Предваренная нормальная форма

Говорят, что формула ИП1 задана в предваренной нормальной форме (ПНФ), если она имеет вид:

$$(Q_1x_1)(Q_2x_2)...(Q_nx_n)P(x_1, x_2, ..., x_n, y, z, ...),$$

где $(\forall i = 1,...,n)(Q_i \in \{\forall, \exists\})$, а формула P, называемая матрицей, не содержит кванторов. Заметим, что помимо связанных вхождений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ матрица может содержать и некоторые свободные переменные. Цепочка кванторов перед матрицей называется кванторной приставкой.

Можно доказать, что любая формула может быть преобразована к эквивалентной ПНФ.

Основные правила преобразования:

1) Тождества булевой алгебры
2) $(\forall x)F(x) \wedge G \equiv (\forall x)(F(x) \wedge G)$
3) $(\forall x)F(x) \vee G \equiv (\forall x)(F(x) \vee G)$

   при условии, что x не входит свободно в G.
4) То же для квантора существования.
5) $\neg(\forall x)F(x) \equiv (\exists x)\neg F(x)$
6) $\neg(\exists x)F(x) \equiv (\forall x)\neg F(x)$
7) $(\forall x)F(x) \wedge (\forall x)G(x) \equiv (\forall x)(F(x) \wedge G(x))$
8) $(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x) \equiv (\exists x)(F(x) \vee G(x))$
9) $(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x) \equiv (\forall x)(\forall y)(F(x) \vee G(y))$, где y не входит в F

   (необходимо переименование связанной переменной во второй формуле слева!)
10) $(\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x) \equiv (\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge G(y))$, где y не входит в F.

Правила (7) – (10) могут быть обобщены:

11) $(Q_1x)F(x) \vee (Q_2x)G(x) \equiv (Q_1x)(Q_2y)(F(x) \vee G(y))$
12) $(Q_1x)F(x) \wedge (Q_2x)G(x) \equiv (Q_1x)(Q_2y)(F(x) \wedge G(y))$,

    где Q_1 и Q_2 независимо в (11) и (12) пробегают множество кванторов.

Необходимость переименования связанной переменной в (9) и (10) иллюстрируется такими простыми контрпримерами.
Пусть F(x) = “x – четно”, G(x) – “x – нечетно”. Тогда формула
$(\forall x)(F(x) \vee G(x))$ истинна в целочисленной интерпретации, а формула
$(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x)$ ложна.

В этом же случае формула $(\exists x)F(x) \wedge (\exists x)G(x)$ истинна, а формула $(\exists x)(F(x) \wedge G(x))$ ложна.

Но можно доказать

$(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x) \vdash (\forall x)(F(x) \vee G(x))$.

Действительно:

1. $(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x) = \neg(\forall x)F(x) \to (\forall x)G(x)$ - гипотеза
2. $\neg F(x) \to \neg(\forall x)F(x)$ - теорема
3. $\neg F(x) \to (\forall x)G(x)$ - R1, (2) и (1)
4. $(\forall x)G(x) \to G(x)$ - схема (4)
5. $\neg F(x) \to G(x) = F(x) \vee G(x)$ - R1, (3) и (4)
6. $(\forall x)(F(x) \vee G(x))$ - Gen,, (5)

Теорема дедукции применима, поскольку гипотеза не содержит свободных вхождений переменной x.

В то же время можно доказать, что формула

$((\forall x)F(x) \to (\forall x)G(x)) \to (\forall x)(F(x) \to G(x))$

не является логически общезначимой.

Действительно, если (в целочисленной интерпретации) F(x) = “x четно”, а G(x)=”x нечетно”, то посылка истинна (ложь влечет ложь), а заключение ложно.

