Тервер Экзамен Теория.

1. Случайные события

① Определение пространства элементарных исходов, примеры. Понятие события (нестрогое) следствие события, невозможное и достоверное событие, примеры. Операции над событиями. Сформулировать классическое определение вероятности и доказать его следствия.

Опр.

Множество Ω всех исходов данного случайн. эксперимента называют пространством элементарных исходов.

Примеры

1) Бросают монету.

$\Omega = \{\text{Герб}, \text{Решка}\}$ - мн-во элемент. исходов. $|\Omega| = 2$

2) Происходит выстрел по плоской мишени. Наблюд. результат: пара (x, y) - координаты точки попадания пули. $\Omega = R^2$

Нестр. опр.

Событием будем называть произвольное подмножество множества элементарных исходов Ω.

~~Геометрическое определение вероятности~~

~~является обобщением клас~~

Опр.

Событие A наз. следствием события B, если из того, что произошло B, следует то, что произошло A, т.е. $B \subseteq A$.

Замеч.

Любое множество Ω содержит в себе два подмножества: $\varnothing$ и Ω. События, соответствующ. данным множествам, назыв. невозможным и достоверным соответственно.

Пример

Из урны, содержащей два красных и три синих шара, извлекают один шар.

Возм. события:

$A = \{$извлеч. шар явл. красным или синим$\}$ – явл. достоверным,

$B = \{$извлечён белый шар$\}$ – явл. невозможным

Операции над событиями.

События – мн-ва элементарных исходов. Следоват., над ними можно выпол. все операции над мн-вами. При этом вводится следующ. терминология:

1) $A \cup B = A + B$

2) $A \cap B = A \cdot B$

3) $A \setminus B$ называют разностью событий A и B

4) Дополнение A называют событием, противоположным A: $\bar{A} = \Omega \setminus A$

Классическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω – пространство исходов нек. случайного эксперимента ($|\Omega| = N < \infty$)
2) По условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальн. (все элементарные исходы равнозначны)
3) Существует событие $A \subseteq \Omega$, мощность $|A| \overset{\text{(обозначим)}}{=} N_A$

Тогда

Опр.

Вероятностью осуществления события A называв. число:

$$P\{A\} = \frac{N_A}{N}$$

Свойства вероятности (в соотв. с классич. опр)

1) $P(A) \geqslant 0$
2) $P(\Omega) = 1$
3) Если A, B – несовместные события, то $P(A+B) = P(A) + P(B)$

Доказательства

1) Т.к. $N_A \geqslant 0$, $N > 0$, то следует

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \geqslant 0$$

2) Принимаем во внимание, что

$N_\Omega = |\Omega| = N$, получается

$$P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

3) Т.к. Ω - конечно, $A, B \subseteq \Omega$, то

получается, что A, B конечны.

Существ. формула

$$|A + B| = |A| + |B| - |AB|$$

Т.к. A и B - несовместн., то $AB = \varnothing$,

из чего следует, что $N_{a+b} = N_a + N_b$

Таким образом,

$$P(A+B) = \frac{N_{a+b}}{N} = \frac{N_a + N_b}{N} = \frac{N_a}{N} + \frac{N_b}{N} = P(A) + P(B)$$

2. Определение пространства элементарн. исходов, примеры. Понятие события (нестрогое). Сформулировать геометрическое и статистическое определения вероятностей. Достоинства и недостатки этих определений.

Опр. Множество Ω всех исходов данного случайн. эксперимента называ. пространством элемент. исходов.

Примеры

1) Бросают монетку. $\Omega = \{$Герб, Решка$\}$, $|\Omega| = 2$.

2) Происходит выстрел по плоской мишени, наблюд. результат: пара (x, y) - координаты точки попадания пули. $\Omega = R^2$

рестр. опред.

Событием будем называть произвольное подмножество множества элементарн. исходов Ω.

Геометрическое определение вероятности

является обобщением классического определения на случай, когда $|\Omega| = \infty$

Пусть:

1) $\Omega \subseteq R^n$

2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ - некая мера

Если $n = 1$, то μ - это длина;

если $n = 2$, то μ - площадь;

если $n = 3$, то μ - объём.

Можно определ. меры и при больших n.

