Булевы функции

Булева функция от n переменных есть произвольное отображение вида

$f:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

$y = f(x_1,...,x_n)$

Используются такие обозначения:

P_2 - множество всех булевых функций,

$P_2^{(n)}$ - множество всех булевых функций от n переменных.

Очевидно, что $P_2 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_2^{(n)}$.

При $n = 0$ получаем две булевы константы: 0 и 1. В силу определения булеву функцию от n переменных можно рассматривать как n-арную операцию на множестве {0, 1}.

Число всех булевых функций от n переменных равно 2^{2^n} .

Это следует из известной формулы подсчета числа всех отображений одного конечного множества в другое:

$|B^A| = |B|^{|A|}$.

В данном случае $A = \{0,1\}^n$ - n-мерный булев куб, число элементов в котором (число булевых векторов размерности n) равно 2^n, а $B = \{0,1\}$.

Табличное представление

Таблицы:

$n = 1$

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

4-я функция называется отрицанием: $f_4(x) \rightleftharpoons \overline{x}$.

$n = 2$

x_1	x_2	$\vee$	$\wedge(\cdot,\&)$	$\to(\supset)$	$\sim$	$\oplus$	$\mid$	$\downarrow$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

1)Дизъюнкция

2) Конъюнкция

3) Импликация

4) Эквивалентность

5) Сумма по модулю 2 (строгая дизъюнкция)

6) Штрих Шеффера

7) Стрелка Пирса

Если равенство функций понимать как совпадение таблиц, то можно заметить следующее:

1) $x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$

2) $x_1 \sim x_2 = (x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_1) = \overline{x_1 \oplus x_2}$

3) $x_1 \oplus x_2 = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_2$

4) $x_1 \mid x_2 = \overline{x_1 x_2} = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$

5) $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$

Общий формат таблицы булевой функции:

	x_1	…	x_n	$f(x_1,...,x_n)$
0	0	…	0	$f(0,...,0)$
…				
K	n-разрядный	Двоичный код	Числа k	$f(...)$
…				
$2^n - 1$	1	…	1	$f(1,...,1)$

Пример:

	x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Задание вектором значений: $f = (0001\ 0111)$

Задание путем перечисления номеров конституент 1: $f = \{3, 5, 6, 7\}$.

Равенство булевых функций. Фиктивные переменные

Две булевы функции $f, g \in P_2^{(n)}$ считаются равными, если

$$(\forall \overline{\tilde{\alpha}} \in \{0,1\}^n)(f(\overline{\tilde{\alpha}}) = g(\overline{\tilde{\alpha}})) \ .$$

Это и есть формальное определение совпадения таблиц.

Следующий пример показывает, что функции могут быть равны, хотя формально определены как функции от разного числа переменных.

$$f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2,$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3,$$

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1x_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3\overline{x}_4.$$

Легко видеть, что при использовании тождеств булевой алгебры вторая функция преобразуется к первой:

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3 = x_1(x_3 \vee \overline{x}_3) \vee x_2(x_3 \vee \overline{x}_3) = x_1 \vee x_2.$$

Аналогично третья функция преобразуется ко второй.

Чтобы дать общее определение равных булевых функций, нам понадобиться понятие фиктивной переменной.

Переменная x_i называется фиктивной переменной функции $f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, если для любых двух наборов (векторов) значений переменных

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$$

и

$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$$

$$f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}).$$

Другими словами, изменение значения фиктивной переменной при фиксированных значениях остальных переменных не влияет на значение функции.

Тогда дается такое определение равенства булевых функций: булевы функции считаются равными, если они отличаются друг от друга, может быть, только фиктивными переменными.

В приведенном выше примере все три функции равны, и у второй функции фиктивной переменной является x_3, а у третьей x_3 и x_4. У первой функции (дизъюнкции) фиктивных переменных нет.

Переменная булевой функции, не являющаяся фиктивной, называется существенной, и говорят, что функция существенно зависит от нее.