Все приведенные выше эквивалентности могут быть стандартно доказаны. Докажем, например, (3):-

1. $(\forall x)F(x) \vee G = \neg(\forall x)F(x) \to G$ - гипотеза
2. $\neg G \to \neg\neg(\forall x)F(x)$ - R7, (1)
3. $\neg\neg(\forall x)F(x) \to (\forall x)F(x)$ - секвенция (3)
4. $\neg G \to (\forall x)F(x)$ - R1, (2) и (3)
5. $(\forall x)F(x) \to F(x)$ - схема (4)
6. $\neg G \to F(x)$ - R1, (4) и (5)
7. $F(x) \vee G$ - коммутативность дизъюнкции
8. $(\forall x)(F(x) \vee G)$ - Gen, (7).

Обратно:

1. $(\forall x)(F(x) \vee G)$ - гипотеза
2. $(\forall x)(G \vee F(x)) = (\forall x)(\neg G \to F(x))$ - коммутативность дизъюнкции
3. $(\forall x)(\neg G \to F(x)) \to (\neg G \to (\forall x)F(x))$ - схема (5); корректно, так как x не входит свободно в G.
4. $\neg G \to (\forall x)F(x) = G \vee (\forall x)F(x)$ - MP, (2) и (3)
5. $(\forall x)F(x) \vee G$ - коммутативность дизъюнкции.

Доказательство эквивалентности

$(\exists x)P(x) \vee Q(x) \equiv (\exists x)(P(x) \vee Q(x))$

при условии, что x не входит свободно в Q.

С использованием правила выбора:

1. $(\exists x)P(x) \vee Q$ – гипотеза

2. $P(a) \vee Q$ – правило C и свойства дизъюнкции: $(\exists x)P(x) \vdash P(a)$ и

$(\exists x)(P(x)) \vee Q \vdash P(a) \vee Q$

3. $(\exists x)(P(x) \vee Q)$ – правило E4, (2)

Обратно:

1. $(\exists x)(P(x) \vee Q)$ - гипотеза

2. $P(a) \vee Q$ - правило C, (1)

3. $(\exists x)(P(x)) \vee Q$ - правило E4 и свойства дизъюнкции: $P(a) \vdash (\exists x)P(x)$ и $P(a) \vee Q \vdash (\exists x)(P(x)) \vee Q$

Без использования правила выбора:

При выводе слева направо используем контрапозицию, то есть доказываем

$\neg(\exists x)(P(x) \vee Q) \vdash \neg((\exists x)P(x) \vee Q)$

1. $\neg(\exists x)(P(x) \vee Q) = (\forall x)\neg(P(x) \vee Q)$ - гипотеза

2. $\neg(P(x) \vee Q)$ - A4, (1)

3. $\neg P(x) \& \neg Q$ - закон де Моргана, (2)

4. $\neg P(x), \neg Q$ - свойства конъюнкции, (3)

5. $(\forall x)\neg P(x) = \neg(\exists x)P(x)$ - Gen, (4)

6. $\neg(\exists x)P(x) \& \neg Q$ - свойства конъюнкции, (4) и (5)

7. $\neg((\exists x)P(x) \vee Q)$ - закон де Моргана, (6)

В обратную сторону

1. $\neg((\exists x)P(x) \vee Q)$ - гипотеза

2. $\neg(\exists x)P(x)\,\&\,\neg Q$ - закон де Моргана, (1)

3. $\neg(\exists x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)$ - свойства конъюнкции, (2)

4. $\neg Q$ - свойства конъюнкции, (2)

5. $\neg P(x)$ - A4, (3)

6. $\neg P(x)\,\&\,\neg Q$ - - свойства конъюнкции, (4) и (5)

7. $\neg(P(x) \vee Q)$ - закон де Моргана, (6)

8. $(\forall x)\neg(P(x) \vee Q) = \neg(\exists x)(P(x) \vee Q)$ - Gen, (7)

Заметим, что требование отсутствия свободных вхождений x в Q существенно, так как иначе была бы неприменима теорема дедукции.

Докажем (7) и (8).

Доказательство (7).

