Вариант 19.

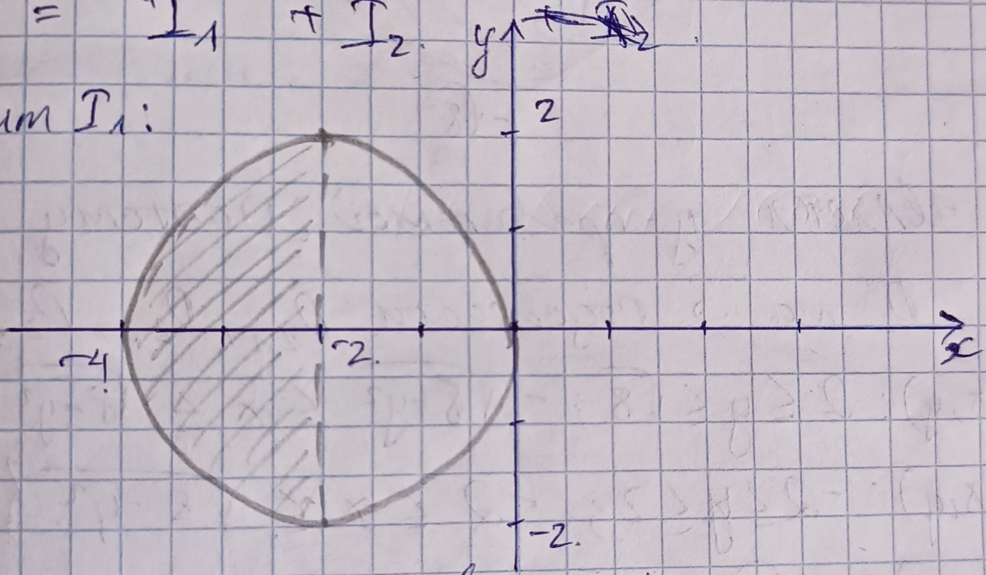
Ву Хай Данг
ИУ7И-52Б

1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле и сделать поясняющий рисунок.

$$I = \int_{-4}^{-2} dx \int_{-\sqrt{-x^2-4x}}^{\sqrt{-x^2-4x}} f(x,y)\,dy + \int_{-2}^{\sqrt{8}} dx \int_{-\sqrt{8-x^2}}^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\,dy$$

$$= I_1 + I_2$$

Рассмотрим I_1:

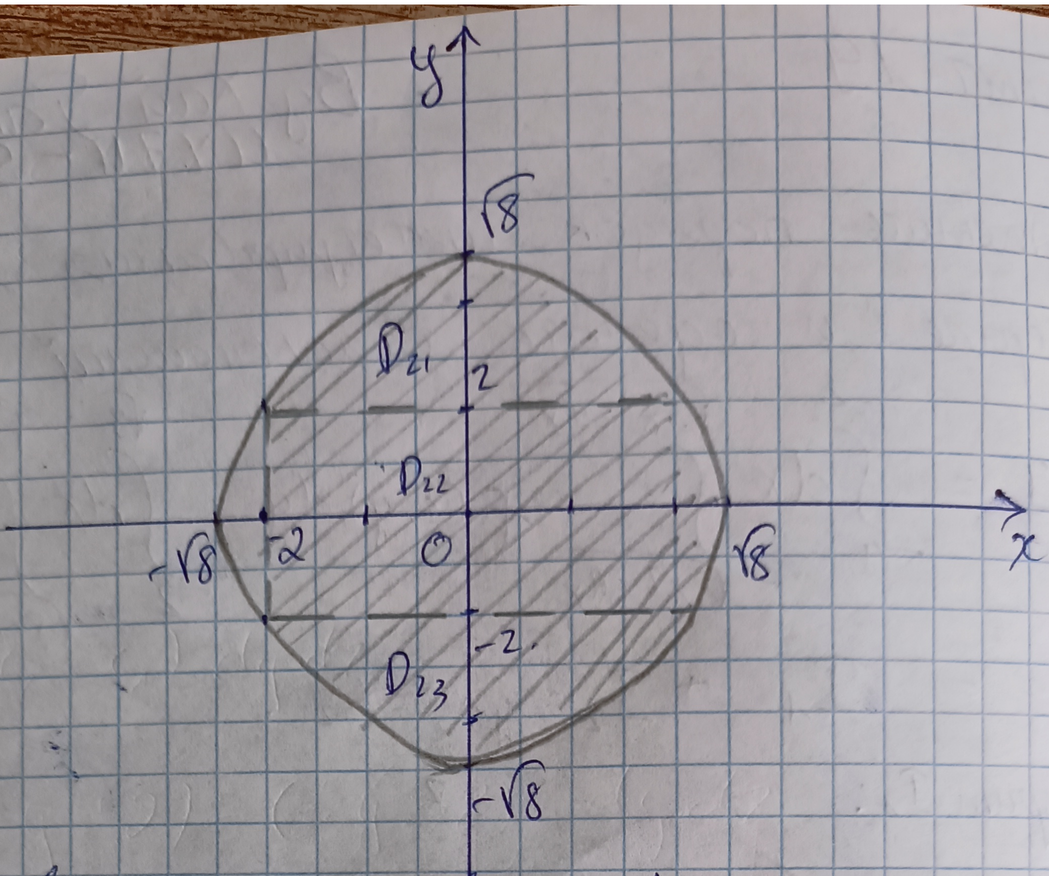


D_1 является x-правильной.

$D_1 = \{(x,y) : -2 \le y \le 2;\ -\sqrt{4-y^2}-2 \le x \le -2\}$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}-2}^{-2} f(x,y)\,dx.$$

Рассмотрим I_2:



– D_2 не является ху-правильной. Поэтому разделяем D_2 на 3 подобласти D_{21}, D_{22}, D_{23}.

$$D_{21} = \{(x,y) : 2 \le y \le \sqrt{8};\ -\sqrt{8-y^2} \le x \le \sqrt{8-y^2}\}$$

$$D_{22} = \{(x,y) : -2 \le y \le 2;\ -2 \le x \le \sqrt{8-y^2}\}$$

$$D_{23} = \{(x,y) : -\sqrt{8} \le y \le -2;\ -\sqrt{8-y^2} \le x \le \sqrt{8-y^2}\}$$

$$\Rightarrow I_2 = I_{21} + I_{22} + I_{23} =$$

$$= \int_{2}^{\sqrt{8}} dy \int_{-\sqrt{8-y^2}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{-2}^{2} dy \int_{-2}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx +$$

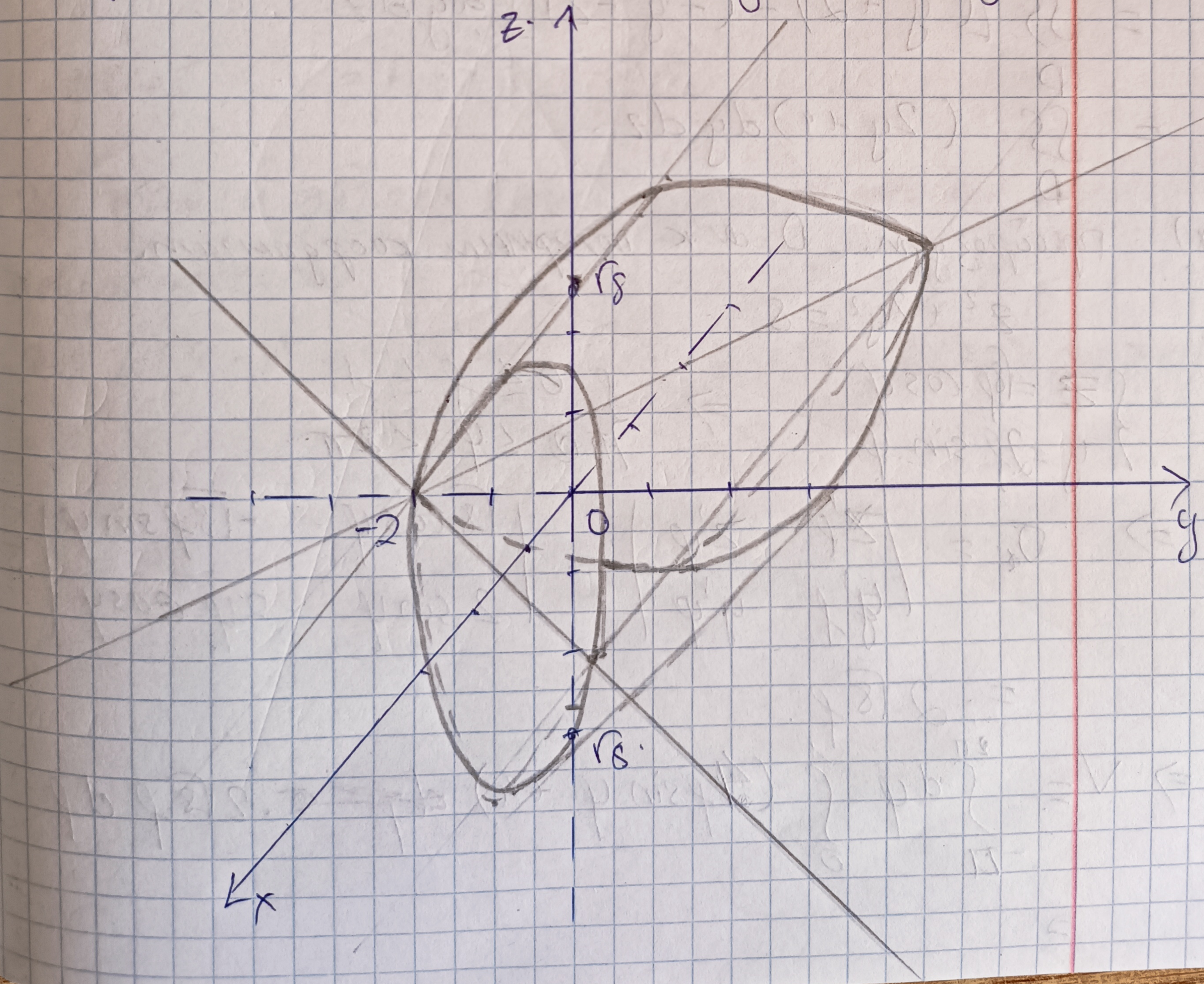
$$+ \int_{-\sqrt{8}}^{-2} dy \int_{-\sqrt{8-y^2}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Ответ:

$$I = \int_{-2}^{2} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-2} f(x,y)\,dx + \int_{2}^{\sqrt{8}} dy \int_{-\sqrt{8-y^2}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx +$$

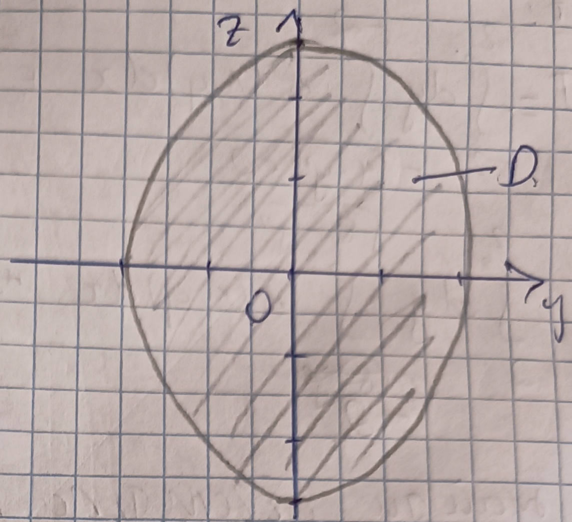
$$\int_{-2}^{2} dy \int_{-2}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx + \int_{-\sqrt{8}}^{-2} dy \int_{-\sqrt{8-y^2}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $z^2+2y^2=8$; $y=x-2$; $y=-x-2$.



Проекция на Oyz:

$z^2+2y^2=8$



Тогда

$$V=\iint_D (x_2-x_1)\,dy\,dz$$

$$=\iint_D \left[(y+2)-(-y-2)\right]dy\,dz$$

$$=\iint_D (2y+4)\,dy\,dz.$$

*) преобразуем D к полярным координатам.

$$z^2+2y^2=8$$

$$\begin{cases} z=\sqrt{8}\rho\cos\varphi \\ y=2\rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0\le\rho\le 1 \\ -\pi\le\varphi\le\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \begin{vmatrix} z'_\rho & z'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{8}\cos\varphi & -\sqrt{8}\rho\sin\varphi \\ 2\sin\varphi & 2\rho\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$=2\sqrt{8}\rho.$$

$$\Rightarrow V=\int_{-\pi}^{\pi}d\varphi\int_0^1 (4\rho\sin\varphi+4)\,\cancel{d\rho}\cdot 2\sqrt{8}\rho\,d\rho$$

$=$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int \left(\frac{8\sqrt{8}}{3} \rho^3 \sin\varphi + 4\sqrt{8}\rho^2 \right) \Big|_0^1$$

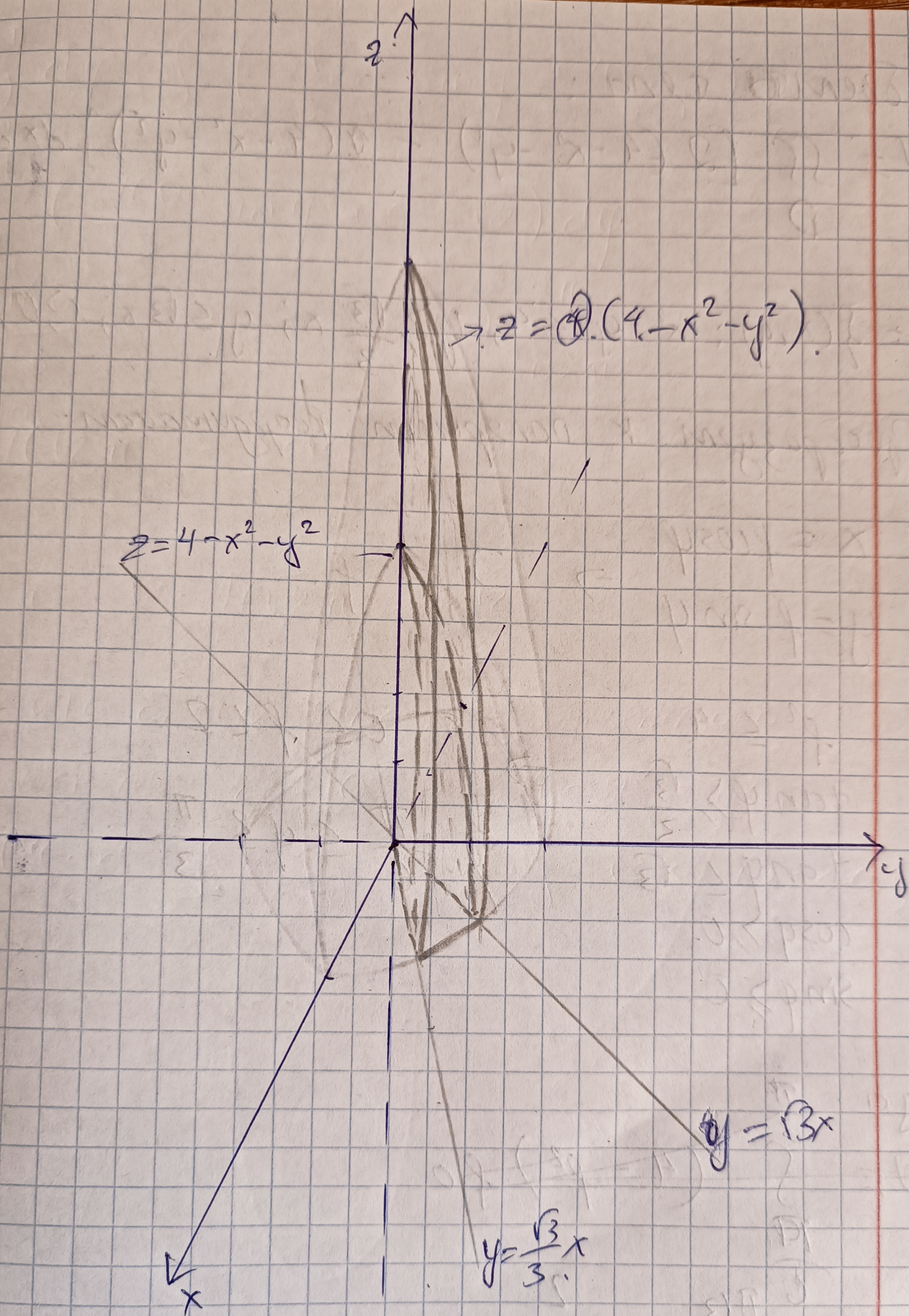
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{16\sqrt{2}}{3} \sin\varphi + 8\sqrt{2} \right) d\varphi$$

$$= \left(\frac{-16\sqrt{2}}{3} \cos\varphi + 8\sqrt{2}\varphi \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 16\sqrt{2}\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}$$

ответ $V = 16\sqrt{2}\pi - \frac{32\sqrt{2}}{3}$

3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 2(4 - x^2 - y^2)$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, $y = \sqrt{3}x$ $(x \geq 0, y \geq 0)$



z
$z = 2.(4 - x^2 - y^2)$.
$z = 4 - x^2 - y^2$
y
$y = \sqrt{3}x$
$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$
x

Объем тела:

$$V = \iint\limits_D \left[2(4-x^2-y^2) - (4-x^2-y^2)\right] dx\,dy.$$

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 4;\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x;\ y \le \sqrt{3}x;\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}.$$

Преобразуем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = \rho.$$

$$\begin{cases} \rho^2 \le 4 \\ \tan\varphi \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan\varphi \le \sqrt{3} \\ \cos\varphi \geq 0 \\ \sin\varphi \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le \rho \le 2 \\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \end{cases}.$$

Тогда:

$$\cancel{V = \int_{\pi/6}^{\pi/3} (4-\rho^2)\cdot\rho\, 0}$$

$$V = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_0^2 (4-\rho^2)\rho\, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{6} \cdot \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^2$$

$$= \frac{2\pi}{3}.$$

<u>ответ</u>: объем тела: $\frac{2\pi}{3}$.