## Семинары по булевым функциям

### Семинар №1. Минимизация ДНФ

По учебнику [Белоусов-Ткачев] разобрать пример 6.14 (стр. 423) и решение примера, карта Карно для которого представлена на рис. 6.13 (стр. 419, решение на стр. 421-22).

Самостоятельно решить задачу 6.11 (все пункты; стр. 457).

### Семинар №2. Теорема Поста

По учебнику разобрать пример 6.21 (стр. 443).

1. **Решение задачи 6.23 (г)**

Выяснить, полно ли множество $F = \{ f_1 = x \vee y, f_2 = (1001|1011|1111|0110)\}$

(для удобства чтения вектора значений через каждые 4 позиции поставлена черта).

Предполагается, что компоненты вектора значений нумеруются от 0 до 15.

Чтобы построить критериальную таблицу, выведем полином Жегалкина для второй функции, но вычисления проведем до первого ненулевого коэффициента в нелинейном слагаемом.

Имеем:

$f_2(0,0,0,0) = a_0 = 1$ (значение функции на нулевом наборе есть нулевая компонента вектора значений);

$f_2(1,0,0,0) = a_1 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$ (значение – 8-я компонента вектора значений, так как 1000 – двоичный код числа 8);

$f_2(0,1,0,0) = a_2 \oplus a_0 = 1 \Rightarrow a_2 = 0$ (значение – 4-я компонента вектора значений, так как 0100 – двоичный код числа 4);

$f_2(0,0,1,0) = a_3 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$ (значение – 2-я компонента вектора значений, так как 0010 – двоичный код числа 2);

$f_2(0,0,0,1) = a_4 \oplus a_0 = 0 \Rightarrow a_4 = 1$ (значение – 1-я компонента вектора значений, так как 0001 – двоичный код числа 1);

$f_2(1,1,0,0) = a_{12} \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_0 = 0 = a_{12} \oplus 1 = 0 \Rightarrow a_{12} = 1$ (значение – 12-я компонента вектора значений, так как 1100 – двоичный код числа 12).

Таким образом, функция $f_2$ нелинейна, и , поскольку свойства первой функции – дизъюнкции – известны, мы можем составить критериальную таблицу:

| | $T_0$ | $T_0$ | S | M | L |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | + | + | - | + | - |
| $f_2$ | - | - | - | - | - |

По таблице видно, что вторая функция сама по себе образует полное множество. Выразим через нее элементы стандартного базиса и константы.

Поскольку функция $f_2$ не сохраняет обе константы, то легко получается отрицание:

$$\overline{x} = f_2(x, x, x, x) \ .$$

Понятно при этом, что вместо переменной в записанное выше выражение можно подставить любую формулу.

Замечаем далее, что $f_2(0,1,1,1) = f_2(1,0,0,0) = 1$ (так проявляется свойство несамодвойственности функции), получаем формулу для константы 1:

$1 = f_2(\overline{x}, x, x, x)$, и противоположную константу представляем так:

$$0 = \overline{1} = f_2(f_2(\overline{x}, x, x, x), f_2(\overline{x}, x, x, x), f_2(\overline{x}, x, x, x), f_2(\overline{x}, x, x, x)) \ .$$

Строго говоря, далее вместо отрицания x надо подставить формулу для отрицания, но, чтобы избежать столь громоздких выражений, позволим себе такие подставки не выполнять, а ссылаться по схеме: 0 есть отрицание 1, где 1 представляется такой-то формулой, а отрицание – такой-то.

Если бы в векторе значений функции $f_2$ стояли нули в симметричных относительно середины позициях, то константу 0 можно было бы представить независимо от 1.

Поясним это таким примером.