1. $(\forall x)F(x) \wedge (\forall x)G(x)$ - гипотеза
2. $(\forall x)F(x), (\forall x)G(x)$ - свойства конъюнкции, (1)
3. $F(x), G(x)$ - правило (A4)
4. $F(x) \wedge G(x)$ - свойства конъюнкции
5. $(\forall x)(F(x) \wedge G(x))$ - Gen, (4)

Обратно:

1. $(\forall x)(F(x) \wedge G(x))$ - гипотеза
2. $F(x) \wedge G(x)$ - правило (A4)
3. $F(x), G(x)$ - свойства конъюнкции
4. $(\forall x)F(x), (\forall x)G(x)$ - два раза Gen
5. $(\forall x)F(x) \wedge (\forall x)G(x)$ - свойства конъюнкции

Доказательство (8).

1. $(\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x) = \neg(\forall x)\neg(F(x) \vee \neg(\forall x)\neg G(x)$ - гипотеза
2. $\neg((\forall x)\neg(F(x) \wedge (\forall x)\neg G(x))$ -закон де Моргана, (1)
3. $\neg(\forall x)(\neg F(x) \wedge \neg G(x))$ - согласно (7)
4. $\neg(\forall x)(\neg(F(x) \vee G(x)))$ - закон де Моргана

5. $(\exists x)(F(x) \vee G(x))$ - по определению квантора существования.

Доказательство обратной выводимости является точно инверсией только написанного доказательства .

Правило (9) может быть доказано так:

1. $(\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x) \equiv (\forall x)F(x) \vee (\forall y)G(y)$ - переименовываем связанную переменную во втором члене дизъюнкции
2. $(\forall x)(F(x) \vee (\forall y)G(y))$ - согласно правилу (3) (x вообще не входит в G).
3. $(\forall x)(\forall y)(F(x) \vee G(y))$ - согласно (3), так как y не входит в F.

Аналогично для правила (10) и всех обобщений.

Замечание. Связанную переменную всегда можно переименовать. Точнее, имеют место следующие эквивалентности:

$(\forall x)F(x) \equiv (\forall y)F(y)$ и $(\exists x)F(x) \equiv (\exists y)F(y)$ при условии, что *y* не входит в $F(x)$.

(Или, допуская, что *y* не входит в F(x) *свободно*, необходимо потребовать, чтобы терм *y* был свободен для переменной *x* в формуле F(x).)

Это легко доказать.

Примеры. 1) $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(y)), y \notin FV(P)$

$$(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(y)) \equiv (\forall x)(\neg P(x) \vee (\exists y)Q(y)) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\exists y)(\neg P(x) \vee Q(y)) \equiv (\forall x)(\exists y)(P(x) \to Q(y)).$$

2)
$(\forall x)(P(x) \to (\forall y)(Q(x,y) \to \neg(\forall z)R(y,z))), y, z \notin FV(P), z \notin FV(Q)$

$$(\forall x)(P(x) \to (\forall y)(Q(x,y) \to \neg(\forall z)R(y,z))) \equiv$$
$$(\forall x)(\neg P(x) \vee (\forall y)(\neg Q(x,y) \vee \neg(\forall z)R(y,z))) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\neg P(x) \vee (\forall y)(\neg Q(x,y) \vee (\exists z)\neg R(y,z))) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\neg P(x) \vee (\forall y)(\exists z)(\neg Q(x,y) \vee \neg R(y,z))) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\forall y)(\exists z)(\neg P(x) \vee (\neg Q(x,y) \vee \neg R(y,z))) \equiv$$
$$\equiv (\forall x)(\forall y)(\exists z)(P(x) \to (Q(x,y) \to \neg R(y,z)))$$

3)

$$(\forall x)((\exists y)P(x,y,z)\to(\exists z)Q(x,z))\equiv$$
$$\equiv(\forall x)((\exists y)P(x,y,z)\to(\exists u)Q(x,u))\equiv$$
$$\equiv(\forall x)(\neg(\exists y)P(x,y,z)\vee(\exists u)Q(x,u))\equiv$$
$$\equiv(\forall x)((\forall y)\neg P(x,y,z)\vee(\exists u)Q(x,u))\equiv$$
$$\equiv(\forall x)(\forall y)(\exists u)(P(x,y,z)\to Q(x,u))$$

В итоге z остается свободной переменной во всей формуле. Предполагается, что y не входит свободно в Q.

