Лекция 1
Решение системы линейных алгебраических уравнений СЛАУ

Вычислительная математика,
весенний семестр 2020

Структура лекции

- Понятие СЛАУ
- Базовые способы решения СЛАУ
- Виды методов решения СЛАУ, их различия и отличительные особенности
- Ключевые личности

Общие сведения о системах уравнений

Системой n уравнений с m неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_m$ принадлежащими заданному числовому множеству M, называется задача о нахождении упорядоченных совокупностей из m чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, принадлежащих множеству M, которые при подстановке вместо соответствующих неизвестных обращают каждое из n данных уравнений в тождество.

Общие сведения о системах уравнений

Общий вид системы уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_3(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \Phi_3(x_1, x_2, \ldots, x_m) \end{cases} \qquad (1)$$

Решение системы

Упорядоченная совокупность чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, каждое из которых принадлежит множеству M, в котором рассматривается система, при подстановке которых вместо соответствующих неизвестных каждое уравнение системы обращается в тождество.

Решить систему уравнений

- Означает найти множество всех её решений или показать, что она решений не имеет.

Решение систем линейных уравнений

Общий вид СЛАУ с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases} \qquad (2)$$

где x и y являются неизвестными, а a_1, b_1, a_2, b_2 называются коэффициентами, а c_1, c_2 - свободными членами системы.

Способы решения СЛАУ вида (2):

1. Способ подстановки
2. Способ алгебраического сложения
3. Способ сравнения

Из (2) при $b_1 \neq 0$ находим:

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$$

и подставляем найденное значение y во второе уравнение:

$$a_2 x + b_2 \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} = c_2,$$

откуда получаем:

$$(a_1 b_2 - a_1 b_2) x = c_1 b_2 - c_2 b_1.$$

Если

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0,$$

то

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Тогда

$$y = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} x = \frac{c_1}{b_1} - \frac{a_1(c_1 b_2 - c_2 b_1)}{b_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Способ алгебраического сложения

Для решение системы (2) умножим обе части первого уравнения на $b_2 \neq 0$, а второго - на $-b_1 \neq 0$. Получаем:

$$\begin{cases} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2, \\ -a_2 b_1 x + b_1 b_2 y = -c_2 b_1. \end{cases}$$

Способ алгебраического сложения

Полагая, что система имеет решение, складываем левые и правые части уравнений:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)x = c_1 b_2 - c_2 b_1,$$

откуда при $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ находим:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Способ алгебраического сложения

Аналогично поступаем, чтобы найти y. Умножаем обе части певого уравнения на $-a_2 \neq 0$, а второго - на $a_1 \neq 0$. Получаем:

$$\begin{cases} -a_1 a_2 x - a_2 b_1 y = -a_2 c_1, \\ a_1 a_2 x + a_1 b_2 y = -a_1 c_2. \end{cases}$$

Способ алгебраического сложения

Складываем левые и правые части уравнений:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = a_1 c_2 - a_2 c_1,$$

откуда при $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ находим:

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Поскольку система уравнений решена в предположении, что она имеет решения, необходимо подстановкой убедиться, что найденная пара чисел является решением этой системы.

Способ сравнения

Чтобы решить систему (2), предполагаем, что эта система имеет решение, и из каждого уравнения системы находим y (или x):

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1}, y = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2}, b_1 \bullet b_2 \neq 0.$$

Приравнивая полученные для y выражения, получаем уравнение относительно неизвестного x. Это уравнение называется выводным.

Решая выводное уравнение при $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, находим:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Подставляя найденное значение x в какое-либо выражение для y (например, первое), получаем:

$$y = \frac{c_1 - a_1 \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}}{b_1} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Матрицы

Это строительные блоки важного класса математических моделей. Аппарат матриц позволяет более просто представлять различные математические и физические операции с помощью числовых операций над элементами матриц.

Определитель (детерминант)

$$D = \det[a_{ik}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Неравенство Адамара:

$$|D|^2 \leq \prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \qquad (4)$$

Детерминант

квадратной таблицы (3) с n^2 (действительными или комплексными) числами (**элементами**) a_{ik} есть сумма $n!$ членов $(-1)^r a_{1k_1} a_{2k_2} ... a_{nk_n}$, каждый из которых соответствует одному из $n!$ различных упорядоченных множеств $k_1, k_2, ..., k_n$, полученных r попарными перестановками (транспозициями) элементов из множества $1, 2, ..., n$.
Число n есть **порядок** определителя.