3) Возможность принадлежности некот. элемент. исхода случ. эксперимента событию $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере этого события и не зависит от формы события A и его располож. внутри Ω.

Тогда
Опр.
Вероятностью случайного события $A \subseteq \Omega$ называют число
$$P\{A\} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

Недостаток геометрического определения заключается в том, что оно не учитывает возможность того, что некоторые области внутри Ω окажутся более предпочтительными, чем другие.

Статистическое опред. вероятностей

Пусть:
1) Некот. случ. эксперимент произведён n раз
2) При этом наблюдаемое в этом эксперименте событие A произошло n_A раз.

Опр
Вероятностью осуществления события A называю эмпирический предел (т. е. найденный экспериментальным путём):
$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_a}{n}$$

Недостатки:

1) Никакой эксперимент не может быть произведён бесконечно много раз

2) С точки зрения соврем. математики статистическое определение является архаизмом, т.к. не даёт достаточно базы для дальнейшего построения теории.

---

③ Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать простейшие св-ва сигма-алгебры. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности.

Опр.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента назыв. пространством элементарных исходов.

Примеры

1) Бросают игральную кость:

$\Omega = \{"1", "2", "3", "4", "5", "6"\}$, $|\Omega| = 6$

2) Происходит выстрел по плоской мишени.

Наблюдаемый результат: пара (x, y) — координаты точки попадания пули. $\Omega = R^2$

Сигма-алгебра событий

Пусть:

1) Ω – пространство элементарных исходов, связанных с некот. случ. экспериментом
2) $\mathcal{B} \neq \varnothing$ – система (набор) подмнож. в множества Ω.

Опр.

$\mathcal{B}$ называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

1) Если $A \in \mathcal{B}$, то $\bar{A} \in \mathcal{B}$
2) Если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$, то

$$A_1 + \dots + A_n + \dots \in \mathcal{B}$$

Простейшие следствия из аксиом

1) $\Omega \in \mathcal{B}$
2) $\varnothing \in \mathcal{B}$
3) Если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{B}$, то

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$$

4) Если $A, B \in \mathcal{B}$, то $A \setminus B \in \mathcal{B}$.

Доказательства

1) а) $\mathcal{B} \neq \varnothing \Rightarrow \exists A \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{по 1}\\ \text{опр.}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}$

б) $A, \bar{A} \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{по 2}\\ \text{опр}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{A + \bar{A}}_{\Omega} \in \mathcal{B} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{B}$

2) $\Omega \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{по 1}\\ \text{опр.}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{\Omega} \in \mathcal{B} \Rightarrow \varnothing \in \mathcal{B}$

3) $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{по 1}\\ \text{опр.}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{A_1}, \ldots, \overline{A_n}, \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{по 2}\\ \text{опр.}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n} + \ldots \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{по 1}\\ \text{опр.}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{\overline{A_1} + \ldots + \overline{A_n} + \ldots} \in \mathcal{B} \Rightarrow A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots \in \mathcal{B}$

4) $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{по 1}\\ \text{опр.}\end{matrix}\right\} \Rightarrow A, \overline{B} \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{по 3}\\ \text{св-ву}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{A \cdot \overline{B}}_{A \setminus B} \in \mathcal{B} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{B}$

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть

1) Ω – пространство элементарных исходов некот. случайного эксперимента

2) $\mathcal{B}$ – сигма-алгебра, заданная на Ω

Опр.

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция

$$P: \mathcal{B} \to R$$

обладающая следующими свойствами:

1) $\forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow P(A) \geq 0$ (аксиома неотриц.)

2) $P(\Omega)=1$ (аксиома нормированности)

3) Если $A_1, \dots, A_n, \dots$ — попарно несовместные события, то

$$P(A_1+\dots+A_n+\dots)=P(A_1)+\dots+P(A_n)+\dots$$

(расширенная аксиома сложения)

---

(4) Определение пространства элементарных исходов, примеры. Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать аксиоматическое определение вероятности и доказать простейшие свойства вероятности.

Опр. Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента назыв. пространством элементарных исходов.

Примеры

1) Бросают монетку.

$\Omega = \{\text{Герб}, \text{Решка}\}$, $|\Omega| = 2$

2) Происходит выстрел по плоской мишени. Наблюдаемый результат: пара (x, y) — координаты точки попадания пули. $\Omega = R^2$.

