Метод резолюций в исчислении предикатов

Склейка

Если в дизъюнкте D есть две атомарные формулы с одним и тем же предикатным символом, $r(t_1,...,t_n)$ и $r(s_1,...,s_n)$, и если существует наиболее общий унификатор (НОУ) τ такой, что $r(t_1,...,t_n)\tau = r(s_1,...,s_n)\tau = r(\theta_1,...,\theta_n)$, то последняя формула называется результатом склейки двух исходных.

Резольвента

Рассмотрим построение резольвенты двух дизъюнктов.

Пусть

$$D_1 = D_1^{'} \vee p(t_1,...,t_n), D_2 = D_2^{'} \vee \neg p(s_1,...,s_n).$$

Обозначим $L_1 = p(t_1,...,t_n), L_2 = \neg p(s_1,...,s_n)$.

Если существует НОУ σ такой, что $L_1\sigma = p(\theta_1,...,\theta_n), L_2\sigma = \neg p(\theta_1,...,\theta_n)$, то резольвентой исходных дизъюнктов будет

$$D_1^{'}\sigma \vee D_2^{'}\sigma \ .$$

Предварительно внутри каждого из исходных дизъюнктов может быть проведена склейка. При этом предполагается, что эти дизъюнкты не имеют общих переменных.

Примеры

1) $D_1 = P(x) \vee Q(x), D_2 = \neg P(a) \vee R(x)$

Следует переименовать переменную, например, во втором дизъюнкте.

Перепишем:

$$D_1 = P(x) \vee Q(x), D_2 = \neg P(a) \vee R(y).$$

Легко найти НОУ: $\sigma = \{x := a\}$ (или $\sigma = \{a / x\}$).

Тогда $D_1\sigma = P(a) \vee Q(a), D_2\sigma = D_2 = \neg P(a) \vee R(y)$

Получаем резольвенту $Q(a) \vee R(y)$.

Требование, чтобы исходные дизъюнкты не имели общих переменных, вообще говоря, существенно.

Изменим второй дизъюнкт:

$$\tilde{D}_2 = \neg P(a) \vee R(y) \vee R(h(u,v)).$$

Тогда сначала нужно получить склейку $\tilde{D}'_2 = \neg P(a) \vee R(h(u,v))$, где использован унификатор $\tau = \{y := h(u,v)\}$, а потом – резольвенту:

$$Q(a) \vee R(h(u,v)).$$

Оставив во втором дизъюнкте переменную x, мы получили бы для этой переменной разные замены на терм, что недопустимо.

2) $D_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y)), D_2 = \neg P(f(g(a)) \vee Q(h(u,v))$

Выполняем склейку, полагая $x := f(y)$:

$$D'_1 = P(f(y)) \vee R(g(y)), D_2 = \neg P(f(g(a)) \vee Q(h(u,v)).$$

Строим резольвенту, используя унификатор $\sigma = \{y := g(a)\}$:

$$R(g(g(a))) \vee Q(h(u,v)).$$

Задача о крокодилах

1. Все крокодилы любят купаться
2. Некоторые крокодилы любят загорать
3. Только злые крокодилы не любят загорать.
4. Добрые крокодилы существуют.

   Доказать, что *существуют добрые крокодилы, которые любят купаться и загорать.*
   $(\exists x)(C(x) \,\&\, \neg A(x) \,\&\, B(x) \,\&\, S(x))$

   1. $(\forall x)(C(x) \to B(x))$
   2. $(\exists x)(C(x) \,\&\, S(x))$

3. $(\forall x)(C(x) \,\&\, \neg S(x)) \to A(x))$ (если крокодил не любит загорать, то он обязательно злой).

4. $(\exists x)(C(x) \,\&\, \neg A(x))$ (существуют добрые крокодилы).

Дизъюнкты:

1. $\neg C(x) \vee B(x)$

2. $C(a)$

3. $S(a)$

4. $\neg A(a)$

5. $\neg C(x) \vee S(x) \vee A(x)$

6. $\neg C(x) \vee \neg S(x) \vee \neg B(x) \vee A(x)$ // из отрицания заключения

Вывод:

7. $B(a)$ – (1) и (2), x :=a

8. $\neg C(a) \vee S(a)$ - (4) и (5), x:=a

9. $\neg C(a) \vee \neg S(a) \vee A(a)$ - (6) и (7), x:=a

10. $\neg C(a) \vee \neg S(a)$ - (4) и (9)

11. $\neg S(a)$ - (2) и (10)

12. $\square$ - (9) и (12)

Задача о таможенниках

1. Таможенные чиновники обыскивают каждого, кто въезжает в страну, кроме VIP.