1 Величина D определителя (3) не меняется при любой из следующих операций:

1. Замене строк столбцами и столбцов строками (перемене индексов i и k в равенстве (3));
2. Четном числе перемен местами любых двух строк или любых двух столбцов;
3. Прибавлении к элементам любой строки (или столбца) соответствующих элементов какой-либо другой строки (или соответственно столбца), умноженных на одно и то же число α.

2 Нечетное число перемен местами любых двух строк или двух столбцов равносильно умножению определителя на -1.

3 Умножение всех элементов какой-либо строки или толбца на множитель α равносильно умножению определителя на α.

4 Определитель равен нулю, если:

1. все элементы какой-либо его строки или столбца равны нулю;
2. соответствующие элементы каких-либо двух его строк или столбцов равны или же пропорциональны.

Общая характеристика методов решения систем линейных уравнений

Способы решения СЛАУ в основном делятся на 2 группы:

1. **Точные** - конечные алгоритмы для вычисления корней системы
   1. метод Гаусса
   2. метод Гаусса с выбором главного элемента
2. **Итерационные** - позволяющие получать корни системы с заданной точностью путем сходящихся бесконечных процессов
   1. метод простых итераций
   2. метод Гаусса-Зейделя

1. Сводится к нахождению треугольной матрицы;
2. Состоит из прямого и обратного хода;
3. Необходимое и достаточное условие: неравенство нулю *ведущих элементов*.

Для наглядности покажем метод Гаусса для системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases} \tag{5}$$

При этом, пусть $a_{11} \neq 0$ (*ведущий элемент*).

Разделим элементы системы (5) на ведущий элемент a_{11}, получим:

$$x_{11} + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}} x_4 = \frac{b_1}{a_{11}}. \qquad (6)$$

Пользуясь уравнением (6), легко исключить из системы (5) неизвестную x_1.

Для этого достаточно из второго уравнения системы (5) вычесть уравнение (6), умноженное на a_{21}, из третьего уравнения системы (5) вычесть уравнение (6), умноженное на a_{31} и т.д.
В результате получим систему из трёх уравнений:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x2 + a_{23}^{(1)}x3 + a_{24}^{(1)}x4 = b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x2 + a_{33}^{(1)}x3 + a_{34}^{(1)}x4 = b_3^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x2 + a_{43}^{(1)}x3 + a_{44}^{(1)}x4 = b_4^{(1)}, \end{cases} \tag{7}$$

где коэффициенты $a_{ij}^{(1)}(i,j \geq 2)$ вычисляются по формуле $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}\frac{a_{1j}}{a_{11}}(i,j \geq 2)$.

Разделив, далее, коэффициенты первого уравнения системы (7) на *ведущий элемент* $a_{22}^{(1)}$, получим:

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3 + \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \qquad (8)$$

Исключая теперь x_2 таким же способом, каким мы исключили x_1, придём к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)} x3 + a_{34}^{(2)} x4 = b_3^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)} x3 + a_{44}^{(2)} x4 = b_4^{(2)}, \end{cases} \qquad (9)$$

где

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Разделим коэффициенты первого уравнения системы (9) на *ведущий элемент* $a_{33}^{(2)}$, получим:

$$x_3 + \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} x_4 = \frac{b_4^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

Прямой ход метода Гаусса

Исключив теперь x_3 аналогичным путём из системы (9) будем иметь:

$$a_{44}^{(3)} x_4 = b_4^{(3)}, \tag{10}$$

где

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3} \frac{a_{3j}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

Отсюда:

$$x_4 = \frac{b_4^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} \tag{11}$$

Обратный ход метода Гаусса

Остальные неизвестные последовательно выводятся обратной подстановкой:

$$x_3 = \frac{b_3^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} - \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} x_4,$$

$$x_2 = \frac{b_2^{(2)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_4 - \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} x_3$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{14}}{a_{11}} x_4 - \frac{a_{13}}{a_{22}} x_3 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2.$$

метод Гаусса с выбором главного элемента

1. Требование $a_{ii} \neq 0$, заменяется более жестким: из всех оставшихся в i-м столбце элементов нужно выбрать наибольший по модулю и переставить уравнения так, чтобы этот элемент оказался на месте элемента a_{ii};
2. Всегда применим, если определитель матрицы не равен нулю;
3. Метод Гаусса является частным случаем метода главных элементов.

метод Гаусса с выбором главного элемента

Выберем ненулевой, как правило, наибольший по модулю, не принадлежащий к столбцу свободных членов $(q \neq n+1)$ элемент $a_p q$ матрицы M, который называется *главным элементом*, и вычислим множители

$$m_i = -\frac{a_{iq}}{a_{pq}}$$

для всех $i \neq p$

метод Гаусса с выбором главного элемента

Строка с номером p матрицы M, содержащая главный элемент, называется *главной строкой*. Далее, произведем следующую операцию: к каждой не главной строке прибавим главную строку, умноженную на соответствующий множитель m_i для этой строки. В результате мы получим новую матрицу, у которой q-й столбец состоит из нулей. Отбрасывая этот столбец и главную p-ю строку, получим новую матрицу $M^{(1)}$ с меньшим на единицу числом строк и столбцов.

Применение метода Гаусса для вычисления определителей

Элементы полученной треугольной матрицы получались из элементов изначальной матрицы и последующих вспомогательных матриц с помощью следующих преобразований:

1. деления на *ведущие элементы* $a_{11}, a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{nn}^{(n-1)}$, которые предполагались отличными от нуля;
2. вычитания строк из матрицы A и промежуточных матриц $A_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ чисел, пропорциональных элементам соответствующих ведущих строк.

Применение метода Гаусса для вычисления определителей

При (1)-й операции определитель матрицы также делится на соответствующий *ведущий элемент*, при (2)-й определитель матрицы остаётся неизменным. Поэтому:

$$\det C = 1 = \frac{\det A}{a_{11}a_{22}^{(1)}\ldots a_{nn}^{(n-1)}}.$$

Следовательно,

$$\det A = a_{11}a_{22}^{(1}\ldots a_{nn}^{(n-1)},$$

т.е. определитель равен произведению *ведущих элементов* для соответствующей схемы Гаусса.

$$x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} - \frac{1}{a_{ii}} f_i^{[j]} = x_i^{[j]} - -\frac{1}{a_{ii}} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^{[j]} - b_i) \tag{12}$$

$$x_i^{[j+1]} = x_i^{[j]} - \frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k^{[j+1]} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^{[j]} - b_i\right) \tag{13}$$

Ошибки в численных методах

1. Промахи - грубые ошибки в приближенных вычислениях
2. Ошибки начальных данных
3. Ошибки округления - вызваны использованием конечного числа знаков
4. Ошибки усечения - вызваны конечной аппроксимацией бесконечного процесса.

Отклонение от известного/истинного значения.
Рассчитывается по формуле:

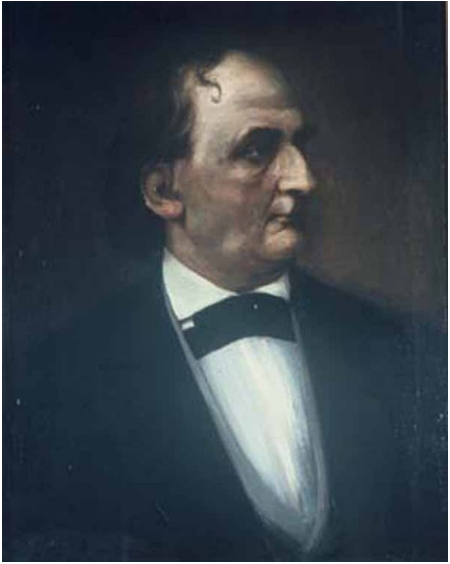
$$\Delta y = Y - y \tag{14}$$

$$f_i^{[j]} \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k^{[j]} - b_i \tag{15}$$

$$(i = 1, 2, ..., n; j = 0, 1, 2, ...).$$

Иоганн Карл Фридрих Гаусс

Филипп Людвиг фон Зейдель



Спасибо за внимание!