УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Вычислительная математика

Лабораторная работа №3(1) - Решение нелинейных уравнений

Методы половинного деления, касательных для одного уравнения; простых итераций для системы уравнений

Преподаватель: Перл Ольга Вячеславовна

Выполнили: Кульбако Артемий Юрьевич P3212

Санкт-Петербург
2020

Описание метода

Метод половинного деления:

На некотором интервале $[a; b]$ вычисляем x_i:

$$x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$$

Если $f(x_i) \leq \varepsilon$ - завершаем итерационный процесс, иначе в качестве нового интервала берём ту половину отрезка, на концах которого функция имеет разные знаки: $[a; x_i]$ если $f(a) \cdot f(x_i) < 0$, или $[b; x_i]$ если $f(b) \cdot f(x_i) < 0$, и повторяем вычисления.

Касательных:

На некотором интервале $[a; b]$ функция $y = f(x)$ заменяется касательной, и в качестве приближенного значения принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

Начальное приближение, обеспечивающее быструю сходимость, считается по формуле:

$$x_0 = \max\{f(a) \cdot f''(a);\ f(b) \cdot f''(b)\} > 0$$

Находим показатель λ для интервала:

$$\lambda = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Вычисляем x_i по формуле:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}$$

пока $|f(x_i)| > \varepsilon$.

Простой итерации для СНАУ:

Все уравнения системы

$$\begin{cases} f_i(x_1 .. x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1 .. x_n) = 0 \end{cases}$$

Преобразуем к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, .. x_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, .. x_n) \end{cases}$$

Если выбрано некоторое начальное приближение

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)} .. x_n^{(0)})$$

, то последующие приближения находятся по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{(i+1)} = \varphi_1(x_1^{(i)}, .. x_n) \\ \dots \\ x_n^{(i+1)} = \varphi_n(x_1^{(i)}, .. x_n) \end{cases}$$

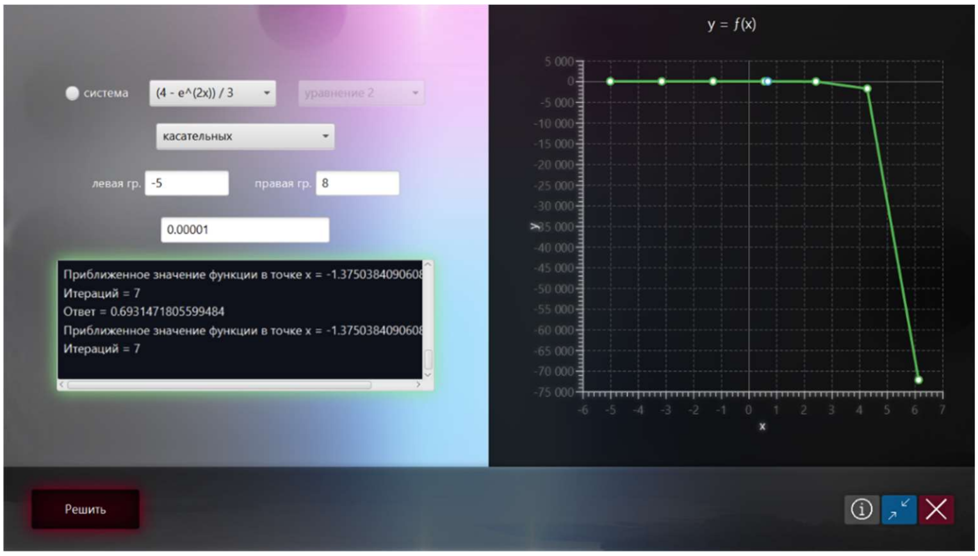
Находить новые приближения до тех пор, пока