2. Некоторые люди, способствовавшие провозу наркотиков, въезжали в страну и были обысканы исключительно людьми, также способствовавшими провозу наркотиков

3. Никто из VIP не способствовал провозу наркотиков.

Доказать, что

4. Некоторые из таможенников способствовали провозу наркотиков.

Решение

Введем предикаты:

$E(x)$ - “x въезжает в страну»,

$V(x)$ “x есть VIP”,

$S(x, y)$ -“ y обыскивает x”,

$C(x)$ - “x – таможенник»,

$P(x)$ - “x способствует провозу наркотиков».

Переводим на язык ИП1 посылки:

1. $(\forall x)(E(x) \& \neg V(x) \to (\exists y)(S(x, y) \& C(y)))$

2. $(\exists x)(P(x)\,\&\,E(x)\,\&\,(\forall y)(S(x,y)\rightarrow P(y)))$

3. $(\forall x)(P(x)\rightarrow\neg V(x))$

Отрицание заключения:

4. $\neg(\exists z)(P(z)\,\&\,C(z))=(\forall z)(\neg P(z)\vee\neg C(z))$

Покажем подробно построение ПНФ и сколемовской формы для первых двух формул:

1)

$$(\forall x)(E(x)\,\&\,\neg V(x)\rightarrow(\exists y)(S(x,y)\,\&\,C(y)))\equiv$$
$$\equiv(\forall x)(\neg E(x)\vee V(x)\vee(\exists y)(S(x,y)\,\&\,C(y)))\equiv$$
$$\equiv(\forall x)(\exists y)(\neg E(x)\vee V(x)\vee(S(x,y)\,\&\,C(y)))$$

Сколемовская форма:

$$(\forall x)(\neg E(x)\vee V(x)\vee(S(x,f(x))\,\&\,C(f(x))))$$

2)

$$(\exists x)(\forall y)(P(x)\,\&\,E(x)\,\&\,(S(x,y)\rightarrow P(y)))\equiv(\exists x)(\forall y)(P(x)\,\&\,E(x)\,\&\,(\neg S(x,y)\vee P(y)))$$

Сколемовская форма:

$$(\forall y)(P(a)\,\&\,E(a)\,\&\,(\neg S(a,y)\vee P(y))).$$

Исходное множество дизъюнктов:

1. $\neg E(x)\vee V(x)\vee S(x,f(x))$

2. $\neg E(x)\vee V(x)\vee C(f(x))$

3. $P(a)$

4. $E(a)$

5. $\neg S(a,y)\vee P(y)$

6. $\neg P(x)\vee\neg V(x)$

7. $\neg P(z)\vee\neg C(z)$

Резолютивный вывод:

8. $\neg V(a), x:=a$ - (3) и (6)

9. $\neg E(a)\vee C(f(a)), x:=a$ - (2) и (8)

10. $C(f(a))$ - (4) и (9)

11. $V(a) \vee S(a, f(a)), x := a$ - (1) и (4)

12. $S(a, f(a))$ - (8) и (11)

13. $P(f(a)), y := f(a)$ - (5) и (12)

14. $\neg C(f(a)), z := f(a)$ - (7) и (13)

15. □ - (10) и (14).

Заметим, что в содержательном доказательстве мы пришли бы к тому же противоречию: предположив, что обыскивающий некоего “a” не есть таможенник, мы получили бы, что он не может быть никем, кроме как таможенником. Иначе пришлось бы допустить, что въезжающего обыскивают два разных человека, что невозможно ввиду слова «исключительно» в условии задачи. То есть кто-то один обыскивает.

Еще одна задача о крокодилах

1. Всякий, кто читает газеты по пятницам, добр
2. Ни один крокодил не читает газет по пятницам
3. Некоторые крокодилы дружат с теми, кто читает газеты по пятницам.
4. Ни один злой крокодил не дружит с тем, кто добр.
5. Доказать, что существуют добрые крокодилы, дружащие с теми, кто читает газеты по пятницам.

Формализация:

$R(x)$ - x читает газеты по пятницам,

$K(x)$ - x добр,

$C(x)$ - x есть крокодил,

$F(x, y)$ - x дружит с y.

