Оглавление

Методические указания к решению задач по математической логике

При решении задач по математической логике (формальное доказательство формулы в исчислении высказываний в виде теории L) нельзя:

1) заменять подформулу на эквивалентную,

2) непосредственно производить алгебраические преобразования (в булевой алгебре).

Что можно:

1) наряду с основным правилом modus ponens (MP) использовать 9 дополнительных правил, основанных на доказанных в теореме 3 (файл «Элементы математической логики») секвенциях, а также все правила, вытекающие из свойств дизъюнкции и конъюнкции;

2) можно использовать правила, основанные на законах Де Моргана:

$$\frac{\neg(A\vee B)}{\neg A\&\neg B},\frac{\neg(A\& B)}{\neg A\vee\neg B},$$

а именно, если на шаге вывода возникает формула, являющаяся отрицанием некоторой дизъюнкции, от нее можно перейти к формуле, являющейся конъюнкцией отрицаний. Аналогично с отрицанием конъюнкции. Но нельзя внутри некоторой формулы производить такую замену;

3) можно использовать принцип контрапозиции: иногда легче построить вывод вида $\neg\Psi \vdash \neg\Phi$, чем предлагаемый $\Phi \vdash \Psi$;

4) если возникает необходимость перед решением основной задачи доказать некоторую вспомогательную секвенцию, то сначала написать ее доказательство, а затем сослаться как на теорему (объектную) при решении основной задачи;

5) можно свести исходную задачу к другой; например, если надо вывести формулу под двойным отрицанием, сначала из исходных гипотез вывести формулу без двойного отрицания, а потом использовать секвенцию (4) (или, что почти то же самое, правило R4);

6) можно внутри шага расшифровывать дизъюнкцию (или конъюнкцию) или, напротив, свертывать формулу в дизъюнкцию (или конъюнкцию), чтобы затем использовать их

свойства (примеры см. ниже). Обычный знак равенства (=) понимается, как сокращение фразы «есть то же самое, что…».

Решения задач

Решение задачи следует оформлять в виде записи вывода в теории L, на каждом шаге записывая некоторую формулу и мотивировку шага, которой может быть: записанная формула есть 1) аксиома (получаемая подстановкой в схему аксиомы (1) –(3); подстановка должна быть указана), 2) гипотеза, 3) теорема (уже доказанная ранее формула) и 4) результат применения некоторого правила, как основного МР, так как и любого дополнительного из упомянутых выше.

После завершения записи вывода следует подвести итог: доказана такая-то секвенция и, если необходимо, применить теорему дедукции.

Если предлагается доказать эквивалентность двух формул, то надо показать их выводимость друг из друга.

Вводя дополнительные гипотезы, следует твердо помнить, что *гипотезу можно вводить только как* ***посылку внешней импликации*** *в той формуле, которая выводится*.

Именно, пусть надо доказать секвенцию $\Gamma \vdash \Phi$ для некоторого (возможно пустого) множества гипотез Γ и некоторой формулы Φ. Если формула Φ представима в виде $\Theta \to \Psi$, то формулу Θ можно ввести как дополнительную гипотезу и свести исходную задачу к доказательству секвенции $\Gamma, \Theta \vdash \Psi$. Далее, если формула Ψ допускает представление в виде $\Psi_1 \to \Psi_2$, то посылку этой импликации можно взять за новую гипотезу и доказать уже такую секвенцию: $\Gamma, \Theta, \Psi_1 \vdash \Psi_2$ и т.д. Вводить новые гипотезы не обязательно, но этот прием часто помогает облегчить решение задачи. Заметим, что если какая-то гипотеза оказалась невостребованной, то это не является ошибкой.

В заключение заметим, что импликация не является ассоциативной операцией, и следует аккуратно расставлять скобки! Выражение $x \to y \to z$ не имеет смысла, и нужно писать $(x \to y) \to z$ или $x \to (y \to z)$, причем эти функции не равны (проверить!)

О некоторых приемах построения доказательства

Доказательство – это своего рода игра. Придумать доказательство — значит найти в этой игре выигрышную стратегию.

Поясним это на примере доказательства секвенций (3) и (4).

(3) Надо доказать $\vdash \neg\neg A \to A$

Посылку можно принять за гипотезу. Тогда из нее надо вывести *A*. Вспоминаем, в какой схеме аксиомы в конце стоит одна буква (или буква с отрицаниями). Это схема (3):

$$(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$$

(внешние скобки по умолчанию опущены).

