (4) при $A := \neg A$
2. $\neg\neg A(t) \to \neg(\forall x)\neg A(x) = (\exists x)A(x)$ - правило R7 (обратная контрапозиция), шаг (1), и заключение импликации заменено согласно определению квантора существования
3. $A(t) \to \neg\neg A(t)$ - секв. (4)
4. $A(t) \to (\exists x)A(x)$ - R1 (секвенция 1), (3) и (2).

Отсюда и получаем правило E4.

Рассмотрим теперь вопрос о переименовании связанных переменных.
Докажем эквивалентность $(\forall x)A(x) \equiv (\forall y)A(y)$ при условии, что переменная y не входит в формулу A (никак не входит, ни свободно, ни связанно!), все свободные вхождения x в этой формуле заменяются на y. Переменная x может, однако, входить в формулу A связанно.
Имеем:

1. $(\forall x)A(x)$ - гипотеза
2. $A(y)$ - A4, (1) (корректно в силу ограничений на переменную y)
3. $(\forall y)A(y)$ - Gen, (2)

Теорема дедукции применима, так как y не входит в гипотезу.
Обратно:

1. $(\forall y)A(y)$ - гипотеза (заметим, что $x \notin FV(A)$)
2. $A(x)$ - A4, (1) (корректно в силу ограничений на переменную y, а именно, свободное вхождение y не может оказаться в области действия квантора по x, так как вхождения y возникают на месте только свободных вхождений x)
3. $(\forall x)A(x)$ - Gen, (2).

Теорема дедукции применима, так как переменная x не входит свободно в гипотезу.
На основе доказанной эквивалентности легко доказать и эквивалентность с квантором существования: $(\exists x)A(x) \equiv (\exists y)A(y)$ при тех же ограничениях.