Сигма-алгебра событий

Пусть:

1) Ω - пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом;

2) $\mathcal{B} \neq \emptyset$ - система (набор) подмножеств в множестве Ω.

Тогда

Опр.

$\mathcal{B}$ назыв. сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

1) Если $A \in \mathcal{B}$, то $\bar{A} \in \mathcal{B}$;

2) Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{B}$, то

$$A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \mathcal{B}$$

Аксиоматическое определение вероятности

Пусть:

1) Ω - пространство элементарных исходов некот. случ. эксперимента

2) $\mathcal{B}$ - сигма-алгебра, заданная на Ω

Тогда

Опр.

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция

$$P: \mathcal{B} \to R$$

обладающая следующими св-вами:

1) $\forall A \in \mathcal{B} \Rightarrow P(A) \geq 0$

(аксиома неотрицательности)

2) $P(\Omega) = 1$

(аксиома нормированности)

3) Если $A_1, \dots, A_n, \dots$ – попарно несовместные события, то

$$P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$$

(расширенная аксиома сложения)

<u>Свойства вероятностей (из аксиом. опр.)</u>

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

2) $P(\varnothing) = 0$

3) Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$

4) $\forall A \in \mathcal{B}: \ 0 \leq P(A) \leq 1$

5) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $A, B \in \mathcal{B}$

6) Для любого конечного набора событий $A_1, \dots, A_n$ – справедливо

$$P(A_1 + \dots + A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot A_{i_3}) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$$

Доказательство

1) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{B}$

$A + \bar{A} = \Omega$

$$\left.\begin{aligned} &P(A+\bar{A}) = P(\Omega) = \left\{\begin{matrix}\text{по 2}\\ \text{аксиоме}\end{matrix}\right\} = 1 \\ &P(A+\bar{A}) = \left\{\begin{matrix}\text{по 3}\\ \text{аксиоме}\end{matrix}\right\} = P(A)+P(\bar{A}) \end{aligned}\right\} P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

2) $\varnothing = \bar{\Omega} \Rightarrow P(\varnothing) = P(\bar{\Omega}) = \left\{\begin{matrix}\text{по 1}\\ \text{св-ву}\end{matrix}\right\} = 1 - \overset{\overset{\text{(аксиома 2)}}{1}}{P(\Omega)} = 1 - 1 = 0$

3) 

$B = A + B \setminus A$

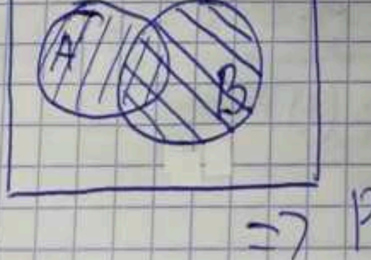
$P(B) = P(\underbrace{A + (B \setminus A)}_{\text{несовм.}}) = \left\{\begin{matrix}\text{по 3}\\ \text{аксиоме}\end{matrix}\right\} =$

$= P(A) + P(B \setminus A)$, т.е. $P(A) \leq P(B)$

4) а) $P(A) \geq 0$ (аксиома 1)

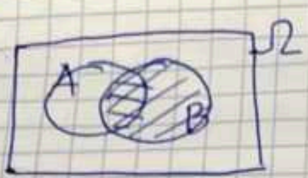
б) Покажем, что $P(A) \leq 1$:

$A \subseteq \Omega \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{по 3}\\ \text{св-ву}\end{matrix}\right\} \Rightarrow P(A) \leq \overset{=1}{P(\Omega)} \Rightarrow P(A) \leq 1$

5) а) 

$A + B = \underbrace{A + (B \setminus A)}_{\text{несовм.}} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{по 3}\\ \text{акс.}\end{matrix}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A+B) = P(A) + P(B \setminus A)$ (*)

б) 

$B=(B\setminus A)+(AB) \Rightarrow$

несовместн.

$P(B)=P(B\setminus A)+P(AB) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B\setminus A)=P(B)-P(AB)$,
подставим в (*)

в) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

6) Обобщение 5 $\Rightarrow$ без доказательства

5 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что при фиксированном событии B условная вероятность $P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Пусть:

1) A и B – два события, связанные с одним случайным экспериментом

2) Дополнительно известно, что в результате эксперимента произошло событие B.