Значит, если мы хотим эту схему использовать, то букву *B* следует заменить на *A*.

Тогда должно быть так:

$$(\neg A \to \neg X) \to ((\neg A \to X) \to A) \ .$$

Но что поставить вместо *X*?

Мы можем ввести гипотезу $\neg\neg A$. Если мы вместо X подставим $\neg A$, то получится:

$$(\neg A \to \neg\neg A) \to ((\neg A \to \neg A) \to A)$$

Сразу становится понятным план дальнейших действий: чтобы добраться до последнего *A*, нужно убрать предшествующие посылки. Первая посылка отсекается с помощью схемы (1), где на первом месте стоит двойное отрицание *A*, наша гипотеза. Вторая посылка есть уже доказанная теорема (каждая формула влечет саму себя), и задача решена.

В итоге пишем такой вывод:

1. $\neg\neg A$ - гипотеза,
2. $(\neg A \to \neg\neg A) \to ((\neg A \to \neg A) \to A)$ - схема (3) при заменах $A := \neg A, B := A$,
3. $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg A)$ - схема (1) при $A := \neg\neg A, B := \neg A$,
4. $\neg A \to \neg\neg A$ - MP, (1) и (3)
5. $(\neg A \to \neg A) \to A$ - MP, (2) и (4),
6. $\neg A \to \neg A$ - теорема,
7. A – MP, (5) и (6)

$\neg\neg A \vdash A \underset{\text{т. дед}}{\Rightarrow} \vdash (\neg\neg A \to A)$

$\dfrac{\neg\neg A}{A}$ (R_3)

Что и требовалось. Остается применить теорему дедукции.

(4) Докажем $\vdash A \to \neg\neg A$

Поскольку нам нужно вывести опять-таки формулу, представленную в виде буквы (с двойным отрицанием), то опять попробуем использовать схему аксиомы (3), в которой буква B должна быть заменена двойным отрицанием A.

Тогда подстановку в схему (3) надо записать так:

$$(\neg\neg\neg A \to \neg X) \to ((\neg\neg\neg A \to X) \to \neg\neg A) .$$

Опять-таки возникает вопрос: что такое X? Мы введем гипотезу A и тогда, положив X=A, через схему (1) и эту гипотезу устраним импликацию перед двойным отрицанием A. A первая импликация тогда становится теоремой – уже доказанной секвенцией (3).

Итак, пишем такой вывод.

1. A - гипотеза,

2. $(\neg\neg\neg A \to \neg A) \to ((\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A)$ - схема (3) при B;= no-no-A $\neg\neg$

3. $A \to (\neg\neg\neg A \to A)$ - схема (1) при замене $B := \neg\neg\neg A$,

$$\frac{A}{\neg\neg A} \quad (R_4)$$

4. $\neg\neg\neg A \to A$ - MP, (1) и (3),

5. $\neg\neg\neg A \to \neg A$ - секвенция (3) при замене $A := \neg A$,

6. $(\neg\neg\neg A \to A) \to \neg\neg A$ - MP, (2) и (5),

7. $\neg\neg A$ - MP, (4) и (6).

Итак, $A \vdash \neg\neg A$. Остается применить теорему дедукции.

Примеры решения задач

Переходим к рассмотрению примеров.

1. **Доказать эквивалентность** $((\neg A \to B) \vee (\neg B \to \neg C)) \equiv ((A \vee B) \vee \neg C)$.

Решение.

Поскольку надо доказать эквивалентность двух формул, то нужно вывести правую часть из левой и левую из правой.

Выводим правую часть из левой.

1. $(\neg A \to B) \vee (\neg B \to \neg C) = \neg(\neg A \to B) \to (\neg B \to \neg C)$ - гипотеза (левая часть эквивалентности – основная гипотеза); мы расписали внешнюю дизъюнкцию;

2. $\neg(A \vee B) = \neg(\neg A \to B)$ - гипотеза (учли, что правая часть представляется в виде $\neg(\neg A \to B) \to \neg C$, то есть мы расписали обе дизъюнкции по определению);

3. $\neg B \to \neg C$ - MP, (1) и (2);

4. $\neg A \& \neg B$ - правило Де Моргана, (2);

5. $\neg B$ - свойства конъюнкции, (4)

6. $\neg C$ - MP, (3) и (5).