Рассмотрим несамодвойственную функцию g=(1001 0011 1001 1101). Нетрудно видеть, что g(0,0,0,1)=g(1,1,1,0)=0 и g(0, 1,1,1)=g(1,0,0,0)=1, и обе константы независимо друг от друга представляются формулами:

$$\begin{array}{l} 0 = g(x, x, x, \overline{x}), \\ 1 = g(\overline{x}, x, x, x) \end{array} .$$

Заметим, что в таких формулах мы стремимся минимизировать число отрицаний (что важно при схемной реализации) и поэтому из двух взаимно противоположных наборов, на которых несамодвойственная функция принимает одинаковые значения, берем тот, где меньше нулей.

Вернемся к исходной задаче.

Из частичного вычисления полинома Жегалкина для функции $f_2$ получаем следующую формулу:

$f_2(x_1, x_2, 0, 0) = x_1 x_2 \oplus 1$ ,

Но это отрицание конъюнкции (штрих Шеффера), и тогда

$x_1 x_2 = \overline{f_2(x_1, x_2, 0, 0)}$ .

Дизъюнкция сама входит в наше множество, но и ее можно выразить через функцию $f_2$ .

Так как $x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x}_1 \overline{x}_2}$ , а $\overline{x}_1 \overline{x}_2 = \overline{f_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2, 0, 0)}$ , то $x_1 \vee x_2 = f_2(\overline{x}_1, \overline{x}_2, 0, 0)$ .

Отрицание и константа 0 уже представлены через функцию $f_2$ .

2. Дан полином Жегалкина нелинейной функции:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \oplus x_1 x_2 x_3 x_4 \oplus x_1 x_3 x_4 \oplus x_2 x_3 x_4 \oplus \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus 1$$

.

Представить конъюнкцию формулой, содержащей эту функцию, константу 0 и отрицание.

Решение.

Действуем по алгоритму, изложенному в доказательстве теоремы Поста (стр. 441-443 Учебника).

Самое короткое нелинейное слагаемое в записанном выше полиноме содержит 3 переменные. Берем любое, например, первое, то есть $x_1 x_3 x_4$.  Тогда, подставляя вместо второй переменной константу 0, получим:

$f(x_1, 0, x_3, x_4) = x_1 x_3 x_4 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus 1$

Далее, полагая, $x_1 = x_3 = x; x_4 = y$ , получим

$\chi(x, y) = f(x, 0, x, y) = xy \oplus x \oplus x \oplus y \oplus 1 = xy \oplus y \oplus 1$ .

Здесь $a = 0, b = c = 1, ab \oplus c = 1$, и окончательная формула для конъюнкции примет вид:

$xy = \overline{f(\overline{x}, 0, \overline{x}}, y)$ .

Внешнее отрицание появилось потому, что слагаемое $ab \oplus c = 1$.

Просьба в ДЗ конъюнкцию выражать через полином Жегалкина именно таким образом, а не подгонять по таблице.

Самостоятельно решить: 6.23 (а-в), 6.24 и 6.25.

В ДЗ полиномы всех функций вычислять полностью.

## 30 вариант ДЗ (изменен)

Дано множество функций $F = \{f, w\}$, где

$$f = x_1(\bar{x}_1 \mid x_3)(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_3) \to (x_2 \sim x_3),$$
$$w = (11100111)$$

Выяснить, является ли это множество полным и, если является, представить формулами над $F = \{f, w\}$ все функции стандартного базиса и обе константы. Если же нет, то *дополнить функцией,* ***существенно зависящей от трех переменных*** (и при этом сама по себе не образовывала полного множества) и сделать то же самое, что и для исходного множества.

Решение

Вычислим таблицу функции $f$:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

При вычислении значений этой функции не обязательно всё считать «в лоб». Достаточно заметить, что импликация (внешняя операция в формуле) обращается в 1 при ложности посылки, то есть в данном случае при $x_1 = 0$, а также при истинности заключения, то есть на наборах (1, 0, 0) и на (1, 1, 1). Остается «реально» вычислить значения на наборах (1,0,1) и (1,1,0).

Из рассмотрения векторов значений функций становится ясно, что исходное множество не является полным, так как обе функции сохраняют константу 1.

