Минимизация ДНФ

Параметры сложности ДНФ

Основной – **число литералов**. ДНФ, представляющая функцию, называется *минимальной*, если она содержит наименьшее число литералов среди всех ДНФ, представляющих данную функцию.

Длина – число элементарных конъюнкций. ДНФ, представляющая функцию, называется *кратчайшей*, если ее длина - наименьшая среди всех ДНФ, представляющих данную функцию.

Число отрицаний. Побочный параметр. Часто стараются получить в ДНФ наименьшее число отрицаний для экономии числа инверторов в комбинационной схеме.

Алгоритм построения минимальной ДНФ, известный в литературе как алгоритм Квайна -- Мак-Клоски, разделяется на следующие этапы:

1) Построение сокращенной ДНФ
2) Определение ядра и ДНФ Квайна
3) Перечисление тупиковых ДНФ
4) Выбор среди тупиковых ДНФ кратчайших, а из них – минимальных по числу литералов (и, возможно, отрицаний).

Импликанта

Булева функция $g(x_1,...,x_n)$ называется *импликантой* булевой функции $f(x_1,...,x_n)$, если для любого набора $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_n)$ значений переменных имеет место $g(\tilde{\alpha})=1 \Rightarrow f(\tilde{\alpha})=1$.

В любой ДНФ любая ее элементарная конъюнкция будет импликантой представленной в виде ДНФ функции.

Далее термин «импликанта» понимается именно в этом смысле: элементарная конъюнкция в составе ДНФ.

Импликанта называется *простой*, если из нее нельзя удалить ни один литерал.

Получение сокращенной ДНФ

Сокращенная ДНФ – это ДНФ, состоящая только из простых импликант. Ее можно получить путем итерационного применения правила простой склейки:

$$x_i K \vee \bar{x}_i K = K .$$

Возможно также в этом процессе применение тождества поглощения

$$K \vee KL = K .$$

Например, применение этого правила к СДНФ для мажоритарной функции даст следующий результат:

x_1x_3

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$$

x_2x_3 x_1x_2

К полученной ДНФ правило склейки неприменимо, и она оказывается сокращенной ДНФ.

Заметим, что длина сокращенной ДНФ меньше длины исходной СДНФ на единицу, а число литералов сократилось вдвое.

Заметим также, что в исходной СДНФ ни одна импликанта не является простой.

Еще один пример.

$$g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2\overline{x}_3$$

На первой итерации можно провести склейки следующих пар элементарных конъюнкций:

1-я и 2-я: $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 = \overline{x}_1\overline{x}_3$;

1-я и 3-я: $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 = \overline{x}_2\overline{x}_3$;

2-я и 5-я: $\overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 \vee x_1 x_2\overline{x}_3 = x_2\overline{x}_3$;

3-я и 5-я: $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1 x_2\overline{x}_3 = x_1\overline{x}_3$;

4-я и 5-я: $x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2\overline{x}_3 = x_1 x_2$.

Получим такую ДНФ:

$$\overline{x}_1\overline{x}_3 \vee_1 \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1 x_2$$

Здесь еще можно склеить 1-ю и 4-ю, а также 2-ю и 3-ю конъюнкции, что даст один и тот же литерал $\overline{x}_3$.

В итоге имеем сокращенную ДНФ:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_3 \vee x_1 x_2.$$

Для функций 3- и 4-х переменных легко получать сокращенную ДНФ на карте Карно, выделяя на ней максимальные по площади (числу клеток) и по включению (то есть не содержащиеся один в другом) прямоугольники с «единицами». Площадь прямоугольника должна быть обязательно степенью двойки. Каждый такой прямоугольник соответствует некоторой грани булева куба, на которой исходная функция принимает единичное значение (см. Учебник и файл «Пример на минимизацию ДНФ»).

Покрытие, ядро, ДНФ Квайна

Говорят, что импликанта (элементарная конъюнкция) K *покрывает* импликанту (элементарную конъюнкцию) L, если $L = KK'$ для некоторой элементарной конъюнкции K'. Понятно при этом, что $K \vee L = K \vee KK' = K$.

Обозначение: $K \succ L$.

Например, $\overline{x}_3 \succ x_1\overline{x}_3 \succ x_1 x_2\overline{x}_3$.

На карте Карно прямоугольник, соответствующий покрываемой импликанте, поглощается прямоугольником, соответствующим покрывающей. Каждая простая импликанта покрывает некоторую элементарную конъюнкцию исходной СДНФ.

Простая импликанта называется *ядровой*, если она покрывает такую элементарную конъюнкцию исходной СДНФ, которая не покрывается больше никакой другой простой импликантой.

На карте Карно прямоугольник, соответствующий ядровой импликанте, найти легко: если его удалить, откроется ничем не покрытая клетка с единицей

Множество всех ядровых импликант называется *ядром*. Ядро обязательно будет присутствовать в любой минимальной ДНФ, представляющей исходную функцию.

В сокращенной ДНФ может найтись избыточная импликанта. Это такая простая импликанта, что каждая покрываемая ею элементарная конъюнкция покрывается ядровой импликантой.

Удаляя избыточные импликанты из сокращенной ДНФ, получаем ДНФ Квайна.

Очень часто сокращенная ДНФ таких избыточных импликант не содержит и тогда она совпадает с ДНФ Квайна.

Если ядро покрывает все элементарные конъюнкции исходной СДНФ, то ДНФ, составленная из ядровых импликант, будет единственной кратчайшей и минимальной. Иначе надо перейти к перечислению тупиковых ДНФ.

Далее см. Учебник и файл «Пример на минимизацию ДНФ».