Тем самым доказана секвенция $(\neg A \to B) \vee (\neg B \to \neg C), \neg(\neg A \to B) \vdash \neg C$, откуда по теореме дедукции следует выводимость правой части из левой.

Теперь выводим левую часть из правой.

1. $\neg(\neg A \to B) \to \neg C$ - гипотеза (правая часть, в которой расписаны обе дизъюнкции);

2. $\neg(\neg A \to B)$ - гипотеза (посылка внешней импликации в формуле левой части);

3. $\neg B$ - гипотеза (посылка внешней импликации в формуле $\neg B \to \neg C$, которую нужно вывести из предыдущих двух гипотез);

4. $\neg C$ - МР, (1) и (2).

Итак, мы доказали секвенцию $\neg(\neg A \to B) \to \neg C$, $\neg(\neg A \to B)$, $\neg B \vdash \neg C$. Дважды применив теорему дедукции, докажем выводимость левой части из правой.

Интересно заметить здесь, что третья гипотеза после записи нигде в самом выводе не используется, она используется только при окончательном решении о выводимости и применении теоремы дедукции.

Можно было бы не вводить ее, но тогда вывод после записи формулы $\neg C$ (это будет тогда 3-й шаг) продолжится следующим образом:

4а. $\neg C \to (\neg B \to \neg C)$ - схема (1) при заменах $A := \neg C, B := \neg B$;

5а. $\neg B \to \neg C$ - МР, (4) и (4а), что и требовалось в итоге.

Заметим, что при использовании алгебраических преобразований задача решается почти тривиально:

$$(\neg A \to B) \vee (\neg B \to \neg C) = (A \vee B) \vee (B \vee \neg C) = A \vee (B \vee B) \vee \neg C = A \vee B \vee \neg C\ .$$

Но запрет на применение алгебраических преобразований имеет не только чисто методический смысл (ввести ограничения, чтобы решение не было тривиальным), но оправдывается и тем, что аппарат логики был призван с логической точки зрения обосновать законы булевой алгебры. Так, например, логическое доказательство ассоциативности дизъюнкции не совсем тривиально, и в исходной задаче мы не имеем права переставить скобки в правой части.

2. **Доказать эквивалентность**: $\neg(x \vee z) \to ((x \to \neg y) \to \neg y) \equiv x \vee (\neg y \vee z)$.

Решение

Вывод правой части из левой:

1. $\neg(x \vee z) \to ((x \to \neg y) \to \neg y)$ - гипотеза;

2. $\neg x$ - гипотеза;

3. $\neg\neg y$ - гипотеза (мы замечаем, что правая часть может быть переписана в виде $\neg x \to (\neg\neg y \to z)$);

Из этих трех гипотез надо вывести z. Мы видим, что в первой гипотезе z содержится в посылке первой импликации (отрицание дизъюнкции). Поэтому попробуем применить правило R7 к шагу (1).

4. $\neg((x\to\neg y)\to\neg y)\to\neg\neg(x\vee z)=(x\to\neg y)\,\&\,y\to\neg\neg(x\vee z)$ - R7, шаг (1) (использовали определение конъюнкции);

Теперь рассуждаем так: если мы сможем убрать написанную выше конъюнкцию, то «доберемся» до двойного отрицания дизъюнкции, откуда легко будет получить z с учетом гипотезы шага (2). Конъюнкцию $(x\to\neg y)\,\&\,y$ получаем на следующих шагах.

5. $\neg x\to(x\to\neg y)$ - секвенция (5);

6. $x\to\neg y$ - MP, (2) и (5) (один член конъюнкции получен);

7. y - R3, шаг (3) (2-й член конъюнкции получен);

8. $(x\to\neg y)\,\&\,y$ - свойства конъюнкции, (6) и (7);

9. $\neg\neg(x\vee z)$ - MP, (4) и (8);

10. $x\vee z=\neg x\to z$ - R3, шаг (9);

11. z - MP (2) и (10).

Итак,

$\neg(x\vee z)\to((x\to\neg y)\to\neg y),\neg x,\neg\neg y\vdash z$.

Дважды применив теорему дедукции, то есть устраняя вторую и третью гипотезы, получим требуемую секвенцию (выводимость правой части из левой).

Вывод левой части из правой:

1. $x\vee(\neg y\vee z)=\neg x\to(\neg\neg y\to z)$ - гипотеза;

2. $\neg(x\vee z)$ - гипотеза;

3. $x\to\neg y$ - гипотеза;

4. $\neg(x\vee z)\to\neg x\,\&\,\neg z$ - теорема (закон Де Моргана);

5. $\neg x\,\&\,\neg z$ - MP, (2) и (4);

6. $\neg x,\neg z$ - свойства конъюнкции к шагу (5);

7. $\neg\neg y\to z$ - MP, (1) и (6);

8. $\neg z\to\neg\neg\neg y$ - R7, шаг (7);

9. $\neg\neg\neg y$ - MP, (6) и (8);

10. $\neg y$ - R3, шаг (9).

Итак, $x \vee (\neg y \vee z)$, $\neg(x \vee z), x \to \neg y \vdash \neg y$, откуда, применив дважды теорему дедукции получим доказываемое: левая часть выводится из правой. Исходная эквивалентность доказана. Заметим, что вместо шагов (4) и (5) можно было сразу использовать правило Де Моргана к шагу (2), записав соответствующую конъюнкцию отрицаний. Заметим еще, что здесь третья гипотеза использовалась только при формулировке окончательного вывода. Можно было бы ее не вводить, но тогда после получения формулы $\neg y$ надо будет сделать еще два шага:

11. $\neg y \to ((x \to \neg y) \to \neg y)$ - схема аксиомы (1) при заменах $A := \neg y, B := x \to \neg y$;

12. $(x \to \neg y) \to \neg y$ - MP, (10) и (11).

Тогда была бы доказана секвенция $x \vee (\neg y \vee z)$, $\neg(x \vee z) \vdash (x \to \neg y) \to \neg y$, после чего, устранив вторую гипотезу, получим требуемое.

Вывод справа налево без использования законов Де Моргана:

1. $x \vee (\neg y \vee z) = \neg x \to (\neg\neg y \to z)$ - гипотеза;
2. $\neg(x \vee z) = \neg(\neg x \to z)$ - гипотеза;
3. $x \to \neg y$ - гипотеза;
4. $x \to (\neg x \to z)$ - секвенция (5)
5. $\neg(\neg x \to z) \to \neg x$ - R7, (4)
6. $\neg x$ - MP, (2) и (5)
7. $z \to (\neg x \to z)$ - схема (1)
8. $\neg(\neg x \to z) \to \neg z$ - R7, (7)
9. $\neg z$ - MP, (2) и (8)
10. $\neg\neg y \to z$ - MP, (1) и (6)
11. $\neg z \to \neg\neg\neg y$ - R7, (10)
12. $\neg\neg\neg y$ - MP, (9) и (11)
13. $\neg y$ - R3, (12)

Далее, как и выше.

3*. Доказать $\vdash [((A \to B) \to (\neg C \to \neg D)) \to E] \to [(E \to A) \to (\neg D \to A)]$

Эта задача повышенной трудности не обязательна, но поучительна, так как доказательство выйдет значительно короче и легче в смысле трудозатрат, чем построение таблицы истинности из 32 строк (5 переменных).

Предварительно докажем одну эквивалентность:

$\neg(A \to B) \equiv A \& \neg B$ (правило отрицания импликации).

Раскрывая конъюнкцию по определению, получим:

$\neg(A \to B) \equiv \neg(A \to \neg\neg B)$.

Снимая внешние отрицания, получим, что нужно доказать эквивалентность

$A \to B \equiv A \to \neg\neg B$,

а это уже тривиально (предлагается закончить самостоятельно).

Переходим к решению основной задачи.

1. $((A \to B) \to (\neg C \to \neg D)) \to E$ - гипотеза;
2. $E \to A$ - гипотеза;
3. $\neg D$ - гипотеза;
4. $((A \to B) \to (\neg C \to \neg D)) \to A$ - R1, (1) и (2);
5. $\neg A \to \neg((A \to B) \to (\neg C \to \neg D))$ - R7, шаг (4);
6. $\neg((A \to B) \to (\neg C \to \neg D)) \to \neg(A \to B) \& \neg(\neg C \to \neg D)$ - теорема (правило отрицания импликации);
7. $\neg A \to \neg(A \to B) \& \neg(\neg C \to \neg D)$ - R1, (5) и (6);
8. $\neg(A \to B) \& \neg(\neg C \to \neg D) \to \neg(\neg C \to \neg D)$ - свойства конъюнкции, шаг (7);
9. $\neg A \to \neg(\neg C \to \neg D)$ - R1, (7) и (8);
10. $(\neg C \to \neg D) \to A$ - R6, шаг (9);
11. $\neg D \to (\neg C \to \neg D)$ - схема (1) при заменах $A := \neg D, B := \neg C$;
12. $\neg D \to A$ - R1, (11) и (10);
13. A - MP, (3) и (12).

Итак, $((A \to B) \to (\neg C \to \neg D)) \to E$, $E \to A$, $\neg D \vdash A$.

Применив три раза теорему дедукции, получим доказываемую объектную теорему.

Любопытно написать содержательное решение этой задачи «методом опровержения» (см. файл «Элементы математической логики», дополнение 3).

Обозначим посылку внешней импликации (левая квадратная скобка) через Φ, а заключение – через Ψ. Предполагаем, что импликация $\Phi \to \Psi$ ложна (далее просто пишем в такой ситуации «формула=Л(И)»).

Тогда $\Phi = И, \Psi = Л$. Из ложности Ψ заключаем, что $E \to A = И, \neg D \to A = Л$, откуда, в свою очередь, $\neg D = И, A = Л \Rightarrow D = Л, A = Л$, но так как $A = Л$, $E \to A = И$, то $E = Л$.

Итак, значения трех переменных из пяти в наборе, который мог бы сделать всю формулу ложной, найдены.

Из условия ложности E заключаем, что импликация $((A \to B) \to (\neg C \to \neg D)) = Л$, так как формула Φ истинна. Следовательно, $A \to B = И, \neg C \to \neg D = Л$, и тогда $\neg D = Л, D = И$.

Противоречие с доказанным выше.

Итак, исходная формула является тавтологией.

4. Доказать эквивалентность $(A \& B \to C) \equiv (A \to (B \to C))$. Решить самостоятельно.

5. Доказать $\neg(\neg x \vee z) \to \neg(y \& \neg z) \vdash (\neg x \vee \neg y) \vee z$. Решить самостоятельно.

Указание. Докажите секвенцию $\neg(\neg x \vee z) \to \neg(y \& \neg z) \vdash z \vee (\neg x \vee \neg y)$, а затем используйте свойство коммутативности дизъюнкции.

Замечание о заменах в схемах аксиом

В основном тексте (файл «Элементы математической логики») буквы в схемах аксиом неявно отождествляются с логическими переменными. Но, строго говоря, это не так. Это именно просто буквы, указатели мест, которые могут быть заменены произвольными формулами, но согласованно, т. е. так, что разные вхождения одной и той же буквы заменяются одной и той же формулой. Но поскольку любая формула может быть или истинна, или ложна, а третьего не дано, то буквы в схемах в смысле вырабатываемого значения ведут себя так же, как и переменные: на месте каждой из них при оценке формулы, получаемой из схемы, т. е. при вычислении ее истинностного значения, будет стоять либо «истина», либо «ложь».

И когда в какой-нибудь схеме мы делаем замену $A := \neg A$, это вовсе не означает, что мы отождествляем формулу с ее отрицанием, а это означает, что вместо буквы A мы подставляем формулу, которая есть отрицание некоторой формулы, обозначенной буквой A. Это не очень легко понять, но на самом деле во всех выводах, которые мы пишем, мы имеем дело не с конкретными формулами, а со схемами формул, в которых любая буква может быть согласованно заменена любой формулой. Это относится ко всем объектным теоремам (и секвенциям, которые могут быть сведены с помощью теоремы дедукции к теоремам).

Можно было бы пойти по другому пути: считать, что мы имеем дело не со схемами аксиом, а с конкретными формулами, называемыми аксиомами. Тогда буквы в них действительно будут переменными, но тогда придется наряду с правилом МР ввести правило замены, или правило подстановки, позволяющее каждую переменную согласованно заменить произвольной формулой. Это сильно удлиняло бы запись выводов и пользоваться схемами удобнее.

Вот как будет тогда выглядеть вывод самой первой тавтологии, которую мы доказали:

$\vdash A \to A$

1. $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ - аксиома (2), т. е. теперь уже не схема, а формула с переменными x, y, z;

2. $(x \to ((x \to x) \to z)) \to ((x \to (x \to x)) \to (x \to z))$ - подстановка (замена) $y := x \to x$ в формуле шага (1);

3. $(x \to ((x \to x) \to x)) \to ((x \to (x \to x)) \to (x \to x))$ - подстановка (замена) $z := x$ в формуле шага (2);

4. $x \to (y \to x)$ - аксиома (1);

5. $x \to ((x \to x) \to x)$- подстановка $y := x \to x$ в формуле шага (4);

6. $x \to (x \to x)$- подстановка $y := x$ в формуле шага (4);

7. $(x \to (x \to x)) \to (x \to x)$- МР, (3) и (5);

8. $x \to x$ - МР, (6) и (7);

9. $A \to A$- подстановка $x := A$в формуле шага (8), где A- произвольная формула.

Это напоминает процесс выполнения некоторой программы, где производится последовательность присваиваний. Но процесс недетерминированный. На одном шаге можно заменять несколько переменных (шаги 2 и 3 выше можно объединить).

В сущности, буквы в схеме любой формулы (не только аксиомы) можно рассматривать как переменные типа «формула», но это будут не логические переменные, а переменные метатеории. В итоге же, значением этой «метапеременной» будет либо истина, либо ложь[1], так что, называя буквы в схемах переменными, мы, конечно, допускаем вольность речи, но она простительна.

И все основано на том простом соображении, что если булева функция $f(x_1,...,x_n)\equiv 1$ (тождественно истинна, тавтология), то любая суперпозиция $f(g_1,...,g_n)\equiv 1$, тоже является тавтологией.

Некоторые дополнительные задачи

1) Доказать эквивалентность
   $\neg y \to (\neg x \vee \neg(y \to z)) \equiv \neg x \vee y$

   Слева направо:

1. $\neg y \to (\neg x \vee \neg(y \to z)) = \neg y \to (\neg\neg x \to \neg(y \to z))$ - гипотеза
2. $\neg\neg x$ - гипотеза (с учетом того, что $\neg x \vee y = \neg\neg x \to y$)
3. $\neg y \to \neg(y \to z)$ - R2, (1) и (2)
4. $(y \to z) \to y$ - R6, (3)
5. $\neg y \to (y \to z)$ - секвенция (5)
6. $\neg y \to y$ - R1, (5) и (4)
7. $(\neg y \to y) \to y$ - теорема (из эквивалентности $A \vee A = \neg A \to A \equiv A$)
8. y - MP, (6) и (7)

Итак, доказана секвенция $\neg y \to (\neg x \vee \neg(y \to z)), \neg\neg x \vdash y$, откуда по теореме дедукции следует выводимость правой части из левой.

Напишем вывод левой части из правой:

1. $\neg x \vee y = \neg\neg x \to y$ - гипотеза
2. $\neg y$ - гипотеза
3. $\neg\neg x$ - гипотеза
4. y - MP, (1) и (3)
5. $\neg(y \to z)$ - R5, (2) и (4)

Итак, $\neg\neg x \to y, \neg y, \neg\neg x \vdash \neg(y \to z)$, откуда, дважды применив теорему дедукции, получим, что левая часть выводима из правой.

Эквивалентность доказана.

2) Доказать эквивалентность:

[1] Точнее, значением буквы как переменной типа «формула» будет некоторая формула, а значением этой последней будет либо истина (1), либо ложь (0). Двухступенчатый процесс оценки формулы: сначала из схемы получаем формулу, а потом вычисляем значение этой формулы.

$\neg(\neg x \to y) \to (x \& (y \vee z)) \equiv x \vee y$

1. $\neg(\neg x \to y) \to (x \& (y \vee z))$ - гипотеза
2. $\neg(\neg x \to y) \to \neg(x \to \neg(y \vee z))$ - определение конъюнкции, (1)
3. $(x \to \neg(y \vee z)) \to (\neg x \to y)$ - R6, (2)
4. $\neg x \to (x \to \neg(y \vee z))$ - секвенция (5)
5. $\neg x \to (\neg x \to y)$ - R1, (4) и (3)
6. $x \to (\neg x \to y)$ - секвенция (5)
7. $\neg x \to y$ - R9, (5) и (6)

Выводимость правой части из левой доказана.

Обратно:

1. $\neg x \to y$ - гипотеза
2. $(\neg x \to y) \to (\neg(\neg x \to y) \to (x \& (y \vee z)))$ - секвенция (5)
3. $\neg(\neg x \to y) \to (x \& (y \vee z))$ - MP, (1) и (2)

Доказано.