Данное выше определение равных функций можно переформулировать так: булевы функции равны, если они существенно зависят от одних и тех же переменных и на каждом наборе значений этих переменных принимают одинаковые значения.

Здесь важно понимать следующее. Пусть фиксировано какое-то множество переменных $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Тогда равные булевы функции существенно зависят именно *от одних тех же переменных* этого множества, но не только от одного и того же *числа* существенных переменных.

Это можно пояснить на примере функций, называемых проекцирующими или селекторами.

Функция $pr_i(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i$ называется i-й проекцирующей функцией, или i-селектором. Ясно, что она существенно зависит только от i-й переменной, хотя формально может быть определена как функция от любого числа переменных (в нетривиальном случае не меньшем двух).

Тогда приведем сводную таблицу двух селекторов от двух переменных:

x_1	x_2	pr_1	pr_2
0	0	0	0

0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Как видно, разные селекторы не равны, хотя существенно зависят от одной переменной, но не от одной и той же переменной.

Если дана некая функция $y = f(x_1,...,x_n)$, то к множеству ее переменных может быть добавлена новая переменная x_{n+1} согласно формуле

$$\tilde{y} = (x_{n+1} \vee \overline{x}_{n+1}) f(x_1,...,x_n) \ .$$

Ясно, что новая переменная фиктивная и функции равны между собой.

Возможность добавления к множеству переменных функции новой фиктивной переменной позволяет без ограничения общности считать, что любые две функции (даже любое конечное множество функций) заданы как функции от одного и того же числа переменных. Само число переменных булевой функции не является тем самым существенным параметром.

Суперпозиции и формулы

Пусть функция $f \in P_2^{(n)}$, а все функции $g_1,...,g_n \in P_2^{(m)}$.

Тогда может быть определена новая функция $f(g_1,...,g_n)$ так, что для любого вектора (набора) значений переменных $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,...,\alpha_m) \in \{0,1\}^m$

$$f(g_1,...,g_n)(\tilde{\alpha}) = f(g_1(\tilde{\alpha}),...,g_n(\tilde{\alpha})).$$

Эта функция называется *суперпозицией* функций $f \in P_2^{(n)}$ и $g_1,...,g_n \in P_2^{(m)}$.

Тем самым строится некая алгебра булевых функций. Выражения в этой алгебре называются формулами.

А именно, пусть дано некоторое множество F булевых функций, разбитое на подмножества функций (операций) различной арности:

$$F = F^{(0)} \cup F^{(1)} \cup ... \cup F^{(n)} \cup ... \ ,$$

где $F^{(n)} \subseteq P_2^{(n)}, F^{(0)} \subseteq \{0,1\}$,

а также дано некоторое множество $X = \{x_1, x_2,..., x_n,...\}$ булевых переменных.

Тогда по индукции определяется понятие формулы над базисом F:

1) любая переменная из множества X и любая константа из множества $F^{(0)}$, если оно не пусто, есть формула над базисом F;

2) если $\Phi_1,...,\Phi_n$ - формулы над базисом F, а $f^{(n)} \in F^{(n)}$, то выражение $f^{(n)}(\Phi_1,...,\Phi_n)$ есть формула над базисом F;

3) других формул над базисом F не существует.

Замечание. Строго говоря, исходное множество F в этом определении следует рассматривать не как множество булевых функций, а как множество их обозначений, имен, называемых *функциональными символами* (той или иной арности). Но в определенных рамках, с учетом взаимно однозначного соответствия между символами и обозначаемыми ими функциями, эти объекты можно отождествить.

Каждая формула представляет некоторую булеву функцию, а именно:

1) переменная x_i представляет селектор $pr_i(x_1,...,x_i,...,x_n) = x_i$ (для любого n);

2) каждая константа (0 или 1) представляет саму себя (что тоже есть некоторая вольность);

3) если формулы $\Phi_1,...,\Phi_n$ представляют функции $g_1,...,g_n$ соответственно, то формула $f^{(n)}(\Phi_1,...,\Phi_n)$ представляет суперпозицию $f^{(n)}(g_1,...,g_n),\ f^{(n)} \in F^{(n)}$;

4) никаких других функций, представляемых формулами над базисом F, не существует.

