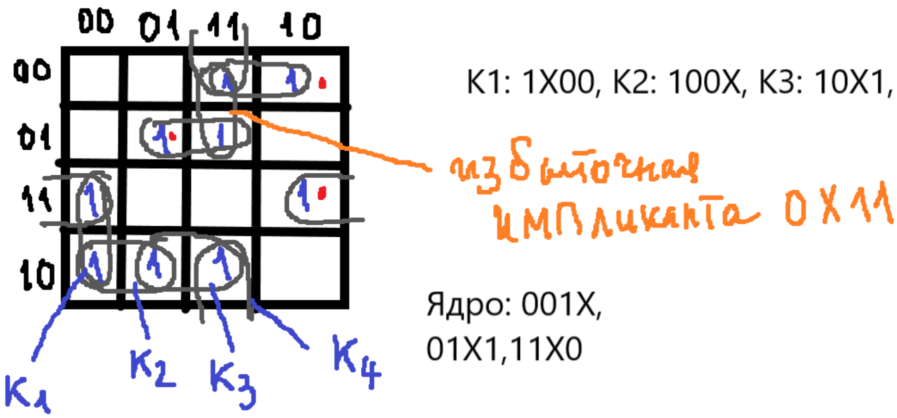
Примеры на минимизацию ДНФ

1)



K1: 1X00, K2: 100X, K3: 10X1, K4: X011

Ядро: 001X,
01X1,11X0

Сокращенная ДНФ:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_2x_3x_4$$

ДНФ Квайна:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_2x_3x_4$$

Функция Патрика:

$$\begin{aligned}&(K_1 \vee K_2)(K_2 \vee K_3)(K_3 \vee K_4) = (K_1K_2 \vee K_1K_3 \vee K_2 \vee K_2K_3)(K_3 \vee K_4) = \\ &= (K_1K_3 \vee K_2)(K_3 \vee K_4) = K_1K_3 \vee K_1K_3K_4 \vee K_2K_3 \vee K_2K_4 = \\ &= K_1K_3 \vee K_2K_3 \vee K_2K_4.\end{aligned}$$

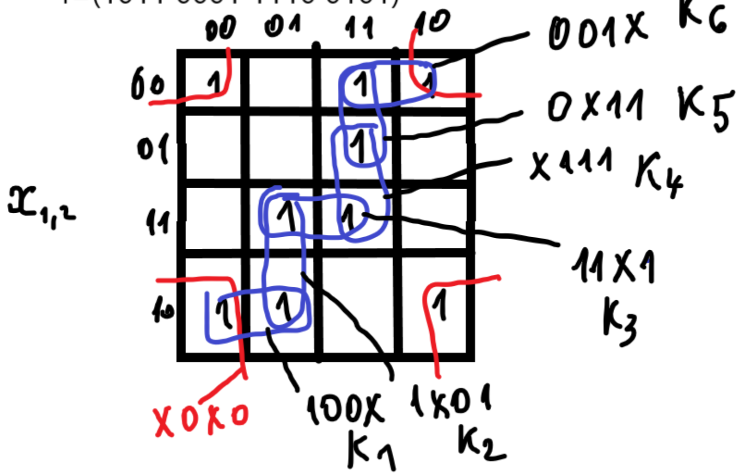
Тупиковые ДНФ:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_4 \vee \begin{cases} x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \\ x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \\ x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_3x_4 \end{cases}$$

Все они оказались кратчайшими и минимальными: длина =5, число литералов=15. Заметим, что число отрицаний тоже везде одинаково

2)

f=(1011 0001 1110 0101)



Исходные параметры сложности: длина m=9, число литералов L=36.

Сокращенная ДНФ:

$$\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3;$$
$$m = 7, L = 20$$

Ядро: $\bar{x}_2\bar{x}_4$.

В данном случае избыточных импликант нет, и сокращенная ДНФ совпадает с ДНФ Квайна.

Неядровые импликанты:

$$K_1 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3, K_2 = x_1\bar{x}_3x_4, K_3 = x_1x_2x_4, K_4 = x_2x_3x_4, K_5 = \bar{x}_1x_3x_4,$$
$$K_6 = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3.$$

Функция Патрика:

$$(K_1 \vee K_2)(K_2 \vee K_3)(K_3 \vee K_4)(K_4 \vee K_5)(K_5 \vee K_6) =$$
$$= (K_1K_2 \vee K_1K_3 \vee K_2 \vee K_2K_3)(K_3K_4 \vee K_3K_5 \vee K_4 \vee K_4K_5)(K_5 \vee K_6) =$$
$$= (K_1K_3 \vee K_2)(K_3K_5 \vee K_4)(K_5 \vee K_6) = (K_1K_3K_5 \vee K_1K_3K_4 \vee K_2K_3K_5 \vee$$
$$\vee K_2K_4)(K_5 \vee K_6) = K_1K_3K_5 \vee K_1K_3K_5K_6 \vee K_1K_3K_4K_5 \vee K_1K_3K_4K_6 \vee$$
$$\vee K_2K_3K_5 \vee K_2K_3K_5K_6 \vee K_2K_4K_5 \vee K_2K_4K_6 =$$
$$= K_1K_3K_5 \vee K_1K_3K_4K_6 \vee K_2K_3K_5 \vee K_2K_4K_5 \vee K_2K_4K_6.$$

Ограничимся перечислением только кратчайших тупиковых ДНФ, представляющих исходную функцию:

$$f = \bar{x}_2\bar{x}_4 \vee \begin{cases} x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \\ x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \\ x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3x_4 \\ x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \end{cases}$$

Все эти ДНФ можно считать минимальными по двум основным параметрам: длина = 4, число литералов = 11, но 2-я и 3-я предпочтительны по числу отрицаний (2 против 3 в остальных).

3) Функция задана произвольной ДНФ, например:

$$f = \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_3x_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Заметим, что здесь невозможны никакие склейки.

Каждой элементарной конъюнкции сопоставим грань булева куба (прямоугольник на карте Карно), рассмотренную как результат некоторой склейки:

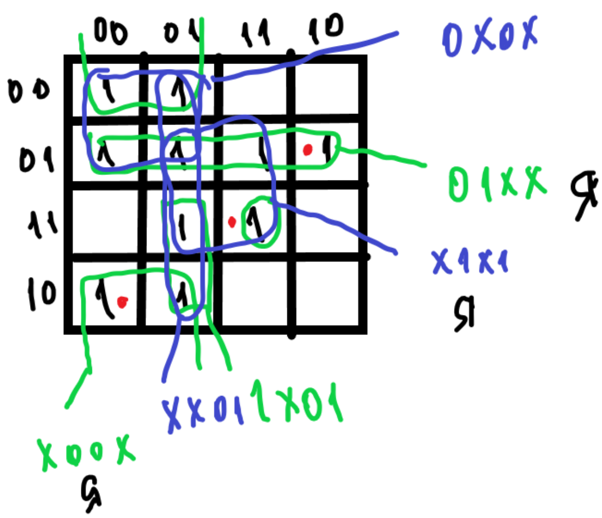
$\bar{x}_1x_2 - 01XX$

$x_1\bar{x}_3x_4 - 1X01$

$x_1x_2x_3x_4 - 1111$

$\bar{x}_2\bar{x}_3 - X00X$

Нанесем это на карту Карно:



На этой карте построим сокращенную ДНФ (синие прямоугольники; исходные – зеленые). Мы видим, что все единицы покрываются ядром (красные точки, буква «Я»), что дает минимальную ДНФ:

$$f = \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 x_4 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3 .$$

Остальные импликанты оказались избыточными.