Опр.

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B, называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

Теорема

Пусть:

1) Зафиксировано событие B, $P(B) \neq 0$

2) $P(A|B)$ рассматривается как функция события A.

Тогда

$P(A|B)$ обладает всеми свойствами безусловной вероятности.

Док-во

Достаточно доказать, что условная вероятность $P(A|B)$ удовлетворяет трём аксиомам безусловной вероятности, тогда св-ва будут также верны, т.к. следуют из аксиом.

1) Аксиома неотрицания:

$$P(A|B) = \frac{\overset{\geq 0}{P(AB)}}{\underset{> 0}{P(B)}} \Rightarrow P(A|B) \geq 0$$

2) Аксиома нормированности

$$P(\Omega \mid B) = \left\{ \begin{array}{l} \text{опр. усл.} \\ \text{вероятн.} \end{array} \right\} = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

3) Рассмотрим аксиому сложения

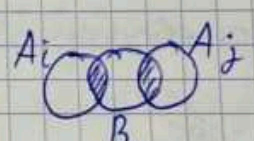
Пусть $A_1, A_2, \dots$ — последоват. попарно независим. событий

Рассмотрим:

$$P(A_1 + A_2 + \dots \mid B) = \frac{P((A_1 + A_2 + \dots)B)}{P(B)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{счётная} \\ \text{дистрибутивность} \\ \text{пересечения относит.} \\ \text{объединения} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{P(A_1B + A_2B + \dots)}{P(B)} =$$



$$\left. \begin{array}{l} A_iB \subseteq A_i \\ A_jB \subseteq A_j \end{array} \right\} \Rightarrow (A_iB) \text{ и } (A_jB) \text{ — несовместн.}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{п-м аксиому} \\ \text{сложения для} \\ \text{безусловной} \\ \text{вероятн.} \end{array} \right\} = \frac{P(A_1B) + P(A_2B) + \dots}{P(B)} =$$

$$= \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \frac{P(A_2B)}{P(B)} + \dots = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) + \dots$$

ч.т.д.

⑥ Сформулировать определение условной вероятности. Доказать теорему (формулу) умножения вероятностей. Привести примеры использования этой формулы.

Пусть:

1) A и B - два события, связанные с одним случ. экспериментом
2) Дополнительно известно, что в результ. эксперимента произошло событие B

Тогда

<u>Опр.</u>

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло событие B, назыв. число:

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B)\neq 0$$

<u>Теорема</u> (Формула умн. вер. для двух событий)

Пусть:

1) A, B - события
2) $P(A)>0$

Тогда:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$$

<u>Док-во</u>

Т.к. $P(A)>0$, то по опр. усл. вер.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \Rightarrow P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$$

ч.т.д.

Теорема (для n событий)

Пусть:

1) $A_1, \dots, A_n$ – события

2) $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) > 0$

Тогда:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot$$
$$\cdot P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$$

Док-во:

1) Докажем, что все входящие в правую часть ф-лы условной вероятн. определены:

Выберем некот. $k \in \{1, \dots, n-1\}$ и покаж., что: $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) > 0$, тогда:

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \supseteq (A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \cdot A_{k+1} \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k) \geqslant P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_k \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) \underbrace{>0}_{\text{по усл.}}$$

2) $$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1} \cdot A_n) =$$

$$= P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2} \cdot A_{n-1}) \cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) =$$

$$= P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-2}) \cdot$$
$$\cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) =$$

$$= \ldots = P(A_1 A_2) P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}) =$$

$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \cdot \ldots \cdot$
$\cdot P(A_n | A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1})$

Пример

На 7 карточках написаны буквы слова „шоколад". Карточки перемешивают и случ. образом последовательно без возвращения извлекают 3 штуки. Найти вер. события:

$A = \{$карточки в порядке появл. образ. слово „код"$\}$

Решение

Исход: (x_1, x_2, x_3)

1) Обозначим

$A_1 = \{$первой появ. буква „к"$\}$

$A_2 = \{$при втором извлеч. появ "о"$\}$

$A_3 = \{$ —//— третьем —//— "д"$\}$

Тогда:

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

2) $P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) =$

$= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{105}$

Ответ: $\frac{1}{105}$.