$$\Delta^i = \max\left|x_n^i - x_n^{i-1}\right| <= \varepsilon$$

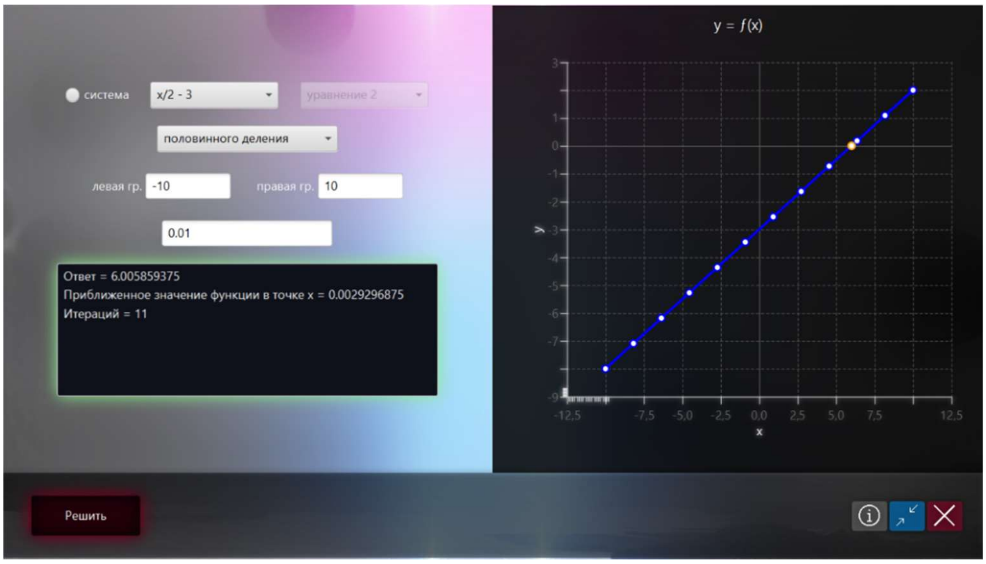
Вывод

+	-
Метод половинного деления	
• Обладает абсолютной сходимостью (близость получаемого численного решения задачи к истинному решению) • устойчив к ошибкам округления	• линейная сходимость
Метод хорд	
• быстрая сходимость при $f(x) \cdot f''(x) > 0$	• линейная сходимость • выбор начального приближения
Касательных (Ньютона)	
• квадратичная сходимость	• вычисления производных • выбор начального приближения
Простых итерации	
• сходимость со скоростью геометрической прогрессии если в окрестности корня $0 \leq \lvert\varphi'(x)\rvert \leq 1$ и $\lvert\varphi'(x)\rvert = const$	• вычисление производных • выбор начального приближения • очень медленная сходимость при $\lvert\varphi'(x)\rvert \approx 1$
Простой итерации для СНАУ	
• чуть проще чем Ньютона для СНАУ	• крайне сложная реализация из-за требования преобразовывать уравнения системы • вычисление производных • очень медленная сходимость при $\lvert\varphi'(x)\rvert \approx 1$
Метод касательных (Ньютона) для СНАУ	
• быстрее простой итерации для СНАУ	• крайне сложная реализация из-за матрицы Якоби • вычисление производных

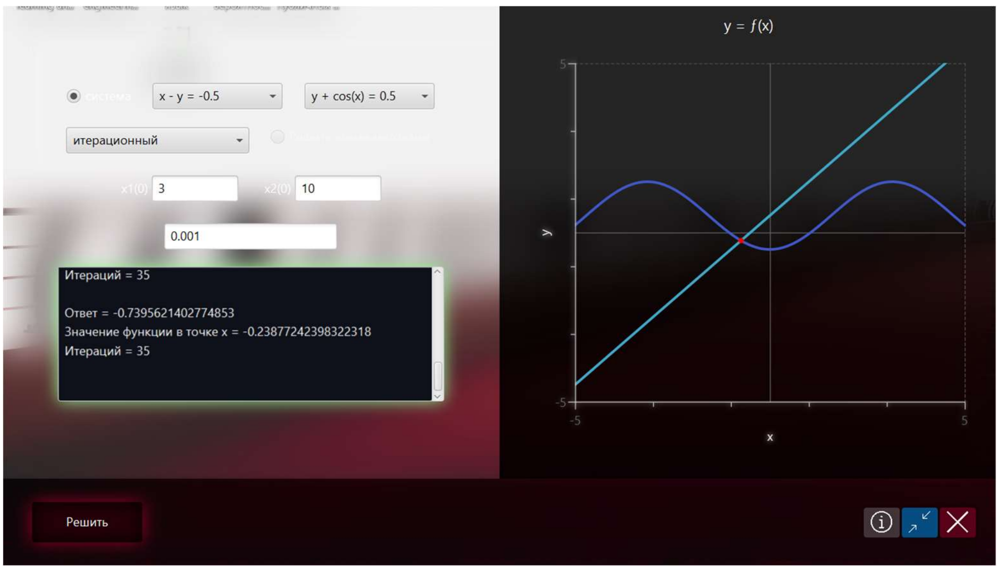
Примеры



система
(4 - e^(2x)) / 3
уравнение 2
касательных
левая гр.
-5
правая гр.
8
0.00001
Приближенное значение функции в точке x = -1.375038409060
Итераций = 7
Ответ = 0.6931471805599484
Приближенное значение функции в точке x = -1.375038409060
Итераций = 7
Решить
y = f(x)
x