1. $(\forall x)(R(x) \to K(x))$
2. $(\forall x)(C(x) \to \neg R(x))$
3. $(\exists x)(C(x) \,\&\, (\exists y)(R(y) \,\&\, F(x, y)))$
4. $$(\forall x)(C(x) \,\&\, \neg K(x) \to \neg(\exists y)(K(y) \,\&\, F(x, y))) = \\ = (\forall x)(\neg C(x) \vee K(x) \vee (\forall y)(\neg K(y) \vee \neg F(x, y)))$$

Отрицание заключения:

$$\neg(\exists u)(C(u) \,\&\, K(u) \,\&\, (\exists v)(R(v) \,\&\, F(u,v))) =$$
$$= (\forall u)(\neg C(u) \vee \neg K(u) \vee \neg(\exists v)(R(v) \,\&\, F(u,v))) =$$
$$= (\forall u)(\neg C(u) \vee \neg K(u) \vee (\forall v)(\neg R(v) \vee \neg F(u,v))) =$$
$$= (\forall u)(\forall v)(\neg C(u) \vee \neg K(u) \vee \neg R(v) \vee \neg F(u,v))$$

Заметим, что два первых дизъюнктных члена можно внести под квантор по v, так как они не содержат этой переменной. Аналогично в пп. 3 и 4.

Строим исходное множество дизъюнктов:

1. $\neg R(x) \vee K(x)$
2. $\neg C(x) \vee \neg R(x))$
3. $C(a)$
4. $R(b)$
5. $F(a,b)$
6. $\neg C(x) \vee K(x) \vee \neg K(y) \vee \neg F(x,y)$
7. $\neg C(u) \vee \neg K(u) \vee \neg R(v) \vee \neg F(u,v)$

Вывод:

8. $\neg C(u) \vee \neg R(v) \vee \neg F(u,v) \vee \neg K(y) \vee \neg F(x,y)$ - (6) и (7); $x := u$
9. $\neg C(u) \vee \neg R(v) \vee \neg F(u,v) \vee \neg K(v)$ - склейка в (8): $x := u, y := v$
10. $\neg C(u) \vee \neg F(u,b) \vee \neg K(b)$ - (4) и (9); $v := b$
11. $\neg F(a,b) \vee \neg K(b)$ - (3) и (10);
12. $\neg K(b)$ - (5) и (11)
13. $K(b)$ - (1) и (4); $x := b$
14. $\square$ - (12) и (13).

Содержательное решение: полагая, что добрых крокодилов, которые дружат с теми, кто читает газеты по пятницам, не существует, мы будем вынуждены признать, поскольку всё же некоторые крокодилы дружат с читателями газет, что это злые крокодилы, что невозможно, так как они не дружат с добрыми, а читатели газет по пятницам добры согласно первому утверждению.

Замечание. Можно было бы и не разделять переменные при выводе дизъюнктов (6) и (7), так как это не приведет к конфликту присваиваний. Дизъюнкт (7) тогда запишется так:

7а. $\neg C(x) \vee \neg K(x) \vee \neg R(y) \vee \neg F(x,y)$

Резольвента (6) и (7а):

8а. $\neg C(x) \vee \neg R(y) \vee \neg K(y) \vee \neg F(x,y)$

Склейка бы не понадобилась, и мы получили далее:

9а. $\neg C(x) \vee \neg F(x,b) \vee \neg K(b); y := b$ - (4) и (8а)

10а. $\neg F(a,b) \vee \neg K(b); x := a$ - (3) и (9а)

11а. $\neg K(b)$ - (5) и (10а)

12а. $K(b)$ - (1) и (4); $x := b$

13а. $\square$ - (11а) и (12а).

Следует заметить, что конфликта присваиваний надо опасаться при выводе резольвенты после склейки.

Должники, кредиторы и ростовщики

1. Некоторые люди дружат со своими кредиторами
2. Никто не дружит с ростовщиками
3. Доказать, что ни один кредитор не является ростовщиком

Формализация:

$P(x)$ - x берет деньги в долг,

$D(x)$ - x дает деньги в долг,

$Q(x)$ - x - ростовщик,

$L(x,y)$ - x дружит с y.

1. $(\exists x)(P(x) \,\&\, (\forall y)(D(y) \to L(x,y))$

Предлагается продолжить самостоятельно.