(7) Сформулировать определение пары независимых событий. Доказать критерий независимости двух событий. Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Обосновать связь этих событий.

Пусть A и B - два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

Опр.

События A и B назыв. независимыми, если:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема:

1) Если $P(B) > 0$, то

$$A, B \text{ - независ.} \Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$$

2) Если $P(A) > 0$, то

$$A, B \text{ - независ.} \Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$$

Док-во

1) ($\Rightarrow$) (необходимость)

Пусть A, B - несовместные:

$$P(A|B) = \left\{ \begin{matrix} \text{по} \\ \text{опр.} \end{matrix} \right\} = \frac{P(AB)}{P(B)} = \left\{ \begin{matrix} A, B \text{ - независ.} \\ \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B) \end{matrix} \right\} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

($\Leftarrow$) (достаточность)

Пусть $P(A|B) = P(A)$, тогда

$$P(AB) = \left\{\begin{matrix}\text{по ф-ле} \\ \text{умнож.}\end{matrix}\right\} = P(B) \cdot \underbrace{P(A|B)}_{P(A)} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$$

$\Rightarrow A, B$ – независимые

2) Аналогично 1)

<u>Опр.</u>

События $A_1, \dots, A_n$ называются попарно независимыми, если $\forall i \neq j$ события A_i и A_j – независ.

<u>Опр.</u>

События $A_1, \dots, A_n$ называются независ. в совокупности, если $\forall k \in \{2, \dots, n\}$ для $\forall$ набора $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ выполняется:

$$P(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$$

<u>Замеч.</u> (связь)

$$\boxed{\begin{matrix} A_1, \dots, A_n \\ \text{независимы} \\ \text{попарно} \end{matrix}} \Leftarrow \boxed{\begin{matrix} A_1, \dots, A_n \\ \text{независ. в} \\ \text{совокупности} \end{matrix}}$$

⑧ Сформулировать определение полной группы событий. Доказать теорему о формуле полной вероятности и о формуле Байеса. Понятие априорной и апостериорной вероятностей.

Пусть $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ – вероятностное пр-во.

<u>Опр.</u>

Будем говорить, что события $H_1, \ldots, H_n \in \mathcal{B}$ образуют полную группу событий, если

1) $P(H_i) > 0, \ i = \overline{1,n}$

2) $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i = \Omega$

<u>Теорема</u> (ф-ла полной вероят.)

Пусть:

1) $H_1, \ldots, H_n$ – полная группа событий

2) A – некоторое событие

Тогда

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)$$

Док-во

$$P(A) = P(A\Omega) = P(A(H_1 + \ldots + H_n)) =$$

$$= P(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{а) } H_i H_j = 0 \text{ при } i \neq j \\ \text{б) } AH_i \subseteq H_i \\ \quad\; AH_j \subseteq H_j \\ \text{в) а, б) } \Rightarrow (AH_i)(AH_j) = 0 \text{ при } i \neq j \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{по 3} \\ \text{аксиоме} \\ \text{вер} \end{array} \right\} = P(AH_1) + \ldots + P(AH_n) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} P(H_i) > 0 \Rightarrow \\ \text{по теор. умнож.} \\ P(AH_i) = P(H_i) \cdot P(A|H_i) \end{array} \right\} =$$

$$= P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)$$

ч.т.д.

<u>Теорема</u> (формула Байеса)

Пусть:

1) Возможны условия теоремы о ф-ле полной вероятности

2) $P(A) > 0$

Тогда:

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i) \cdot P(H_i)}{\underbrace{P(A|H_1) \cdot P(H_1) + \ldots + P(A|H_n) \cdot P(H_n)}_{P(A)}}, \quad i = \overline{1,n}$$

Док-во

$P(H_i|A)$ - определено, т.к. $P(A)>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(H_i|A) = \left\{\begin{matrix}\text{по опр.}\\ \text{усл. вер.}\end{matrix}\right\} = \frac{P(AH_i)}{P(A)} =$$

ф-ла умнож. вер.

ф-ла полной вер.

$$= \frac{P(A|H_i)\cdot P(H_i)}{P(A|H_1)\cdot P(H_1)+\ldots+P(A|H_n)\cdot P(H_n)}$$

ч.т.д.

Замеч.