При этом, конечно, используется инфиксная запись бинарных функциональных символов,

то есть, например, пишем $f \vee g$, а не $\vee(f,g)$.

Формулы называются тождественными, если они представляют одну и ту же функцию.

Основой тождественных преобразований в алгебрах булевых функций являются тождества булевой алгебры.

1) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z;\ x(yz) = (xy)z$

2) $x \vee y = y \vee x;\ xy = yx$

3) $x \vee x = x \cdot x = x$

4) $x \vee 0 = x \cdot 1 = x;\ x \cdot 0 = 0, x \vee 1 = 1$

5) $x(y \vee z) = xy \vee xz;\ x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$

6) $x \vee \bar{x} = 1; x \cdot \bar{x} = 0$

7) $x \vee xy = x(x \vee y) = x$

8) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y};\ \overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ (законы де Моргана)

Замыканием множества F булевых функций называется множество всех функций, представляемых формулами над базисом F. Обозначение - $[F]$.

Множество F называется замкнутым, если $[F] = F$, и полным, если $[F] = P_2$, то есть, если любая булева функция может быть представлена некоторой формулой над базисом F.

Мы докажем далее, что *стандартный базис* $F_0 = \{\vee, \cdot, \bar{\ }\}$ и *базис Жегалкина* $F_1 = \{\oplus, \cdot, 1\}$ являются полными множествами.

Можно заметить, что стандартный базис является сигнатурой булевой алгебры булевых функций.

Дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (ДНФ и КНФ)

Теорема. 1) Любая булева функция, отличная от константы 0, может быть представлена в виде ДНФ.

2) Любая булева функция, отличная от константы 1, может быть представлена в виде КНФ.

Доказательство. 1) Пусть функция $f \in P_2^{(n)}$. Так как она не равна тождественно 0, найдется вектор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, для которого $f(\tilde{\alpha}) = 1$. Каждый такой вектор (набор значений переменных), на котором функция принимает значение 1, называется конституентой единицы функции f. Множество всех конституент единицы функции f обозначим C_f^1. То есть

$C_f^1 = \{\tilde{\alpha} : f(\tilde{\alpha}) = 1\}$.

По условию это множество не пусто.

Определим для каждого такого набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ элементарную конъюнкцию

$K_{\tilde{\alpha}} = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$.

Очевидно, что $K_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta})=1 \Leftrightarrow \tilde{\beta}=\tilde{\alpha}$.

Тогда нетрудно доказать, что $f=\bigvee_{\tilde{\alpha}\in C_f^1} K_{\tilde{\alpha}}$.

Действительно, если для некоторого $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ $f(\tilde{\alpha})=1$, то $\tilde{\alpha}\in C_f^1$, и $K_{\tilde{\alpha}}=x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}=1$, то есть записанная выше ДНФ равна 1.

Наоборот, если эта ДНФ на каком-то наборе обращается в единицу, то по крайней мере одна из указанных выше элементарных конъюнкций обращается в единицу на данном наборе, а он есть конституента единицы функции f , и, следовательно, она также на данном наборе равна 1.

2) Это утверждение можно считать верным в силу принципа двойственности, но можно отметить следующее.

Вводится множество конституент нуля функции f :

$C_f^0=\{\tilde{\alpha}: f(\tilde{\alpha})=0\}$.

Для функции, отличной от константы 1, это множество не пусто.

Каждой конституенте нуля сопоставляется элементарная дизъюнкция

$D_{\tilde{\alpha}}=x_1^{\bar{\alpha}_1}\vee ...\vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$.

Понятно, что $D_{\tilde{\alpha}}(\tilde{\beta})=0 \Leftrightarrow \tilde{\beta}=\tilde{\alpha}$, и тогда КНФ, представляющая исходную функцию, имеет вид:

$f=\bigwedge_{\tilde{\alpha}\in C_f^0} D_{\tilde{\alpha}}$.

Теорема доказана.

КНФ для константы 0: $0=x_1\cdot\bar{x}_1$ (это КНФ от одной переменной!).

ДНФ для константы 1: $1=x_1\vee\bar{x}_1$ (а это ДНФ от одной переменной).

Представление мажоритарной функции:

ДНФ - $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_2x_3\vee x_1\bar{x}_2x_3\vee x_1x_2\bar{x}_3\vee x_1x_2x_3$,

КНФ - $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2\vee x_3)(\bar{x}_1\vee x_2\vee x_3)(x_1\vee\bar{x}_2\vee x_3)(x_1\vee x_2\vee\bar{x}_3)$.

Следствие. Стандартный базис есть полное множество булевых функций.

Поскольку элементы стандартного базиса представляются формулами над базисом Жегалкина, а именно,

$$x_1 \vee x_2 = x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus x_2,$$
$$\overline{x} = x \oplus 1,$$

то и базис Жегалкина также является полным множеством булевых функций.

Полиномы Жегалкина

Метод неопределенных коэффициентов

$$a_0 = f(0,0,\dots,0)$$

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k} \oplus \sum_{\{j_1, j_2, \dots j_l\} \subset \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} a_{j_1 j_2 \dots j_l} = f(\tilde{\alpha})$$, где

$$\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \dots = \alpha_{i_k} = 1, \alpha_p = 0, p \notin \{i_1, i_2, \dots, i_k\},$$

$$1 \le k \le n.$$

Или (выноса слагаемое a_0):

$$a_{i_1 i_2 \dots i_k} \oplus \sum_{\varnothing \ne \{j_1, j_2, \dots j_l\} \subset \{i_1, i_2, \dots, i_k\}} a_{j_1 j_2 \dots j_l} = f(\tilde{\alpha}) \oplus a_0.$$

Эта система линейных уравнений в поле вычетов по модулю 2 имеет единственное решение, так как из известных коэффициентов $a_{j_1 \dots j_l}$ для всех непустых подмножеств $\{j_1, \dots, j_l\} \subset \{i_1, \dots, i_k\}$ однозначно определяется коэффициент $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$. Каждый коэффициент $a_i, i = 1, \dots, n$, линейной части полинома находится из простейшего соотношения $a_i \oplus a_0 = f(0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$. Таким образом, можно считать, что рассматриваемая система задана сразу в верхнетреугольной форме.

Классы Поста

Функции, сохраняющие константу:

$$T_0 = \{ f : f(0,...,0) = 0\},$$
$$T_1 = \{ f : f(1,...,1) = 1\}$$

Самодвойственные функции:

$$S = \{ f : (\forall \tilde{\alpha}) f(\overline{\tilde{\alpha}}) = \overline{f}(\tilde{\alpha})\}$$

Замечание. Для любой булевой функции f может быть определена *двойственная* функция f^* так, что $(\forall \tilde{\alpha})(f^*(\tilde{\alpha}) = \overline{f}(\overline{\tilde{\alpha}}))$. Взаимно двойственными будут дизъюнкция и конъюнкция, штрих Шеффера и стрелка Пирса, сумма по модулю 2 и эквивалентность. Тогда самодвойственная функция может определена как совпадающая с двойственной к ней.

Монотонные функции:

$$f \in M \Leftrightarrow (\forall \tilde{\alpha}, \tilde{\beta})(\tilde{\alpha} \le \tilde{\beta} \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \le f(\tilde{\beta}))$$

Можно заметить, что $\overline{M} \supseteq \overline{T_0} \cap \overline{T_1}$, то есть, если функция не сохраняет обе константы, то она не монотонна.

Линейные функции:

$$f = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{mod}\, 2) a_i x_i \oplus a_0$$

Теорема. Каждый класс Поста замкнут. #

Существуют функции, принадлежащие всем классам Поста: это будут все селекторы (которые мы отождествили с переменными).

Но существуют функции, не принадлежащие ни одному классу Поста. Это штрих Шеффера и стрелка Пирса. Это легко усматривается из их векторов значений:

$$| = (1110), \downarrow = (1000).$$

Лемма о несамодвойственной функции

Обе константы (0 и 1) могут быть представлены формулами над базисом $\{ f_S, \bar{\ } \}$*, где* f_S *- несамодвойственная функция.*

Доказательство. Так как f_S - несамодвойственная функция, то найдется набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \{0,1\}^n$ (для некоторого n), что $f(\tilde{\alpha}) = f(\overline{\tilde{\alpha}})$. Введем функцию $h(x) = f_S(x^{\alpha_1}, ..., x^{\alpha_n})$. Нетрудно понять, что $h(1) = f_S(\tilde{\alpha}) = f_S(\overline{\tilde{\alpha}}) = h(0)$. Это значит, что функция $h(x)$ равна тождественно одной из констант. Вторую константу получим, используя отрицание.

Лемма (2-я) о немонотонной функции

Отрицание может быть представлено формулой над базисом $\{f_M, 0, 1\}$, *где* f_M *- немонотонная функция.*

Доказательство. Согласно первой лемме о немонотонной функции (см. *Учебник, теорема 6.6, с. 438*) существуют наборы

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n),$$
$$\tilde{\beta} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$$

(отличающиеся друг от друга в точности одной компонентой) такие, что $f_M(\tilde{\alpha}) = 1,\ f_M(\tilde{\beta}) = 0$. Тогда имеем формулу для отрицания: $\overline{x} = f_M(\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$.

Лемма о нелинейной функции

Конъюнкция может быть представлена формулой над базисом $\{f_L, 0, \overline{\ }\}$, *где* f_L *- нелинейная функция.*

Доказательство. Так как f_L нелинейная функция, в ее полиноме Жегалкина есть по крайней мере одно нелинейное слагаемое. Выберем самое короткое; пусть это будет $x_{i_1}...x_{i_k}, k \geq 2$. Все переменные, не вошедшие в это нелинейное слагаемое, заменим константой 0. Получим «редуцированный» полином Жегалкина:

$$f_L^{'} = f_L |_{(\forall j \notin \{i_1,...,i_k\})(x_j=0)} = x_{i_1}...x_{i_k} \oplus a_{i_1} x_{i_1} \oplus ... \oplus a_{i_k} x_{i_k} \oplus a_0 .$$

Переменные выбранного нелинейного слагаемого разобьем произвольно на две части, все переменные 1-й части отождествим и обозначим через x, а все переменные 2-й части также отождествим и обозначим через y. Получим функцию двух переменных

$$\chi(x,y) = xy \oplus ax \oplus by \oplus c,$$

где a - сумма (по модулю 2) всех коэффициентов линейной части записанного выше полинома при переменных первой части, а b - такая же сумма при переменных 2-й части; $c = a_0$.

Утверждается, что $xy = \chi(x \oplus b, y \oplus a) \oplus ab \oplus c$

(Заметим, что в этой формуле нет использования суммы по модулю 2, так как прибавление константы по модулю 2 означает возможное отрицание, и можно было бы написать так: $xy = \tilde{\chi}(\tilde{x}, \tilde{y})$.)

Действительно,

$$\chi(x \oplus b, y \oplus a) \oplus ab \oplus c = (x \oplus b)(y \oplus a) \oplus a(x \oplus b) \oplus b(y \oplus a) \oplus c \oplus ab \oplus c =$$
$$= xy \oplus ax \oplus by \oplus ab \oplus ax \oplus ab \oplus by \oplus ab \oplus c \oplus ab \oplus c = xy$$

с учетом того, что сумма по модулю 2 любого четного числа одинаковых слагаемых равна нулю.