Сколемовские формы:

1) $(\forall x)(\neg P(x)\vee Q(f(x)))\equiv(\forall x)(\exists y)(P(x)\to Q(f(x)))$

2) $(\forall x)(\forall y)(P(x)\to(Q(x,y)\to\neg R(y,f(x,y))))$

3) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y,z)\to Q(x,f(x,y)))$

Еще один пример приведения к сколемовской форме: для исходной ПНФ

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\forall u)(\exists t)F(x,y,z,u,t)$$

получим

$$(\forall x)(\forall z)(\forall u)F(x,f(x),z,u,g(x,z,u))$$

Переход к сколемовской форме, состоящий в устранении из приставки всех кванторов существования, производится следующим образом.

Если приставка начинается квантором существования $(\exists x)$, то всюду в матрице переменную x следует заменить некоторой предметной константой a. Эта константа абстрактна, как и при применении правила выбора.

Если в приставке квантор $(\exists x)$ стоит где-то посередине, то следует отметить ***все*** *стоящие перед ним кванторы общности* $(\forall u_1),(\forall u_2),\dots,(\forall u_m)$ и в приставке все вхождения переменной x заменить термом $f(u_1,u_2,\dots,u_m)$, где f - некоторая функция (точнее, функциональный символ), называемая функцией Сколема, или сколемовской функцией. Сколемовская стандартная форма не эквивалентна исходной ПНФ, но можно доказать, что если она невыполнима, то невыполнима и исходная ПНФ.

Дополнение

Полезно иметь в виду следующие эквивалентности:

$$(Q_1x)(P(x)\to(Q_2y)Q(y))\equiv(Q_1x)(Q_2y)(P(x)\to Q(y))$$

для всех возможных комбинаций кванторов Q_1 и Q_2 при условии, что **формула *P* не содержит свободных вхождений переменной *y***.

Это легко доказать, используя приведенные выше правила, но можно доказать и непосредственно.

1) $(\forall x)(P(x) \to (\forall y)Q(y)) \equiv (\forall x)(\forall y)(P(x) \to Q(y))$

Слева направо:

1. $(\forall x)(P(x) \to (\forall y)Q(y))$ - гипотеза
2. $P(x) \to (\forall y)Q(y)$ - A4, (1)
3. $(\forall y)Q(y) \to Q(y)$ - схема (4)y
4. $P(x) \to Q(y)$ - R1, (2) и (3)
5. $(\forall y)(P(x) \to Q(y))$ - Gen, (4) (по условию здесь не связывается свободная переменная в гипотезе)
6. $(\forall x)(\forall y)(P(x) \to Q(y))$

Теорема дедукции применима в силу отсутствия свободных вхождений переменных x и y в гипотезе.

Справа налево:

1. $(\forall x)(\forall y)(P(x) \to Q(y))$ - гипотеза
2. $(\forall y)(P(x) \to Q(y))$ - A4, (1)
3. $(\forall y)(P(x) \to Q(y)) \to (P(x) \to (\forall y)Q(y))$ - схема (5); корректно, так как $y \notin FV(P)$
4. $P(x) \to (\forall y)Q(y)$ - MP, (2) и (3)
5. $(\forall x)(P(x) \to (\forall y)Q(y))$- Gen, (4)

Теорема дедукции применима (как и всюду далее).

Эквивалентность доказана.

2) $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(y)) \equiv (\forall x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))$

Слева направо:

1. $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(y))$ - гипотеза
2. $P(x) \to (\exists y)Q(y)$ - A4, (1)
3. $(\exists y)Q(y) \to Q(a)$- теорема (из правила выбора C)
4. $P(x) \to Q(a)$- R1, (2) и (3)
5. $(\exists y)(P(x) \to Q(y))$ - E4, (4)
6. $(\forall x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))$ - Gen, (5)

Заметим, что нигде не применено правило обобщения к формуле, содержащей константу, введенную по правилу выбора.