1) Априорные вероятности — вер., которые известны до опыта ($P(H_i)$).

2) Апостериорные вероятности — вер., которые вычисляются после проведения испытаний ($P(H_i|A)$)

---

(9) Сформулировать определение схемы испытаний Бернулли. Доказать формулу для вычисления вероятности реализации ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. Доказать следствия этой формулы.

Пусть возможна реализация 2-ух элементарных исходов: успех и неудача. При этом:

1) p – вероятность осуществления успеха в случ. эксперименте;

2) q – вероятность неудачи ($q = 1 - p$).

Опр.

Схемой испытаний Бернулли называется серия одинаковых экспер. описанного вида, в которой отдельные эксперим. независимы в совокупности.

Теорема (схема исп. Бернулли)

Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вер. успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии из n исп. будет ровно k успехов:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Док-во

1) Исход: $(x_1, \ldots, x_n)$ $(*)$, где

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если в } i\text{-ом исп. имел место успех} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Обозн.:

$A = \{$ в серии из n исп. произошло равно k успехов $\}$

Событие A будет состоять из элементарных исходов вида (*), в которых равно k единиц и $n-k$ нулей.

$|A| = ?$

Кол-во исходов (т.е. кортежей вида (*)) в A равно числу способов выбрать из n позиций k позиций, в которых будут расставлены единицы (остальные нули)

Тогда:

$$|A| = C_n^k$$

2) Рассмотрим произвольный кортеж:

$$\underbrace{(x_1, \ldots, x_n)}_{\substack{k \text{ единиц и} \\ n-k \text{ нулей}}} \in A$$

$$P((x_1, \ldots, x_n)) = P\Big(\{\text{в 1-ом исп. } x_1\} \cdot$$

$$\cdot \{\text{во 2-ом исп. } x_2\} \cdot \ldots \cdot \{\text{в } n\text{-ом исп. } x_n\}\Big) =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{отдельн.} \\ \text{испыт.} \\ \text{явл. независ}\end{matrix}\right\} = P(\text{в 1-ом исп. } x_1) \cdot P(\text{во 2-ом исп. } x_2) \cdot$$

$\cdot \ldots \cdot P(\text{вн-ом исп. } x_n) = \left\{ P\left(\text{в } i\text{-ом } x_i\right) = \begin{cases} p, x_i = 1 \\ q, x_i = 0 \end{cases} \right\}$

$= \left\{ \begin{matrix} k \text{ раз } p \\ n-k \text{ раз } q \end{matrix} \right\} = p^k \cdot q^{n-k}$

3) В пункте 2) фактически показано, что все исходы внутри A равновероятные (вероятность каждого из них $= p^k \cdot q^{n-k}$)

Так как в A их всего C_n^k штук и отдельные исходы не пересекаются, то

$P_n(k) = P(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

ч.т.д.

Следствие 1

Обозначим $P_n(k_1 \leq k \leq k_2)$ — вер. того, что в серии из n экспер. по схеме Бернулли число k успехов будет лежать между k_1 и k_2.

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$$

Док-во

1) Пусть k — кол-во успехов в серии:

$$A = \{k_1 \leq k \leq k_2\}$$

Обозначим $A_i = \{$ в серии произошло ровно i успехов $\}$, $i = \overline{k_1, k_2}$

Тогда $A = A_{k_1} + \ldots + A_{k_2} = \sum_{i=k_1}^{k_2} A_i$

2) $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{по 3} \\ \text{аксиоме} \\ \text{вер.} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P(A) = P\left(\sum_{i=k_1}^{k_2} A_i\right) =$$

$$= \sum_{i=k}^{k_2} P(A_i) = \left\{ \begin{matrix} \text{по ф-ле} \\ \text{Бернулли} \end{matrix} \right\} = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i \cdot q^{n-i}$$

ч.т.д.

Следствие 2

Обозначим $P_n(k \geqslant 1)$ – вер. того, что в серии из n испыт. имеет место хотя бы 1 успех

$$P_n(k \geqslant 1) = 1 - q^n$$

Док-во

Обозн. $A = \{k \geqslant 1\}$

$\bar{A} = \{k = 0\}$

$$P_n(k \geqslant 1) = P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_n(k=0) =$$

$$= 1 - C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 - q^n.$$

ч.т.д.