Лемма доказана.

Пример.

Пусть $f_L = x_1x_2x_3x_4x_5 \oplus x_2x_3x_4x_5 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_3x_4x_5 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus 1$

Для построения конъюнкции выберем 4-е слагаемое, и тогда

$$f_L^{'} = f_L(0,0,x_3,x_4,x_5) = x_3x_4x_5 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_5 \oplus 1.$$

Теперь пусть $x_3 = x_4 = x, x_5 = y$, то есть

$$\chi(x,y) = f_L(0,0,x,x,y) = xy \oplus x \oplus x \oplus y \oplus 1 = xy \oplus y \oplus 1.$$

Значит, $a = 0, b = c = 1, ab \oplus c = 1$.

В итоге имеем формулу для конъюнкции:

$$xy = \overline{f}_L(0,0,\overline{x},\overline{x},y).$$

Внешнее отрицание появилось из-за того, что $ab \oplus c = 1$.

Так как дизъюнкция есть отрицание конъюнкции отрицаний, сразу получаем формулу для дизъюнкции:

$$x \vee y = f_L(0,0,x,x,\overline{y}).$$

Обе формулы являются формулами над базисом, состоящем из нелинейной функции, константы 0 и отрицания.

Теорема Поста

Теорема. Множество булевых функций полно тогда и только тогда, когда оно не содержится (целиком) ни в одном из классов Поста.

Доказательство. *Необходимость*. Полагая, что множество булевых функций содержится в каком-то классе Поста, получим, в силу замкнутости каждого класса Поста, что формулами над этим множеством могут быть представлены только функции этого класса, а, стало быть, не может быть представлена ни одна функция, не содержащаяся ни в одном из классов Поста, например, штрих Шеффера. Значит, такое множество не может быть полным.

*Достаточность***.** Достаточно показать, что формулами над множеством F, удовлетворяющем условию теоремы, могут быть представлены функции какого-то уже известного полного множества. В качестве такового можно взять множество, состоящее из конъюнкции и отрицания.

Так как множество $\{\bullet, \overline{\ }\}$ является полным, достаточно указать способ построения формул для конъюнкции и отрицания над базисом F, который удовлетворяет условию теоремы Поста, т.е. не содержится ни в одном из классов Поста, что можно выразить следующим образом:

$$(\forall C \in \{T_0, T_1, S, M, L\})(\exists f_C \in F \setminus C),$$

т.е. для всякого класса Поста найдется функция из F, не принадлежащая этому классу.

Взяв нелинейную функцию $f_L \in F \setminus L$ и используя константу 0 и отрицание, построим формулу для конъюнкции согласно лемме о нелинейной функции.

Теперь необходимо построить формулы для констант и отрицания.

Здесь могут представиться два случая.

1 случай. Существует функция $f_0 \in F \setminus T_0$, сохраняющая константу 1, или существует функция $f_1 \in F \setminus T_1$, сохраняющая константу 0.

Рассмотрим первую альтернативу. Тогда получаем формулу для константы 1:

$$1 = f_0(x,...,x),$$

а константу 0 представим с использованием какой-нибудь функции $g_1 \in F \setminus T_1$:

$$0 = g_1(1,...,1) = g_1(f_0(x,...,x),..., f_0(x,...,x)).$$

Вторая альтернатива в рамках первого случая рассматривается аналогично.

Имея формулы для обеих констант, отрицание представим формулой, используя немонотонную функцию множества F (согласно второй лемме о немонотонной функции).

2 случай. Всякая функция $f_0 \in F \setminus T_0$ не сохраняет и константу 1, а всякая функция $f_1 \in F \setminus T_1$ не сохраняет и константу 0.

В этом случае сразу получаем формулу для отрицания:

$$\overline{x} = f_0(x,...,x),$$

а константы представляем формулами согласно лемме о несамодвойственной функции.