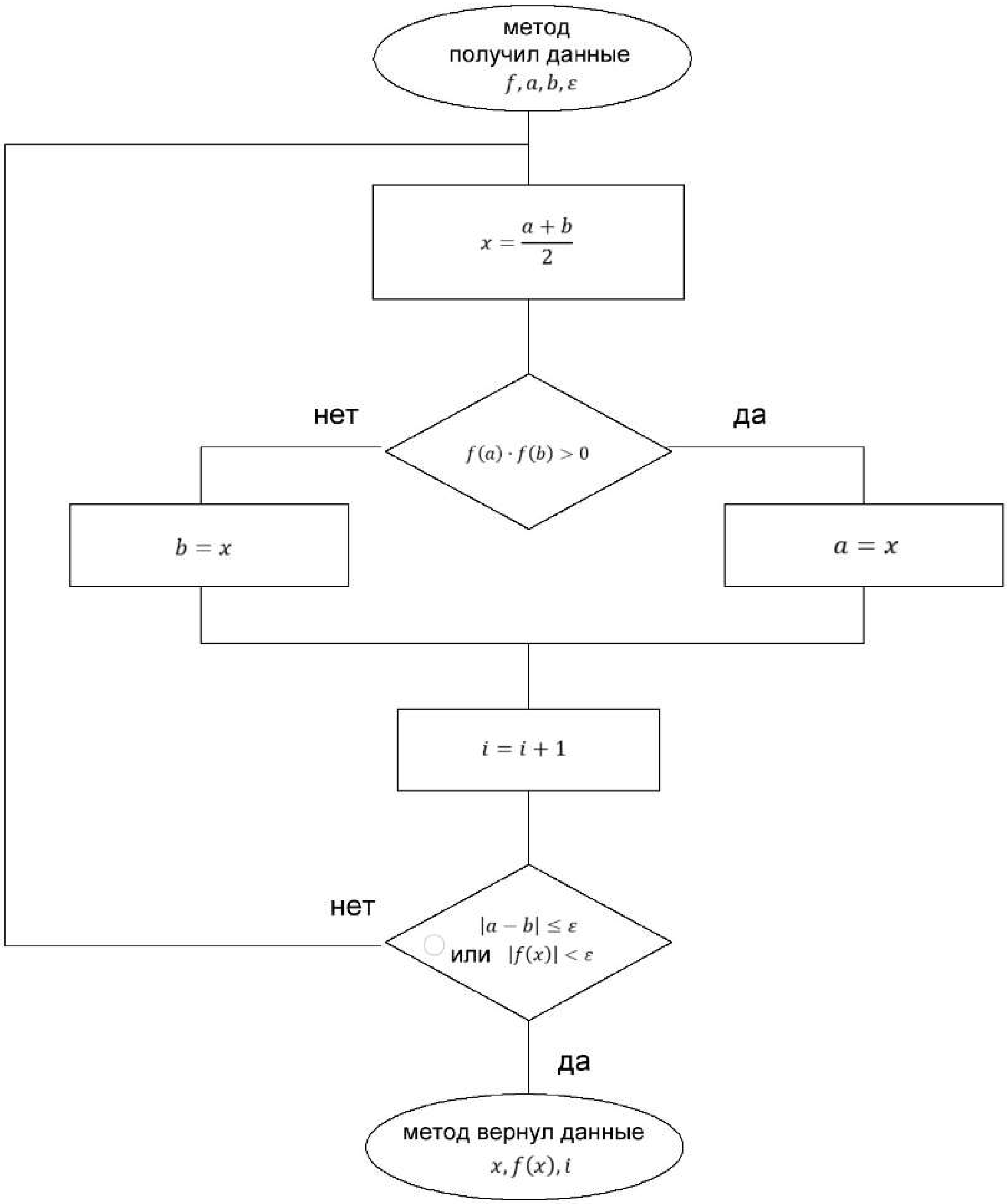
система
x/2 - 3
уравнение 2
половинного деления
левая гр.
-10
правая гр.
10
0.01
Ответ = 6.005859375
Приближенное значение функции в точке x = 0.0029296875
Итераций = 11
Решить
y = f(x)
x
y