Справа налево:

1. $(\forall x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))$ - гипотеза
2. $(\exists y)(P(x) \to Q(y))$ - A4, (1)
3. $P(x) \to Q(a)$ - правило C, (2)

4. $Q(a) \to (\exists y)Q(y)$ - теорема (из правила Е4)
5. $P(x) \to (\exists y)Q(y)$ - R1, (3) и (4)
6. $(\forall x)(P(x) \to (\exists y)Q(y))$ - Gen, (5)

3) $(\exists x)(P(x) \to (\forall y)Q(y)) \equiv (\exists x)(\forall y)(P(x) \to Q(y))$

Используем определение квантора существования:

$$\neg(\forall x)\neg(P(x) \to (\forall y)Q(y)) \equiv \neg(\forall x)\neg(\forall y)(P(x) \to Q(y))$$

Снимаем внешние отрицания и доказываем эквивалентность

$$(\forall x)\neg(P(x) \to (\forall y)Q(y)) \equiv (\forall x)\neg(\forall y)(P(x) \to Q(y))$$

Слева направо:

1. $(\forall x)\neg(P(x) \to (\forall y)Q(y))$ - гипотеза
2. $\neg(P(x) \to (\forall y)Q(y))$ - А4, (1)
3. $P(x)\,\&\,\neg(\forall y)Q(y)$ - по правилу отрицания импликации, (2)
4. $P(x), \neg(\forall y)Q(y) \equiv (\exists y)\neg Q(y)$ - свойства конъюнкции, (3)
5. $\neg Q(a)$ - правило С, (4)
6. $\neg(P(x) \to Q(a))$ - R8, (4) и (5)
7. $(\exists y)\neg(P(x) \to Q(y)) \equiv \neg(\forall y)(P(x) \to Q(y))$ - Е4, (6)
8. $(\forall x)\neg(\forall y)(P(x) \to Q(y))$ - Gen, (7)

Справа налево:

1. $(\forall x)\neg(\forall y)(P(x) \to Q(y))$ - гипотеза
2. $\neg(\forall y)(P(x) \to Q(y)) \equiv (\exists y)\neg(P(x) \to Q(y))$ - А4, (1)
3. $\neg(P(x) \to Q(a))$ - правило С, (2)
4. $P(x)\,\&\,\neg Q(a)$ - правило отрицания импликации, (3)
5. $P(x), \neg Q(a)$ - свойства конъюнкции, (4)
6. $(\exists y)\neg Q(y) \equiv \neg(\forall y)Q(y)$ -Е4, (5)
7. $\neg(P(x) \to (\forall y)Q(y))$ - R8, (5) и (6)
8. $(\forall x)\neg(P(x) \to (\forall y)Q(y))$ - Gen, (7)

4) $(\exists x)(P(x) \to (\exists y)Q(y)) \equiv (\exists x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))$

Слева направо:

1. $(\exists x)(P(x) \to (\exists y)Q(y))$ - гипотеза
2. $P(a) \to (\exists y)Q(y))$ - С, (1)
3. $(\exists y)Q(y) \to Q(b)$ - теорема (из правила выбора)

4. $P(a) \to Q(b)$ -R1, (2) и (3)
5. $(\exists y)(P(a) \to Q(y))$ - E4, (4)
6. $(\exists x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))$ - E4, (5)

Справа налево:

1. $(\exists x)(\exists y)(P(x) \to Q(y))$ - гипотеза
2. $P(a) \to Q(b)$ - 2 раза правило C, (1)
3. $Q(b) \to (\exists y)Q(y)$ - теорема (правило E4)
4. $P(a) \to (\exists y)Q(y)$ - R1, (2) и (3)
5. $(\exists x)(P(x) \to (\exists y)Q(y))$ - E4, (4)