Введем новую функцию

$$g = (01101000) \notin T_1$$

Выведем для нее полином Жегалкина, чтобы проверить ее существенную зависимость от трех переменных:

$$g(0,0,0)=0=a_0,$$
$$g(1,0,0)=1=a_1\oplus a_0\Rightarrow a_1=1,$$
$$g(0,1,0)=1=a_2\oplus a_0\Rightarrow a_2=1,$$
$$g(0,0,1)=1=a_3\oplus a_0\Rightarrow a_3=1,$$
$$g(1,1,0)=0=a_{12}\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_0=a_{12}\Rightarrow a_{12}=0,$$
$$g(1,0,1)=0=a_{13}\oplus a_1\oplus a_3\oplus a_0=a_{13}\Rightarrow a_{13}=0,$$
$$g(0,1,1)=0=a_{23}\oplus a_2\oplus a_3\oplus a_0=a_{23}\Rightarrow a_{23}=0,$$
$$g(1,1,1)=0=a_{123}\oplus a_1\oplus a_2\oplus a_3=a_{123}\oplus 1\Rightarrow a_{123}=1.$$

(В последней строке опущены все нулевые коэффициенты.)

Итак,

$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3\oplus x_1\oplus x_2\oplus x_3,$$

что подтверждает существенную зависимость от трех переменных.

Полиномы Жегалкина для функций $f$ и $w$ будут иметь вид (проверить!):

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus 1,$$
$$w(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1\oplus 1.$$

Теперь можно заполнить критериальную таблицу:

| | $T_0$ | $T_0$ | S | M | L |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | - | + | - | - | - |
| $w$ | - | + | - | - | - |
| $g$ | + | - | - | - | - |

Заметим, что множество $\{f,g\}$ также является полным.

Варианты формул для конъюнкции и дизъюнкции:

$$x_1x_2=\overline{f(x_1,x_2,0)},$$
$$x_1\vee x_2=\overline{\overline{x}_1\overline{x}_2}=f(\overline{x}_1,\overline{x}_2,0).$$

Это вытекает из равенства $f(x_1,x_2,0)=x_1x_2\oplus 1=x_1\,|\,x_2$.

$w(0,x_2,x_3)=x_2x_3\oplus 1$, откуда, полагая $x_2=x, x_3=y$, получим:

$$xy = \overline{w(x, y, 0)},$$
$$x \vee y = w(\overline{x}, \overline{y}, 0).$$

Так как

$$g(x, x, y) = xy \oplus x \oplus x \oplus y = xy \oplus y,$$

то (см. доказательство леммы о нелинейной функции)

$$xy = g(\overline{x}, \overline{x}, y).$$

(Это легко проверить и непосредственно:

$$g(\overline{x}, \overline{x}, y) = (x \oplus 1)y \oplus y = xy \oplus y \oplus y = xy.)$$

Тогда

$$x \vee y = \overline{g(x, x, \overline{y})}.$$

Попутно заметим, что $x_1 \oplus x_2 = g(x_1, x_2, 0)$.

Из векторов значений функций пополненного множества легко найти формулы для констант:

$$0 = g(x_1, x_1, x_1),$$
$$1 = f(x_1, x_1, x_1).$$

Отрицание представим, используя лемму о немонотонной функции:

$$\overline{x}_1 = f(1, x_1, 0).$$

Окончательную формулу для конъюнкции, в которую входят только функции пополненного множества, можно записать в виде (для удобства переименовав переменные):

$$xy = f(f(x, x, x), f(x, y, g(x, x, x)), g(x, x, x)),$$

что выражает отрицание формулы $f(x, y, 0) = f(x, y, g(x, x, x))$.

**Замечание**. Нетрудно получить минимальную ДНФ для функции $f$:

$$f = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$$

(проверить!).

Отсюда получаем:

$f(x_1, x_2, 0) = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 = \overline{x_1 x_2}$ (как и выше).