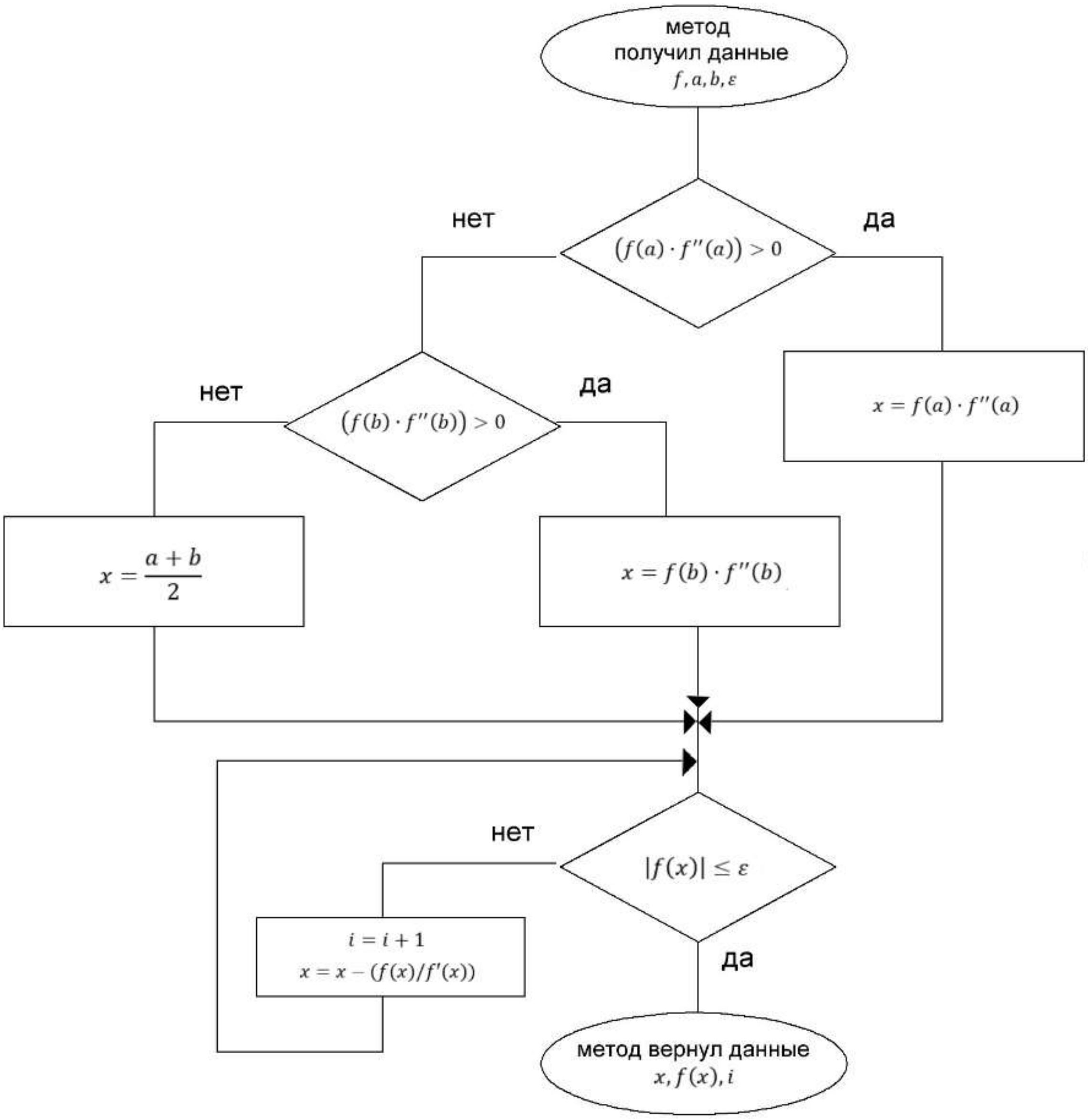
система
x - y = -0.5
y + cos(x) = 0.5
итерационный
x1(0)
3
x2(0)
10
0.001
Итераций = 35
Ответ = -0.7395621402774853
Значение функции в точке x = -0.23877242398322318
Итераций = 35
Решить
y = f(x)
x
y

Блок-схемы

Метод половинного деления:



Метод касательных:



Метод простой итерации: