গণিত

সপ্তম শ্রেণি

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

বিজয় উল্লাস: ১৯৭১

১৯৪৭ সাল থেকেই পাকিস্তানি শাসকগোষ্ঠী দ্বারা পূর্ব পাকিস্তানের (বর্তমান বাংলাদেশ) জনগণ সর্বপ্রকার অত্যাচার, শোষণ, বৈষম্য ও নিপীড়নের শিকার হয়েছে। ১৯৭১ সালের ৭ই মার্চ বাংলাদেশের স্বাধীনতা সংগ্রামের অবিসংবাদিত নেতা বঙ্গবন্ধু শেখ মুজিবুর রহমান স্বাধীনতার ডাক দেন এবং ২৬শে মার্চ আনুষ্ঠানিকভাবে স্বাধীনতার ঘোষণা প্রদান করেন। ৯ মাসের মুক্তিযুদ্ধে অংশ নেয় নারী-পুরুষ, হিন্দু-মুসলিম, বৌদ্ধ-খ্রিষ্টান, শিশু-কিশোরসহ সর্বস্তরের জনগণ। পাকিস্তানি সেনাদের পাশবিক নির্যাতনের শিকার ২ লাখের অধিক মা-বোনের ত্যাগ এবং ৩০ লক্ষ বাঙালির প্রাণের বিনিময়ে সশস্ত্র সংগ্রামের মাধ্যমে ১৯৭১ সালে ১৬ই ডিসেম্বর মুক্তিবাহিনী ও ভারতীয় বাহিনীর যৌথ কমান্ডের কাছে পাকিস্তানি হানাদার বাহিনীর আত্মসমর্পণের মধ্যদিয়ে মুক্তিযুদ্ধে বিজয় অর্জন করে বাংলাদেশ। বিশ্ব ইতিহাসে বাংলাদেশের মুক্তিযুদ্ধ খুবই তাৎপর্যপূর্ণ ঘটনা। বাংলাদেশ তৃতীয় বিশ্বের প্রথম দেশ, যে দেশ সশস্ত্র মুক্তিযুদ্ধের মাধ্যমে স্বাধীনতা অর্জন করেছে।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক জাতীয় শিক্ষাক্রম-২০২২ অনুযায়ী প্রণীত
এবং ২০২৩ শিক্ষাবর্ষ থেকে সপ্তম শ্রেণির জন্য নির্ধারিত পাঠ্যপুস্তক

গণিত

সপ্তম শ্রেণি

(পরীক্ষামূলক সংস্করণ)

রচনা ও সম্পাদনা

ড. মো: আব্দুল হাকিম খান
ড. মো: আব্দুল হালিম
ড. চন্দ্রনাথ পোদ্দার
নওরীন ইয়াসমিন
মোহাম্মদ মুনছুর সরকার
ডি. এম. জুনায়েদ কামাল নিবিড়
রতন কান্তি মণ্ডল
আসিফ বায়েজিদ
সকাল রায়
প্রত্যয় ঘোষ
মো: মোখলেস উর রহমান
মোছা: নুরুন্নেসা সুলতানা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ
৬৯-৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা-১০০০
কর্তৃক প্রকাশিত

প্রথম প্রকাশ: ডিসেম্বর, ২০২২
পুনর্মুদ্রণ: , ২০২৩

শিল্প নির্দেশনা

মঞ্জুর আহমদ

চিত্রণ

অনিক সরকার

শামীম আহমেদ শান্ত

প্রচ্ছদ

অনিক সরকার

গ্রাফিক্স

মো: রুহুল আমিন

গণপ্রজাতন্ত্রী বাংলাদেশ সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য

মুদ্রণে:

প্রসঙ্গ কথা

পরিবর্তনশীল এই বিশ্বে প্রতিনিয়ত বদলে যাচ্ছে জীবন ও জীবিকা। প্রযুক্তির উৎকর্ষের কারণে পরিবর্তনের গতিও হয়েছে অনেক দ্রুত। দ্রুত পরিবর্তনশীল এই বিশ্বের সঙ্গে আমাদের খাপ খাইয়ে নেওয়ার কোনো বিকল্প নেই। কারণ প্রযুক্তির উন্নয়ন ইতিহাসের যেকোনো সময়ের চেয়ে এগিয়ে চলেছে অভাবনীয় গতিতে। চতুর্থ শিল্পবিপ্লব পর্যায়ে কৃত্রিম বুদ্ধিমত্তার বিকাশ আমাদের কর্মসংস্থান এবং জীবনযাপন প্রণালিতে যে পরিবর্তন নিয়ে আসছে, তার মধ্য দিয়ে মানুষে মানুষে সম্পর্ক আরও নিবিড় হবে। অদূর ভবিষ্যতে অনেক নতুন কাজের সুযোগ তৈরি হবে যা এখনও আমরা জানি না। অনাগত সেই ভবিষ্যতের সাথে আমরা যেন নিজেদের খাপ খাওয়াতে পারি তার জন্য এখনই প্রস্তুতি গ্রহণ করা প্রয়োজন।

পৃথিবীজুড়ে অর্থনৈতিক প্রবৃদ্ধি ঘটলেও জলবায়ু পরিবর্তন, বায়ুদূষণ, অভিবাসন এবং জাতিগত সহিংসতার মতো সমস্যা আজ অনেক বেশি প্রকট। দেখা দিচ্ছে কোভিড ১৯ এর মতো মহামারি যা সারা বিশ্বের স্বাভাবিক জীবনযাত্রা এবং অর্থনীতিকে থমকে দিয়েছে। আমাদের প্রাত্যহিক জীবনযাত্রায় সংযোজিত হয়েছে ভিন্ন ভিন্ন চ্যালেঞ্জ এবং সম্ভাবনা।

এসব চ্যালেঞ্জ ও সম্ভাবনার দ্বারপ্রান্তে দাঁড়িয়ে তার টেকসই ও কার্যকর সমাধান এবং আমাদের জনমিতিক সুফলকে সম্পদে রূপান্তর করতে হবে। আর এজন্য প্রয়োজন জ্ঞান, দক্ষতা, মূল্যবোধ ও ইতিবাচক দৃষ্টিভঙ্গিসম্পন্ন দূরদর্শী, সংবেদনশীল, অভিযোজন-সক্ষম, মানবিক, বৈশ্বিক এবং দেশপ্রেমিক নাগরিক। এই প্রেক্ষাপটে বাংলাদেশ স্বল্পোন্নত দেশ থেকে উন্নয়নশীল দেশে উত্তরণ এবং ২০৪১ সালের মধ্যে উন্নত দেশে পদার্পণের লক্ষ্যমাত্রা অর্জনের প্রচেষ্টা অব্যাহত রেখেছে। শিক্ষা হচ্ছে এই লক্ষ্য অর্জনের একটি শক্তিশালী হাতিয়ার। এজন্য শিক্ষার আধুনিকায়ন ছাড়া উপায় নেই। আর এই আধুনিকায়নের উদ্দেশ্যে একটি কার্যকর যুগোপযোগী শিক্ষাক্রম প্রণয়নের প্রয়োজনীয়তা দেখা দিয়েছে।

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ডের একটি নিয়মিত, কিন্তু খুবই গুরুত্বপূর্ণ কার্যক্রম হলো শিক্ষাক্রম উন্নয়ন ও পরিমার্জন। সর্বশেষ শিক্ষাক্রম পরিমার্জন করা হয় ২০১২ সালে। ইতোমধ্যে অনেক সময় পার হয়ে গিয়েছে। প্রয়োজনীয়তা দেখা দিয়েছে শিক্ষাক্রম পরিমার্জন ও উন্নয়নের। এই উদ্দেশ্যে শিক্ষার বর্তমান পরিস্থিতি বিশ্লেষণ এবং শিখন চাহিদা নিরূপণের জন্য ২০১৭ থেকে ২০১৯ সালব্যাপী এনসিটিবির আওতায় বিভিন্ন গবেষণা ও কারিগরি অনুশীলন পরিচালিত হয়। এসব গবেষণা ও কারিগরি অনুশীলনের ফলাফলের উপর ভিত্তি করে নতুন বিশ্ব পরিস্থিতিতে টিকে থাকার মতো যোগ্য প্রজন্ম গড়ে তুলতে প্রাক-প্রাথমিক থেকে দ্বাদশ শ্রেণির অবিচ্ছিন্ন যোগ্যতাভিত্তিক শিক্ষাক্রম উন্নয়ন করা হয়েছে।

যোগ্যতাভিত্তিক এ শিক্ষাক্রমের আলোকে সকল ধারার (সাধারণ, মাদ্রাসা ও কারিগরি) সপ্তম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের জন্য এই পাঠ্যপুস্তক প্রণয়ন করা হলো। বাস্তব অভিজ্ঞতার আলোকে পাঠ্যপুস্তকের বিষয়বস্তু এমনভাবে রচনা করা হয়েছে যেন তা অনেক বেশি সহজবোধ্য এবং আনন্দময় হয়। এর মাধ্যমে চারপাশে প্রতিনিয়ত ঘটে চলা বিভিন্ন প্রপঞ্চ ও ঘটনার সাথে পাঠ্যপুস্তকের একটি মেলবন্ধন তৈরি হবে। উল্লেখ্য যে ইতোমধ্যে অন্তর্বর্তীকালীন ট্রাই-আউটের মাধ্যমে শিক্ষক, শিক্ষার্থীদের মতামত সংগ্রহ করে লেখক এবং বিষয় বিশেষজ্ঞগণের সমন্বয়ে যৌক্তিক মূল্যায়ন করে পাঠ্যপুস্তকটি পরিমার্জন করা হয়েছে। আশা করা যায় পরিমার্জিত পাঠ্যপুস্তকটির মাধ্যমে শিখন হবে অনেক গভীর এবং জীবনব্যাপী।

পাঠ্যপুস্তকটি প্রণয়নে ধর্ম, বর্ণ, সুবিধাবঞ্চিত ও বিশেষ চাহিদাসম্পন্ন শিক্ষার্থীর বিষয়টি বিশেষভাবে বিবেচনায় নেওয়া হয়েছে। বানানের ক্ষেত্রে বাংলা একাডেমির বানানরীতি অনুসরণ করা হয়েছে। পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, চিত্রাঙ্কন ও প্রকাশনার কাজে যাঁরা মেধা ও শ্রম দিয়েছেন তাঁদের সবাইকে ধন্যবাদ জ্ঞাপন করছি।

পরীক্ষামূলক এই সংস্করণের কোনো ভুল বা অসংগতি কারো চোখে পড়লে এবং এর মান উন্নয়নের লক্ষ্যে কোনো পরামর্শ থাকলে তা জানানোর জন্য সকলের প্রতি বিনীত অনুরোধ রইল।

প্রফেসর মোঃ ফরহাদুল ইসলাম

চেয়ারম্যান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, বাংলাদেশ

প্রিয় শিক্ষার্থী,

নতুন শ্রেণিতে তোমাদের অভিনন্দন ও সপ্তম শ্রেণির গণিতের জগতে তোমাদের স্বাগতম। তোমরা পূর্ববর্তী শ্রেণিতে লক্ষ করেছ আমাদের গণিত শেখার প্রক্রিয়াতে অনেক বদল এসেছে। সেই পরিবর্তনের ধারাবাহিকতায় তোমাদের জন্য সপ্তম শ্রেণির গণিত বইটি তৈরি হয়েছে।

সপ্তম শ্রেণির গণিত বইটি মোট তেরটি অভিজ্ঞতায় সাজানো হয়েছে। তোমরা তোমাদের মনের উত্তরগুলো খুঁজতে খুঁজতে এই অভিজ্ঞতার পথ অতিক্রম করবে। সারাবছর জুড়ে এই অভিজ্ঞতার মধ্যদিয়ে তোমরা নতুন কিছু সমস্যা সমাধান করবে। অভিজ্ঞতাগুলো এবং সমস্যা সমাধানের ধাপগুলো বিস্তারিতভাবে দেওয়া আছে এই বইতে। অনুসন্ধান ও সমস্যা সমাধানের মধ্যদিয়ে গণিত শিখন তোমাদের জন্য যেমন আনন্দদায়ক হবে তেমনি বাস্তব জীবনের সঙ্গে তোমরা তোমাদের এই শিক্ষাকে সম্পর্কিত করতে পারবে।

এই বইয়ের প্রথম অভিজ্ঞতা হলো 'সূচকের গল্প'। প্রাত্যহিক জীবনে সূচক ব্যবহারের ধারণা পেতে এই গল্পটি তোমাদের সাহায্য করবে। ধারাবাহিকভাবে বিভিন্ন কাজের মাধ্যমে সূচকবিষয়ক গাণিতিক দক্ষতা আয়ত্ত করার পাশাপাশি তোমরা সূচক ব্যবহারের ক্ষেত্রগুলো চিহ্নিত করতে পারবে। 'বীজগাণিতিক রাশির সূচক' অভিজ্ঞতায় বীজগাণিতিক সূত্র ও সমীকরণ বিভিন্ন মডেল তৈরির মাধ্যমে উপস্থাপন করায় বিমূর্ত বা অদেখা বিষয়গুলো তোমাদের কাছে মূর্ত ও স্পষ্ট হবে। ফলে তোমরা খুব সহজেই সূত্র ও সমীকরণ আয়ত্ত করতে পারবে। সবচেয়ে বড় কথা সূত্র মুখস্থ করার প্রয়োজন হবে না।

এরপর 'ভগ্নাংশের লসাগু ও গসাগু' এবং 'অনুপাত, সমানুপাত' অভিজ্ঞতাদুটি জীবনের সাথে সম্পর্কিত করে উপস্থাপন করা হয়েছে, ফলে তোমরা তোমাদের দৈনন্দিন জীবনের অনেক সমস্যা সমাধানের জন্য নিজেদের দক্ষ করে গড়ে তুলতে পারবে।

'আকৃতি দিয়ে যায় চেনা', 'সর্বসমতা ও সদৃশতা', 'চলো বৃত্ত চিনি' এবং 'নানা রকম আকৃতি খুঁজি' অভিজ্ঞতাগুলো একদিকে যেমন তোমাদের জ্যামিতি বিষয়ক বিভিন্ন ভাবনার খোরাক যোগাবে তেমনি সেই ভাবনার উত্তরগুলো তোমরা নিজেরাই একক, জোড়ায় ও দলগত কাজের মাধ্যমে বের করতে সক্ষম হবে।

'বাইনারি সংখ্যার গল্প' একেবারে নতুন একটি বিষয়কে তোমাদের সামনে খুব পরিচিতভাবে তুলে ধরবে। তোমরা তোমাদের মনের অজান্তেই যন্ত্রের ভাষা বোঝার দক্ষতা অর্জনের জন্য নিজেরাই উৎসাহী হয়ে উঠবে। সপ্তম শ্রেণিতে বীজগণিত সম্পর্কিত আরও তিনটি অভিজ্ঞতা দেওয়া হয়েছে। এই শিখনগুলো তোমাদের পরবর্তী শ্রেণিতে সাহায্য করবে। এই পাঠ্যপুস্তকের শেষ অভিজ্ঞতাটি হলো 'তথ্য অনুসন্ধান ও বিশ্লেষণ'। এই অভিজ্ঞতাটিতে বিভিন্ন কাজের মাধ্যমে তোমরা দৈনন্দিন জীবনে গড়, মধ্যক ও প্রচুরক ব্যবহারের পদ্ধতিগুলো আয়ত্ত করতে পারবে।

প্রতিটি অভিজ্ঞতা এমনভাবে সাজানো হয়েছে, যেন তোমরা সমস্যা সমাধানের মাধ্যমে বিভিন্ন গাণিতিক দক্ষতা আয়ত্ত করে বাস্তব জীবনে বিভিন্ন সমস্যা গাণিতিক উপায়ে সমাধানে দক্ষ হয়ে উঠতে পারো। শ্রেণিকক্ষের ভিতরে এবং বাইরে বিভিন্ন দলগত, জোড়ায় কিংবা একক কাজের মাধ্যমে অভিজ্ঞতাগুলোতে তোমরা অংশগ্রহণ করবে। তোমাদের শিক্ষক সার্বিকভাবে তোমাদের সহযোগিতা প্রদান করবেন। শেখার বিভিন্ন ধাপে এ বইটি তোমাদের জন্য সহায়ক উপকরণ হিসেবে ভূমিকা পালন করবে। আমরা আশা করছি যে, বিভিন্ন সমস্যা সমাধানে গণিতের ব্যবহার বুঝতে পেরে বাস্তব জীবনে গণিতের গুরুত্ব তোমরা অনুধাবন করতে পারবে এবং গণিত শিখতে আরও বেশি আগ্রহী হয়ে উঠবে।

তোমাদের সকলের জন্য শুভকামনা।

সূচিপত্র

সূচকের গল্প

গুণের গণনার খেলা

চলো আমরা একটি গল্প পড়ি।

অনেক অনেক বছর আগে কোনো অঞ্চলে একজন রাজা ছিলেন। একদিন রাজার দরবারে এক বিদেশি পর্যটক এলেন, সাথে নিয়ে এলেন ভীষণ সুন্দর এক চিত্রকর্ম। রাজা খুশি হয়ে পর্যটককে সেই চিত্রকর্মের মূল্য দিতে চাইলেন। কিন্তু পর্যটক সরাসরি কোনো মূল্য না চেয়ে বললেন, 'এই চিত্রকর্মের মূল্য দেওয়ার নিয়ম একটু ভিন্ন।' রাজা জিজ্ঞেস করলেন, 'বলো দেখি কি নিয়ম!' পর্যটক বললেন, টানা ৫০ দিন ধরে এর মূল্য নিবেন। প্রথম দিন তিনি ১ টাকা নিবেন। দ্বিতীয় দিন তার দ্বিগুণ, অর্থাৎ ২ টাকা। তার পরের দিন নিবেন দ্বিতীয় দিনের দ্বিগুণ, অর্থাৎ ৪ টাকা। এভাবে তিনি ৫০ দিন ধরে ঐ চিত্রকর্মের মূল্য নিবেন। হিসাবটি অনেকটা নিচের ছকের মতো।

ছক ১.০

দিন	গুণ আকারে লেখা যায়	টাকার পরিমাণ
১		১
২	১ × ২	২
৩	২ × ২	৪
৪	২ × ২ × ২	৮
	....	

রাজা ভাবলেন, এ আর এমন কি, তিনি রাজি হয়ে গেলেন। এভাবে প্রত্যেকদিন পর্যটক এসে রাজদরবার থেকে মূল্য নিয়ে যান। কিন্তু ২০ দিন যাওয়ার পর রাজার টনক নড়ে বসল। ভাবো তো কী কারণে সেটি হলো? তোমরা ছক ১.০ এর ন্যায় একটি ছক খাতায় তৈরি করে ৫ম দিন হতে ২০তম দিন পর্যন্ত টাকার পরিমাণটি নির্ণয় করো।

কিন্তু পর্যটক কী পদ্ধতিতে হিসাবটি দাঁড় করিয়েছে, তা কি ধরতে পারছ? হিসাবটি বুঝার জন্য হাতে কলমে আরও একটি কাজ করে দেখি, চলো।

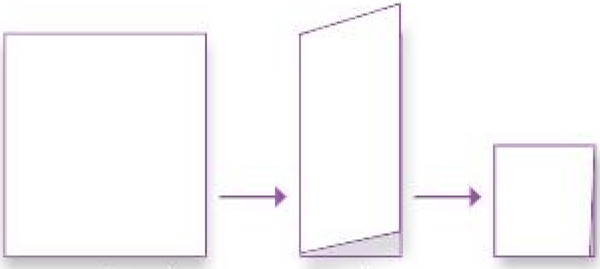
কাগজ ভাঁজের খেলা

কাগজ ভাঁজের খেলাটি খেলার জন্য নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করো:

১. A4 বা বড় খাতার মাপের একটি কাগজ নাও।

২. কাগজটির চারপাশে এমনভাবে কলম দিয়ে দাগ টানো যেন কাগজটিকে একটি আয়তক্ষেত্র মনে হয়।

৩. এখন কাগজটিকে সমান ২ ভাগে ভাঁজ করো এবং ভাঁজ বরাবর কলম দিয়ে দাগ টান। ফলে দুটি ঘর পাওয়া গেল।



চিত্র ১.০

৪. আগের ভাঁজটি ঠিক রেখেই আবার কাগজটিকে ২ ভাগে ভাঁজ করো এবং আগের মত করেই দাগ দাও। এবার কয়টি সমান ঘর পাওয়া গেল?

৫. অনুরূপভাবে আগের ভাঁজটি ঠিক রেখে আরও ৩ বার ভাঁজ করো এবং দাগ দাও।

একই ভাবে ভাঁজ করতে থাকলে কততম ভাঁজে কয়টি ঘর পাওয়া যাবে নিচের ছকে (১.১) পূরণ করার চেষ্টা করো।

পরবর্তীতে, দুটি সমান ভাঁজের জায়গায় প্রতিবারে ৩টি করে ভাঁজ করো এবং মোট ৪ বার ভাঁজ করে ছক ১.১ এর ন্যায় ছক ১.২ পূরণ করো।

ছক ১.১	
কততম ভাঁজ?	ঘর সংখ্যা
১ম	২
২য়	
৩য়	
৪র্থ	
৫ম	

ছক ১.২	
কততম ভাঁজ?	ঘর সংখ্যা
১ম	৩
২য়	
৩য়	
৪র্থ	

এবার চলো আমরা শ্রেণিকক্ষে বসেই একটি কাজ করি। তোমাদের যাদের রোল জোড় সংখ্যা তারা ৬ সংখ্যাটি নিচের ছকে লেখো এবং যাদের রোল বিজোড় তারা ৫ সংখ্যাটি নিজের ছকে লেখো।

ছক ১.৩	
সংখ্যা	কতটি সংখ্যা রয়েছে?
☐	

এখন, তুমি যে সংখ্যাটি নিলে, সেই সংখ্যাটিকে, সেই সংখ্যাটি দিয়ে ১ বার গুণ করো এবং তা নিচের ছকের ন্যায় পূরণ করো। ভেবে দেখো কী হতে পারে? তোমার রোল যদি বিজোড় হয় তাহলে দুটি ৫ গুণাকারে থাকবে। অর্থাৎ, গুণাকার হবে ৫ × ৫। তোমার রোল যদি জোড় হয় তাহলে দুটি ৬ গুণাকারে থাকবে। অর্থাৎ, গুণাকার হবে ৬ × ৬।

ছক ১.৪		
গুণাকার	গুণফল	গুণাকারে আলাদাভাবে একই সংখ্যা কতটি রয়েছে?
□×□		

এখন আগের বারের মতোই, সেই সংখ্যাটি দিয়ে ২ বার গুণ করো এবং নিচের ছকে গুণাকারে লেখো। গুণফল কত পেলে?

ছক ১.৫		
গুণাকার	গুণফল	গুণাকারে আলাদাভাবে একই সংখ্যা কতটি রয়েছে?
□×□×□		

এমন করে ৩ বার, ৪ বার ও ৫ বার গুণ করো এবং নিচের ছকে লেখো। সুবিধার জন্য আংশিক পূরণ করে দেওয়া হয়েছে ছকটি

ছক ১.৬		
গুণাকার	গুণফল	গুণাকারে আলাদাভাবে একই সংখ্যা কতটি রয়েছে?
□×□×□×□		

ছকটি পূরণ করা হলে তোমরা আরেকটি কাজ করো। এবার সংখ্যাটিকে ১০ বার, ১১ বার এবং ১২ বার গুণ করে নিচের ছকে শুধু গুণাকারে লেখো।

ছক ১.৭	
গুণাকার	গুণাকারে আলাদাভাবে একই সংখ্যা কতটি রয়েছে?

ছকে গুণাকারে লিখতে অনেক জায়গা ও সময় লাগল, তাই না? কিন্তু, আসলে খুব সহজে, অল্প জায়গায় ও একদম অল্প সময়ে এরকম বড় বড় গুণাকারগুলো লিখে ফেলা সম্ভব। এসো দেখি সেটি কীভাবে করা যায়।

সূচকের আকার

চিন্তা করে দেখো, ছক ১.৩ থেকে ছক ১.৬ এ, প্রতি ক্ষেত্রে গুণাকারে কতটি করে সংখ্যা ছিল? আমরা খুব সহজেই সেটির সাহায্যে গুণাকারটিকে অন্য উপায়ে লিখতে পারি। এক্ষেত্রে আমরা আরেকটি ছকের সাহায্য নেবো।

ছক ১.৮			
গুণাকার	গুণফল	গুণাকারে আলাদাভাবে একই সংখ্যা কতটি রয়েছে?	গুণফল লেখার নতুন উপায়
১০ × ১০	১০০	২	$১০^{২}$
১০ × ১০ × ১০	১০০০	৩	$১০^{৩}$
১০ × ১০ × ১০ × ১০	১০০০০	৪	$১০^{৪}$
১০ × ১০ × ১০ × ১০ × ১০	১০০০০০	৫	$১০^{৫}$

তোমরা কি বুঝতে পারছ এখানে কী হচ্ছে? এখানে যতটি একই সংখ্যা গুণাকারে রয়েছে আগে সেটিকে লেখা হচ্ছে এবং এর পরে যতবার রয়েছে তাকে সেই সংখ্যাটির উপরে ডান পাশে বসানো হয়েছে।

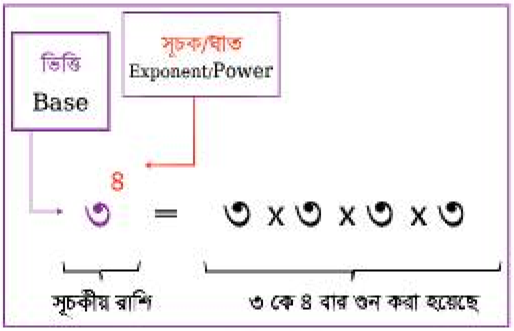
এখন নিজেরা দেখো তো কাজটি করতে পারো কিনা। নিচের ছকটি পূরণ করে ফেলো।

ছক ১.৯				
তোমার নেওয়া সংখ্যাটি কত ছিল? ৫ নাকি ৬?	গুণাকার	গুণফল	গুণাকারে আলাদাভাবে একই সংখ্যা কতটি রয়েছে?	গুণফল লেখার নতুন উপায়
			২	$\square^{২}$
			৩	$\square^{৩}$
			৪	$\square^{৪}$
			৫	$\square^{৫}$
			৬	$\square^{৬}$

এবার চিন্তা করো। তুমি তোমার নেওয়া সংখ্যাটিকে ১০ বার, ১১ বার এবং ১২ বার গুণ করে ছক পূরণ করেছিলে। কাজটি করতে কষ্ট হয়েছিল তাই না? তাহলে পরের পৃষ্ঠার ছকটিতে নতুন যে নিয়ম শিখলে সেটি অনুযায়ী দেখো তো লিখতে পারো কি না?

ছক ১.১০				
তোমার নেওয়া সংখ্যাটি কত ছিল? ৫ নাকি ৬?	গুণাকার	গুণফল	গুণাকারে আলাদাভাবে একই সংখ্যা কতটি রয়েছে?	গুণফল লেখার নতুন উপায়

খেয়াল করো: চিত্র ১.১ এ দেখো, একই সংখ্যা বার বার গুণ আকারে লেখার বদলে আমরা ঐ সংখ্যার ডানপাশে উপরে ছোট করে নির্দেশ করে দিচ্ছি একই সংখ্যাকে কতবার গুণ করা হয়েছে। গণিতের ভাষায় একে বলে সূচক। পাশের ছবিটি দেখো।



চিত্র ১.১

৩ হলো ভিত্তি। আর ৩ কে যেহেতু ৪ বার গুণ করা হয়েছে, তাই ৪ হলো ৩ এর সূচক। আমরা নতুন আরও একটি শব্দ শিখেছি- power.

তাহলে বোঝা গেল যে সূচকের মাধ্যমে আমরা খুব সহজেই বড় একটি গুণের কাজকে এক নিমেষেই সংক্ষেপে প্রকাশ করতে পারি। তাহলে এবার দেখে নেওয়া যাক সূচক দিয়ে সংখ্যাকে প্রকাশ করলে তা কীভাবে পড়ব।

সূচকীয় রাশি	কীভাবে পড়ব?
$৩^{২}$	৩ এর সূচক বা ঘাত ২ (3 to the power 2) [কোনো সংখ্যার সূচক বা ঘাত ২ এর অর্থ হলো সেই সংখ্যাকে বর্গ করা হয়েছে। ৩ এর ক্ষেত্রে তাই আমরা একে ৩ squared অথবা ৩ এর বর্গ-ও বলতে পারি।]
$৩^{৩}$	৩ এর সূচক বা ঘাত ৩ [কোন সংখ্যার সূচক বা ঘাত ৩ এর অর্থ হলো সেই সংখ্যাকে ঘন করা হয়েছে। ৩ এর ক্ষেত্রে তাই আমরা একে ৩ cubed অথবা ৩ এর ঘনও বলতে পারি।]
$৩^{৪}$	৩ এর সূচক বা ঘাত ৪
$৩^{৫}$	৩ এর সূচক বা ঘাত ৫

এই যে বড় বড় গুণাকারকে সহজে লেখার যে পদ্ধতি দেখানো হলো, সেটিই মূলত সূচকীয় পদ্ধতি।

এখন আরেকটি বিষয় নিয়ে ভাবি। এতক্ষণ দেখা গিয়েছে, একটি গুণাকার কাঠামোতে, একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা বা ভিত্তি যে কয়বার থাকছে, সেই সংখ্যাটিকে ওই ভিত্তির জন্য আমরা সূচক বা ঘাত হিসেবে ব্যবহার করতে পারি। না বুঝতে পারলে উপরের চিত্রটি আবার দেখো।

এবার, ছক ১.৮ থেকে একটি উদাহরণ দেখা যাক।

$১০^৩ = ১০ \times ১০ \times ১০$

এখানে ৩টি ১০ গুণাকারে আছে দেখে ১০ এর উপর ঘাত হিসেবে রয়েছে ৩।

তাহলে চিন্তা করে দেখো, ছক ১.৩ এ তুমি কী করেছিলে? গুনে দেখো সেখানে কতটি সংখ্যা ছিল? সেখানে কিন্তু ১টি মাত্র সংখ্যা ছিল। আবার উদাহরণ হিসেবে বলা যায়, শুধু ১০ লিখলে সেখানে ১টিই ১০ থাকে।

এই ক্ষেত্রেও সূচকীয় প্রকাশ করা যায়। আর সেই ঘাত বা সূচকটি আমাদের নতুন শেখা নিয়ম অনুযায়ীই হবে। অর্থাৎ, শুধু একটি সংখ্যা বা ১০ কে লেখা যায় $১০^১$ হিসেবে।

তাহলে ছক ১.১১ পূরণ করো। পরবর্তীতে ছক ১.১১ এর ন্যায় ছক নিজের খাতায় অঙ্কন করো এবং ৯ সংখ্যাটির জন্য সেটি পূরণ করো।

ছক-১.১১				
সংখ্যা	ঘাত	গুণাকারে লেখো	সূচকীয় পদ্ধতিতে লেখো	গুণফল
১০	১	১০	$১০^১$	১০
	২	১০×১০		১০০
	৩		$১০^৩$	১০০০
	৪	$১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০$		১০০০০
	৫		$১০^৫$	১০০০০০
	৬	$১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০$		১০০০০০০

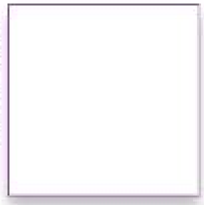
আশা করি তোমরা এতক্ষণে সূচক সম্পর্কে একটি বিস্তারিত ধারণা পেয়ে গেছ। এবার তাহলে আমরা নিচের ছকটি পূরণ করার চেষ্টা করি।

ছক ১.১২			
গুণাকার	সূচকীয় আকার	ভিত্তি	ঘাত
$৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭ \times ৭$			
$১৪ \times ১৪ \times ১৪ \times ১৪ \times ১৪$			
$২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২$			
$১১ \times ১১ \times ১১ \times ১১ \times ১১ \times ১১ \times ১১ \times ১১$			
২১			

চলো, আমরা আবার আমাদের সেই কাগজ ভাঁজের খেলার কথা ভাবি। তোমরা চিত্র ১.০ দেখে নাও। সেখান থেকে কি সূচকের কোনো ধারণা করতে পারো? যদি পারো, তাহলে, ছক ১.১৩পূরণ করো এবং পরবর্তীতে প্রতিবারে সমান ৩ ভাগ করে ভাঁজের জন্য ছক ১.১৩ এর ন্যায় নিজের খাতায় ছক অঙ্কন করে পূরণ করো।

ছক ১.১৩				
ভাঁজের প্রকৃতি	ভাঁজ সংখ্যা	ঘর সংখ্যা	গুণাকার	সূচকীয় আকার
প্রতিবারে সমান ২ ভাগ করে ভাঁজ	১	২		
	২			
	৩			
	৪			
	৫			

এখন একটি বিষয় চিন্তা করো, তুমি যখন কোনো ভাঁজ করোনি, তখনও কিন্তু চারপাশে দাগটানা পুরো কাগজটিকেই একটি ঘর হিসেবে চিন্তা করা যায়।



কোনো ভাঁজ না থাকলে ভাঁজ সংখ্যা ০, কিন্তু ঘর কতটি থাকছে? ১টি। এবার আরেকটি মজার বিষয় দেখো, তুমি প্রতিবারে যে কয়টি করেই ধনাত্মক সংখ্যক ভাঁজ করতে চাও না কেন, একদম প্রথমবারে, অর্থাৎ শূন্য ভাঁজে ঘর সেই ১টিই থাকবে। এখান থেকে তোমরা কিছু বুঝতে পারছ কি?

একক কাজ

১) উপরে সেই রাজার অঙ্কের যে ছকটি ছিল সেটিকে তোমার খাতায় নিচের ছকের মতো সম্পূর্ণ করো।

দিন	সূচকীয় আকার	টাকার পরিমাণ
১		১
২	$২^১$	২
	⋮	
২৯		
৩০		

০ ও ১ এর সূচক

তোমাদের বিদ্যালয় কর্তৃপক্ষ ঠিক করেছে, তোমাদের শ্রেণিতে মোট ৫ দিন ধরে ক্যান্ডি দেওয়া হবে। তবে সেক্ষেত্রে কয়েকটি নিয়ম আছে।

প্রথমত কে কতটি করে ক্যান্ডি পাবে, তা নির্ভর করবে প্রত্যেকের রোল নম্বরের উপর। প্রত্যেক শিক্ষার্থীর রোল নম্বরের শেষ অঙ্কের সাপেক্ষে এই ক্যান্ডি প্রদান করা হবে।

এখন কীভাবে রোলের শেষ অঙ্কের সাহায্য নিয়ে ক্যান্ডি প্রদান করা হবে?

প্রথম দিন রোলের শেষ অঙ্ক যা, একজন শিক্ষার্থীকে সেই সংখ্যক ক্যান্ডি দেওয়া হবে।

পরের দিন, অর্থাৎ দ্বিতীয় দিন একজন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যা হবে, আগের দিনে পাওয়া ক্যান্ডির সংখ্যার সাথে তার রোলের শেষ অঙ্ক গুণ করা হলে, গুণফল যা হবে সেই সংখ্যক।

তৃতীয় দিনে, গত দুদিন সে যে কয়টি ক্যান্ডি পেয়েছিল, সেটির সাথে তার রোলের শেষ অঙ্কের যে গুণফল, সেই গুণফলের সংখ্যক ক্যান্ডি পাবে।

এই নিয়মেই বাকি দুদিন সকলে ক্যান্ডি পাবে।

প্রথমেই তোমরা তোমাদের রোল নম্বর চিন্তা করো এবং নিজের রোলের শেষ অঙ্কটি নাও। নিয়ম অনুযায়ী, তোমার রোল যদি এক অঙ্কের হয়, তাহলে সেটিই তোমার রোলের শেষ অঙ্ক বা গ্রহণযোগ্য অঙ্ক।

তাহলে, নিচের ছকটি পূরণ করে ফেলো তো।

ছক ১.১৪			
রোল	রোলের শেষ অঙ্ক	দিন	প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যা
□	□	১ম দিন	□
		২য় দিন	□×□
		৩য় দিন	□×□×□
		৪র্থ দিন	
		৫ম দিন	

এখন তোমরা একটি বিষয় দেখো তো। তোমাদের শ্রেণিতে যাদের রোলের শেষে ০ অথবা ১ ছিল, তারা আসলে ৫ দিন শেষে কতটি ক্যান্ডি পেয়েছে? কিংবা তাঁদের প্রতিদিনের প্রাপ্ত ক্যান্ডির সংখ্যা কত?

খেয়াল করলে দেখবে যাদের রোলের শেষ অঙ্ক ০ তারা কোনোদিনই ক্যান্ডি পায়নি। আবার যাদের রোলের শেষ অঙ্ক ১, তারা প্রতিদিনই একটি করে ক্যান্ডি পেয়েছে। অর্থাৎ, তাদের কারোরই প্রতিদিনে প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যায় কোনো পরিবর্তন আসেনি। সুতরাং ০ ও ১ এর উপর সূচক বসলেও তা যথাক্রমে ০ ও ১ ই থাকে। তবে মনে রাখবে ০ এর উপর কিন্তু কখনও সূচক হিসেবে ০ হয় না। কেন হয় না ভেবে দেখতে পারো কি?

সূচকের গুণ

আমরা দেখেছি সূচকের সাহায্যে অনেক বড় বড় গুণকে সহজে ও কম সময়ে লিখে ফেলা যায়। তবে, প্রতিবার যদি এমনভাবে বড় বড় গুণাকার নিয়ে কাজ করা লাগে তাহলে কি কাজ সহজ হয়? তাই, এসো আমরা আরেকটি নতুন বিষয় শিখি। এবারও তোমাদের জোড়-বিজোড় রোলের সাহায্য নেবো। অর্থাৎ, যাদের রোল জোড়, তারা ৬ সংখ্যাটি ব্যবহার করবে এবং যাদের রোল বিজোড় তারা ৫ সংখ্যাটি ব্যবহার করবে।

নিচের ছ -১.১৫ ভাল করে লক্ষ্য করো। সাহায্যের জন্য পুরো ছকটি পূরণ করে দেওয়া আছে। এর সাহায্যে পরবর্তীতে ছক ১.১৬ পূরণ করতে হবে।

ছক ১.১৫
(ছকে গুণের ভিত্তি হিসেবে ১০ ধরা হয়েছে।)

গৃহীত সংখ্যা	গুণ	গুণের ১ম পদ	১ম পদের গুণাকার কাঠামো	গুণের ২য় পদ	২য় পদের গুণাকার কাঠামো	গুণফল	গুণফলের সূচকীয় কাঠামো
১০	$১০^{২} \times ১০^{৪}$	$১০^{২}$	১০ × ১০	$১০^{৪}$	১০ × ১০× ১০ × ১০	১০ × ১০ × ১০ × ১০ × ১০ × ১০	$১০^{৬}$
	$১০^{৩} \times ১০^{৩}$	$১০^{৩}$	১০ × ১০ × ১০	$১০^{৩}$	১০ × ১০ × ১০	১০ × ১০ × ১০ × ১০ × ১০ × ১০	$১০^{৬}$
	$১০^{৪} \times ১০^{১}$	$১০^{৪}$	১০ × ১০ × ১০ × ১০	$১০^{১}$	১০	১০ × ১০ × ১০ × ১০ × ১০	$১০^{৫}$
	$১০^{২} \times ১০^{১}$	$১০^{২}$	১০ × ১০	$১০^{১}$	১০	১০ × ১০ × ১০	$১০^{৩}$
	$১০^{১} \times ১০^{৩}$	$১০^{১}$	১০	$১০^{৩}$	১০ × ১০ × ১০	১০ × ১০ × ১০ × ১০	$১০^{৪}$

ছক ১.১৬							
(ছক ২.৩ এর কাজ অনুযায়ী ১০ এর বদলে তোমার নেওয়া সংখ্যাকে ভিত্তি ধরে নিচের ছকে গুণফল কি হবে তা নির্ণয় করো এবং প্রয়োজনে নিজের খাতায় ছকটি সম্পূর্ণ করো।)							
গৃহীত সংখ্যা	গুণ	গুণের ১ম পদ	১ম পদের গুণাকার কাঠামো	গুণের ২য় পদ	২য় পদের গুণাকার কাঠামো	গুণফল	গুণফলের সূচকীয় কাঠামো
$\square$	$\square^{২} \times \square^{৪}$						
	$\square^{১} \times \square^{৪}$						
	$\square^{৩} \times \square^{১}$						
	$\square^{২} \times \square^{১}$						
	$\square^{৩} \times \square^{৩}$						

এখন ছক ১.১৫ ও ছক ১.১৬ এর আলোকে তুলনা করার চেষ্টা করো। কী বুঝতে পারলে?

যদি একই ভিত্তি হয়, তাহলে দুটি সূচকীয় কাঠামোকে গুণ করা হলে, গুণফলটিও একই ভিত্তির একটি সূচকীয় কাঠামো হয়। নতুন সূচকীয় কাঠামোর সূচক বা ঘাতটি হয়, গুণ্য ও গুণকের সূচক বা ঘাতের যোগফল। এরপরে প্রদত্ত ছকের সাহায্যে বিষয়টি আরও ভালভাবে বোঝা যাবে। ছকটি আংশিক পূরণ করা রয়েছে।

ক্রমিক	ছক-১.১৫ হতে প্রাপ্ত তথ্য			ছক ১.১৬ হতে প্রাপ্ত তথ্য		
	গুণ	গুণ করার ধাপ	গুণফল	গুণ	গুণ করার ধাপ	গুণফল
১	$১০^{২} \times ১০^{৪}$	$১০^{২+৪}$	$১০^{৬}$	$\square^{২} \times \square^{৪}$		
২	$১০^{৩} \times ১০^{৩}$		$১০^{৬}$	$\square^{১} \times \square^{৪}$		
৪	$১০^{৪} \times ১০^{১}$		$১০^{৫}$	$\square^{৩} \times \square^{১}$		
৫	$১০^{২} \times ১০^{১}$	$১০^{২+১}$	১০	$\square^{২} \times \square^{১}$		
৬	$১০^{১} \times ১০^{৩}$		$১০^{৪}$	$\square^{৩} \times \square^{৩}$		

একই ভিত্তির দুটি বা ততোধিক সূচকীয় রাশির গুণফলটিকে ওই একই ভিত্তির আরেকটি সূচকীয় আকারে প্রকাশ করা সম্ভব। গুণফলের সূচকটি হবে গুণাকারে থাকা ঐ ভিত্তিরই সকল রাশির সূচকগুলোর যোগফল।

একক কাজ

১) সূচকের গুণের নিয়মের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় করো। (গুণফল ০ অথবা ১ হলে, ভিত্তিতে ০ অথবা ১ থাকবে এরূপ সূচকের মান সম্পর্কে যা শিখেছ সেই অনুযায়ী গুণফল লিখবে)

ক্রমিক	সূচকের গুণ	গুণফল (সূচকীয় আকারে)
১	$৭^{৪} \times ৭^{৭}$	
২	$০^{৮} \times ০^{২}$	
৩	$১^{২৪} \times ১^{১৮}$	
৪	$১২^{১২} \times ১২^{১২}$	
৫	$৭১^{২৮} \times ৭১^{৭২}$	
৬	$২১^{২১} \times ২১^{১৪} \times ২১^{৫} \times ২১^{২}$	

২) হাসান দুটি সূচকীয় আকারের সংখ্যা গুণ করতে গিয়ে আটকে গিয়েছে। সেই সংখ্যা দুটি হলো $৫^{২}$ এবং $১২^{২}$। সে সংখ্যা দুটিকে ছকের মতো করে দুইবার গুণাকারে লিখল। দেখো তো সে ঠিক লিখেছে কি না?

$৫^{২} \times ১২^{২} = ৫^{২+২} = ৫^{৪} = ৬২৫$	$১২^{২} \times ৫^{২} = ১২^{২+২} = ১২^{৪} = ২০৭৩৬$

যদি হাসানের করা দুটি গুণ প্রক্রিয়ার কোনো একটি ঠিক হয় তবে সেই প্রক্রিয়ায় তুমি $২^{৩}$ এবং $৫^{৪}$ এর গুণফল নির্ণয় করো। যদি হাসানের করা গুণ প্রক্রিয়া ভুল হয়, তবে তুমি হাসানের ভুলটি চিহ্নিত করে সঠিক গুণফল নির্ণয় করো এবং পরবর্তীতে সঠিকভাবে $২^{৩}$ এবং $৫^{৪}$ এর গুণফল নির্ণয় করো।

সূচকের ভাগের নিয়ম-১

চলো আমরা পূর্বের সেই রাজার গল্পের ন্যায় ভাবার চেষ্টা করি। কিন্তু উল্টোভাবে। দুটি দলে ভাগ হয়ে এই গল্পের কাজটি চিন্তা করব। একটি দলের নাম 'ক' এবং আরেকটি দলের নাম 'খ'।

'ক' দলের কাছে $২^{১০} = ১০২৪$টি লজেন্স আছে। কিন্তু 'খ' দলের কাছে কোনো লজেন্স নেই। এখন 'ক' দল, 'খ' দলকে লজেন্স দেবে। কিন্তু সেখানে একটি নিয়ম আছে।

নিয়মটি হলো, 'ক' দল, 'খ' দলকে প্রতিদিন আগের দিনের অর্ধেক সংখ্যক লজেন্স দেবে। অর্থাৎ, 'ক' দল কোনো একদিন যে পরিমাণ লজেন্স দেবে পরেরদিন সেটিকে ২ দ্বারা ভাগ করে যে ভাগফল পাওয়া যায়, সেই সংখ্যক লজেন্স দেবে। মনে রাখতে হবে যে, শুধুমাত্র পূর্ণসংখ্যক লজেন্সই দেওয়া যাবে। কখনই লজেন্সকে ভেঙ্গে অর্ধেক করে, কিংবা সেটিকে আবার অর্ধেক করে দেওয়া যাবে না। এভাবে যতদিন লজেন্স দেওয়া সম্ভব, ততদিন চলতে থাকবে।

ধরো প্রথম দিনে, 'ক' দল, 'খ' দলকে $২^{৫}$ সংখ্যক লজেন্স দিয়েছে। তাহলে পরেরদিন কতটি দেবে? কিংবা তার পরেরদিন কতটি দেবে? সেই তথ্য বের করার জন্য এবার ছকটি পূরণ করো।

ছক ১.১৭ (যদি কোনোদিন লজেন্স দেওয়া সম্ভব না হয় অথবা সূচকীয় আকারে প্রকাশ করা সম্ভব না হয়, তবে সেই ঘরে ক্রস চিহ্ন দেবে)		
দিন	প্রদত্ত লজেন্স সংখ্যার সূচকীয় আকার	প্রদত্ত লজেন্স সংখ্যার গুণাকার
১ম	$২^৫$	$২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২$
২য়		$\frac{২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২}{২} = ২ \times ২ \times ২ \times ২$
৩য়		
৪র্থ		
৫ম		
৬ষ্ঠ		
৭ম		

এভাবে ছকের মাধ্যমে তুমি আগের দিনে প্রদত্ত লজেন্স সংখ্যা জেনে পরেরদিন প্রদত্ত লজেন্স সংখ্যা হিসাব করতে পারছ। কিন্তু, তোমার কাছে যদি সরাসরি জানতে চাওয়া হয় যে ৪র্থ দিনে কতটি লজেন্স দেওয়া হয়েছে, তুমি কীভাবে বলবে? নিশ্চয় এভাবে ছকের মতো করে অথবা প্রতিদিনে প্রদত্ত লজেন্সের তথ্য ব্যবহার করে।

এবার তোমরা কল্পনা করো, শুরুতে 'ক' দলের কাছে লজেন্সের পরিমাণ ছিল $২^{১২}$টি। প্রথম দিন তারা 'খ' দলকে $২^{১০}$ সংখ্যক লজেন্স প্রদান করে। এরপর পূর্বের নিয়ম মেনেই লজেন্স প্রদান করতে থাকে যতদিন সম্ভব হয়। এখন ভাবো তো, তোমার কাছে যদি জানতে চাওয়া হয় ৮ম দিনে 'খ' দল কতটি লজেন্স পেয়েছে, তা নিচের ছকের সাহায্যে নির্ণয় করো।

ছক ১.১৮		
দিন	প্রদত্ত লজেন্স সংখ্যার সূচকীয় আকার	প্রদত্ত লজেন্স সংখ্যার গুণাকার
১ম	$২^{১০}$	$২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২$
২য়		$\frac{২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২}{২}$ $= ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২$
৩য়		

৪র্থ		
৫ম		
৬ষ্ঠ		
৭ম		
৮ম		

দেখো, এই কাজটি করতে অনেক পরিশ্রম হচ্ছে এবং অনেক সময়ও ব্যয় হচ্ছে। তাই এ পর্যায়ে চলো, গুণের মতো সূচকের ভাগেরও যে সহজ উপায় আছে তা দেখি।

আমরা পূর্বে সূচকের গুণের পদ্ধতি যেভাবে ছকের মাধ্যমে দেখেছি, এখানেও সেভাবেই দেখার চেষ্টা করব। তোমরা আবার জোড় ও বিজোড় রোল দুইভাগে ভাগ হয়ে যাও এবং আবার জোড় রোলধারীরা ৬ সংখ্যাটি নাও এবং বিজোড় রোলধারীরা ৫ সংখ্যাটি নাও।

এবার পরবর্তী ছক ১.১৯ ভালো করে লক্ষ করো। সাহায্যের জন্য পুরো ছকটি পূরণ করে দেওয়া আছে। এর সাহায্যে পরবর্তীতে ছক ১.২০ পূরণ করতে হবে।

ছক ১.১৯

গৃহীত সংখ্যা	ভাগ	ভাজ্য	১ম পদের গুণাকার কাঠামো	ভাজক	২য় পদের গুণাকার কাঠামো	ভাগফল কাঠামো	ভাগফল	ভাগফলের সূচকীয় কাঠামো
১০	$১০^{৪} \div ১০^{২}$	$১০^{৪}$	১০ × ১০ × ১০× ১০	$১০^{২}$	১০ × ১০	$\frac{১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০}{১০ \times ১০}$	১০ × ১০	$১০^{২}$
	$১০^{৩} \div ১০^{২}$	$১০^{৩}$	১০ × ১০ × ১০	$১০^{২}$	১০ × ১০	$\frac{১০ \times ১০ \times ১০}{১০ \times ১০}$	১০	$১০^{১}$
	$১০^{৪} \div ১০^{১}$	$১০^{৪}$	১০ × ১০ × ১০× ১০	$১০^{১}$	১০	$\frac{১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০}{১০}$	১০ × ১০ × ১০	$১০^{৩}$
	$১০^{২} \div ১০^{১}$	$১০^{২}$	১০ × ১০	$১০^{১}$	১০	$\frac{১০ \times ১০}{১০}$	১০	$১০^{১}$
	$১০^{১} \div ১০^{১}$	$১০^{১}$	১০	$১০^{১}$	১০	$\frac{১০}{১০}$	১	?

ছক ১.২০								
(ছক ১.১৯ এর ক্রমিক অনুযায়ী ১০ এর বদলে তোমার নেওয়া সংখ্যাকে ভিত্তি ধরে নিচের ছকে ভাগ কি হবে তা নির্ণয় করো এবং প্রয়োজনে খাতায় ছকটি সম্পূর্ণ করো)								
গৃহীত সংখ্যা	ভাগ	ভাজ্য	১ম পদের গুণাকার কাঠামো	ভাজক	২য় পদের গুণাকার কাঠামো	ভাগফল কাঠামো	ভাগফল	ভাগফলের সূচকীয় কাঠামো
$\square$	$\square^{৪} \div \square^{২}$							
	$\square^{৩} \div \square^{২}$							
	$\square^{৪} \div \square^{১}$							
	$\square^{২} \div \square^{১}$							

ছক ১.১৯ ও ছক ১.২০ এর আলোকে তুলনা করার চেষ্টা করো। কী বুঝতে পারলে?

যদি ভিত্তি একই হয়, তাহলে দুটি সূচকীয় কাঠামোকে ভাগ করা হলে, ভাগফলটিও একই ভিত্তির নতুন একটি সূচকীয় কাঠামো হয়। নতুন সূচকীয় কাঠামোর সূচক বা ঘাতটি হয়, ভাজ্যের সূচক বা ঘাত হতে ভাজকের সূচক বা ঘাতের বিয়োগফল। নিচের ছকের সাহায্যে বিষয়টি আরও ভালভাবে বোঝা যাবে। ছকটি আংশিক পূরণ করা রয়েছে।

ছক ১.১৯ ও ছক ১.২০ এ ব্যবহৃত তথ্য অনুযায়ী ছকটি পূরণ করতে হবে। ছকটি আংশিক পূরণ করা আছে। তোমার শিখন ও ছক দুটি হতে প্রাপ্ত তথ্যের মাধ্যমে ছকটি সম্পূর্ণ করো

ক্রমিক	ছক-১.১৯ হতে প্রাপ্ত তথ্য			ছক ১.২০ হতে প্রাপ্ত তথ্য		
	ভাগ	ভাগ করার ধাপ	ভাগফল	ভাগ	ভাগ করার ধাপ	ভাগফল
১	$১০^{৪} \div ১০^{২}$	$১০^{৪-২}$	$১০^{২}$	$\square^{৪} \div \square^{২}$		
২	$১০^{৩} \div ১০^{২}$		$১০^{১}$	$\square^{৩} \div \square^{২}$		
৩	$১০^{৪} \div ১০^{১}$		$১০^{৩}$	$\square^{৪} \div \square^{১}$		
৪	$১০^{২} \div ১০^{১}$	$১০^{২-১}$	$১০^{\square}$	$\square^{২} \div \square^{১}$		

একই ভিত্তির দুটি সূচকীয় রাশির ভাগফলকে ওই একই ভিত্তির আরেকটি সূচকীয় আকারে প্রকাশ করা সম্ভব। সেক্ষেত্রে ভাগফলের সূচকটি হবে ভাজ্যের সূচক হতে ভাজকের সূচকের বিয়োগফল।

ঘাত যখন ০

এবার একটি বিষয় লক্ষ করো। ছক ১.১৯ এর সর্বশেষ সারিতে আমরা কাজটি কী করেছি ভাবো তো? আমরা ১০ কে ১০ দিয়ে ভাগ করেছি মূলত। কিন্তু সূচকীয় ভাগে এটি হয়ে যায় $\frac{১০}{১০}$ । এখন আমরা সূচকের ভাগের নিয়মটি কী শিখেছি দেখো তো?

সেই নিয়ম থেকে কিন্তু লেখা যায়, $\frac{১০}{১০} = ১০^{১-১} = ১০^{০} = ১$

মনে করার চেষ্টা করো, আমরা শুরুতেই কাগজ ভাঁজ করার খেলা খেলেছিলাম? সেখানে আমরা কি দেখে এসেছিলাম বলো তো? যখন কোনো ভাঁজ নেই, তখন একটি ঘর পাওয়া যায়। অর্থাৎ ০ ভাঁজে আমরা ১টি ঘর পেয়েছিলাম। আবার উপর থেকে সূচকের সূত্রের সাহায্যে আমরা কি দেখতে পাচ্ছি? ১০ এর উপর সূচক ০ হলে সেটি ১ হয়। এবার তাহলে ঝটপট নিচের ছকটি পূরণ করে ফেলো তো।

ছক ১.২১ (আংশিক পূরণ করা রয়েছে)

ভাগ	সূত্রের সাহায্যে ভাগফলের সূচকীয় প্রক্রিয়া	ভাগফল কাঠামো	ভাগফল	সূত্রের সাহায্যে প্রাপ্ত ভাগফলের সূচকীয় কাঠামো
$১০^{৪} \div ১০^{৪}$	$১০^{৪-৪}$	$\frac{১০^{৪}}{১০^{৪}}$	১	$১০^{০}$
$২^{২} \div ২^{২}$				
$৩^{৭} \div ৩^{৭}$				
$৭^{৩} \div ৭^{৩}$				
$৬^{১} \div ৬^{১}$				

এখান থেকে তোমরা আসলে কী দেখতে পাচ্ছ বলো তো? একটু ব্যাখ্যা করলে বলা যায় সাধারণ ভাগের নিয়মে আমরা কোনো সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল ১ পাই। এখন চিন্তা করো কখন কোনো সংখ্যার উপর সূচক ০ হয়? যখন সেই সংখ্যাটিকে সেই সংখ্যা দ্বারা অথবা সেই সংখ্যার কোনো সূচকীয় আকারকে একই আকার দ্বারা ভাগ করা হয়। তার মানে যেকোনো সংখ্যার উপর সূচক ০ হলে সেই সূচকীয় ফলটি হবে ১। এবার কি তোমার কাগজ ভাঁজের সাথে তুমি কোনো মিল খুঁজে পাচ্ছ?

এবার আরেকটি বিষয় নিয়ে ভাবি। ০ এর উপর কি সূচক ০ হতে পারে? এবার দেখো আমরা ছক ১.২১ এর সাহায্য নেবো। চলো ছকটির প্রথম সারিতে আমরা $১০^{৪} \div ১০^{৪}$ এর বদলে $০^{৪} \div ০^{৪}$ নিয়ে ভাবি। এখন,

ছক ১.২২

ভাগ	সূত্রের সাহায্যে ভাগফলের সূচকীয় প্রক্রিয়া	ভাগফল কাঠামো	ভাগফল	সূত্রের সাহায্যে প্রাপ্ত ভাগফলের সূচকীয় কাঠামো
$০^{৪} \div ০^{৪}$	$০^{৪-৪}$	$\frac{০^{৪}}{০^{৪}} = \square$	?	$০^{০}$

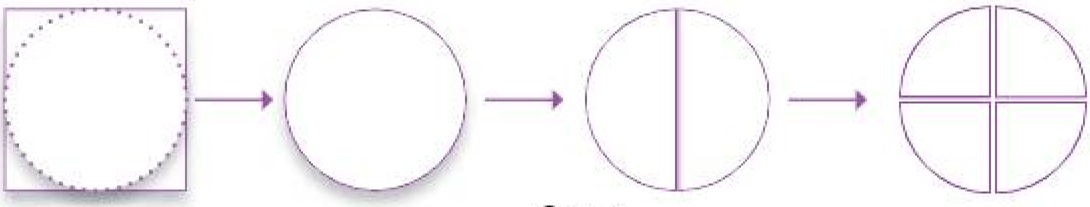
এখন বলো তো কেন এটি সম্ভব হচ্ছে না? কারণটি দেখো, আমরা শিখে এসেছি, $০^{৪}$ হলো আসলে ০। তাহলে আমরা এই ভাগফল পাই $\frac{০}{০}$। এখন ০ কে কি ০ দিয়ে ভাগ করা সম্ভব? তোমরা ষষ্ঠ শ্রেণিতে কিন্তু দেখে এসেছ যে ০ দ্বারা কোনো সংখ্যাকে ভাগ করা সম্ভব নয়।

তাহলে $\frac{০}{০}$ ও কিন্তু সম্ভব নয়। তাই ০ এর উপর সূচক ০ হতে পারে না। এভাবে চিন্তা করে দেখো, যেকোনো ক্ষেত্রেই $০^{০}$ নির্ণয় করার জন্য আমাদের ০ কে ০ দিয়ে ভাগ করার প্রয়োজন হয়। যা আমরা করতে পারছি না। এজন্যেই ০ এর উপর সূচক ০ হলে, সেই সূচকের কোনো মান থাকে না। এখানে তুমি আসলে কাগজ ভাঁজের কথাও চিন্তা করতে পারো। তুমি কি আসলে ভিত্তি ০ ধরে, অর্থাৎ প্রতিবারে ০টি করে ভাঁজ করতে পারো কোনোভাবে?

০ ব্যতীত যেকোনো সংখ্যার সূচক বা ঘাত ০ হলে সেই সূচকের মান হবে ১।

সূচকের ভাগের নিয়ম - ২

চলো আমরা আবার কাগজ নিয়ে কিছু কাজ করি। তোমরা একটি কাগজ কেটে একটি বৃত্ত তৈরি করো। এবার সেই বৃত্তটিকে সমান দুই খণ্ডে কাটো। ফলে দুটি খণ্ড তৈরি হলো। এবার ভাবো তো এই যেকোনো একটি খণ্ড ওই বৃত্তের কত অংশ? সেটি পৃষ্ঠার ছকে দেখো।



চিত্র ১.১

ছক ১.২৩		
কর্তন সংখ্যা	খণ্ড সংখ্যা	একটি খণ্ড বৃত্তটির কত অংশ (ভগ্নাংশে)
১	২	$\frac{১}{২}$

এবার দুটি খণ্ডকেই আবার পূর্বের ন্যায় সমান দুইভাবে কাটো এবং ভাবো একটি খণ্ড, পূর্ণ বৃত্তের কত অংশ। পূর্বের ন্যায় নিচের ছকটি পূরণ করো।

ছক ১.২৪		
কর্তন সংখ্যা	খণ্ড সংখ্যা	একটি খণ্ড বৃত্তের কত অংশ (ভগ্নাংশে লেখো)
২		

এভাবে কাজটি আরও ৩ বার করার চেষ্টা করো এবং নিচের ছকে তোমার প্রাপ্ত তথ্য বসাও।

ছক ১.২৫		
কর্তন সংখ্যা	খন্ড সংখ্যা	একটি খন্ড বৃত্তের কত অংশ (ভগ্নাংশে লেখো)
৩		
৪		
৫		

দেখো, আমরা প্রত্যেকবারই খন্ড করছি। অর্থাৎ, সাধারণভাবে চিন্তা করলে খন্ড বা ভাগ করার চেষ্টা করছি। এখানে কি সূচকের কোনো ধারণা করতে পারো তুমি? তুমি পূর্বের সূচকের ভাগের ধারণাটি একটু ভেবে দেখতে পারো।

তোমাদের সাহায্যের জন্য ছক ১.২৩ কিছুটা ব্যাখ্যা করা যাক। দেখো, আমরা ১ বার কেটে খন্ড পাই কতটি? ২টি এবং একেকটি খন্ড বৃত্তের $\frac{১}{২}$ অংশ। এখন দেখো, আমরা প্রতিবার দুটি করে খন্ড করছি বৃত্তকে। তোমরা যদি শুরুতে কাগজ ভাঁজের খেলাটি বুঝে থাকো, তাহলে বলতে পারবে আমাদের ভিত্তি কিন্তু ২। কিন্তু এখানে আমরা ভাগ করছি এবং বিশেষভাবে কেটে, খন্ড করে ভাগ করছি।

তুমি বাকি ছকগুলো দেখলে এবং সেখানে থেকে সূচকের ধারণা ব্যবহার করতে পারলে বুঝতে পারবে এখানে সূচকের ব্যবহার রয়েছে। এদিকে, আমরা যখন কেটে ফেলছি, সেই কাজটিকে আমরা কিন্তু বাদ কিংবা বিয়োগ হিসেবে চিন্তা করতে পারি। তাহলে এবার ভেবে দেখো তো কিছু বুঝতে পারো নাকি?

এখন, আমরা সূচকের ভাগ বোঝার সময় যেভাবে দুটি দলের মাঝে লজেন্স প্রদানের খেলাটি খেলেছিলাম, সেটিই আবার খেলার চেষ্টা করব। পুরো খেলার নিয়মটি আগের মতোই থাকবে, শুধু একটিমাত্র পরিবর্তন হবে। সেই খেলায় দল দুটি শুধু পূর্ণসংখ্যক লজেন্স আদান-প্রদান করতে পেরেছিল। কিন্তু এবার দল দুটি শুধু পূর্ণসংখ্যক নয়, বরং ভগ্নাংশ সংখ্যক লজেন্সও আদান-প্রদান করতে পারবে। অর্থাৎ, একটি লজেন্সকে চাইলে ২ ভাগ, কিংবা ৪ ভাগ করে সেই অংশগুলোও দেওয়া যাবে।

এবার ভেবে দেখো তো কী হতে পারে? পূর্বের ছকটি কল্পনা করো এবং সেটি পূরণ করার চেষ্টা করো তো।

ছক ১.২৬ (যদি কোন দিন লজেন্সের সংখ্যাকে সূচকীয় আকারে প্রকাশ করা সম্ভব না হয়, তবে সেই ঘরে ক্রস চিহ্ন দেবে. প্রয়োজনে নিজের খাতায় ছকটি অঙ্কন করে পূরণ করতে পারো।)		
দিন	প্রদত্ত লজেন্স সংখ্যার সূচকীয় আকার	প্রদত্ত লজেন্স সংখ্যার গুণাকার
১ম	$২^৫$	$২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২$
২য়		$\frac{২ \times ২ \times ২ \times ২ \times ২}{২} = ২ \times ২ \times ২ \times ২$

৩য়		
৪র্থ		
৫ম		
৬ষ্ঠ		
৭ম		
৮ম		

এখন ভাবো তো কী পরিবর্তন হলো আসলে?

দেখো, এতক্ষণ আমরা যা কিছু দেখেছি, সেখানে কোনো ক্ষেত্রেই প্রাপ্ত ঘাতটি ঋণাত্মক অথবা শূন্য হয়নি। তাহলে চলো এবার সেই বিষয়টি দেখি। এক্ষেত্রে মনে রাখবে, আমরা পূর্বে ভাগফলের যে নিয়ম শিখেছি তা কিন্তু সর্বক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।

চলো আমরা ছক ১.১৯ এর মতো করেই এই বিষয়টি শেখার চেষ্টা করব। তবে উলটো উপায়ে। উক্ত ছকে যেটি ভাজ্য ছিল, আমরা এখানে সেটিকে ভাজক এবং উক্ত ছকে যেটি ভাজ্য ছিল সেটিকে ভাজক ধরব। তবে আমরা ছক ১.১৯ এর মতো ক্রমিক অনুসরণ করব না। এবার তাহলে নিচের ছকটি দেখি চলো।

ছক ১.২৭

গৃহীত সংখ্যা	ভাগ	ভাগ করার ধাপ	ভাগফল	ভাগফল কাঠামো	ভাগফল	ভাগফলের সূচকীয় এবং লব-হর কাঠামো
১০	$১০^{২} \div ১০^{৩}$	$১০^{২-৩}$	$১০^{-১}$	$\frac{১০ \times ১০}{১০ \times ১০ \times ১০}$	$\frac{১}{১০}$	$\frac{১}{১০}$
	$১০^{৩} \div ১০^{৪}$	$১০^{৩-৪}$	$১০^{-১}$	$\frac{১০ \times ১০ \times ১০}{১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০}$	$\frac{১}{১০}$	$\frac{১}{১০}$
	$১০^{০} \div ১০^{১}$	$১০^{০-১}$	$১০^{-১}$	$\frac{১}{১০}$	$\frac{১}{১০}$	$\frac{১}{১০}$
	$১০^{২} \div ১০^{৪}$	$১০^{২-৪}$	$১০^{-২}$	$\frac{১০ \times ১০}{১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০}$	$\frac{১}{১০ \times ১০}$	$\frac{১}{১০^{২}}$
	$১০^{০} \div ১০^{২}$	$১০^{০-২}$	$১০^{-২}$	$\frac{১}{১০ \times ১০}$	$\frac{১}{১০ \times ১০}$	$\frac{১}{১০^{২}}$
	$১০^{১} \div ১০^{৪}$	$১০^{১-৪}$	$১০^{-৩}$	$\frac{১০}{১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০}$	$\frac{১}{১০ \times ১০ \times ১০}$	$\frac{১}{১০^{৩}}$

এবার এর সাহায্যে আবার আগের ন্যায় ছক ১.২৮ পূরণ করো।

ছক - ১.২৮

গৃহীত সংখ্যাটি হবে রোল জোড় হলে ৬ এবং বিজোড় হলে ৫। প্রয়োজনে নিজের খাতায় ছকটি এঁকে পূরণ করো।

গৃহীত সংখ্যা	ভাগ	ভাগ করার ধাপ	ভাগফল	ভাগফল কাঠামো	ভাগফল	ভাগফলের সূচকীয় এবং লব-হর কাঠামো
$\square$	$\square^{২} \div \square^{৩}$					
	$\square^{৩} \div \square^{১}$					
	$\square^{২} \div \square^{৪}$					
	$\square^{০} \div \square^{২}$					
	$\square^{১} \div \square^{৪}$					

একক কাজ

১) নিচের ছকটি পূরণ করো।

ক্রমিক	সূচকের ভাগ	ভাগফল	ভাগফলের সূচকীয় এবং লব-হর কাঠামো (যদি প্রয়োজন হয়)
১	$১১^{১৪} \div ১১^{৭}$		
২	$৬^{৭} \div ৬^{৯}$		
৩	$১৭^{২} \div ১৭^{০}$		
৪	$৭১^{৭১} \div ৭১^{৮}$		
৫	$১৯^{০} \div ১৯^{৯}$		
৬	$১৪^{৩} \div ১৪^{৩}$		

২) সূচকের ভাগের ধারণা ব্যবহার করে খাতায় ছক ১.১৭ এবং ছক ১.২৬ এর অনুরূপ ছক অঙ্কন করো এবং সেটি সম্পূর্ণ করো।

৩) আকাশ দুটি সূচকীয় আকারের সংখ্যা ভাগ করতে গিয়ে আর ভাগ করতে পারছে না। সেই সংখ্যা দুটি হলো $১৮^{৩}$ এবং $৬^{২}$। সে সংখ্যা দুটিকে ছকের মতো করে দুইবার ভাগ করে ভাগফল নির্ণয় করল। দেখো তো সে ঠিক লিখেছে কি না?

$১৮^{৩} \div ৬^{২} = ১৮^{৩-২} = ১৮^{১} = ১৮$	$৬^{২} \div ১৮^{৩} = ৬^{২-৩} = ৬^{-১} = \frac{১}{৬}$

যদি আকাশের করা দুটি ভাগ প্রক্রিয়ার কোনোটি ঠিক হয় তবে সেই নিয়মে তুমি $৬^{৪}$ এবং $৪^{২}$ এর ভাগফল নির্ণয় করো। যদি আকাশের করা ভাগ প্রক্রিয়া ভুল হয়, তবে তুমি আকাশের ভুলটি চিহ্নিত করে সঠিক ভাগফল নির্ণয় করো এবং পরবর্তীতে সঠিকভাবে $৬^{৪}$ এবং $৪^{২}$ এর গুণফল নির্ণয় করো।

সূচকের সূচক

আমরা আবার বিদ্যালয় থেকে ৫ দিন ধরে নিজেদের রোলের শেষ অঙ্কের সমান ক্যান্ডি দেয়ার কথাটি ভাবি। ধরো তোমাদের বিদ্যালয়ে এবার সিদ্ধান্ত নেওয়া হলো যে আগেরবারের মতো কেউ একদমই পাচ্ছে না এমন হবে না। সেটি ভুল হয়ে গিয়েছিল। তাই আবার বিদ্যালয় কর্তৃপক্ষ আগেরবারের মতো সকলকে ৫ দিন ধরে ক্যান্ডি দেওয়ার সিদ্ধান্ত নিল, কিন্তু নতুন নিয়মে।

এবারও তাহলে তোমরা তোমাদের রোল নম্বর চিন্তা করো এবং রোলের শেষ অঙ্কটি নাও। তবে এবার এখানে নতুন নিয়ম হয়েছে। যেহেতু আগেরবার যাদের রোলের শেষ অঙ্ক ০ অথবা ১ ছিল তারা একদমই কোনো ক্যান্ডি পায়নি বা খুব কম ক্যান্ডি পেয়েছে, তাই এবার সেই সকল শিক্ষার্থীর রোলের শেষ অঙ্ক না ধরে তার জায়গায় ১১ ধরা হবে। অর্থাৎ, যাদের রোলের শেষ অঙ্ক ০ কিংবা ১, তারা নিজদের রোলের শেষ অঙ্কের জায়গায় ১১ ধরবে।

পূর্বের থেকে আরেকটি নিয়মে পরিবর্তন এসেছে। আগের নিয়মে প্রথম দিন রোলের শেষ অঙ্ক যা, একজন শিক্ষার্থীকে সেই সংখ্যক ক্যান্ডি দেওয়া হয়েছে। কিন্তু এবার প্রথমদিন সকলেই ১টি করে ক্যান্ডি পাবে। বাকি নিয়মগুলো আগের মতোই রয়েছে। অর্থাৎ, দ্বিতীয় দিন একজন শিক্ষার্থীর প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যা হবে, আগের দিনে পাওয়া ক্যান্ডির সংখ্যার সাথে তার রোলের শেষ অঙ্ক গুণ করা হলে, গুণফল যা হবে সেই সংখ্যক। এভাবে বাকি তিনদিন সকলে ক্যান্ডি পাবে।

ছক ১.২৯

(ছকে অবশ্যই গুণফলের সূচক আকারে প্রকাশ করতে হবে। কোনো ক্ষেত্রেই তোমাদের গুণফলটিকে প্রকাশ করতে হবে না)

রোল	রোলের শেষ অঙ্ক	দিন	প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যা
□	□	১ম দিন	১
		২য় দিন	১ × □
		৩য় দিন	১ × □ × □
		৪র্থ দিন	
		৫ম দিন	

উপরের ছকটি পূরণ করা হলে আবার পরের পৃষ্ঠার ছকটি পূরণ করো। তবে এক্ষেত্রে তোমাদের একটি দল হিসেবে কাজ করতে হবে। যে সকল শিক্ষার্থীর রোলের শেষ অঙ্ক মিলে যায়, তাদের নিয়ে একটি দল গঠন হবে। দল গঠন হলে তোমাদের নিজেদের কাছে থাকা ক্যান্ডির গুণের কাজ করতে হবে। গুণটি কি রকম হবে? গুণটি হবে তোমাদের কাছে থাকা প্রতিদিনের ক্যান্ডির গুণফলের সমান। যেমন ধরো, তোমাদের প্রত্যেকের

কাছে ২য় দিন কতটি ক্যান্ডি ছিল সেটি গুণ করতে হবে। তাহলে এরপরে ৩য় দিন নিজেদের দলের প্রত্যেকের কাছে কতগুলো ক্যান্ডি ছিল তা গুণ করতে হবে। এভাবে নিচের ছকটি পূরণ করো।

এখানে ছক পূরণের আগে একটি বিষয় ভাবো। ধরো, কোনো দল ১০টি করে ক্যান্ডি পায় এবং সেই দলে ৫ জন আছে। তাহলে দ্বিতীয় দিন সেই দলের প্রত্যেকে ক্যান্ডি পাবে, ১০টি করে এবং ৩য় দিন পাবে $১০^{২}$টি করে। এভাবে ছকটি পূরণ করো

ছক ১.৩০

রোল	রোলের শেষ অঙ্ক	দিন	১ জনের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যা	১ জনের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যার গুণাকার	দলের সকলের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যার গুণাকার	সূচকীয় আকারে গুণফল
		১ম দিন	১	১		
		২য় দিন				
		৩য় দিন				
		৪র্থ দিন				
		৫ম দিন				

উপরের ছকটি পূরণ করা হলে নিচের ছকটি দেখো এবং ভাবো তো আসলে কী ঘটনা ঘটছে। এখানে আমরা ধরে নিচ্ছি ১০ এর হারে ক্যান্ডি পাওয়া যায় এবং ধরে নিচ্ছি দলে মোট ৫ জন আছে।

ছক ১.৩১

একটি ঘর পূরণ করা আছে। তোমার আগের ছক ১.২৯ এর সাহায্যে বাকি ঘরগুলো পূরণ করো। ফাঁকা ঘরগুলো কিংবা আংশিক পূর্ণ ঘরগুলো অনুরূপভাবে সম্পূর্ণ করো

দিন	১ জনের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যা	১ জনের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যার গুণাকার	দলের সকলের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যার গুণাকার	সূচকের গুণের নিয়ম ব্যবহার করে, সূচকীয় আকারে গুণফল
১ম দিন	$১০^{০}$	১	১ × ১ × ১× ১ × ১	১ = $১০^{০}$
২য় দিন	$১০^{১}$	১০	১০ × ১০ × ১০ × ১০ × ১০	$১০^{৫}$
৩য় দিন	$১০^{২}$	১০ × ১০	$১০^{২}$ × $১০^{২}$ × $১০^{২}$ × $১০^{২}$ × $১০^{২}$	$১০^{১০}$
৪র্থ দিন	$১০^{৩}$			
৫ম দিন	$১০^{৪}$			

উপরের ছকটি পূরণ করা হলে একটি বিষয় ভাবো তো।

আমরা শিখে এসেছি, একই সংখ্যা যদি একাধিকবার গুণাকারে থাকে তাহলে, সেই গুণাকার কাঠামোতে সেই সংখ্যাটি যতবার আছে সেটিকে ওই সংখ্যার সূচক হিসেবে বসিয়ে সূচকীয় আকারে লিখতে পারি।

চিন্তা করো, আমরা ছক ১.৩১ এর ২য় সারিতে কী পাচ্ছি? ৫টি ১০ গুণাকারে আছে। তাই সূচকের ধারণা ব্যবহার করে আমরা পাচ্ছি, $১০^৫$। এখন, ৩য় সারিতে আমরা কী পাচ্ছি? ৫টি $১০^২$ গুণাকারে আছে। তাহলে চিন্তা করো, ঠিক আগের সারিতে $১০^২$ এর জায়গায় আমরা যখন শুধু ১০ ব্যবহার করেছি তখন কী হয়েছে? ৫টি ১০ এর গুণফল, তাই $১০^৫$। তাহলে আমরা সূচকের ধারণা থেকে কিন্তু বলতেই পারি ৫টি $১০^২$ গুণাকারে থাকলে লিখতে পারব $(১০^২)^৫$। এখন তাহলে সূচকের সেই ধারণা ব্যবহার করে আমরা নিচের ছকটি পূরণ করতে পারি কি না ভাবো তো।

ছক ১.৩২	
গুণাকার	সূচকীয় আকার
$১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০$	
$১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২$	
$১৪ \times ১৪ \times ১৪ \times ১৪ \times ১৪ \times ১৪ \times ১৪$	
$১৪^৩ \times ১৪^৩ \times ১৪^৩ \times ১৪^৩ \times ১৪^৩ \times ১৪^৩ \times ১৪^৩$	

এবার তাহলে নিচের ছক দুটিকে পুনরায় তুমি এতক্ষণ যা শিখেছ সেই অনুযায়ী পূরণ করো।

ছক ১.৩৩

আংশিক পূরণ করা রয়েছে। ফাঁকা ঘরগুলো কিংবা আংশিক পূর্ণ ঘরগুলো অনুরূপভাবে সম্পূর্ণ করো

দিন	১ জনের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যা	১ জনের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যার গুণাকার	দলের সকলের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যার গুণাকার	সূচকের সূচকীয় আকারে গুণফল
১ম দিন	$১০^২$	১	$১ \times ১ \times ১ \times ১ \times ১$	$(১০^০)^৫$
২য় দিন	$১০^১$	১০	$১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০ \times ১০$	$(১০^১)^৫$
৩য় দিন	$১০^২$	১০×১০	$১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২$ $= ১০^{২+২+২+২+২} = ১০^{২\times৫}$	
৪র্থ দিন	$১০^৩$			
৫ম দিন	$১০^৪$			

ছক ১.৩৪						
রোল	রোলের শেষ অঙ্ক	দিন	১ জনের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যা	১ জনের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যার গুণাকার	দলের সকলের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যার গুণাকার	সূচকের সূচকীয় আকারে গুণফল
		১ম দিন	১	১		
		২য় দিন				
		৩য় দিন				
		৪র্থ দিন				
		৫ম দিন				

এখন একটি বিষয় লক্ষ করো, আমরা এভাবে যে সূচককে সূচকীয় আকারে প্রকাশ করছি সেটিকে কিন্তু চাইলে শুধুমাত্র সূচকীয় আকারে প্রকাশ করা সম্ভব। ছক ১.৩০ ও ছক ১.৩৩ এর গুণাকার এবং সর্বশেষ কলাম দুটি মিলিয়ে যে ছকটি পাওয়া যায় সেটি নিচে দেওয়া আছে। ছকটি আংশিক পূরণ করে দেওয়া আছে।

ছক ১.৩৫ ছক ১.৩০ ও ছক ১.৩৩ হতে প্রাপ্ত তথ্যের সাহায্যে আংশিক পূরণ করা রয়েছে। তোমার প্রাপ্ত তথ্যের মাধ্যমে বাকিগুলো পূরণ করো		
দলের সকলের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যার গুণাকার	সূচকের সূচকীয় আকারে গুণফল	সূচকের গুণের নিয়ম ব্যবহার করে, সূচকীয় আকারে গুণফল
১ × ১ × ১× ১ × ১	$(১০^০)^৫$	$১০^০ = ১$
১০ × ১০ × ১০× ১০ × ১০	$(১০^১)^৫$	$১০^৫$
$১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২$	$(১০^২)^৫$	$১০^{১০}$

অনুরূপভাবে দেখো তো ছক ১.৩১ ও ১.৩৪ এ তোমাদের প্রাপ্ত তথ্যের সাহায্যে নিচের ছকটি পূরণ করতে পারো কিনা?

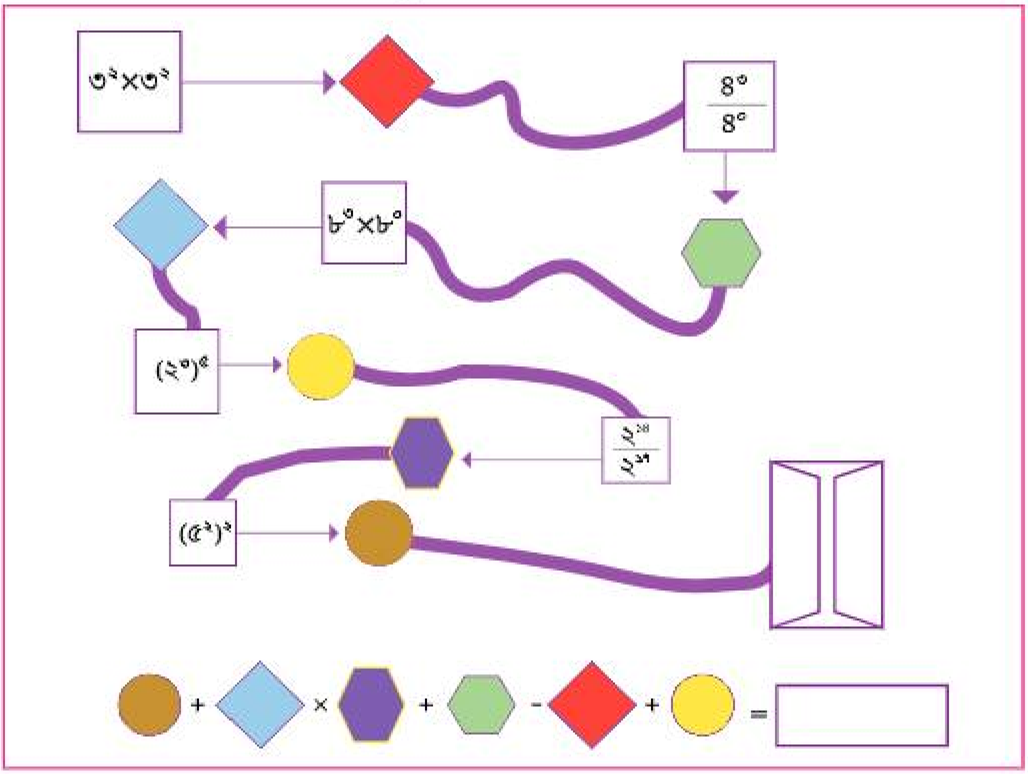
ছক ১.৩৬ (ছক ১.৩১ ও ছক ১.৩৪ হতে তোমার প্রাপ্ত তথ্যের মাধ্যমে পূরণ করো)		
দলের সকলের প্রাপ্ত ক্যান্ডি সংখ্যার গুণাকার	সূচকের সূচকীয় আকারে গুণফল	সূচকের গুণের নিয়ম ব্যবহার করে, সূচকীয় আকারে গুণফল

তাহলে কী দেখা যাচ্ছে বলো তো?

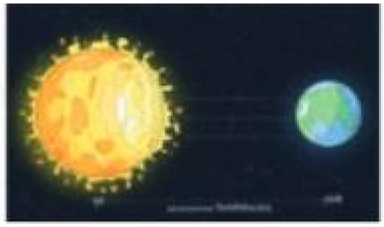
$১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২ \times ১০^২$ কে লেখা যায় $(১০^২)^৫$ হিসেবে এবং $(১০^২)^৫$ কে লেখা যায়, $১০^{২\times৫} = ১০^{১০}$ হিসেবে।

একক কাজ

নিচের ডায়াগ্রামটি দেখো এবং এর মধ্যের লুকানো নম্বরটি বের করো।

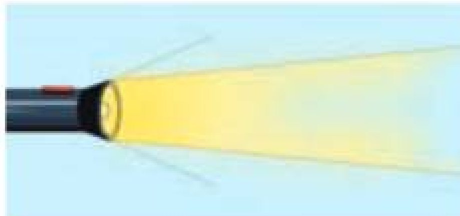


আরও একটু সূচক



তোমরা জানো, সূর্য থেকে পৃথিবীতে আলো এসে পৌঁছাতে গড়ে ৮ মিনিট ১৮ সেকেন্ড সময় লাগে। কিন্তু তোমরা কি জানো পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব কতটুকু? সুবিধার জন্য ধরে নেওয়া হয় সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্ব ১৫০০০০০০০ কিলোমিটার।

কাজ: পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব কত হবে চিন্তা করে বলো তো।



আবার, তোমরা কি জানো আলোর গতিবেগ কত? গাণিতিক সুবিধার্থে ধারণা করা হয় আলোর গতিবেগ প্রতি সেকেন্ডে ৩০, ০০, ০০, ০০০ মিটার।

কাজ: আলোর বেগ কত হবে চিন্তা করে বলো তো।

একটু চিন্তা করো, আমরা তো সূচকের সাহায্যে অনেক বড় গুণাকারকে সহজে এবং ছোট আকারে প্রকাশ করে ফেলতে পারি। এখন একটু ভেবে দেখো তো, সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্ব কিংবা আলোর গতিবেগের মতো বড় সংখ্যাকে ছোট আকারে প্রকাশের জন্য আমরা সূচকের কোনো সাহায্য নিতে পারি কি না?

আলোর গতিবেগের জন্য প্রদত্ত ছকটি দেখো। এখানে তোমাদের জন্যে কয়েকটি ঘর পূরণ করে দেওয়া আছে। তুমি সেগুলোর সাহায্যে বাকিগুলো পূরণ করো এবং সেটির সাহায্যে চিন্তা করো তো ঠিক কি হয়। তবে ছক পূরণ করার সময় অবশ্যই একটি বিষয় মাথায় রাখবে, নিচের দ্বিতীয় কলামে কিন্তু কখনও ভাগ করতে করতে ১ এর চেয়ে ছোট সূচকহীন কোনো সংখ্যা আসবে না।

ছক ১.৩৭		
আলোর গতিবেগ: সেকেন্ডে ৩০, ০০, ০০, ০০০ মিটার (প্রায়)		
সংখ্যা	১০ দ্বারা ভাগ করে প্রকাশ	সূচক আকারে প্রকাশ
৩০০০০০০০০	৩০০০০০০০ × ১০	৩০০০০০০০×১০^{১}
	৩০০০০০০ × ১০ × ১০	৩০০০০০০×১০^{২}
	৩০০০০০ × ১০ × ১০ × ১০	৩০০০০০০×১০^{৩}

এভাবেই সূচকের সাহায্যে যে শুধু কষ্ট কমানো যায় ব্যাপারটা এমন নয়। বরং অনেক বড় সংখ্যাকে ছোট আকারে প্রকাশ করা যায়।

তাহলে চলো এবার আমরা সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্বকে ছোট আকারে প্রকাশের জন্য ছক ১.৩৮ দেখি। এখানেও তোমাদের সুবিধার জন্য কয়েকটি ঘর পূরণ করে দেওয়া আছে।

ছক ১.৩৮		
পৃথিবী থেকে সূর্যের দূরত্ব: ১৫০০০০০০০ কিলোমিটার (প্রায়)		
সংখ্যা	১০ দ্বারা ভাগ করে প্রকাশ	সূচক আকারে প্রকাশ
১৫০০০০০০০	১৫০০০০০০×১০	১৫০০০০০০×১০^{১}
	$১৫০০০০০ \times ১০ \times ১০$	১৫০০০০০×১০^{২}
	$১৫০০০০ \times ১০ \times ১০ \times ১০$	১৫০০০০×১০^{৩}
	$১৫ \times$	১৫×১০

এখানে একটি বিষয় দেখা যাচ্ছে যে ছকের শেষ সারিতে ১৫ এর সাথে ১০ সূচক আকারে রয়েছে। এখন পূর্বের ছকটির কথা চিন্তা করে দেখো তো, আমরা যতক্ষণ পর্যন্ত ভাগ করে ১০ এর চেয়ে ছোট, কিন্তু ১ এর চেয়ে বড় কোনো সংখ্যা না পেয়েছি, ততক্ষণ পর্যন্ত প্রক্রিয়াটি চালিয়ে গিয়েছি। এক্ষেত্রেও চাইলে আমরা সেটি করতে পারি। সেটি নিচের বাক্সে সম্পন্ন করো।

১৫০০০০০০০		

তাহলে কী দেখতে পেলে? সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্বকে ছোট আকারে প্রকাশ করলে কী পাওয়া যায়?

আমরা এতক্ষণ পর্যন্ত প্রায় সবক্ষেত্রেই ১০ এর সূচকের ব্যাপারটি দেখেছি। এখন আমরা সেগুলো নিয়ে একটু চিন্তা করব। আমরা সরাসরি সংখ্যা দিয়ে একটি উদাহরণ দেখার চেষ্টা করি। ১ হাজার এর গাণিতিক রূপ হলো ১০০০।

১ হাজার = ১০০০		
সংখ্যা	১০ দ্বারা গুণ করে প্রকাশ	সূচক আকারে প্রকাশ
১০০০	১০০×১০	১০০×১০^{১}
	$১০ \times ১০ \times ১০$	১০×১০^{২}
	$১ \times ১০ \times ১০ \times ১০$	১×১০^{৩}

এবার দেখো, আমরা $১০০০ = ১ \times ১০^{৩}$ পেয়েছি। একটু ভাবো তো কোনো সংখ্যার সাথে ১ গুণাকারে থাকলে সেটির কি কোনো পরিবর্তন হয়? হয় না তো। সেক্ষেত্রে আমরা লিখতে পারব $১০০০ = ১ \times ১০^{৩}$।

দেখো, সূচকবিহীন সংখ্যা ১ হলে আমরা সেটিকে উহ্য রাখতে পারি।

তাহলে দেখেছ, বাস্তবের বিভিন্ন বড় সংখ্যাকে এভাবে ছোট আকারে প্রকাশ করা যায়। প্রকাশের উপায় নিয়ে, উপরের দুটি উদাহরণ থেকে তোমার অনুধাবন নিচের প্রশ্নের উত্তরের সাহায্যে প্রকাশ করো।

* ভাগের কাজটি কখন শেষ করব?
* ভাগ করে সূচকবিহীন যে সংখ্যাটি পাবো, তা কি ১ এর চেয়ে ছোট হতে পারবে? কিংবা ১ এর সমান হতে পারবে?
* ভাগ করে সূচকবিহীন যে সংখ্যাটি পাবো, তা কি ১০ এর সমান কিংবা বড় হতে পারবে?

একক কাজ

পৃথিবী থেকে চাঁদের দূরত্ব প্রায় ৩, ৮৪, ০০০ কিলোমিটার। এই দূরত্বকে গাণিতিক ভাষায় ছোট আকারে প্রকাশ করো।

অনুশীলনী

১) নিচের সূচকগুলো নির্ণয় করো

ক্রমিক	সূচকের গুণাকার	সূচকের সূচক আকার
১	$৮^{১৪} \times ৮^{১৪} \times ৮^{১৪} \times ৮^{১৪}$	
২	$৬^{২} \times ৬^{২} \times ৬^{২} \times ৬^{২} \times ৬^{২} \times ৬^{২} \times ৬^{২} \times ৬^{২} \times ৬^{২} \times ৬^{২} \times ৬^{২}$	
৩	$১৪^{৩} \times ১৪^{৩}$	
৪	$১৮^{৯} \times ১৮^{৯} \times ১৮^{৯} \times ১৮^{৯}$	
৫	$২৫^{৪}$	

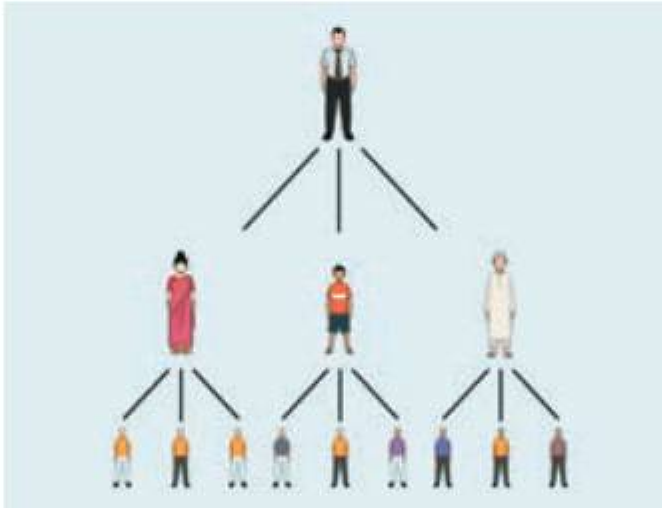
২) নিচের সূচকের সংক্ষিপ্ত আকারগুলো নির্ণয় করো

ক্রমিক	সূচকের সূচকাকার	সূচকের সংক্ষিপ্ত আকার
১	$(৪৩৭)^{২})^{১১}$	
২	$(১৯^{২})^{৪}$	
৩	$(৩৪^{৩})^{৭}$	
৪	$(২^{২})^{৬}$	
৫	$(১৩^{৩})^{১}$	

৩) খালি ঘরগুলো সঠিকভাবে পূরণ করো

সূচকের গুণ	গুণফল	সূচকের ভাগ	ভাগফল	সূচকের সূচকাকার	সূচকের সংক্ষিপ্ত আকার
$৮^{৫} \times ৮^{\square}$	$৮^{১৪}$	$৯^{৫৮} \div ৯^{\square}$	$৯^{২১}$	$(১৬^{৩})^{\square}$	$১৬^{২৪}$
$১৪^{\square} \times ১৪^{১৫}$	$১৪^{২২}$	$১১^{\square} \div ১১^{৪}$	$১১^{৮}$	$(২৬^{\square})^{৬}$	$২৬^{১২}$
$\square^{১৪} \times ৫^{১৫}$	$৫^{২৯}$	$\square^{৩৫} \div ৪^{৬}$	$৪^{২৯}$	$(\square^{৪})^{১১}$	$৩^{৪৪}$
$\square^{১০} \times \square^{৬}$	$১৭^{১৬}$	$৫২^{৮} \div ৫২^{\square}$	$৫২^{০}$	$(৫^{৪})^{-৫}$	$৫^{\square}$
$১৮^{২১} \times \square^{৬৭}$	$১৮^{৮৮}$	$৪৭^{২১} \div ৪৭^{\square}$	$৪৭^{-৩}$	$(১৫^{-৭})^{-২}$	$১৫^{\square}$
		$১৯^{১০} \div \square^{৬৭}$	$১৯^{-৫৭}$		

৪) তোমাদের নিশ্চয়ই কোভিড ১৯ মহামারির কথা মনে আছে। মারাত্মক ছোঁয়াচে এই মহামারির কারণে পুরো পৃথিবী একটা বড় সময় স্থবির হয়ে গিয়েছিল। আমরা সেই মহামারি নিয়ে একটি গণনা করার চেষ্টা করব। ধরো, একটি বাড়িতে ৩ জন লোক আছে। তারা প্রত্যেকেই কোভিড আক্রান্ত হয়েছে। এখন হিসাব করে দেখা গেল, তারা ৩ জন প্রত্যেকেই এক দিনে আলাদা-আলাদাভাবে ন্যূনতম ৩ জনকে আক্রান্ত করতে সক্ষম। আবার তাদের দ্বারা আক্রান্ত প্রত্যেকে আবার এক দিনে আলাদা-আলাদাভাবে ন্যূনতম ৩ জন করে ব্যক্তিকে আক্রান্ত করতে সক্ষম।



সূচকের ধারণার সাপেক্ষে বলো তো কোনোরকম স্বাস্থ্যবিধি মানা না হলে, পরবর্তী ৫ দিনে সর্বনিম্ন কতজন কোভিড-১৯ আক্রান্ত ব্যক্তি থাকতে পারবে? ছক অনুযায়ী পূরণ করার চেষ্টা করো। সাহায্যের জন্য চাইলে প্রদত্ত চিত্রটি দেখতে পারো।

দিন	আক্রান্ত রোগীর সংখ্যার গুণাকার	আক্রান্ত রোগীর সংখ্যার সূচকীয় আকার
১ম দিন	৩	$৩^{১}$
২য় দিন		
৩য় দিন		
৪র্থ দিন		
৫ম দিন		

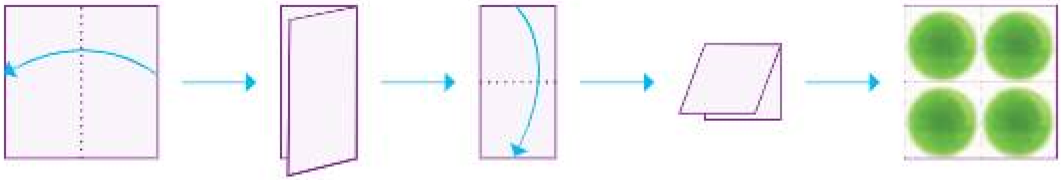
এই ধারায় ১১তম ও ১৪তম দিন শেষে সর্বনিম্ন কতজন আক্রান্ত হতে পারে?

৫) ১০ হাজার, ১ লক্ষ, ১০ লক্ষ, ১ কোটি এবং ১০ কোটি সংখ্যাগুলোকে গাণিতিক ভাষায় ছোট আকারে প্রকাশ করো। দেখো তো মূল সংখ্যায় ১ এর ডানে মোট কতটি শূন্য রয়েছে। এবার সংখ্যাটিকে ছোট আকারে প্রকাশের পর, যে সূচকীয় সংখ্যাটি পাও, তার সাথে পূর্বের প্রাপ্ত শূন্যের সংখ্যার মাঝে কোনো সম্পর্ক পাওয়া যায় কি?

বীজগাণিতিক রাশির সূচক

বর্গ চিনি

চলো আমরা একটি বর্গাকার কাগজ নিই। [বর্গ একটি আয়ত, যার বাহুগুলো পরস্পর সমান]। চিত্রের মতো করে কাগজটিকে পরপর দুইবার (একবার দৈর্ঘ্য বরাবর ও একবার প্রস্থ বরাবর) সমান অংশে ভাঁজ করি। এবার কাগজটি খোলার পর যে কয়টা ছোট ঘর হলো প্রতি ঘরে একটি করে মার্বেল রাখি। মোট কয়টি মার্বেল প্রয়োজন হলো?



চিত্র-২.১

একইভাবে আরেকটি বর্গাকার কাগজকে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর সমান তিনটি অংশে পরপর ভাঁজ করি। তোমাদের সুবিধার জন্য ভাঁজ বরাবর কাগজে স্কেলের দাগ দিয়ে ঘর করে নিতে পারো। এবার প্রতি ছোট ঘরে একটি মার্বেল বসালে কয়টি মার্বেল লাগবে?

- একই ভাবে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর সমান চারটি, পাঁচটি, ছয়টি ও সাতটি করে ভাঁজের জন্য কয়টি মার্বেল লাগে তা দিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করো।

ছক ২.১

দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর সমান অংশ সংখ্যা	মার্বেল সংখ্যা	দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর সমান অংশ সংখ্যা	মার্বেল সংখ্যা
2	4	5	
3		6	
4		7	

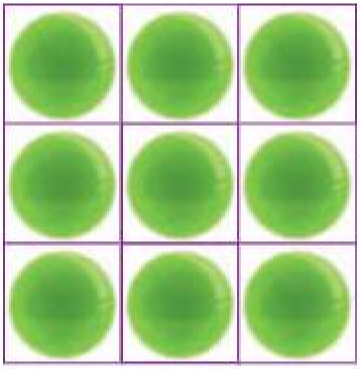
এখানে কী দেখতে পেলে? দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর যতগুলো সমান অংশে ভাঁজ করা হচ্ছে ছোট ঘর সংখ্যা ততগুণ হচ্ছে। যেমন: $2 \times 2 = 2^2 = 4$। তাহলে কোনো ভাঁজ না দিলে কয়টি মার্বেল লাগবে এবং কেনো লাগবে তা চিন্তা করো।

একক কাজ

একটি বর্গাকৃতি কাগজকে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর ৮ ভাঁজ করে দাগ টেনে দেখো ঘর সংখ্যা কত হয়?

এখানে বর্গাকার কাগজে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর সমান ভাঁজ করে যতগুলো ঘর পাওয়া যাচ্ছে বা যতগুলো মার্বেল প্রয়োজন হচ্ছে সেই সংখ্যাগুলোকে বর্গ সংখ্যা বা পূর্ণবর্গ সংখ্যা বলা হয়।

যেমন: সমান তিনটি অংশে ভাঁজ করার পর প্রতিটি সারিতে 3টি করে 3টি সারিতে মার্বেল সাজানো হবে এবং মোট মার্বেলের সংখ্যা $3 \times 3 = 3^2 = 9$। এখানে, প্রত্যেক সারিতে মার্বেলের সংখ্যা এবং সারির সংখ্যা সমান। এক্ষেত্রে আমরা 3 এর বর্গ 9 বলি অর্থাৎ 9 একটি বর্গ সংখ্যা বা পূর্ণবর্গ সংখ্যা।



চিত্র-২.২

এভাবে 1, 4, 9, 25, 49 সংখ্যাগুলোর দিকে তাকালে দেখতে পাবে এগুলোকে অন্য কোনো পূর্ণসংখ্যার বর্গ হিসেবে প্রকাশ করা যায়।

1, 4, 9, 25, 49 সংখ্যাগুলো পূর্ণবর্গ সংখ্যা।

অন্যদিকে 2, 5, 7, 12 ইত্যাদি সংখ্যাগুলিকে এভাবে একই সংখ্যার গুণফল হিসেবে প্রকাশ করা যায় না। তাই এগুলো পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়।

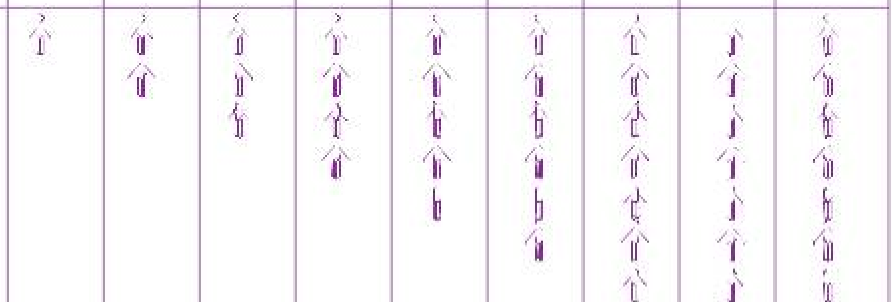
এবার, একটি বর্গাকার কাগজকে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর সমান অংশে ভাঁজ করে মার্বেল বসানোর খেলার মাধ্যমে কোনটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা এবং কোনটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয় যাচাই করো।

সংখ্যা	2	5	7	82	36	45	81	56	12
সংখ্যাটি কি পূর্ণবর্গ?									

দলগত কাজ

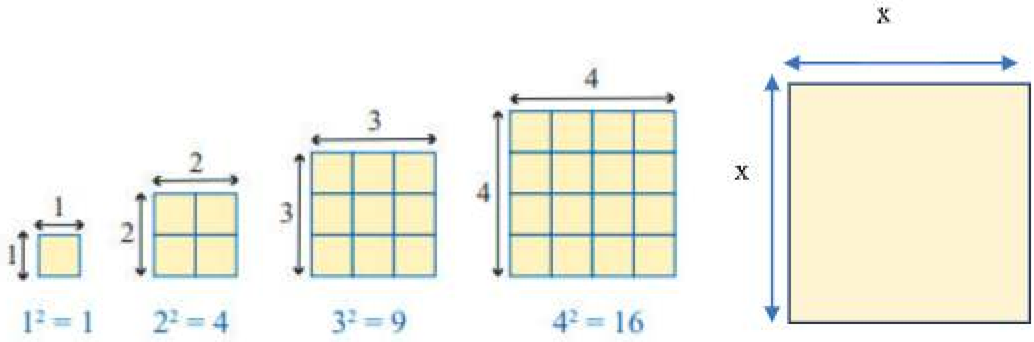
আমরা বর্গসংখ্যা কোনগুলো চিনলাম। এবার তোমাদের ক্লাস রোলের শেষ অঙ্ক অনুযায়ী দাঁড়িয়ে ১০টি সারি করো। এখন তোমরা নিজেদের মধ্যে সারির পরিবর্তন করে বর্গসংখ্যার সমান করে একেকটি সারি বানাও।

রোলের শেষ অঙ্ক	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



এখন মনে করো, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর কতগুলো সমান অংশে ভাঁজ করা হয়েছে সেটা জানা নিই। তাহলে তো ভাঁজ করে বা মার্বেল বসিয়ে আমরা খেলাটা শেষ করতে পারব না। কী করা যায়? চলো আমরা শুধু বর্গাকার কাগজের ছবি এঁকে কাগজের ক্ষেত্রফলের ধারণাটা ব্যবহার করি।

নিচের বর্গক্ষেত্রগুলি লক্ষ করি। সর্বশেষ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত হবে আমরা কি বলতে পারি? যেখানে $\mathbf{x}$ একটি অজানা রাশি যা বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য প্রকাশ করে।



আমরা জানি, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

আর, বর্গও কিন্তু একটি আয়ত, যার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ পরস্পর সমান।

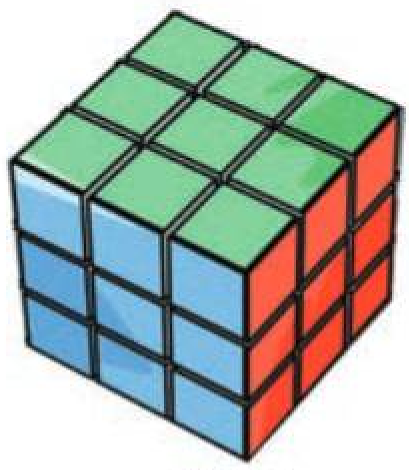
তাহলে ছবির শেষ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{x}^2$ বর্গএকক

আমরা দেখেছি, $3 \times 3 = 3^2 = 9$ কে যেমন 3 এর বর্গ বলা হয়।

একইভাবে, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}^2$ কে $\mathbf{x}$ এর বর্গ ($\mathbf{x}$ squared) বলা হয়।

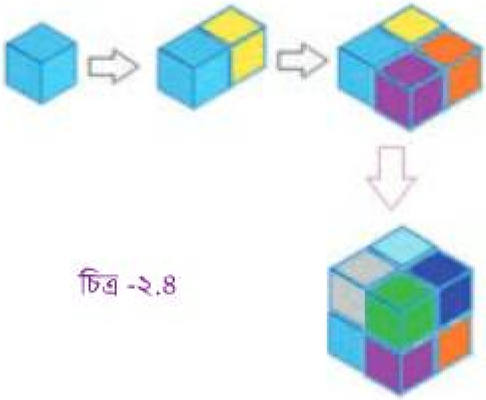
ঘন

রুবিক্স কিউবের সাথে তোমরা অনেকে পরিচিত। পাশের ছবিতে একটি 3 × 3 × 3 রুবিক্স কিউব দেখা যাচ্ছে। 3 × 3 × 3 এর মানে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর তিনটি করে ছোট ঘনক আছে। আর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হলে তাকে ঘনক বলা হয়। তাহলে, রুবিক্স কিউব নামের অর্থ কী বুঝতে পারলে? এখন, একটি রুবিক্স কিউব হাতে নিলে দেখতে পাবে এটি ছোট ছোট অনেকগুলো ঘনক দিয়ে তৈরি। তাহলে, ছবির রুবিক্স কিউবে কয়টি ছোট ঘনক আছে বলতে পারবে?



চিত্র -২.৩

এবার আমরা একটি $2 \times 2 \times 2$ আকারের কিউব তৈরি করব। একই আকারের কয়েকটি ছোট ছোট ঘনক নাও। (এক্ষেত্রে কাঠের তৈরি ঘনক নিতে পারো অথবা কাগজ দিয়েও নিজেরাই তৈরি করে নিতে পারো।) চিত্রের মতো করে দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর দুটি করে ঘনক বসিয়ে একটি বড় ঘনক বানালে কয়টি ছোট ঘনক প্রয়োজন হয় লক্ষ করো।

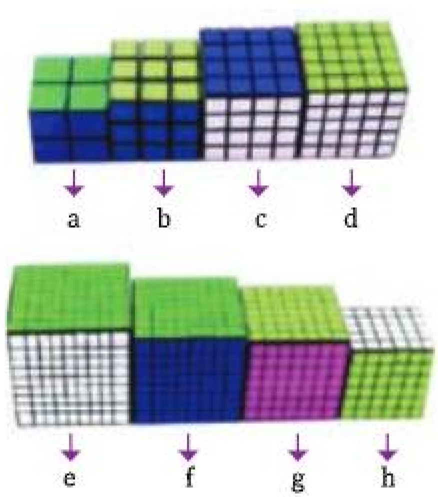


চিত্র -২.৪

একক কাজ

এখন তিনটি ও চারটি করে ছোট ঘনক নিয়ে বড় ঘনক বানাও এবং কয়টি ছোট ঘনক লাগে দেখো।

একটু লক্ষ করলে দেখবে প্রথমে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর দুটি করে ছোট ঘনক নিয়ে $2 \times 2 = 2^2 = 4$টি ঘনক নিয়েছ। আর এই 4টি ঘনকের উপরের তলগুলি একটা 2 এর বর্গ তৈরি করেছে। এরপর আবার উচ্চতা বরাবর দুটি করে ঘনক নেওয়ার জন্য মোট $4 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$টি ঘনক প্রয়োজন হয়েছে।



চিত্র -২.৫

আমরা দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর সমান সংখ্যক ছোট ঘনক নিয়ে একটি বড় ঘনক তৈরি করলাম। এখানে, মোট যতগুলো ছোট ঘনক প্রয়োজন হচ্ছে সেই সংখ্যাকে ঘন সংখ্যা বা পূর্ণঘন সংখ্যা বলা হয়।

যেমন: দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর 2টি করে ছোট ঘনক নিয়ে একটি বড় ঘনক তৈরি করতে মোট $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$টি ছোট ঘনক প্রয়োজন হচ্ছে। এক্ষেত্রে, 8 কে আমরা 2 এর ঘন বা 2^3 বলি এবং সেকারণেই 8 একটি ঘন সংখ্যা বা পূর্ণ ঘন সংখ্যা। তাহলে আমরা দেখলাম কোনো সংখ্যার ঘন নির্ণয়ের জন্য ঐ সংখ্যাকে তিনবার গুণ করতে হবে।

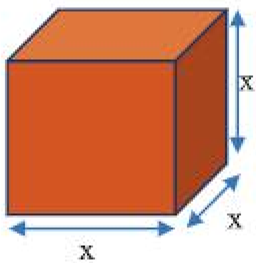
যেমন- 3 এর ঘন $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$

এবার ছবির প্রতিটি রুবিক্স কিউব তৈরি করতে মোট কতগুলো ছোট ঘনক প্রয়োজন হয়েছে তা নির্ণয় করে ছক ২.২ পূরণ করো।

ছক ২.২					
রুবিক্স কিউব	দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর ছোট ঘনক সংখ্যা	মোট কতগুলো ছোট ঘনক প্রয়োজন	রুবিক্স কিউব	দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর ছোট ঘনক সংখ্যা	মোট কতগুলো ছোট ঘনক প্রয়োজন
a	2	$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$	e		
b	3	$\square \times \square \times \square = 3^{\square} = \square$	f		
c			g		
d			h		

বর্গ সংখ্যা চেনার সময় আমরা অজানা রাশির ব্যবহারের ক্ষেত্রে ক্ষেত্রফলের সাথে তুলনা করেছিলাম। এবার চিন্তা করে দেখো তো ঘন সংখ্যার ক্ষেত্রে যদি দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বরাবর কতগুলো ছোট ঘনক আছে সেটা না জানা থাকে তাহলে কী করতে পারি?

আমরা জানি, কোনো ঘনকের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, উচ্চতা প্রত্যেকেই 1 একক হলে তাকে একক ঘনক বলা হয়। একক ঘনকের আয়তনকে আমরা 1 ঘনএকক বলি। তাহলে আয়তনের সাথে খুব সহজেই আমরা ঘন সংখ্যার তুলনা করতে পারি।



আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

আর, ঘনকও কিন্তু একটি আয়তাকৃতি ঘনবস্তু যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা পরস্পর সমান।

তাহলে ছবির ঘনকের আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা = $x \cdot x \cdot x = x^3$ ঘনএকক

আমরা দেখেছি, $3 \times 3 = 3^2$ কে যেমন 3 এর বর্গ বলা হয়।

একইভাবে, $x \cdot x \cdot x = x^3$ কে x এর ঘন (x cubed) বলা হয়।

কিন্তু আমরা এটাও জানি যে আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর আয়তন = $x \cdot x \cdot x = x^3$

উপরের উদাহরণ থেকে আমরা পেলাম যে, x^3 গঠন করতে x কে 3 বার গুণ করতে হয়েছে।

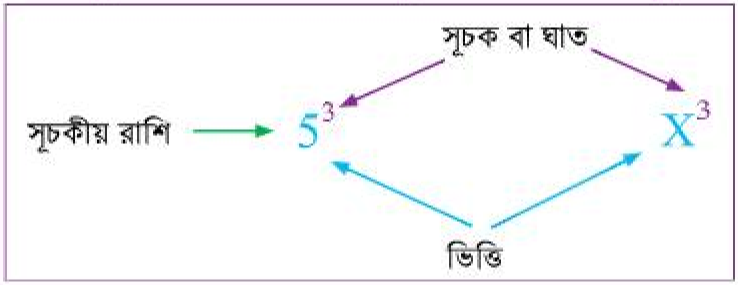
সুতরাং আমরা লিখতে পারি

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{x \text{ কে } n \text{ সংখ্যকবার গুণ করা}}$$

x এর n সংখ্যক উৎপাদক

কোনো রাশিতে একই উৎপাদক যতবার গুণ আকারে থাকে তাকে ঐ উৎপাদকের সূচক বলে। আর ঐ উৎপাদকটিকে ভিত্তি বলে।

নিচের ছবি থেকে সংখ্যার সূচকের সাথে অজানা রাশির সূচকের কি কোনো মিল খুঁজে পাচ্ছ?



একক কাজ

নিচের টেবিলটি পূরণ করো:

ছক ২.৩				
বারবার একই সংখ্যা বা রাশির গুণ (repeated multiplication)	ভিত্তি (base)	সূচক (exponent)	শক্তি সূচকীয় আকার বা ঘাত (power)	মান (value)
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	2	5	2^5	32
$x \cdot x \cdot x \cdot x$				
$4 \cdot 4 \cdot 4$				
	5	3		
			6^2	

যখন আমরা একটি সূচকীয় রাশি দ্বারা অন্য সূচকীয় রাশিকে গুণ করি তখন কি ঘটে তোমরা লক্ষ করেছ কি? চলো আমরা দেখি কি ঘটে যখন x^6 কে x^3 দ্বারা গুণ করি।

$$\underbrace{(x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x)}_{x^6}\cdot\underbrace{(x\cdot x\cdot x)}_{x^3}=\underbrace{(x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x)}_{x^9}$$

সুতরাং আমরা লিখতে পারি, $x^6 \cdot x^3 = x^{6+3} = x^9$

এবার নিচের খালিঘরগুলি পূরণ করো:

$$\underbrace{(x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x)}_{x^{\square}}\cdot\underbrace{(x\cdot x\cdot x)}_{x^{\square}}=\underbrace{(x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x)}_{x^{\square}}=x^{\square}$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, একই ভিত্তির একাধিক সূচকীয় রাশিকে গুণ করলে এদের ভিত্তি অপরিবর্তিত থাকবে কিন্তু ঘাতগুলো যোগ হবে।

সূচকের গুণের নিয়ম (Multiplication Rule of Exponent):

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{(x\cdot x\cdots\cdots x)}_{\text{(x কে m সংখ্যক বার গুণ)}}\cdot\underbrace{(x\cdot x\cdot\cdots\cdots x)}_{\text{(x কে n সংখ্যক বার গুণ)}} = x^{m+n}$$

চলো এবার x^7 কে x^3 দ্বারা ভাগ করলে কী হয় দেখি। আমরা ইতোমধ্যেই শিখেছি x^7 হলো x কে 7 বার গুণ করা। একইভাবে x^3 হলো x কে 3 বার গুণ করা। হরে-লবে কাটাকাটি করি।

$$\frac{x^7}{x^3}=\frac{x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x}{x\cdot x\cdot x}=\frac{x\cdot x\cdot x\cdot x}{1}=x^4$$

যদি ভিত্তি ভিন্ন ভিন্ন হয়, তবে ভিত্তি ভিন্ন ধরে হরে-লবে কাটাকাটি করতে হবে।

$$\frac{x^3y^5}{x^2y^3}=\frac{x\cdot x\cdot x}{x\cdot x}\cdot\frac{y\cdot y\cdot y\cdot y\cdot y}{y\cdot y\cdot y}=xy^2$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, একই ভিত্তির একাধিক সূচকীয় রাশিকে ভাগ করলে এদের ভিত্তি অপরিবর্তিত থাকবে কিন্তু লবের ঘাত থেকে হরের ঘাত বিয়োগ হবে।

$$\frac{x^m}{x^n}=x^m\div x^n=\frac{\overbrace{(x\cdot x\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot x)}^{\text{(x কে m সংখ্যক বার গুণ)}}}{\underbrace{(x\cdot x\cdot\ \ldots\ldots\ \cdot x)}_{\text{(x কে n সংখ্যক বার গুণ)}}}=x^{m-n}$$

একক কাজ

সূচকের গুণ ও ভাগের নিয়ম ব্যবহার করে নিচের রাশিগুলোকে সরল করো।

1) $3^2 \times 9^2$ 2) $5^3 \times 25^{-2}$ 3) $\frac{s^{13}}{s^5}$ 4) $\frac{s^{13}t^{-4}}{s^5t^{14}}$ 5) $\frac{2s^{13}t^{-4}}{4s^5t^{-14}}$

এবার, মনে করি, x^4 এর ঘনফল নির্ণয় করতে হবে।

এখন, $(x^4)^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 = \left(\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{x^4}\right) \cdot \left(\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{x^4}\right) \cdot \left(\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{x^4}\right)$

$= \left(\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{x \text{ কে } 12 \text{ সংখ্যক বার গুণ}}\right) = x^{12}$

$(x^m)^n = (x^m \cdot x^m \cdot x^m \cdot \ldots\ldots \cdot x^m)$ (x কে n সংখ্যক বার গুণ)

$= \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot x)}_{(x \text{ কে } m \text{ সংখ্যক বার গুণ})} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot x)}_{(x \text{ কে } m \text{ সংখ্যক বার গুণ})} \ldots\ldots \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot x)}_{(x \text{ কে } m \text{ সংখ্যক বার গুণ})}$

$= \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot x)}_{(x \text{ কে } m \cdot n \text{ সংখ্যক বার গুণ})} = x^{mn}$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, যদি কোনো সূচকীয় রাশির উপর সূচক আরোপ করা হয়, তখন সূচকগুলো পরস্পর গুণ হয়। $(x^m)^n = x^{mn}$ = যেখানে স্বাভাবিক সংখ্যা এবং x শূন্য নয়।

এবার, $(x^2y^2)^4$ এই রাশিটি নিয়ে একটু ভেবে দেখি।

$(x^2y^2)^4 = \underbrace{(x \cdot x \cdot y \cdot y)}_{x^2y^2} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot y \cdot y)}_{x^2y^2} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot y \cdot y)}_{x^2y^2} \cdot \underbrace{(x \cdot x \cdot y \cdot y)}_{x^2y^2}$

$= \underbrace{(x \cdot x)}_{x^2} \cdot \underbrace{(x \cdot x)}_{x^2} \cdot \underbrace{(x \cdot x)}_{x^2} \cdot \underbrace{(x \cdot x)}_{x^2} \cdot \underbrace{(y \cdot y)}_{y^2} \cdot \underbrace{(y \cdot y)}_{y^2} \cdot \underbrace{(y \cdot y)}_{y^2} \cdot \underbrace{(y \cdot y)}_{y^2}$

$= (x^2)^4 \cdot (y^2)^4 = x^8 \cdot y^8$

$$(xy)^n = (x^n \cdot y^n) = \underbrace{(x \cdot x \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot x)}_{(x \text{ কে } n \text{ সংখ্যক বার গুণ})} \cdot \underbrace{(y \cdot y \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot y)}_{(y \text{ কে } n \text{ সংখ্যক বার গুণ})} = x^n \cdot y^n = x^n y^n$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, সূচকীয় রাশির ভিত্তিগুলোর গুণফলের উপর যদি একই সূচক আরোপিত হয়, ফলাফল হবে পৃথক পৃথক সূচকীয় রাশির গুণফল।

ভগ্নাংশে সূচক

এবার একটি ভগ্নাংশ এর উপর সূচক প্রয়োগ করি।

ধরি, $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^4$ তাহলে আমরা লিখতে পারি,

$$\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^4 = \left(\frac{x^3}{y^2}\right) \cdot \left(\frac{x^3}{y^2}\right) \cdot \left(\frac{x^3}{y^2}\right) \cdot \left(\frac{x^3}{y^2}\right) = \frac{(x.x.x) \,.\, (x.x.x) \,.\, (x.x.x) \,.\, (x.x.x)}{(y.y) \,.\, (y.y) \,.\, (y.y) \,.\, (y.y)} = \frac{x^{12}}{y^8}$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, যদি ভিত্তির ভাগফল একই সূচক দ্বারা চালিত হয়, তাহলে ফলাফলটি লব এবং হর উভয়ই প্রদত্ত সূচক দ্বারা চালিত হবে।

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{\underbrace{(x.x \dots \dots x)}_{(x \text{ কে } n \text{ সংখ্যক বার গুণ})}}{\underbrace{(y.y \dots \dots y)}_{(y \text{ কে } n \text{ সংখ্যক বার গুণ})}} = \frac{x^n}{y^n}$$

একক কাজ

উপরের আলোচনার সাহায্য নিয়ে নিচের রাশিগুলোকে সরল করো।

১. $(5^2)^3$ ২. $(a^{-4})^3$

সূচকের শূন্যবিধি (Zero Exponent):

ভাগের সূচকীয় বিধি থেকে আমরা জানি $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ যদি $n = m$ হয়, তখন কি হবে?

চলো $\frac{x^4}{x^4}$ এই উদাহরণটি দেখি। সে ক্ষেত্রে $\frac{x^4}{x^4} = x^{(4-4)} = x^0$

কিন্তু আমরা জানি $\frac{x^4}{x^4} = \frac{x.x.x.x}{x.x.x.x} = 1$ অর্থাৎ, $x^0 = 1$

একক কাজ

এখন, যদি $x = 0$ হয় তাহলে কী হবে?

(সংকেত: $\frac{0}{0}$ এর মান কী হতে পারে?) $x^0 = 1, x \neq 0$

ঋণাত্মক সূচক (Negative Exponent)

সূচকের ভাগের ক্ষেত্রে আমরা দেখেছি, $\frac{x^m}{x^n} = X^{m-n}$। এখন, n যদি m এর চেয়ে বড় হয়, তখন কি হবে? চলো $\frac{x^4}{x^6}$, এই উদাহরণটি দেখি।

সে ক্ষেত্রে,

$$\frac{x^4}{x^6} = \frac{x.x.x.x}{x.x.x.x.x.x} = \frac{1}{x.x} = \frac{1}{x^2}$$

অর্থাৎ, $\frac{x^4}{x^6} = x^{4-6} = x^{-2}$ তাহলে, দেখা যাচ্ছে, $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

$$\frac{1}{x^n} = \frac{x^0}{x^n} = x^{0-n} = x^n$$

সূচকের ঋণাত্মকবিধি:

যদি কোনো ভিত্তির উপর ঋণাত্মক সূচক আরোপিত হয়, তখন গুণাত্মক বিপরীত ভিত্তির উপর ধনাত্মক সূচক হয়।

$$x^{-m} = (x^{-1})^m = \underbrace{(x^{-1}.x^{-1}\ldots\ldots x^{-1})}_{(x^{-1}\text{ কে m সংখ্যক বার গুণ})} = \underbrace{(\tfrac{1}{x}.\tfrac{1}{x}\ldots\ldots\tfrac{1}{x})}_{(\tfrac{1}{x}\text{ কে m সংখ্যক বার গুণ})} = \frac{\mathbf{1}^m}{x^m} = \frac{1}{x^m}$$ উল্লেখ্য

যে, $1^m = \underbrace{(1.1\ldots\ldots1)}_{(m\text{ সংখ্যক }1)} = 1$. এখানে m ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

একক কাজ

উপরের আলোচনার সাহায্য নিয়ে নিচের রাশিগুলোকে সরল করো।

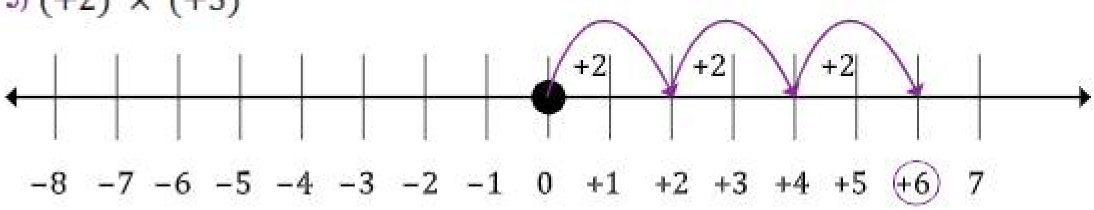
১) $(2a^{-2}b)^0$	২) $y^{-2}.y^{-4}$	৩) $(a^{-5})^{-1}$	৪) $s^{-2}\times 4s^{-7}$
৫) $(3X^{-2}Y^{-3})^{-4}$	৬) $(S^2T^{-4})^0$	৭) $\left(\frac{2^{-2}}{x}\right)^{-1}$	৮) $\left(\frac{3^9}{3^{-5}}\right)^{-2}$
৯) $\left(\frac{s^2t^{-2}}{s^4t^4}\right)^{-2}$	১০) $\frac{36a^{-5}}{4a^5b^5}$	১১) $\frac{a^6b^7c^0}{a^5c^6}$	১২) $\frac{a^{-6}b^7c^0}{a^5c^{-6}}$

বীজগণিতীয় রাশির গুণ (Algebraic Multiplication)

নিচের উদাহরণ এর মাধ্যমে সংখ্যারেখায় কীভাবে গুণ কাজ করে তা দেখানো হলো। এখানে ৪টি সমস্যা দেওয়া আছে। প্রতিটি ক্ষেত্রে সংখ্যারেখায় প্রকাশ করা হয়েছে।

এবার নিচের সমস্যাগুলো লক্ষ করো:

১) $(+2)\times(+3)$

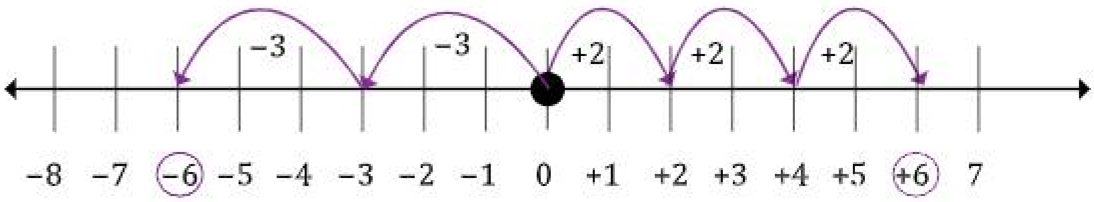


সংখ্যারেখায় গুণফলের অবস্থান $(+6)$। এক্ষেত্রে গুণফলের গতিপথ সংখ্যারেখার ডানদিকে দেখানো হয়েছে।

$(+2)\times(+3) = 2+2+2 = +6$

২) এখানে প্রথম সংখ্যার (+) চিহ্নের জন্য সংখ্যাটিকে সংখ্যারেখার ডান দিকে যেতে হয়েছে। অতঃপর গুণফলের আগে (–) চিহ্ন থাকায় গুণফলের গতিপথের দিক পরিবর্তন হয়ে শূন্য (**0**) এর সাপেক্ষে সংখ্যারেখায় বাম দিকে অবস্থান করছে।

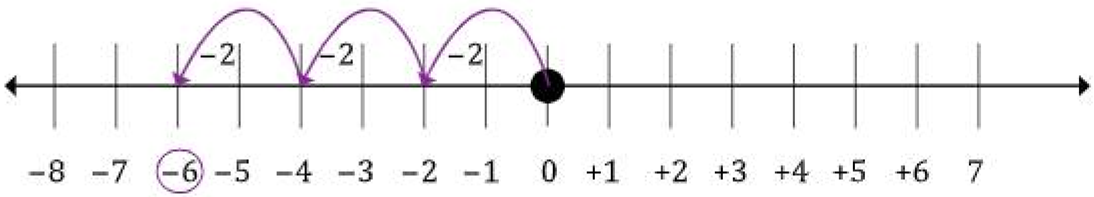
$(+2)\ (-3) = (-3) + (-3) = -6$



আমরা দেখতে পাচ্ছি যে, সংখ্যারেখায় গুণফলের অবস্থান (-6)।

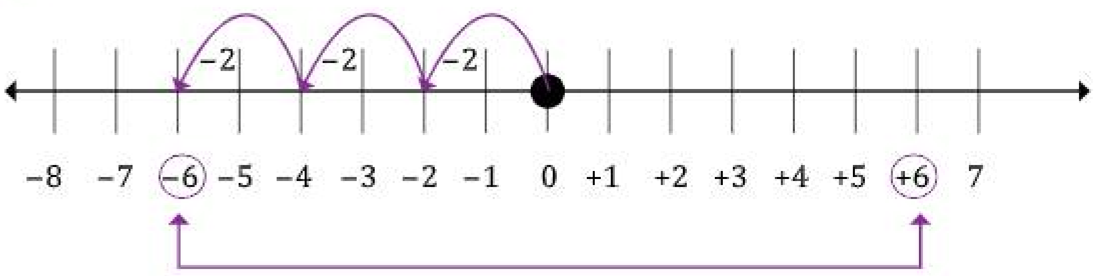
$(+2) \times (-3) = (-3) + (-3) = -6$

৩) $(-2) \times (+3)$ সংখ্যারেখায় গুণফলের অবস্থান (-6) । কিন্তু এখানে প্রথম সংখ্যার (–) চিহ্নের জন্য সংখ্যাটিকে সংখ্যারেখার বাম দিকে বসানো হয়েছে।



$(-2) \times (+3) = (-2) + (-2) + (-2) = -6$

৪)



$(-2) \times (-3)$

সংখ্যারেখায় গুণফলের অবস্থান $(+6)$। এক্ষেত্রে প্রথমসংখ্যার গতিপথ সংখ্যারেখার বামদিকে গিয়েছে এবং পরবর্তীতে গুণফলের আগে (–) চিহ্ন থাকায় দিক পরিবর্তন করে শূন্য (0) এর সাপেক্ষে $(+6)$ এ যেতে হয়েছে।

$(-2) \times (-3) = -[(-2) + (-2) + (-2)] = -(-6) = +6$

পূর্বের আলোচনা থেকে আমরা নিচের সিদ্ধান্তে পৌঁছাতে পারি:

1. $(+1).(+1)=+1$
2. $(+1).(-1)=-1$
3. $(-1).(+1)=-1$
4. $(-1).(-1)=+1$

লক্ষ করি:

একই চিহ্নযুক্ত দুটি রাশির গুণফল (+) চিহ্নযুক্ত হবে।

বিপরীত চিহ্নযুক্ত দুটি রাশির গুণফল (–) চিহ্নযুক্ত হবে।

উপরোক্ত আলোচনায় তোমরা সংখ্যার গুণের বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে শিখেছ। পাটিগণিতে কেবল ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত সংখ্যা ব্যবহার করা হয়। কিন্তু বীজগণিতে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয় চিহ্নযুক্ত সংখ্যা এবং সংখ্যাসূচক প্রতীকও ব্যবহার করা হয়। এ অধ্যায়ে আমরা বীজগণিতীয় রাশির গুণ ও ভাগ প্রক্রিয়া এবং বীজগণিতীয় রাশির গুণ ও ভাগের সূচক সম্বন্ধে শিখেছি।

কর্মপত্র ১: বাগান তৈরির পরিকল্পনা

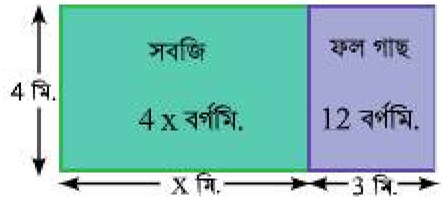
একটি শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের পরিবেশ সুন্দর করার জন্য প্রতিষ্ঠান প্রধান স্কুল আঙ্গিনায় একটি বাগান করার সিদ্ধান্ত নিলেন। বাগানের কিছু অংশ সবজি চাষের জন্য এবং কিছু অংশ ফল গাছ লাগানোর জন্য নির্ধারণ করা হলো। বাগানটির ক্ষেত্রফল কত হবে চলো আমরা এর সম্ভাব্য একটি পরিকল্পনা করি।

পরিকল্পনার শুরুতেই প্রত্যেকেই খাতা কলম নিয়ে বাগাটির নিম্নরূপ সম্ভাব্য কাগজের মডেল তৈরি /অঙ্কন করো এবং সবজি ও ফল গাছ বাগানের অংশ দুটিকে পৃথক রং করো। বাগানটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

এ ক্ষেত্রে বাগানটির ক্ষেত্রফল $=4(6+3)$ বর্গমিটার= (4×9) বর্গমিটার = 36 বর্গমিটার

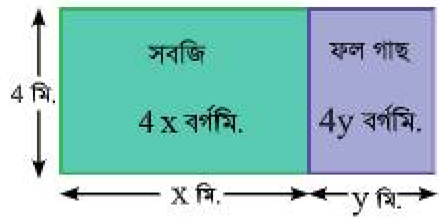
কর্তৃপক্ষ চায় সবজি বাগানটির দৈর্ঘ্য পরিবর্তন করতে। তাই বাগানটির দৈর্ঘ্য x দ্বারা পরিবর্তন করা হলো।

এ ক্ষেত্রে বাগানটির ক্ষেত্রফলে পরিবর্তন লক্ষ করো।



এ ক্ষেত্রে বাগানটির ক্ষেত্রফল হবে = $4(x+3)$বর্গমি. $=(4x+12)$ বর্গমি.

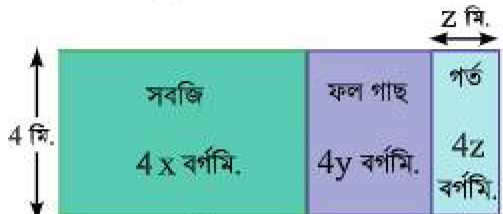
এখন, প্রস্থ ঠিক রেখে ফল বাগানের দৈর্ঘ্য y দ্বারা পরিবর্তন করা হলো। ফলে সম্পূর্ণ বাগানের ক্ষেত্রফলে কী পরিবর্তন লক্ষ করলে?



এ ক্ষেত্রে বাগানটির ক্ষেত্রফল হবে = $4(x + y)$ বর্গমিটার। তাহলে এখানে বাগানের ক্ষেত্রফলকে বীজগণিতীয় রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

একক কাজ কাগজ কেটে এই বাগানের মডেলটি তৈরি করো।

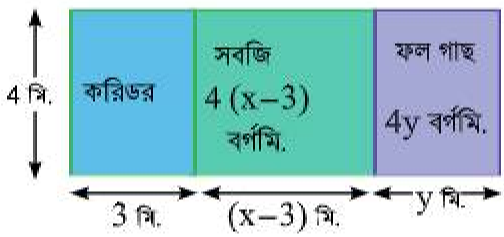
এ পর্যায়ে মনে করো, বাগানটিতে পানি ধরে রাখার জন্য একটি গর্ত রাখার ব্যবস্থা করার জন্য বাগানটি তিনটি অংশে বিভক্ত করা হলো এবং মডেলটি নিম্নরূপে পরিবর্তন করা হলো।



এ ক্ষেত্রে বাগানটির ক্ষেত্রফল হবে = $4(x + y + z)$ বর্গমি. = $(4x + 4y + 4z)$ বর্গমি.

তাহলে আমরা দেখতে পাচ্ছি উপরে প্রতিটি ক্ষেত্রে, $a(b+ c) = ab + bc$, আকারে বীজগণিতীয় রাশির গুণের ফলাফল লেখা হয়ে থাকে, যা গুণের বণ্টন বিধি নামে পরিচিত।

এবার শিক্ষা প্রতিষ্ঠান কর্তৃপক্ষ পরিকল্পনা করল ভবনের করিডর বাড়াতে হলে সবজি বাগানের দৈর্ঘ্য 3 মিটার কমাতে হবে। ফলে পরিকল্পনাটি তারা পুনরায় নিম্নরূপে পরিবর্তন করল।



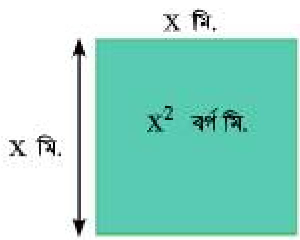
এ ক্ষেত্রে বাগানটির ক্ষেত্রফল হবে $= \{4(x-3)+4y\}$ বর্গমি.

একক কাজ

এ পর্যায়ে তুমি আগের মডেলটিকে পরিবর্তন করে নতুন মডেল তৈরি করবে।

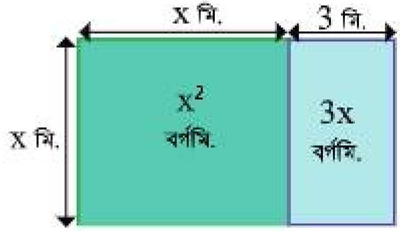
কর্মপত্র ২ : পুকুর খনন পরিকল্পনা

এবার শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আয় বাড়ানোর জন্য মৎস্যচাষের লক্ষ্যে প্রতিষ্ঠান প্রধান মাঠের পাশে একটি বর্গাকৃতি পুকুর খননের চিন্তা করল। শিক্ষার্থীরা পুকুর খননের জন্য কি পরিমাণ জমি লাগবে তা নির্ধারণ করার জন্য x দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট কাগজের বর্গাকৃতি একটি মডেল তৈরি করল:



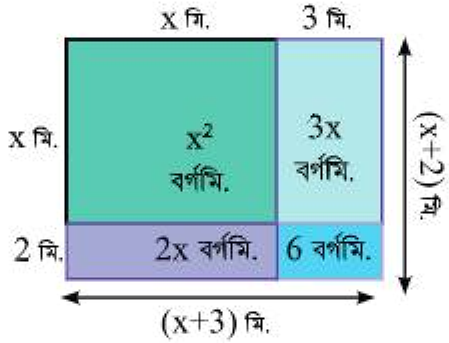
এ ক্ষেত্রে পুকুরের ক্ষেত্রফল $= x^2$ বর্গমি.

এবার শিক্ষার্থীরা পুকুরটিকে আয়তাকৃতি প্রদান করতে চাইল এবং পুকুরের দৈর্ঘ্যকে 3মি.বাড়িয়ে নিম্নের চিত্রের মতো মডেল তৈরি করল।



এ ক্ষেত্রে পুকুরটির ক্ষেত্রফল $= (x + 3)\ x$ বর্গমি. $= x(x + 3)$ বর্গমি.

এবার শিক্ষার্থীরা প্রস্থকেও 2মি. বাড়িয়ে দিল এবং নিম্নের চিত্রের মতো মডেল তৈরি করল।



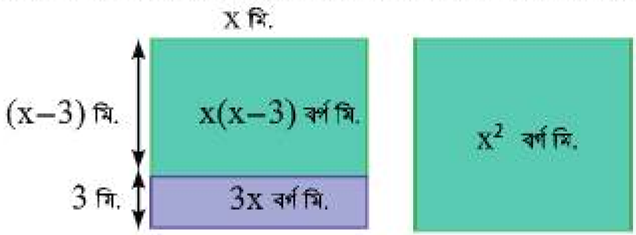
এ ক্ষেত্রে পুকুরটির ক্ষেত্রফল

$= (x + 3)\ (x + 2) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$ বর্গমি.

একক কাজ

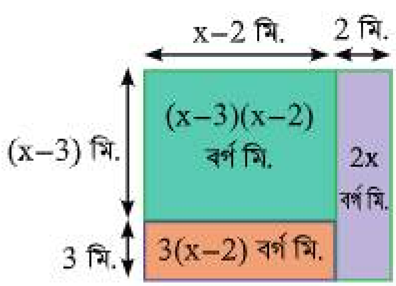
সাদা কাগজে রং করে উপরের মডেলটিকে তৈরি করো।

এবার পুকুরের ক্ষেত্রফল পরিবর্তনের বিকল্প হিসাবে প্রস্থকে 3মি. কমিয়ে নিম্নের চিত্রের মতো মডেল তৈরি করল।



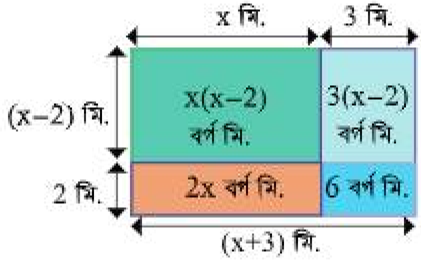
এ ক্ষেত্রে পুকুরটির ক্ষেত্রফল $= \mathbf{x}(x - 3)$ বর্গমি $= (x^2 - 3x)$ বর্গমিটার

পুনরায় পুকুরের দৈর্ঘ্যকে 2মি. কমিয়ে নিম্নের চিত্রের মতো মডেল তৈরি করা হলো।



এ ক্ষেত্রে পুকুরটির ক্ষেত্রফল = $(x - 2)(x - 3)$ বর্গমি. = $x(x - 3) - 2(x - 3)$ বর্গমি.

এবার শিক্ষার্থীরা তৃতীয় একটি বিকল্প চিন্তা করল। তারা দৈর্ঘ্যকে 3মিটার বাড়িয়ে এবং প্রস্থকে 2মিটার কমিয়ে নিম্নরূপ মডেল তৈরি করল।



এ ক্ষেত্রে পুকুরটির ক্ষেত্রফল = $(x + 3)(x - 2)$ বর্গ মি. = $(x^2 + 3x - 2x - 6)$ বর্গ মি.

= $(x^2 + x - 6)$ বর্গ মি.

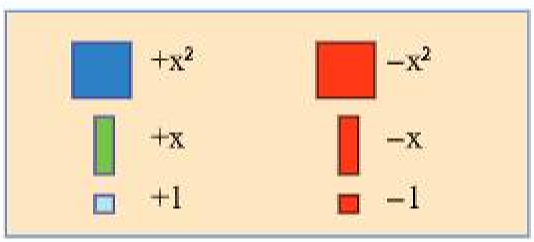
একক কাজ

কাগজ কেটে বীজগণিতীয় রাশির গুণের মডেল তৈরি করো।

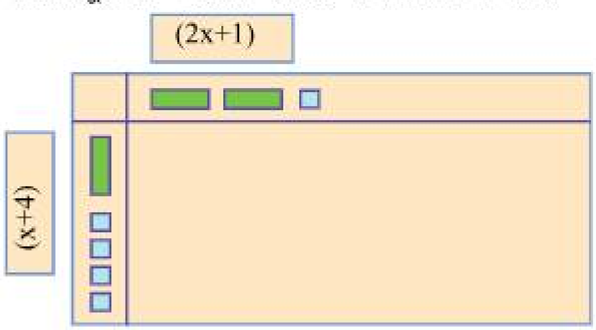
নিচের উদাহরণ লক্ষ করো। এখানে দুটি বীজগণিতীয় রাশিকে কাগজ কেটে গুণ করার পদ্ধতি দেখানো হয়েছে।

উদাহরণ ১: গুণফল নির্ণয় করো: $(x+4)(2x+1)$

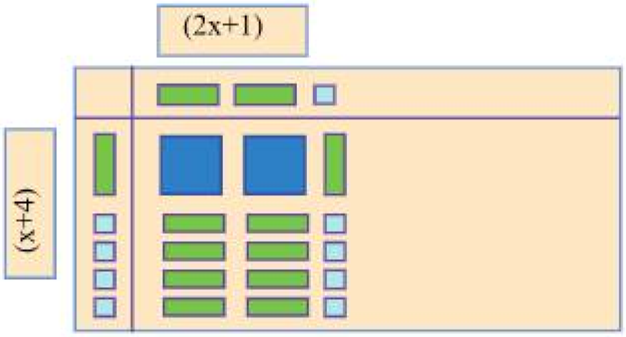
গুণফল নির্ণয় করার জন্য তোমরা নিম্নরূপ কাগজ কেটে টাইলস বানাও।



নিম্নের চিত্রের মতো উৎপাদকগুলোকে টাইলস আকারে কাগজ কেটে বসাও।

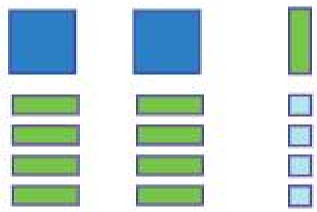


এবার কলাম অংশের প্রত্যেক টাইলস দিয়ে সারির অংশের প্রত্যেক কাগজকে গুণ করে সারি-কলাম এর সমন্বয়ে তৈরি করে ক্ষেত্রে বসাও। ফলে নিচের চিত্রের মতো একটি আয়তাকৃতি ক্ষেত্রফল পাবে।



টাইলসগুলো দিয়ে তৈরি করে আয়তাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল পেতে সবগুলো কাগজ পর্যায়ক্রমে যোগ করো।

যেমন:



$=2x^2 + 9x + 4$

একক কাজ

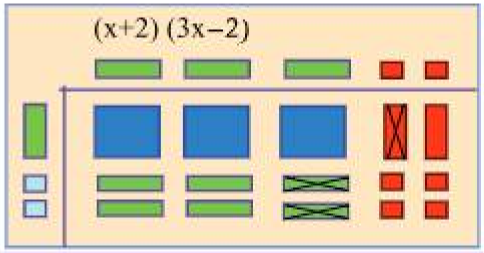
কাগজ কেটে গুণ করার মাধ্যমে নিচের উদাহরণটি নিজেরা করে দেখো।

কাগজ কেটে গুণ করো: $2x+y-1$, $3x$

বীজগণিত টাইলস ব্যবহার করে গুণ $[(2x+y-1)\times 3x]$			
	x	x	x
x	x^2	x^2	x^2
x	x^2	x^2	x^2
y	xy	xy	xy
-1	$-x$	$-x$	$-x$
গুণফল	$6x^2+3xy-3x$		

উদাহরণ: $(x+2)$ ও $(3x-2)$ বাহু বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য তোমরা উৎপাদক দুটিকে কাগজ দিয়ে নিম্নের মতো সাজাও। এ ক্ষেত্রে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কেটে দেওয়া যাবে।

এ ক্ষেত্রে



$$(x+2)(3x-2) = 3x^2 + 6x - 2x - 4$$
$$= 3x2 + 4x - 4$$

একক কাজ

কাগজ কেটে গুণ করো $(x+3)(x+4)$

উদাহরণ: গুণফল নির্ণয় করো: $(x+3)(x-7)$

	x	3
x	x^2	$3x$
-7	$-7x$	-21

ফলে গুণফল পাওয়ার জন্য পদগুলোকে পর্যায়ক্রমে নিম্নরূপে বসাও।

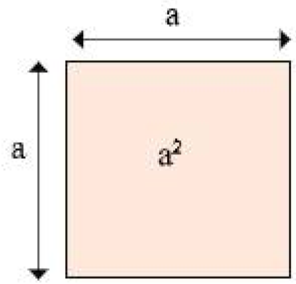
$$(x+3)(x-4) = x^2-7x+3x-21 = x^2-4x-21$$

একক কাজ

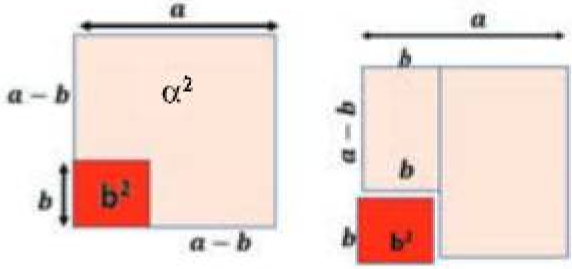
কাগজ কেটে গুণ করো $(2x+1)(x-2)$

কর্মপত্র ৩: $(a+b)(a-b)$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় (পেপার মডেল)

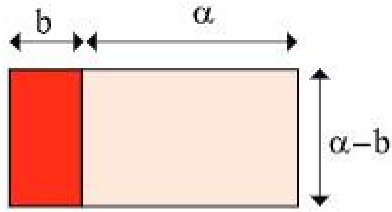
প্রথমে একটি সাদা কাগজ নাও। তারপর a বাহু বিশিষ্ট একটি বর্গ আঁক।



অতঃপর এটির এক কোণায় b বাহু বিশিষ্ট আরেকটি বর্গ আঁকো এবং লাল রং করো। বর্গটির বাকি অংশ গোলাপী রং করো। এবার বড় বর্গ অর্থাৎ a বর্গক্ষেত্র থেকে ছোট বর্গ অর্থাৎ b বর্গক্ষেত্র কেটে বাদ দাও। ফলে চিত্রটি নিম্নরূপ আকৃতি ধারণ করবে। সেক্ষেত্রে ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= a^2 - b^2$



উৎপন্ন আয়তক্ষেত্রটি ক্ষেত্রফল হবে$= \boldsymbol{(a+b)(a-b)}$



পরিশেষে আমরা উপরের চিত্র থেকে পাই,

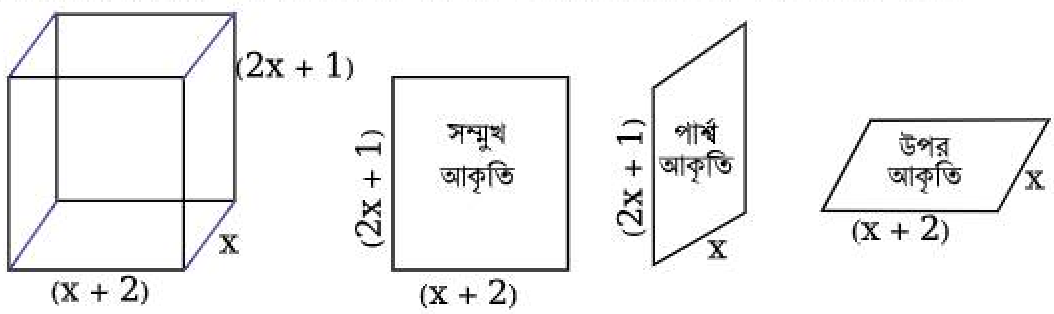
$$\boldsymbol{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

একক কাজ

কাগজ কেটে গুণফল নির্ণয় করো: (a-b) (a-b)

এবার, শিক্ষা প্রতিষ্ঠানে বাগানে পানি দেওয়ার জন্য বিকল্প ব্যবস্থা হিসেবে বাগানের পাশে আরও একটি পানির ট্যাঙ্ক স্থাপন করার ব্যবস্থা রাখল।

পানির ট্যাঙ্কের দৈর্ঘ্য (x+2) মি. প্রস্থ x মি. ও উচ্চতা (2x+1) মি. হলে, উহার আয়তন নির্ণয় করার জন্য শিক্ষার্থীরা নিম্নের চিত্রের ন্যায় কাগজ কেটে বক্স বানাল এবং নিম্নরূপে উহার আয়তন নির্ণয় করল।



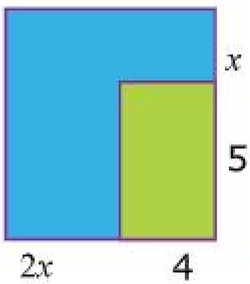
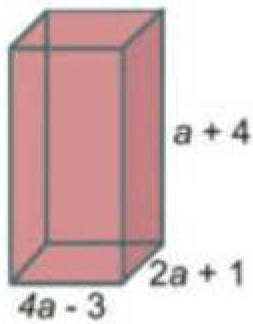
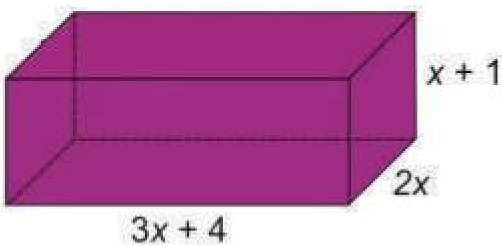
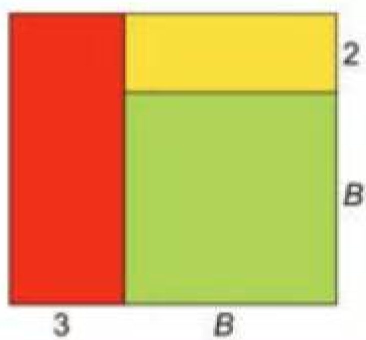
পানির ট্যাঙ্কের দৈর্ঘ্য $(x + 2)$ মি., প্রস্থ x মি. এবং উচ্চতা $(2x + 1)$ মি.

পানির ট্যাঙ্কের আয়তন $= (x + 2) \times x$ মি. $\times (2x + 2)$ মি.

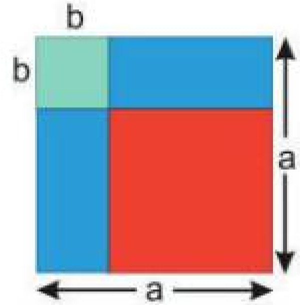
$= (x + 2) \cdot x \cdot (2x + 1)$ ঘনমি. $= x(x + 2)\,(2x + 1)$ ঘনমি.

$= (x^2 + 2x)\,(2x + 1)$ ঘনমি. $= (2x^3 + x^2 + 4x^2 + 2x)$ ঘনমি. $= 2x^3 + 5x^2 + 2x$ ঘনমি.

একক কাজ

১. কাগজ কেটে গুণফল নির্ণয় করো: $(x + 2)(3x - 2)$	৩. সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় করো: I. $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$ II. $(a + 1)(a - 1)(a^2 + 1)$
২. নিচের চিত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো:  	৪. নিচের চিত্রের আয়তন নির্ণয় করো: 
৫. নিচের চিত্রটির আয়তন নির্ণয় করো:  	৬. নিচের চিত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো: 

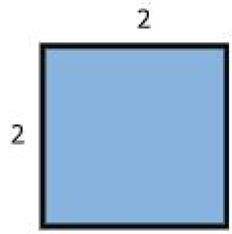
৭. চিত্রের লাল রঙের ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল একাধিক নিয়মে নির্ণয় করো:



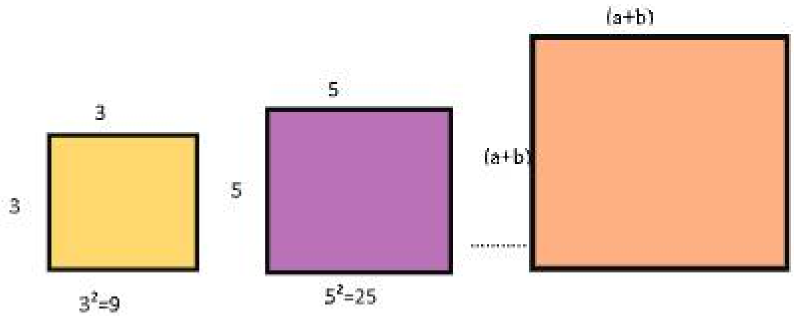
বীজগণিতীয় সূত্রাবলি ও প্রয়োগ (দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশির বর্গ)

দ্বিপদী রাশির বর্গ

তোমাকে যদি প্রশ্ন করা হয় দুইকে দুই দিয়ে গুণ করলে কত হয়? তুমি নিশ্চয়ই উত্তরে বলবে চার হয়, তিনকে তিন দিয়ে গুণ করলে কত হয়? তুমি নিশ্চয়ই উত্তরে বলবে নয় হয়, কারণ ইতোমধ্যেই পূর্ববর্তী ক্লাসে তুমি তা জেনে এসেছ। কিন্তু যদি বলা হয় কোনো একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 2 সেমি ও প্রস্থ 2 সেমি হলে এর ক্ষেত্রফল কত? তুমি এবার নিশ্চয়ই এমন একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করবে যার দৈর্ঘ্য 2 সেমি ও প্রস্থ 2 সেমি এবং তোমার অঙ্কিত চিত্রটি হবে নিম্নরূপ:

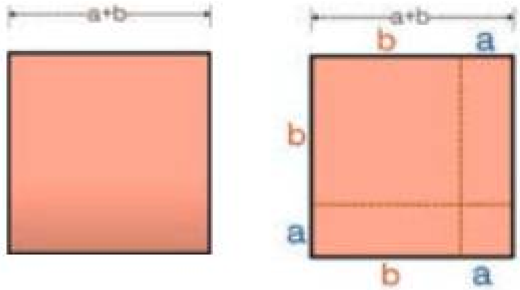


এবার যদি দৈর্ঘ্য 3 সেমি ও প্রস্থ 3 সেমি হয় তখন ক্ষেত্রফল কত হবে, যদি দৈর্ঘ্য 5 সেমি ও প্রস্থ 5 সেমি হয় তখন ক্ষেত্রফল কত হবে, যদি দৈর্ঘ্য $(a+b)$ সেমি ও প্রস্থ $(a+b)$ সেমি হয় তখন ক্ষেত্রফল কত হবে? চলো, নিচের চিত্রগুলো লক্ষ করি।

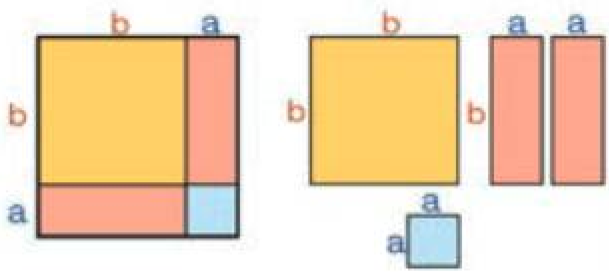


এবার চলো আমরা $(a+b)^2$ এর মান কত হবে তা বের করার চেষ্টা করি। প্রথমে বর্গাকৃতি একটি কাগজ

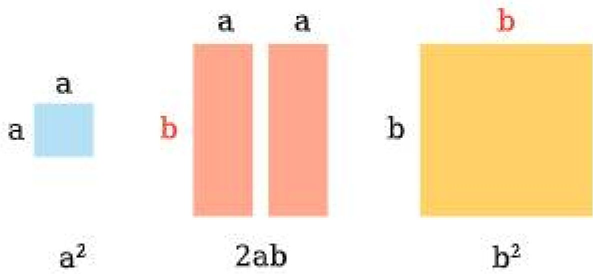
নাও। উহা হতে নিচের চিত্রের মতো a ও b বাহু চিহ্নিত করো, ফলে চারটি ক্ষেত্র চিহ্নিত হবে।



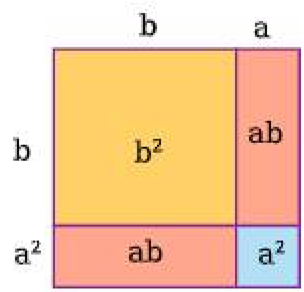
ক্ষেত্রগুলো কেটে কেটে আলাদা করো। নিচের চিত্রের মতো চারটি ক্ষেত্র পাওয়া যাবে।



এবার আলাদা করা ক্ষেত্রগুলোকে সাজালে নিচের চিত্রের মতো ফলাফল পাওয়া যাবে।



পরিশেষে আমরা নিচের চিত্র থেকে পাব,



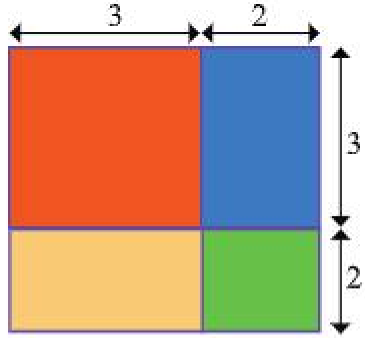
$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

চলো, এবার সূত্রটির সত্যতা যাচাই করি। এ ক্ষেত্রে আমরা জ্যামিতিক পদ্ধতি অবলম্বন করব।

ধরি, $a = 3$ এবং $b = 2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

এখন একটি বর্গ অঙ্কন করো যার এক বাহুর দৈর্ঘ্য $(a + b)$ অর্থাৎ $(3 + 2)$



সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে $(3 + 2)^2 = 5^2 = 25$

3 একক বাহু বিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল= 9 বর্গএকক

2 একক বাহু বিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল= 4 বর্গএকক

3 একক এবং 2 একক বাহু বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল= 6 বর্গএকক

2 একক এবং 3 একক বাহু বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল= 6 বর্গএকক

এ ক্ষেত্রেও সম্পূর্ণ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে= (9+4+6+6) বর্গএকক = 25 বর্গএকক

যেহেতু, উভয় ক্ষেত্রেই ক্ষেত্রফলের মান সমান। কাজেই বলা যায়, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

একক কাজ

উপরের মতো ছবির সাহায্যে বর্গ নির্ণয় করো।

১. (m+n)	৪. 45
২. (4x+3)	৫. 105
৩. (3x+4y)	৬. 99

একক কাজ

কাগজ কেটে প্রমাণ করো $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

সহজ উপায়ে (বীজগণিতের সূত্র) বর্গসংখ্যা নির্ণয়:

আমরা বীজগণিত অংশে বর্গ নির্ণয়ের সূত্র $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ সম্পর্কে জেনেছি।

তাহলে চলো 42 সংখ্যাটির বর্গ নির্ণয় করি।

$$42^2 = (40+2)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 2 + 2^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$$

একক কাজ

সহজ উপায়ে 52, 71, 21, 26, 103 এর বর্গ নির্ণয় করো।

এবার নিচের ছকে 1 থেকে 20 সংখ্যার বর্গসংখ্যা দেওয়া আছে। সহজ উপায়ে বর্গ নির্ণয়ের নিয়মের সাহায্যে খালি ঘরগুলো পূরণ করো। (ক্যালকুলেটর ব্যবহার করা যাবে না)

ছক ২.৪

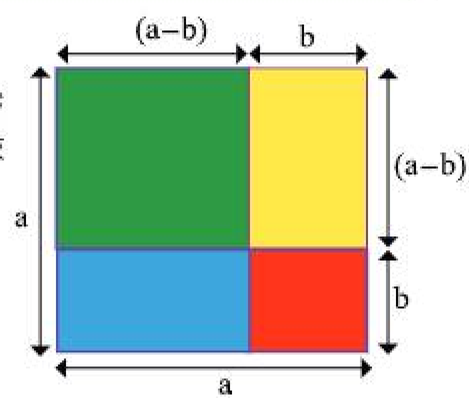
সংখ্যা	বর্গসংখ্যা	সংখ্যা	বর্গসংখ্যা	সংখ্যা	বর্গসংখ্যা	সংখ্যা	বর্গসংখ্যা
1		6		11	121	16	
2	4	7		12		17	
3	9	8		13		18	
4		9	81	14		19	361
5		10		15		20	

ছকের সংখ্যাগুলোর এককের ঘরের অঙ্ক ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করে কোনো মিল খুঁজে পেলে কি না দেখো।

একক কাজ

১। কোনো সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক কত হলে সংখ্যাটি বর্গসংখ্যা হতে পারে?
২। পাঁচটি সংখ্যা লেখো যার একক স্থানের অঙ্ক দেখেই তা বর্গসংখ্যা নয় বলে সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়।
চিত্র এঁকে বর্গ নির্ণয় করো।

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ সূত্রের জ্যামিতিক প্রমাণ



বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য প্রথমে আমরা একটি বর্গাকৃতি কাগজ কেটে নিই। এরপর নিচের চিত্রের মতো a ও b বাহু দ্বারা চিহ্নিত করি। এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খুঁজে বের করি।

- সবুজ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য কত?
- সবুজ বর্গের ক্ষেত্রফল কত?
- হলুদ আয়তের ক্ষেত্রফল কত?

- লাল বর্গের ক্ষেত্রফল কত?
- নীল আয়তের ক্ষেত্রফল কত?

উপরের প্রশ্নগুলোর উত্তর খুঁজে পেয়েছ কি? তা হলে চিত্রের সাথে মিলিয়ে দেখো।

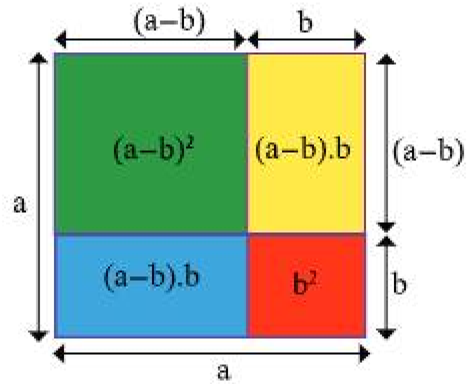
সবুজ বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = $(a-b)$

সবুজ বর্গের ক্ষেত্রফল = $(a-b)^2$

হলুদ আয়তের ক্ষেত্রফল = $(a-b)b$

লাল বর্গের ক্ষেত্রফল = b^2

নীল আয়তের ক্ষেত্রফল = $(a-b)b$



এখন, সবুজ বর্গের ক্ষেত্রফল = সমগ্র বর্গের ক্ষেত্রফল [হলুদ আয়তের ক্ষেত্রফল + লাল বর্গের ক্ষেত্রফল + নীল আয়তের ক্ষেত্রফল] অর্থাৎ,

$$(a-b)^2 = a^2-\{(a-b)b + b^2 + (a-b)b\}$$

$$= a^2-\{2ab-b^2\} = a^2-2ab + b^2.$$

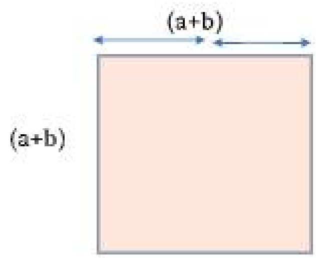
একক কাজ

চিত্র এঁকে বর্গ নির্ণয় করো।

১. $(m - n)$	৪. 27
২. $(4x - 3)$	৫. 95
৩. $(3x - 4y)$	৬. 99

ত্রিপদী রাশির বর্গ

ইতোমধ্যে $(a+b)^2$ এর প্রমাণ শিখলাম। সে ক্ষেত্রে বর্গক্ষেত্রটি ছিল নিম্নরূপ।



একক কাজ

মনে করো বর্গক্ষেত্রটির এক বাহুর দৈর্ঘ্য $(a + b + c)$ একক হয় তাহলে:

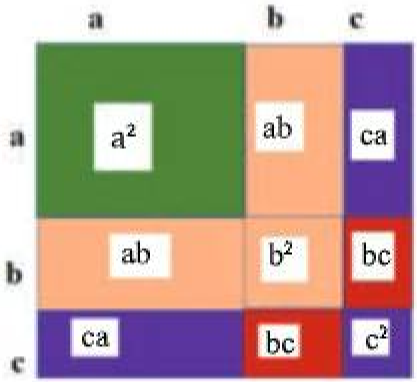
বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কন করো	$(a+b+c)^2=?$

এবার চলো, আমরা $(a+b+c)$ বাহু বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের মান $(a+b+c)^2$ সমান কত হবে তা বের করার চেষ্টা করি।

প্রথমে বর্গাকৃতি একটি কাগজ নিয়ে নিচের চিত্রের মতো a, b ও c বাহু চিহ্নিত করো।

বাহুগুলো দ্বারা বর্গক্ষেত্রটি ☐টি ক্ষেত্রে বিভক্ত হবে।

এবার, এই ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফল a, b ও c এর সাহায্যে প্রকাশ করে চিত্রে দেখাও।



এখন, চিত্রে প্রাপ্ত ক্ষেত্রগুলির ক্ষেত্রফলের যোগফল নিচের বক্সে লেখো।

আবার, চিত্রের বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য = ☐

তাহলে, সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = ☐

তাহলে সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল তুলনা করে আমরা পাই,

$(a+b+c)^2=$

অনুশীলনী

১) নিচের রাশিগুলোকে সরল করো।

i) $(3^3a^{-5}b^3)^3$ ii) $\left(\frac{s^5}{3^4}\right)^3$ iii) $\left(\frac{st^7}{rt^3}\right)^3$

২) কাগজ কেটে নিচের রাশিগুলোর বর্গ নির্ণয় করে শিক্ষকের কাছে জমা দাও।

i) $a + 3$ ii) $3x-5$ iii) 999

iv) $2x+y+3z$ v) $2x + 3y + 4z$

৩) কাগজ কেটে প্রমাণ করো।

i) $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

ii) $(a-b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

iii) $(a + b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

iv) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

v) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

ভগ্নাংশের গসাগু ও লসাগু

গসাগুর সাথে আমরা সকলেই পরিচিত। গসাগু মানে হলো গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক। এখানে দুটি বিষয় আবার মনে করার চেষ্টা করি। গসাগু নির্ণয় করতে হলে অন্তত দুটি সংখ্যার মধ্যকার তুলনা করতে হয়। কিসের তুলনা? তাদের গুণনীয়ক বা উৎপাদকগুলোর তুলনা। এখন ভেবে দেখো তো গুণনীয়ক বা উৎপাদক কোনগুলো? কিংবা সাধারণ গুণনীয়ক কোনগুলো? ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার জন্য দুটি আলাদা সংখ্যার গুণনীয়ক বা উৎপাদকগুলোর মাঝে এক বা একাধিক গুণনীয়ক পাওয়া যেতে পারে, যারা উভয় সংখ্যারই গুণনীয়ক। সেই গুণনীয়কটি কিংবা গুণনীয়কগুলোকে বলা হয় সাধারণ গুণনীয়ক। পরবর্তীতে যে সাধারণ গুণনীয়কটি সবচেয়ে বড়, সেটিই হয় গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক। ভেবে দেখো তো, দুটি সংখ্যার একটিমাত্র সাধারণ গুণনীয়ক থাকলে কী হয়?

ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার পাশাপাশি, সাধারণ ভগ্নাংশের ক্ষেত্রেও কী এভাবে গসাগু নির্ণয় করা সম্ভব? চলো এ বিষয়টি নিয়ে ভাবি।

সাধারণ ভগ্নাংশের গুণনীয়ক

প্রথমে একটি ভগ্নাংশের গুণনীয়ক নিয়ে চিন্তা করি। পূর্ণসংখ্যার গুণনীয়কের সাথে তুলনা করে আমরা দেখতে পাই, কোনো একটি পূর্ণসংখ্যার গুণনীয়ক সেই পূর্ণসংখ্যাগুলো, যেগুলো দ্বারা পূর্ণসংখ্যাটি নিঃশেষে বিভাজ্য। যেমন ১২ সংখ্যাটি ১, ২, ৩, ৪, ৬ এবং ১২ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। এখন আমরা ১২ কে ৫ দ্বারা ভাগ করলে কি কোন পূর্ণসংখ্যা পাই? উত্তর হবে না।

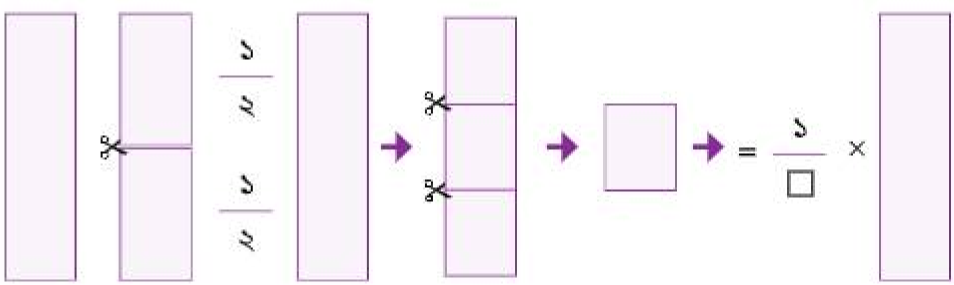
একক কাজ

১৮ এর গুণনীয়কগুলো কী হবে?

এখন একটি সাধারণ ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে কী হবে বিষয়টি? চলো আগে একটি খেলা খেলি।

গুণনীয়ক খুঁজি

প্রথমেই একটি কাগজ নাও।

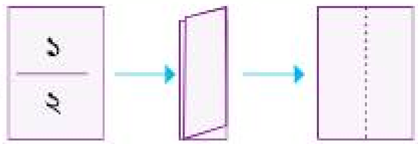


চিত্র ৩.১

এবার কাগজটিকে সমান দুই ভাগ করে কাটো। তাহলে একটি খন্ডিত অংশ হবে মূল কাগজের $\frac{১}{২}$ অংশ। এবার আবার আরও ৩টি কাগজ নাও এবং সেগুলোকে যথাক্রমে সমান ৩, ৪ ও ৫ খন্ডে বিভক্ত করো ও নিচের ছকটি পূরণ করো।

ছক ৩.১	
সমান খন্ডের পরিমাণ	১টি খন্ড মূল কাগজের কত অংশ
২	$\frac{১}{২}$
৩	
৪	
৫	

দেখো, ছক থেকে কিন্তু আমরা কয়েকটি ভগ্নাংশ পেয়ে গেলাম। এবার আমরা সমদ্বিখন্ডিত করা ২টি খন্ড থেকে একটি নিই। খন্ডটিকে আমরা কিন্তু $\frac{১}{২}$ বলতে পারি।



চিত্র ৩.২

এবার চিন্তা করো তো, এই খন্ডটিকে কি তুমি সমান দুই ভাগে ভাঁজ করতে পারবে? এখন ভাবো তো, ভাঁজ করার পর যে দুটি ভাগ পাওয়া যাবে, সেগুলোর প্রত্যেকটি খন্ডটির কত ভাগ? খুব সহজেই বলা যায়, এটিও কিন্তু খন্ডটির $\frac{১}{২}$ ভাগ হবে। কিন্তু আমরা দেখে এসেছি, খন্ডটি কিন্তু নিজে $\frac{১}{২}$। তাহলে মূল যে কাগজ ছিল, সেটির কত অংশ হবে এই একেকটি ভাগ? সহজেই বলা যায় $\left(\frac{১}{২} \div ২\right) = \frac{১}{৪}$ অংশ। এবার তাহলে চিন্তা করো, সমান ২ ভাঁজের জায়গায়, সমান ৩ ভাঁজ করা হলে, প্রতিটি ভাগ মূল কাগজের কত ভাগ হতো? কিংবা সমান ৪, ৫ ও ৬ ভাঁজ করা হলে তা মূল কাগজের কত ভাগ হতো? সেটি নিচের ছকে পূরণ করো।

ছক ৩.২			
ভগ্নাংশ (খন্ডটি মূল কাগজের যত অংশ)	সমান ভাঁজ সংখ্যা	ভাগ প্রক্রিয়া	ভাঁজের পর, প্রাপ্ত প্রতিটি ভাগ, মূল কাগজের যত অংশ
$\frac{১}{২}$	২	$\left(\frac{১}{২} \div ২\right)$	$\frac{১}{৪}$
	৩	$\left(\frac{১}{২} \div ৩\right)$	
	৪		
	৫		
	৬		

এখন তাহলে কী দেখতে পাচ্ছ? তুমি কিন্তু প্রত্যেকবারই পূর্ণসংখ্যক বার সমান ভাঁজ করো এবং সেটির সাপেক্ষে একটি ভগ্নাংশ পাচ্ছ।

একক কাজ

তুমি পূর্বে ছক ৩.১ এর জন্য ৩, ৪ ও ৫টি সমান খন্ডে টুকরা করা কাগজগুলো থেকে একটি করে খন্ড নাও এবং প্রত্যেকটির জন্য, খাতায় ছক ৩.২ এর অনুরূপ ছক এঁকে তা সম্পূর্ণ করো।

এখন ভেবে দেখো তো এভাবে ভাঁজের মাধ্যমে আমরা কী পাচ্ছি? উপরের উদাহরণের ঐ $\frac{১}{২}$ খন্ড থেকে চিন্তা করি। $\frac{১}{২}$ খন্ডটিকে সমান ৩ ভাঁজ করার মানে আসলে সেটিকে ৩ দিয়ে ভাগ করা। তার মানে আমরা এই কাগজ ভাঁজের খেলা থেকে মূলত আমরা একটি ভগ্নাংশকে একটি পূর্ণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করছি। অর্থাৎ, যে কয়টি সমান ভাঁজ করছি, সেই পূর্ণসংখ্যা দিয়ে ভগ্নাংশকে ভাগ করা হচ্ছে।

এভাবে আসলে কী পাওয়া যাচ্ছে ভাবো তো? ভগ্নাংশের যে গুণনীয়ক, সেটিই কিন্তু এভাবে নির্ণয় হচ্ছে।

তাহলে ভগ্নাংশের গুণনীয়ক কোনগুলো? একটি ভগ্নাংশকে একটি পূর্ণসংখ্যা দিয়ে ভাগ করলে আমরা যে আরেকটি ভগ্নাংশ বা পূর্ণসংখ্যা পাই, সেটিই ঐ ভগ্নাংশটির একটি গুণনীয়ক।

এখন, চিন্তা করো, আমাদের $\frac{১}{২}$ খন্ডটিকে সমান ১ ভাগে ভাঁজ করার মানে কী হতে পারে? এতে কিন্তু আসলে কোন ভাঁজ হচ্ছে না। সেই কাগজটিই কোনো ভাঁজ ছাড়া থাকছে। তার মানে কী? ভগ্নাংশটি নিজেও কিন্তু ঐ ভগ্নাংশের একটি গুণনীয়ক। কারণ ১ ও তো একটি পূর্ণসংখ্যা। তাই, ১ দিয়ে ভাগ করলেও কিন্তু একটি পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশই পাওয়া যাচ্ছে।

এবার তাহলে চলো আমরা নিচের ছকটি পূরণ করে একটি গুণনীয়ক টেবিল তৈরি করি। তোমরা প্রতিটি ভগ্নাংশেরই প্রথম ১০টি করে গুণনীয়ক নির্ণয় করবে। ছকটি আংশিকভাবে পূর্ণ করা হয়েছে।

ছক ৩.৩			
ভগ্নাংশ	গুণনীয়ক (১০টি)	ভগ্নাংশ	গুণনীয়ক (১০টি)
$\frac{১}{২}$	$\frac{১}{২}$, $\frac{১}{৪}$, $\frac{১}{৬}$	$\frac{১}{৪}$	
$\frac{২}{৩}$		$\frac{৪}{৫}$	
$\frac{১}{৩}$		$\frac{১}{৫}$	
$\frac{৩}{৪}$		$\frac{৩}{৫}$	

দেখো, এভাবেই তুমি চাইলে যেকোনো ভগ্নাংশের গুণনীয়ক নির্ণয় করতে পারবে।

একক কাজ

তুমি তোমার পছন্দমতো ৫টি সাধারণ ভগ্নাংশ নাও এবং তাদের ১০টি করে গুণনীয়ক নির্ণয় করো।

এখন চিন্তা করে দেখো তো, আমরা কিন্তু প্রত্যেকবারই ১০টি করে গুণনীয়ক নির্ণয় করছি। আমরা এখন চাই সবগুলো গুণনীয়ক নির্ণয় করতে। এবার তোমরা নিজের খাতায় $\frac{১}{২}$ ভগ্নাংশটির সবগুলো গুণনীয়ক নির্ণয় করার চেষ্টা করো।

তুমি কি সবগুলো গুণনীয়ক নির্ণয় করতে পেরেছ? হিসাব করলে দেখবে তুমি কখনই সবগুলো গুণনীয়ক নির্ণয় করতে পারবে না। কারণ, পূর্ণসংখ্যা আসলে অসীম সংখ্যক আছে। তাই একটি সাধারণ ভগ্নাংশকে অসীমসংখ্যক পূর্ণসংখ্যা দিয়ে ভাগ করা যাবে। আর কোনো সাধারণ ভগ্নাংশকে পূর্ণসংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হলে, সেটিকে অবশ্যই একটি ভগ্নাংশ বা পূর্ণসংখ্যা আকারে প্রকাশ করা সম্ভব হবে। অর্থাৎ, সাধারণ ভগ্নাংশের গুণনীয়ক কিন্তু পূর্ণসংখ্যার গুণনীয়কের মতো নির্দিষ্ট সংখ্যক নয়। সাধারণ ভগ্নাংশের গুণনীয়ক অসীম সংখ্যক হয়।

একাধিক সাধারণ ভগ্নাংশের সাধারণ গুণনীয়ক ও গসাগু

এ পর্যন্ত আমরা সাধারণ ভগ্নাংশের গুণনীয়ক সম্বন্ধে জেনেছি। আমরা এখন, একাধিক সাধারণ ভগ্নাংশের জন্য সাধারণ গুণনীয়কের ধারণাটি বোঝার চেষ্টা করব। এক্ষেত্রে মূল ধারণাটি কিন্তু আমাদের পূর্ণসংখ্যার যে সাধারণ গুণনীয়কের ধারণা, সেটিই। অর্থাৎ, সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয় করতে হবে, একাধিক সাধারণ ভগ্নাংশের গুণনীয়কের তুলনার মাধ্যমে।

এক্ষেত্রে চলো একটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি বোঝা যাক। দুটি ভগ্নাংশ নিই। $\frac{১}{৬}$ ও $\frac{১}{৮}$ ।

এখন এই দুটি ভগ্নাংশের ১০টি করে সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয় করব আমরা। সেটি নিচের ছকে লেখা হয়েছে।

ছক ৩.৪

ভগ্নাংশ	গুণনীয়ক
$\frac{১}{৬}$	$\frac{১}{৬}, \frac{১}{১২}, \frac{১}{১৮}, \frac{১}{২৪}, \frac{১}{৩০}, \frac{১}{৩৬}, \frac{১}{৪২}, \frac{১}{৪৮}, \frac{১}{৫৪}, \frac{১}{৬০}$
$\frac{১}{৮}$	$\frac{১}{৮}, \frac{১}{১৬}, \frac{১}{২৪}, \frac{১}{৩২}, \frac{১}{৪০}, \frac{১}{৪৮}, \frac{১}{৫৬}, \frac{১}{৬৪}, \frac{১}{৭২}, \frac{১}{৮০}$

উপরের ছকে চিহ্নিত করো তো কোন ভগ্নাংশ দুটি উভয় সারিতেই রয়েছে? খুব সহজেই দেখতে পারবে $\frac{১}{২৪}$ এবং $\frac{১}{৪৮}$ ছকের উভয় সারিতেই রয়েছে। তাহলে পূর্ণসংখ্যার সাধারণ গুণনীয়কের ধারণা থেকে এক্ষেত্রেও বলা সম্ভব যে $\frac{১}{২৪}$ এবং $\frac{১}{৪৮}$ হলো $\frac{১}{৬}$ ও $\frac{১}{৮}$ এর সাধারণ গুণনীয়ক।

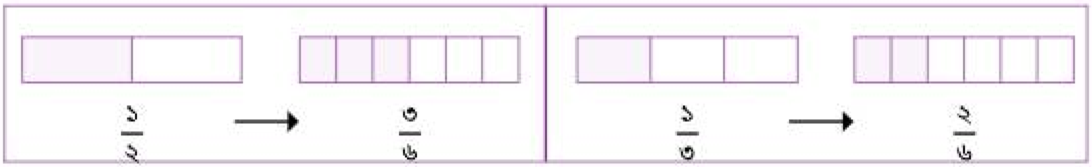
একক কাজ

১০টি করে গুণনীয়ক নির্ণয়ের মাধ্যমের নিচের ভগ্নাংশগুলোর সাধারণ গুণনীয়কগুলো নির্ণয় করো।

১) $\frac{১}{২}$ ও $\frac{১}{৩}$ ২) $\frac{১}{৩}$ ও $\frac{১}{৪}$ ৩) $\frac{১}{৩}$ ও $\frac{১}{১০}$

এখন আমরা আবার পূর্বের উদাহরণে চলে যাই। সেখান থেকে আমরা সাধারণ গুণনীয়কগুলো পেয়েছি $\frac{১}{২৪}$ ও $\frac{১}{৪৮}$ । এবার বলো তো এদের মধ্যে কোনটি বড়?

তোমরা কিন্তু সমহরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ তৈরি করা শিখেছ। উদাহরণ হিসেবে আমরা চাইলে $\frac{১}{২}$ ও $\frac{১}{৩}$ ভগ্নাংশ দুটি দেখতে পারি। এদেরকে সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশ করতে হলে কী করতে হবে? প্রথমেই সমহর কথাটি যখন আসছে, বোঝাই যাচ্ছে, দুটি ভগ্নাংশের হরকে সমান করতে হবে। এক্ষেত্রে কি হবে? দুটি ভগ্নাংশেরই হর হবে ৬। কেননা ২ ও ৩ এর লসাগু হয় ৬। এখন ভগ্নাংশ দুটির লবের কথাও তো চিন্তা করতে হবে। নতুন সমহর ভগ্নাংশের লব কী হবে? এক্ষেত্রে আমরা আবার গ্রিডের সাহায্য নিয়ে ভাবতে পারি।



চিত্র ৩.৩

গ্রিড থেকে কী দেখা যাচ্ছে? হর ৬ হলে $\frac{১}{২}$ এর লব হবে ৩। কারণটি কিন্তু খুব সহজ। গ্রিড থেকে পাই, হর ৬ হতে হলে, মূল কাঠামোটিকে পূর্বের ২ ভাগের জায়গায় ৬ ভাগ করা হচ্ছে। এতে বেগুনি রঙের ঘরের সংখ্যা ভাগ ১ থেকে বেড়ে হয় ৩। অর্থাৎ, মোট ঘরসংখ্যা ৬ হলে, বেগুনি রঙের ঘরের সংখ্যা ৩ হচ্ছে। তার মানে হর যে গুণিতকে বাড়ছে, লবও সেই গুণিতকে বাড়বে। তাহলে, লব হবে (১×৩) = ৩। তাহলে নতুন ভগ্নাংশটি হচ্ছে $\frac{৩}{৬}$ । তেমনিভাবে $\frac{১}{৩}$ এই ভগ্নাংশটির হর এখন ৬। সেক্ষেত্রে নতুন ভগ্নাংশটি হবে $\frac{২}{৬}$ ।

এখান থেকে খুব সহজেই বোঝা যাচ্ছে $\frac{৩}{৬} > \frac{২}{৬}$ । এর মানে হলো, $\frac{১}{২} > \frac{১}{৩}$

একক কাজ

১) গ্রিডের সাহায্যে $\frac{২}{৫}$ ও $\frac{৪}{৭}$ এর মাঝে কোনটি বড় সেটি নির্ণয় করো।

২) গ্রিডের সাহায্যে নির্ণয় করো $\frac{১}{২৪}$ ও $\frac{১}{৪৮}$এর মাঝে কোনটি বড়।

এবার চিন্তা করে দেখো তো, $\frac{১}{২৪}$ ও $\frac{১}{৪৮}$ এর মাঝে কোনটি বড়?

এখানে ভগ্নাংশ দুটির হরের লসাগু ৪৮। তাহলে সমহরের ধারণা থেকে সহজেই নির্ণয় করা যায়, $\frac{১}{২৪} = \frac{১}{৪৮}$

অর্থাৎ, $\frac{২}{৪৮} > \frac{১}{৪৮}$

তার মানে $\frac{১}{২৪}$ বড়। তাহলে এই $\frac{১}{২৪}$ ই হলো ভগ্নাংশ দুটির জন্য গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বা গসাগু।

একক কাজ

ভগ্নাংশগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয় করেছ তোমরা। এখন সেটির সাহায্যে গসাগু নির্ণয় করো:

১) $\frac{১}{২}$ ও $\frac{১}{৩}$ ২) $\frac{১}{৩}$ ও $\frac{১}{৪}$ ৩) $\frac{১}{৩}$ ও $\frac{১}{১০}$

এখন তোমরা চিন্তা করো আমরা এতক্ষণ এমন দুটি ভগ্নাংশ নিয়ে কাজ করেছি, যাদের লব শুধুমাত্র ১। এবার একটু ভিন্ন কিছু নিয়ে ভাবা যাক। এবার চলো আমরা ভগ্নাংশ হিসেবে $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{২}{৫}$ নিই। এদের গসাগু নির্ণয় করতে হবে।

তাহলে চলো প্রথমেই গসাগু নির্ণয়ের নিয়ম অনুযায়ী এদের গুণনীয়কগুলো খুঁজে বের করার চেষ্টা করি। প্রথমেই $\frac{১}{৪}$ এর গুণনীয়কগুলো কি হবে? আমরা কিন্তু জানি সবগুলো গুণনীয়ক খুঁজে বের করা সম্ভব নয়। তাহলে ১০টি গুণনীয়ক বের করার চেষ্টা করি।

ছক ৩.৫

ভগ্নাংশ	গুণনীয়ক
$\frac{১}{৪}$	$\frac{১}{৪}, \frac{১}{৮}, \frac{১}{১২}, \frac{১}{১৬}, \frac{১}{২০}, \frac{১}{২৪}, \frac{১}{২৮}, \frac{১}{৩২}, \frac{১}{৩৬}, \frac{১}{৪০}$

এখন ভাবো তো $\frac{২}{৫}$ এর গুণনীয়কগুলো কি হবে? চলো খুঁজে দেখার চেষ্টা করি।

ছক ৩.৬						
ভগ্নাংশ	পূর্ণসংখ্যা	গুণনীয়ক নির্ণয়ের ভাগ প্রক্রিয়া	লঘিষ্ঠ আকারে গুণনীয়ক	পূর্ণসংখ্যা	গুণনীয়ক নির্ণয়ের ভাগ প্রক্রিয়া	লঘিষ্ঠ আকারে গুণনীয়ক
$\frac{২}{৫}$	১	$\left(\frac{২}{৫} \div ১\right) = \frac{২}{৫}$	$\frac{২}{৫}$	৬	$\left(\frac{২}{৫} \div ৬\right) = \frac{২}{৩০}$	$\frac{১}{১৫}$
	২	$\left(\frac{২}{৫} \div ২\right) = \frac{২}{১০}$	$\frac{১}{৫}$	৭	$\left(\frac{২}{৫} \div ৭\right) = \frac{২}{৩৫}$	$\frac{২}{৩৫}$
	৩	$\left(\frac{২}{৫} \div ৩\right) = \frac{২}{১৫}$	$\frac{২}{১৫}$	৮	$\left(\frac{২}{৫} \div ৮\right) = \frac{২}{৪০}$	$\frac{১}{২০}$
	৪	$\left(\frac{২}{৫} \div ৪\right) = \frac{২}{২০}$	$\frac{১}{১০}$	৯	$\left(\frac{২}{৫} \div ৯\right) = \frac{২}{৪৫}$	$\frac{২}{৪৫}$
	৫	$\left(\frac{২}{৫} \div ৫\right) = \frac{২}{২৫}$	$\frac{২}{২৫}$	১০	$\left(\frac{২}{৫} \div ১০\right) = \frac{২}{৫০}$	$\frac{১}{২৫}$

এখান থেকে দেখো, ১০টি করে গুণনীয়ক নির্ণয়ের পর খুব সহজেই আমরা দেখতে পাচ্ছি দুটি ভগ্নাংশের মাত্র একটি সাধারণ গুণনীয়ক পাওয়া যাচ্ছে। সেটি হলো $\frac{১}{২০}$ । প্রশ্ন হলো আমরা এটিকেই গসাগু বলতে পারব কিনা? কারণ সাধারণ ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে কিন্তু পূর্ণসংখ্যার মতো করে নির্দিষ্ট সংখ্যক গুণনীয়ক থাকে না। এর মানে হলো, সাধারণ গুণনীয়কের সংখ্যাও কিন্তু আসলে নির্দিষ্ট নয়। অর্থাৎ, একাধিক সাধারণ দশমিক ভগ্নাংশের সাধারণ গুণনীয়কগুলোর সংখ্যাও অসীম।

এবার তাহলে তোমার এপর্যন্ত করা কাজের মাধ্যমে সাধারণ গুণনীয়কগুলোর মাঝে কি কোনো সম্পর্ক পাওয়া যায়? আমরা যদি পূর্বে আমাদের দেখানো উদাহরণ $\frac{১}{৬}$ ও $\frac{১}{৮}$ এর কথা ভাবি, তাহলে দেখতে পারব যে, ভগ্নাংশ দুটির সাধারণ গুণনীয়ক ছিল $\frac{১}{২৪}$ ও $\frac{১}{৪৮}$। এবার চলো আমরা এই বিষয়ে আরেকটু কাজ করি। আমরা এবার এই ভগ্নাংশ দুটির ১২টি করে গুণনীয়ক নির্ণয় করব।

ছক ৩.৭	
ভগ্নাংশ	গুণনীয়ক
$\frac{১}{৬}$	$\frac{১}{৬}, \frac{১}{১২}, \frac{১}{১৮}, \frac{১}{২৪}, \frac{১}{৩০}, \frac{১}{৩৬}, \frac{১}{৪২}, \frac{১}{৪৮}, \frac{১}{৫৪}, \frac{১}{৬০}, \frac{১}{৬৬}, \frac{১}{৭২},$
$\frac{১}{৮}$	$\frac{১}{৮}, \frac{১}{১৬}, \frac{১}{২৪}, \frac{১}{৩২}, \frac{১}{৪০}, \frac{১}{৪৮}, \frac{১}{৫৬}, \frac{১}{৬৪}, \frac{১}{৭২}, \frac{১}{৮০}, \frac{১}{৮৮}, \frac{১}{৯৬},$

এখান থেকে কী দেখা যাচ্ছে? আমরা কি নতুন কোনো সাধারণ গুণনীয়ক পেয়েছি? চিহ্নিত অংশ থেকে দেখতে পাবে, $\frac{১}{৭২}$ ও এই ভগ্নাংশ দুটির সাধারণ গুণনীয়ক।

এখন একটি বিষয় চিন্তা করো। আমরা কিন্তু সাধারণ গুণনীয়কগুলোর মাঝেও চাইলে একটি সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারব। নিচে দেখো,

$\frac{১}{২৪} \div ১ = \frac{১}{২৪}$	$\frac{১}{২৪} \div ২ = \frac{১}{৪৮}$	$\frac{১}{২৪} \div ৩ = \frac{১}{৭২}$

অর্থাৎ, ক্রমানুযায়ী গুণনীয়ক নির্ণয় করে প্রাপ্ত প্রথম সাধারণ গুণনীয়কটির সাহায্যে চাইলে অন্য সাধারণ গুণনীয়কগুলো পাওয়া সম্ভব। যেভাবে আমরা ভাগ করে করে ভগ্নাংশের সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয় করেছি সেভাবেই প্রথম প্রাপ্ত সাধারণ গুণনীয়কটিকে ক্রমানুযায়ী পূর্ণসংখ্যাগুলো দ্বারা ভাগ করে গেলেই সাধারণ গুণনীয়কগুলো নির্ণয় করা যাবে।

এখন চিন্তা করো, তুমি যখন কাগজ ভাঁজ করেছিলে, ভাঁজ করে পাওয়া ভাগগুলো বড় ছিল নাকি কাগজটি বড় ছিল? অবশ্যই কাগজটি বড় ছিল, কারণ সেই একটি কাগজের মাঝেই বারবার ভাগ করা হচ্ছিল। এখান থেকে কিন্তু সহজেই ধারণা করা যায়, একটি ভগ্নাংশকে আরেকটি পূর্ণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করা হলে নতুন পাওয়া ভাগফল বা ভগ্নাংশটি অবশ্যই মূল ভগ্নাংশের তুলনায় ছোট হবে।

এখন তাহলে এখান থেকে কি বুঝলে বলো তো? ক্রমানুযায়ী যদি সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয় করা হয়, তাহলে একদম প্রথমে যে সাধারণ গুণনীয়কটি পাওয়া যাবে, সেটিই হবে সবচেয়ে বড় সাধারণ গুণনীয়ক বা গসাগু।

এখন তাহলে কী বলা যায় বলো তো? আমরা ১০টি করে গুণনীয়ক নির্ণয় করে $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{২}{৫}$ এর যে একমাত্র সাধারণ গুণনীয়কটি পেয়েছি, সেই $\frac{১}{২০}$ ই হলো ভগ্নাংশ দুটির গসাগু।

এবার চিন্তা করো তো, $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{৩}{১১}$ এর গসাগু নির্ণয় করতে পারব কিনা? তাহলে চলো ১০টি করে গুণনীয়ক নিয়ে গসাগু নির্ণয় করার চেষ্টা করি।

ছক ৩.৮	
ভগ্নাংশ	গুণনীয়ক
$\frac{১}{৪}$	$\frac{১}{৪}, \frac{১}{৮}, \frac{১}{১২}, \frac{১}{১৬}, \frac{১}{২০}, \frac{১}{২৪}, \frac{১}{২৮}, \frac{১}{৩২}, \frac{১}{৩৬}, \frac{১}{৪০}$
$\frac{৩}{১১}$	$\frac{৩}{১১}, \frac{৩}{২২}, \frac{১}{১১}, \frac{৩}{৪৪}, \frac{৩}{৫৫}, \frac{১}{২২}, \frac{৩}{৭৭}, \frac{৩}{৮৮}, \frac{১}{৩৩}, \frac{৩}{১১০}$

একক কাজ

ছক ৩.৬ এর ন্যায় $\frac{৩}{১১}$ এর গুণনীয়কগুলো নির্ণয় ও যাচাই করো।

এখন বলো তো এই ভগ্নাংশ দুটির সাধারণ গুণনীয়ক কত? ছক থেকে কিন্তু কোনো সাধারণ গুণনীয়ক পাওয়া যাচ্ছে না। কিন্তু ভগ্নাংশ দুটির অবশ্যই একটি সাধারণ গুণনীয়ক রয়েছে। এবার তাহলে চলো আমরা মোট ১৫টি করে গুণনীয়ক নির্ণয় করার চেষ্টা করি।

ছক ৩.৯	
ভগ্নাংশ	গুণনীয়ক
$\frac{১}{৪}$	$\frac{১}{৪}, \frac{১}{৮}, \frac{১}{১২}, \frac{১}{১৬}, \frac{১}{২০}, \frac{১}{২৪}, \frac{১}{২৮}, \frac{১}{৩২}, \frac{১}{৩৬}, \frac{১}{৪০}, \frac{১}{৪৪}, \frac{১}{৪৮}, \frac{১}{৫২}, \frac{১}{৫৬}, \frac{১}{৬০}$
$\frac{৩}{১১}$	$\frac{৩}{১১}, \frac{৩}{২২}, \frac{১}{১১}, \frac{৩}{৪৪}, \frac{৩}{৫৫}, \frac{১}{২২}, \frac{৩}{৭৭}, \frac{৩}{৮৮}, \frac{১}{৩৩}, \frac{৩}{১১০}, \frac{৩}{১২১}, \frac{১}{৪৪}, \frac{৩}{১৪৩}, \frac{৩}{১৫৪}, \frac{১}{৫৫}$

এবার দেখো, আমরা কিন্তু একটি সাধারণ গুণনীয়ক পেয়েছি, সেটি হলো $\frac{১}{৪৪}$। এখন কিন্তু আমরা বলতে পারব যে এই $\frac{১}{৪৪}$ ই ভগ্নাংশ দুটির নির্ণেয় গসাগু।

একটি বিষয় চিন্তা করো, ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ক্ষেত্রে গুণনীয়কের সংখ্যা নির্দিষ্ট ছিল। তাই চাইলেই এভাবে গুণনীয়ক নির্ণয় করে আমরা সাধারণ গুণনীয়ক কিংবা গসাগু নির্ণয় করতে পেরেছি। কিন্তু ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে বিষয়টি নির্দিষ্ট নয়। একারণে আমরা চাইলে বুঝতে পারব না যে ঠিক কতটি করে গুণনীয়ক নেওয়া প্রয়োজন। যেমন $\frac{১}{৬}$ ও $\frac{১}{৮}$ এর ক্ষেত্রে ৪টি করে গুণনীয়ক বের করলেই কিন্তু আমরা গসাগুটি পেতে পারতাম। আবার $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{২}{৫}$ এর ক্ষেত্রে আমাদের ন্যূনতম ৮টি গুণনীয়ক নির্ণয় করা প্রয়োজন ছিল গসাগু নির্ণয় করার জন্য। আবার পরবর্তীতে $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{৩}{১১}$ এর ক্ষেত্রে কিন্তু আমরা দেখতে পাচ্ছি আমাদের ১০টি গুণনীয়ক নির্ণয় করলেই হয় না। অন্তত ১২টি গুণনীয়ক নির্ণয় করতে পারলে গসাগুটি পাওয়া যায়। এটি কিন্তু অনেক সময়সাপেক্ষ এবং প্রতিটি

ভগ্নাংশের জন্য ন্যূনতম কতটি গুণনীয়ক নির্ণয় করলে প্রথম সাধারণ গুণনীয়ক বা গসাগুটি পাওয়া যাবে, সেই সংখ্যাটি অনির্দিষ্ট।

তাহলে এবার চলো তো চিন্তা করা যাক এই সমস্যার কোনো সমাধান করা যায় কিনা?

এখানে চিন্তা করে দেখো, আমরা সমহরের ধারণাটি এখানে কোনোভাবে প্রয়োগ করতে পারি কিনা?

দেখো, $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{৩}{১১}$ কে কিন্তু চাইলেই সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তর করা যায়।

৪ ও ১১ এর লসাগু হলো ৪৪। তার মানে সমহরে রূপান্তর করা হলে, পাওয়া যাবে, $\frac{১}{৪} = \frac{১১}{৪৪}$ । কারণ হরে ৪ এর সাথে ১১ গুণ করা হলে ৪৪ পাওয়া যায়। তাহলে লবেও ১১ গুণ করতে হবে সমতার জন্য।

তেমনিভাবে $\frac{৩}{১১} = \frac{৩ \times ৪}{৪৪} = \frac{১২}{৪৪}$

এখন চিন্তা করে দেখো, আমাদের দুটি ভগ্নাংশের জন্য হর কিন্তু একই। তাহলে আমাদের কিন্তু হর নিয়ে আর কিছু ভাবতে হচ্ছে না। এখন ভাবো আমরা যদি দুটি ভগ্নাংশকেই ৪৪ দিয়ে গুণ করতাম, তাহলে দুটি পূর্ণ সংখ্যা পেতাম, সেগুলো হলো, ১১ ও ১২। এখন বলো তো ১১ ও ১২ এর গসাগু কত? তোমরা কিন্তু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গসাগু কীভাবে নির্ণয় করতে হয় তা জানো। আমরা বলতে পারি ১১ ও ১২ এর গসাগু কিন্তু ১ হবে।

আবার সমতা করার জন্য ১১ ও ১২ এর গসাগুকে কিন্তু ৪৪ দিয়ে ভাগ করা প্রয়োজন। কারণ আমাদের প্রাপ্ত ভগ্নাংশ দুটি ছিল $\frac{১১}{৪৪}$ ও $\frac{১২}{৪৪}$ । অর্থাৎ, গসাগু হবে $\frac{১}{৪৪}$

এখান থেকে তাহলে কী বোঝা যায়? একাধিক সাধারণ ভগ্নাংশের যদি হর একই হয়, অর্থাৎ ভগ্নাংশগুলো সমহর বিশিষ্ট হয়, তাহলে, ভগ্নাংশগুলোর গসাগুও একটি ভগ্নাংশ হবে, সেই ভগ্নাংশের হরটি সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশগুলোর হর হবে এবং লবটি সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশের লবগুলোর গসাগু হবে।

একক কাজ

সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তরের মাধ্যমে পূর্বে প্রদত্ত সকল ভগ্নাংশের জোড়ার গসাগু নির্ণয় করো। এরপর গসাগুর সাহায্যে ১০টি করে সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয় করো।

এখন তাহলে চলো আমরা দেখি আরও কিছু গসাগু নির্ণয় করতে পারি কিনা ?

ধরো আমাদের ভগ্নাংশ দুটি হলো $\frac{৩}{৫}$ ও $\frac{৬}{১৩}$

একক কাজ

গুণনীয়ক নির্ণয়ের মাধ্যমে ভগ্নাংশ দুটির সাধারণ গুণনীয়ক ও গসাগু নির্ণয় করো। উভয় ভগ্নাংশের জন্যেই ন্যূনতম কতটি গুণনীয়ক নির্ণয় করা হলে গসাগু পাওয়া যায়?

আবার চলো আমরা ভগ্নাংশ দুটিকে সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তর করার চেষ্টা করি। ভগ্নাংশ দুটির হর ৫ ও ১৩ এর লসাগু ৬৫। তাহলে সমহরে রূপান্তরিত ভগ্নাংশ দুটি হবে,

$\frac{৩}{৫} = \frac{৩\times১৩}{৬৫} = \frac{৩৯}{৬৫}$	$\frac{৬}{১৩} = \frac{৬\times৫}{৬৫} = \frac{৩০}{৬৫}$

এবার কী করতে হবে? হরকে ঠিক রেখে, লবে ৩০ ও ৩৯ এর গসাগু নির্ণয় করতে হবে। ৩০ ও ৩৯ এর গসাগু হলো ৩

অর্থাৎ ভগ্নাংশ দুটির নির্ণেয় গসাগুটি হবে $\frac{৩}{৬৫}$

এখন এই সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশ দুটির লবের গসাগু কিন্তু ৩। তার মানে যদি ভগ্নাংশ দুটিকে ৩ দিয়ে ভাগ করতাম, তাহলে যে দুটি ভগ্নাংশ পেতাম সেগুলো কত হতো? $\frac{১০}{৬৫}$ এবং $\frac{১৩}{৬৫}$। এদের লবগুলোর মধ্যে কোনটি বৃহত্তম? তুমি পূর্বে গুণনীয়কের সাহয্যে যেভাবে গসাগু নির্ণয় করে এসেছিলে সেখানে সাধারণ গুণনীয়ক বা গসাগুটি পাওয়ার জন্য ন্যূনতম কতটি গুণনীয়ক নির্ণয় করার প্রয়োজন হয়েছিল?

তুমি চাইলে এভাবে ধাপে ধাপে কিন্তু কাজটি করতে পারো। নিচে পূর্বে নির্ণয় করে আসা দুটি ভগ্নাংশের গসাগু নির্ণয়ের ধাপ দেখানো হলো।

ছক ৩.১০

ধাপ	কাজ	উদাহরণ
১	প্রদত্ত ভগ্নাংশ	$\frac{৩}{৫}$ ও $\frac{৬}{১৩}$
২	ভগ্নাংশ দুটিকে সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তরিত করতে হবে।	$\frac{৩}{৫}=\frac{৩৯}{৬৫}$; $\frac{৬}{১৩} = \frac{৩০}{৬৫}$
৩	সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশের লব দুটি নিতে হবে।	৩৯ ও ৩০
৪	ধাপ ৩ এ নেওয়া সংখ্যা দুটির গসাগু নির্ণয় করতে হবে।	গসাগু = ৩
৫	ধাপ ৪ এ যা পেয়েছি, সেটি হবে গসাগুর লব এবং ধাপ ২ এ সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তর প্রক্রিয়ায় যে হর পেয়েছিলাম সেটি হবে গসাগুর হর।	$\frac{৩}{৬৫}$

এখন একটি বিষয় ভাবো। আমরা কিন্তু পুরো প্রক্রিয়ায় উদাহরণ হিসেবে ২টি করে ভগ্নাংশ নিয়ে কাজ করেছি। কিন্তু তুমি চাইলে পূর্বে দেখানো সকল প্রক্রিয়ার মাধ্যমে দুই এর অধিক ভগ্নাংশেরও গসাগু নির্ণয় করতে পারবে।

আমরা কিন্তু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণিতক কী সেটি জানি। ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণিতক কোনগুলো বলো তো? একদম সহজে বলা যায়, কোনো নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সাথে আরেকটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা গুণ করলে

যে গুণফল পাওয়া যায়, সেটিই ঐ নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণিতক। যেমন ৩ এর গুণিতকগুলো কী হতে পারে? ৩, ৬, ৯, ১২, ... এভাবে অসীম সংখ্যক। কারণ আমরা জানি পূর্ণসংখ্যা অসীম সংখ্যক। তাহলে উদাহরণ অনুযায়ী ৩ এর সাথে গুণ করার জন্য অসীম সংখ্যক পূর্ণসংখ্যা পাওয়া সম্ভব। তাই যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণিতকও অসীম সংখ্যক থাকতে পারে।

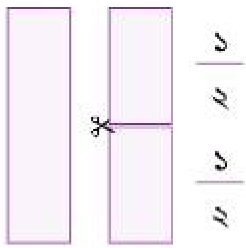
লসাগুর সাথে গুণিতকের সম্পর্ক রয়েছে। লসাগুর পূর্ণরূপ হলো লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক। অর্থাৎ এক্ষেত্রেও লসাগু নির্ণয় করতে হলে একাধিক সংখ্যার প্রয়োজন। আমরা একাধিক সংখ্যার গুণিতক নির্ণয় করলে দেখা যায়, এক বা একাধিক সংখ্যা রয়েছে যা উক্ত সকল সংখ্যারই গুণিতক। সেই একটি বা একাধিক গুণিতককে বলা হয় সাধারণ গুণিতক। এদের মধ্যে যে গুণিতকটি সবচেয়ে ক্ষুদ্র অর্থাৎ, লঘিষ্ঠ সেই গুণিতকটিই হলো লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক। ভেবে বলো তো একটি মাত্র সাধারণ গুণিতক থাকলে কি হয়?

ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার পাশাপাশি, সাধারণ ভগ্নাংশের ক্ষেত্রেও এই পদ্ধতিতে লসাগু নির্ণয় করা সম্ভব।

সাধারণ ভগ্নাংশের গুণিতক

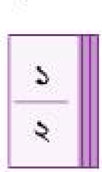
তোমরা সাধারণ ভগ্নাংশের গুণনীয়ক সম্পর্ক জেনেছ। এবার চলো আমরা সাধারণ ভগ্নাংশের গুণিতক সম্পর্কে জানার চেষ্টা করি। এবারও আমরা একটি খেলা খেলি। এখানেও আমরা গুণনীয়ক নির্ণয়ের খেলার মতো খেলা খেলব। তবে এবার উল্টোভাবে।

গুণিতক খুঁজি



চিত্র ৩.৪

তোমরা কয়েকটি দলে ভাগ হয়ে যাও। এবার আগের মতোই একটি কাগজকে সমান দুই ভাগে কাটো। এভাবে কাগজটি দুটি খণ্ড হলো এবং প্রতিটি খণ্ডই কিন্তু মূল কাগজটির $\frac{১}{২}$ অংশ। তুমি এরকম কতটি খণ্ড পেলে যেটি মূল কাগজের $\frac{১}{২}$ অংশ? ২টি। এবার আরও কিছু কাগজ কেটে এরকম ২০টি খণ্ড তৈরি করো। প্রতিটি খণ্ডের উপরে $\frac{১}{২}$ লিখে চিহ্নিত করো।



চিত্র ৩.৫

একইভাবে গুণনীয়কের খেলায় তুমি যেভাবে আরও ৩টি কাগজ নিয়ে, সেই কাগজগুলোকে যথাক্রমে সমান ৩, ৪ ও ৫ খণ্ডে বিভক্ত করেছিলে এবারও তাই করো।

ছক ৩.১ সম্পূর্ণ করে নিশ্চয়ই দেখতে পেয়েছ সমান ৩ খন্ডে বিভক্ত করলে প্রতিটি খন্ড হয় $\frac{১}{৩}$। এভাবে বাকিগুলোও নির্ণয় করা যাবে। এখন তুমি আরও কাগজ কেটে, $\frac{১}{৩}$ এর মোট ২০টি খন্ড তৈরি করো। এটিরও প্রতি খন্ডের উপর $\frac{১}{৩}$ লিখে চিহ্নিত করো।

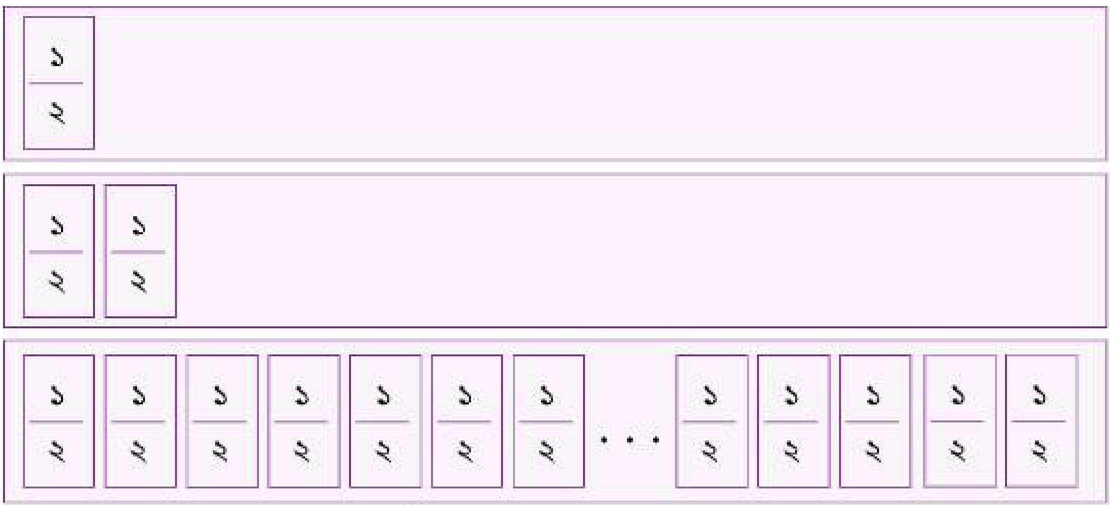
একইভাবে বাকি দুটি ভিন্ন আকারের খন্ডের জন্যেও ২০টি করে খন্ড তৈরি করো এবং উপরের নিয়মে চিহ্নিত করো।

এবার প্রথমেই তোমরা $\frac{১}{২}$ আকারের খন্ডগুলো নাও। খন্ডগুলোকে ক্রমান্বয়ে পাশাপাশি সাজাবে।

চিত্র ৩.৬

প্রথমেই ১টি খন্ড বসাও। কি পেলে? একটিই খন্ড থাকল যেটি মূল কাগজের $\frac{১}{২}$ ভাগই থাকে।

এবার আরেকটি খন্ড নিয়ে ডান পাশে বসাও। এবার কি হলো? দুটি $\frac{১}{২}$ পাশাপাশি বসেছে। এখন একটি কাগজ এনে দেখো, এই দুটি মিলে একটি কাগজের সমান হয়ে গেছে। কারণ দুটি $\frac{১}{২}$ পাশাপাশি বসা মানে, $\frac{১}{২}$ এর ২ গুণ হয়েছে। অর্থাৎ, $\left(\frac{১}{২} \times ২\right) = ১$ অংশ বা মূল কাগজের সম্পূর্ণ অংশ। এভাবে কাগজের $\frac{১}{২}$ খন্ডকে পাশাপাশি বসানোর মানে হলো প্রতিবারে গুণ করে যাওয়া। তাহলে এভাবে ক্রমান্বয়ে মোট ২০টি খন্ড বসাও এবং এর পরিপ্রেক্ষিতে নিচের ছক পূরণ করো।



চিত্র ৩.৭

(আংশিক পূর্ণ করা আছে। তোমাদের কাজের মাধ্যমে সম্পূর্ণ করো পরবর্তীতে চিত্রের সাহায্যে ধারণা নিয়ে, নিজের খাতায় ছক এঁকে পাশাপাশি বসানো টুকরার সংখ্যা ১১ হতে ২০ এর জন্য ছক পূরণ করো)

ছক ৩.১১						
টুকরার উপর লিখিত ভগ্নাংশ	পাশাপাশি বসানো টুকরার সংখ্যা	গুণ প্রক্রিয়া	মূল কাগজের যত অংশ (লঘিষ্ঠ আকারে)	পাশাপাশি বসানো টুকরার সংখ্যা	গুণ প্রক্রিয়া	মূল কাগজের যত অংশ (লঘিষ্ঠ আকারে)
$\frac{১}{২}$	১	$\left(\frac{১}{২}\times ১\right)=\frac{১}{২}$	$\frac{১}{২}$	৬		
	২	$\left(\frac{১}{২}\times ২\right)=\frac{২}{২}=১$	১	৭		
	৩			৮		
	৪			৯		
	৫			১০		

এখন তাহলে কী দেখতে পাচ্ছো? তুমি কিন্তু প্রত্যেকবার একটি করে খন্ড পাশাপাশি বসাচ্ছো এবং সেটির সাপেক্ষে একটি ভগ্নাংশ বা পূর্ণসংখ্যা পাচ্ছ।

একক কাজ

৩, ৪ ও ৫টি সমান খন্ডে টুকরা করা কাগজগুলোর খন্ডগুলোর জন্য, খাতায় ছক ৩.১১ এর অনুরূপ ছক এঁকে তা সম্পূর্ণ করো।

ভাবো তো এই প্রক্রিয়ায় আমরা আসলে কী পাচ্ছি? উদাহরণের ঐ $\frac{১}{২}$ খন্ড থেকে চিন্তা করি। ৩টি $\frac{১}{২}$ খন্ড পাশাপাশি বসানো মানে হলো আসলে সেটিকে ৩ দিয়ে গুণ করা। তার মানে আমরা এই কাগজের টুকরা বসানোর খেলা থেকে মূলত আমরা একটি ভগ্নাংশকে একটি পূর্ণসংখ্যা দ্বারা গুণ করছি। অর্থাৎ, যে কয়টি টুকরা (একই ভগ্নাংশ) পাশাপাশি বসানো হচ্ছে, সেই টুকরার সংখ্যা (যেটি একটি পূর্ণসংখ্যা) দিয়ে ভগ্নাংশটিকে গুণ করা হচ্ছে।

এভাবে আসলে কী পাওয়া যাচ্ছে ভাবো তো? মনে করে দেখো, ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ক্ষেত্রেও কিন্তু আমরা, কোনো নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে এভাবে আরেকটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা দিয়ে গুণ করে ঐ নির্দিষ্ট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাটির গুণিতক পেয়েছি। সাধারণ ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে যখন এই কাজটি করছি, তখন সেগুলো সাধারণ ভগ্নাংশের গুণিতক হচ্ছে এবং ভগ্নাংশ অথবা পূর্ণসংখ্যা।

অর্থাৎ, একটি ভগ্নাংশের সাথে একটি পূর্ণসংখ্যা গুণ করলে আমরা যে আরেকটি ভগ্নাংশ বা পূর্ণসংখ্যা পাই, সেটিই ঐ ভগ্নাংশটির একটি গুণিতক।

এখন তাহলে আমরা ৩.১২ ছকটি পূরণ করে একটি গুণিতক টেবিল তৈরি করে ফেলি। তোমরা প্রতিটি ভগ্নাংশেরই প্রথম ১০টি করে গুণিতক নির্ণয় করবে। ছকটি আংশিকভাবে পূর্ণ করা হয়েছে।

ছক ৩.১২	
ভগ্নাংশ	গুণিতক
$\frac{১}{২}$	$\frac{১}{২}$, ১
$\frac{২}{৩}$	
$\frac{১}{৩}$	
$\frac{৩}{৪}$	
$\frac{১}{৪}$	
$\frac{৪}{৫}$	
$\frac{১}{৫}$	

তুমি চাইলে এভাবেই যেকোনো সাধারণ ভগ্নাংশের গুণিতক নির্ণয় করতে পারবে।

একক কাজ

তুমি তোমার পছন্দমত ৫টি সাধারণ ভগ্নাংশ নাও এবং তাদের ১০টি করে গুণিতক নির্ণয় করো।

এখন চিন্তা করে দেখো তো, তুমি কী কোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সবগুলো গুণিতক নির্ণয় করতে পারো? পারো না কিন্তু। পূর্বেই জেনে এসেছি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণিতক অসীম সংখ্যক হতে পারে, যেহেতু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সংখ্যা অসীম। তেমনি একইভাবে উপর থেকে কিন্তু তোমরা দেখতে পারছ যে সাধারণ ভগ্নাংশের গুণিতক সংখ্যাও অসীম। কারণ একটি সাধারণ ভগ্নাংশের সাথে আরেকটি পূর্ণসংখ্যা গুণ করলে আমরা সবসময়ই ভগ্নাংশ অথবা পূর্ণসংখ্যা পাই।

ভগ্নাংশের সাধারণ গুণিতক ও লসাগু

এ পর্যন্ত আমরা ভগ্নাংশের গুণিতক কী সেটি দেখেছি। এখন, একাধিক ভগ্নাংশের জন্য সাধারণ গুণিতক আসলে কী সেটি বোঝার চেষ্টা করব। এক্ষেত্রে মূল ধারণাটি কিন্তু আমাদের ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সাধারণ গুণিতকের ধারণার মতই। অর্থাৎ একাধিক ভগ্নাংশের গুণিতকের তুলনা করে সাধারণ গুণিতক নির্ণয় করতে হবে।

চলো আমরা গুণিতক খোঁজার জন্য ছক ৩.১৩ লক্ষ করি।

ছক ৩.১৩

ভগ্নাংশ	গুণিতক
$\frac{১}{৬}$	$\frac{১}{৬}, \frac{১}{৩}, \frac{১}{২}, \frac{২}{৩}, \frac{৫}{৬}, ১, \frac{৭}{৬}, \frac{৪}{৩}, \frac{৩}{২}, \frac{৫}{৩}$..............
$\frac{১}{৮}$	$\frac{১}{৮}, \frac{১}{৪}, \frac{৩}{৮}, \frac{১}{২}, \frac{৫}{৮}, \frac{৩}{৪}, \frac{৭}{৮}, ১, \frac{৯}{৮}, \frac{৫}{৪}$.....................

উপরের ছকে চিহ্নিত করো তো কোন ভগ্নাংশ বা পূর্ণসংখ্যা দুটি উভয় সারিতেই রয়েছে? খুব সহজেই দেখতে পারবে $\frac{১}{২}$ এবং ১ ছকের উভয় সারিতেই রয়েছে। তাহলে পূর্ণসংখ্যার সাধারণ গুণিতকের ধারণা থেকে এক্ষেত্রেও বলা সম্ভব যে $\frac{১}{২}$ এবং ১ হলো $\frac{১}{৬}$ ও $\frac{১}{৮}$ এর দুটি সাধারণ গুণিতক। এদের মধ্যে $\frac{১}{২}$ হলো লঘিষ্ঠ বা ছোট। সুতরাং $\frac{১}{৬}$ ও $\frac{১}{৮}$ এর লসাগু হলো $\frac{১}{২}$।

একক কাজ

১০টি করে গুণিতক নির্ণয়ের মাধ্যমে নিচের ভগ্নাংশগুলোর সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয় করো। সেটির সাহায্যে লসাগু নির্ণয় করো।

১) $\frac{১}{৩}, \frac{১}{৫}$ ২) $\frac{১}{৫}, \frac{১}{৬}$ ৩) $\frac{১}{৩}, \frac{১}{১০}$

এখন তোমরা চিন্তা করো আমরা এতক্ষণ এমন দুটি ভগ্নাংশ নিয়ে কাজ করেছি, যাদের লব শুধুমাত্র ১। এবার একটু ভিন্ন কিছু নিয়ে ভাবা যাক। এবার চলো আমরা ভগ্নাংশ হিসেবে $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{২}{৫}$ নিই। এদের লসাগু নির্ণয় করতে হবে। তাহলে চলো প্রথমেই লসাগু নির্ণয়ের নিয়ম অনুযায়ী এদের গুণিতকগুলো খুঁজে বের করার চেষ্টা করি। প্রথমেই আমরা ১০টি করে গুণিতক বের করার চেষ্টা করি।

ছক ৩.১৪

ভগ্নাংশ	গুণিতক
$\frac{১}{৪}$	$\frac{১}{৪}, \frac{১}{২}, \frac{৩}{৪}, ১, \frac{৫}{৪}, \frac{৩}{২}, \frac{৭}{৪}, ২, \frac{৯}{৪}, \frac{৫}{২}$ ....
$\frac{২}{৫}$	$\frac{২}{৫}, \frac{৪}{৫}, \frac{৬}{৫}, \frac{৮}{৫}, ২, \frac{১২}{৫}, \frac{১৪}{৫}, \frac{১৬}{৫}, \frac{১৮}{৫}, ৪$ ....

এখান থেকে খুব সহজেই আমরা দেখতে পাচ্ছি দুটি ভগ্নাংশের মাত্র একটি সাধারণ গুণনীয়ক পাওয়া যাচ্ছে। সেটি হলো ২। এখন প্রশ্ন হলো আমরা কি এটিকেই লসাগু বলতে পারব কি না?

এখন চিন্তা করে দেখো, সাধারণ ভগ্নাংশের লসাগু কিন্তু প্রায় পুরোটাই পূর্ণ সংখ্যার মতো নিয়ম মেনে চলে। পূর্ণসংখ্যার লসাগু নির্ণয় করার সময় আমরা কী দেখেছি, দুটি সংখ্যার মাঝে একদম প্রথম যে সাধারণ গুণিতকটি পাওয়া যায় সেটিই লসাগু। যেমন শুধু ৬ এবং ৮ এর লসাগু কী হয়?

এখন ৬ ও ৮ এর লসাগু নির্ণয়ের জন্য ছক ৩.১৫ দেখি।

ছক ৩.১৫
৬ এর গুণিতকগুলো হলো: ৬, ১২, ১৮, ২৪, ৩৬, ৪২, ৪৮, ৫৪, ...
৮ এর গুণিতকগুলো হলো: ৮, ১৬, ২৪, ৩২, ৪০, ৪৮, ৫৬, ...

দেখা যাচ্ছে ৬ ও ৮ এর সাধারণ গুণিতক ২৪, ৪৮, ...

কিন্তু ৬ ও ৮ এর গুণিতকগুলোর মধ্যে সবচেয়ে ছোট বা লঘিষ্ট গণিতকটি হলো ২৪।

$\therefore$ ৬ ও ৮ এর লসাগু ২৪

তাহলে আমরা বলতে পারি দুই বা ততোধিক ভগ্নাংশের সাধারণ গুণিতকগুলোর মধ্যে প্রথম সাধারণ

গুণিতকটিই সবচেয়ে ছোট বা লঘিষ্ঠ হবে।

$\therefore \frac{১}{৪}$ ও $\frac{২}{৫}$ এর সাধারণ গুণিতক ২ যা সব থেকে লঘিষ্ঠ।

$\therefore \frac{১}{৪}$ ও $\frac{২}{৫}$ এর লসাগু ২।

অর্থাৎ, গুণনীয়কের মতোই যদি ক্রমানুযায়ী গুণিতক নির্ণয় করা হয়, তাহলে প্রাপ্ত প্রথম সাধারণ গুণিতকটির সাহায্যে চাইলে অন্য সাধারণ গুণিতকগুলোও পাওয়া সম্ভব। অর্থাৎ, গুণ করে করে একটি সাধারণ গুণিতক নির্ণয় করা গেলে এরপর বাকি সাধারণ গুণিতকগুলোও নির্ণয় করা যাবে। সেক্ষেত্রে প্রথম প্রাপ্ত সাধারণ গুণিতকটিকে আমার ক্রমান্বয়ে পূর্ণসংখ্যা দ্বারা গুণ করা হলেই পরবর্তী সাধারণ গুণিতকগুলো পাওয়া যাবে।

এবার চলো সবচেয়ে ছোট সাধারণ গুণিতককে ক্রমান্বয়ে পূর্ণসংখ্যা দিয়ে গুণ করে সাধারণ গুণিতকগুলো পাওয়ার চেষ্টা করি।

সুতরাং $\frac{১}{৬}$ ও $\frac{১}{৮}$ এর সাধারণ গুণিতক হলো.....

$$\frac{১}{২} \times ১ = \frac{১}{২}$$

$\frac{১}{২} \times ২ = ১$

$\frac{১}{২} \times ৩ = \frac{৩}{২}$

$\frac{১}{২} \times ৪ = ২, \ldots\ldots$

এদের মধ্যে লঘিষ্ঠ বা ছোট গুণিতকগুলো $\frac{১}{২}$।

অর্থাৎ, একাধিক ভগ্নাংশের মধ্যে গুণিতক নির্ণয় করা হলে, প্রথম যে সাধারণ গুণিতকটি পাওয়া যাবে সেটি সর্বদাই সাধারণ গুণিতকগুলোর মাঝে সবচেয়ে ছোট হবে। আর একদম প্রথমে পাওয়া সেই সাধারণ গুণিতকটিই হবে লসাগু।

এখন তাহলে কী বলা যায় বলো তো? আমরা ১০টি করে গুণিতক নির্ণয় করে $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{২}{৫}$ এর যে একমাত্র সাধারণ গুণনীয়কটি পেয়েছি, সেই ২ ই হলো ভগ্নাংশ দুটির লসাগু।

একটি মজার বিষয় কি লক্ষ করেছ? ভগ্নাংশের গুণিতকগুলো কিন্তু ভগ্নাংশটির চাইতে বড়, তাই না?

এবার $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{৩}{১১}$ এর লসাগু নির্ণয় করতে চেষ্টা করি। এবারও ১০টি করে গুণিতক নিয়ে লসাগু নির্ণয় করব।

ছক ৩.১৬	
ভগ্নাংশ	গুণিতক
$\frac{১}{৪}$	$\frac{১}{৪}, \frac{১}{২}, \frac{৩}{৪}, ১, \frac{৫}{৪}, \frac{৩}{২}, \frac{৭}{৪}, ২, \frac{৯}{৪}, \frac{৫}{২}$
$\frac{৩}{১১}$	$\frac{৩}{১১}, \frac{৬}{১১}, \frac{৯}{১১}, \frac{১২}{১১}, \frac{১৫}{১১}, \frac{১৮}{১১}, \frac{২১}{১১}, \frac{২৪}{১১}, \frac{২৭}{১১}, \frac{৩০}{১১}, \frac{২৪}{১১}$

এখন বলো তো এই ভগ্নাংশ দুটির সাধারণ গুণিতক কত? ছক থেকে কিন্তু কোনো সাধারণ গুণিতক পাওয়া যাচ্ছে না। কিন্তু ভগ্নাংশ দুটির অবশ্যই সাধারণ গুণিতক থাকবে। এবার তাহলে চলো, গসাগু নির্ণয়ের মতো করে এটিরও আমরা মোট ১৫টি করে গুণিতক নির্ণয় করার চেষ্টা করি।

ছক ৩.১৭	
ভগ্নাংশ	গুণিতক
$\frac{১}{৪}$	$\frac{১}{৪}$, $\frac{১}{২}$, $\frac{৩}{৪}$, ১, $\frac{৫}{৪}$, $\frac{৩}{২}$, $\frac{৭}{৪}$, ২, $\frac{৯}{৪}$, $\frac{৫}{২}$, $\frac{১১}{৪}$, ৩, $\frac{১৩}{৪}$, $\frac{৭}{২}$, $\frac{১৫}{৪}$
$\frac{৩}{১১}$	$\frac{৩}{১১}$, $\frac{৬}{১১}$, $\frac{৯}{১১}$, $\frac{১২}{১১}$, $\frac{১৫}{১১}$, $\frac{১৮}{১১}$, $\frac{২১}{১১}$, $\frac{২৪}{১১}$, $\frac{২৭}{১১}$, $\frac{৩০}{১১}$, ১, $\frac{৩৬}{১১}$, $\frac{৩৯}{১১}$, $\frac{৪২}{১১}$, $\frac{৪৫}{১১}$

এখন দেখো, আমরা কিন্তু একটি সাধারণ গুণিতক পেয়েছি। সেটি হলো ৩। তাহলে এই ৩ই কিন্তু ভগ্নাংশ দুটির সাধারণ গুণিতক।

তোমরা যদি ভগ্নাংশের গসাগু থেকে দেখে আসো, তাহলে কিন্তু বুঝতে পারবে আমরা শুধু গুণনীয়কের সাহায্যে গসাগু নির্ণয় করতে গিয়ে যে সমস্যায় পড়েছিলাম, সেই একই সমস্যায় আমরা পড়ছি শুধু গুণিতকের সাহায্যে লসাগু নির্ণয় করতে গিয়ে। এখন মজার বিষয়টি হলো, আমরা আসলে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ক্ষেত্রে যেভাবে গুণিতক নির্ণয় করে লসাগু নির্ণয় করি, সাধারণ ভগ্নাংশের ক্ষেত্রেও এই পদ্ধতিটি একদম একই।

পূর্ণসংখ্যার ক্ষেত্রেও কিন্তু শুধু এভাবে গুণিতক দিয়ে লসাগু বের করা অনেক সময়সাপেক্ষ কাজ হয়। কারণ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণিতকের সংখ্যা কিন্তু সেটির গুণনীয়কের মতো নির্দিষ্ট না। একইভাবে সাধারণ ভগ্নাংশের গুণিতকের সংখ্যাও অনির্দিষ্ট এবং অসীম সংখ্যক।

একারণে, পূর্বে দেখে আসা গুণনীয়কের মতো এক্ষেত্রেও আমরা চাইলে বুঝতে পারব না যে ঠিক কতটি করে গুণিতক নেওয়া প্রয়োজন।

যেমন $\frac{১}{৬}$ ও $\frac{১}{৮}$ এর ক্ষেত্রে ৪টি করে গুণিতক নির্ণয় করেই কিন্তু আমরা লসাগু পেতে পারতাম। আবার $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{২}{৫}$ এর ক্ষেত্রে, উভয় ভগ্নাংশের ন্যূনতম ৮টি গুণিতক নিতে হতো লসাগুটি পাওয়ার জন্য।

অপরদিকে $\frac{১}{৪}$ ও $\frac{৩}{১১}$ ভগ্নাংশ দুটির ক্ষেত্রে কিন্তু আমরা দেখতে পাচ্ছি ১০টি গুণিতক নির্ণয় করলেই হবে না। অন্তত ১২টি নির্ণয় করতে পারলে লসাগুটি পাওয়া যাবে।

এই বিষয়টি অনেক সময়সাপেক্ষ এবং প্রতিটি ভগ্নাংশের জন্য ন্যূনতম কতটি গুণিতক নির্ণয় করলেই প্রথম সাধারণ গুণিতক তথা লসাগুটি পাওয়া যাবে, সেই সংখ্যাটিও অনির্দিষ্ট।
এই সমস্যাটিও আমরা সহজভাবে সমাধান করতে পরি। সেক্ষেত্রে-

- যে সকল ভগ্নাংশের লসাগু নির্ণয় করতে হবে তাদের প্রথমে সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তর করতে হবে।
- এবার সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশের লবগুলোর লসাগু বের করতে হবে।
- লবগুলোর লসাগুকে সমহর দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ফলই হবে প্রদত্ত ভগ্নাংশগুলোর লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক।

দশমিক ভগ্নাংশের গসাগু ও লসাগু

গুণনীয়ক এবং গুণিতক ব্যবহার করে কীভাবে পূর্ণসংখ্যা ও ভগ্নাংশের গসাগু ও লসাগু নির্ণয় করতে হয় আমরা এ বিষয়গুলো দেখে এসেছি। তবে এখানে আমরা ভগ্নাংশকে সাধারণ ভগ্নাংশ বলব। সুতরাং আমরা সাধারণ ভগ্নাংশের গসাগু ও লসাগু নির্ণয় শিখেছি। এখন আমরা দশমিক ভগ্নাংশের গসাগু ও লসাগু শেখার চেষ্টা করব।

প্রথমেই মনে করার চেষ্টা করো তো, দশমিক ভগ্নাংশ কী? কোনো সাধারণ ভগ্নাংশকে দশমিক আকারে প্রকাশ করা হলে সেটি দশমিক ভগ্নাংশ। যেমন: ০.২৫ একটি দশমিক ভগ্নাংশ। এটির সাধারণ ভগ্নাংশ রূপ হলো $\frac{১}{৪}$ । এখন চিন্তা করো কীভাবে ০.২৫ থেকে $\frac{১}{৪}$ পাওয়া যায়? তোমরা এ বিষয়টি কিন্তু শিখেছ।

দশমিক ভগ্নাংশের গসাগু

এক্ষেত্রে আমরা দুটি পদ্ধতিতে দশমিক ভগ্নাংশের গসাগু ও লসাগু শেখার চেষ্টা করব।

প্রথমেই দুটি দশমিক ভগ্নাংশ নেবো। ১.২ ও ০.১৮। আমরা এই দুটি দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যার গসাগু নির্ণয় করার চেষ্টা করব।

এখন গসাগু নির্ণয় করতে গেলে আমরা সরাসরি গুণনীয়ক কিংবা গুণিতক নিয়ে কাজ করব না। আমরা আগে চিন্তা করে দেখব কীভাবে দশমিক ভগ্নাংশ দুটিকে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করা যায়।

অর্থাৎ, $১.২ = \frac{১২}{১০}$

তাহলে, $১.২ \times ১০ = \frac{১২}{১০} \times ১০ = ১২$

এখন দেখো, ০.১৮ এর ক্ষেত্রে আমরা কী করব? এখানে দশমিকের পরে কিন্তু দুটি অঙ্ক রয়েছে। তাই, এই দশমিক ভগ্নাংশটিকে আমরা কিন্তু এবার ১০ দিয়ে গুণ না করে ১০০ দিয়ে গুণ করব। এক্ষেত্রেও পূর্বের ন্যায় পাওয়া যায়, $০.১৮ = \frac{১৮}{১০০}$

তোমরা ইতোমধ্যেই সাধারণ ভগ্নাংশের গসাগু নির্ণয় করেছ। ঠিক একইভাবে $\frac{১২}{১০}$ ও $\frac{১৮}{১০০}$ ভগ্নাংশ দুটির গসাগু নির্ণয় করো। এক্ষেত্রে খুব সহজেই সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তর করে গসাগু নির্ণয় করতে পার। এবার প্রদত্ত ভগ্নাংশ দুটি দশমিক ভগ্নাংশে থাকায় এদের গসাগু দশমিকে প্রকাশ করতে হবে।

দশমিক ভগ্নাংশের লসাগু

দশমিক ভগ্নাংশের লসাগু নির্ণয়ের প্রক্রিয়া কিন্তু প্রায় পুরোটাই দশমিক ভগ্নাংশের গসাগু নির্ণয়ের মতো। আশা করা যায়, তোমরা দশমিক ভগ্নাংশের গসাগু নির্ণয় করতে পারো।

এবার চলো একটি ভিন্ন উদাহরণের সাহায্যে দশমিক ভগ্নাংশের লসাগু নির্ণয়ের ব্যাপারটি লক্ষ্য করি। আমরা ১.৫, ০.১২ এবং ১ এর লসাগু নির্ণয় করার চেষ্টা করব।

এখানে চিন্তা করো তো কী করতে হবে? আমরা কিন্তু জেনেছি যে আসলে একটি প্রক্রিয়াতেই দশমিক ভগ্নাংশের গসাগু বা লসাগু নির্ণয় করা যায়।

চলো ৩টি দশমিক ভগ্নাংশকে আগে সাধারণ ভগ্নাংশে রূপান্তর করলে কী হয় সেটি দেখি।

১.৫ = $\frac{১৫}{১০}$	০.১২ = $\frac{১২}{১০০}$	১ = $\frac{১}{১}$

এখানে একটি বিষয় লক্ষ করে দেখো, আমরা কিন্তু এখানে একটি পূর্ণসংখ্যা নিয়েছি। এখন তোমরা কিন্তু জানো, পূর্ণসংখ্যাকেও ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ সম্ভব। যে পূর্ণসংখ্যাটি আছে, সেটির হরে ১ বসিয়ে কিন্তু পূর্ণসংখ্যাকে ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ সম্ভব।

এবার দেখো, দশমিক ভগ্নাংশগুলোকে, সাধারণ ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা হলে, তিনটি হর পাওয়া যায় ১, ১০ এবং ১০০। তোমরা কিন্তু জানো, ১, ১০ এবং ১০০ এর লসাগু হয় ১০০।

এবার ভগ্নাংশগুলো হলো $\frac{১৫০}{১০০}$, $\frac{১২}{১০০}$ ও $\frac{১০০}{১০০}$ যা সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশ। এবার আমরা খুব সহজেই এই ভগ্নাংশের লসাগু নির্ণয় করতে পারি।

অনুশীলনী

১) গুণনীয়ক নির্ণয়ের মাধ্যমে এবং সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তরের মাধ্যমে নিম্নোক্ত ভগ্নাংশগুলোর গসাগু নির্ণয় করো।

i) $\frac{১}{৫}, \frac{৩}{১০}$ ii) $\frac{১}{৬}, \frac{৫}{৮}$

iii) $\frac{২}{৭}, \frac{৬}{৮}$ iv) $\frac{১}{৭}, \frac{১}{১১}$

v) $\frac{১}{২}, \frac{১}{৩}$ ও $\frac{১}{৪}$ vi) $\frac{১}{৫}, \frac{৩}{১০}$ ও $\frac{৭}{১৫}$

২) ১ নং কাজের প্রতিটি সমস্যায় প্রতিটি ভগ্নাংশের জন্য ন্যূনতম কতটি করে গুণনীয়ক বের করতে হয়েছিল তা লেখো।

৩) সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তরের পর লবের উপাদানগুলোর তুলনা করে কি তুমি ২ নং কাজের সাথে কোনো সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারো?

৪) গুণিতক নির্ণয়ের মাধ্যমে এবং সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তরের মাধ্যমে নিম্নোক্ত ভগ্নাংশগুলোর লসাগু নির্ণয় করো।

i) $\frac{১}{৫}, \frac{৩}{১০}$ $\frac{১}{৫}, \frac{৩}{১০}$ ii) $\frac{১}{৬}, \frac{৫}{৮}$

iii) $\frac{২}{৭}, \frac{৬}{৮}$ iv) $\frac{১}{৭}, \frac{১}{১১}$

v) $\frac{১}{২}, \frac{১}{৩}, \frac{১}{৪}$ vi) $\frac{১}{৫}, \frac{৩}{১০}, \frac{৭}{১৫}$

৫) ৪নং কাজের প্রতিটি সমস্যায় প্রতিটি ভগ্নাংশের জন্য ন্যূনতম কতটি করে গুণীতক বের করতে হয়েছিল তা লেখো।

৬) সমহর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে রূপান্তরের পর লবের উপাদানগুলোর তুলনা করে কি তুমি ৫নং কাজের সাথে কোনো সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারো?

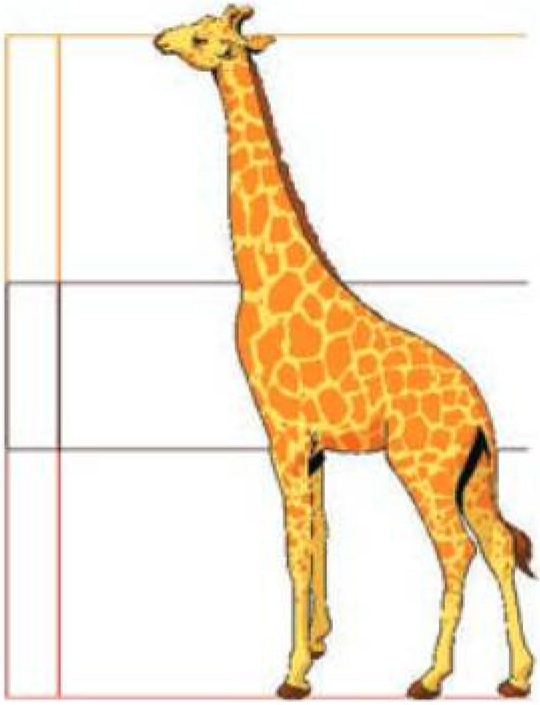
৭) নিচের দশমিক ভগ্নাংশগুলোর লসাগু নির্ণয় করো।

১) ০.২ ও ০.৩
২) ১ ও ০.৫
৩) ৩ ও ১.২৫
৪) ০.২ ও ০.০০৪
৫) ১.২ ও ০.১৮
৬) ০.২, ০.৩ ও ০.৪

৮) নিচের দশমিক ভগ্নাংশগুলোর গসাগু নির্ণয় করো।

১) ০.২ ও ০.৩
২) ১ ও ০.৫
৩) ৩ ও ১.২৫
৪) ০.২ ও ০.০০৪
৫) ০.২, ০.৩ ও ০.৪

অনুপাত, সমানুপাত



পূর্বের শ্রেণিতে আমরা কিছু অনুপাত সম্পর্কে ধারণা লাভ করে এসেছি এবং দেখেছি, অনুপাত কীভাবে কাজ করে। এ অধ্যায়ে আমরা বিভিন্ন ধরনের অনুপাত সম্পর্কে জানার চেষ্টা করব। তার আগে চলো আমরা কয়েকটি কাজ করি।

তোমরা চিত্রের প্রাণীটিকে দেখোতো। তোমরা কি চিনতে পারছ প্রাণীটির নাম কী? এটি একটি জিরাফ। উচ্চতার দিক দিয়ে প্রাণীজগতের সবচেয়ে বড় প্রাণী জিরাফ। এবার জিরাফটি দেখো। এখানে, জিরাফটির গলার দৈর্ঘ্য ও জিরাফটির দৈর্ঘ্য মাপতে হবে। নির্দিষ্ট রেখা বরাবর তোমরা জিরাফটির গলা ও জিরাফটির দৈর্ঘ্য মাপো এবং গলা ও সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্যের অনুপাতটি নির্ণয় করো। আবার একইভাবে জিরাফটির দৈর্ঘ্য ও জিরাফটির গলার দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় করো। তুমি যে অনুপাত দুটি পেলে, সেটি নিচের ছকে লেখো।

ছক ৪.১

জিরাফের গলার দৈর্ঘ্য	জিরাফের পুরো দেহের দৈর্ঘ্য	গলার দৈর্ঘ্যে ও পুরো দেহের দৈর্ঘ্যের অনুপাত	পুরো দেহের দৈর্ঘ্য ও গলার দৈর্ঘ্যের অনুপাত

এবার তোমরা তোমাদের বাংলা বই ও গণিত বইটি নাও। দুটি বইয়েরই দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও পুরুত্ব মাপো। এবার গণিত বই ও বাংলা বইয়ের প্রাপ্ত দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় করো। একইভাবে প্রস্থ ও পুরুত্বের অনুপাতও নির্ণয় করো। এবার তোমার প্রাপ্ত তথ্যের সাপেক্ষে ছক ৪.২ পূরণ করো।

ছক ৪.২			
	দৈর্ঘ্য	প্রস্থ	পুরুত্ব
গণিত বই			
বাংলা বই			
অনুপাত			

সরল অনুপাত

এতক্ষণ আমরা তো বেশ কয়েকটি অনুপাত নির্ণয় করে এসেছি। তোমরা বলো তো এই অনুপাতগুলোতে কতটি রাশি ছিল? দেখো, প্রতিটি অনুপাতে কিন্তু ২টি রাশি আছে। কোনো অনুপাতে দুটি রাশি থাকলে তাকে সরল অনুপাত বলে।

সরল অনুপাতের প্রথম রাশিকে পূর্বরাশি এবং দ্বিতীয় রাশিকে উত্তররাশি বলে। যেমন, ৩ : ৫ একটি সরল অনুপাত, এখানে ৩ হলো পূর্বরাশি ও ৫ হলো উত্তররাশি।

লঘু অনুপাত

তোমরা জিরাফের দৈর্ঘ্য মেপে এসেছ। এখন, জিরাফের গলার দৈর্ঘ্য ও পুরো দেহের অনুপাতটি কী ছিল দেখো তো? অনুপাতের পূর্বরাশি ও উত্তররাশি মধ্যে কে বড় বলো তো? দেখা যাবে পূর্বরাশিটি ছোট, উত্তররাশিটি বড়। এধরনের অনুপাত গুলোকে লঘু অনুপাত বলা হয়। অর্থাৎ, সরল অনুপাতের পূর্বরাশি, উত্তররাশি থেকে ছোট হলে, তাকে লঘু অনুপাত বলে। যেমন, ৩ : ৫, ৪ : ৭ ইত্যাদি।

একটি বিদ্যালয়ের ৩য় শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গড় বয়স ৮ বছর এবং ৫ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গড় বয়স ১০ বছর। এখানে ৩য় ও ৫ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গড় বয়সের অনুপাত ৮ : ১০ বা ৪ : ৫। এই অনুপাতটির পূর্বরাশি, উত্তররাশি অপেক্ষা ছোট হওয়ায় এটি একটি লঘু অনুপাত।

গুরু অনুপাত

আবার আমরা সেই জিরাফের দৈর্ঘ্যটির দিকে তাকাই। তবে এবার পুরো দেহের দৈর্ঘ্য ও গলার দৈর্ঘ্যের অনুপাত থেকে আমরা কী দেখতে পারি? এবার কিন্তু পূর্বরাশিটি বড় এবং উত্তররাশিটি ছোট। এধরনের অনুপাত হলো গুরু অনুপাত।

অর্থাৎ, কোনো সরল অনুপাতের পূর্বরাশি, উত্তররাশি থেকে বড় হলে, তাকে গুরু অনুপাত বলে। যেমন, ৫ : ৩, ৭ : ৪, ৬ : ৫ ইত্যাদি।

সাদিয়া ৩২ টাকা দিয়ে একটি বিস্কুটের প্যাকেট ও ২৫ টাকা দিয়ে একটি কোণ আইসক্রিম কিনল।

এখানে বিস্কুট ও আইসক্রিমের দামের অনুপাত হলো ৩২ : ২৫, এই অনুপাতটির পূর্বরাশি ৩২ যা উত্তররাশি ২৫ অপেক্ষা বড় হওয়ায় এটি একটি গুরু অনুপাত।

একক অনুপাত

তোমরা তোমাদের দুটি বইয়ের অনুপাত মেপে দেখেছ। সেখান থেকে কী পেলে বলো তো? দেখো তো দৈর্ঘ্যের অনুপাত কেমন হয়? দুটি বইয়ের দৈর্ঘ্যের অনুপাত একই বা কাছাকাছি না? অনুপাতের ধারণা থেকে আমরা কী বলতে পারি? দুটি বইয়ের দৈর্ঘ্য একই হওয়ায় আমরা এটিকে বলতে পারি ১ : ১। অর্থাৎ অনুপাতের দুটি রাশিই এক বা একক। এ ধরনের অনুপাতই হলো একক অনুপাত।

অর্থাৎ, যে সরল অনুপাতের পূর্বরাশি ও উত্তররাশি সমান সে অনুপাতকে একক অনুপাত বলে।

যেমন, আরিফ ১৫ টাকা দিয়ে একটি বলপেন ও ১৫ টাকা দিয়ে একটি খাতা কিনল। এখানে বলপেন ও খাতা উভয়টির মূল্য সমান এবং মূল্যের অনুপাত ১৫ : ১৫ বা ১ : ১। অতএব, একক অনুপাত।

একক কাজ

১. সরল অনুপাত, লঘু অনুপাত এবং গুরু অনুপাতের একটি করে উদাহরণ খুঁজে বের করো।

২. তোমাদের বইয়ের প্রস্থ ও পুরুত্বের জন্য যে দুটি অনুপাত পেয়েছিলে, সেই অনুপাত দুটি কোন ধরনের অনুপাত হবে?

ব্যস্ত অনুপাত

চলো, আমরা আবার সেই জিরাফটি দেখি। তোমরা নিচের ছকে অনুপাত দুটির মধ্যে সম্পর্ক করার চেষ্টা করো তো।

ছক ৪.৩

ক্রমিক	অনুপাত	পূর্বরাশি	উত্তররাশি
১	গলার দৈর্ঘ্য ও পুরো দেহের দৈর্ঘ্যের অনুপাত		
২	পুরো দেহের দৈর্ঘ্য ও গলার দৈর্ঘ্যের অনুপাত		

ছক থেকে আসলে কী দেখতে পাচ্ছ? ১ নং অনুপাতের পূর্বরাশিটি আর ২ নং অনুপাতের উত্তররাশির মাঝে কোন মিল পাও? আবার ১ নং অনুপাতের উত্তররাশি আর ২ নং অনুপাতের পূর্বরাশির মাঝে কোনো মিল পাও?

দেখো, এই দুটি অনুপাতের একটি আরেকটির সাপেক্ষে উল্টো।

কোনো সরল অনুপাতের পূর্বরাশিকে উত্তররাশি এবং উত্তররাশিকে পূর্বরাশি করে প্রাপ্ত অনুপাতকে পূর্বের অনুপাতের ব্যস্ত অনুপাত বলে।

যেমন, ১৩ : ৫ এর ব্যস্ত অনুপাত ৫ : ১৩।

একক কাজ

'ব্যস্ত অনুপাত' এবং 'বিপরীত ভগ্নাংশ' এর মধ্যে কোনো মিল খুঁজে পাও কি না?

বহুরাশিক অনুপাত

এবার চলো, আমরা বই মাপার কাজটি আরেকবার করার চেষ্টা করি। তবে এবার বাংলা বই ও গণিত বইয়ের সাথে তুমি তোমার ইংরেজি বইটিকে সাথে নাও। পূর্বের ন্যায় একইভাবে তিনটি বইয়ের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও পুরুত্ব নির্ণয় করো এবং তা নিচের ছকে লেখো।

ছক ৪.৪			
	দৈর্ঘ্য	প্রস্থ	পুরুত্ব
গণিত বই			
বাংলা বই			
ইংরেজি বই			

ভেবে দেখো, তুমি উপরে যে বই মাপলে, এবার তোমাকে বইগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত নির্ণয় করতে বললে তুমি কী করবে? এবার কি আগের মতো কোনো একক অনুপাত পাবে? তা কিন্তু পাবে না, কারণ এবার তোমার কিন্তু রাশি আর দুটি নয়। তাহলে এবার তোমাকে তিনটি রাশিকে পাশাপাশি অনুপাত আকারে লিখতে হবে।

একক কাজ

তোমার তিনটি বইয়ের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও পুরুত্বের অনুপাত কী হবে?

অর্থাৎ, তিন বা ততোধিক রাশির অনুপাতকে বহুরাশিক অনুপাত বলে। এক্ষেত্রে পূর্বে ব্যবহার করে আসা একটি উদাহরণের সাহায্যে চিন্তা করো, আরিফ ১৫ টাকা দিয়ে একটি খাতা ও ১৫ টাকা দিয়ে একটি বলপেনের সাথে সাথে ১৫ টাকা দিয়ে একটি রাবারও কিনল। এবার তাহলে মূল্যের অনুপাত কী হবে? নিশ্চয় ১৫ : ১৫ বা ১ : ১ হবে না। এক্ষেত্রে মূল্যের অনুপাত হবে ১৫ : ১৫ : ১৫ বা ১ : ১ : ১। এবার ভাবো উপরের উদাহরণ অনুযায়ী যদি সাদিয়া ৩২ টাকা দিয়ে বিস্কুটের প্যাকেট ও ২৫ টাকা দিয়ে কোণ আইসক্রিমের সাথে ২ টাকা দিয়ে একটি ক্যান্ডি কিনত, তাহলে এই তিনটি পণ্যের মূল্যের অনুপাত কত হতো?

নিচের তথ্যগুলো দেখো এবং সেটির সাপেক্ষে অনুপাতগুলো নির্ণয় করো।

শ্রেণি	গড় বয়স (বছর)
৩য়	৮
৫ম	১০
৭ম	১২

ক্রমিক	অনুপাত	অনুপাত	অনুপাতের সরল রূপ	পূর্ব রাশি	উত্তর রাশি
১	৩য় ও ৫ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গড় বয়স	৮ : ১০	৪ : ৫	৪	৫
২	৫ম ও ৭ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গড় বয়স				

ধারাবাহিক অনুপাত

উপরের ছকে ১ম অনুপাতের উত্তররাশি ও দ্বিতীয় অনুপাতের পূর্বরাশিটি কত দেখো তো? দুটি কি সমান হচ্ছে না?

এভাবে, দুটি অনুপাতের মধ্যে প্রথম অনুপাতের উত্তররাশি ও দ্বিতীয় অনুপাতের পূর্বরাশি পরস্পর সমান হলে, তাকে ধারাবাহিক অনুপাত বলে।

আবার চিন্তা করে দেখো, ধরো তুমি বাজারে গেলে। গিয়ে তুমি ১০ টাকা দিয়ে একটি চকলেট, ২০ টাকা দিয়ে একটি কেক এবং ৩০ টাকা দিয়ে একটি আইসক্রিম কিনলে। এখানে কি হচ্ছে ভাবো তো?

তোমার কেনা চকলেট ও কেকের দামের অনুপাতটি হবে ১০: ২০ অথবা ১: ২। আবার তোমার কেক এবং আইসক্রিমের দামের অনুপাতটি হবে ২০: ৩০ বা ২: ৩। এখানে কি আমরা আমাদের বলা উদাহরণের মত ঘটনা পাচ্ছি? দেখো, এই তিনটি অনুপাত কিন্তু ধারাবাহিক অনুপাতে আছে। অর্থাৎ, তোমার কেনা চকলেট, কেক এবং আইসক্রিমের দামের অনুপাতটি হবে ১: ২: ৩।

একক কাজ

উপরে ৩য়, ৫ম ও ৭ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গড় বয়সের অনুপাতটি একত্রে কত হবে?

৩য় ও ৫ম শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গড় বয়স যথাক্রমে ৭ ও ১০ বছর। অপরদিকে ৬ষ্ঠ শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গড় বয়স ১১ বছর। এই তিন শ্রেণির শিক্ষার্থীদের গড় বয়স কি ধারাবাহিক অনুপাতে রয়েছে? থাকলে ধারাবাহিক অনুপাত আকারে অনুপাতটি কত হবে?

একক কাজ

অনুপাত সংক্রান্ত নিচের ছকটি পূরণ করো:

অনুপাতের নাম	সম্পর্ক	উদাহরণ
সরল অনুপাত	দুটি রাশি থাকবে	৩: ৫
লঘু অনুপাত	সরল অনুপাতের পূর্ব রাশি, উত্তররাশি থেকে ছোট হলে	৫: ৮
গুরু অনুপাত		
একক অনুপাত		
ব্যস্ত অনুপাত		
বহুরাশিক অনুপাত		
ধারাবাহিক অনুপাত		

প্রথমেই তোমার বন্ধুর সাহায্যে বাম কাঁধ হতে বাম হাতের এবং ডান কাঁধ হতে ডান হাতের দৈর্ঘ্য মাপ।

এবার তোমার নিজের উচ্চতা মাপ। তোমার প্রাপ্ত তথ্যগুলোর সাহায্যে নিচের ছক পূরণ করো।

ছক ৪.৫

বাম কাঁধ হতে বাম হাতের দৈর্ঘ্য (সেন্টিমিটারে)	ডান কাঁধ হতে ডান হাতের দৈর্ঘ্য (সেন্টিমিটারে)	পূর্ববর্তী দুটি কলামের যোগফল	তোমার উচ্চতা (সেন্টিমিটারে)	তোমার কাঁধ হতে দুই হাতের যোগফল এবং তোমার উচ্চতার অনুপাত

এখানে তুমি যে অনুপাতটি পেলে সেটি কোন ধরনের অনুপাত বলো তো?

বাস্তব সমস্যা সমাধানে অনুপাতের প্রয়োগ

১. ৫০০ টাকা দুইজন বন্ধুর মাঝে ২ : ৩ অনুপাতে ভাগ করে দিলে কে কত টাকা পাবে?

১ম বন্ধু	১ম বন্ধু	২য় বন্ধু	২য় বন্ধু	২য় বন্ধু

অনুপাতের পূর্বরাশি ২ এবং উত্তররাশি ৩। রাশি দুটির সমষ্টি- ২ + ৩ = ৫।

১ম বন্ধু পাবে, ৫০০ টাকার $\frac{২}{৫}$ অংশ = ৫০০ টাকা × $\frac{২}{৫}$ = ২০০ টাকা

২য় বন্ধু পাবে, ৫০০ টাকার $\frac{২}{৫}$ অংশ = ৫০০ টাকা × $\frac{২}{৫}$ = ৩০০ টাকা

অনুপাতের পূর্বরাশি ও উত্তররাশির সমষ্টি দ্বারা তাদেরকে ভাগ করে প্রত্যেকের অংশ নির্ণয় করা যায়।

২. দুটি সংখ্যার যোগফল ৩৬০। সংখ্যা দুটির অনুপাত ৪ : ৫ হলে, সংখ্যা দুটি নির্ণয় করো।

নিচের ফাঁকা জায়গায় অনুপাতের বাক্স অঙ্কন করো।

সংখ্যা দুটির অনুপাত ৪ : ৫

অনুপাতটির পূর্ব ও উত্তররাশির যোগফল = ৪ + ৫ = ৯।

প্রথম সংখ্যাটি = ৩৬০ এর $\frac{৪}{৯}$ অংশ

$= ৩৬০ \times \frac{৪}{৯}$

$= ১৬০$।

দ্বিতীয় সংখ্যাটি = ৩৬০ এর $\frac{৫}{৯}$ অংশ

$= ৩৬০ \times \frac{৫}{৯}$

$= ২০০$।

নির্ণেয় সংখ্যা দুটি হলো ১৬০ ও ২০০।

একক কাজ

কোনো এক সোমবারে, তোমাদের নিকটস্থ বাজারে কেজিপ্রতি আলু ও বেগুনের দামের অনুপাত ৪ : ৯। আলুর দাম ২০ টাকা হলে বেগুনের দাম কত?

মঙ্গলবারে, বাজারে প্রাপ্যতার ঘাটতির জন্য বেগুনের দাম কেজি প্রতি ৫ টাকা বৃদ্ধি পেলে নতুন অনুপাত কত হবে?

এবার চলো দেখি ৩০টি কমলা তিন ভাই স্বপন, তপন ও মননের মধ্যে ৫: ৩: ২ অনুপাতে ভাগ করলে প্রত্যেকের কতটি করে কমলা পাবে?

স্বপন	স্বপন	স্বপন	স্বপন	স্বপন	তপন	তপন	তপন	মনন	মনন

কমলার পরিমাণ = ৩০টি

প্রদত্ত অনুপাত = ৫ : ৩ : ২। অনুপাতের সংখ্যাগুলোর যোগফল = ৫ + ৩ + ২ = ১০

স্বপন পায় = ৩০টি কমলার $\frac{৫}{১০}$ অংশ $= ৩০ \times \frac{৫}{১০} = ১৫$টি

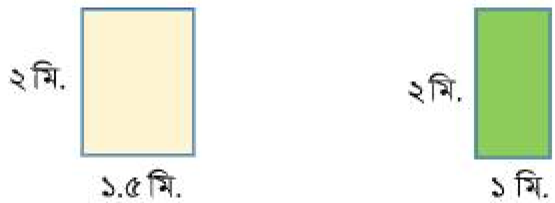
তপন পায় = ৩০টি কমলার $\frac{৩}{১০}$ অংশ $= ৩০ \times \frac{৩}{১০} = ৯$টি

মনন পায় = ৩০টি কমলার $\frac{২}{১০}$ অংশ $= ৩০ \times \frac{২}{১০} = ৬$টি

স্বপন, তপন ও মননের প্রাপ্ত কমলার সংখ্যা যথাক্রমে ১৫টি, ৯টি ও ৬টি।

মিশ্র অনুপাত

তোমরা দেখেছ দুটি বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা উচ্চতার ক্ষেত্রে তুলনা করতে অনুপাত ব্যবহার করা হয়। এখন নিচের জমি দুটির মধ্যে তুলনা করার চেষ্টা করো।



দেখা যাচ্ছে যে, জমি দুটির দৈর্ঘ্য একই। কিন্তু তাদের প্রস্থের অনুপাত $= \frac{১.৫}{১} =$ ১.৫ : ১।

আবার, জমির ক্ষেত্রফলের অনুপাতও কিন্তু $= \frac{১.৫ \times ২}{১ \times ২} = \frac{১.৫}{১} =$ ১.৫ : ১।

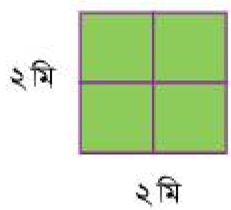
এ থেকে মনে হতে পারে প্রস্থের অনুপাত দিয়েই ক্ষেত্রফলের অনুপাত বের করা যায়।

কিন্তু আসলে কি তাই?

এবার তুমি নিচের বর্গ আকৃতির জমি দুটির মধ্যে তুলনা করার চেষ্টা করে দেখো।

তোমার জানা দরকার একটি অপরটির তুলনায় কতগুণ বড় বা ছোট।

জমি দুটির দৈর্ঘ্যের অনুপাত $= \frac{২}{১} =$ ২: ১। যদি আমরা এই অনুপাতের কথা চিন্তা করি তাহলে মনে হতে পারে যে, ২য় বর্গক্ষেত্রটি প্রথম বর্গক্ষেত্রের ২ গুণ। নিচের ছবি দেখে বলো তো আসলেই এমন ভাবা ঠিক কিনা?



এখানে, দুটি বর্গের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয়েই ভিন্ন। তাই এক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয়ের অনুপাত নিয়ে গুণ করলে তুলনাটা ঠিকঠাক হবে।

এখানে, জমির দৈর্ঘ্যের অনুপাত $= \frac{২}{১} =$ ২ : ১ এবং জমির প্রস্থের অনুপাত $= \frac{২}{১} =$ ২ : ১

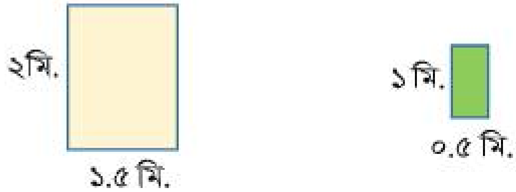
অনুপাত যেহেতু একটি ভগ্নাংশ তাই দুটি অনুপাত গুণ করলে পাওয়া যাবে

$$= \frac{২}{১} \times \frac{২}{১} = \frac{২ \times ২}{১ \times ১} = \frac{৪}{১} = ৪ : ১$$

তাহলে দেখা যাচ্ছে, শুধু দৈর্ঘ্য বা শুধু প্রস্থ দিয়ে তুলনা করলে কিন্তু চলবে না।

দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয়ের অনুপাত নিয়ে গুণ করলে জমির আকারের সঠিক অনুপাত পাওয়া যাবে।

কাজ: উপরের পদ্ধতিতে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত ব্যবহার করে নিচের জমি দুটির আকার বা ক্ষেত্রফলের তুলনা করো:



আচ্ছা, সরাসরি ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে তারপর অনুপাত নির্ণয় করলেই তো হয়। তাহলে আলাদা করে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত তো আর প্রয়োজন হয় না। ব্যাপারটা হলো উপরের উদাহরণগুলোতে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মান সরাসরি দেওয়া আছে। কাজেই আলাদা করে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব। যদি শুধুমাত্র দুটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত দেওয়া হতো তাহলে কিন্তু ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা সম্ভব হতো না। তখন অনুপাতের ধারণা কাজে লাগিয়ে সহজেই তুমি তুলনা করতে পারবে। নিচের সমস্যাটি তেমনই একটি সমস্যা। তোমরা যা শিখলে সেটা কাজে লাগিয়ে সমাধান করো।

দুটি আয়তাকৃতি মাঠের দৈর্ঘ্যের অনুপাত ৪ : ৩ এবং প্রস্থের অনুপাত ৬ : ১। মাঠের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত হবে?

এভাবে, একাধিক সরল অনুপাতের পূর্বরাশিগুলোর গুণফলকে পূর্বরাশি এবং উত্তররাশিগুলোর গুণফলকে উত্তররাশি ধরে প্রাপ্ত অনুপাতকে মিশ্র অনুপাত বলে।

যেমন, ২ : ৩ এবং ৫ : ৭ সরল অনুপাতগুলোর মিশ্র অনুপাত হলো = (২ × ৫) : (৩ × ৭) = ১০ : ২১

উদাহরণ:

প্রদত্ত সরল অনুপাতগুলোর মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর: ৫ : ৭, ৪ : ৯, ৩ : ২

সমাধান: অনুপাত তিনটির পূর্বরাশিগুলোর গুণফল ৫ × ৪ × ৩ = ৬০

এবং উত্তররাশিগুলোর গুণফল = ৭× ৯ × ২ = ১২৬

নির্ণেয় মিশ্র অনুপাত = ৬০ : ১২৬ বা ১০ : ২১

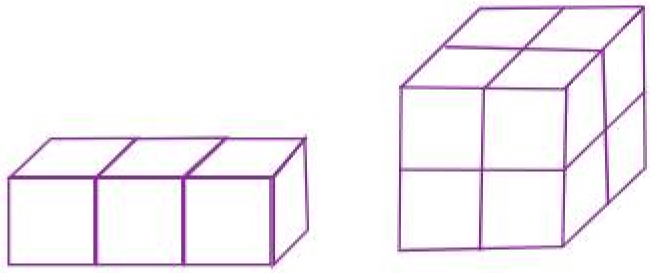
১) ২ : ৩ ও ৩ : ৪ অনুপাতদ্বয়ের মিশ্র অনুপাত নির্ণয় করো।

২) নিচের সরল অনুপাতগুলোকে মিশ্র অনুপাতে প্রকাশ করো:

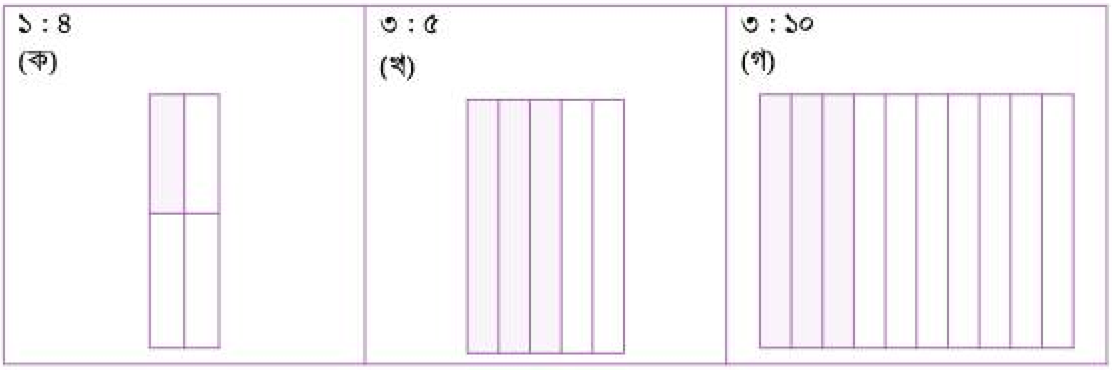
(ক) ৩ : ৫, ৫ : ৭ ও ৭ : ৯ (খ) ৫ : ৩, ৭ : ৫ ও ৯ : ৭

৩) ত্রিমাত্রিক বস্তুর ক্ষেত্রে তুলনা করার সময় দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা তিনটিই বিবেচনা করতে হয়। অর্থাৎ, আয়তনের মাধ্যমে ত্রিমাত্রিক বস্তুর তুলনা সুবিধাজনক হয়।

এবার ভেবে দেখো তো আয়তন নির্ণয় না করেও অন্য কোনো উপায়ে নিচের ছবির আয়তাকৃতি ঘনবস্তু দুটির আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করতে পারো কিনা?



অনুপাত ও শতকরা



উপরের চিত্রগুলোর (ক) চিত্রে, $\frac{১}{৪}$ অংশ, (খ) চিত্রে, $\frac{৩}{৫}$ অংশ, (গ) চিত্রে, $\frac{৩}{১০}$ অংশ ছাই রং করা হয়েছে।

এখানে আমরা দেখতে পাই,

(ক) চিত্রে রং করা অংশ ও সম্পূর্ণ অংশের অনুপাত ১ : ৪ = $\frac{১}{৪} = \frac{১ \times ২৫}{৪ \times ২৫} = \frac{২৫}{১০০} = ২৫\%$

(খ) চিত্রে রং করা অংশ ও সম্পূর্ণ অংশের অনুপাত ৩ : ৫ = $\frac{৩}{৫} = \frac{৩ \times ২০}{৫ \times ২০} = \frac{৬০}{১০০} = ৬০\%$

(ক) চিত্রে রং করা অংশ ও সম্পূর্ণ অংশের অনুপাত ৩ : ১০ = $\frac{৩}{১০} = \frac{৩ \times ১০}{১০ \times ১০} = \frac{৩০}{১০০} = ৩০\%$

সমস্যা: জেসমিন ও আবিদার বর্তমান বয়সের অনুপাত ৩ : ২ এবং আবিদা ও আনিকার বর্তমান বয়সের অনুপাত ৫ : ১। আনিকার বর্তমান বয়স ৩ বছর ৬ মাস।

(ক) প্রথম অনুপাতকে শতকরায় প্রকাশ করো।

(খ) ৫ বছর পর আবিদার বয়স কত হবে?

(গ) আনিকার বর্তমান বয়স জেসমিনের বর্তমান বয়সের শতকরা কত ভাগ?

সমাধান:

(ক) প্রথম অনুপাত = ৩ : ২ $= \frac{৩}{২} = \frac{৩\times ৫০}{২\times ৫০} = \left(\frac{১৫০}{১০০}\right)\% = ১৫০\%$

(খ) আবিদার বর্তমান বয়স: আনিকার বর্তমান বয়স = ৫ : ১

অর্থাৎ, আবিদার বর্তমান বয়স, আনিকার বর্তমান বয়সের ৫ গুণ

আনিকার বর্তমান বয়স = ৩ বছর ৬ মাস

= (৩ × ১২ + ৬) মাস (১ বছর = ১২ মাস)

= (৩৬ + ৬) মাস

= ৪২ মাস

সুতরাং আবিদার বর্তমান বয়স = (৪২×৫) মাস

= ২১০ মাস

$= \frac{২১০}{১২}$ বছর (১২ মাস = ১বছর)

$= \frac{\cancel{২১০}^{৩৫}}{\cancel{১২}_{২}}$ বছর

$= \frac{৩৫}{২}$ বছর

$= ১৭\frac{১}{২}$ বছর

তাহলে, ৫ বছর পর আবিদার বয়স হবে = $(১৭\frac{১}{২}+৫)$ বছর $= ২২\frac{১}{২}$ বছর

(গ) জেসমিন ও আবিদার বর্তমান বয়সের অনুপাত = ৩: ৫

অর্থাৎ জেসমিনের বর্তমান বয়স = আবিদার বর্তমান বয়সের $\frac{৩}{২}$ গুণ

'খ' হতে জেসমিনের বর্তমান বয়স = $১৭\frac{১}{২}\times\frac{৩}{২}$ বছর

$= (\frac{৩৫}{২}\times\frac{৩}{২})$ বছর $= \frac{১০৫}{৪}$ বছর $= ২৬\frac{১}{৪}$ বছর

আনিকার বর্তমান বয়স = ৩ বছর ৬ মাস

$= ৩\frac{৬}{১২}$ বছর $= ৩\frac{১}{২}$ বছর $= \frac{৭}{২}$ বছর

আনিকার বর্তমান বয়স জেসমিনের বর্তমান বয়সের

$$\left(\frac{৭}{২} \div ২৬\frac{১}{৪}\right) \text{ অংশ} = \left(\frac{৭}{২} \times \frac{৪}{১০৫}\right) \text{ অংশ} = \left(\frac{২ \times ১০০}{১৫}\right)\% = \frac{৪০}{৩}\% = ১৩\frac{১}{৩}\%$$

অতএব, আনিকার বর্তমান বয়স জেসমিনের বর্তমান বয়সের ১৩ $\frac{১}{৩}$ %

উদাহরণ:

দুটি রাশির যোগফল ২৪০। তাদের অনুপাত ১ : ৩ হলে, রাশি দুটি নির্ণয় করো। ১ম রাশি ২য় রাশির শতকরা কত অংশ?

সমাধান: রাশি দুটির যোগফল = ২৪০

তাদের অনুপাত = ১ : ৩

অনুপাতের রাশি দুটির যোগফল = ১ + ৩ = ৪

∴ ১ম রাশি = ২৪০ এর $\frac{১}{৪}$ অংশ = ৬০

∴ ২য় রাশি = ২৪০ এর $\frac{৩}{৪}$ অংশ = ১৮০

আবার, রাশি দুটির অনুপাত = ১ : ৩

∴ ১ম রাশি, ২য় রাশির

$$\frac{১}{৩} \text{ অংশ} = \frac{১ \times ১০০}{৩ \times ১০০}$$

$$= \frac{১০০}{৩} \times \frac{১}{১০০}$$

$$= \frac{১০০}{৩}\%$$

$$= ৩৩\frac{১}{৩}\%$$

একক কাজ

একটি স্কুলে শিক্ষার্থীর সংখ্যা ৮২০ জন। বছরের শুরুতে ৫% শিক্ষার্থী নতুন ভর্তি করা হলে, বর্তমানে ঐ স্কুলে শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?

সমানুপাত

ছবি মাপি

তোমাদের শিক্ষা প্রতিষ্ঠান যে দালান/কাঠামো রয়েছে, সেটির প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় করতে হবে। প্রথমেই সেটির প্রস্থ মেপে সেটি লেখো।

এবার ভেবে দেখো তো উচ্চতা কীভাবে নির্ণয় করা যেতে পারে?

এবার তোমরা তোমাদের প্রতিষ্ঠানের দালান/কাঠামোর একটি ছবি নিয়ে সেটির প্রস্থ ও উচ্চতা মাপো এবং নিচের ছকে লেখো।

ছক ৪.৬	
প্রস্থ (সেন্টিমিটার)	
উচ্চতা (সেন্টিমিটার)	

এখন চিন্তা করো তো, এখান থেকে তুমি তোমাদের প্রতিষ্ঠানের দালান বা কাঠামোর আনুমানিক উচ্চতা কি নির্ণয় করতে পারবে?

নিজেদের মাঝে মাপামাপি

এবার তোমরা সবাই কয়েকটি দলে ভাগ হয়ে নিজদের উচ্চতা ও ভর মাপবে। প্রত্যেকের জন্য মেপে যে উচ্চতা ও ভর পাও সেটি একটি ছকে লিপিবদ্ধ করো। এখানে তোমরা উচ্চতাটি সেন্টিমিটারে এবং ওজন কিলোগ্রাম এককে নির্ণয় করবে। এবার তোমাদের নিজেদের দলগতভাবে কাজটি হলে বাকি দলের সাথে সমন্বয় করে সকলের উচ্চতা ও ভরের যে তথ্য পাওয়া যায় সেটি নিজেদের খাতায় লিপিবদ্ধ করো।

তোমাদের শ্রেণির সকলের তথ্য লিপিবদ্ধ করা হলে, তোমরা প্রত্যেকের উচ্চতা ও ওজনের অনুপাত নির্ণয় করো।

এবার, যাদের উচ্চতা ও ওজনের অনুপাত সমান অথবা কাছাকাছি, তাদের চিহ্নিত করে খাতায় গুচ্ছাকারে লেখো এবং তাদের একত্রে দলে ভাগ করে ফেলো।

তোমরা কি আমাদের জাতীয় স্মৃতিসৌধ দেখেছ? দেখো, নিচের চিত্রগুলো আমাদের জাতীয় স্মৃতিসৌধের।

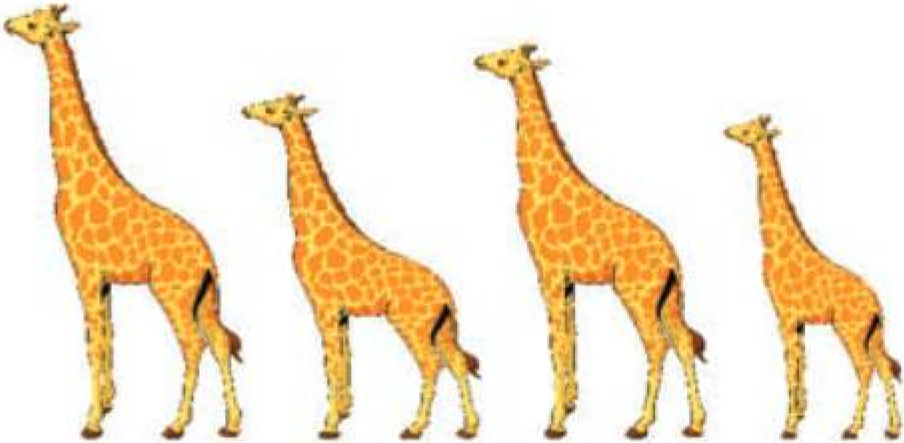
ছবি - ১ ছবি - ২ ছবি - ৩ ছবি - ৪

এবার নিচের চিত্রগুলোর উচ্চতা ও প্রস্থ মেপে নিচের ছকে লেখো এবং সেগুলোর অনুপাত নির্ণয় করো।

ছক ৪.৭

ছবি	উচ্চতা (সেন্টিমিটার)	প্রস্থ (সেন্টিমিটার)	উচ্চতা ও প্রস্থের অনুপাত
ছবি-১			
ছবি-২			
ছবি-৩			
ছবি-৪			

চিত্রগুলো থেকে কী বুঝতে পারলে? চিত্রগুলোর অনুপাত কি সমান?



ছবি-১ ছবি-২ ছবি-৩ ছবি-৪

জিরাফগুলোকে কি দেখতে পারছ তোমরা? প্রথম জিরাফটির গলা ও পুরো দেহের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কিন্তু তোমরা মেপে দেখেছ। এবার দেখো তো বাকি জিরাফগুলোর গলা ও পুরো দেহের দৈর্ঘ্যের অনুপাত কী সমান হয় কি না? মেপে নিচের ছকটি পূরণ করে ফেলো।

ছক ৪.৮

ছবি	গলার দৈর্ঘ্য (সেন্টিমিটার)	পুরো দেহের দৈর্ঘ্য (সেন্টিমিটার)	গলা ও পুরো দেহের দৈর্ঘ্যের অনুপাত
ছবি-১			
ছবি-২			
ছবি-৩			
ছবি-৪			

এই ছকটি থেকে তোমাদের কী মনে হয়? জিরাফগুলোর অনুপাত কি সমান?

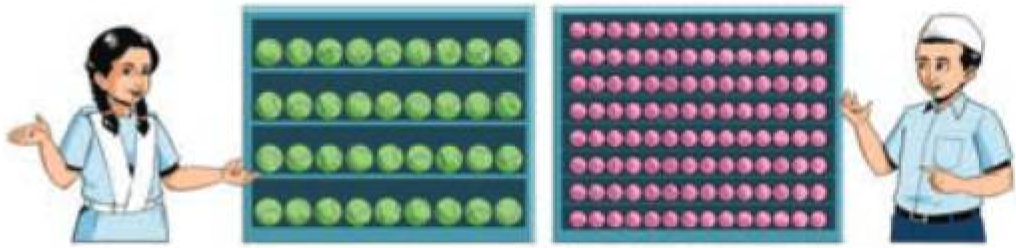
চলো আমরা একটি গল্প পড়ি।

জ্যোতি ও বিথি দুই বোন। তারা মার্বেল খেলতে খুব পছন্দ করে। তারা দুজনেই আলাদাভাবে মার্বেল কিনল। বাসায় এসে তারা দুজন জানতে পারল জ্যোতি ৩০টি মার্বেল ৫০ টাকা দিয়ে কিনেছে। অপরদিকে বিথি ২০টি মার্বেল কিনেছে ৩০ টাকা দিয়ে।

একক কাজ

তাদের মাঝে কার মার্বেল কিনতে বেশি টাকা লেগেছে? কত টাকা দিয়ে কিনলে তার বেশি টাকা লাগত না?

এবার চলো আরেকটি গল্প নিয়ে চিন্তা করি।



মৌ এর কাছে ৩৬টি টেনিস বল আছে, অপরদিকে শফিক এর কাছে ১১২টি টেবিল টেনিস বল আছে। তারা ঠিক করল নিজেদের মাঝে টেনিস বল ও টেবিল টেনিস বল ভাগ করবে। এজন্য মৌ শফিককে ১৮টি টেনিস বল দিল অপরদিকে শফিক মৌকে ৫৬টি টেবিল টেনিস বল দিল। ভেবে বলো তো দুজনের মাঝে টেনিস বল আর টেবিল টেনিস বলের সমবণ্টন হয়েছে কি না?

এখানে দেখো, মৌ এর কাছে আগে টেনিস বল ছিল ৩৬টি এবং সে শফিককে দেয় ১৮টি। তাহলে তার শফিককে দেওয়া টেনিস বল সংখ্যা এবং তার প্রথমে থাকা টেনিস বল সংখ্যার অনুপাত হলো ১৮ : ৩৬ বা ১ : ২

আবার শফিকের কাছে আগে টেবিল টেনিস বল ছিল ১১২টি এবং সে মৌকে দিয়ে দেয় ৫৬টি। তাহলে তার মৌকে দেওয়া টেবিল টেনিস বল সংখ্যা এবং তার প্রথমে থাকা টেবিল টেনিস বল সংখ্যার অনুপাত হলো ৫৬ : ১১২ বা ১ : ২

আরেকটি বিষয় কিন্তু চিন্তা করা যায়। ভাগাভাগি করার পর মৌ এর কাছে থাকা টেনিস বল ও টেবিল টেনিস বল অনুপাত দেখার চেষ্টা করি। সেটি হলো ১৮ : ৫৬ বা ৯ : ২৮

আবার শফিকের ক্ষেত্রে এ অনুপাতটি হয় ১৮ : ৫৬ বা ৯ : ২৮

যেহেতু উভয়েই একই অনুপাতে নিজেদের মধ্যে জিনিস ভাগাভাগি করেছে এবং ভাগাভাগির পর দেখা যাচ্ছে তাদের কাছে থাকা বলগুলোর অনুপাত সমান। তাই বলা যায় দুজনের মাঝে টেনিস বল আর টেবিল টেনিস বলের সমবণ্টন হয়েছে।

একক কাজ

উপরে দেখা যাচ্ছে মৌ ১৮টি টেনিস বল আর শফিক ৫৬টি টেবিল টেনিস বল দেওয়া সমবণ্টন হয়েছে। মৌ আর শফিক ভিন্ন কোনো পরিমাণে নিজেদের মধ্যে টেনিস বল আর টেবিল টেনিস বল আদান-প্রদান করে সমবণ্টন করতে পারত কি না ভেবে দেখো।

তিনটি শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের আমগাছ থেকে আম পাড়ার পর শিক্ষার্থীদের মাঝে বণ্টন করা হয়েছে। নিম্নোক্ত উপায়ে সেই আমগুলো বণ্টন করা হয়েছে।

১ম প্রতিষ্ঠানে

শ্রেণি	১ম	২য়	৩য়	৪র্থ	৫ম	৬ষ্ঠ	৭ম	৮ম	৯ম	১০ম
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	৭২	৭৭	৭৪	৭৩	৭০	৬৭	৬৬	৬৯	৭৫	৭১
প্রদত্ত আমের সংখ্যা	১৪৪	১৫৪	১৪৮	১৪৬	১৪০	১৩৪	১৩২	১৩৮	১৫০	১৪২

২য় প্রতিষ্ঠানে

শ্রেণি	১ম	২য়	৩য়	৪র্থ	৫ম	৬ষ্ঠ	৭ম	৮ম	৯ম	১০ম
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	৬৪	৬১	৫৫	৫৬	৪৯	৫৮	৫৭	৬২	৫৩	৫০
প্রদত্ত আমের সংখ্যা	১৯২	১৮৩	১৬৫	১৬৮	১৪৭	১৭৪	১৭১	১৮৬	১৫৯	১৫০

৩য় প্রতিষ্ঠানে

শ্রেণি	১ম	২য়	৩য়	৪র্থ	৫ম	৬ষ্ঠ	৭ম	৮ম	৯ম	১০ম
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	৪১	৪৪	৪৫	৪৭	৪৮	৩৭	৩৯	৪২	৪০	৪৩
প্রদত্ত আমের সংখ্যা	৮০	৯০	৯০	৯৫	১০০	৭৫	৮০	৮৫	৮০	৮৬

নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

প্রশ্ন	১ম প্রতিষ্ঠান	২য় প্রতিষ্ঠান	৩য় প্রতিষ্ঠান
প্রতি শ্রেণির শিক্ষার্থীর মাঝে কি আমের সমবণ্টন হয়েছে?			
যদি প্রতিটি শ্রেণিতে আমের সমবণ্টন হয়ে থাকে, তাহলে প্রতি শ্রেণিতে শিক্ষার্থী ও আমের সংখ্যার সাপেক্ষে কী অনুপাতে বণ্টন করা হয়েছে?			

৩য় শিক্ষা প্রতিষ্ঠানের শিক্ষার্থীদের শ্রেণিভিত্তিতে আম এমনভাবে পরিবর্তন করে নিচের ছক পূরণ করো যেন ১ম ও ৩য় প্রতিষ্ঠানের শিক্ষার্থীরা শ্রেণিভেদে সমান আম পায়:

শ্রেণি	১ম প্রতিষ্ঠান		৩য় প্রতিষ্ঠান	
	শিক্ষার্থী সংখ্যা	প্রদত্ত আম সংখ্যা	শিক্ষার্থী সংখ্যা	প্রদত্ত আম সংখ্যা
১ম	৭২	১৪৪	৪১	
২য়	৭৭	১৫৪	৪৪	
৩য়	৭৪	১৪৮	৪৫	
৪র্থ	৭৩	১৪৬	৪৭	
৫ম	৭০	১৪০	৪৮	
৬ষ্ঠ	৬৭	১৩৪	৩৭	
৭ম	৬৬	১৩২	৩৯	
৮ম	৬৯	১৩৮	৪২	
৯ম	৭৫	১৫০	৪০	
১০ম	৭১	১৪২	৪৩	

২য় প্রতিষ্ঠানের শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত আমের তথ্য অপরিবর্তিত রেখে ১ম ও ৩য় প্রতিষ্ঠানের শিক্ষার্থীদের শ্রেণিভিত্তিক প্রাপ্ত আমসংখ্যা এমনভাবে পরিবর্তন করে নিচের ছক পূরণ করো যেন ১ম ও ৩য় প্রতিষ্ঠানের শিক্ষার্থীরা শ্রেণিভেদে ২য় প্রতিষ্ঠানের শিক্ষার্থীদের সমান আম পায়:

শ্রেণি	১ম প্রতিষ্ঠান		২য় প্রতিষ্ঠান		৩য় প্রতিষ্ঠান	
	শিক্ষার্থী সংখ্যা	প্রদত্ত আম সংখ্যা	শিক্ষার্থী সংখ্যা	প্রদত্ত আম সংখ্যা	শিক্ষার্থী সংখ্যা	প্রদত্ত আম সংখ্যা
১ম	৭২		৬৪	১৯২	৪১	
২য়	৭৭		৬১	১৮৩	৪৪	
৩য়	৭৪		৫৫	১৬৫	৪৫	
৪র্থ	৭৩		৫৬	১৬৮	৪৭	
৫ম	৭০		৪৯	১৪৭	৪৮	
৬ষ্ঠ	৬৭		৫৮	১৭৪	৩৭	
৭ম	৬৬		৫৭	১৭১	৩৯	
৮ম	৬৯		৬২	১৮৬	৪২	
৯ম	৭৫		৫৩	১৫৯	৪০	
১০ম	৭১		৫০	১৫০	৪৩	

জাতীয় পতাকা তৈরি করি

চলো এবার আমরা আমাদের দেশের পতাকা সম্পর্কে জানি এবং একটি মজার কাজ করি। তোমরা সকলেই বাংলাদেশের পতাকা চেন। নিচের বিভিন্ন স্থানে ব্যবহারের জন্য বাংলাদেশের পতাকার যে আকৃতি হয়, তা আংশিকভাবে দেওয়া রয়েছে। তোমরা এবার সেটি পূরণ করার চেষ্টা করো।

ছক ৪.৯

নং	স্থান	দৈর্ঘ্য	প্রস্থ	লাল বৃত্তের ব্যাসার্ধ (দৈর্ঘ্যের $\frac{১}{৫}$ অংশ)
১	বিভিন্ন ভবনে (ভবনের আকারভেদে) ব্যবহারের জন্য	১০ ফুট	৬ ফুট	২ ফুট
২		৫ ফুট	৩ ফুট	১ ফুট
৩		২.৫ ফুট	১.৫ ফুট	
৪	বড় গাড়িতে ব্যবহারের জন্য		৯ ইঞ্চি	৩ ইঞ্চি
৫	মাঝারি/ছোট আকারের গাড়িতে এবং আন্তর্জাতিক বা দ্বিপাক্ষিক বৈঠকে টেবিলে ব্যবহারের জন্য	১০ ইঞ্চি		

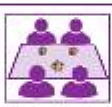
এটি মূলত আমাদের জাতীয় পতাকার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত। এখন চিন্তা করো এই লাল বৃত্তটির কেন্দ্র কোথায় হবে?

এক্ষেত্রে নিয়মটি হলো, বাম দিক থেকে পতাকার মোট দৈর্ঘ্যের ২০ ভাগের ৯ ভাগ বা $\frac{৯}{২০}$ অংশ থেকে প্রস্থ বরাবর একটি দাগ টানতে হবে। এবার পতাকার প্রস্থের অর্ধেক বা $\frac{১}{২}$ অংশ থেকে দৈর্ঘ্য বরাবর একটি দাগ টানতে হবে। এই দুটি দাগ যে বিন্দুতে গিয়ে মিলবে, সেটিই হলো বৃত্তটির কেন্দ্রবিন্দু। সেই বিন্দুটিকে কেন্দ্র ধরে বৃত্তটি অঙ্কন করতে হবে।

এবার তাহলে ছক ৪.৯ এর সাহায্য নিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করো। তোমাদের সুবিধার্থে ছকটির একটি সারি পূরণ করে দেওয়া রয়েছে।

ছক ৪.১০

নং	স্থান	দৈর্ঘ্য	প্রস্থ	লাল বৃত্তের ব্যাসার্ধ (দৈর্ঘ্যের $\frac{১}{৫}$ অংশ)	বাম দিক থেকে মোট দৈর্ঘ্যের ২০ ভাগের ৯ ভাগ অংশের দূরত্ব। (এই বিন্দু হতে প্রস্থ বরাবর একটি রেখা আঁকতে হবে)	প্রস্থের যেকোনো প্রান্ত থেকে অর্ধেক অংশের দূরত্ব (এই বিন্দু হতে দৈর্ঘ্য বরাবর একটি রেখা আঁকতে হবে)
১						
২	বিভিন্ন ভবনে (ভবনের আকারভেদে) ব্যবহারের জন্য	৫ ফুট	৩ ফুট	১ ফুট	$(৫ \times \frac{৯}{২০} = \frac{৯}{৪})$ = ২.২৫ ফুট	$(৩ \times \frac{১}{২} = \frac{৩}{২})$ = ১.৫ ফুট
৩						
৪	বড় গাড়িতে ব্যবহারের জন্য					
৫	মাঝারি/ছোট আকারের গাড়িতে এবং আন্তর্জাতিক বা দ্বিপাক্ষিক বৈঠকে টেবিলে ব্যবহারের জন্য					



দলগত কাজ

কাগজ দিয়ে ৫ নং এর মাপের একটি জাতীয় পতাকা তৈরি করো।

দুটি অনুপাত সমান হলে অর্থাৎ, সমানুপাত আকারে থাকলে সেই অনুপাত দুটির ১ম ও ৪র্থ পদকে প্রান্তীয় পদ বলা হয় এবং ২য় ও ৩য় পদকে মধ্যপদ বলা হয়। অর্থাৎ, প্রথম অনুপাতের পূর্ব পদ ও ২য় অনুপাতের উত্তর পদ হলো প্রান্তীয় পদ এবং ১ম অনুপাতের উত্তর পদ ও ২য় অনুপাতের পূর্ব পদ হলো মধ্য পদ।

সমানুপাতকে সাধারণত = চিহ্ন এর বদলে :: চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন ধরো, দুটি অনুপাত রয়েছে ১২ : ১৬ ও ৪৫ : ৬০

এক্ষেত্রে অনুপাত দুটিকে লঘু করা হলে আমরা পাই $\frac{১২}{১৬} = \frac{৩}{৪}$ এবং $\frac{৪৫}{৬০} = \frac{৩}{৪}$

অর্থাৎ, বলা যায় এ দুটি রাশি সমানুপাতে আছে। তাহলে লেখা যায়, ১২ : ১৬:: ৪৫ : ৬০

অথবা, $\frac{১২}{১৬} :: \frac{৪৫}{৬০}$

ত্রৈরাশিকের গল্প

ঢাকা থেকে চট্টগ্রামের সড়কপথের আনুমানিক দূরত্ব ২৫০ কিলোমিটার। একটি বাস সকাল ৯টায় ঢাকা থেকে রওনা দিয়ে দুপুর ২টায় চট্টগ্রাম পৌঁছে। প্রতি ঘণ্টায় বাসটি ঢাকা থেকে কতদূর অতিক্রম করে সেটির একটি ছক নিয়ে দেওয়া আছে। উল্লেখ্য যে প্রতি ঘণ্টায় বাসটির অতিক্রান্ত দূরত্ব, সময়ের সাপেক্ষে সমানুপাতিক। তোমরা ছকটি দেখো।

ছক ৪.১১					
সময় (ঘণ্টায়)	১	২	৩	৪	৫
দূরত্ব (কিলোমিটারে)	৫০		১৫০		২৫০

এখন দেখো, বাসটি ২ ঘণ্টা শেষে কতদূর অতিক্রম করতে পারে, সেটি আমাদের অজানা। সেটি ৫০ থেকে ১৫০ এর মাঝে যেকোনো কিছু হতে পারে। কিন্তু উপরে দেখো, বলা আছে প্রতি ঘণ্টায় বাসটির অতিক্রান্ত দূরত্ব সময়ের সাপেক্ষে সমানুপাতিক। অর্থাৎ, যদি সময় ও দূরত্বের অনুপাত নেওয়া হয়, তাহলে প্রতি ঘণ্টায় এটি সমান হবে। তাহলে এখন দেখা যাক বাসটি প্রথম ঘণ্টায় অতিক্রম করে ৫০ কিলোমিটার। অর্থাৎ, সময় ও দূরত্বের অনুপাত হলো ১ : ৫ ০ । এখন আমরা ২ ঘণ্টা শেষে অতিক্রান্ত দূরত্ব কত, সেটি নির্ণয় করতে চাই। ধরে নিই, ২য় ঘণ্টা শেষে অতিক্রান্ত দূরত্ব হলো ক। তাহলে অনুপাতটি হবে ২ : ক। এখন দেখো বলা আছে অনুপাত দুটি সমানুপাতে আছে। অর্থাৎ সমান।

তাহলে আমরা বলতে পারব, ১ : ৫ ০ = ২ : ক

এখান থেকে ভগ্নাংশ আকারে আমরা পাই $\frac{১}{৫০} = \frac{২}{ক}$ ।

এখান থেকে আমরা পাই, ১ × ক = ২ × ৫০

অর্থাৎ, ক = ১০০।

এখন, দেখো তো আমরা যখন ১ × ক = ২ × ৫০ আকারের গুণটি করেছি, আমরা আসলে কি করেছি? নিচে দেখো। যদি আমরা ধরি ক : খ এবং গ : ঘ সমানুপাতে রয়েছে, তাহলে আমরা বলতে পারি

ক : খ = গ : ঘ

ভগ্নাংশ আকারে আমরা পাই $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$ । এবং পূর্বের উদাহরণের মতো গুণ করলে পাই ক × ঘ = গ × খ। এখন সমানুপাত থেকে আমরা কি শিখেছি, এই সমানুপাতে ক হলো ১ম রাশি, খ হলো ২য় রাশি, গ হলো ৩য় রাশি এবং ঘ হলো ৪র্থ রাশি।

অর্থাৎ, যেকোনো সমানুপাতে ১ম রাশি × ৪র্থ রাশি = ২য় রাশি × ৩য় রাশি

এখন আমরা ২য় ঘণ্টা শেষে বাসটির অতিক্রান্ত দূরত্বে নির্ণয় করার সময় দেখো, ৪র্থ রাশি ব্যতীত, বাকি ৩টি রাশির মানই জানতাম। পরে সেই ৩টি মানের সাহায্যে আমরা ৪র্থ রাশির মান নির্ণয় করেছি।

এবার নিচের বিষয়টি লক্ষ করো। তোমাকে বলা হয়েছে, কোনো সমানুপাতের ১ম, ৩য় ও ৪র্থ রাশি যথাক্রমে ১৪, ৭ ও ২২ হয়। তাহলে ২য় রাশিটি নির্ণয় করতে হবে।

এখন আমরা ধরি ২য় পদটি হলো ক। তাহলে, পূর্বে শিখে আসা ধারণা থেকে আমরা বলতে পারব, সমানুপাতটি হলো ১৪ : ক = ৭ : ২২।

অর্থাৎ, ১৪ × ২২ = ৭ × ক

অথবা, ক = $\frac{১৪ \times ২২}{৩\times৭}$ = ৪৪

অর্থাৎ, এই সমানুপাতে ২য় রাশি হলো ৪৪।

এখান থেকে কী বোঝা যায় বলো তো? কোনো সমানুপাতে যদি ১ম রাশি, ২য় রাশি, ৩য় রাশি এবং ৪র্থ রাশির মাঝে যেকোনো তিনটি রাশি জানা থাকে তাহলে আমরা অজানা রাশিটি নির্ণয় করতে পারব।

এভাবে সমানুপাতের তিনটি রাশি জানা থাকলে অজানা রাশিটি নির্ণয় করার পদ্ধতিকে ত্রৈরাশিক বলে।

একক কাজ

ছক ৪.১১ তে ৪র্থ ঘণ্টা শেষে বাসটির অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় করো

ক্রমিক সমানুপাত

২০ কিলোমিটার দীর্ঘ একটি গাড়ির রেসে কয়েকটি গাড়ি অংশগ্রহণ করে। এর মধ্যে যে গাড়িটি রেসে বিজয়ী হয় সেই গাড়ির ১০ মিনিট পর্যন্ত নির্দিষ্ট সময় ব্যবধানে অতিক্রান্ত দূরত্বের তথ্য দেওয়া রয়েছে। এখানে মজার ব্যাপার হলো, সেই গাড়িটি সবসময় একই গতি ধরে দূরত্ব অতিক্রম করেছে। এখন তুমি নিচের আংশিক পূর্ণ ছকটি দেখো এবং সমানুপাতের ধারণা ব্যবহার করে সম্পূর্ণ করো।

ছক ৪.১২

সময় (মিনিট)	১	২	৩	৪	৫	৬		৮		১০
অতিক্রান্ত দূরত্ব (কিলোমিটার)	২	৪				১২	১৪	১৬	১৮	

এখানে দেখো ১ম মিনিট শেষে গাড়িটি ২ কিলোমিটার অতিক্রম করে এবং দ্বিতীয় মিনিট শেষে গাড়িটি ৪ কিলোমিটার অতিক্রম করে। এখন চিন্তা করো, মিনিট ও অতিক্রান্ত দূরত্বের সাপেক্ষে অনুপাত দুটি কী হচ্ছে?

১ম মিনিটের জন্য অনুপাতটি ১ : ২ এবং ২য় মিনিটে অনুপাতটি ২ : ৪। এখানে দেখো, এই অনুপাতে মধ্যপদ দুটি কিন্তু একই। তা হলো ২। আমরা চিন্তা করলে একটি ক্রমের মতো পাই। এরকম সমানুপাতকে ক্রমিক সমানুপাত বলা হয়। অর্থাৎ ১ : ২:: ২ : ৪

যে সমানুপাতে মধ্যপদ দুটি সমান হয়, সেই সমানুপাতটিকে ক্রমিক সমানুপাত বলা হয়।

এবার নিচের উদাহরণটি দেখি। মিশু, আদিত্য ও সুমনা মার্বেল ছোঁড়ার একটি প্রতিযোগিতা করছে। সেখানে তাদের ছোড়া মার্বেল যথাক্রমে ৩, ৯ ও ২৭ মিটার দূরে পৌঁছাল। এখন মিশু ও সুমনার মার্বেলের অতিক্রান্ত দূরত্বের অনুপাত ৩ : ২৭। আবার আদিত্য ও সুমনার মার্বেলের অতিক্রান্ত দূরত্বের অনুপাত ৯ : ২৭। অর্থাৎ এই তিনটি রাশি থেকে ৩ : ৯ ও ৯ : ২৭ এই দুটি অনুপাত তৈরি হলো। এখানে, ৩ : ৯ :: ৯ : ২৭ এ ধরনের সমানুপাতকে ক্রমিক সমানুপাত বলে। অতিক্রান্ত ৩, ৯ ও ২৭ মিটার, এই রাশি তিনটিকে ক্রমিক সমানুপাতি বলা হয়।

আরও একটু লক্ষ করলে দেখা যাবে ক, খ, গ ক্রমিক সমানুপাতি হলে, $\frac{ক}{খ} = \frac{খ}{গ}$ বা $ক \times গ = (খ)^{২}$ হবে।

ক্রমিক অনুপাতের ক্ষেত্রে ১ম ও ৩য় রাশির গুণফল ২য় রাশির বর্গের সমান এবং ২য় রাশিকে ১ম ও ৩য় রাশির মধ্য সমানুপাতি বা মধ্য রাশি বলে।

একক কাজ

একটি ক্রমিক সমানুপাতের ১ম ও ৩য় রাশি যথাক্রমে ৪ ও ১৬ হলে, মধ্য সমানুপাতি ও ক্রমিক সমানুপাত নির্ণয় করো।

অনুশীলনী

১। দুটি সংখ্যার অনুপাত ১৪ : ৫। একটি সংখ্যা ৫৬ হলে অপর সংখ্যাটি নির্ণয় করো।

২। একটি বই ও একটি কলমের মূল্যের অনুপাত ৭ : ২। কলমের মূল্য ৩২ টাকা হলে বইয়ের মূল্য কত?

৩। রকি ও রিতার বয়সের অনুপাত ৫ : ৭। রকির বর্তমান বয়স ১০ বছর হলে ৪ বছর আগে রিতার বয়স কত ছিল?

৪। প্রিন্টার ও কম্পিউটারের মূল্যের অনুপাত ৪ : ৫। প্রিন্টারের মূল্য ৪০০০০ টাকা হলে কম্পিউটারের মূল্য কত? প্রিন্টারের মূল্য ২৫% বেড়ে গেল। সেক্ষেত্রে প্রিন্টার ও কম্পিউটারের মূল্যের অনুপাতটি কী ধরনের অনুপাত হবে?

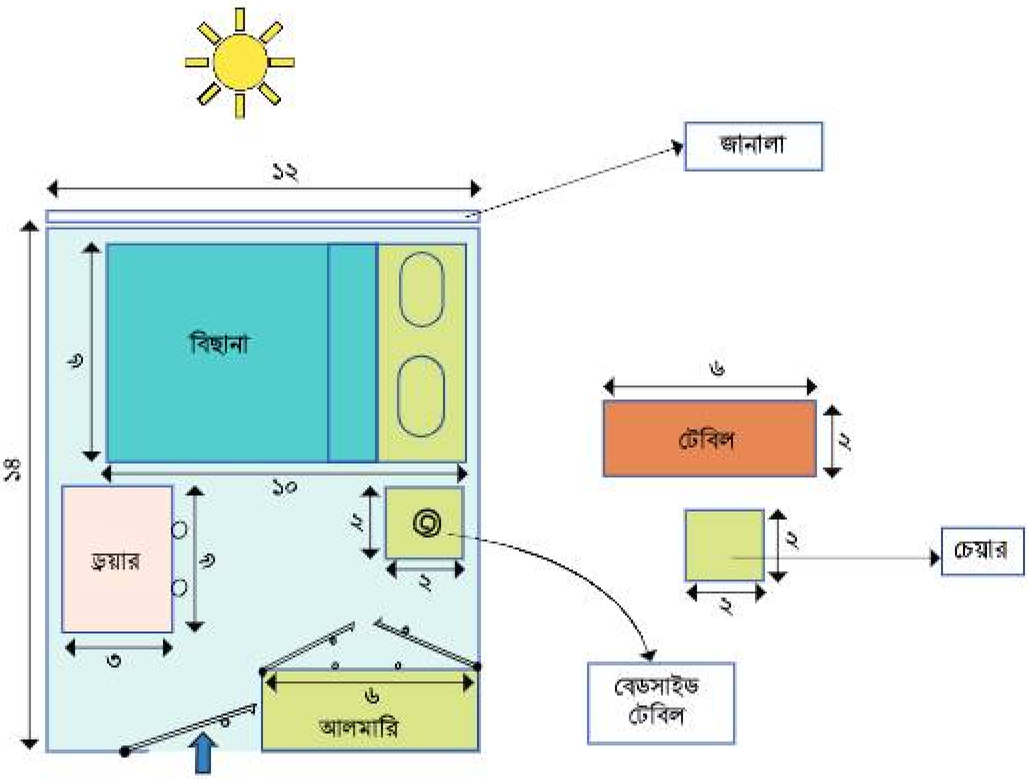
৫। তিন বন্ধুর বাড়ি হতে স্কুলে আসা যাওয়ার সময়ের অনুপাত ২ : ৩ : ৪। ১ম বন্ধুর বাড়ি হতে স্কুলে যেতে ১৮ মিনিট লাগলে, বাকি দুই বন্ধুর বাড়ি হতে স্কুলে যেতে কত সময় লাগে?

৬। কোনো সমানুপাতের ১ম, ২য় ও ৪র্থ রাশি যথাক্রমে ৯, ১৮ ও ২০ হলে ৩য় রাশিটি কত হবে?

৭। রানার কাছে ৪টি পেনসিল এবং ৫টি কলম রয়েছে। অপরদিকে সজীবের কাছে ১০টি কলম রয়েছে। এখন যদি রানা ও সজীবের পেনসিল কলমের অনুপাত সমানুপাত হয়, তাহলে সজীবের কাছে কতটি পেনসিল রয়েছে?

আকৃতি দিয়ে যায় চেনা

মনে করো, তোমরা নতুন বাসায় গিয়ে উঠেছ। সেখানে তোমাকে নতুন ঘর দেওয়া হয়েছে। ঘরে বিছানা, আলমারি, ড্রয়ার, বেডসাইড টেবিল সবই আছে। এক পাশের দেয়াল জুড়ে বিশাল জানালাও আছে, সেখান দিয়ে চমৎকার আলো আসে। কিন্তু তোমার প্রিয় পড়ার টেবিল আর চেয়ারটা নেই। এত সুন্দর একটা ঘর পেলে কিন্তু পড়ার জায়গা পাওয়া যাচ্ছে না, কি বিপদ না? নিচের ছবিতে দেখো, সবকিছুর মাপ কত ফুট করে বলে দেওয়া আছে। তোমার বড় শখ পড়ার টেবিলটিতে জানালা দিয়ে আলো এসে পড়বে। এর মাঝে আবার আলমারিটি দেয়াল থেকে সরানো যায় না। আর ঘর থেকে কিছু জিনিস সরিয়ে বাইরে রাখবে তারও উপায় নাই, তবে কিছু আসবাবের স্থান পরিবর্তন করতে পারবে। এখন কী করে টেবিল আর চেয়ারটি একটি পছন্দমত জায়গায় বসাতে পারবে? একটু আভাস দিই, তুমি ঠিক ঠিক মাপে কাগজ কেটে এই সমস্যার সমাধান করার চেষ্টা করতে পারো।



চিত্র-৫.১: ঘরে টেবিল ও চেয়ার বসানোর সমস্যা

সমাধান করতে পারলে? যদি না পারো তা-ও চলবে, তবে চিন্তা করতে থাকো, চেষ্টা করতে থাকো। খেয়াল করে দেখো, ঘরের সমস্যাটি একটি জ্যামিতিক আকৃতির সমস্যা। প্রতিদিনই আমাদের এমন কত কত সমস্যার সমাধান করতে হয়। কিন্তু জ্যামিতিক আকৃতির ধারণাগুলো জানা থাকলে এসব সমস্যার খুব সুন্দর সমাধান করা সম্ভব। এই অধ্যায়টিতে যেই কাজগুলো রয়েছে, সেগুলি শেষ করলে তোমার প্রয়োজনীয় ধারণাগুলো পেয়ে

যাবে। এই অধ্যায়ে ছবি এঁকে, কাগজ কেটে, ভাঁজ করে আমরা বিভিন্ন জ্যামিতিক সমস্যার সমাধান করব। তাহলে চলো এগুনো যাক।

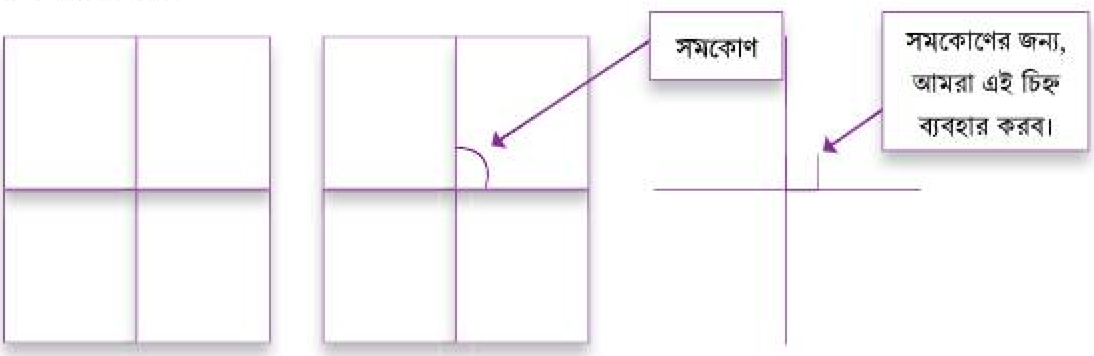
জ্যামিতিক আকৃতি গঠন

আমরা জ্যামিতিক বিভিন্ন আকার আকৃতির কাগজের সঠিক ভাঁজের মাধ্যমে তৈরি করতে পারি। আমাদের সবার প্রথমেই লাগবে একটি কাগজ।

একক কাজ: ১

আমরা একটি A4 সাইজ কাগজ নিয়ে মাঝ বরাবর ভাঁজ করি। ভাঁজ করা কাগজটিকে আড়াআড়ি করে আবার ভাঁজ করি।

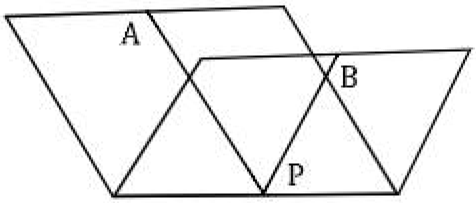
প্রতিটি ভাঁজ বরাবর আমরা একটি করে রেখা (line) আঁকি। রেখার মিলিত বিন্দুতে (point) চারটি কোণ (angle) তৈরি হয়েছে। চারটি কোণই পরিমাপ করে দেখো। তারা সবাই সবার সমান। আমরা সমানভাবে আড়াআড়ি ভাঁজ করে এই কোণগুলো তৈরি করেছি। তাই এদের প্রত্যেকটিকে আমরা এক সমকোণ (right angle) বলবো।



চিন্তা করে দেখো, ভাঁজগুলো যদি সমান না হয় তাহলে কী হবে? কোণগুলোও সমান হবে না। অর্থাৎ আমরা সমকোণ পাবো না। দুটি রেখা ছেদ করে যদি সমকোণ তৈরি হয় তবে রেখা দুটিকে পরস্পর লম্ব (perpendicular) বলা হয়।

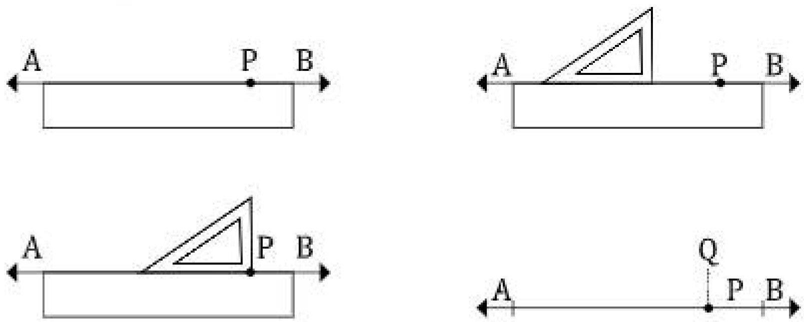
একক কাজ: ২

ধরো একটি রেখাংশ AB দেওয়া আছে। আমরা AB তে অবস্থিত একটি বিন্দুতে একটি লম্ব আঁকতে চাই। ধরে নিচ্ছি P হচ্ছে সেই বিন্দু যার উপরে আমরা লম্বটি আঁকব। AB রেখা আঁকা কাগজটিকে আমরা চিত্রের মতো এমনভাবে ভাঁজ করি যেন ভাঁজটি ঠিক P বিন্দুতে থাকে এবং AB রেখার একটি অংশ অপর অংশের উপরে একদম বরাবর গিয়ে পড়ে।



এই ভাঁজ বরাবর একটি রেখা আঁকো। এবারে তোমরা সেই রেখাটির সাথে AB এর কোণ পরিমাপ করে দেখো। আমরা যদি AB এর এক অংশকে আরেক অংশের বরাবর না রেখে ভাঁজটি করি তখন কোণের পরিমাপ কেমন হবে? পরীক্ষা করে দেখে ক্লাসের সবার সাথে আলোচনা করো।

আমরা জ্যামিতি বক্সের ত্রিকোণী (set squares) ব্যবহার করেও লম্ব আঁকতে পারি। প্রথমে AB সরলরেখাটির ওপর একটি বিন্দু P নিই। AB রেখা বরাবর রুলারের একটি ধার স্থাপন করি এবং খাড়াভাবে ধরে রাখি। রুলার বরাবর ত্রিকোণীর একটি ধার এমনভাবে বসাই যেন এক সমকোণ সংলগ্ন কৌণিক বিন্দুটি P বিন্দুর সাথে মিলে যায়। ত্রিকোণীটি খাড়াভাবে ধরে রেখে PQ রেখাংশ আঁকি। লক্ষ করো, ত্রিকোণীতে যেহেতু আগে থেকেই একটি সমকোণ তৈরি করা থাকে, আমরা সহজেই সেই সমকোণটির মতো করে আরেকটি সমকোণ এঁকে নিচ্ছি।

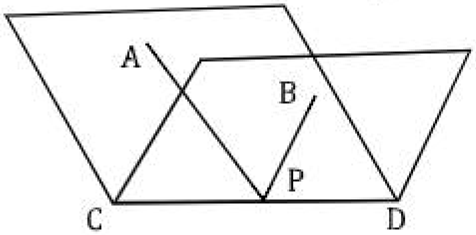


একক কাজ: ৩

ধরো তোমাদেরকে একটি রেখাংশ AB দিয়ে বলা হলো সেটির সমান করে আরেকটি রেখাংশ আঁকতে। তোমরা হয়তবা চিন্তা করবে যে স্কেল দিয়ে দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে সেই সমান পরিমাপের আরেকটি রেখাংশ এঁকে ফেলা। কিন্তু যদি আমাদের AB রেখাংশটির দৈর্ঘ্য ভগ্নাংশ এককে থাকে তাহলে সমান পরিমাপ করা খুবই কষ্টসাধ্য হয়ে যায়। তাই চলো আমরা আরেকটি পদ্ধতি দিয়ে চেষ্টা করি। এক টুকরা সুতা নাও। তারপর প্রদত্ত রেখাংশের এক বিন্দুতে সুতার একটি মাথা বসাও এবং টানটান করে সুতাটি ধরে অপর বিন্দু পর্যন্ত সমান করে সুতাটি কেটে নাও। তারপর সুতাটিকে টানটান করে কাগজে বসিয়ে দুটি বিন্দু চিহ্নিত করো। এবারে স্কেলের সাহায্যে দুটি বিন্দু যোগ করলেই তোমরা AB এর সমান করে আরেকটি রেখাংশ পেয়ে যাবে।

একক কাজ: ৪

একটি কাগজে একটি রেখাংশ AB রেখাংশ আঁকা আছে। রেখাংশের দুই শীর্ষের বিন্দু যদি হয় A ও B তাহলে আমরা A কে B এর উপরে নিয়ে চেপে ধরব এক হাত দিয়ে এবং অন্য হাত দিয়ে আমরা কাগজের যে ভাঁজ তৈরি হবে সেটিকে সমান করে দিব। লক্ষ করে দেখো, ভাঁজ বরাবর আমরা যদি একটি দাগ টানি সেটি একটি সরলরেখা হচ্ছে। একটি স্কেল দিয়ে পরিমাপ করলেই দেখতে পারবে যে ভাঁজের যেকোনো বিন্দু থেকে A ও B দুই বিন্দুর দূরত্বই সমান। অর্থাৎ আমরা AB রেখাংশটিকে সমান দুই ভাগে ভাগ করতে পারলাম।

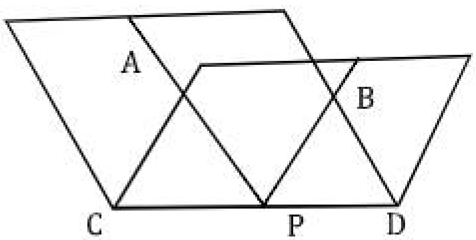


পরীক্ষা করে দেখো যে A ও B বিন্দুগুলো একদম একটিকে আরেকটির উপরে না চেপে ধরে একটু আশেপাশে চেপে ধরলে ভাঁজ থেকে বিন্দুগুলোর দূরত্ব কীভাবে পরিবর্তন হয়? তোমার চিন্তাটি খাতায় লিখে রাখো।

AB ও CD এর মাঝে তৈরি হওয়া কোণ পরিমাপ করে দেখো। এই রেখা দুটির মাঝে আমরা কোণের পরিমাপ অনুযায়ী তাদেরকে লম্ব বলতে পারি কি? তাহলে আমরা CD কে AB রেখাংশটির লম্ব সমদ্বিখণ্ডক (perpendicular bisector) বলব।

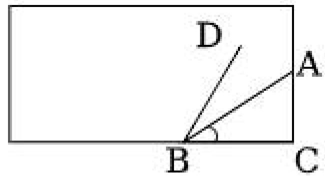
একক কাজ: ৫

মনে করি, আমাদেরকে একটি রেখা AB দিয়ে বলা হলো এর বাইরের একটি বিন্দু P থেকে AB এর উপরে একটি লম্ব আঁকতে। আমরা কাজ ১ এ শিখেছি কীভাবে লম্ব পাওয়া যায় এবং কাজ ৪ এ শিখেছি কীভাবে একটি রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক পেতে পারি। আমরা AB রেখাটিকে এমনভাবে ভাঁজ করব যেন ভাঁজের দুইপাশের অংশ একটি আরেকটির সাথে মিলে যায়। কিন্তু এবারে যেহেতু আমাদেরকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু P এর কথা বলে দেওয়া হয়েছে, আমরা ভাঁজটি এমনভাবে করব যেন P বিন্দুটিও ভাঁজের মাঝে থাকে।



এবারে ভাঁজ বরাবর যদি আমরা CD রেখাংশ আঁকি তাহলেই দেখতে পাব যে সেটি আমাদের নির্দিষ্ট বিন্দু P

বরাবর গিয়েছে। AB ও CD এর মাঝে কোণগুলো পরিমাপ করে কোণের মান খাতায় লেখো। দেখবে যে সবকয়টি কোণই সমকোণ হয়েছে।



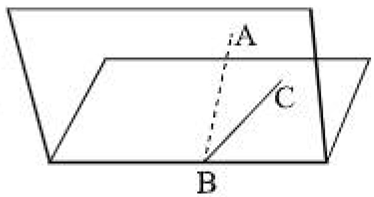
একক কাজ: ৬

আমরা একটি কাগজে একটি কোণ ABC নিই যার শীর্ষবিন্দু হচ্ছে B। এবারে আমরা কাগজটিকে ঠিক AB বরাবর ভাঁজ করি। BC রেখাটি কাগজের যে অংশের সাথে মিলে যায় সেখানে আমরা একটি রেখাংশ এঁকে নিই।

এবারে কোণ ABC ও কোণ ABD কে পরিমাপ করে তাদের তুলনা করে দেখো। দেখতে পাবে যে তাদের পরিমাপ সমান। অর্থাৎ আমরা কোণ ABC এর সমান করে নতুন আরেকটি কোণ আঁকতে পারলাম।

একক কাজ: ৭

আমরা একটি কাগজে একটি কোণ ABC নিই যার শীর্ষবিন্দু হচ্ছে B। এবারে আমরা কাগজটিকে এমনভাবে ভাঁজ করি যেন AB ও BC বাহুদ্বয় একে অপরের সাথে মিলে যায়। লক্ষ করে দেখো ভাঁজটি শীর্ষবিন্দুকেই ছেদ করেছে। এবারে ভাঁজ বরাবর একটি রেখা আঁকলে দেখতে পাবে যে দুটি কোণ পাওয়া গেছে।

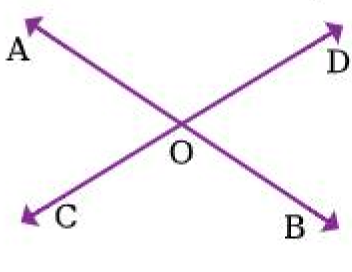


কোণ দুটি পরিমাপ করে দেখো। তারা পরস্পর সমান এবং প্রত্যেকেই কোণ ABC এর অর্ধেক। কাজ ৬ থেকে আমরা এটা বলতে পারি। কারণ সেখানে আমরা নতুন কোণটির বাহু পুরাতন কোণের বরাবর করেই নিয়েছিলাম। আবার লক্ষ করো, ভাঁজ বরাবর রেখাটি থেকে কোণের বাহুগুলো সমান দূরত্ব বজায় রেখেছে। অর্থাৎ আমরা যদি একটি কোণের মাঝে দিয়ে একটি রেখাংশ আঁকতে পারি যা কোণের দুই বাহু থেকে সমান দূরত্ব বজায় রাখে তাহলেই আমরা কোণের সমদ্বিখণ্ডক পেয়ে যাচ্ছি।

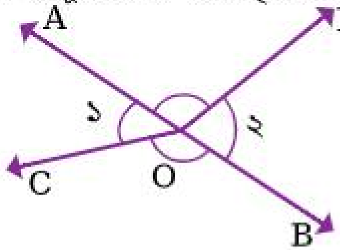
দলগত কাজ

৪-৫ জনের দলে ভাগ হয়ে কোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং রেখাংশের সমদ্বিখণ্ডকের মাঝে একটি মিল এবং একটি পার্থক্য বের করো।

চিত্রটি লক্ষ করো, পরস্পর ছেদ করা রেখা জোড়ার ছেদবিন্দুর দিকে তাকাও। AB ও CD দুটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। এর ফলে সেখানে দুইজোড়া কোণ তৈরি হয়েছে যারা পরস্পর বিপরীতমুখী। এই দুইজোড়ার প্রতিজোড়াকে আমরা বলব বিপ্রতীপ কোণ (vertically opposite angle)। এদের প্রত্যেকের শীর্ষবিন্দু O।

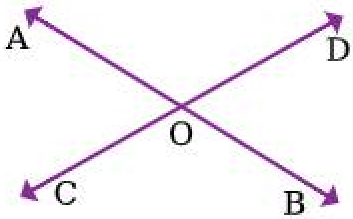


তোমাদের মনে প্রশ্ন জাগার কথা, আমরা বিপরীত বলছি না কেন, সেটাই তো বলা সহজ। এবারে পরের চিত্রটি লক্ষ করো। ১ চিহ্ন দেওয়া কোণ আর ২ চিহ্ন দেওয়া কোণ দুটিরও একই শীর্ষবিন্দু, কিন্তু ১ কোণটির বাহুগুলোকে বিপরীত দিকে বাড়ালে আমরা ২ কোণটিকে পাই না। এখানে তারা শুধুই বিপরীত কোণ। বিপ্রতীপ হবে তখনই, যখন একটি কোণের বাহুগুলোকে বিপরীতে বৃদ্ধি করলে আরেকটিকে পাওয়া যায়।



একক কাজ: ৮

এবারে একটি কাগজ নিই যেখানে AB ও CD দুটি সরলরেখা আঁকো যারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। তারপর O বিন্দু বরাবর এমনভাবে ভাঁজ করি যেন BO এবং CO অংশদ্বয় একে অপরের সাথে মিলে যায়। AO এবং DO এর অবস্থান লক্ষ করো। তারা কি মিলে গিয়েছে? এখান থেকে আমরা বিপ্রতীপ কোণের ব্যাপারে কী সিদ্ধান্ত নিতে পারি?

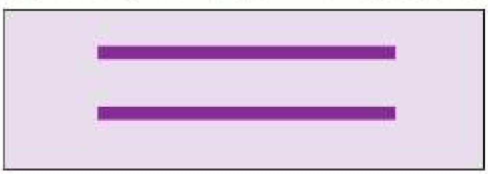


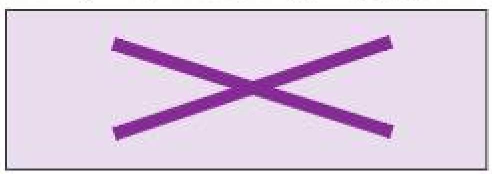
কাজেই আমরা বলতে পারি যে দুটি রেখা পরস্পরকে ছেদ করলে উৎপন্ন বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান হয়।

তিনটি কাঠির খেলা

দুটি কাঠি নাও। সঙ্গে কাঠি না থাকলে তোমরা কলম/পেনসিল দিয়ে কাজটি করতে পারো। ছবির মতো বিভিন্নভাবে বসালেই দেখতে পারবে যে দুটি লম্বা কাঠি একটি আরেকটিকে কেবলমাত্র একটি বিন্দুতেই ছেদ করতে পারবে। তোমরা পূর্বের শ্রেণিতেই জেনে এসেছ যে যদি তারা কখনোই ছেদ না করে তবে তাদেরকে বলা হবে সমান্তরাল (parallel)।

এবারে আমরা তৃতীয় আরেকটি কাঠি নিয়ে আসি। প্রথম কাঠি দুটি যদি সমান্তরাল হয়, তাহলে তৃতীয় কাঠিটি

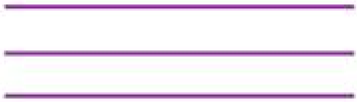




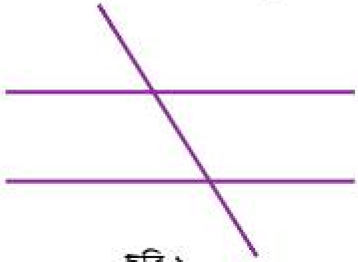
বসানোর জন্য দুটি উপায় দেখা যাবে।

১। তৃতীয় কাঠিটি হবে প্রথম দুটির সমান্তরাল [ছবি ১] অথবা,

২। তৃতীয় কাঠিটি কারো সাথেই সমান্তরাল হবে না এবং দুটি রেখাকেই একটি করে বিন্দুতে ছেদ করবে (ছবি-২)



ছবি ১

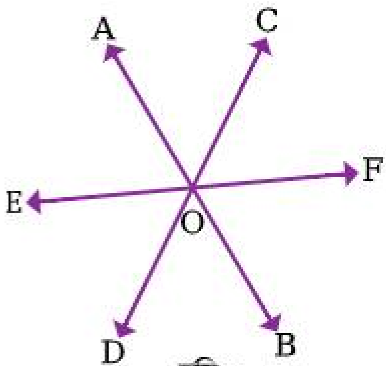


ছবি ২

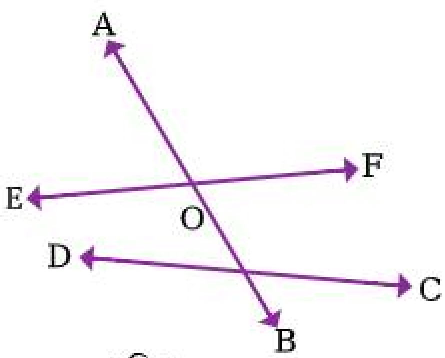
প্রথম দুটি কাঠি যদি সমান্তরাল না হয়, তাহলেও তৃতীয় কাঠিটি দুটি উপায়ে বসতে পারে।)

৩। প্রথম দুটি কাঠির ছেদবিন্দুতেই তৃতীয় কাঠিটি ছেদ করবে। [ছবি ৩]

৪। তৃতীয় কাঠিটি প্রথম দুটি কাঠিকে দুটি আলাদা বিন্দুতে ছেদ করবে। [ছবি ৪]



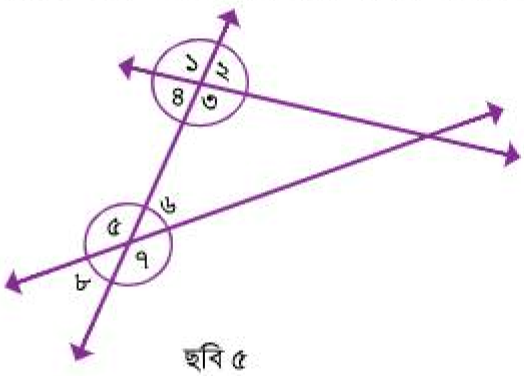
ছবি ৩



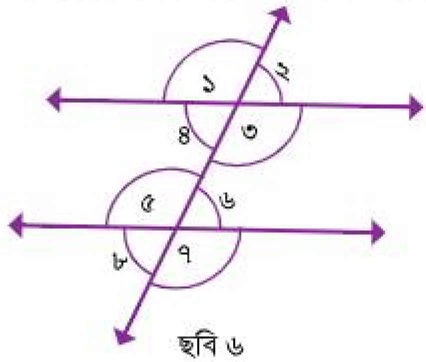
ছবি ৪

৩ নম্বর ছবির মতো, দুইয়ের অধিক রেখা যদি একই বিন্দুতে ছেদ করে, তাদেরকে আমরা বলি সমবিন্দু রেখা (concurrent line)। ২ ও ৪ নম্বর ছবির মতো, একটি রেখা যদি আর একাধিক রেখাকে ছেদ করে, তাহলে আমরা সেই রেখাটিকে বলব ছেদক (transversal)।

নিচের ছবি ৫ ও ৬ লক্ষ করো, দুটি রেখার সাথে অপর একটি ছেদ করলে এইরকম আটটি করে কোণ তৈরি হয়।



ছবি ৫



ছবি ৬

একটু খেয়াল করলে দেখবে ১ ও ৫, ২ ও ৬, ৩ ও ৭ এবং ৪ ও ৮ এই কোণের জোড়াগুলোর অবস্থান একইরকম। তারা রেখার উপরে অথবা নিচে এবং ছেদকের ডানে অথবা বামে। যেমন ১ ও ৫ জোড়াটি রেখার উপরে এবং ছেদকের বামে। এমন জোড়ার কোণ দুটিকে অনুরূপ কোণ (corresponding angles) বলা হবে।

চিত্রগুলোর দিকে আবার তাকালে দেখবে ১ ও ৭, ২ ও ৮, ৩ ও ৫ এবং ৪ ও ৬ এই জোড়াগুলোর অবস্থান মোটামুটি বিপরীতমুখি। একটি যদি হয় ডানে এবং উপরে (৬ নম্বর কোণ) অপরটি তাহলে হচ্ছে বামে এবং নিচে (৪ নম্বর কোণ)। এমন কোণের জোড়াকে আমরা বলব একান্তর কোণ (alternate angles)।

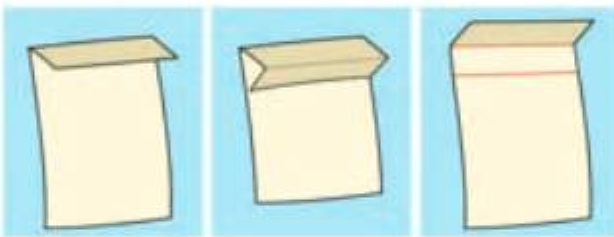
আবার দেখো, ১, ২, ৭ ও ৮ কোণগুলো বাইরের দিকে আবার ৩, ৪, ৫ ও ৬ কোণগুলি ভেতরের দিকে। বাইরের দিকের কোণগুলো বহিঃস্থ কোণ (exterior angles) আর ভেতরেরগুলো অন্তঃস্থ কোণ (interior angles)।

এবারে চলো আমরা কোণগুলোর মাঝে কিছু সম্পর্ক বের করার চেষ্টা করে দেখি।

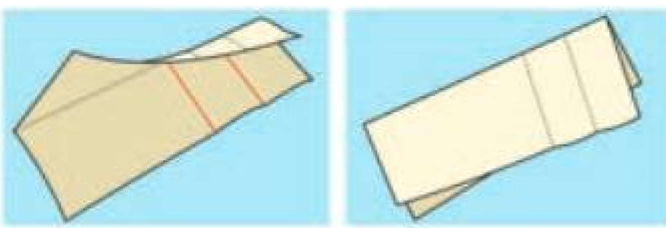
দলগত কাজ

চার/পাঁচজন করে একটি দল গঠন করো এবং প্রত্যেক দল একটি করে কাগজ নাও। এবারে নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করো।

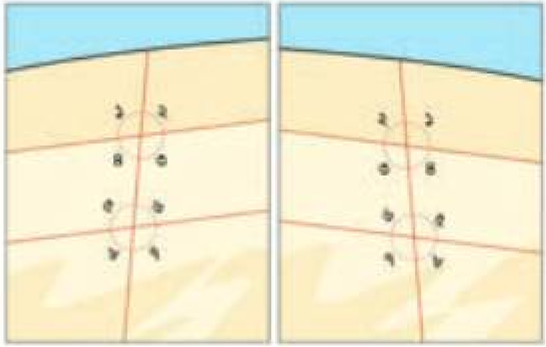
১। কাগজটিকে চিত্রে দেখানো উপায়ে দুটি ভাঁজ করে নাও যেন ভাঁজ বরাবর রেখাদ্বয় তারা সমান্তরাল হয়। প্রয়োজনে শিক্ষকের সাহায্য নাও সমান্তরাল ভাঁজ করতে। তারপর সেই ভাঁজ দুটি বরাবর দুটি রেখা আঁক। তোমরা তাহলে দুটি সমান্তরাল সরলরেখা পাবে।



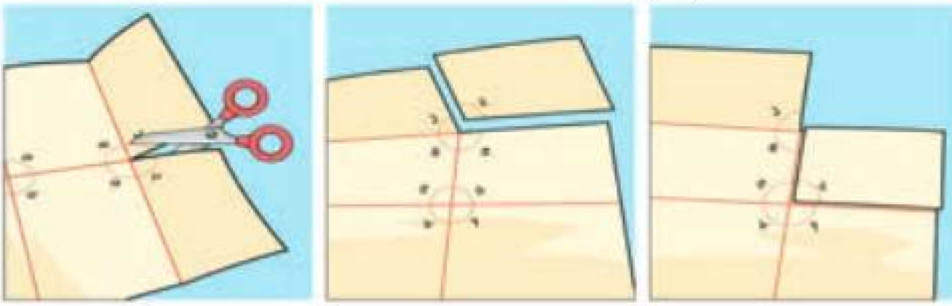
২। এবারে চিত্রের মতো কাগজটির মাঝের দিকে আড়াআড়ি একটি ভাঁজ দাও। সেই ভাঁজ বরাবর দাগ টানলেই তোমরা সমান্তরাল রেখা দুটির জন্য একটি ছেদক পেয়ে যাবে।



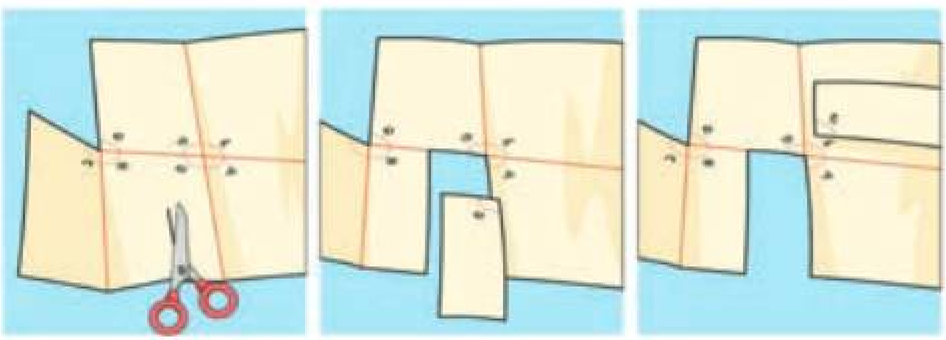
৩। কাগজের দুই পাশেই ভাঁজ বরাবর দাগ দিয়ে নিচের ছবির মতো কোণগুলোকে সংখ্যা দিয়ে চিহ্নিত করো। এক পাশে চিহ্নিত করবে ছবি ৬ এর মতো এবং উল্টোপাশে এমনভাবে সংখ্যা লিখবে যেন ১ এর বিপরীত পাশের কোণটিও ১ হয়।



৪। এবারে ২ নম্বর কোণটি দেখানো চিত্রের মতো কেটে আলাদা করে নাও। ৬ নম্বর কোণের সাথে ২ নম্বর কোণটি মিলিয়ে দেখো চিত্রের মতো। আমরা এখান থেকে বলতে পারি কোণ ২ আর কোণ ৬ পরস্পর সমান। অর্থাৎ দুটি সমান্তরাল রেখাকে আরেকটি রেখা ছেদ করার ফলে অনুরূপ দুটি কোণ পরস্পর সমান হয়েছে। নিজেরা পরীক্ষা করে দেখো তো এইটিকে আর কোন কোণের উপরে পুরোপুরি বসাতে পারো?

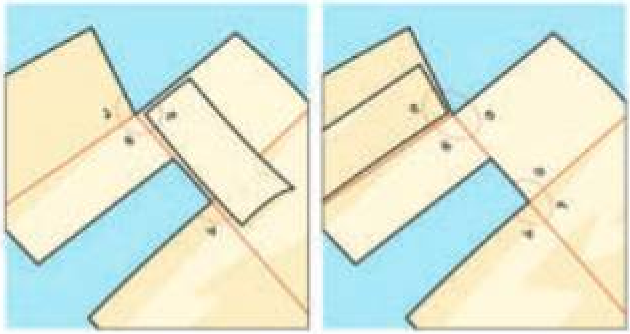


৫। এবারে চিত্রে দেখানো উপায়ে ৫ নম্বর কোণটিকেও আলাদা করে নাও।



৬। ৫ নম্বর কোণটি ৩ নম্বর কোণের সাথে পুরোপুরি মিলে যাচ্ছে। আমরা জানি তারা পরস্পর একান্তর কোণ। কাজেই আমরা বলতে পারি, দুটি সমান্তরাল রেখাকে আরেকটি রেখা ছেদ করার ফলে একান্তর দুটি কোণ পরস্পর সমান হয়েছে।

আবার কোণ ৫ যেহেতু কোণ ১ এর অনুরূপ, তারা অবশ্যই মিলে যাবে। খেয়াল করো, কোণ ৫ আর কোণ ৪ যোগ করে আমরা একটি সরলকোণ বা দুই সমকোণের সমান পাচ্ছি। কোণ ৪ ও ৫ ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ। আমরা এটা বলতে পারি যে, দুটি সমান্তরাল রেখাকে আরেকটি রেখা ছেদ করার ফলে ছেদকের একই পাশের দুটি অন্তঃস্থ কোণের যোগফল দুই সমকোণের সমান হয়েছে।



দলগত কাজটি থেকে আমরা দুটি সমান্তরাল রেখা ও তাদের ছেদক সম্পর্কে নিচের তথ্যগুলো জানতে পারলাম, যা আমরা পরবর্তীতে সমস্যা সমাধান করতে ব্যবহার করতে পারব।

১। দুটি সমান্তরাল রেখাকে আরেকটি রেখা ছেদ করালে অনুরূপ কোণেরা পরস্পর সমান হয়। এখানে কোণ ১ ও ৫, কোণ ২ ও ৬, কোণ ৩ ও ৭ এবং কোণ ৪ ও ৮ পরস্পর অনুরূপ এবং সমান।

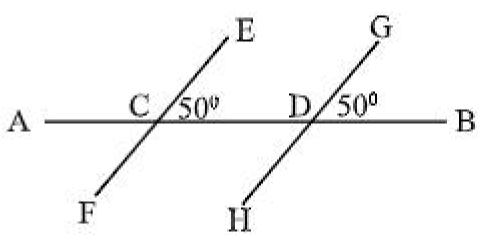
২। দুটি সমান্তরাল রেখাকে আরেকটি রেখা ছেদ করলে একান্তর কোণেরা পরস্পর সমান হয়। এখানে কোণ ৩ ও ৫ এবং কোণ ৪ ও ৬ পরস্পর একান্তর এবং সমান।

৩। দুটি সমান্তরাল রেখাকে আরেকটি রেখা ছেদ করলে ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণের পরিমাপের যোগফল দুই সমকোণের সমান হয়। এখানে কোণ ৩ ও ৬ এবং কোণ ৪ ও ৫ এই দুটি ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণের জোড়া রয়েছে যাদের যোগফল দুই সমকোণের সমান।

এবারে চলো আমরা পরীক্ষা করে দেখি ছেদকের সাথে উৎপন্ন কোণদের কোনো সম্পর্ক পাওয়া গেলে দুটি রেখা সমান্তরাল হয় কি না।

একক কাজ

একটি রেখার দুটি বিন্দুতে একই দিকে 50° মাপের কোণ আঁকো নিচের চিত্রের মতো। এরপরে EF ও GH রেখা দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব পরিমাপ করে দেখো।



কাজের ফলাফল পর্যালোচনা করে আমরা নিচের সিদ্ধান্তে আসতে পারি।

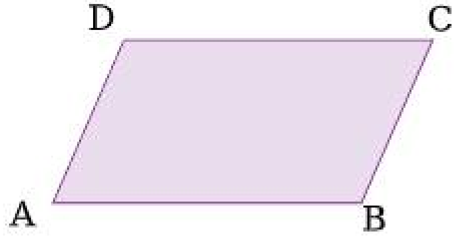
১। দুটি রেখাকে আরেকটি রেখা ছেদ করলে যদি অনুরূপ কোণেরা পরস্পর সমান হয়, তবে ওই রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল।

২। দুটি রেখাকে আরেকটি রেখা ছেদ করলে যদি একান্তর কোণেরা পরস্পর সমান হয়, তবে ওই রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল।

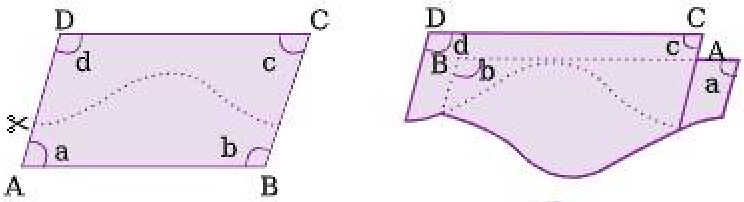
৩। দুটি রেখাকে আরেকটি রেখা ছেদ করলে যদি একই পাশের অন্তঃস্থ কোণের পরিমাপের যোগফল দুই সমকোণের সমান তবে ঐ রেখা দুটি পরস্পর সমান্তরাল।

একক কাজ

১। তোমার ইচ্ছামতো কাগজ কেটে কয়েকটি সামান্তরিক তৈরি করো।



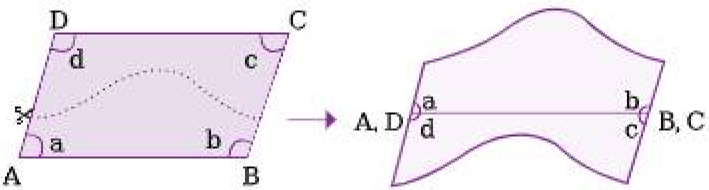
ক) একটি সামান্তরিককে নিচের ছবির মতো করে কেটে দুই টুকরা করে কোণগুলোকে মিলিয়ে দেখো।



$\angle a = \angle c$

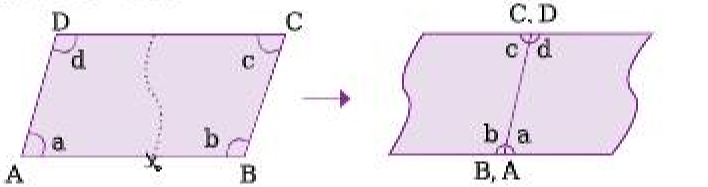
$\angle b = \angle d$

খ) একটি সামান্তরিককে নিচের ছবির মতো করে কেটে দুই টুকরা করে বিপরীত কোণগুলি একসাথে মিলিয়ে দেখো।



$\angle a + \angle d = 180^0$

$\angle b + \angle c = 180^0$



$\angle a + \angle b = 180^0$

$\angle b + \angle d = 180^0$

এই ছবিতে সমান্তরাল সরলরেখার
কোন বৈশিষ্ট্য দেখানো হয়েছে?

ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য

এই অধ্যায়ে আমরা তিনটি কাঠি দিয়ে একটি ক্ষেত্রকে আবদ্ধ করব এবং এর বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য নিয়ে আলোচনা করব। তোমরা পূর্বের শ্রেণিতেই জেনেছ যে, তিনটি রেখাংশ দিয়ে যে ক্ষেত্রটিকে আবদ্ধ করা হয় তাকেই ত্রিভুজক্ষেত্র বলে এবং সেই ক্ষেত্রের সীমারেখাকে বলা হয় ত্রিভুজ (triangle)। এই অধ্যায় জুড়ে আমরা তিনটি কাঠিকে তিনটি রেখাংশ হিসেবে ধরে নেব এবং বিভিন্ন প্রকার ত্রিভুজ তৈরি করব। তারপর তার বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য আমরা বিভিন্ন কার্যক্রমের মাধ্যমে খুঁজে বের করব এবং সেই বৈশিষ্ট্যগুলো প্রয়োগ করতে চেষ্টা করব।

ত্রিভুজের তিন বাহু

আমরা জানি, যে তিনটি রেখাংশ ক্ষেত্রটিকে আবদ্ধ করে তাদেরকে বলা হয় ত্রিভুজের বাহু (side)। বাহুগুলো একে অপরকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তাদেরকে আমরা বলি শীর্ষ (vertex)। পূর্বের ক্লাসের নির্দেশনা অনুযায়ী তোমরা নিশ্চয়ই তিনটি করে কাঠি সংগ্রহ করেছ। এবারে চলো আমরা তাদেরকে পরিমাপ করে ত্রিভুজ গঠন করার চেষ্টা করি।

প্রথমে তোমরা নিচের ছকে তোমাদের হাতের কাঠিগুলোর দৈর্ঘ্য পরিমাপ বসাও। তারপর চেষ্টা করে দেখো তাদেরকে বসিয়ে তোমরা ত্রিভুজ গঠন করতে পারো কি না।

ছক ৫.১

ক্রম	কাঠি ১	কাঠি ২	কাঠি ৩	ত্রিভুজ গঠন করা যায় কি? (হ্যাঁ/না)

এবারে প্রতিটি ক্রমে কাঠিগুলোর পরিমাপের সম্পর্ক বসাও এবং ত্রিভুজ গঠন করা গিয়েছে কি না তা খেয়াল করো।

ছক ৫.১

ক্রম	কাঠি ১+কাঠি ২ > কাঠি ৩ (হ্যাঁ/না)	কাঠি ২+কাঠি ৩ > কাঠি ১ (হ্যাঁ/না)	কাঠি ৩+কাঠি ১ > কাঠি ২ (হ্যাঁ/না)	ত্রিভুজ গঠন করা যায় কি? (হ্যাঁ/না)

তোমরা লক্ষ করলেই দেখতে পাবে, যেসকল ক্ষেত্রে আমরা ত্রিভুজ তৈরি করতে পেরেছি সেসব ক্ষেত্রে অবশ্যই ত্রিভুজের যেকোনো দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের চাইতে বেশি।

একক কাজ

নিচের কোন কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ আঁকা সম্ভব – ব্যাখ্যা দাও।

১। 1 সেমি, 2 সেমি ও 3 সেমি

২। 1 সেমি, 2 সেমি ও 4 সেমি

৩। 4 সেমি, 5 সেমি ও 7 সেমি

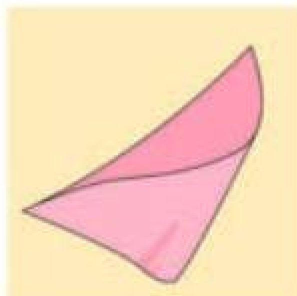
ত্রিভুজের মধ্যমা, কোণের সমদ্বিখণ্ডক এবং বিপরীত বাহুর উপরে আঁকা লম্ব

চিত্র ৫.২ এর মতো কাগজের ত্রিভুজ তৈরি করে কেটে নাও। এবারে আমরা ত্রিভুজের ভেতরের বিভিন্ন রেখা সম্পর্কে জানব।

মধ্যমা: 'মধ্যমা' শব্দটি খেয়াল করলেই তোমরা দেখতে পাবে যে এখানে 'মধ্য' অংশটি আছে। কাজেই এই রেখাটি কিছু একটার মাঝখানে আছে। নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করে আমরা আগে মধ্যমা তৈরি করি।

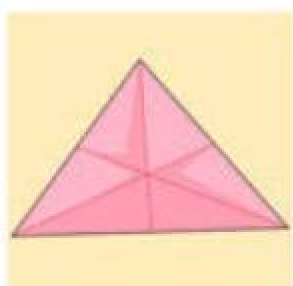
চিত্র-৫.২

১। চিত্র- ৫.৩ এর মতো করে ত্রিভুজের একটি শীর্ষকে আরেকটি শীর্ষের সাথে মেলাও। মাঝের ভাঁজ পড়া বিন্দুটি খেয়াল করো। সেখান থেকে এই দুটি শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব কেমন হবে তা পরিমাপ করে দেখো। দূরত্ব যেহেতু সমান হয়, আমরা বলতে পারি যে ভাঁজ পড়া বিন্দুটিই হবে দুই শীর্ষের মাঝের বাহুটির মধ্যবিন্দু।



চিত্র-৫.৩

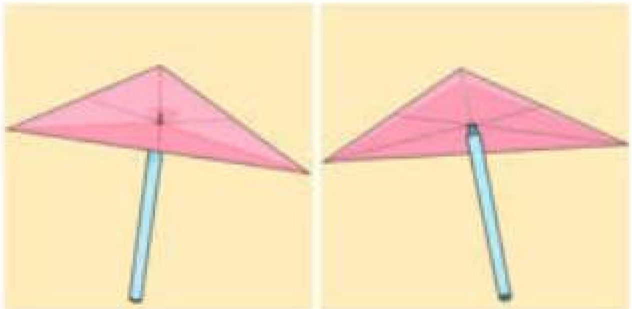
২। এভাবে তিনটি বাহুরই মধ্যবিন্দু বের করো এবং বিপরীত শীর্ষবিন্দুর সাথে ভাঁজ করে যোগ করে নাও। শীর্ষবিন্দুর সাথে যেহেতু আমরা বাহুর মধ্যবিন্দু যোগ করছি, আমরা এই রেখাগুলো সেজন্যে বলি মধ্যমা। নিচের চিত্রে ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা এঁকে দেখানো হলো। (তোমরা এমনিতে রুলারের সাহায্যে মধ্যবিন্দু বের করে সেটিকে বিপরীত শীর্ষের সাথে যোগ করে মধ্যমা আঁকতে পারো। চিত্র-৫.৪)



চিত্র-৫.৩

দলগত কাজ

চার-পাঁচজন করে শিক্ষার্থীর দল গঠন করো। একটি আর্ট পেপার জাতীয় কাগজ অথবা একটি পাতলা বোর্ড থেকে ত্রিভুজ আকৃতির একটি অংশ কেটে নাও। তারপর একটি রুলারের সাহায্যে প্রতি বাহুর মধ্যবিন্দু বের করো এবং সেগুলো ব্যবহার করে তিনটি মধ্যমা আঁকো। লক্ষ করে দেখো, ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমার একটি মজার বৈশিষ্ট্য আছে। যেকোনো ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা সবসময় একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে। এবারে শিক্ষকের তত্ত্বাবধানে মধ্যমাগুলোর ছেদবিন্দুতে একটি সুতা বেঁধে নাও। এবারে সুতা দিয়ে ত্রিভুজটিকে ঝুলিয়ে দাও, কী দেখতে পাচ্ছ? ত্রিভুজটি মাটির সাথে সমান্তরাল হয়ে ঝুলে থাকছে। আবার তোমরা যদি ত্রিভুজটিকে শক্ত কাগজ দিয়ে তৈরি করে থাকো, একটি কলম বা পেনসিল মধ্যমাদের ছেদবিন্দুতে গেঁথে নাও। দেখবে যে ত্রিভুজটি কোনদিকে বেঁকে যাচ্ছে না।



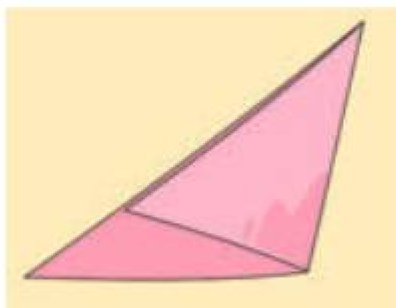
চিত্র- ৫.৪

যেহেতু এই বিন্দুর মাধ্যমেই আমরা পুরো ত্রিভুজটিকে ধরে রাখতে পারি, আমরা বলতে পারি যে ত্রিভুজের ওজন এই বিন্দুতে কেন্দ্রীভূত হয়ে আছে। অর্থাৎ ত্রিভুজের ভরের কেন্দ্র হচ্ছে এই বিন্দু। এইজন্য এই বিন্দুটিকে আমরা বলবো ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

> ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে। সেই বিন্দুটিকে ভরকেন্দ্র বলা হয়।

কোণের সমদ্বিখণ্ডক: নাম দেখেই তোমরা বুঝতে পারছ যে এই রেখাটি ত্রিভুজের কোণকে সমান দুই ভাগে ভাগ করবে। চলো আমরা দেখি কাগজের ত্রিভুজ থেকে কীভাবে কোণের সমদ্বিখণ্ডক বের করা যায়।

১। নিচের চিত্রের মতো ত্রিভুজের শীর্ষকে এক পাশে রেখে ভাঁজ করো যেন একটি বাহু আরেকটি বাহুর উপরে মিলে যায়। দেখবে মাঝের শীর্ষবিন্দু বরাবর একটি ভাঁজ তৈরি হয়েছে। এবারে শীর্ষবিন্দুতে তৈরি হওয়া কোণ দুটি পরিমাপ করে দেখো তাদের মাঝে কোন মিল আছে কি না।

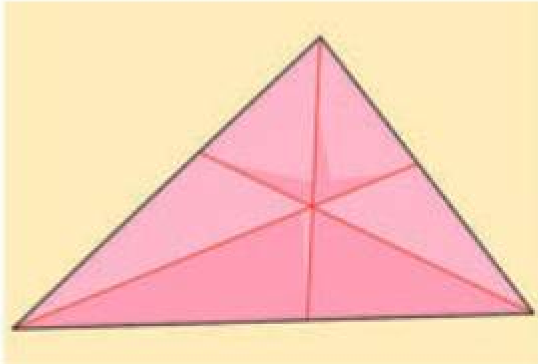


চিত্র- ৫.৫

২। পরিমাপ করে বুঝতে পারবে সেই ভাঁজটি শীর্ষবিন্দুতে থাকা অন্তঃস্থ কোণটিকে সমান দুই ভাগে ভাগ করে।

বাকি দুটি কোণের জন্যে ত্রিভুজের শীর্ষ বরাবর ভাঁজ করে সমদ্বিখণ্ডক বের করো।

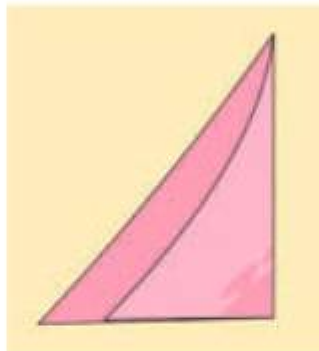
লক্ষ করলে বুঝতে পারবে, মধ্যমাগুলোর মতো কোণের সমদ্বিখণ্ডগুলোও নিজেদের ছেদ করার জন্য একটি বিন্দু আলাদা করে রেখেছে। অর্থাৎ ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক সবসময় একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ছেদ করে।



চিত্র- ৫.৬

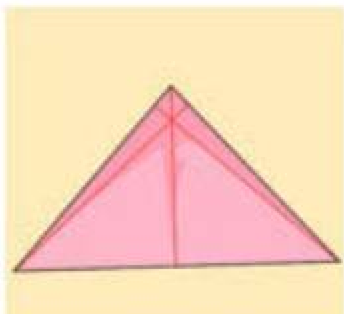
বিপরীত বাহুর উপর লম্ব: কোনো শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপরে আঁকা লম্বগুলোও ত্রিভুজের কিছু বৈশিষ্ট্য তুলে ধরে। নিচের ধাপ অনুসরণ করে এসো আমরা তিনটি শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপরে লম্ব আঁকার পদ্ধতি দেখে নিই।

১। চিত্র ৫.৭ এর মতো একটি শীর্ষকে লম্বালম্বি এমনভাবে ভাঁজ করবে যেন বিপরীত বাহুটি নিজের সাথে মিশেই থাকে এবং এক পাশ থেকে দেখতে এদেরকে সমকোণী ত্রিভুজের মতো মনে হয়। যে বিন্দুতে ভাঁজ করা হলো সেখানকার কোণটির পরিমাপ কী?



চিত্র- ৫.৭

২। পরিমাপ করলেই বুঝতে পারবে যে এই ভাঁজ বরাবর আমরা আমাদের কাঙ্ক্ষিত লম্ব পাচ্ছি। এভাবে তিনটি লম্বকেই আমরা বের করে নিবো এবং আঁকার পরে চিত্র ৫.৮ এর মতো দেখা যাবে।



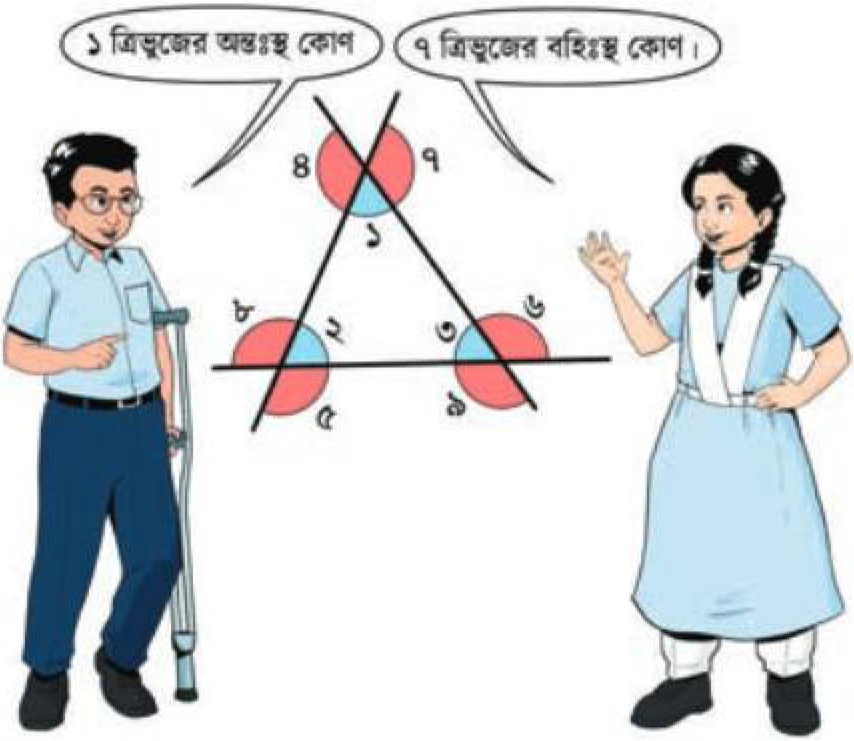
চিত্র- ৫.৮

একক কাজ

উপরে বর্ণিত উপায় ছাড়া আর কোনো উপায়ে ত্রিভুজের বিপরীত বাহুর উপরে লম্ব আঁকার চেষ্টা করে দেখো।

ত্রিভুজের কোণের সম্পর্ক

এবারে আমরা ত্রিভুজের কোণগুলো পর্যবেক্ষণ করে দেখব তাদের মাঝে কোনো বিশেষ সম্পর্ক পাওয়া যায় কি না। নিচের ছবিটির মতো করে একটি ত্রিভুজ খাতায় আঁকো যেন বাহুগুলো একটু করে অতিরিক্ত থাকে।



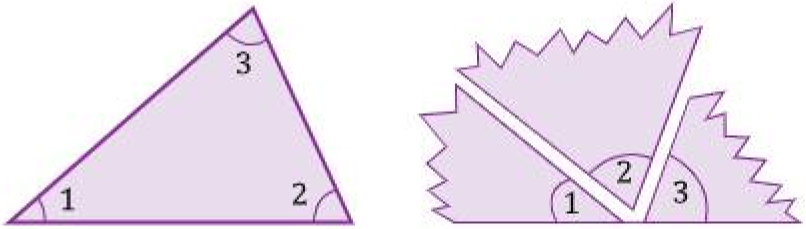
১ চিহ্নিত কোণটি ত্রিভুজের ভেতরের দিকে রয়েছে। আমরা একে বলব ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণ। একইভাবে ২ এবং ৩ চিহ্নিত কোণগুলোকেও আমরা বলব ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণ। ১ চিহ্নিত কোণের সাথে সন্নিহিত ৪ এবং ৭ চিহ্নিত দুটি কোণ রয়েছে যারা পরস্পর বিপ্রতীপ। এই কোণগুলোও আসলে ত্রিভুজের বাহু দিয়েই তৈরি হয়েছে, কিন্তু তারা ত্রিভুজক্ষেত্রের বাইরে রয়েছে। আমরা এই কোণগুলোর প্রত্যেককে বলব ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ। একইভাবে ৫, ৮ এবং ৬, ৯ কোণগুলো হচ্ছে ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ। যদি ১ এর সাথের বহিঃস্থ কোণ হিসাব করতে বলে, আমরা ৪ অথবা ৭ যেকোনো একটা পরিমাপ করলেই পারি, কারণ তারা পরস্পর বিপ্রতীপ এবং বিপ্রতীপ কোণেরা পরস্পর সমান হয়।

পূর্বের শ্রেণিতে তোমরা নিশ্চয়ই সম্পূরক কোণ (supplementary angle) সম্পর্কে জেনে এসেছ। দুটি কোণের পরিমাপ করে আমরা যদি তাদের যোগফল দুই সমকোণের সমান পাই তাহলে কোণ দুটির একটিকে অপরটির সম্পূরক কোণ বলা হয়। আবার লক্ষ করে দেখো, ত্রিভুজের যে অন্তঃস্থ এবং বহিঃস্থ কোণগুলো সন্নিহিত (adjacent) তারা একে অপরের সম্পূরক কোণ। যে কোনো বহিঃস্থ কোণের সন্নিহিত বাদে বাকি দুটি কোণকে বলব আমরা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ।

এবারে চলো আমরা ত্রিভুজের কোণগুলোর মাঝে কোনো সম্পর্ক পাওয়া যায় কী না খুঁজে দেখি।

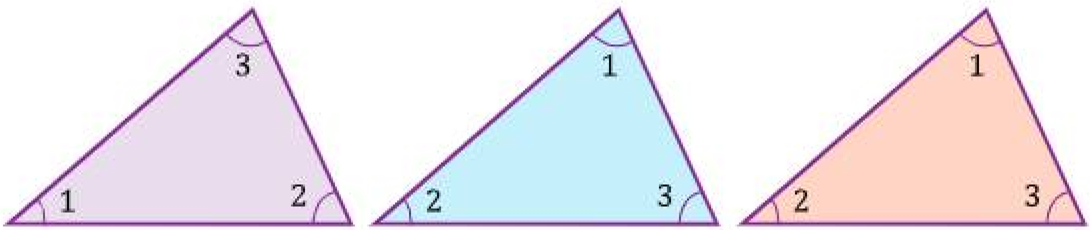
একক কাজ: ১

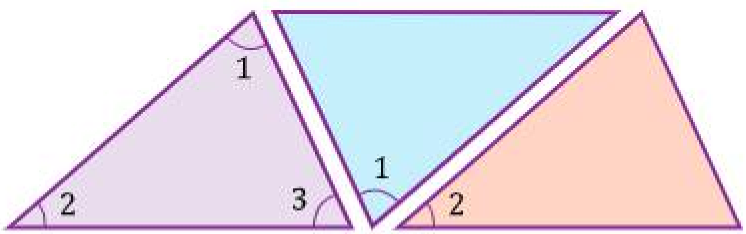
কাগজ দিয়ে প্রত্যেকেই একটি করে ত্রিভুজকে তিন টুকরো করে নাও এবং সাজিয়ে নাও চিত্রের মতো। তারপর খেয়াল করো যে তিনটি কোণ মিলে একটি সরল কোণ (straight angle) তৈরি হয়েছে।



একক কাজ: ২

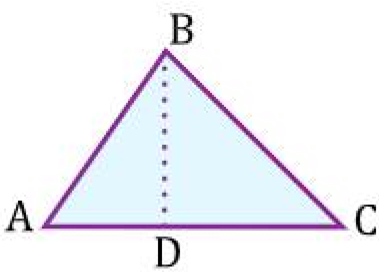
আলাদা রং এর কাগজ দিয়ে একইরকম তিনটি ত্রিভুজ কেটে চিত্রের মতো সাজিয়ে নাও। রঙ্গিন কাগজ না হলে সাদা কাগজ দিয়েও কাজটি করা যাবে। আগের চিত্রের মতো এখানেও সরলকোণ তৈরি হচ্ছে কি?



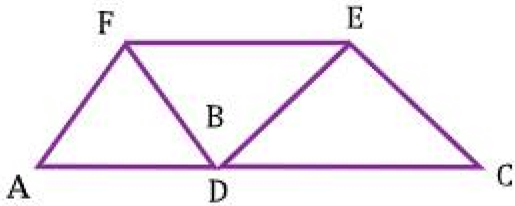


একক কাজ: ৩

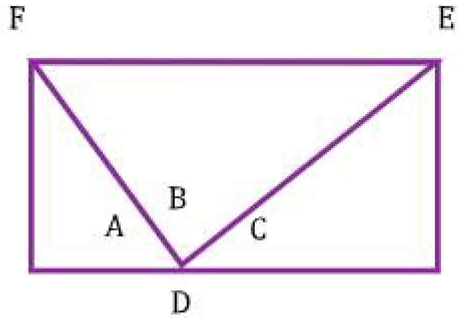
একটি ত্রিভুজ ABC নিয়ে AC বাহুকে ভাঁজ করে শীর্ষ বিন্দু দিয়ে অতিক্রমকারী একটি লম্ব তৈরি করো। লম্বটি যেই বিন্দুতে AC কে ছেদ করে সেটির নাম দিলাম D.



তারপর শীর্ষবিন্দুটিকে বিপরীত বাহুর উপরে মিলিয়ে নাও চিত্রের মতো করে। AF ও BE রেখাংশ দুটি পরিমাপ করে দেখো। তাদের মাঝে কোনো মিল/পার্থক্য পাচ্ছ কি? আবার AC এবং EF রেখা দুটিকে পর্যবেক্ষণ করে দেখো তাদের মাঝে কোনো সম্পর্ক পাও কি না?



পরিশেষে নিচের চিত্রটির মতো শীর্ষবিন্দু A ও C কে D এর সাথে মিলিয়ে নিই।



দলগত কাজ

দলের প্রত্যেকে খাতায় একটি করে ত্রিভুজ আঁকো। এবারে নিচের ছকটি পূরণ করো। পাঁচটি ত্রিভুজের ছকে উল্লিখিত কোণগুলো পরিমাপ করে।

ক্রম	অন্তঃস্থ কোণ ১	অন্তঃস্থ কোণ ২	অন্তঃস্থ কোণ ৩	অন্তঃস্থ তিন কোণের যোগফল	অন্তঃস্থ কোণ ১ এর সন্নিহিত বহিঃস্থ কোণ	অন্তঃস্থ কোণ ২ ও ৩ এর যোগফল	অন্তঃস্থ কোণ ২ এর সন্নিহিত বহিঃস্থ কোণ	অন্তঃস্থ কোণ ৩ ও ১ এর যোগফল	অন্তঃস্থ কোণ ৩ এর সন্নিহিত বহিঃস্থ কোণ	অন্তঃস্থ কোণ ১ ও ২ এর যোগফল

তোমরা ত্রিভুজের তিন কোণের যোগফলে কি বিশেষ কোনো বৈশিষ্ট্য দেখতে পাচ্ছ? আবার বহিঃস্থ কোণ এবং তাদের বিপরীত অন্তঃস্থ কোণগুলোর পরিমাপের যোগফলের মাঝে সম্পর্ক লক্ষ করে দেখো। আমরা এখান থেকে নিচের দুটি সিদ্ধান্ত পেতে পারি।

ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা 180^0।
যেকোনো বহিঃস্থ কোণের পরিমাপ তার বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ দুটির পরিমাপের যোগফলের সমান।

উদাহরণ: একটি ত্রিভুজের সবকয়টি বাহু সমান হলে তাকে আমরা সমবাহু ত্রিভুজ (equilateral triangle) বলি। সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণই সমান। তাদের প্রত্যেকের পরিমাপ কত হবে?

সমাধান: একটি ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180^0। যেহেতু তারা সবাই সমান, তাদের প্রত্যেকের মান হবে $180^0 \div 3 = 60^0$।

ত্রিভুজের বাহু ও কোণের সম্পর্ক

ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুকে আমরা যদি A, B এবং C দিয়ে প্রকাশ করি তাহলে সেটিকে আমরা বলি ত্রিভুজ ABC. তার কোণগুলোকে আমরা বলি $\angle ABC$ (সংক্ষেপে $\angle B$), $\angle BCA$ (সংক্ষেপে $\angle C$), এবং $\angle CAB$ (সংক্ষেপে $\angle A$)। সাধারণত $\angle A, \angle B$ ও $\angle C$ এর বিপরীত বাহুগুলোকে যথাক্রমে a, b ও c দিয়ে প্রকাশ করা হয়। পাশের চিত্রটি লক্ষ করো। সেখানে শীর্ষবিন্দুগুলো এবং তাদের বিপরীত বাহুদেরকে চিহ্নিত করা আছে।

আমরা অধ্যায়ের আগের দুই অংশে ত্রিভুজের বাহুগুলোর নিজেদের মাঝে এবং কোণগুলোর নিজেদের মাঝে সম্পর্ক দেখতে পেয়েছিলাম। কিন্তু বাহু ও তাদের বিপরীত কোণগুলোর মাঝে সম্পর্ক যাচাই করার জন্য চলো নিচের ছকটি দলগতভাবে পূরণ করি।

ক্রম	অন্তঃস্থ কোণ A	অন্তঃস্থ কোণ B	অন্তঃস্থ কোণ C	বাহু a	বাহু b	বাহু c	বৃহত্তম বাহু	ক্ষুদ্রতম বাহু	বৃহত্তম কোণ	ক্ষুদ্রতম কোণ

বাহু ও কোণগুলোর পরিমাপ থেকে কি তোমরা বিশেষ কিছু লক্ষ করতে পেরেছ? ছক থেকে তোমরা ত্রিভুজের বাহু ও কোণ সম্পর্কিত আরেকটি গুরুত্বপূর্ণ সম্পর্ক জানতে পারবে। তা হচ্ছে

> বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণও বৃহত্তম আর ক্ষুদ্রতম বাহুর বিপরীত কোণও ক্ষুদ্রতম।

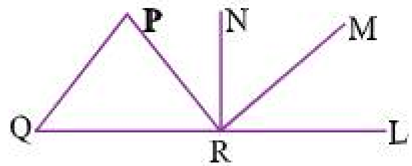
একক কাজ

তোমাকে একটি ত্রিভুজ আঁকতে বলা হলো যার তিন বাহুর দৈর্ঘ্য 4সেমি, 5সেমি এবং 10 সেমি। তুমি কি ত্রিভুজটি আঁকতে পারবে? আঁকা সম্ভব কি না তার কারণ একটি বাক্যে ব্যাখ্যা করো।

অনুশীলনী

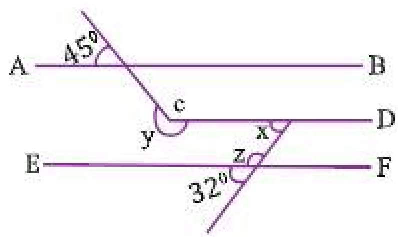
নিচের সমস্যাগুলো কাঠি দিয়ে অথবা কাগজ ভাঁজ করে সমাধান করো।

১।



চিত্রে কোণ $PQR = 55^0$, কোণ $LRN = 90^0$ এবং PQ ও MR পরস্পর সমান্তরাল। তাহলে কোণ MRN এর মান কত?

২।



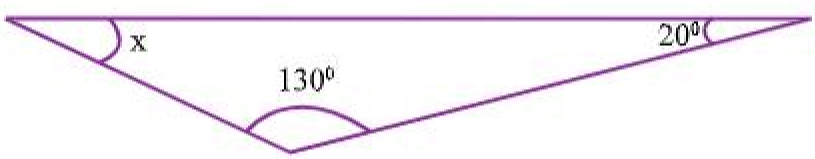
চিত্রে AB, CD ও EF পরস্পর সমান্তরাল।

(ক) কোণ z এর মান কত?

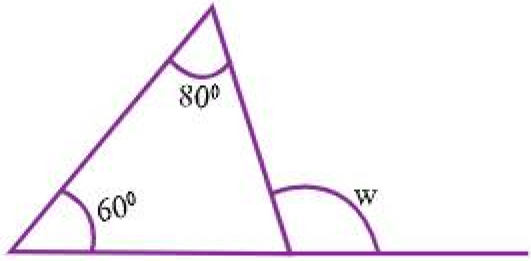
(খ) কোণ x এর মান কত?

(গ) কোণ y-z এর মান কত?

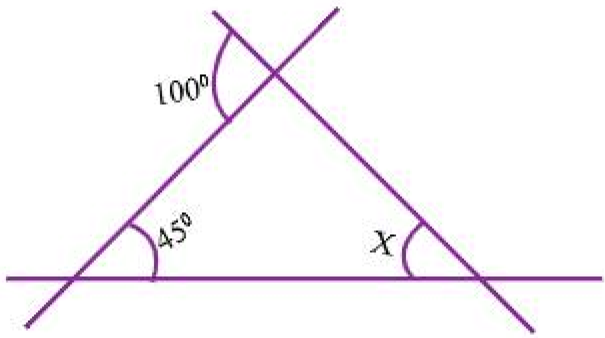
৩। নিচের চিত্র থেকে কোণ x এর মান বের করো।



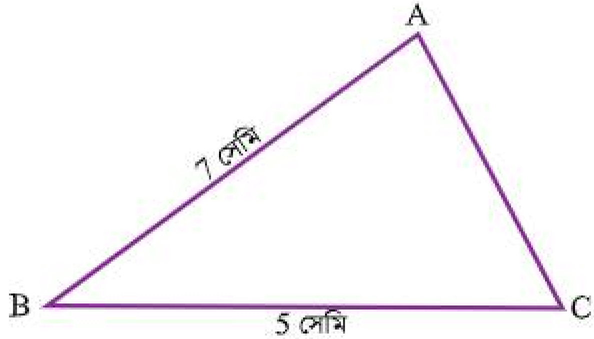
৪। চিত্র থেকে কোণ **w** এর মান বের করো।



৫। চিত্রে কোণ **x** এর পরিমাপ কত?



৬। জয় একটি ত্রিভুজ এঁকেছে কিন্তু তার বাহুগুলোর পরিমাপ চিত্রের চেয়ে ভিন্ন। চিত্রে বসানো পরিমাপ দেখে বলতে হবে ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণ কোনটি?



সর্বসমতা ও সদৃশতা

আমরা চারদিকে বিভিন্ন আকৃতি (shape) ও আকারের (size) বস্তু দেখতে পাই। চলো আমরা কিছু বস্তু তুলনা করে দেখি।

বস্তু	আকার	আকৃতি	ওজন	মন্তব্য
				
				
				
				

তোমরা উপরের ছক থেকে বুঝতে পারছ যে কিছু জিনিস দেখতে হুবুহু সমান, আবার কিছু দেখতে একই রকম, কিন্তু সমান নয়। যেমন আম গাছের যে দুটি পাতা তুলনা করবে তারা দেখতে একই রকম হলেও আকারে তাদের ভিন্নতা রয়েছে। আবার তোমাদের যেকোনো দুইজনের গণিত বই সবদিক থেকেই একই রকম। জ্যামিতিক আকৃতিগুলোর ক্ষেত্রেও এমন দেখা যায়। দুটি আকৃতি একেবারে সবদিক থেকে একইরকম হতে পারে আবার একই ধরনের দুটি আকৃতির আকারে ভিন্নতা থাকতে পারে। এই ধারণাগুলোর খুব সুন্দর নাম রয়েছে, সর্বসমতা ও সদৃশতা। আমরা কিছু কাজের মাধ্যমে এই ধারণাগুলোকেই এই অধ্যায়ে বুঝব।

সর্বসমতা (congruence)

এই মাত্র কিছু জিনিসের যে তুলনা করেছি সেগুলোর মাঝে একটি তুলনা ছিল তোমাদের দুটি গণিত বইয়ের। তাদের আকার আকৃতি এবং ওজন সবকিছুই মিলে গিয়েছিল। কিছু জ্যামিতিক আকৃতিও এমন সব দিক থেকে মিলে যেতে পারে। দুটি ত্রিভুজকে যদি আমরা তুলনা করতে চাই, তাহলে দেখব তাদের তিনটি কোণ এবং তিনটি বাহুই মিলে যায় কি না। এমনভাবে সব দিক যদি মিলে যায় তাহলেই আমরা দুটিকে আকৃতিকে বলব সর্বসম। সবকিছুই সমান হচ্ছে তাই আমরা সংক্ষেপ করে তাদেরকে সর্বসম বলছি।

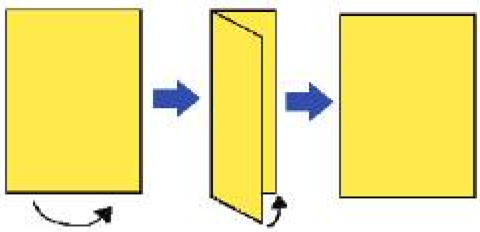
দুটি জ্যামিতিক আকৃতি সর্বসম কি না তা দেখার জন্য একটি উপায় হচ্ছে তাদের অংশগুলো পরিমাপ করে মিলিয়ে দেখা। যেমন ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সবকয়টি কোণ এবং বাহু। আমরা দুটি জ্যামিতিক আকৃতির চিত্রকে সরাসরি তুলনা করতে পারি একটিকে আরেকটির উপরে রেখে। চলো আমরা একটি খেলার মাধ্যমে সেটির উপায় বের করি।

কাগজের এরোপ্লেন

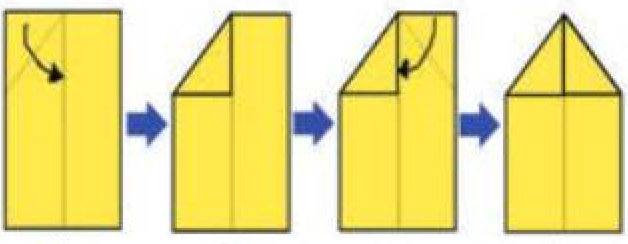
আমরা সবাই এবারে একটি করে কাগজের এরোপ্লেন বানিয়ে সেগুলো উড়াব এবং তাদের মাঝে বিভিন্ন জ্যামিতিক আকার আকৃতি খুঁজে বের করব।

ধাপ ১: প্রত্যেক শিক্ষার্থী একটি করে কাগজ নিয়ে কাগজে কলম দিয়ে একটি চিহ্ন দিয়ে রাখো। তোমরা চিহ্নিত কাগজ দিয়ে প্লেন তৈরি করবে।

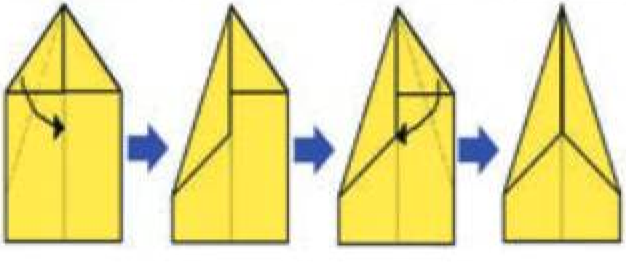
ধাপ ২: প্রথমে কাগজটিকে চিত্রের মতো করে দৈর্ঘ্য বরাবর সমান ২ অংশে ভাঁজ করো। এবারে ভাঁজ খুললে কাগজের মাঝ বরাবর একটি ভাঁজের দাগ দেখা যাবে। প্রয়োজনে ভাঁজ করার প্রক্রিয়াটি একাধিক বার শিক্ষকের কাছ থেকে বুঝে নাও।



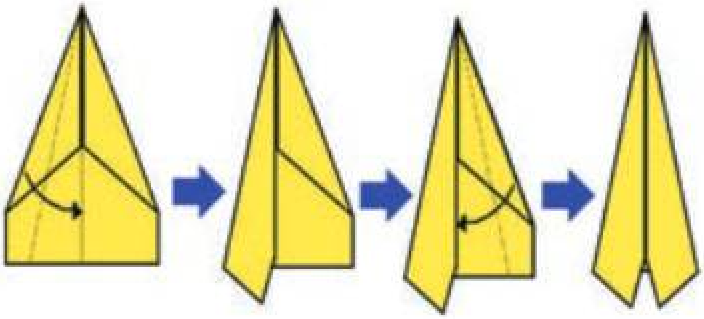
ধাপ ৩: এবার চিত্রের মতো করে কাগজের উপরের বাম পাশের অংশকে মাঝখানের দাগটির সাথে মিলিয়ে ভাঁজ করো। একইভাবে, উপরের ডান পাশের অংশটিও চিত্রের মতো করে ভাঁজ করো।



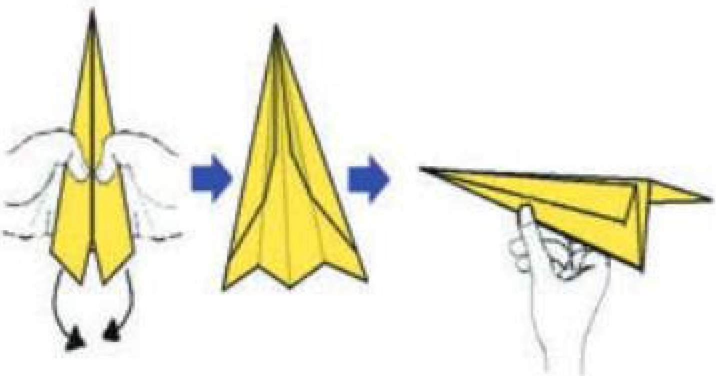
ধাপ ৪: চিত্রের মতো করে আবারো বাম এবং ডান পাশের অংশকে মাঝের দাগ বরাবর মিলিয়ে ভাঁজ করো।



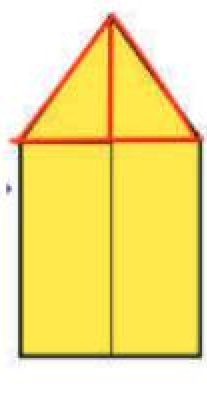
ধাপ ৫: আরও একবার বাম এবং ডান পাশের অংশকে মাঝের দাগ বরাবর ভাঁজ করো। ভাঁজ করার পর কেমন দেখাবে তা চিত্র থেকে মিলিয়ে নাও।



ধাপ ৬: সম্পূর্ণ কাগজটিকে একটু উপরে তুলে দুই হাত দিয়ে ধরো। এবার মাঝ বরাবর নিচের দিকে ভাঁজ করো। তারপর চিত্রের মতো করে হাতের দুই আঙুল দিয়ে মাঝের অংশটুকু ধরো।



ধাপ ৭: আমরা এখন প্লেন ওড়ানোর প্রতিযোগিতা করব। শিক্ষকের নির্দেশনা অনুযায়ী তোমরা একজন করে প্লেন নিয়ে আসবে এবং নির্দিষ্ট জায়গায় দাঁড়িয়ে প্লেন ছুড়বে। সবাই চেষ্টা করবে নিজেদের প্লেন চিহ্নিত জায়গাটির কাছাকাছি রাখতে। যার প্লেন চিহ্নিত স্থানের সবচেয়ে কাছে গিয়ে পড়বে সে বিজয়ী হবে।



এবারে এসো আমরা প্লেনটির বিভিন্ন অংশের জ্যামিতিক আকৃতিগুলো পর্যবেক্ষণ করে দেখি। ধাপ ৩ পর্যবেক্ষণ করো, সেখানে আমরা দুই অংশের শীর্ষকে ভাঁজ করে পাশের আকৃতিটি পেয়েছিলাম। এখান থেকে তোমরা বিভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতি খুঁজে বের করো। তোমাদের জন্য দুটি ত্রিভুজ বের করে দেখানো হলো। তাদের বাহু এবং কোণগুলো পরিমাপ করে নিচের ছকটি পূরণ করো।

	১ম বাহু	২য় বাহু	৩য় বাহু	১ম কোণ	২য় কোণ	৩য় কোণ
বামের ত্রিভুজ						
ডানের ত্রিভুজ						

কাজ: এবারে অন্যান্য জ্যামিতিক আকৃতি বের করো এবং তাদের বাহু এবং কোণগুলো পরিমাপ করে নিচের মতো ছক তৈরি করে পূরণ করো।

এবারে ধাপ ৪ এ তৈরি হওয়া জ্যামিতিক আকৃতির জন্যেও একইরকমভাবে কোণ এবং বাহু পরিমাপ করে নিচের ছকটি পূরণ করো। উদাহরণ হিসেবে চতুর্ভুজের জন্যে ছক তৈরি করে দেওয়া হলো।

	১ম বাহু	২য় বাহু	৩য় বাহু	৪র্থ বাহু	১ম কোণ	২য় কোণ	৩য় কোণ	৪র্থ কোণ
বামের চতুর্ভুজ								
ডানের চতুর্ভুজ								

অন্যান্য জ্যামিতিক আকৃতির জন্যে নমুনা ছক তৈরি করে দেখানো হলো।

এবারে আরেকটি কাগজ নিয়ে প্লেন তৈরির ধাপ ৩ পর্যন্ত আগাও। দুইপাশে উৎপন্ন ত্রিভুজের সমান করে কাগজ কেটে নাও। তারপরে ধাপ ৪ এর মতো করে আরেকটি ভাঁজ করো এবং আবারো দুইপাশে উৎপন্ন ত্রিভুজের আকৃতিকে দুই পাশেই কাগজ কেটে নাও। এবারে এই দুই জোড়া ত্রিভুজেরই একইরকম বাহুগুলোর একটিকে

আরেকটির উপরে বসাও। একটি ত্রিভুজকে আরেকটি ত্রিভুজের উপরে সমানভাবে পতন ঘটাচ্ছি আমরা, তাই আমরা এইভাবে মিলিয়ে দেখাকে বলব সমাপতন (superposition)। একটি ত্রিভুজ আরেকটি ত্রিভুজের উপরে সমাপতিত হয়েছে এক্ষেত্রে। একইভাবে আমরা যেকোনো জ্যামিতিক ক্ষেত্রকেই পরীক্ষা করে দেখতে পারি তারা সমাপতিত হচ্ছে কি না। দুটি ক্ষেত্র যদি সমাপতন করলে মিলে যায়, তাহলে তারা সর্বসম হবে।

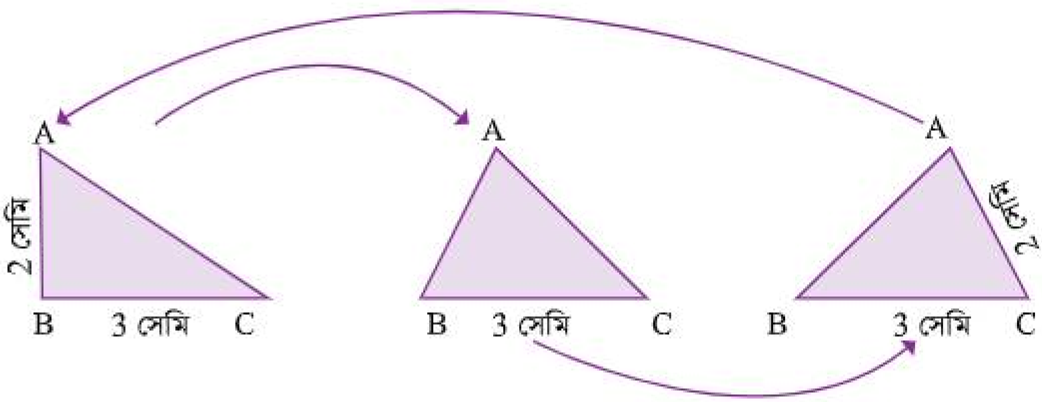
সুবিধাজনক ব্যাপার হলো, দুটি ত্রিভুজ সর্বসম কিনা তা জানতে আমাদের সবসময় ছয়টি উপাদানই জানতে হবে না। আবার আমাদের ত্রিভুজকে কেটে নিয়ে একটিকে আরেকটির উপরে সমাপতন করেও সবসময় পরীক্ষা করতে হবে না। নির্দিষ্ট কিছু অংশ তুলনা করেই আমরা বলতে পারব দুটি ত্রিভুজ সর্বসম কিনা। চলো আমরা দেখি একটি ত্রিভুজ দেওয়া থাকলে সবচেয়ে কম কী পরিমাণ তথ্য ব্যবহার করে আমরা আরেকটি সর্বসম ত্রিভুজ আঁকতে পারি। আমরা আসলে এটিকে এভাবেও বলতে পারি যে, সবচেয়ে কম কী পরিমাণ তথ্য দেওয়া থাকলে, আমরা একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজই পাব।

আগের শ্রেণিতে তোমরা চাঁদা, রুলার এবং কম্পাস ব্যবহার করতে শিখেছ নিশ্চয়ই। আমরা এবারে হাতে কলমে বেশ কিছু ত্রিভুজ নিজেরা এঁকে দেখব কখন কোন তথ্য ব্যবহার করে আমরা একটিই ত্রিভুজ পেতে পারি।

কাজ: নিচের তথ্যগুলো ব্যবহার করে তোমরা একটি ত্রিভুজ ABC আঁকো, চাঁদা এবং রুলার ব্যবহার করে।

১। ত্রিভুজের BC বাহু 3 সেমি লম্বা।

২। A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপরে আঁকা লম্বের দৈর্ঘ্য 2 সেমি।



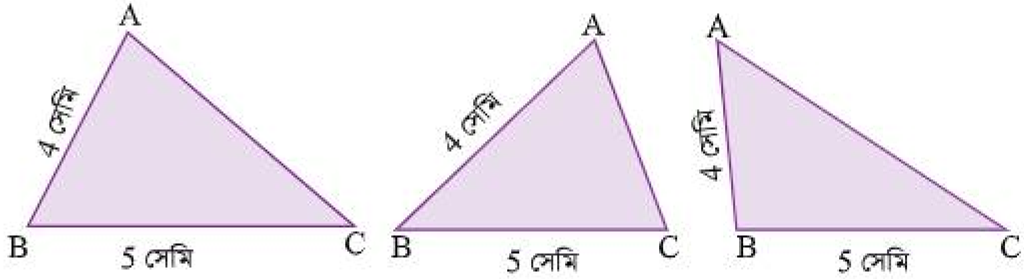
খেয়াল করে দেখো, একেকটি লম্বের অবস্থান একেক ধরনের হবার ফলে একেকটি ত্রিভুজ দেখতে একেক রকম হয়েছে। তোমাদের ক্লাসের সবাই হয়ত আলাদা আলাদা ত্রিভুজ পাবে। অর্থাৎ কেবলমাত্র এই দুটি তথ্য দিয়ে আমরা একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকতে পারছি না।

এবারে ABC ত্রিভুজের জন্য ভিন্ন দুটি তথ্য দিয়ে চেষ্টা করে দেখা যাক।

১। AB বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সেমি।

২। BC বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সেমি।

নিচে তিনটি সম্ভাব্য ত্রিভুজ এঁকে দেখানো হলো। তোমরা আরও ভিন্ন ভিন্ন ত্রিভুজ পেতে পারো।



এবারেও তোমরা লক্ষ করলে দেখতে পাবে যে একেকজন একেক ধরনের ত্রিভুজ এঁকেছ।

চলো আমরা ভেবে দেখি যে রুলার, কম্পাস আর চাঁদা ব্যবহার করে আমরা কীভাবে একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ আঁকতে পারি।

আমরা BC বাহুর সমান করে একটি রেখা আঁকতে পারি শুরুতে।

খেয়াল করে দেখো যে, আমরা এখন শুধু A বিন্দুটির অবস্থান বের করলেই ত্রিভুজটি পেয়ে যাবো।

এবারে চলো আমরা ভেবে দেখি যে A বিন্দুটির অবস্থান জানতে কী কী তথ্য আমরা জানি।

ক. কোন কোন বাহু আর কোণ আমরা ব্যবহার করব?

খ. কতগুলো বাহু আর কোণ আমরা ব্যবহার করব?

লক্ষ করে দেখো, উপরের কাজগুলোতে আমাদের কোনো কোণের পরিমাপ জানা ছিল না। প্রথমটিতে আমরা শুধু একটি বাহু এবং অপর বিন্দু থেকে লম্ব দূরত্ব জানতাম এবং দ্বিতীয়টিতে আমরা শুধু দুটি বাহুর পরিমাপ জানতাম।

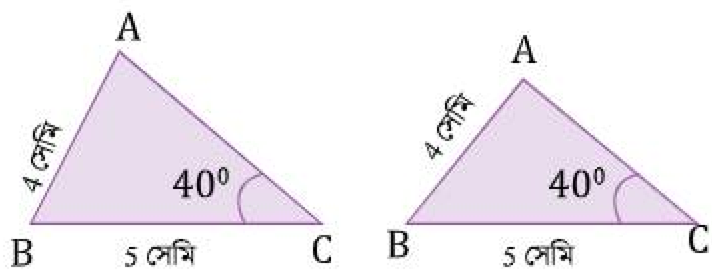
কাজেই আমরা ABC ত্রিভুজের জন্য তিনটি তথ্য নিয়ে চেষ্টা করে দেখি চলো।

১। AB বাহু 4 সেমি।

২। BC বাহু 5 সেমি।

৩। কোণ BCA দেওয়া আছে 40^0

এক্ষেত্রে প্রথমের 5 সেমি বাহুর C বিন্দুতে 40^0 কোণ এঁকে নাও। তারপর রুলার এর শূন্য বিন্দুটি B বিন্দুতে বসিয়ে দেখো 4 সেমি এর সাথে BC ছাড়া অপর বাহুটি কখন মিলে যায়। সেটিই হবে আমাদের কাঙ্ক্ষিত A বিন্দু।

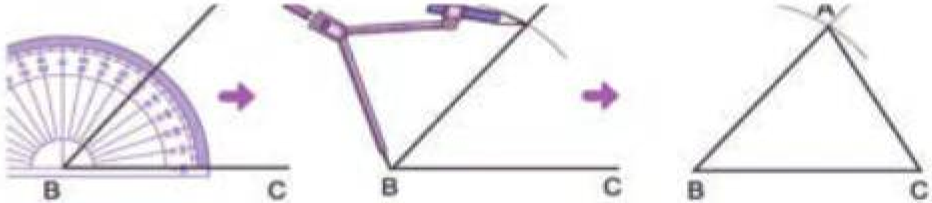


খেয়াল করে দেখো যে এবারেও আমরা একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ পাইনি, দুটি ভিন্ন ত্রিভুজ পেয়েছি। তার মানে সবসময় তিনটি তথ্য জানা থাকলেই আমরা সর্বসম ত্রিভুজ আঁকতে পারছি না।

এবারে চলো তিনটি দলে ভাগ হয়ে নিচের তথ্যগুলি দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ আঁকা যায় কি না তা চেষ্টা করে দেখি।

দলগত কাজ: ১

দুটি বাহু BC = 5 সেমি, AB = 4 সেমি এবং তাদের মধ্যবর্তী কোণ ABC= 50^0 নিয়ে দেখি। দলের সবাই BC = 5 সেমি, আঁকো। তারপর চাঁদার সাহায্যে B বিন্দুতে কোণ ABC = 50^0 আঁকো। এরপর রুলার অথবা কম্পাসের সাহায্যে B বিন্দু থেকে BC বাদে অন্য বাহুর উপর 4 সেমি অংশ পরে একটি দাগ দাও। সেই বিন্দুটি হবে A, অর্থাৎ AB = 4 সেমি পেয়ে যাবে।



এবারে A এবং C বিন্দু যোগ করে সবাই AC বাহু, কোণ BAC এবং কোণ BCA পরিমাপ করে আসন্ন মানগুলো নিজের খাতায় লিখো। তারপর দলের বাকিদের সাথে মিলিয়ে দেখো ছবি এবং পরিমাপকৃত আসন্ন মান। দেখবে যে মানগুলো মিলে গেছে। অর্থাৎ সবার ত্রিভুজ সর্বসম।

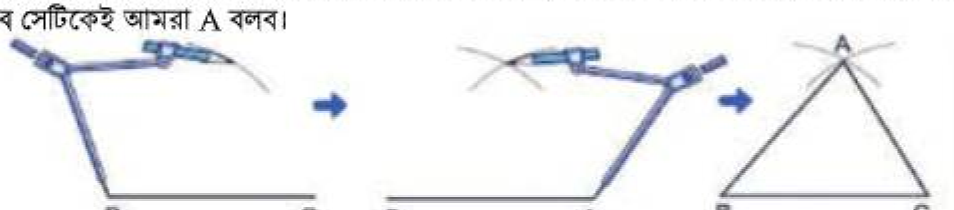
আমরা একটি গুরুত্বপূর্ণ তথ্য এখান থেকে জানতে পারি দুটি ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্পর্কে।

> দুটি ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহু এবং তাদের মধবর্তী কোণ সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।

অর্থাৎ দুটি বাহু এবং মাঝের কোণ জানা থাকলে আমরা নির্দিষ্ট করে একটি ত্রিভুজ আঁকতে পারব।

দলগত কাজ: ২

তিনটি বাহু BC=7 সেমি, AB= 4 সেমি এবং CA = 6 সেমি নিয়ে দেখি। দলের সবাই BC = 7 সেমি আঁকো। তারপর কম্পাসের সাহায্যে B বিন্দু থেকে 4 সেমি সমান করে একটি ছোট বৃত্তের অংশ আঁক। তারপর অন্যপাশে C বিন্দু থেকে 6 সেমি সমান করে আরেকটি বৃত্তের অংশ আঁকো। তারা দুইজন যে বিন্দুতে ছেদ করবে সেটিকেই আমরা A বলব।



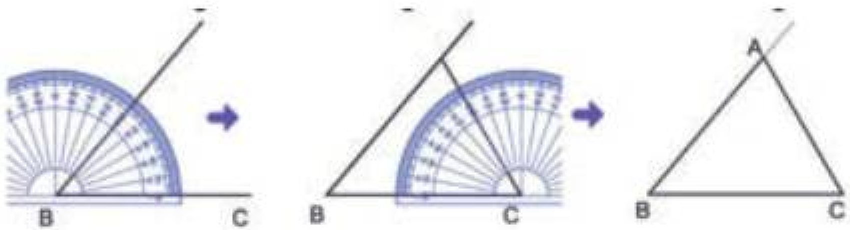
এবারে A এবং C বিন্দু যোগ করো আর A এবং B বিন্দু যোগ করো। বাহুগুলোর পরিমাপ অনুযায়ী যেহেতু এঁকেছ, সবাই কোণ ABC, কোণ BAC এবং কোণ BCA পরিমাপ করে আসন্ন মানগুলো নিজের খাতায় লেখো। তারপর দলের বাকিদের সাথে মিলিয়ে দেখো ছবি এবং পরিমাপকৃত আসন্ন মান। দেখবে যে মানগুলো মিলে গেছে। অর্থাৎ সবার ত্রিভুজ সর্বসম।

আমরা দুটি ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্পর্কে দ্বিতীয় শর্তে চলে এসেছি।

> দুটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুই সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।

দলগত কাজ: ২

দুটি কোণ $ABC=60^0$, $ACB=70^0$ এবং তাদের মধ্যবর্তী বাহু $BC = 6$ সেমি নিয়ে দেখি। দলের সবাই $BC = 6$ সেমি, আঁকো। তারপর চাঁদার সাহায্যে B বিন্দুতে কোণ $ABC = 60^0$ এবং C বিন্দুতে কোণ ACB $= 70^0$ আঁকো। দুটি কোণেরই BC বাদে বাকি যে বাহু থাকবে তারা ছবির মতো একটি বিন্দুতে ছেদ করবে। সেই বিন্দুটি হবে A।



এবারে সবাই AC বাহু, AB বাহু এবং কোণ BAC পরিমাপ করে আসন্ন মানগুলো নিজের খাতায় লেখো। তারপর দলের বাকিদের সাথে মিলিয়ে দেখো ছবি এবং পরিমাপকৃত আসন্ন মান। দেখবে যে মানগুলো মিলে গেছে। অর্থাৎ সবার ত্রিভুজ সর্বসম।

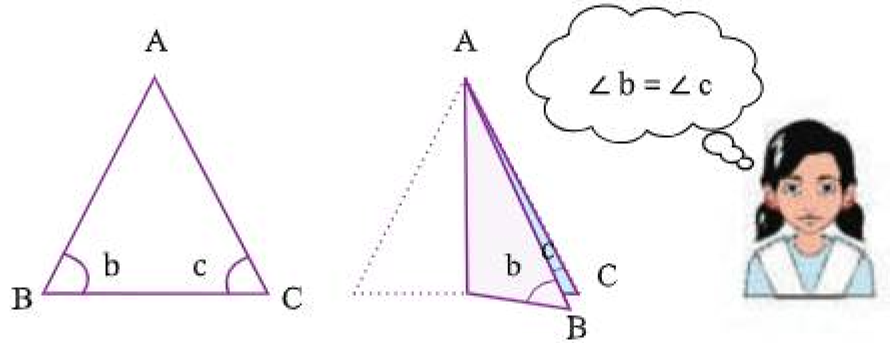
আমরা তৃতীয় একটি গুরুত্বপূর্ণ তথ্য এখান থেকে জানতে পারি দুটি ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্পর্কে।

> দুটি ত্রিভুজের যেকোনো দুই কোণ এবং কোণসংলগ্ন বাহু সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।

অর্থাৎ দুটি কোণ এবং তাদের মাঝের বাহুটিকে জানা থাকলে আমরা নির্দিষ্ট করে একটি ত্রিভুজ আঁকতে পারব।

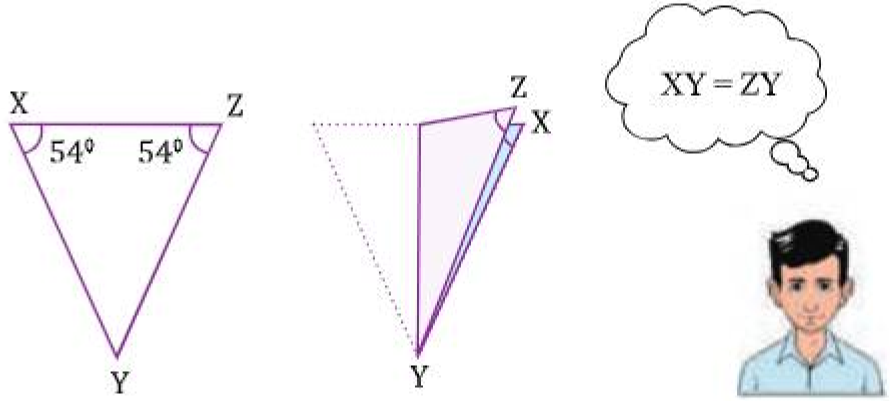
চলো আমরা চিন্তা করে দেখি, সর্বসমতার এই বৈশিষ্ট্যগুলো যুক্তিতে ব্যবহার করে আমরা ত্রিভুজের অন্য কোনো বিশেষ বৈশিষ্ট্য বের করতে পারি কি না। দুটি ত্রিভুজ সর্বসম কি না বের করো। ত্রিভুজের বাহু ও কোণ নিয়ে কিছু সম্পর্ক দেওয়া থাকলে অন্য কোনো সম্পর্ক পাওয়া যাবে কি না তা বের করতে আমরা চেষ্টা করব।

১। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজকে নিচের ছবির মতো করে ভাঁজ করো। কী দেখতে পাচ্ছো?

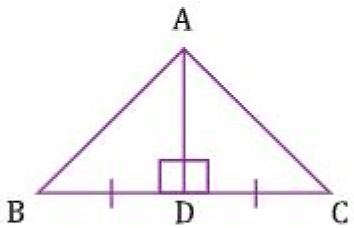


২। নিচের XYZ ত্রিভুজের দুটি কোন সমান। ত্রিভুজটি কি সমদ্বিবাহু হবে?

উদাহরণ: একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু পরস্পর সমান হলে তাদের বিপরীত কোণগুলোও পরস্পর সমান হবে।



সমাধান: এখানে আমরা চেষ্টা করব ত্রিভুজকে দুটি ত্রিভুজে ভাগ করে নিয়ে সর্বসম দেখাতে। তাহলেই কোণ দুটিকে সমান দেখানো আমাদের জন্য সহজ হবে। ধরে নিচ্ছি চিত্রের মতো একটি ত্রিভুজ ABC দেওয়া আছে যার AB ও AC বাহুদ্বয় পরস্পর সমান। এবারে আমরা A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপরে মধ্যমা অঙ্কন করি যেটি BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।



এবারে চলো আমরা ত্রিভুজ ABD এবং ত্রিভুজ ACD এর তুলনা করে দেখি। প্রশ্নের শর্তানুসারে বাহু AB এবং বাহু AC পরস্পর সমান। আরেকদিকে খেয়াল করো, AD যেহেতু মধ্যমা, BD = DC। সবশেষে আমরা দেখতে পাচ্ছি যে AD রেখাংশটি দুটি ত্রিভুজেই আছে।

যেহেতু দুটি ত্রিভুজ ABD এবং ACD তে তিনটি বাহুই পরস্পর সমান, আমরা তাদেরকে সর্বসম বলতে পারি। কাজেই কোণ ACB ও কোণ ABC অবশ্যই পরস্পর সমান হবে।

অতএব আমরা দেখলাম যে একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু সমান হলে তাদের বিপরীত কোণগুলোও পরস্পর সমান হবে। ত্রিভুজের দুই বাহু সমান হলে আমরা তাকে সমদ্বিবাহু (isosceles) ত্রিভুজ বলি।

সদৃশতা (similarity)

অধ্যায়ের শুরুতে আমরা বিভিন্ন জিনিসের তুলনা করেছি। সেখানে কিছু জিনিসের আকৃতি একই হলেও তাদের আকার একইরকম ছিল না। এমন বস্তুকে আমরা বলি সদৃশ বস্তু। চলো আমরা একটি দলগত কাজের মাধ্যমে দেখি জ্যামিতিক আকৃতি কখন সদৃশ হয়।

দলগত কাজ

দুটি ভিন্ন মাপের লাঠি, একটি স্কেল, লম্বা সুতা এবং চাঁদা নিয়ে সূর্যের আলো পড়েছে এমন একটি স্থানে ক্লাসের সবাই যাই। লাঠিগুলোর দৈর্ঘ্য শুরুতে পরিমাপ করে নিই। তারপর সূর্যের আলোতে লম্বা করে দুইজন সেই লাঠিগুলো ধরে রাখি। লক্ষ করি যে, মাটিতে লাঠিগুলোর ছায়া পড়েছে। এবারে সেই ছায়ার দৈর্ঘ্য মেপে নিই। লাঠির উপরের প্রান্ত এবং ছায়ার শেষ প্রান্ত বরাবর সুতা টানটান করে ধরি। তারপর দুটি লাঠির জন্য সুতার দৈর্ঘ্যও মেপে নিই।

এবারে লাঠির দৈর্ঘ্য, ছায়ার দৈর্ঘ্য এবং সুতার দৈর্ঘ্য দিয়ে নিচের ছকটি পূরণ করি।

	লাঠির দৈর্ঘ্য	ছায়ার দৈর্ঘ্য	সুতার দৈর্ঘ্য
১।			
২।			
দৈর্ঘ্যের অনুপাত			

তোমরা এখান থেকে বুঝতে পারছ যে ছায়ার অনুপাত সবসময় লাঠির অনুপাতের সমান হবে। অর্থাৎ আমরা যদি ছোট কোনো বস্তুর উচ্চতা এবং তার ছায়া পরিমাপ করতে পারি, তাহলে বড় বস্তুর ছায়া জেনে আমরা সেই বস্তুটির খাড়া অবস্থায় উচ্চতা বের করতে পারব। জ্যামিতিক যে বৈশিষ্ট্যের জন্যে আমরা এটি করতে পারছি তার নাম হচ্ছে সদৃশতা।

একক কাজ

একটি জানা দৈর্ঘ্যের লাঠি নিয়ে তার ছায়া পরিমাপ করো। একই সময়ে তোমার বিদ্যালয়ের পতাকা দণ্ডের ছায়া পরিমাপ করো। আমরা তো এখন জানি যে লাঠির অনুপাত ও ছায়ার অনুপাত সমান হবে। এই তথ্য ব্যবহার করে পতাকাদণ্ডের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো।

আমাদের সবার কাছে জ্যামিতি বক্স আছে তাই না? বক্স থেকে নিচের আকৃতির ত্রিকোণীটি বের করব।

তোমরা একটি ত্রিকোণীর ভিতর দুটি ত্রিভুজ দেখতে পাচ্ছো তাই না। ত্রিভুজ দুটি দেখতে কী একই রকম?দেখতে এক রকম হলেও একটি বড় আর একটি ছোট। এবার জ্যামিতি বক্সের চাঁদার সাহায্যে ত্রিভুজ দুটির কোণ মেপে নিচের ছকটি পূরণ করো:

ত্রিভুজের সাইজ	১ম কোণ	২য় কোণ	৩য় কোণ
বড়			
ছোট			

ছকটি পূরণ করার পর দেখতে পাবে আলাদা আলাদাভাবে বড় ত্রিভুজের তিনটি কোণ ছোট ত্রিভুজের অনুরূপ তিনটি কোণের সমান। তাহলে আমরা বলতে পারি, ত্রিভুজ দুটি একই রকম দেখার কারণ দুটি ত্রিভুজের তিনটি কোণ পরস্পর সমান।

একক কাজ

রুলারের সাহায্যে ত্রিভুজ দুটির বাহুগুলো পরিমাপ করে নিচের ছকটি পূরণ করো:

বড় ত্রিভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য	ছোট ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুর দৈর্ঘ্য	বড় বাহুর দৈর্ঘ্য ÷ ছোট বাহুর দৈর্ঘ্য	ফলাফল

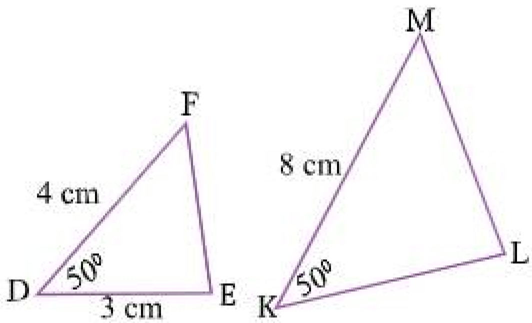
ছকের ফলাফল থেকে আমরা কী সিদ্ধান্তে আসতে পারি নিচে লিখি

আমরা দেখলাম যে দুটি ত্রিভুজ সদৃশ হলে তাদের অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হয়। বাহুগুলোর অনুপাত যদি ১ হয় তাহলে সদৃশ চিত্রগুলো সব দিক থেকেই সমান হয়ে যায়। অর্থাৎ তারা সর্বসম হয়ে যায়। কাজেই আমরা বলতে পারি যে সর্বসমতা হচ্ছে সদৃশতার বিশেষ রূপ।

এবারে চলো আমরা দেখি সদৃশতা জানার জন্য কি আমাদের সব কয়টি কোণ এবং বাহুই জানা লাগবে নাকি অল্প কিছু জানলেই হবে। দলে ভাগ হয়ে দলের প্রত্যেকে নিচের কাজগুলো করি চলো।

দলগত কাজ: ১

একটি ত্রিভুজ DEF আঁক, যার DE = 3cm, DF = 4cm ও অন্তর্ভুক্ত কোণ EDF = 50^0। আরেকটি ত্রিভুজ KLM আঁকো যার KL = 6cm, KM = 8cm ও অন্তর্ভুক্ত কোণ LKM =50^0।



ত্রিভুজের একইরকম বাহুগুলোর অনুপাত নাও এবং কোণগুলো পরিমাপ করে দেখো। ত্রিভুজ দুটি কি সদৃশ? আমরা এখান থেকে ত্রিভুজের সদৃশতার প্রথম শর্তটি পেয়ে যাচ্ছি। তা হচ্ছে

যদি একটি ত্রিভুজের দুই বাহু অপর একটি ত্রিভুজের দুই বাহুর সমানুপাতিক হয় এবং তাদের মধ্যেকার কোণগুলো যদি পরস্পর সমান হয়, তাহলে ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হবে।

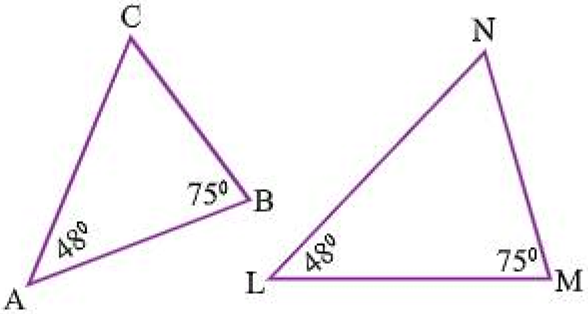
ত্রিভুজের একইরকম বাহুগুলোর অনুপাত নাও এবং কোণগুলো পরিমাপ করে দেখো। ত্রিভুজ দুটি কি সদৃশ?

এবারে আমরা ত্রিভুজ সদৃশ হবার দ্বিতীয় শর্তটি বলতে পারি। সেটি হলো,

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমানুপাতিক হয়, তাহলে ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হবে।

দলগত কাজ: ২

ABC ত্রিভুজটি আঁকো যার কোণ $BAC = 48^0$, কোণ $ABC = 75^0$। এবার LMN ত্রিভুজটি আঁকো, যার কোণ $MLN = 48^0$, কোণ $LMN = 75^0$।



ত্রিভুজের একইরকম বাহুগুলোর অনুপাত নাও এবং কোণগুলো পরিমাপ করে দেখো। ত্রিভুজ দুটি কি সদৃশ?

ফলাফল থেকে আমরা সদৃশতার তৃতীয় শর্তে পৌঁছে যাচ্ছি, যেটি হলো:

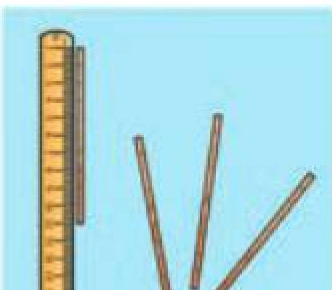
> যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ অপর একটি ত্রিভুজের দুটি কোণের সমান হয়, তাহলে ত্রিভুজ দুটি সদৃশ হবে।

চারকাঠির খেলা

এবারে আমরা চারটি কাঠির মাধ্যমে বিভিন্ন প্রকারের চতুর্ভুজ তৈরি করব।

ধাপ-১: চারটি কাঠিতে স্কেলের সাহায্যে 1 সেমি পরপর দাগ দাও। কাঠি হিসেবে জুস খাবার লম্বা পাইপও ব্যবহার করতে পারো। (চিত্র-১ দ্রষ্টব্য)

চারটি কাঠির মাঝে দুটির একপ্রান্ত কাপড় সেলাই করার সুতা দিয়ে পেঁচিয়ে ছবির মতো করে যুক্ত করো। (চিত্র-২ দ্রষ্টব্য)

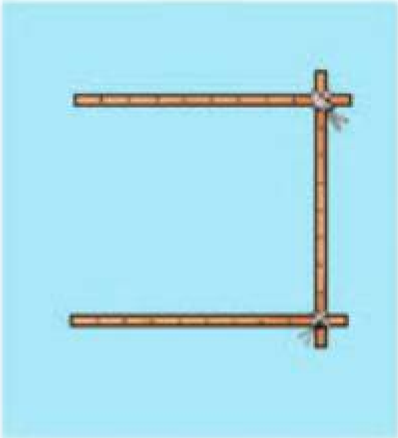


চিত্র-১

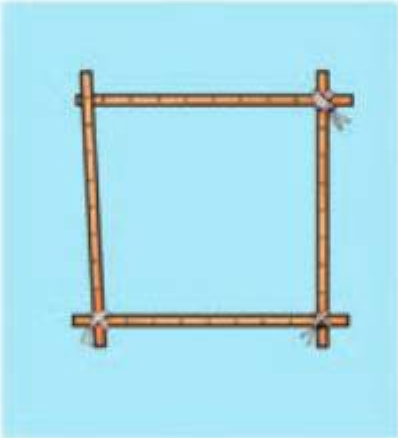
চিত্র-২

ধাপ ২: এরপর অপর একটি কাঠিকে ঐ কাঠি দুটির যেকোনোও একটির সাথে সুতার সাহায্যে যুক্ত করতে হবে। (চিত্র-৩ দ্রষ্টব্য)

এবার শেষ কাঠিটিকে দুইপ্রান্তে একইভাবে এক প্রান্ত উন্মুক্ত কাঠির সাথে বাঁধতে হবে। (চিত্র-৪ দ্রষ্টব্য)



চিত্র-৩



চিত্র-৪

ধাপ ৩: এবারে আমরা চারটি কাঠি দিয়ে বিভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতি তৈরির খেলা খেলব।

১। 3 সেমি দৈর্ঘ্যের চারটি কাঠি নিয়ে একটি বর্গ আকৃতি তৈরি করো এবং খাতায় বসিয়ে বর্ণনা করো।

২। এইবার এই বর্গের যেকোনোও একটি বাহুকে অন্য একটি বাহুর সাথে চাদার সাহায্যে 60 ডিগ্রি কোণে রেখে তুলে ধরো। এটি 60 ডিগ্রি কোণ এবং 3 সেমি বাহু বিশিষ্ট একটি রম্বস। আকৃতিটি খাতায় বসিয়ে রম্বসটি আঁকো।

৩। একইভাবে 3 সেমি ও 4 সেমি বাহুবিশিষ্ট একটি আয়ত বানিয়ে ক্লাসে তুলে ধরে শিক্ষককে দেখাও। আকৃতিটি খাতায় বসিয়ে আয়তটি আঁকো।

৪। একইভাবে এবার 3 সেমি ও 4 সেমি বাহু এবং 60 ডিগ্রি কোণ বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক বানাও। সেটি তুলে ধরে দেখিয়ে তারপর খাতায় এঁকে নাও।

চারটি বাহু এবং একটি কোণ দেওয়া থাকলে একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকতে পারছি আমরা।

অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত এবং অনুরূপ কোণগুলো সমান হলে যেমন আমরা দুটি ত্রিভুজকে সদৃশ বলেছি, একইভাবে দুটি চতুর্ভুজ সদৃশ হবার জন্য অনুরূপ কোণগুলো সমান এবং অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হতে হবে।

এতক্ষণ আমরা বিশেষায়িত কিছু চতুর্ভুজ তৈরি করলাম। এবারে আমরা বাহুর দৈর্ঘ্য ও কোণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজ তৈরি করার চেষ্টা করে দেখি -

১। যেকোনো একটি চতুর্ভুজ তৈরি করো যার চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 2, 4, 5 ও 6 সেমি। সেটিকে ক্লাসে তুলে ধরো। সবার চতুর্ভুজ কি দেখতে একইরকম হয়েছে? তোমার তৈরি করা চতুর্ভুজটির একটি প্রতিচ্ছবি খাতায় আঁকো।

২। একটি চতুর্ভুজ WXYZ তৈরি করো যেখানে WX = 5 সেমি, XY = 4 সেমি, YZ = 3 সেমি, ZW = 5 সেমি। ১ম খেলায় আমরা নাম না দিলেও দ্বিতীয় খেলায় শীর্ষগুলোর নাম দিয়ে বাহু নির্দিষ্ট করে দিয়েছি। এবারে তৈরি করা চতুর্ভুজগুলো তুলে ধরে দেখো সবার চতুর্ভুজ দেখতে একইরকম হয়েছে কি না। তোমার নিজের তৈরি করা চতুর্ভুজটি খাতায় এঁকে নাও।

৩। KLMN চতুর্ভুজটি তৈরি করো যেখানে কোণ $K = 45^0$, KL = 3 সেমি, LM = 4 সেমি, MN = 2 সেমি, NK = 3 সেমি। এবারে তুলে ধরে মিলিয়ে দেখো সবার চতুর্ভুজ একই হয়েছে নাকি।

লক্ষ করো শুধুমাত্র ৩য় খেলাতেই সবার তৈরি চতুর্ভুজ একইরকম হয়েছে। এই ধাপের তিনটি খেলা থেকে আমরা চতুর্ভুজ তৈরির ব্যাপারে কী সিদ্ধান্তে আসতে পারি?

তবে দুটি চতুর্ভুজের সদৃশতা যাচাই করতে আমাদের সব কয়টি বাহু এবং কোণ পরিমাপ করতে হবে না। আমরা যেহেতু চারটি বাহু এবং একটি কোণ দেওয়া থাকলেই একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকতে পেরেছি তেমনভাবে চারটি অনুরূপ বাহুর অনুপাত সমান হলে এবং একটি কোণ দেওয়া থাকলে বাকি কোণগুলোও সমান হবার কথা। চলো আমরা এমন দুটি চতুর্ভুজ এঁকে তা যাচাই করে দেখি।

দলগত কাজ

৩-৪ জনের দল গঠন করে নিচের কাজটি করো।

ধাপ ১: চার কাঠির সাহায্যে ABCD চতুর্ভুজ তৈরি করে খাতায় আঁকো যেখানে কোণ $A = 50^0$, AB = 3 সেমি, BC = 3.5 সেমি, CD = 2 সেমি, AD = 2.5 সেমি।

ধাপ ২: উপরে বর্ণিত উপায়ে আরও একটি চতুর্ভুজ EFGH আঁকো যেখানে কোণ $E = 50^0$, EF = ৬ সেমি, FG = ৭ সেমি, GH = ৪ সেমি, EH = ৫ সেমি।

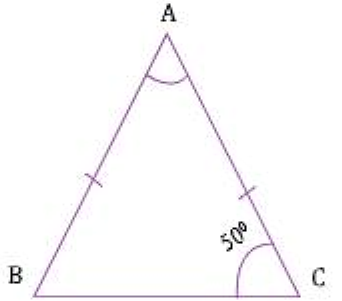
ধাপ ৩: বাকি কোণগুলো পরিমাপ করে দেখো, অনুরূপ কোণগুলো কি সমান হচ্ছে?

ধাপ ৪: তাদের চিত্র দেখে তুমি কি তাদেরকে সদৃশ বলতে পারো?

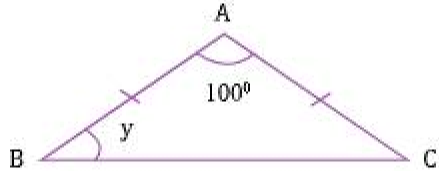
আমরা বলতে পারি যে দুটি চতুর্ভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক এবং একটি অনুরূপ কোণ সমান হলে চতুর্ভুজ দুটি সদৃশ।

অনুশীলনী

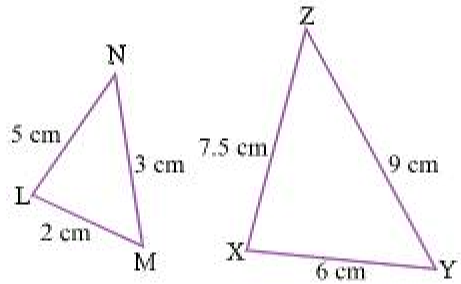
১. চিত্রে ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB=AC। $\angle A$ চিহ্নিত কোণের পরিমাপ কত হবে?



২. চিত্রে ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ যার AB=AC।
y চিহ্নিত কোণের পরিমাপ কত হবে?



৩. একটি ত্রিভুজ LMN আঁকো, যার LM = 2cm, MN = 3cm এবং LN = 2.5cm। আরেকটি ত্রিভুজ XYZ আঁকো যার YZ = 9 cm এবং XZ = 7.5 cm।

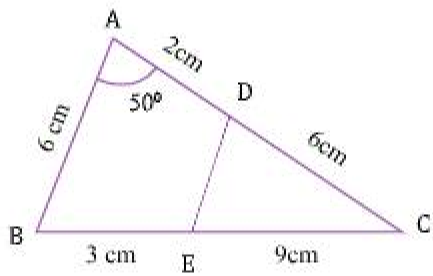


৪. প্রদত্ত চিত্রে AB ও DE পরস্পর সমান্তরাল। চিত্রে বর্ণিত তথ্য ব্যবহার করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

(ক) কোণ ADE এর মান কত?

(খ) চিত্রে দুটি সদৃশ ত্রিভুজ আছে, তাদেরকে খুঁজে বের করো। কেন তারা সদৃশ হবে?

(গ) সদৃশ ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে DE এর দৈর্ঘ্য বের করো।



বাইনারি সংখ্যার গল্প

অনুমানের খেলা (Guessing Game)

এসো একটি অনুমানের খেলা খেলি। খেলাটি হলো প্রিয় বই, প্রিয় বিখ্যাত ব্যক্তি বা প্রিয় সিনেমার নাম অনুমান করতে হবে। নিয়মটা বলে দিই। লটারি করে ক্লাসের সামনে একজন যাবে এবং প্রিয় কোনো বই, বিখ্যাত ব্যক্তি বা সিনেমার নাম মনে করে যাবে। সহপাঠীরা সবাই প্রশ্ন করে তার থেকে সঠিক উত্তরটি বের করে নিয়ে আসার চেষ্টা করবে। কিন্তু কয়েকটি শর্ত আছে। প্রশ্নগুলোর কোনোটির উত্তরই সে মুখে বা ইশারায় বলতে পারবে না, তার হাতে একটি টর্চ বা লাইটের সুইচ থাকবে, তাকে উত্তর দিতে হবে সেই আলো জ্বালিয়ে অথবা না জ্বালিয়ে। প্রশ্নের উত্তর যদি হ্যাঁ হয় তাহলে একবার আলো জ্বালাবে। যদি না হয় তবে আলো জ্বালাবে না।

মনে করো, সালমা মনে মনে ভেবে নিলো জাতীয় কবি কাজী নজরুল ইসলামের নাম। এবার সবাই কীভাবে সালমাকে প্রশ্ন করছে দেখো।

এটা কি কোনো বই? সালমা: আলো জ্বালাবে না। এটা কি কোনো ব্যক্তি? সালমা: আলো জ্বালাবে। তিনি কি কোনো লেখক? সালমা: আলো জ্বালাবে। তিনি কি এখনো বেঁচে আছেন? সালমা: আলো জ্বালাবে না। তিনি কি কবিতা লিখতেন? সালমা: আলো জ্বালাবে।	তাঁর জন্ম কি বরিশালে? সালমা: আলো জ্বালাবে না। তাঁর জন্ম কি বর্তমান পশ্চিম বঙ্গে? সালমা: আলো জ্বালাবে। তিনি কি নারী? সালমা: আলো জ্বালাবে না। তিনি কি বিশ্বকবি রবীন্দ্রনাথ ঠাকুর? সালমা: আলো জ্বালাবে না। তাঁর মৃত্যু কি ঢাকায় হয়েছিলো? সালমা: আলো জ্বালাবে। তিনি কি বিদ্রোহী কবি কাজী নজরুল ইসলাম? সালমা: আলো জ্বালাবে।

কেমন হলো খেলাটি?

এবার ভেবে দেখো আলো-জ্বালানো ছাড়াও আরও কী কী উপায়ে তুমি হ্যাঁ অথবা না বুঝাতে পারো। সেই উপায়গুলো দিয়ে নিচের সারণিটি পূরণ করো:

মাথা বা হাত ব্যবহার করে ইশারার মাধ্যমে
একপাশে 'হ্যাঁ' এবং অন্যপাশে 'না' লেখা একটি কাগজ ব্যবহার করে

আচ্ছা, খেয়াল করেছ যে খেলাটির মাঝে তোমরা একটি সংকেত ব্যবহার করেছ? হ্যাঁ বলতে হলে আলো জ্বালিয়েছ আর না হলে আলো বন্ধ রেখেছ। এমন সংকেতের মাধ্যমে কেবল হ্যাঁ আর না ব্যবহার করে বেশ কঠিন একটি সিদ্ধান্ত তোমরা নিতে পেরেছ। আরেকটু মনোযোগ দিয়ে খেয়াল করে দেখো, তোমাদের লাইট বাল্ব বা টর্চের বাল্বে সুইচটিপে বিদ্যুতের উপস্থিতি নিশ্চিত করলে আলো জ্বলে। সুতরাং, বিদ্যুতের উপস্থিতি মানে হ্যাঁ, আর অনুপস্থিতি মানে না। এখন আমরা যদি গাণিতিকভাবে হ্যাঁ হলে ১ আর না হলে ০ ধরে নিই, তাহলে বিদ্যুতের উপস্থিতি মানে ১, আর অনুপস্থিতি মানে ০ দাঁড়ায়। সেই অর্থে তোমরা কেবল ১ বা ০ ব্যবহার করে করে সঠিক প্রশ্নের উত্তর বের করে নিয়ে আসতে পেরেছ এবং একটি সিদ্ধান্তে উপনীত হয়েছ। অনেকটা সময় হয়ত লেগেছে কিন্তু হ্যাঁ অথবা না ছাড়া আর কিছুই কিন্তু জানার বা বোঝার প্রয়োজন হয় নি।

এবার তোমাদের একটা মজার ব্যাপার বলি। তোমাদের চারপাশে কম্পিউটার, টেলিভিশন, মোবাইল ফোন, ক্যালকুলেটর এরকম যত জিনিস দেখছ এরা সবাই আসলে এই অনুমানের খেলার মতো করেই কাজ করে। তারমানে শুধুমাত্র হ্যাঁ আর না অর্থাৎ ১ আর ০ ব্যবহার করেই সব কাজ করে। অবাক ব্যাপার তাই না। এই যন্ত্রগুলি আসলে বিদ্যুতের উপস্থিতি বা অনুপস্থিতির সংকেত ব্যবহার করেই আমরা কম্পিউটারে ভিডিও গেইম খেলি, সিনেমা দেখি, লেখালেখি করি। কিন্তু সেই সংকেত তখন কেবল একটি হ্যাঁ বা একটি না এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে না। অনেকগুলো হ্যাঁ এবং না, অর্থাৎ ১ আর ০ মিলিয়ে বড় একটি সংকেত তৈরি করা হয়। কিন্তু তার মাঝে এই দুটি ছাড়া অন্য আর কোনো সংকেত থাকে না।

তাহলে, যন্ত্রের গণনা পদ্ধতিতে ☐ এবং ☐ এই দুটি সংকেত রয়েছে।

আচ্ছা, আমরা সাধারণত গণনা করতে বা সংখ্যা লিখতে কয়টি সংকেত বা অঙ্ক ব্যবহার করি সেগুলো লিখে নিচের সারণিটি পূরণ করো:

আমরা যেমন গণিত বা গণনা করতে গিয়ে ০ থেকে ৯ পর্যন্ত দশটি অঙ্ক দিয়ে তৈরি দশভিত্তিক বা দশমিক সংখ্যাপদ্ধতি ব্যবহার করি। কম্পিউটার বা ইলেক্ট্রনিক যন্ত্রের ক্ষেত্রে এমন নয়। কিন্তু কী আর করা, বেচারার সব কাজ ঐ ০ আর ১ দিয়েই করতে হয়।

দশমিক পদ্ধতিতে আমরা ০-৯ পর্যন্ত চিহ্নগুলোকে অঙ্ক বা digit বলি। তাই বাইনারি'র ০ এবং ১-কে বাইনারি অঙ্ক বা Binary Digit বলা হয়। বার বার Binary Digit না বলে Binary হতে Bi আর Digit-এর t মিলিয়ে সংক্ষেপে বলা হয় Bit. বাংলায় আমরা একে বিট লিখি।

দুই-ভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতিতে ০ আর ১ ছাড়া আর কোনো অঙ্ক নেই। এমন কিন্তু আরো অনেক সংখ্যা পদ্ধতি আছে। তুমি কি ব্রাজিলের পিরাহা উপজাতির কথা শুনেছ? তাদের বসবাস হলো আমাজন বনের গহীনে, সভ্যতার সাথে ওদের সম্পর্ক নেই মোটেই। জ্ঞান-বিজ্ঞান তো দূরের কথা, তাদের বর্ণমালা, ভাষার শব্দ এবং গণনাপদ্ধতিও খুবই সীমিত। তারা ১ এবং ২ এর বেশি গণনা করতে পারে না। ২-এর বেশি যে কোনো সংখ্যাকে তারা বলে 'অনেক'! মজার না?

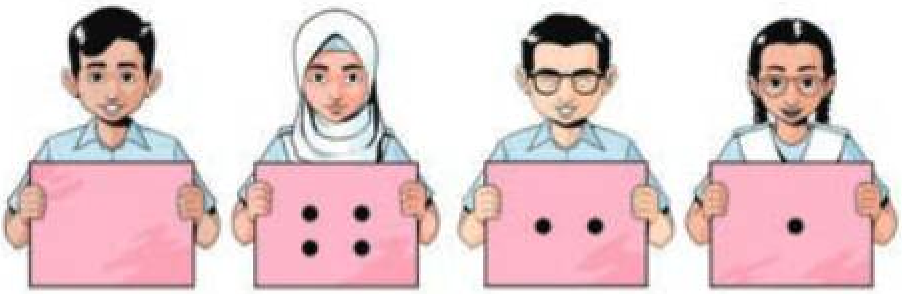
তো কেমন হয় আমরা যদি দুই-ভিত্তিক পদ্ধতিতে গণনা করা শিখতে পারি? একটা কথা তোমাদের আগেভাগেই জানিয়ে রাখি, দুই-ভিত্তিক পদ্ধতিটি ভালো করে বুঝলে কম্পিউটার কীভাবে কাজ করে সেটিও বুঝতে পারবে। শুধু তাই নয়, কম্পিউটারের অনেক সমস্যা তুমি নিজেই বুঝে সমাধান করতে পারবে।

তাহলে চলো পরিচিত হয়ে নিই দুই-ভিত্তিক সংখ্যাপদ্ধতির সাথে।

কার্ডে ডট গুনি

নিচের খেলার মধ্য দিয়ে আমরা কম্পিউটার কীভাবে গণনা করে সেটা বুঝতে পারব।

খেলার শুরুতে তোমরা যেকোনো চারজন ক্লাসের সামনে গিয়ে অন্যদের মুখোমুখি দাঁড়াও। তাদের প্রত্যেকের হাতে থাকবে একটি করে বড় কার্ড। এবার প্রথম জনের কার্ডে একটি ডট এঁকে দাও। এভাবে দ্বিতীয় জনের কার্ডে দুটি আর তৃতীয় জনের কার্ডে চারটি ডট আঁকো।



বুদ্ধি খাটাও

এবার তোমরা একটু চিন্তা করে বলো তো ৪র্থ জনের কার্ডে কয়টি ডট থাকবে এবং কীভাবে তোমার উত্তর নির্ণয় করলে?

....

....

....

এই ধারাবাহিকতাটি বুঝতে পারলে এভাবে ৫ম, ৬ষ্ঠ, ৭ম... যে কোনো বন্ধুর কার্ডেও কতটি ডট বসবে তা বলে দিতে পারবে। এবার নিচের ফাঁকা ঘরটি পূরণ করো:

প্রতিটি কার্ডের ডটের সংখ্যার সাথে তার আগের কার্ডের ডটের সংখ্যার সম্পর্ক ________________।

আচ্ছা, শুরুতে 'অনুমানের খেলা'য় টর্চের আলো জ্বালানোর নিয়মটা মনে আছে? আলো জ্বললে ১ আর না জ্বললে ০? ঠিক তেমনই এই নতুন খেলাটিতে একটি নিয়ম আছে।

খেলার নিয়ম:

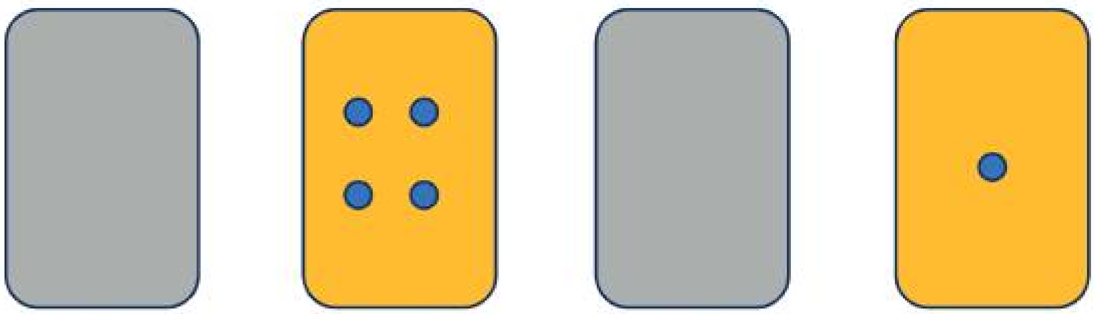
ক) যে কার্ডের ডট দেখা যাবে সেগুলিকে আমরা অন কার্ড বলব। অন কার্ডকে আমরা ১ দিয়ে বোঝাতে পারি।

খ) যে কার্ডের ডট দেখা যাবে না, সেগুলি হবে অফ কার্ড।

অফ কার্ডকে আমরা ০ দিয়ে বোঝাতে পারি।

কার্ডের খেলার সব শর্ত জানা শেষ। এবার এসো আমরা ধাপে ধাপে গণনা করা শিখি।

ধারাবাহিকভাবে বসিয়ে অন কার্ডে যে কয়টি ডট পাওয়া যাবে সেটিই আমাদের গণনার ফলাফল। নিচের ছবিটি দেখো– মোট ২টি অন কার্ড আছে, বাকিগুলো সব অফ। প্রথম কার্ডে একটি ডট; দ্বিতীয় কার্ডটি অফ; তৃতীয় কার্ডে ৪টি ডট; এবং চতুর্থ কার্ডটি অফ। একই কার্ড একবারের বেশি ব্যবহার করতে পারবে না। অর্থাৎ, মনে করো ২ ডটের কার্ডটি তোমার দুই বার ব্যবহার করতে ইচ্ছে হচ্ছে। সেটি চলবে না। ২ ডটের কার্ড তোমার কাছে একটিই রয়েছে।



৪র্থ ৩য় ২য় ১ম

উপরের ছবিটি দেখে প্রতিটি কার্ডের নিচে অন বা অফ এবং সেই অনুসারে ১ বা ০ বসিয়ে নিচের ফাঁকা কাজটি করো:

কার্ডের ক্রম	৪র্থ	৩য়	২য়	১ম
অন বা অফ				
১ বা ০				

বাইনারি সংখ্যা

অন কার্ডগুলো মিলিয়ে সর্বমোট ডটের সংখ্যাঃ

বাইনারি সংখ্যা

তার মানে দাঁড়ালো: দশমিক সংখ্যা __________ -এর বাইনারি প্রকাশ ০১০১

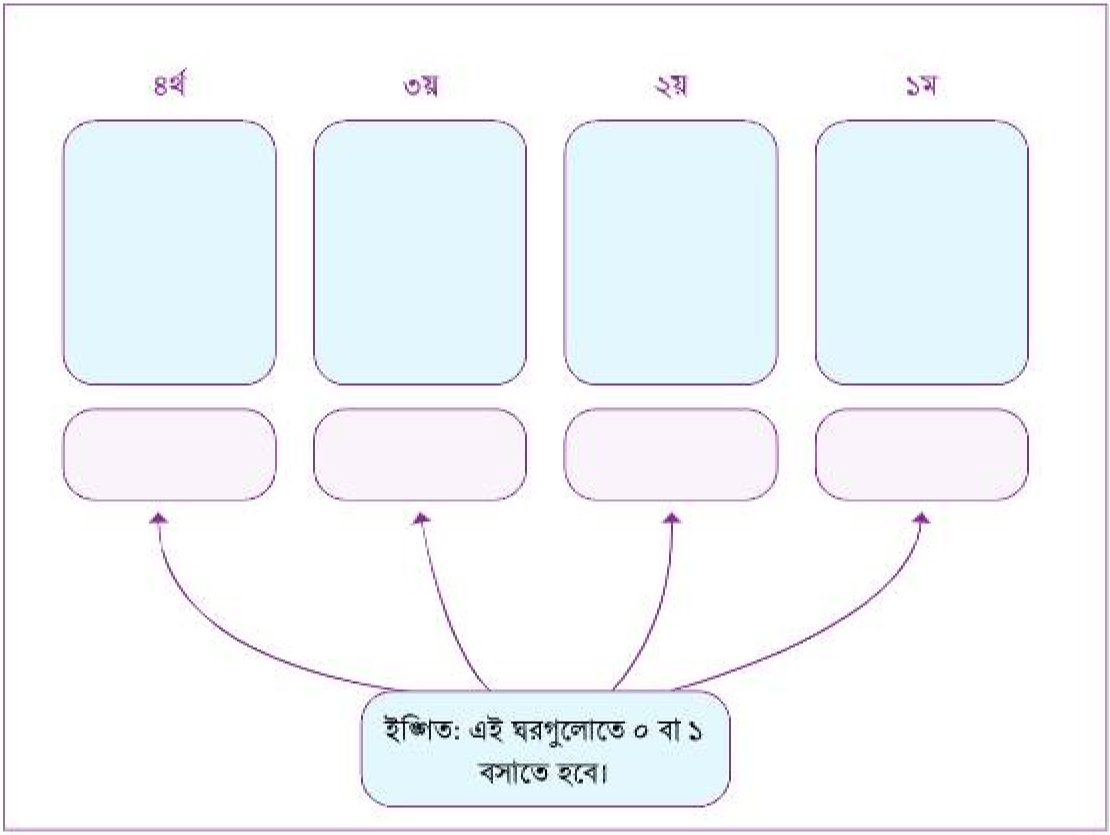
এবার একটু অন্যভাবে চিন্তা করো।

- খেয়াল করে দেখো, আমাদের কাছে ৫টি ডট আছে এমন কোনো কার্ড নিই।
- ৫টি ডট বানাতে হলে আমাদের একাধিক কার্ড ব্যবহার করতে হচ্ছে।
- এখানে ৫ এর থেকে বড় সংখ্যার ডট আছে ৮টি।
- কিন্তু ৮টি ডট দিয়ে আমরা ৫ বানাতে পারব না।
- সে ক্ষেত্রে ৮ এর থেকে কম সংখ্যক ডট আছে ৪টি, অর্থাৎ ৩য় কার্ডে। সেটি নিলাম।
- এবার চিন্তা করে দেখো ৫ বানাতে ৪ এর সাথে আর কয়টি ডট লাগবে।
- একটি, ঠিক না? একটি ডটের কার্ড তো আমাদের আছে- ১ম কার্ডটি।
- তাহলে ৫ বানাতে ৩য় আর ১ম কার্ডটি অন রাখলেই আমার চলছে।
- বাকি সবগুলি অফ করে দিলেও কোনো সমস্যা থাকছে না। সেই কাজটিই করা হয়েছে।

তাহলে, আমরা ধাপে ধাপে চিন্তা করে বের করলাম কোন কোন কার্ড অন বা অফ করলে মোট ডটসংখ্যা ৫ হবে। এভাবে ধাপে ধাপে কোনো সমস্যার সমাধান করার পদ্ধতিকে অ্যালগোরিদম (Algorithm) বলে।

জোড়ায় কাজ

এবার তাহলে দশমিক সংখ্যা ৩ কে বাইনারিতে কীভাবে প্রকাশ করা যায়, কার্ড এবং ডটের সাহায্যে তা বের করে দেখাও। নিচের ছকটি ব্যবহার করতে পারো। তোমার ডট বসানোর সুবিধার জন্য কার্ডগুলো ফাঁকা রাখা হয়েছে। সঠিক কার্ডে সঠিক সংখ্যক ডট বসাও এবং কার্ডের পরের পৃষ্ঠায় অবস্থিত ফাঁকা ঘর পুরণ করো।



তাহলে দশমিক সংখ্যা ৩ এর বাইনারি প্রকাশ হলো

এবার তবে কার্ড ও ডট ব্যবহার করে নিচের সমস্যাগুলোর সমাধান করো:

১। দশমিক সংখ্যা ৬ এর বাইনারি মান কত?

২। দশমিক সংখ্যা ৯ এর বাইনারি মান কত?

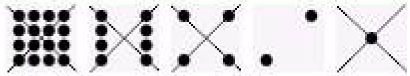
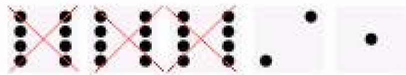
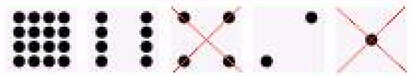
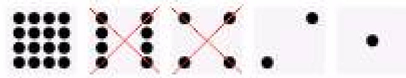
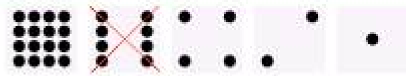
কার্ডগুলোতে ডট গণনা করে আমরা বাইনারি সংখ্যা গণনার প্রাথমিক ধাপ পার হয়েছি।

তোমরা ইতোমধ্যেই Binary digit বা Bit অর্থাৎ বাইনারি অঙ্কের বিষয়ে জেনেছ। কার্ডের খেলাটিতে একটি কার্ড দিয়ে এক বিট বোঝানো যায়। যেহেতু আমরা মোট চারটি কার্ড নিয়ে কাজ করেছি। তাহলে, প্রথম কার্ডটি প্রথম বিট, দ্বিতীয়টি দ্বিতীয় বিট এভাবে চারটি কার্ড দিয়ে ৪টি বিটকে বোঝানো যায়।

দশমিক সংখ্যা পদ্ধতিতে যেমন ২৪৩৫ একটি ৪ অঙ্কের সংখ্যা। তেমনি বাইনারি সংখ্যাপদ্ধতিতে এই চারটি কার্ডের অবস্থা (অন বা অফ অর্থাৎ ১ বা ০) দিয়ে বাইনারি ৪ অঙ্কের সংখ্যা বোঝানো যায়। যেমন দশমিক সংখ্যা পদ্ধতির ৫ হচ্ছে একটি ১ অঙ্কের সংখ্যা। আর ৫ এর বাইনারি প্রকাশ ০১০১ হচ্ছে একটি বাইনারি ৪ অঙ্কের সংখ্যা বা ৪ বিট সংখ্যা।

একক কাজ

নিচের ছকের ফাঁকা ঘরগুলো সঠিক দশমিক সংখ্যা, কার্ড বা বাইনারি সংখ্যা দিয়ে পূরণ করো।

সংখ্যা		বাইনারি সংখ্যা
২		০০০১০
৩		
২৬		
		
২৩		
		

কার্ড ব্যবহার না করে বাইনারি সংখ্যা গণনা

কার্ড ব্যবহার করার ক্ষেত্রে দেখেছ যে ডট দেখা গেলে ১ আর না দেখা গেলে ০ ধরা হচ্ছে, এবং প্রতিটি কার্ডের ডটের সংখ্যা আগের কার্ডটিতে থাকা ডটের সংখ্যার দ্বিগুণ। তা-ই যদি হয়, তাহলে আমরা ডট ব্যবহার না করে কেবল অন বা অফ ধরি। আর অন-অফ বুঝানোর ক্ষেত্রে লাইট বাল্বের থেকে ভালো কী আছে? তাহলে এসো, এবার ডট বাদ দিয়ে একই গণনা করা যায় কিনা দেখি। নিচের ছবিতে দেখো, কার্ডের বদলে বাল্ব ব্যবহার করে অন করে রাখা হয়েছে এবং ডটের সংখ্যার বদলে সরাসরি সংখ্যা ব্যবহার করা হয়েছে।

ছবিটিতে ১ম থেকে ৪র্থ সব কয়টি অবস্থানই অন আছে। এবার ছবিটি দেখে একটু চিন্তা করে নিচের প্রশ্নগুলোর সঠিক উত্তরে গোল দাগ দাও।

৮ ৪ ২ ১

কুইজ

১। উপরের ছবিটিতে বাইনারিতে কোন সংখ্যাটি প্রকাশ করা হয়েছে?

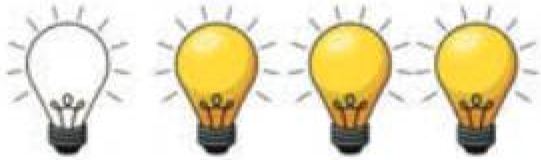
ক. ১০১১ খ. ১১১১ গ. ১১০১ ঘ. ১০০০

২। উপরের ছবিটিতে যে বাইনারি সংখ্যাটি দেখানো হয়েছে তার দশমিক মান কত?

ক. ১১ খ. ১০ গ. ১৫ ঘ. ১৬

তোমার ধারণা পরিষ্কার করার জন্য নিচের সমস্যাগুলোর সমাধান করো:

সমস্যা ১: নিচের ছবি দেখে বাইনারি এবং দশমিক সংখ্যা নির্ণয় করো এবং ফাঁকা ঘরে লেখো।



বাইনারি:	দশমিক:

সমস্যা ২: যে সংখ্যাটি বাইনারিতে ১১০১, সেটিকে দশমিকে প্রকাশ করলে কত আসবে?

সমস্যা ৩: দশমিক সংখ্যা ১৩ কে বাইনারিতে প্রকাশ করলে কত আসবে?

সমস্যা ৪: বাইনারিতে ১০১ কত বিটের সংখ্যা?

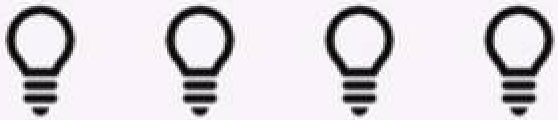
সমস্যা ৫: দশমিক সংখ্যা ১২ কে বাইনারিতে প্রকাশ করলে কত হবে? সেটি কত বিটের সংখ্যা?

মগজ খাটাও

মাথা খাটিয়ে নিচের প্রশ্নগুলোর ঝটপট উত্তর দাও দেখি।

১। ৪টি বিট দিয়ে বাইনারিতে সর্বোচ্চ কত পর্যন্ত গণনা করা যাবে? দশমিকে সেই সংখ্যাটি কত?

[নিচের ফাঁকা জায়গায় তোমার উত্তর লেখো। তোমার গণনার সুবিধার জন্য চারটি বাল্ব এঁকে রাখা আছে, বাকিটা তুমি চিহ্নিত করে নিতে পারো।]



২। ২ বিট দিয়ে বাইনারিতে সর্বোচ্চ কত সংখ্যা বানাতে পারবে? দশমিকে সেই সংখ্যাটি কত?

৩। দশমিকে ৪ বাইনারিতে কত বিটের সংখ্যা?

৪। ৫ বিট দিয়ে বাইনারিতে সর্বোচ্চ কত সংখ্যা বানাতে পারবে? দশমিকে সেই সংখ্যাটি কত?

৫। ৮ম বিটে কয়টি ডট?

দলগত কাজ

তোমরা ৪ জনের দল তৈরি করে ০ থেকে ১৫ পর্যন্ত সংখ্যাগুলোর বাইনারি মান কার্ড এবং বাল্বের সাহায্যে নির্ণয় করো।

আরেকটু ভেবে দেখি:

তুমি যদি বিভিন্ন বিট সংখ্যার জন্য সর্ববামের কার্ডে ডটের সংখ্যা এবং ঐ সংখ্যক বিট দিয়ে সর্বোচ্চ সম্ভব সংখ্যা নির্ণয় করতে পারো, তবে আগের পৃষ্ঠার সমস্যাগুলো সমাধান করা তোমার জন্য আরও সহজ হয়ে যাবে।

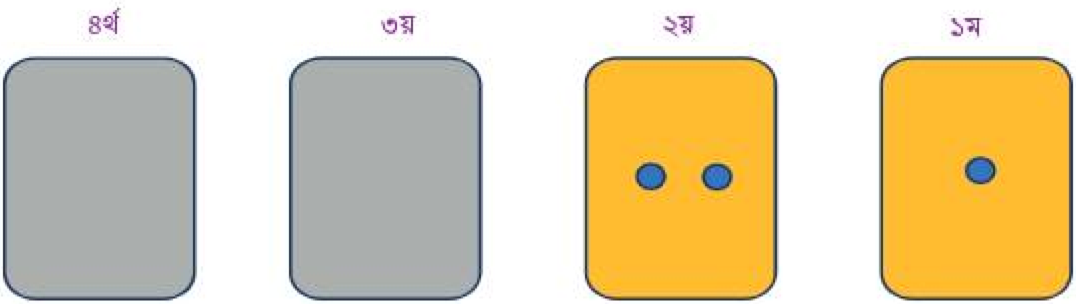
নিচের ছকটি পূরণ করে সহজেই উত্তরগুলো লিখতে পারো। কয়েকটি তোমার জন্য পূরণ করে দেওয়া আছে।

বিট সংখ্যা (কার্ড সংখ্যা)	সর্ববামের কার্ডে ডটের সংখ্যা	সর্বোচ্চ কোন দশমিক সংখ্যা তৈরি করা সম্ভব
১	১	১
২	২	৩
৩	৪	৭
৪	৮	
৫		
৬		
৭		
৮		

কুইজ

উপরের ছকটি মনোযোগ দিয়ে পর্যবেক্ষণ করো। এবার বলো, যে কোনো একটি বিট সংখ্যা ও তার জন্য সর্বোচ্চ কোন দশমিক সংখ্যা তৈরি করা সম্ভব এদের মধ্যে কি কোনো সম্পর্ক আছে? কোনো সূত্র বানাতে পারবে সহজেই বিট সংখ্যা থেকে সর্বোচ্চ দশমিক সংখ্যা বের করার জন্য?

আগের অনুশীলনটি পর্যন্ত প্রতিটি বিটের সর্বোচ্চ সংখ্যা নির্ণয় করা শিখলে।
কিন্তু সর্বোচ্চটি ছাড়াও প্রতিটি বিটে আলাদা আলাদা সংখ্যা পাওয়া সম্ভব। এটি একটু বুঝে নেওয়া দরকার। কার্ডের সাহায্যে বুঝাটাই সবচেয়ে সহজ। নিচের ছবিটি দেখো:



প্রশ্নটি হলো: ২য় বিট পর্যন্ত ব্যবহার করে কী কী সংখ্যা তৈরি করা যায়?

যে সব সংখ্যা তৈরি করা যায়, তার মধ্যে কি ০ ধরেছ?

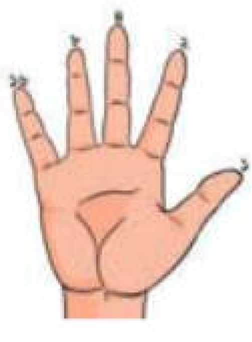
তবে ০ সহ মোট কতটি সংখ্যা তৈরি করা গেল?

বেশ, তাহলে নিচের ছকটি পূরণ করে ফেলো:

বিট সংখ্যা (কার্ড সংখ্যা)	মোট কতটি সংখ্যা পাওয়া সম্ভব (০ সহ)
১	২
২	৪
৩	
৪	
৫	
৬	
৭	
৮	

হাতের আঙুলে বাইনারি গণনা!

দেখো, নতুন একটা সংখ্যাপদ্ধতিতে গণনা করা শিখতে আমাদের কত কাঠখড় পোড়াতে হলো। আমরা কার্ড ব্যবহার করলাম, বাল্ব ব্যবহার করলাম, অন-অফ শিখলাম। কিন্তু দশমিক পদ্ধতিতে যখন গণনা করি তখন কিন্তু নির্দ্বিধায় হাতের আঙুল গুণে কাজ সেরে ফেলতে পারি। সহজভাবে চিন্তা করলে আমরা দুই হাতের আঙুল ব্যবহার করে দশমিকের ১০ পর্যন্ত গণনা করতে পারি। এমন সহজভাবে যদি হাতের আঙুল ব্যবহার করে বাইনারি সংখ্যাও গুণে ফেলা যায়? যখন খাতা-কলম-কার্ড হাতের কাছে থাকবে না, তখনও হাতের আঙুল ব্যবহার করে বাইনারি গণনা করা গেলে মন্দ হয় না, কী বলো?



অন-অফ এর ধারণাটি মনে আছে তো? নিচের ছবিতে দেখো, আঙুল খোলা থাকা মানেই অন। আর গুটিয়ে রাখলে অফ।

প্রথমে ডান হাতে আঙুলগুলো ব্যবহার করি। তোমার বুড়ো আঙুলটিকে ধরো ১ম বিট। তর্জনীটি হোক ২য় বিট। মধ্যমা ৩য় বিট। অনামিকা হোক

৪র্থ বিট। এবং কনিষ্ঠা ৫ম বিট। কোন বিটে কতটি ডট তা-ও তোমার জানা আছে।

আগে তুমি নিজেই সমাধান করেছ ৫ বিট দিয়ে সর্বোচ্চ বাইনারি কত পর্যন্ত গণনা করা যায়।

এবার তোমার পালা

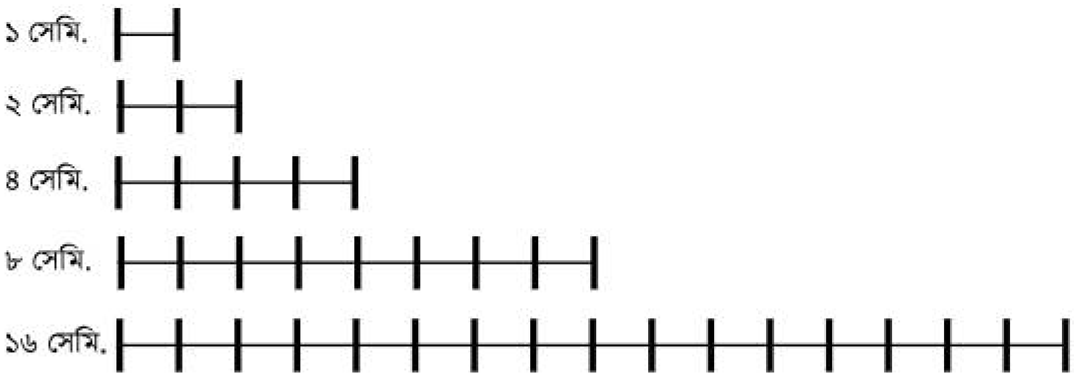
উপরের দেখানো পদ্ধতিতে ০ থেকে ৩১ পর্যন্ত গণনা করো। এই পদ্ধতি ততবার করতে থাক যতক্ষণ পর্যন্ত না তোমার নিকট পদ্ধতিটি সহজ মনে হয়। নিজে করার পরে বন্ধুদের সাথেও পদ্ধতিটি শেয়ার করো।

সাহায্য: এইখানে ইংরেজি ‘up’ শব্দটি দিয়ে ‘আঙুল উঠানো’ বা অন বুঝানো হয়েছে।

দশমিক সংখ্যা		কনিষ্ঠা	অনামিকা	মধ্যমা	তর্জনী	বৃদ্ধাঙ্গুলী
০	০					
১	১					up
২	২				up	
৩	২+১				up	up
৪	৪			up		
৫	৪+১			up		up
৬	৪+২			up	up	
৭	৪+২+১			up	up	up
৮	৮		up			
৯	৮+১		up			up
১০	৮+২		up		up	
১১	৮+২+১		up		up	up
১২	৮+৪		up	up		
১৩	৮+৪+১		up	up		up
১৪	৮+৪+২		up	up	up	
১৫	৮+৪+২+১		up	up	up	up
১৬	১৬	up				
১৭	১৬+১	up				up
	অন্যান্য					

একক কাজ

১) দৈর্ঘ্য মাপার চ্যালেঞ্জ:



উপরের চিত্রে ১ সেমি, ২ সেমি, ৪ সেমি, ৮ সেমি ও ১৬ সেমি দৈর্ঘ্য দেখানো আছে। এই দৈর্ঘ্যগুলির সমান কাগজ/কাঠি কেটে নাও।

এরপর সেগুলি মাত্র একবার করে নিয়ে ০ সেমি থেকে ৩১ সেমি পর্যন্ত প্রতিটি দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা যায় কিনা দেখো। কীভাবে পরিমাপ করা যায় তা নিচের সারণিতে লেখো।

দৈর্ঘ্য (সেমি)	১৬ সেমি	৮ সেমি	৪ সেমি	২ সেমি	১ সেমি
০					
১					
২					
৩	না	না	না	হ্যাঁ	হ্যাঁ
৪					
৫					
৬					
৭					
৮					
৯					
১০					
১১					
১২					
১৩					
১৪					

১৫					
১৬					
১৭					
১৮					
১৯					
২০					
২১					
২২					
২৩					
২৪					
২৫					
২৬					
২৭					
২৮					
২৯					
৩০	হ্যাঁ	হ্যাঁ	হ্যাঁ	হ্যাঁ	না
৩১					

এ সারণি তৈরি করতে গিয়ে মিনা নিচের ধারণাগুলি পেয়েছে। তুমি মিনার ধারণাগুলির সাথে একমত কিনা সেটা কারণসহ লিখে সারণি পূরণ করো। (একটি তোমার জন্য করে দেওয়া হলো)

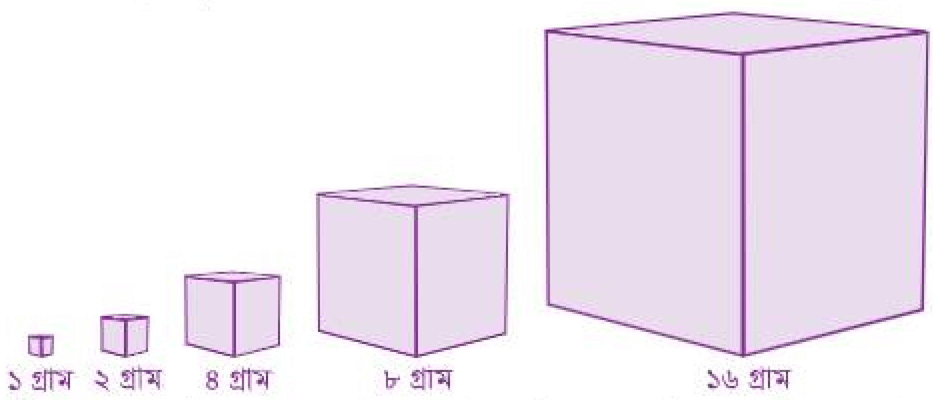
মিনার ধারণা	তুমি কি মিনার সাথে একমত?	কারণ
২৫ সেমি দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা সম্ভব নয়।	না	১৬ সেমি + ৮ সেমি + ১ সেমি = ২৫ সেমি, কাজেই ২৫ সেমি পরিমাপ করা সম্ভব।
১২ সেমি দৈর্ঘ্য পরিমাপ করতে ২ সেমি দৈর্ঘ্য প্রয়োজন হয় না।		
২২ সেমি দৈর্ঘ্য পরিমাপ করতে ৮ সেমি দৈর্ঘ্য প্রয়োজন হয় না।		
১৫ সেমি দৈর্ঘ্য পরিমাপ করতে ১৬ সেমি দৈর্ঘ্য প্রয়োজন হয় না।		
১ সেমি, ২ সেমি ও ৪ সেমি দৈর্ঘ্য ব্যবহার করে সর্বোচ্চ ১২ সেমি দৈর্ঘ্য পর্যন্ত মাপা যায়।		

লক্ষ করো, ১৬ সেমি +৮ সেমি+১ সেমি = ২৫ সেমি, আবার ২৫ এর বাইনারি প্রকাশ: ১১০০১। এখান থেকে দৈর্ঘ্য মাপার চ্যালেঞ্জ এর সাথে বাইনারি সংখ্যার কোনো মিল খুঁজে পাচ্ছ কি? আরেকবার ০ সেমি থেকে ৩১ সেমি পর্যন্ত দৈর্ঘ্য তৈরির সারণি দেখে নাও। এখন আরও সহজেই বাইনারি সংখ্যা ব্যবহার করে যেকোনো দৈর্ঘ্য তৈরি করতে পারবে কিনা? তাহলে নিচের সারণিটি পূরণ করো সেভাবে।

দৈর্ঘ্য (সেমি)	বাইনারি প্রকাশ	১৬ সেমি	৮ সেমি	৪ সেমি	২ সেমি	১ সেমি
২৫	১১০০১	হ্যাঁ	হ্যাঁ	না	না	হ্যাঁ
		১	১	০	০	১
১১						
২২						
২৩						

তাহলে বুঝতেই পারছ যে, কম্পিউটারের ভাষা বাইনারি হলেও শুধু সেখানেই এটা সীমাবদ্ধ নয়। বরং বাইনারি দিয়ে আরও অনেক সমস্যার সহজে সমাধান করা সম্ভব। শুধু পর্যবেক্ষণ করে খুঁজে নিতে হবে কোথায় বাইনারির ধারণা কাজে লাগানো সম্ভব।

২) ভর মাপার চ্যালেঞ্জ:



উপরের চিত্রে ১ গ্রাম, ২ গ্রাম, ৪ গ্রাম, ৮ গ্রাম ও ১৬ গ্রাম দেখানো আছে। এই ভরগুলো মাত্র একবার করে নিয়ে ০ গ্রাম থেকে ৩১ গ্রাম পর্যন্ত প্রতিটি ভর পরিমাপ করা যায় কিনা দেখো। কীভাবে পরিমাপ করা যায় তা 'দৈর্ঘ্য মাপার চ্যালেঞ্জ' অংশের ন্যায় একটি তালিকা তৈরি করে দেখাও।

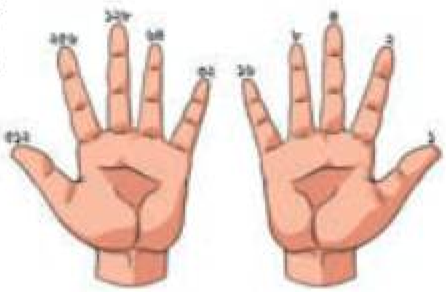
এক্ষেত্রে কোনো সহজ উপায় খুঁজে পাচ্ছ কি?

তোমার উত্তর: (সংকেত: 'দৈর্ঘ্য মাপার চ্যালেঞ্জ' অংশটি দেখতে পারো)

৩) বাইনারি খেলনা/যন্ত্র

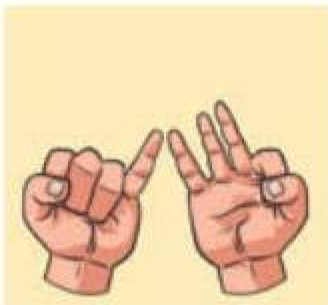
'হাতের আঙুলে বাইনারি' অংশে এক হাতের ৫টি আঙুল ব্যবহার করে আমরা ০ থেকে ৩১ পর্যন্ত গণনা করতে পারি। কিন্তু যদি আরও বড় সংখ্যা নিয়ে কাজ করতে চাও?

বাম হাত ব্যবহার কর:

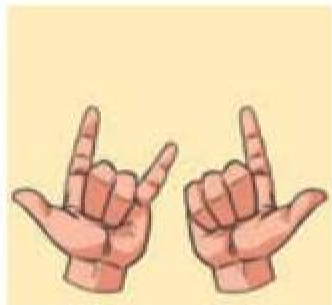


এখন আমরা ১০টি আঙুল নিম্নোক্ত উপায়ে ব্যবহার করে গণনা করতে পারি:

৩২+২ = ৩৪

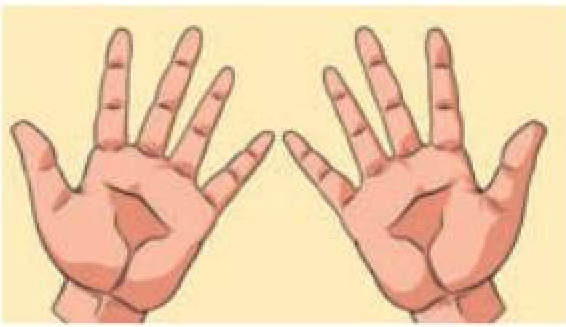


৩২+১৬+৮+৪ = ৬০



৫১২+২৫৬+৩২+২+১ = ৮০৩

যদি ১০টি আঙুলই নিই তবে?



৫১২+২৫৬+১২৮+৬৪+৩২+১৬+৮+৪+২+১ = ১০২৩

কিন্তু ধরো তোমাকে ২০২২ পর্যন্ত গণনা করতে হবে। তখন কিন্তু দুই হাত মিলিয়েও সম্ভব হবে না। এক্ষেত্রে কী করা যেতে পারে বলে তুমি মনে করো তা লেখো।

১) হাতের পাশাপাশি পায়ের আঙুলও গুণতে পারি

২) কোনো বন্ধুকেও ডেকে আনতে পারি

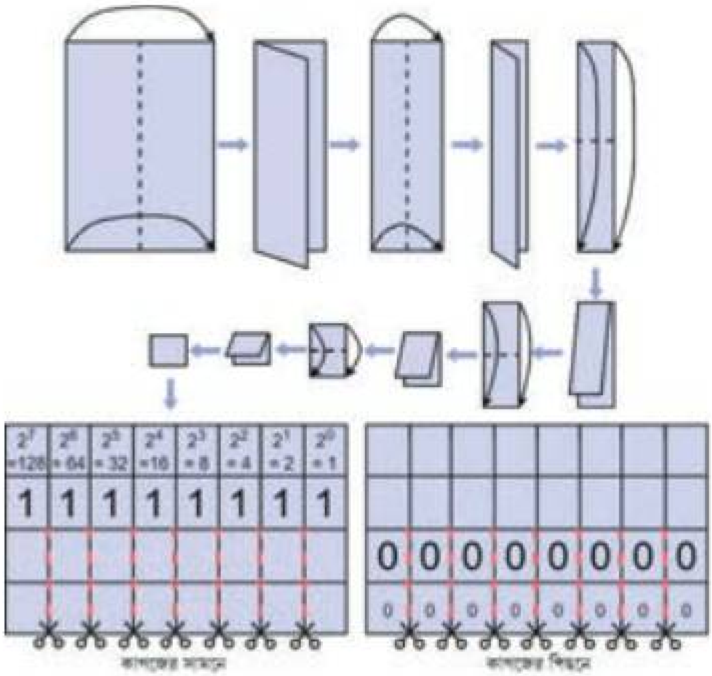
৩)

৪)

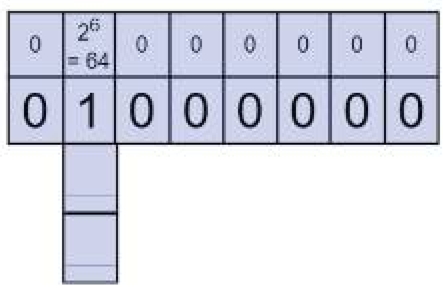
৫)

তবে তুমি কিন্তু একা একা ঘরে বসেই কাগজ দিয়ে একটা সুন্দর খেলনা/যন্ত্র তৈরি করতে পারো যেটা দিয়ে দশমিক সংখ্যা (decimal number) কে বাইনারি সংখ্যায় (binary number) প্রকাশ বা রূপান্তর করা যায়।

খেলনা/যন্ত্রটি কীভাবে তৈরি করবে তা নিচের ছবিতে ধাপে ধাপে বলে দেওয়া আছে। এসো ধাপগুলো অনুসরণ করে খেলনা/যন্ত্রটি তৈরি করি। প্রয়োজন হলে শিক্ষক তোমাকে সাহায্য করবেন।



যন্ত্রটিতো তৈরি হলো। এবারে এটি কীভাবে ব্যবহার করবে তা শিখে নেওয়া দরকার। তোমার কি মনে আছে আমরা হাতের আঙুল ব্যবহার করে দশমিক সংখ্যার ৬৪ কে বাইনারি রূপান্তর করেছিলাম? নিচের ছবিতে ধাপে ধাপে দেখানো আছে এই যন্ত্র ব্যবহার করে কীভাবে খুব সহজেই দশমিক সংখ্যা ৬৪ কে বাইনারিতে রূপান্তর করা যায়।



৪) জন্মদিনের ম্যাজিক ট্রিক

মাজেদুর একজন ম্যাজিশিয়ান। সে যে কারোর জন্মতারিখ বলে দিতে পারে চোখের নিমিষেই। তাঁর কাছে যদি পাঁচটি কার্ড থাকে। কেউ বলে কোনো কার্ডে তার জন্মতারিখ আছে (যেমন: ২১ শে জুন, ২০১০ বা ২১/৬/২০১০ হলে সেক্ষেত্রে জন্মতারিখ হবে ২১) তাহলেই মাজেদুর চট করে ম্যাজিশিয়ানের মতো জন্মতারিখ বলে দিতে পারে। কিন্তু কীভাবে?

Card 4			
16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31

Card 3			
8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31

Card 2			
4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31

Card 1			
2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31

Card 0			
1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

বাইনারি মোমবাতি অথবা জন্মদিনের কেক এ সাধারণ মোমবাতি

আমরা সাধারণত জন্মদিনের কেক এ প্রতি এক বছরের জন্যে একটি মোমবাতি ব্যবহার করি।

কিন্তু প্রতিটা মোমবাতি হয় জ্বালানো থাকবে নয়ত নিভানো থাকবে। আমরা এটি ব্যবহার করে তোমার বয়স বাইনারি পদ্ধতিতে প্রকাশ করতে পারি। উদাহরণস্বরূপ, ১৪ বছর এর বাইনারি ১১১০। তুমি চাইলে মোমবাতির মাধ্যমে প্রকাশ করতে পার।

- বাইনারি মোমবাতি ব্যবহারের সুবিধাগুলো কী কী?
- বয়স বাড়ার সাথে সাথে কেন বাইনারি মোমবাতি ভালো একটি আইডিয়া হয়?
- বাইনারি মোমবাতি ব্যবহারের অসুবিধাগুলো কী কী? এই অসুবিধাগুলো তুমি কীভাবে অতিক্রম করবে?

এটি কার কেক?

কেকটি কার এটি নিয়ে যে বিভ্রান্তি তৈরি হতে পারে এটির বিস্তারিত বর্ণনা লেখো। কেকটি কে পাবে এর উপসংহার লেখো। সাথে এর কারণ ও লেখো। একটির বেশি সম্ভাব্য ব্যাখ্যা রয়েছে।

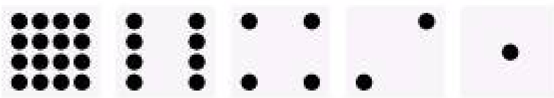
বাইনারি প্রকাশ ব্যবহার করে বর্ণের জন্যে কোড

আমরা কি সংখ্যার সাথে বর্ণগুলো মিলিয়ে পরস্পরকে কোডেড মেসেজ পাঠাতে পারি? ইংরেজি বর্ণমালায় কতগুলো বর্ণ আছে? চলো আমাদের বর্ণের কার্ড ব্যবহার করে একসাথে গণনা করা যাক। কীভাবে আমরা সংখ্যার মাধ্যমে বর্ণগুলোকে প্রকাশ করতে পারি?

আমরা বাইনারির মাধ্যমেও সংখ্যাগুলোকে প্রকাশ করতে পারি। এর মাধ্যমে আমরা সর্বোচ্চ কত পর্যন্ত প্রকাশ করতে পারব? এখানে আমরা ১ এর জন্যে A, ২ এর জন্যে B ধরে নেবো।

আমরা কীভাবে এর থেকে বড় সংখ্যা প্রকাশ করব? (একটি কার্ড যুক্ত করার মাধ্যমে) পরবর্তী কার্ডে ডট সংখ্যা কত হবে?

আমরা কার্ডগুলোকে ক্রম অনুসারে সাজাই। (১৬, ৮, ৪, ২, ১)



এবার চলো আমরা কার্ডগুলো ব্যবহার করে 'না, হ্যাঁ, না, না, না' সংখ্যাটিকে গণনা করি। আমরা কতগুলো ডট পাব? (৮ কার্ডের জন্যে 'হ্যাঁ' মানে সংখ্যাটি ৮)। ৮ সংখ্যার জন্যে কোন বর্ণ? ('H')

এখন পরবর্তী সংখ্যা নেওয়া যাক। 'না, হ্যাঁ, না, না, হ্যাঁ' (৯)। ৯ সংখ্যাটি কোন বর্ণ? ('I' যা 'H' এর পরে লেখা যায়)

পুরো মেসেজটি হলো 'HI'।

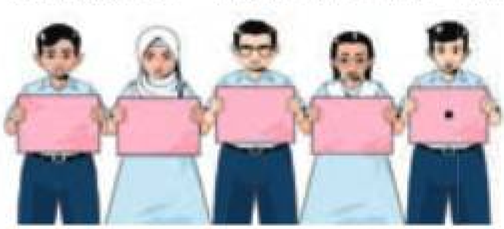
চলো এবার 'DAD' কে কীভাবে বাইনারি কোডে লেখা যায় তা নিয়ে কাজ করা যাক।

কীভাবে আমরা এটি করতে পারি?

আমরা কীভাবে বাইনারি কোড ব্যবহার করে ৪ বানাতে পারি?

অফ অফ অন অফ অফ

A প্রথম বর্ণ। তো আমরা কীভাবে বাইনারি কোড ব্যবহার করে ১ লিখতে পারি?



অফ অফ অফ অফ অন

অহহো! আমরা কিন্তু D এর বাইনারি কোড লিখে ফেলছি! আমরা এটিকে পুনর্ব্যবহার করতে পারব। কম্পিউটার বিজ্ঞানে সবসময় পূর্বে করা কাজ ব্যবহার এর পদ্ধতি খুঁজে বের করা হয়। এটি অনেক দ্রুত কাজ করবার পদ্ধতি।

অনুশীলনী

১) বাইনারি কোডে রূপান্তরিত করো।

ক) 'BINARY' খ)'MATHEMATICS' গ) 'RAMANUJAN'

২) বাইনারি নামের মালা- বানাও। ৫ বিট বাইনারি ব্যবহার করে একটি মালা বানাও।

১ এর রং ও ০ এর রং বাছাই করো। কম্পিউটারের জানার দরকার নেই কখন নতুন বর্ণ আসে কারণ কম্পিউটার এই নিয়ম জানে যে প্রতি ৫ম বিট একটি নতুন বর্ণ। প্রতি ৫ম গ্রুপের সর্বনিম্নমানের বিট ডানে যাবে।

৩) দীপু একটি ডিপার্টমেন্টাল স্টোরের উপরের তলায় আটকা পড়েছে। সে কি করতে পারে ভাবছে? সে সাহায্যের জন্য চিৎকার করে ডাকছে কিন্তু আশেপাশে কেউ নেই। রাস্তার ওপারে সে দেখতে পায় একজন মানুষ কম্পিউটার নিয়ে গভীর রাত পর্যন্ত কাজ করছে। যেহেতু কম্পিউটারে ভাষা বাইনারি তাই দীপু আলো জ্বালিয়ে ও নিভিয়ে বাইনারি কোড দিয়ে সেই মানুষটিকে বুঝানোর চেষ্টা করল। বলো তো জানালায় দীপু কী লিখেছিল?

চলো বৃত্ত চিনি

ছবিগুলো লক্ষ করো। প্রতিদিন আমরা এই ধরনের কিছু জিনিস দেখি ও ব্যবহার করি। ছোটবেলায় এই ধরনের কিছু বস্তু তৈরি করে খেলাধুলাও করেছি, তাই না?

প্রত্যেকটি ছবিতেই একই ধরনের একটি জ্যামিতিক আকৃতি দেখা যাচ্ছে। ভেবে দেখো তো এই ধরনের জ্যামিতিক আকৃতিকে কী বলা হয়? হ্যাঁ ঠিকই ভাবছ? জ্যামিতিক আকৃতিটি বৃত্তাকার।

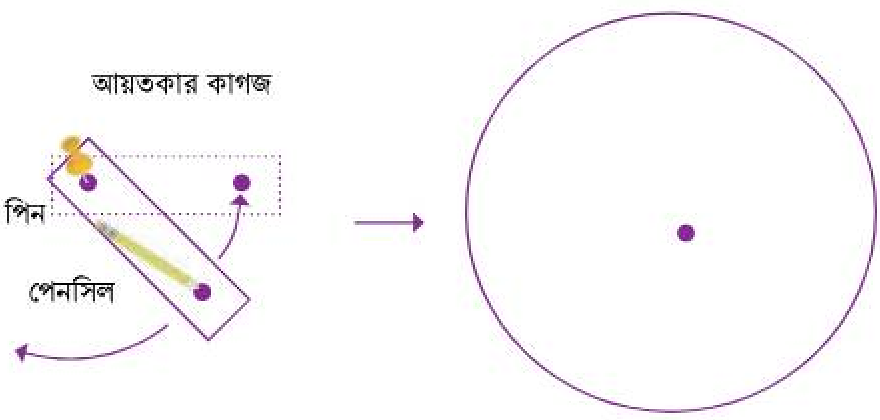
দলগত কাজ

'বৃত্তাকৃতি বস্তুর নাম লেখার প্রতিযোগিতা'। সময়: ৫ মিনিট। দলের প্রত্যেকে নিজ নিজ খাতায় বৃত্তাকৃতি বস্তুর নাম লিখবে। যে সবচেয়ে বেশি নাম লিখতে পারবে, সে জয়লাভ করবে।

আয়তাকৃতি কাগজ দিয়ে বৃত্ত বানাই

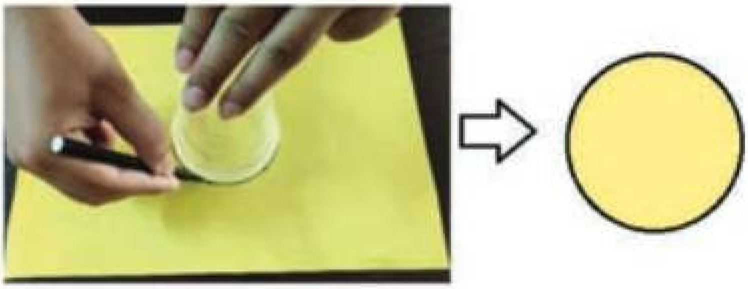
একটি পিন, একটি পেনসিল, দুটি ছোট ছিদ্রসহ একটি আয়তাকৃতি কাগজ সংগ্রহ করি। এবার নিচের চিত্র অনুযায়ী এগুলো ব্যবহার করে খাতায় একটি বক্ররেখা অঙ্কন করি। আমরা যদি একবার গোলাকারে পেনসিলটি ঘুরিয়ে আনি, তাহলে কেমন আকৃতি তৈরি হবে?

আমরা যদি একবার পেনসিলটিকে গোলাকারে ঘুরিয়ে আনি, তাহলে একটি সুন্দর গোল আকৃতি পাব। এই গোল আকৃতিটিকে বৃত্ত বলা হয়।



কাগজ কেটে বৃত্ত বানাই

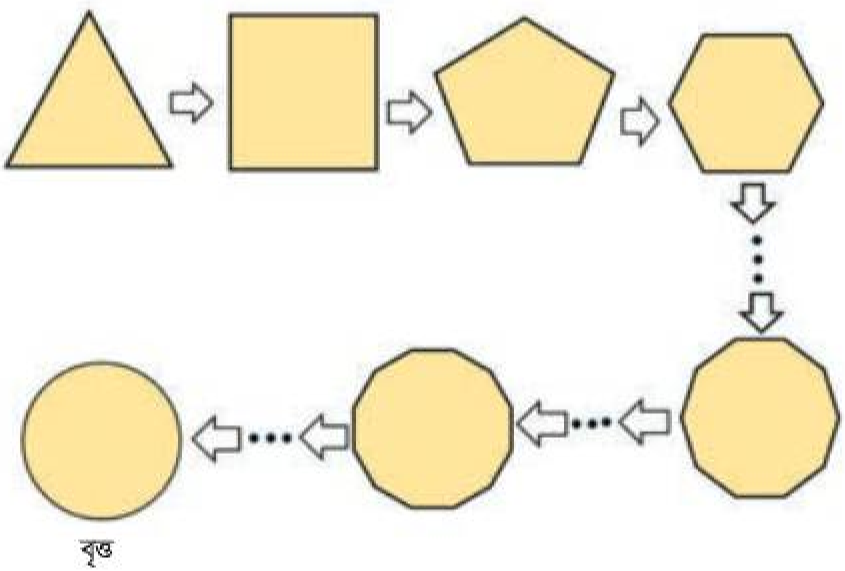
একটি সাদা বা রঙিন কাগজের উপর কাপ বা থালা বা গ্লাস উপুড় করে রাখি। এক হাত দিয়ে বস্তুটি চেপে ধরে অপর হাত দিয়ে একটি কলম বা সরু পেনসিলের মাধ্যমে বস্তুটির গা ঘেঁষে নিচের চিত্রের মতো চারদিক ঘুরিয়ে দাগ দিই। এবার বস্তুটি সরিয়ে নিলে কাগজে একটি গোলাকার আবদ্ধ বক্ররেখা দেখা যাবে।



হলুদ কাগজে আঁকা গোলাকার আবদ্ধ বক্ররেখাটিকে আমরা বৃত্ত (circle) বলে থাকি। বৃত্তের কোনো শীর্ষবিন্দু থাকে না। তোমরা কী বলতে পারবে, কেন বৃত্তের শীর্ষবিন্দু থাকে না?

আমরা জানি, ত্রিভুজের তিনটি, চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু থাকে, তাই না? এভাবে পঞ্চভুজের পাঁচটি, ষড়ভুজের ছয়টি ইত্যাদি। অর্থাৎ বহুভুজের বাহুর সংখ্যা যত হবে তার শীর্ষবিন্দুর সংখ্যা ঠিক ততই হবে। কোনো বহুভুজের বাহুর সংখ্যা অসীম হলে তার শীর্ষবিন্দুর সংখ্যাও অসীম হবে। তখন বহুভুজটির বাহুগুলো একটি আবদ্ধ বক্ররেখা বা বৃত্তে পরিণত হয়।

নিচের চিত্রটি ভালোভাবে লক্ষ করলে বিষয়টি আরও পরিষ্কার হবে।



দড়ি ও পেরেক ব্যবহার করে মাটির উপর বৃত্ত বানাই

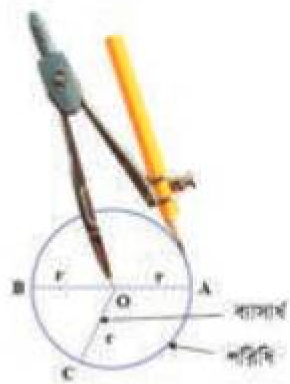
দিশা দড়ি ও পেরেক ব্যবহার করে মাটির উপর বৃত্ত আঁকার সিদ্ধান্ত নেয়। দড়ির দুই প্রান্তে দুটি পেরেক বেঁধে নেয়। এবার সে তার বন্ধু মিতাকে দড়ির এক প্রান্তে বাঁধা পেরেকটি মাটির সাথে চেপে ধরতে বলে। দিশা দড়ির অপর প্রান্তে বাঁধা পেরেকটি টেনে ধরে মাটির উপর একটি বৃত্ত তৈরি করে। তাদের তৈরি করা বৃত্তটি নিচের চিত্রের মতো।

দলগত কাজ

কতগুলো ছোট ছোট দলে বিভক্ত হয়ে বিভিন্ন দৈর্ঘ্যের দড়ি ব্যবহার করে মাটিতে দিশার মতো বৃত্ত তৈরি করো। দলগুলোর নাম দাও। প্রত্যেক দলের তৈরি করা বৃত্তগুলো পর্যবেক্ষণ করো এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খাতায় লেখো।

- কোন দল সবচেয়ে ছোট বৃত্ত তৈরি করেছে এবং তাদের ব্যবহার করা দড়ির দৈর্ঘ্য কত মিটার?
- কোন দল সবচেয়ে বড় বৃত্ত তৈরি করেছে এবং তাদের ব্যবহার করা দড়ির দৈর্ঘ্য কত মিটার?
- দড়ির দৈর্ঘ্য বেশি হলে বৃত্তটির আকার কীরূপ হবে, যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো।

এভাবে আঁকা বৃত্তগুলো একেবারে নিখুঁত নাও হতে পারে। তবে পেনসিল-কম্পাস ব্যবহার করে আমরা নিখুঁতভাবে বৃত্ত অঙ্কন করতে পারি। সেক্ষেত্রে কম্পাসের কাঁটাটি কাগজের উপর চেপে ধরে অপর প্রান্তে সংযুক্ত পেনসিলটি কাগজের উপর চারদিকে ঘুরিয়ে আনলেই একটি বৃত্ত আঁকা হয়ে যাবে, যেমনটি চিত্রে দেখানো হয়েছে।



এক্ষেত্রে কাগজের উপর যে বিন্দুতে কম্পাসের কাঁটাটি চেপে ধরেছ, সেই বিন্দুটিই হবে বৃত্তটির কেন্দ্র (centre)। তাহলে, পাশের চিত্রের O বিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে আর যে বক্ররেখাটি বৃত্তকে আবদ্ধ করে রেখেছে তাকে বলা হয় পরিধি (circumference)। এবার চলো O বিন্দু থেকে কাগজের উপর আঁকা আবদ্ধ বক্ররেখা অর্থাৎ বৃত্তটির দূরত্ব মেপে দেখি। এই দূরত্ব মাপার জন্য আবদ্ধ বক্ররেখাটির উপর কয়েকটি বিন্দু A, B, C নিয়ে কেন্দ্র থেকে বিন্দুগুলো পর্যন্ত রেখাংশগুলো আঁকো। এবার স্কেলের সাহায্যে OA, OB এবং OC রেখাংশগুলোর দৈর্ঘ্য পরিমাপ করো। কী লক্ষ করলে? দৈর্ঘ্যগুলো কি সমান? রেখাংশগুলোর প্রত্যেকটিই তোমার আঁকা বৃত্তটির ব্যাসার্ধ (radius)। সুতরাং আমরা বলতে পারি, আবদ্ধ বক্ররেখা বা বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী এবং কোনো বৃত্তের সকল ব্যাসার্ধই পরস্পর সমান।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ মাপি

পেনসিল-কম্পাস দিয়ে তুমি যখন খাতায় বৃত্ত আঁকো, তখন খুব সহজেই বৃত্তটির কেন্দ্র চিহ্নিত ও ব্যাসার্ধ পরিমাপ করতে পারো। কিন্তু আমাদের চার পাশে ছোট-বড় অনেক বৃত্তাকৃতি জিনিসপত্র দেখা যায় যাদের কেন্দ্র চিহ্নিত নেই বিধায় ব্যাসার্ধ সহজে পরিমাপ করতে পারি না। সেক্ষেত্রে পেনসিল-কম্পাস ছাড়াও বিকল্প ভাবে বৃত্তাকৃতি বস্তুর ব্যাসার্ধ পরিমাপ করা যাবে।

জোড়ায় কাজ

বোতলের ছিপির ব্যাসার্ধ মাপি

শিক্ষকের নির্দেশনা মতো প্রত্যেকেই কমপক্ষে তিনটি করে একই মাপের ছিপি সংগ্রহ করে নিয়ে আসবে।

এবার ধারাবাহিকভাবে নিচের কাজগুলো করো।

ধাপ – ১

কাগজের উপর ছিপিগুলো পাশাপাশি সাজাও। ছিপিগুলো প্রত্যেকটির সাথে প্রত্যেকটি যেন মিশে থাকে। সোজা বোঝার জন্য চিত্রের মতো দুই পাশে দুটি কাঠি দিয়ে আটকে দাও।

ধাপ – ২

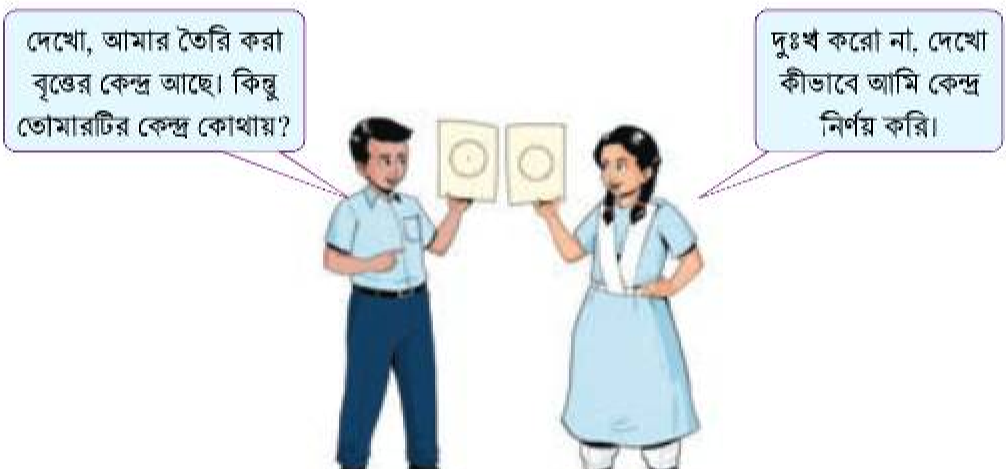
এবার যেখান থেকে ছিপি সাজানো শুরু হয়েছে এবং যেখানে ছিপি সাজানো শেষ হয়েছে সেই পর্যন্ত একটা স্কেলের সাহায্যে মেপে নাও। প্রাপ্ত ফলাফলটি খাতায় লিখে রাখো। মাপার সময় কাঠি বা বইয়ের এক ধারের সাহায্য নেওয়া যেতে পারে ছিপিগুলো বসানো সোজা হয়েছে কিনা বোঝার জন্য।

ধাপ – ৩

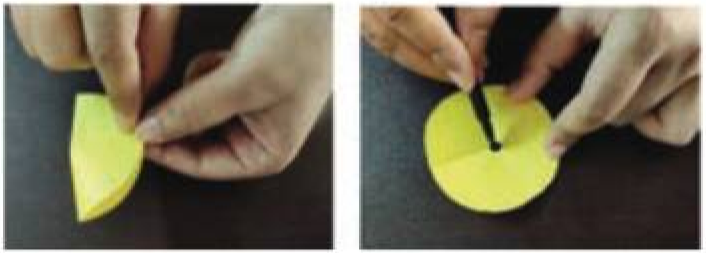
ধাপ -২ থেকে প্রাপ্ত ফলাফলকে ছিপির সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলেই প্রতিটি ছিপির ব্যাসের দৈর্ঘ্য পাওয়া যাবে। প্রতিটি ছিপির ব্যাসের অর্ধেকই হলো ব্যাসার্ধ।

বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয়

তুমি তোমার দৈনন্দিন জীবনে অনেক রকমের বৃত্তাকৃতি জিনিপত্র ব্যবহার করো, যা দ্বারা তুমি চাইলে অতি সহজেই বৃত্ত আঁকতে পারবে। কিন্তু কেন্দ্র সহজে চিহ্নিত করা যায় না। তাই না? কেন, ভেবে দেখেছ কি? চলো, কোনো বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয়ের কয়েকটি উপায় খুঁজি। ইতোমধ্যে সামির এবং মীরা বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয়ের দুটি উপায় খুঁজে পেয়েছে। আরও কোনো উপায়ে বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করা যায় কিনা এবার তোমাকে চিন্তা করে বের করতে হবে। সামির ও মীরা দুজনেই বৃত্ত তৈরি করছে।



মীরা কেটে নেওয়া বৃত্তাকৃতি কাগজটিকে চিত্রের মতো দুটি ভাঁজ দিয়ে সমান চার ভাগে ভাঁজ করে এবং দুটি ভাঁজের ছেদবিন্দুকে কেন্দ্র হিসেবে চিহ্নিত করে। মীরা চিত্রের মতো এক ভাঁজ বরাবর স্কেল দিয়ে দাগ টেনে ব্যাসার্ধ এবং ব্যাস চিহ্নিত করে।



একক কাজ

প্রত্যেকেই মীরার মতো চুড়ি ব্যবহার করে বৃত্তাকৃতি কাগজ কেটে কেন্দ্র নির্ণয় করো। চুড়ির পরিবর্তে কাপ বা গ্লাস বা অন্যকোনো বস্তু দ্বারাও বৃত্তাকৃতি কাগজ কেটে নিতে পারবে। তাছাড়া কেন্দ্র নির্ণয়ে অন্য কোনো পদ্ধতিও ব্যবহার করতে পারবে।

বস্তুর ভারসাম্যকরণ

গণিত শিক্ষক রফিক স্যার মীরার কাছে জানতে চান, বৃত্তের কেন্দ্র কেন প্রয়োজন? মীরা তৎক্ষণাত উত্তর দিতে পারল না। স্যার বললেন কোনো সমস্যা নেই। এই প্রশ্নের উত্তর জানার জন্য একটি খেলা খেললে কেমন হয়। খেলাটি কিন্তু খুবই মজার। খেলাটি হলো -

তোমার একটা আঙুলের ডগায় তোমার খাবার থালা বা গোলাকার চাকতি নিচের চিত্রের মতো ধরে রাখতে হবে। প্রথমবার অন্তত ১০ সেকেন্ড রাখতে পারলেই হবে। তার আগে মাটিতে পড়তে দেওয়া যাবে না।

কী! ১০ সেকেন্ডের আগেই মাটিতে পড়ে গেল? আবার চেষ্টা করো।

কয়েকবার চেষ্টার পর মীরা থালাটির কেন্দ্র খুঁজে পেল এবং থালাটি তার আঙুলের ডগায় ১০ সেকেন্ডের বেশি সময় রাখতে পারে। বার্ষিক ক্রীড়া অনুষ্ঠানে মাথায় হাঁড়ি নিয়ে দৌড় প্রতিযোগিতার কথা তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে। ব্যাপারটা একটু ভেবে দেখো তো উপরের খেলাটির সাথে হাঁড়ি খেলাটির কোনো সম্পর্ক আছে কিনা?

একক কাজ

মীরার মতো তোমরা প্রত্যেকেই একবার চেষ্টা করে দেখতে পারো।

কাগজ কেটে লাটিম বানাই

বৃত্তের কেন্দ্র কেন প্রয়োজন চলো আরো একটি কাজের মাধ্যমে জেনে নিই। আমরা কাগজের লাটিম বানাই এবং কার লাটিম কত বেশি ঘুরে পরীক্ষা করে দেখি।

দলগত কাজ

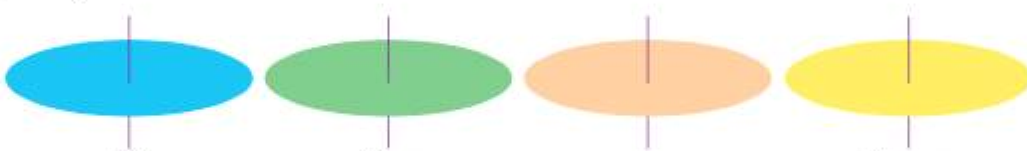
রফিক স্যারের নির্দেশনায় শ্রেণিতে চার সদস্যবিশিষ্ট কয়েকটি দল গঠন করা হলো। সামির, মীরা, আকাশ ও প্রিয়াঙ্কা (শাপলা) দলের সদস্য। স্যার শিক্ষার্থীদের উদ্দেশ্যে বললেন-

প্রথমে একটি কার্ডবোর্ড বা অন্য কোনো শক্ত কাগজ নাও।

কাগজে একটি বৃত্ত আঁকো। এবার বৃত্তক্ষেত্রটা কাঁচি দিয়ে কেটে নাও।

বৃত্ত আকৃতির কাগজের উপর একটা ছিদ্র করে তার মধ্যে দিয়ে একটা দেয়াশলাইয়ের কাঠি ঢুকাও। ব্যস তৈরি হয়ে গেল তোমাদের প্রত্যেকের লাটিম।

সামির, মীরা, আকাশ ও প্রিয়াঙ্কা প্রত্যেকে ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধের চার রকম লাটিম তৈরি করে। লাটিমগুলোর ছবি নিম্নরূপ:



সামির মীরা আকাশ প্রিয়াঙ্কা

ছবি দেখে তোমরা কী বলতে পারবে কার লাটিম বেশিক্ষণ ঘুরবে?

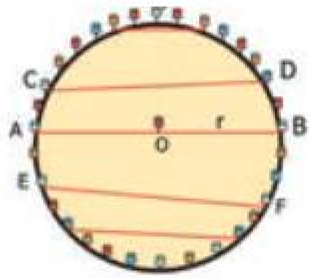
নিজেরাই এরকম বিভিন্ন লাটিম তৈরি করে ঘুরিয়ে দেখো। দেয়াশলাইয়ের কাঠিটি বৃত্ত আকৃতির লাটিমের কোথায় থাকলে লাটিম সবচেয়ে বেশি সময় ঘুরবে বলতে পারো? কেন ঘুরবে দলে আলোচনা করো।

বৃত্তের জ্যা ও চাপ সম্পর্কে জেনে নিই

দলগত কাজ

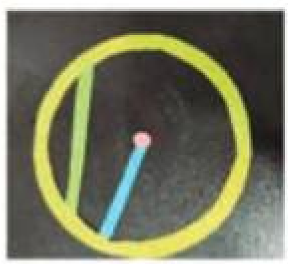
চিত্রের মতো কাগজে একটি বৃত্ত আঁকো। তারপর বৃত্তের উপর কতগুলো পিন বসিয়ে নাও। লক্ষ রাখবে, ব্যাসের দুই প্রান্তে বৃত্তের উপর যেন দুটি পিন থাকে। রাবার দিয়ে চিত্রের মতো ব্যাস ও জ্যা তৈরি করো। প্রয়োজনে পিনগুলোর গোড়ায় বিন্দু দিয়ে চিহ্নিত করো। তারপর বৃত্তের ব্যাসার্ধ, ব্যাস, জ্যা, উপচাপ, অধিচাপ, অর্ধবৃত্তসহ সকল অঙ্গ নিয়ে সকলে আলোচনা করো। স্কেল ও সুতা ব্যবহার করে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, ব্যাস, জ্যা, বৃত্তচাপ মেপে খাতায় লেখো। এবার নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খুঁজে দেখো:

- বৃত্তের ব্যাস ও ব্যাসার্ধের মধ্যে সম্পর্ক কী?
- বৃত্তের কোন জ্যা-টি সবচেয়ে বড়?
- সবচেয়ে বড় জ্যা-টিকে আমরা কী বলে থাকি?
- বৃত্তের ব্যাস বৃত্তকে দুই ভাগে ভাগ করেছে তাদের পরিধির দৈর্ঘ্য কীরূপ?
- বৃত্তের ব্যাস দ্বারা সৃষ্ট চাপ দুটির প্রত্যেকটিকে কী বলা হয়?



একক কাজ

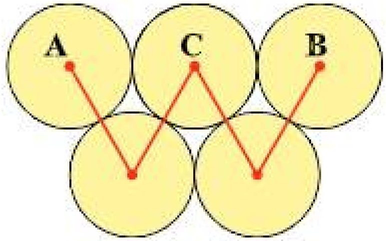
১. কাগজ কেটে নিচের চিত্রের মতো বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ, জ্যা এবং পরিধি তৈরি করো।



২. পেনসিল কম্পাসের সাহায্যে খাতায় বিভিন্ন মাপের কয়েকটি বৃত্ত আঁকো। বৃত্তগুলোর কেন্দ্র চিহ্নিত করো। বৃত্তগুলোর উপরে বিভিন্ন জায়গায় কয়েকটি বিন্দু নিয়ে কেন্দ্র থেকে বিন্দুগুলো পর্যন্ত রেখাংশগুলো আঁকো। প্রতিটি বৃত্তের কেন্দ্রগামী জ্যা বা ব্যাস আঁকো। এবার খাতায় নিচের ছক বা সারণিটি তৈরি করো। প্রতিটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্রগামী জ্যা বা ব্যাসের দৈর্ঘ্য পরিমাপ করে সারণিটি পূরণ করো এবং সহপাঠীর সাথে ফলাফল নিয়ে আলোচনা করো।

বৃত্ত	কেন্দ্র থেকে বৃত্তের দৈর্ঘ্য বা ব্যাসার্ধ	কেন্দ্রগামী জ্যায়ের দৈর্ঘ্য বা ব্যাস	ফলাফল পর্যবেক্ষণ করে বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্রগামী জ্যা বা ব্যাসের এর মধ্যকার সম্পর্ক বর্ণনা করো।
১.			
২.			
৩.			
৪.			

৩. কাগজ কেটে ৩ সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট পাঁচটি বৃত্ত তৈরি করো। বৃত্তগুলোকে নিচের চিত্রের মতো সাজিয়ে কেন্দ্রগুলো যোগ করে ইংরেজি বর্ণ W আকৃতিটি বানাও। এবার A থেকে B পর্যন্ত দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো। C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটির চার পাশে এভাবে সর্বোচ্চ কয়টি বৃত্ত সাজানো যাবে?



বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয়

তোমরা ইতোমধ্যেই জেনেছ, বৃত্তের সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্যকে বৃত্তটির পরিধি (circumference) বলা হয়। যেহেতু বৃত্ত সরলরেখা নয়, তাই রুলারের সাহায্যে বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য পরিমাপ করা যায় না। পরিধির দৈর্ঘ্য পরিমাপের জন্য তোমরা নিচের পদ্ধতিটি প্রয়োগ করতে পারো। তাছাড়া তুমি চাইলে, অন্য পদ্ধতি ব্যবহার করেও বৃত্তের পরিধির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে পারবে।

- পুরাতন ক্যালেন্ডারের সাদা পৃষ্ঠা বা ছবি আঁকার কাগজে একটি বৃত্ত এঁকে বৃত্ত বরাবর কেটে নাও।

পরিধির উপর একটি বিন্দু চিহ্নিত করো।

- অন্য কাগজে স্কেল বসিয়ে একটি সরলরেখাংশ আঁকো।
- এবার বৃত্তাকৃতি কাগজ বা কার্ডটি রেখাংশ আঁকা কাগজের উপর খাড়াভাবে রাখো যেন পরিধির চিহ্নিত বিন্দুটি রেখাংশের এক প্রান্তের সাথে মিলে যায়।
- এখন কার্ডটি রেখাংশ বরাবর গড়িয়ে নাও যতক্ষণ না পরিধির চিহ্নিত বিন্দুটি রেখাংশকে পুনরায় স্পর্শ করে।
- স্পর্শ বিন্দুটি চিহ্নিত করো এবং রেখাংশের প্রান্তবিন্দু থেকে এর দৈর্ঘ্য স্কেলের পরিমাপ করো।
- এই পরিমাপই হলো তোমার কাটা বৃত্তাকৃতি কার্ডটির পরিধির দৈর্ঘ্য।

তাহলে আমরা বলতে পারি, বৃত্তাকৃতি কার্ডটি একবার সম্পূর্ণ ঘুরলে এটি তার পরিধির দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব অতিক্রম করে। তুমি সাইকেল চালিয়ে স্কুলে যাওয়ার সময় সাইকেলের চাকা দুটি বারবার ঘুরে বারবার পরিধির দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্ব অতিক্রম করে তোমাকে স্কুলে পৌঁছে দেয়।

কিন্তু তোমাকে যদি বলা হয়, তোমার স্কুল বিল্ডিং এর গোলাকার পিলারগুলো কতটুকু মোটা বা স্কুলের বাগানের গাছগুলোর ব্যাস নির্ণয় করতে, তুমি তা কীভাবে পরিমাপ করবে? পিলার বা গাছগুলোকে তো আর রেখার উপর দিয়ে গড়িয়ে নেওয়া যাবে না। আমাদের বিকল্প চিন্তা করতে হবে।

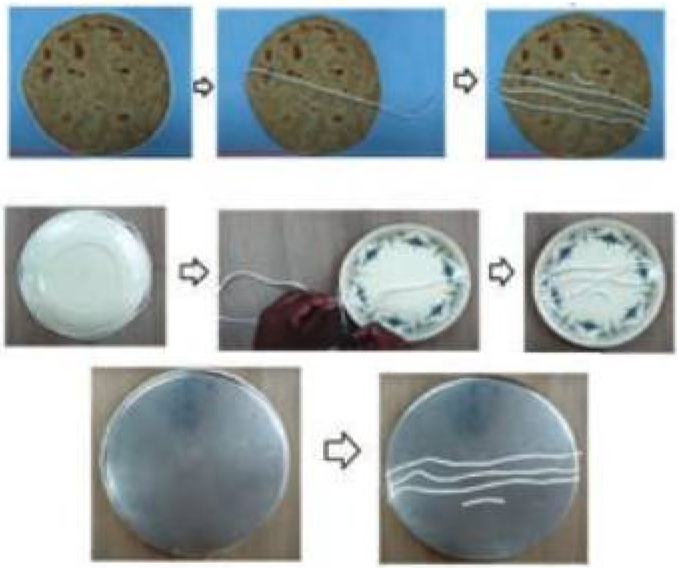
ফিতা দিয়ে সহজেই পিলার বা গাছটি কতটুকু মোটা তা পরিমাপ করা যাচ্ছে, কিন্তু এর ব্যাস?

পিলারের দুই পাশ দিয়ে দুটি সোজা লাঠি দড়ি দিয়ে শক্ত করে বেঁধে ফেলো। এবার একটি স্কেল বা ফিতা দিয়ে লাঠি দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব মেপে নাও। যে দূরত্বটা পাওয়া গেল তাই হলো গোলাকার পিলারটির ব্যাস।

বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত

আমরাতো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাস পরিমাপ করা জানলাম। এখন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের মধ্যেকার সম্পর্ক জানার জন্য নিচের কাজগুলো আমরা প্রত্যেকেই নিজ নিজ বাসা-বাড়িতে করে দেখতে পারি:

আমরা সকালের নাস্তায় অনেকেই রুটি খেয়ে থাকি এবং রুটি দেখতে অনেকটা বৃত্তাকার, তাই না? একটি রুটির চারদিকে চিকন সুতা ঘুরিয়ে রুটির পরিধি সমান সুতা কেটে নাও। এবার রুটির মাঝামাঝি বরাবর ব্যাসের সমান করে সুতাটিকে কাটতে থাক। দেখবে তিনবার সমান করে কাটার পর ছোট্ট একটু সুতা থেকে যাবে। অর্থাৎ আমরা তিনটি পূর্ণ ব্যাস ও একটি ব্যাসের অংশ পেলাম। এখাবে বৃত্তাকৃতি প্লেট বা থালা, তরমুজ কেটেও যাচাই করে দেখতে পারি।



তোমার ঘরে থাকা অন্য যেকোনো গোলাকার বস্তু যেমন: হাঁড়ি-পাতিল, গ্লাস, বালতি ইত্যাদির খোলা মুখ বা গোলকার টেবিলের উপরের তল, ক্যারামের গুটি, বিভিন্ন আকৃতির চুড়ি পরিমাপ করেও করতে পারো। এছাড়া লেবু, লাউ, বেগুন গোল করে কেটে দেখা যেতে পারে। কাজটি করে তুমি যে অভিজ্ঞতা অর্জন করলে তা পরের দিন শ্রেণিকক্ষে তোমার সহপাঠীদের সাথে আলোচনা করো।

দলগত কাজ

পাই (π) মডেল তৈরি:

একটি শোলার বোর্ড বা মোটা কাগজের যেকোনো বোর্ডে বৃত্তাকৃতি মডেল তৈরি করো। যেহেতু বৃত্ত একটি আবদ্ধ বক্ররেখা তাই এটি স্কেল দ্বারা সরাসরি মাপা সম্ভব নয়। সেজন্য একটি সুতা বা চিকন দড়ির একপ্রান্ত নিচের চিত্রের মতো বৃত্তটির উপরস্থ একটি পিনের সাথে বেঁধে সুতা বা দড়িটিকে বৃত্তটির উপর দিয়ে ঘুরিয়ে আনো যেন সুতাটি পিনে বাঁধা প্রান্তটিকে স্পর্শ করে। সুতার স্পর্শ বিন্দু বরাবর চিহ্নিত করো এবং কাঁচি বা ব্লেড দিয়ে কেটে ফেলো। এবার সুতার কাঁটা অংশটি সোজা করে স্কেল দিয়ে মেপে নাও এবং খাতায় লিখে রাখো। এবার বৃত্তক্ষেত্রটির ব্যাস মেপে নাও।

ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধের বৃত্তক্ষেত্র তৈরি করে দলের সকলেরই নির্দেশনা মতো কাজটি করো। খাতায় নিচের মতো

একটি সারণি তৈরি করো। সারণিতে দলের সদস্যদের নাম লিখে নিজ নিজ পরিমাপগুলো লিপিবদ্ধ করে হিসাব করো।

নাম	বৃত্তের ব্যাসার্ধ	বৃত্তের ব্যাস	বৃত্তের পরিধি	পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত
নীলিমা				
শাহেদ				
রঞ্জনা				
প্রতীক				

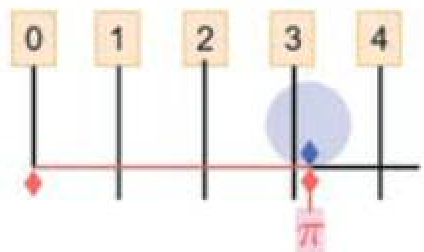
সারণির ফলাফল দেখে অবাক হয়ে গেলে মনে হয়? তোমরা হয়ত ভাবছ, প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধের বৃত্তক্ষেত্র নিয়েছ এবং ব্যাস ও পরিধির পরিমাপও ভিন্ন ভিন্ন হয়েছে অথচ ফলাফল সবারই প্রায় একই রকম। এটি কীভাবে সম্ভব? দলের সকলে বিষয়টি নিয়ে আলোচনা করো।

সুতরাং সারণি পর্যবেক্ষণ করে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি – কোনো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক। আর এই ধ্রুবকটি একটি গ্রিক অক্ষর π (পাই) দ্বারা নির্দেশ করা হয়। গ্রিক বর্ণ π (পাই) গ্রিক পরিধি থেকে এসেছে। সম্ভবত ১৭০৬ সালে উইলিয়াম জোনস সর্বপ্রথম এটি ব্যবহার করেন।

অর্থাৎ বৃত্তের পরিধি c ও ব্যাস d হলে, পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত $\frac{c}{d} = \pi$ বা $c = \pi d$

আবার বৃত্তের ব্যাস ব্যাসার্ধের দ্বিগুণ; অর্থাৎ বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, $d = 2r$ অতএব $c = 2\pi r$

প্রাচীনকাল থেকেই গণিতবিদগণ π এর আসন্ন মান নির্ণয়ের চেষ্টা করে চলেছেন। আর্কিমিডিস বৃত্তের ভিতরে ৯৬ বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের পরিসীমা বের করে π এর আসন্ন মান 3.1419 নির্ণয় করেন। বিজ্ঞানী আইজ্যাক নিউটন π এর আসন্ন মান ১৫ ঘর পর্যন্ত সঠিক বের করেছিলেন। বৃত্তের ব্যাস 1 একক হলে, π এর আসন্ন মান চিত্রের মতো দেখানো যায়।



ভারতীয় গণিতবিদ শ্রীনিবাস রামানুজন (ডিসেম্বর ২২, ১৮৮৭ – এপ্রিল ২৬, ১৯২০) π এর আসন্ন মান দশমিকের পর মিলিয়ন ঘর পর্যন্ত সঠিক বের করেছিলেন। তবে বিশ শতকে কম্পিউটার আবিষ্কারের পর π এর আসন্ন মান নির্ণয়ে নতুন জোয়ার আসে এবং তা চলমান আছে। প্রকৃতপক্ষে, π একটি অমূলদ সংখ্যা। [মূলদ ও অমূলদ সম্পর্কে বিস্তারিত আলোচনা]। পরবর্তীতে আমাদের দৈনন্দিন হিসাবের প্রয়োজনে π এর আসন্ন মান 3.14 ধরা হয়ে থাকে। তাহলে আমরা বলতে পারি, বৃত্তের পরিধি $= 3.14 \times$ বৃত্তের ব্যাস।

পাই দিবস

১৯৮৮ সালে মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রের (United States of America) সান ফ্রান্সিসকোর বিজ্ঞান জাদুঘরে পদার্থবিজ্ঞানী, কিউরেটর এবং শিল্পী ল্যারি শ (পূর্ণনাম: Lawrence N. Shaw) ১৪ মার্চ প্রথম পাই দিবস উদযাপন শুরু করেন। কিন্তু পাইয়ের মাঝে আবার ১৪ মার্চ কোথা থেকে এলো? আর ১৪ মার্চই বা কেনো বেছে নেওয়া হলো। এই প্রশ্নের উত্তর লুকিয়ে আছে কীভাবে তুমি প্রতিদিনের তারিখ লেখো তার উপর। আমরা সাধারণত 'প্রথমে দিন, তারপর মাস এবং তারপর বছর' অর্থাৎ ১/৪/২০০৩ মানে ১ এপ্রিল, ২০০৩। কিন্তু কোনো কোনো দেশ যেমন: মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রে (United States of America) 'প্রথমে মাস তারপর দিন এবং তারপর বছর' এভাবে লেখা হয়। তার মানে ৩/২৭/২০২৩ মানে হচ্ছে ২৭ মার্চ ২০২৩। আর এজন্যই পাইয়ের মান ৩.১৪১৫৯২ থেকে প্রথম ৩টি অঙ্ক নিয়ে ৩/১৪ এভাবে লেখা হয়। মার্কিন যুক্তরাষ্ট্রে যেহেতু মাস/দিন/বছর এরকমভাবে লেখা হয় কাজেই ৩/১৪ মানে ১৪ মার্চ কে 'পাই দিবস' হিসেবে পালন করা হয়। ২০০৯ সালে আমেরিকায় জাতীয়ভাবে 'পাই দিবস' কে স্বীকৃতি দেওয়া হয়।

কিন্তু আমার মনে হচ্ছে ১৪ মার্চ ছাড়াও আরও অন্য অনেক দিনকেই 'পাই দিবস' ঘোষণা করা যেত।

- প্রথমে দিন, তারপর মাস তারপর বছর এভাবে হিসাব করলে কোন তারিখ 'পাই দিবস' হতে পারত?

উত্তর:

- আচ্ছা, ওই তারিখে কি 'পাই দিবস' উদযাপন করা সম্ভব? তোমার কি মনে হয়?

উত্তর:

- যদি ইংরেজি মাসের (জানুয়ারি, ফেব্রুয়ারি, মার্চ ইত্যাদি) বদলে বাংলা মাস (বৈশাখ, জৈষ্ঠ্য, আষাঢ়, শ্রাবণ ইত্যাদি) দিয়ে চিন্তা করা হয় তাহলে কোন তারিখগুলি 'পাই দিবস' হতে পারত বলে তুমি মনে করো?

উত্তর:

আরেকটা মজার ব্যাপার হচ্ছে ২০১৯ সালে UNESCO তাদের ৪০তম সাধারণ অধিবেশনে '১৪ মার্চ' কে 'আন্তর্জাতিক গণিত দিবস (International Day of Mathematics)' ঘোষণা করে।

তোমার বিদ্যালয়ে 'বন্ধুদের জন্মদিন' উদযাপনের মতো করেই তোমরা 'পাই দিবস' এবং 'আন্তর্জাতিক গণিত দিবস' উদযাপন করতে পারো। পাই নিয়ে ছবি আঁকতে পারো, শুনতে পারো পাই নিয়ে তৈরি গান, পাইয়ের মতো দেখতে খাবার খেতে পারো।

একক কাজ

নিচের ছকটি খাতায় তৈরি করে পূরণ করো।

ক্রমিক নম্বর	বৃত্তের ব্যাসার্ধ (r)	বৃত্তের ব্যাস (d)	বৃত্তের পরিধি (c)	$\frac{c}{d}$
১.	7 সেন্টিমিটার			
২.		28 সেন্টিমিটার		
৩.			154 সেন্টিমিটার	
৪.	5.2 সেন্টিমিটার			
৫.		12 সেন্টিমিটার		
৬.			125.6 সেন্টিমিটার	

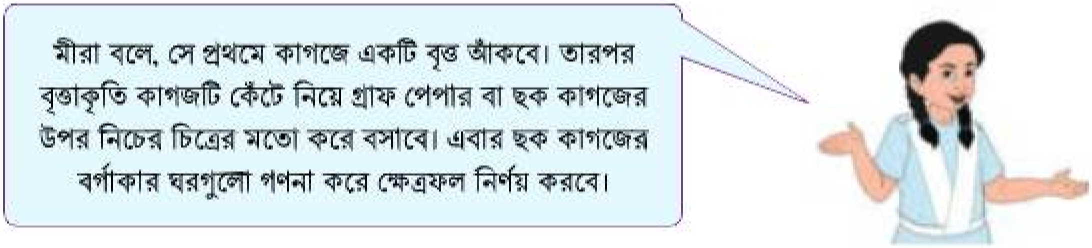
একটি বৃত্তাকৃতি পার্কের ব্যাস ও পরিধির পার্থক্য 90 মিটার। পার্কটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

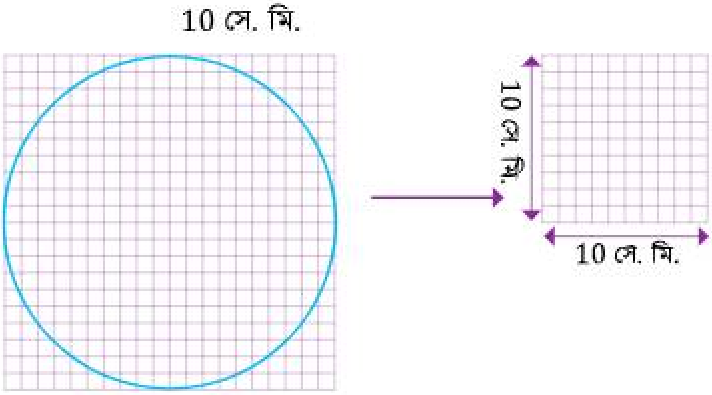
একটি গাড়ির সামনের চাকার ব্যাস 28 সেন্টিমিটার এবং পিছনের চাকার ব্যাস 35 সেন্টিমিটার। 88 মিটার পথ যেতে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা কত বার বেশি ঘুরবে?

বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (Area of a Circle)

মীরা সপ্তম শ্রেণির শিক্ষার্থী। তার স্কুলের সামনের মাঠটিও অনেক বড়। মাঠে প্রতিদিন সকালে সমাবেশ হয়। মাঠের ছোট ছোট সবুজ ঘাসগুলোর আলতো ছোঁয়ায় মীরার মনটা কেন জানি আনন্দে ভরে ওঠে। মাঠের পাশে ঠিক তার শ্রেণিকক্ষের দেওয়ালের সাথে যে বৃত্তাকৃতি খোলা জায়গাটুকু আছে সেখানে একটি ফুলের বাগান করার কথা অনেক দিন ধরেই মীরা ভাবছিল। একদিন সে ক্লাসের গণিত শিক্ষককে তার ইচ্ছার কথা জানায়। মীরার কথা শুনে ক্লাসের সহপাঠীরা একত্রে শিক্ষকের কাছে বাগান করার আবেদন করে। শিক্ষক তাঁর প্রিয় শিক্ষার্থীদের কথা শুনে খুব খুশি হন। তিনি প্রধান শিক্ষক মহোদয়কে শিক্ষার্থীদের ইচ্ছার কথা বলেন এবং অনুমতি পেয়ে শিক্ষার্থীদের নিয়ে ঐ স্থানে যান। স্থানটি প্রায় ৭ মিটার ব্যাসার্ধের একটি বৃত্তাকৃতি জায়গা। তিনি শিক্ষার্থীদের বলেন, আমরা যদি এখানে ফুলের বাগান করি, আমাদের বাগানটিকে পরিচর্যা করতে হবে, সার দিতে হবে। সার কেনার জন্য প্রতি বর্গমিটারে কি পরিমাণ সার লাগবে তা জানতে হবে। তোমরা কি বলতে পারবে এই ধরনের ক্ষেত্রে আমাদের কী খুঁজে বের করতে হবে? জমিটির পরিধি না এলাকা? প্রায় সকল শিক্ষার্থীই এক সাথে বলে, আমাদের প্রথমে এলাকা বা জমির ক্ষেত্রফল বের করতে হবে। আমরা তা কীভাবে নির্ণয় করব?

সামির এবং মীরা মনে মনে বৃত্তক্ষেত্রের ছবি কল্পনা করে।





তোমাদের নিশ্চয়ই মনে আছে, আমরা পূর্বের শ্রেণিতে গ্রাফ পেপার ব্যবহার করে দ্বিমাত্রিক বস্তুর ক্ষেত্রফল পরিমাপ করেছি। তাই না? একইভাবে গ্রাফ পেপার ব্যবহার করে বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলও পরিমাপ করতে পারব।

প্রথমে বৃত্তাকৃতি ক্ষেত্রটিকে সমান চার ভাগে ভাগ করো।

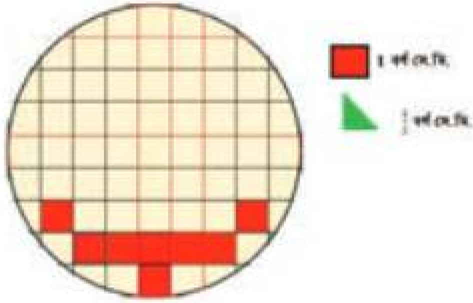
তাহলে একভাগ চিত্রের মতো হবে।

এবার গণনা করে দেখো নীল ও লাল রং এর কয়টি সম্পূর্ণ বর্গ আছে। তারপর বৃত্তের পরিধি দ্বারা কেটে নেওয়া লাল রং এর আংশিক বর্গগুলোর প্রতিটি 0.5 বর্গসেন্টিমিটার ধরে আনুমানিক ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

তাহলে হিসাবটি হবে

নীল বর্গগুলোর ক্ষেত্রফল = 1 × ☐ বর্গসেন্টিমিটার = ☐ বর্গসেন্টিমিটার

লাল বর্গগুলোর ক্ষেত্রফল = 1 × ☐ বর্গসেন্টিমিটার = ☐ বর্গসেন্টিমিটার



লাল আংশিক বর্গগুলোর ক্ষেত্রফল = 0.5 × ☐ বর্গসেন্টিমিটার = ☐ বর্গসেন্টিমিটার

সম্পূর্ণ বর্গ ও আংশিক বর্গগুলোর ক্ষেত্রফলের সমষ্টিই হবে বৃত্তাকৃতি ক্ষেত্রটির চার ভাগের একভাগের ক্ষেত্রফল।

সুতরাং সম্পূর্ণ বৃত্তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হবে = 4 × ☐ বর্গসেন্টিমিটার।

আর কোনো উপায়ে বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায় কিনা চলো খুঁজে দেখি।

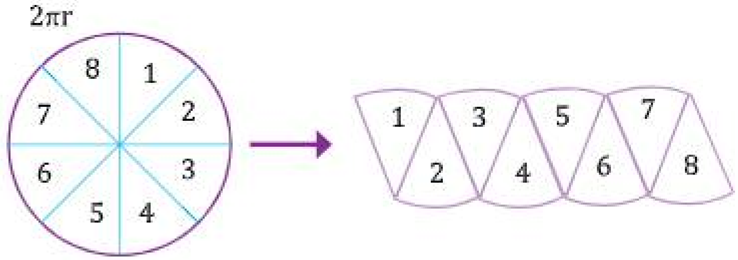
দলগত কাজ

কাগজ কেটে বিভিন্ন রং এর এক বর্গসেন্টিমিটার ব্লক এবং সমকোণী ত্রিভুজ দ্বারা মেপে বৃত্তের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করো।

বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র খুঁজি

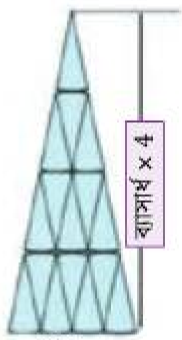
দলগত কাজ

১. সামির তার ভাবনাটি দলের সদস্যদের সাথে আলোচনা করে। সে অনুসারে একটি আর্ট পেপার বা পুরাতন ক্যালেন্ডারের পিছনের সাদা পৃষ্ঠায় বৃত্ত এঁকে বৃত্তক্ষেত্রটি কেটে নেয়। এবার বৃত্তাকৃতি ক্ষেত্রটি মাঝ বরাবর পর্যায়ক্রমে তিনবার ভাঁজ করে এবং ভাঁজ বরাবর কেটে নেয়। ফলে বৃত্তটি সমান আটটি অংশে বিভক্ত হয়। বৃত্তের টুকরোগুলোকে চিত্রের ন্যায় সাজানোর ফলে বৃত্তাকৃতি ক্ষেত্রটি অন্য রকম একটি জ্যামিতিক আকৃতিতে রূপান্তরিত হলো।

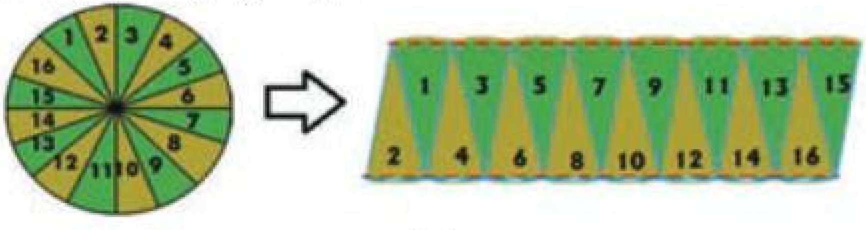


রূপান্তরিত জ্যামিতিক আকৃতিটি একটি সামান্তরিকের মতো হবে। এক্ষেত্রে বৃত্তের আবদ্ধ বক্ররেখাটির অর্ধেক সামান্তরিকের ভূমি এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ সামান্তরিকের উচ্চতা হবে। এবার সামান্তরিকের ভূমি ও উচ্চতা পরিমাপ করে সহজেই এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যাবে? যেহেতু বৃত্তক্ষেত্রটিকে কেটে টুকরোগুলো সাজিয়ে সামান্তরিক বানানো হয়েছে, সেহেতু সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল ও বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হবে।

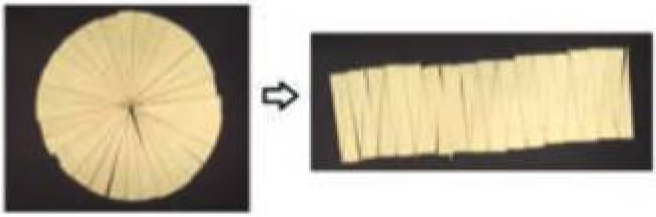
২. সাবিহা বৃত্তাকৃতি ক্ষেত্রটিকে সমান ১৬টি অংশে বিভক্ত করে। টুকরোগুলোকে পাশের চিত্রের মতো সাজিয়ে ত্রিভুজ আকৃতি খুঁজে পেল।



৩. তারেক বৃত্তাকৃতি ক্ষেত্রটিকে সমান ১৬টি অংশে বিভক্ত করে। টুকরোগুলোকে একইভাবে সাজিয়ে সামান্তরিকের মতো আকৃতি খুঁজে পেল।

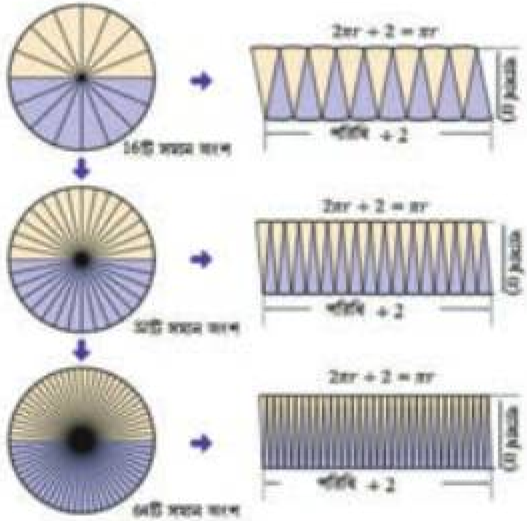


৪. মীরা আরও একটি বৃত্তক্ষেত্র কেটে নিয়ে তাকে সমান ৩২টি অংশে বিভক্ত করে। টুকরোগুলোকে একইভাবে সাজিয়ে পাশের চিত্রটি পেল।



মীরা টুকরোগুলোকে সাজিয়ে যে জ্যামিতিক আকৃতিটি পেল তা একটি আয়তরূপ। এক্ষেত্রে আয়তের দৈর্ঘ্য হবে বৃত্তক্ষেত্রটির অর্ধ পরিসীমা এবং প্রস্থ হবে বৃত্তক্ষেত্রটির ব্যাসার্ধের সমান।

৫. কোনো বৃত্তাকৃতি ক্ষেত্রকে সামির, সাবিহা, তারেক ও মীরার মতো যদি আমরা ৬৪ বা তারও বেশি সমান অংশে বিভক্ত করি এবং উপরের চিত্রের মতো সাজাই, সেক্ষেত্রে বৃত্তক্ষেত্রটি আয়তক্ষেত্রের মতই হবে। আমরা যদি নিচের চিত্রটি ধাপে ধাপে পর্যবেক্ষণ করি, তবে বিষয়টি সম্পর্কে আরো পরিষ্কার ধারণা পাব।



এবার চলো নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খুঁজি।

- উপরের চিত্রের আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য (পরিধির অর্ধেক πr) এবং প্রস্থ (ব্যাসার্ধ r) পরিমাপ করি।
- আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।
- বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (টুকরা করার পূর্বে ছক কাগজ ব্যবহার করে পরিমাপ করে রাখতে হবে) ও আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের মধ্যে কোনো সম্পর্ক আছে কী?

উপরের আলোচনা থেকে আমরা বলতে পারি

– বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ

= পরিধির অর্ধেক × ব্যাসার্ধ

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$

$= \pi r^2$ বর্গএকক।

জোড়ায় কাজ :

(ক) প্রত্যেক দল ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কন করো। ক্ষুদ্রতম বর্গগুলো গণনা করে বৃত্তক্ষেত্রটির আনুমানিক ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(খ) একই বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করে যাচাই করো।

অনুশীলনী

১. তোমরা প্রত্যেকে পছন্দমতো ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধের কয়েকটি বৃত্ত আঁকো। বৃত্তক্ষেত্রগুলোর ব্যাসার্ধ, ব্যাস, পরিধি পরিমাপ করো। তারপর ছক কাগজ ও সূত্র দ্বারা ক্ষেত্রফল পরিমাপ করে সারণিটি পূরণ করো।

বৃত্ত	ব্যাসার্ধ	ব্যাস	পরিধি (সুতা বা দড়ি ব্যবহার করে)	পরিধি (সূত্র ব্যবহার করে)	ক্ষেত্রফল (ছক কাগজ ব্যবহার করে)	ক্ষেত্রফল (সূত্র ব্যবহার করে)	ছক কাগজ ও সূত্র ব্যবহার করে পাওয়া ক্ষেত্রফলদ্বয়ের মধ্যে তুলনা
১							
২							
৩							
৪							

২. নিচের ছকটি খাতায় আঁকো এবং হিসাব করে খালি ঘরগুলো পূরণ করো।

ক্রমিক নম্বর	ব্যাসার্ধ	ব্যাস	বৃত্তের পরিধি	বৃত্তের ক্ষেত্রফল
১.	১২ সেন্টিমিটার	....	....	....
২.	....	২১ সেন্টিমিটার	....	....
৩.	....	....	২৩ সেন্টিমিটার	....
৪.	....	....	....	২৫৪.৩৪ বর্গসেন্টিমিটার

৩. পাশের চিত্রে দুটি সমকেন্দ্রিক বৃত্ত প্রদর্শিত আছে। OAB সমকোণী ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল ১৮ বর্গমিটার।

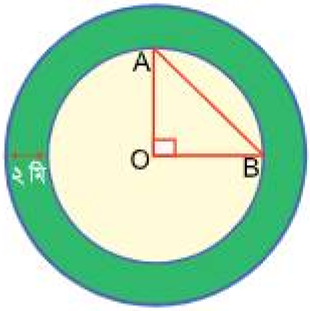
ক) ছোট বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় করো।

খ) বড় বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় করো।

গ) ছোট বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

ঘ) বড় বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

ঙ) সবুজ অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

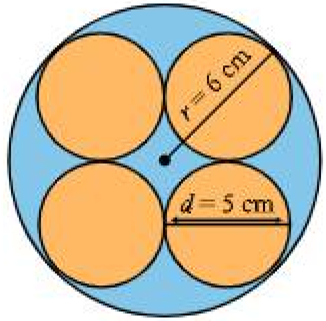


৪. একটি পুরাতন ক্যালেন্ডারের পিছনের পৃষ্ঠায় ১৫ সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধের বৃত্ত আঁকো। এবার ক্যালেন্ডারের বৃত্তাকৃতি অংশটুকু কেটে নাও। বৃত্তাকৃতি অংশ থেকে ২.৫ সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধের দুটি বৃত্তাকৃতি অংশ এবং ৩.৫ সেন্টিমিটার

দৈর্ঘ্য ও ২ সেন্টিমিটার প্রস্থের একটি আয়তাকৃতি অংশ কেটে ফেলে দাও। বাকি অংশটুকু তোমার পছন্দমতো রং করো। তোমার রং করা অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

৫. একটি বৃত্তাকৃতি পার্কের ব্যাস ২৫ মিটার। পার্কটিকে বেষ্টন করে ভিতরে ২ মিটার প্রশস্ত একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

৬. কাগজ কেটে পাশের চিত্রের মতো ৬ সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি বৃত্তক্ষেত্র কেটে নাও। এবার ৫ সেন্টিমিটার ব্যাস বিশিষ্ট আরো চারটি বৃত্তক্ষেত্র কেটে নাও।



এবার ছোট বৃত্তক্ষেত্রগুলো তোমার পছন্দমতো রং করে উপরের চিত্রের মতো বড় বৃত্তের ভিতরে আঠা দিয়ে বসাও। এখন নিচের ছকটি খাতায় তৈরি করে ফাঁকা ঘরগুলো পূরণ করো।

<table>
<tr><th>ক্রমিক নং</th><th>বৃত্তের ব্যাসার্ধ</th><th>ব্যাস</th><th>পরিধি</th><th>ক্ষেত্রফল</th></tr>
<tr><td>১.</td><td>৬ সেন্টিমিটার</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>২.</td><td></td><td>৫ সেন্টিমিটার</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>৩.</td><td colspan="3">বড় বৃত্তের যে অংশটুকু রং করা হয়নি তার ক্ষেত্রফল</td><td></td></tr>
</table>

৭. ফাতিন তার বড় বোন লামিয়ার সাথে পিজ্জা কিনতে গেল। দোকানে ঝুলিয়ে রাখা মূল্য তালিকায় দুই ধরনের প্যাকেজ দেখতে পেল। উভয় প্যাকেজের পিজ্জার উচ্চতা সমান।

ক. ৩৫ সেন্টিমিটার ব্যাস বিশিষ্ট একজোড়া পিজ্জার দাম ৩০০ টাকা

খ. ৩০ সেন্টিমিটার ব্যাস বিশিষ্ট তিনটি পিজ্জার দাম ৩৫০ টাকা

কোন প্যাকেজটি কিনলে ফাতিন ও লামিয়া লাভবান হবে?

৮. বৃত্তাকৃতি সামগ্রী প্রদর্শন ও খুঁটিনাটি হিসাব সংক্রান্ত প্রজেক্ট: শ্রেণির সকল শিক্ষার্থী কয়েকটি দলে বিভক্ত হয়ে দৈনন্দিন জীবনে ব্যবহৃত ও পরিচিত বৃত্তাকৃতি জিনিসপত্র সংগ্রহ করে জিনিসপত্রগুলোর ব্যাসার্ধ, ব্যাস, পরিধি ও ক্ষেত্রফল মেপে হিসাবসহ প্রদর্শন করো। দলের সকল সদস্য পরস্পরের সাথে আলোচনা করে অন্যান্য দলের সামনে উপস্থাপন করো।

৯. রুমাল, নেপকিন, কুশন বা যেকোনো কাপড়ে বিভিন্ন রকমের সুতা দিয়ে নকশা তৈরি করা নীতুর পছন্দের একটি কাজ। লেখাপড়ার পাশাপাশি অবসর সময়ে সে কাপড়ের উপর সুঁই-সুতা দিয়ে বিভিন্ন রকমের নকশা তৈরি করে। নীতু যে বৃত্তাকৃতি চাকতিটি (embroydery hoop) ব্যবহার করে তার ব্যাসার্ধ ১৫ সেন্টিমিটার।

ক) চাকতিটির পরিধি নির্ণয় করো।

খ) চাকতির ভিতরের কাপড়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদক, গসাগু ও লসাগু

বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক নির্ণয় (Factorization of Algebraic Expression)

আমরা ইতোপূর্বে বীজগণিতীয় রাশির গুণ ও ভাগ, দ্বিপদী ও ত্রিপদী রাশির বর্গ নির্ণয় করা শিখেছি। এ পর্বে আমরা বীজগণিতীয় রাশির উৎপাদক নির্ণয় করা শিখব।

তোমাদের প্রত্যেকের হাতে একটি করে কাগজ/ পৃষ্ঠা নাও। এবার পৃষ্ঠাটি মেপে এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নিয়ে ক্ষেত্রফল বের করো। তোমরা পূর্বেই শিখেছ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ এর গুণফল।

কোনো আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 12 বর্গমিটার। তাহলে উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত হতে পারে?

যা যা হতে পারে

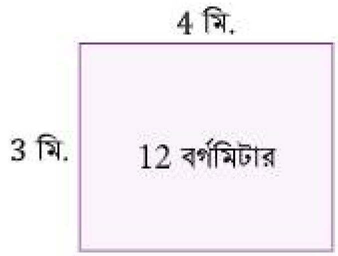
$1\times12=12\ m^2$

$2\times6=12\ m^2$

$3\times4=12\ m^2$

তোমরা হয়ত ভাবছ উপরের কোনটি উত্তর হতে পারে? উপরের প্রত্যেকটি বিকল্পই সঠিক হতে পারে। যেহেতু 1, 2, 3, 4, 6ও 12 এর প্রত্যেকটি সংখ্যা দিয়েই 12 কে ভাগ করলে কোনো ভাগ শেষ পাওয়া যায় না কাজেই প্রত্যেকটি সংখ্যাই 12 এর ভাজক বা উৎপাদক (factor).

এবার, আমরা ধরে নেই, 12 এর ভাজক বা উৎপাদক দুটি হলো 3 ও 4 অর্থাৎ 12 বর্গ মি.ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 4 ও 3 মি.

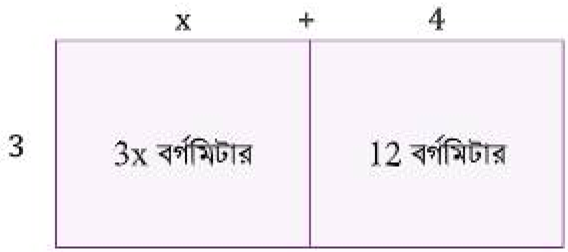


এবার যদি আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মি.বাড়ানো হয় তবে, ক্ষেত্রফল হবে

$3(x+4)=(3x+12)$ বর্গমিটার .

এখন যদি বলি $(3x+12)$ এর উৎপাদক কত?

এবার চলো $(3x+12)$ কে একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ধরে উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় করি।



এখানে, 3 এর উৎপাদক =1, 3

12 এর উৎপাদক =1, 2, 3, 4, 6, 12

সবচেয়ে বড় সাধারণ উৎপাদক হলো 3

প্রদত্ত চিত্র থেকে পাই, প্রস্থ =3 মিটার হলে এবং

দৈর্ঘ্য $=(x+4)$ মিটার

অর্থাৎ $(3x+12)$ এর উৎপাদক দুটি হলো যথাক্রমে 3 এবং $(x+4)$

উদাহর ১: একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $(9x^4+6x^3+12x^2)$ বর্গমিটার হলে তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত?

সমাধান: আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $(9x^4+6x^3+12x^2)$ এর একটি চিত্র অঙ্কন করি।

এখানে,

9 এর উৎপাদক =1, 3, 9

6 এর উৎপাদক =1, 2, 3, 6

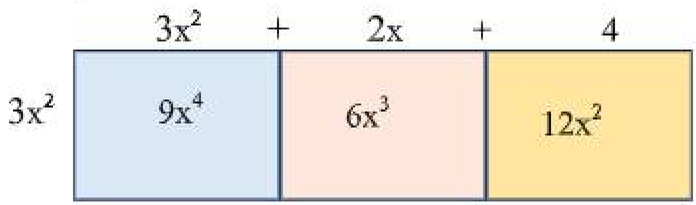
12 এর উৎপাদক =1, 2, 3, 4, 6, 12

সবচেয়ে বড় সাধারণ উৎপাদক হলো 3

এখানে, $9x^4$, $6x^3$, $12x^2$ এর সবচেয়ে বড় সাধারণ উৎপাদক হলো $3x^2$

প্রদত্ত চিত্র থেকে পাই, প্রস্থ $=3x^2$ মিটার হলে

দৈর্ঘ্য $=(3x^2+2x+4)$ মিটার



কাজেই, ক্ষেত্রফল $(9x^4+6x^3+12x^2)$ বর্গমিটার

একক কাজ

ছবির মাধ্যমে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

১) $20x+4y$

২) $28a+7b$

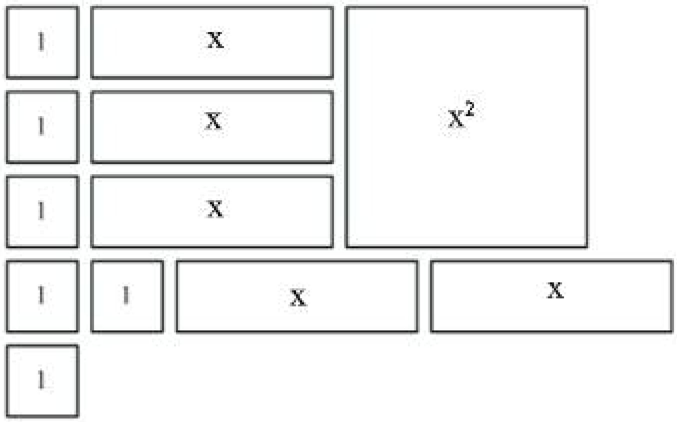
৩) $15y-9y^2$

৪) $5a^2b^2-9a^4b^2$

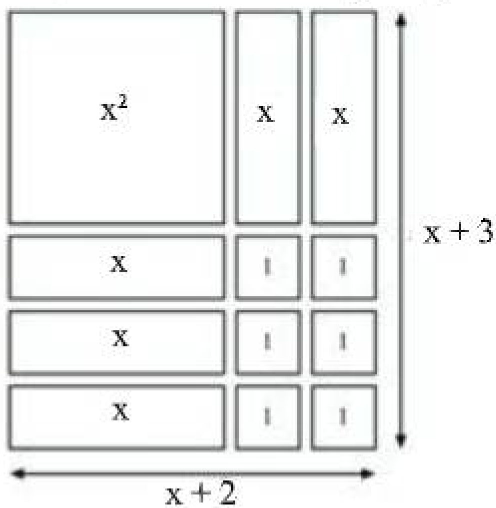
এবার আমরা উৎপাদক নির্ণয়ের কাগজ কাটা কাজ আলোচনা করি।

x^2+5x+6 এর উৎপাদক নির্ণয় করি।

প্রথমে কতগুলো কাগজ কেটে নিচের মত ব্লক বা মডেল তৈরি করি ও ইংরেজি বর্ণ দ্বারা চিহ্নিত করি।



উপরের কাগজগুলোকে এমনভাবে স্থাপন করি যেন একটি আয়তাকৃতি আকৃতি গঠন করে।

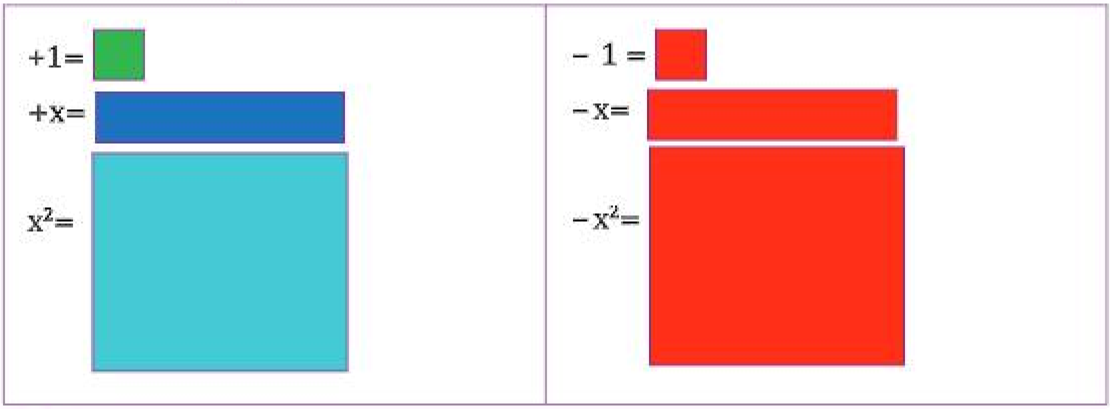


গঠিত আয়তাকৃতি ক্ষেত্রটির বাহুদ্বয় যথাক্রমে $(x+3)$ ও $(x+2)$, যা নির্দেশ করে x^2+5x+6 এর উৎপাদক হলো $(x+3)(x+2)$।

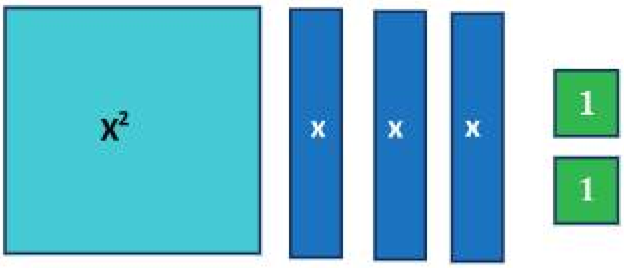
উদাহরণ:

কাগজকাটা কাজের মাধ্যমে x^2+3x+2 এর উৎপাদক নির্ণয় করো।

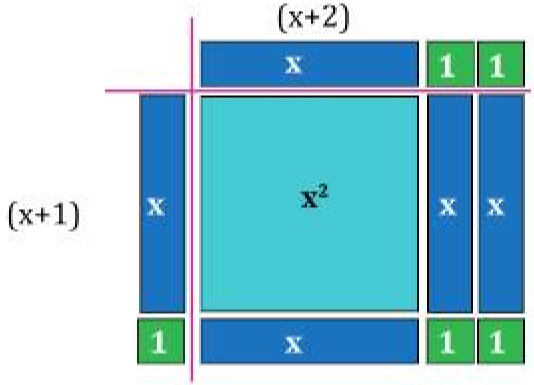
ধাপ ১: প্রথমে কাগজগুলো কেটে নিয়ে নিচের মতো রং করি।



ধাপ ২: x^2+3x+2 এর উৎপাদক নির্ণয়ের প্রয়োজনীয় কাগজগুলো হলো:



ধাপ ৩: বিভিন্ন আকৃতিতে সাজাতে চেষ্টা করি যেন একটি আয়তাকৃতি আকৃতি গঠিত হয়।



ধাপ ৪: ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থই তার উৎপাদক নির্দেশ করবে।

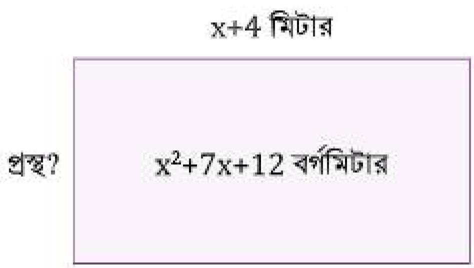
কাজেই, x^2+3x+2 এর উৎপাদক হলো $(x+1)\ (x+2)$

একক কাজ

একটিভিটির মাধ্যমে ছবির সাহায্যে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

1. $x^2 + 3x + 2$
2. $x^2 - x - 2$
3. $x^2 - 3x + 2$
4. $x^2 - 4x + 4$
5. $x^2 - 2x + 1$
6. $x^2 + 2x + 1$
7. $x^2 + 5x + 6$
8. $x^2 + x - 6$
9. $x^2 - 5x + 6$
10. $x^2 - 6x + 9$
11. একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ $14xy$ এবং ক্ষেত্রফল $42xy^3$ হলে, এর দৈর্ঘ্য কত?
12. যদি চিত্রে প্রদত্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্যকে 2 একক বৃদ্ধি করা হয় এবং প্রস্থকে 1 একক হ্রাস করা হয় তাহলে এর পরিসীমা ও ক্ষেত্রফলে কী পরিবর্তন ঘটবে নির্ণয় করো।

13. যদি একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $(x+4)$ মিটার এবং এর ক্ষেত্রফল $x^2+7x+12$ বর্গমিটার হয়, সে ক্ষেত্রে প্রস্থ কত হবে?



ক্ষেত্রটির প্রস্থ = $\boxed{}$ মিটার

বীজগণিতীয় রাশিমালার গসাগু ও লসাগু

ইতোমধ্যেই আমরা বীজগণিতীয় রাশির বর্গ উৎপাদকে বিশ্লেষণ, গুণ এবং নির্ণয় শিখেছি। এ অধ্যায়ে আমরা বীজগণিতীয় রাশিমালার লসাগু ও গসাগু নির্ণয় করা শিখব।

আমরা প্রথমে দুটি খেলার মাঠের আকৃতি নিয়ে চিন্তা করি। প্রথম মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে x মিটার ও y মিটার এবং দ্বিতীয় মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে x মিটার ও z মিটার ধরি। এবার তোমরা কি বলতে পারো কোন মাঠের ক্ষেত্রফল কত? চলো মাঠ দুটিকে চিত্রে দেখি।

x y xy	x z xz
বলো তো এই মাঠের ক্ষেত্রফল কত? এখানে দৈর্ঘ্য × প্রস্থ=ক্ষেত্রফল xy	এই মাঠের ক্ষেত্রফল কত? এখানে দৈর্ঘ্য × প্রস্থ=ক্ষেত্রফল xz
এখানে, x ও y এর প্রত্যেকটি হলো উৎপাদক বা ভাজক বা গুণনীয়ক কারণ xy রাশিটি x বা y বা xy দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। এবং xy হলো x বা y বা xy এর গুণিতক	এখানে, x ও z এর প্রত্যেকটি হলো উৎপাদক বা ভাজক বা গুণনীয়ক এবং xz হলো গুণিতক

লক্ষ করো দুটি খেলার মাঠের দৈর্ঘ্যই পরস্পর সমান। তোমরা কি বলতে পারো উভয় মাঠের ক্ষেত্রফলের মধ্যেই আছে এমন পদ কোনটি? হ্যাঁ, উভয় মাঠের ক্ষেত্রফলের মধ্যেই আছে এমন পদ x. তাহলে এই x কে আমরা কী বলতে পারি? উভয় মাঠের ক্ষেত্রফলের অর্থাৎ xy এবং xz এর সাধারণ উৎপাদক বলতে পারি।

সাধারণ গুণনীয়ক বা সাধারণ উৎপাদক (common factor):- দুই বা ততোধিক বীজগাণিতিক রাশি অপর কোনো রাশি দ্বারা সম্পূর্ণ বিভাজ্য হলে শেষোক্ত রাশিটিকে ওই দুই বা ততোধিক বীজগণিতীয় রাশির সাধারণ গুণনীয়ক বা সাধারণ উৎপাদক বলে।

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বা গসাগু (Highest Common Factor or H.C.F): দুই বা ততোধিক রাশির মধ্যে যতগুলো সাধারণ মৌলিক গুণনীয়ক থাকে, তাদের গুণফলকে পূর্বোক্ত রাশিগুলোর গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বা গসাগু (Highest Common Factor or H.C.F) বলে।

উদাহরণ-১: গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক বা গসাগু নির্ণয় করো: xyz, $5x$, $3xp$

সমাধান: প্রথমে প্রদত্ত রাশিগুলোর সাংখ্যিক সহগের গসাগু নির্ণয় করি। এখানে xyz, $5x$ এবং $3xp$ এর সাংখ্যিক সহগ যথাক্রমে 1, 5 এবং 3 যাদের গসাগু 1

- এবার প্রদত্ত রাশি তিনটির মৌলিক উৎপাদক/ গুণনীয়কগুলো খুঁজে বের করি
  xyz এর মৌলিক গুণনীয়কগুলো যথাক্রমে x, y, z
  $5x$ এর মৌলিক গুণনীয়কগুলো যথাক্রমে $5, x$
  $3xp$ এর মৌলিক গুণনীয়কগুলো যথাক্রমে $3, x, p$
- প্রদত্ত রাশি তিনটির মৌলিক উৎপাদক থেকে সাধারণ উৎপাদক চিহ্নিত করি

$$x\,y\,z = x \cdot y \cdot z$$

$$5\,x = 5 \cdot x$$

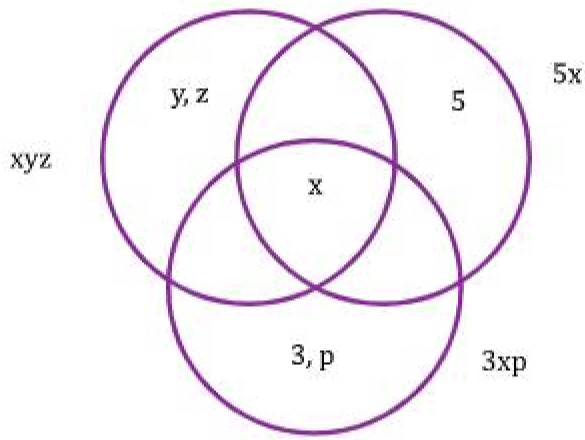
$$3\,x\,p = 3 \cdot x \cdot p$$

- এবার তিনটি বৃত্তে উৎপাদকগুলোকে উপস্থাপন করি

রাশিগুলোর গসাগু x

এবং লসাগু $= (y{\cdot}z){\cdot}(x){\cdot}(5){\cdot}(3{\cdot}p)$

$= 15xyzp$



একক কাজ

১. যে সকল বীজগণিতীয় রাশি দ্বারা গসাগু x গঠিত, আমরা কি সেই সকল রাশিগুলিকে গসাগু দ্বারা ভাগ করতে পারি?

২. যে সকল বীজগণিতীয় রাশি দ্বারা লসাগু $15xyzp$ গঠিত, আমরা কি সেই সকল বীজগণিতীয় রাশি দ্বারা লসাগু কে ভাগ করতে পারি ব্যাখ্যা করো।

উদাহরণ-২: $8x^2yz^2$ এবং $10x^3y^2z^3$ এর গসাগু নির্ণয় করো।

সমাধান: প্রদত্ত রাশিগুলোর সাংখ্যিক সহগের গসাগু নির্ণয় করি। এখানে $8x^2yz^2$ এবং $10x^3y^2z^3$ এর সাংখ্যিক সহগ যথাক্রমে 8 এবং 2 যাদের গসাগু 2

- $8x^2yz^2$ ও $10x^3y^2z^3$ রাশি দুটির মৌলিক উৎপাদক খুঁজে বের করি

$8x^2yz^2 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot x\cdot x\cdot y\cdot z\cdot z$

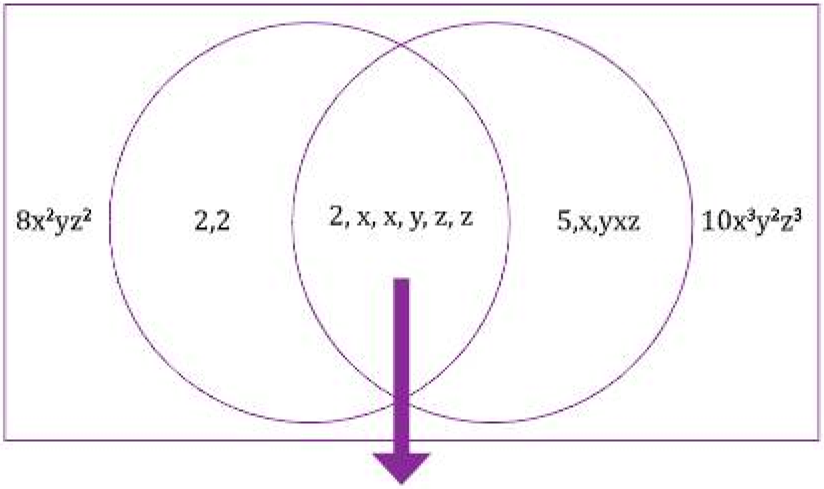
$10x^3y^2z^3 = 2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z \cdot z \cdot z$

- রাশি দুটির মৌলিক উৎপাদক থেকে সাধারণ উৎপাদক চিহ্নিত করি

$8x^2yz^2 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, x \,.\, x \,.\, y \,.\, z \,.\, z$

$10x^3y^2z^3 = 2 \,.\, 5 \,.\, x \,.\, x \,.\, x \,.\, y \,.\, y \,.\, z \; z \,.\, z$

- এবার দুটি বৃত্তে উৎপাদকগুলোকে উপস্থাপন করি



উভয়বৃত্তে সাধারণ উৎপাদক/গুণনীয়ক

এখন, গসাগু= $2x^2yz^2$

এবং লসাগু = $(2 \cdot 2)(\ 2 \cdot x \cdot x \cdot y \cdot z \cdot z\ )(5 \cdot x \cdot y \cdot z) = \ 40x^3y^2z^3$

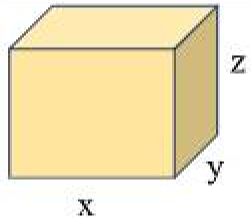
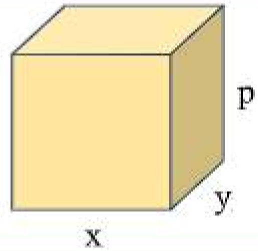
গসাগু নির্ণয়ের নিয়ম

১. পাটিগণিতের নিয়মে প্রদত্ত রাশিগুলোর সাংখ্যিক সহগের গসাগু নির্ণয় করতে হবে।

২. বীজগণিতীয় রাশিগুলোর মৌলিক উৎপাদক বের করতে হবে।

৩. সাংখ্যিক সহগের গসাগু এবং প্রদত্ত রাশিগুলোর বীজগণিতীয় সাধারণ মৌলিক উৎপাদকগুলোর ধারাবাহিক গুণফল হচ্ছে নির্ণেয় গসাগু।

এবার আমরা দুটি বাক্সের আয়তন নিয়ে চিন্তা করি। প্রথম বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে x মিটার, y মিটার ও z মিটার এবং দ্বিতীয় বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে x মিটার, y মিটার ও p মিটার ধরি। এবার তোমরা কি বলতে পারো কোন বাক্সের আয়তন কত?

	
বলতো প্রথম বাক্সের আয়তন কত? এখানে দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা = আয়তন $x \cdot y \cdot z = xyz$	দ্বিতীয় বাক্সের আয়তন কত? এখানে দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা = আয়তন $x \cdot y \cdot p = xyp$
এখানে, x, y ও z এর প্রত্যেকটি হলো উৎপাদক বা ভাজক বা গুণনীয়ক কারণ xyz রাশিটি x বা y বা z বা xyz দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। এবং xyz হলো x বা y বা z বা xyz এর গুণিতক	এখানে, x, y ও p এর প্রত্যেকটি হলো উৎপাদক বা ভাজক বা গুণনীয়ক কারণ xyz রাশিটি xবা yবা z বা xyz দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। এবং xyz হলো x বা y বা p বা xyp এর গুণিতক

লক্ষ করো উভয় বাক্সের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ পরস্পর সমান। তোমরা কি এবার বলতে পারো উভয় বাক্সের আয়তনের মধ্যেই আছে এমন পদ কোনটি? হ্যাঁ, উভয় মাঠের আয়তনের মধ্যেই আছে এমন পদ x এবং y। তাহলে এই x ও y কে আমরা কি বলতে পারি? উভয় বাক্সের আয়তনের অর্থাৎ xyz এবং xyp এর সাধারণ উৎপাদক বলতে পারি।

আবার, xyz ও xyp এই দুটি রাশির একটি সাধারণ গুণিতক হলো xyzp কারণ xyzp এই দুটি রাশির প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য।

কোন একটি রাশি অপর একটি রাশি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজিত হলে প্রথম রাশিটিকে শেষের রাশির গুণিতক বলে। যেমন: x^3y রাশিটি x, x^2, x^3, xy, y ইত্যাদি রাশি দ্বারা বিভাজিত হয়। তাই x^3y রাশিটিকে x, x^2, x^3, xy, y ইত্যাদি রাশির গুণিতক বলে।

যদি কোনো রাশি দুই বা ততোধিক রাশির প্রত্যেকটি দিয়ে নিঃশেষে বিভাজিত হয় তাহলে প্রথমোক্ত রাশিটিকে শেষোক্ত রাশি দুটির বা রাশিসমূহের সাধারণ গুণিতক বলে। যেমন: xy, x^2y, xy^2 এই তিনটি রাশির একটি সাধারণ গুণিতক হলো x^2y^2, কারণ x^2y^2 ঐ তিনটি রাশির প্রত্যেকটি দ্বারা বিভাজ্য।

লসাগু নির্ণয়ের নিয়ম

লসাগু (Lowest Common Multiple or LCM) নির্ণয়

প্রত্যেক রাশিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে উক্ত উৎপাদকগুলোর প্রত্যেকটির যে মাত্রা রাশিগুলোর মধ্যে সর্বোচ্চ, তাদের গুণফলই রাশিগুলোর লসাগু হবে। রাশিগুলোর সংখ্যা সহগগুলোর লসাগুই নির্ণেয় লসাগু'র সংখ্যা সহগ হবে।

লসাগু এর পূর্ণরূপ লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক। দুই বা ততোধিক রাশি দিয়ে যে রাশি বিভাজ্য, তাদের মধ্যে সর্বনিম্ন মাত্রা বিশিষ্ট রাশিকে দুই বা ততোধিক রাশিগুলির লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক বা লসাগু বলে।

অনুশীলনী

(ক) গসাগু নির্ণয় করো

১. $a^2b^2c^2, 6ab^2c^2$

২. $10ab^2x^2, 15a^2by^2$

৩. $a^2x^2, 6axy^2, 9ay^2$

৪. $16a^3x^4y, 40a^2y^2x, 28ax^3$

৫. $a^2 + ab, a^2 - b^2, (a + b)^2$

৬. $x^3y - xy^3, x(x - y)^2$

৭. $(a^2 + 10a + 25), (a^2 + 25)$

৮. $a(a + b), a(a^2 - b^2), a^2(a - b)$

৯. $(a - 2), (a^2 - 4), (a^2 - a - 2)$

১০. $3a^2 + 27a, a^2 (a + 9), a^3(a + 9)$

(খ) লসাগু নির্ণয় করো

১. $a^2b^2c^2, 6ab^2c^2$

২. $10ab^2x^2, 15a^2by^2$

৩. $a^2x^2, 6axy^2, 9ay^2$

৪. $16a^3x^4y, 40a^2y^2x, 28ax^3$

৫. $a^2 + ab, a^2 - b^2, (a + b)^2$

৬. $x^3y - xy^3, x(x - y)^2$

৭. $(a^2 + 10a + 25), (a^2 + 25)$

৮. $a(a + b), a(a^2 - b^2), a^2(a - b)$

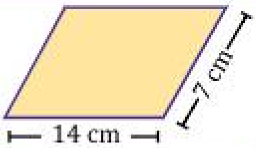
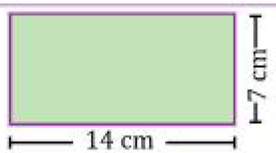
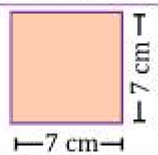
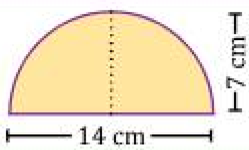
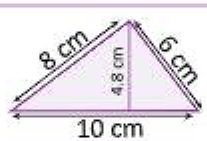
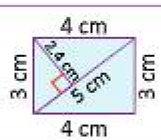
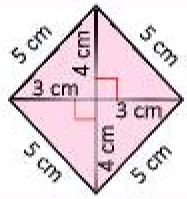
৯. $(a - 2), (a^2 - 4), (a^2 - a - 2)$

১০. $3a^2 + 27a, a^2 (a + 9), a^3(a + 9)$

নানা রকম আকৃতি মাপি

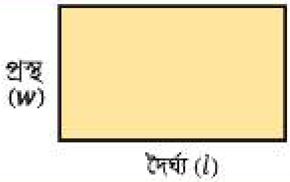
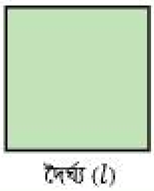
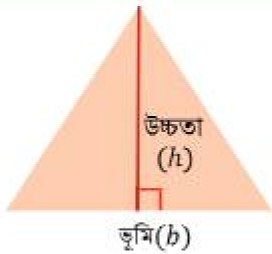
আমরা সমতল দ্বিমাত্রিক জ্যামিতিক আকৃতি সম্পর্কে জেনেছি। ত্রিভুজ, সামান্তরিক, আয়ত, বর্গ ও বৃত্ত ইত্যাদি আকৃতির পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা শিখেছি।

এবার চলো নিচের ছক- ১ পূরণ করি:

ছক – ১			
আকৃতি	নাম	পরিসীমা	ক্ষেত্রফল
	সামান্তরিক		
			
			
			
			
			
			

এবার মনে করো দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মান জানা নেই। তাহলে মান বসানোর পরিবর্তে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থকে অজানা রাশি হিসেবে চলক দিয়ে প্রকাশ করে দেখি।

ছক – ২

আকৃতি	নাম	ক্ষেত্রফল	পরিসীমা/পরিধি
			
			
			
			
			

ট্রাপিজিয়াম আকৃতির ক্ষেত্রফল মাপি

সালাম স্যার গণিত বিষয় পড়ান। তিনি একদিন ক্লাসে এসে শিক্ষার্থীদের উদ্দেশ্যে বললেন, আমরা আয়তাকার, বর্গাকার, সামান্তরিক আকৃতির, ত্রিভুজাকৃতি এমনকি বৃত্তাকৃতি আকৃতি সম্পর্কে জেনেছি। তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা শিখেছি। আমরা অনেক জিনিস ব্যবহার করি বা আমাদের চারপাশে এমন জায়গা-জমি আছে, যাদের আকৃতি অনেকটা নিম্নরূপ:

একটু ভালোভাবে লক্ষ করলে আমরা দেখতে পাব উপরের ছবিগুলোর বিশেষ কোনো একটি অংশ একই ধরনের আকৃতি প্রদর্শন করে। পুর্বের শ্রেণিতে এই ধরনের আকৃতি সম্পর্কে জেনেছি। তোমরা কি বলতে পারবে এই ধরনের জ্যামিতিক আকৃতিকে আমরা কী বলে থাকি?

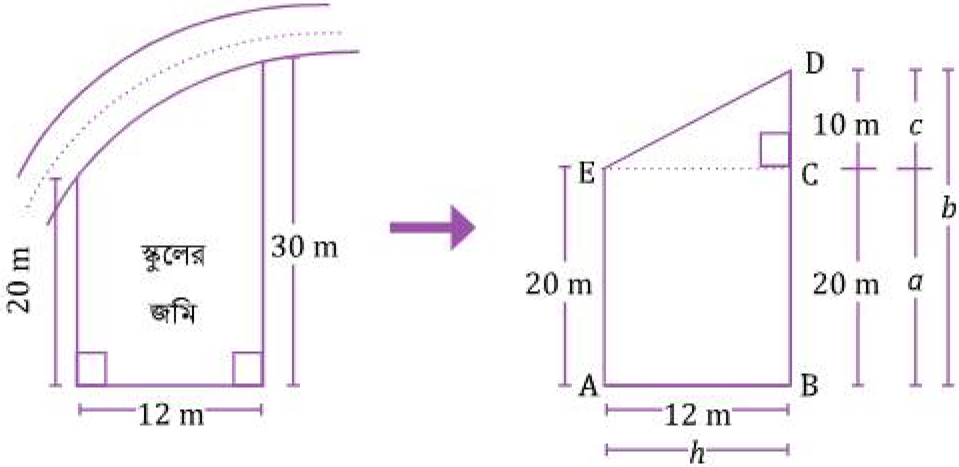
হ্যাঁ, এই ধরনের জ্যামিতিক আকৃতিকে আমরা ট্রাপিজিয়াম বলে থাকি।

আমাদের স্কুল যে জমিতে অবস্থিত অর্থাৎ আমাদের স্কুলের জমির সীমানার আকৃতির সাথে ট্রাপিজিয়াম আকৃতির কোনো মিল আছে কি?

চলো আজ আমারা আমাদের স্কুলের ট্রাপিজিয়াম আকৃতির জমি মেপে দেখি।

সালাম সাহেব দৈর্ঘ্য মাপার লম্বা ফিতা এবং শিক্ষার্থীদের নিয়ে স্কুল মাঠে গেলেন। শিক্ষার্থীরা তাঁর নির্দেশনা অনুসারে স্কুলের জমির সীমানা মেপে নিচের চিত্রটি অঙ্কন করে। জমিটির শীর্ষবিন্দুতে A, B, D এবং E বিন্দু বসিয়ে ABDE চতুর্ভুজটি পেল। চিত্রে ABDE চতুর্ভুজটির দুটি বিপরীত বাহু AE ∥ BD এবং অপর বাহুদ্বয় অসমান্তরাল। সুতরাং ABDE চতুর্ভুজটি একটি ট্রাপিজিয়াম। শিক্ষার্থীরা ABDE ট্রাপিজিয়াম আকৃতিটিকে দুটি অংশে বিভক্ত করে। প্রথম অংশ ABCE একটি আয়ত এবং দ্বিতীয় অংশ ECD একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

যেহেতু শিক্ষার্থীরা আয়ত ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল পরিমাপ করা জানে, সেহেতু তাদের স্কুলের জমির ক্ষেত্রফল নিম্নরূপে হিসাব করে বের করে।



হিসাব:

(ক) ABCE আয়তের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = AE × AB = $\square$ × $\square$ বর্গমিটার = $\square$ বর্গমিটার।

(খ) ECD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা = $\frac{1}{2}$ × EC × CD বর্গমিটার

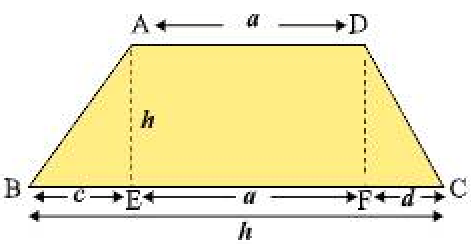
= $\frac{1}{2}$ × $\square$ × $\square$ বর্গমিটার = $\square$ বর্গমিটার।

সুতরাং ABDE ট্রাপিজিয়াম আকৃতির জমির ক্ষেত্রফল = ABCE আয়তের ক্ষেত্রফল + ECD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

= $\square$ বর্গমিটার + $\square$ বর্গমিটার

= $\square$ বর্গমিটার।

ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র খুঁজি



ABCD ট্রাপিজিয়াম আকৃতির জমির ক্ষেত্রফল = AEFD আয়তের ক্ষেত্রফল + ABE ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + DFC

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= (a.h + \frac{1}{2}.h.c + \frac{1}{2}.h.d) \text{ বর্গএকক}$$

$$= \left(a + \frac{c}{2} + \frac{d}{2}\right) \times h = \left(\frac{2a+c+d}{2}\right) \times h \text{ বর্গএকক}$$

$$= \left(\frac{2a+c+d}{2}\right) \times h = \left(\frac{a+a+c+d}{2}\right) \times h \text{ বর্গএকক}$$

$$= \frac{1}{2}\{a + (a + c + d)\} \times h \text{ বর্গএকক}$$

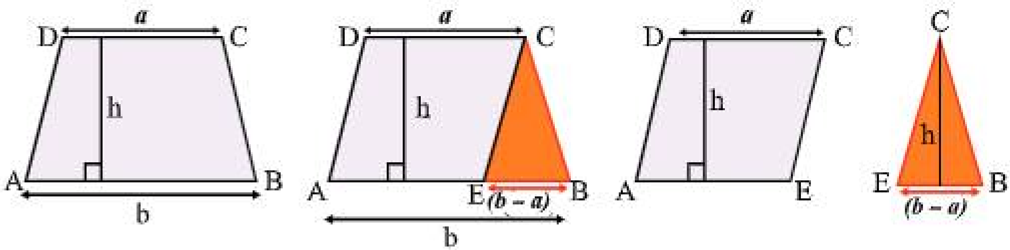
$$= \frac{1}{2}(a + b) \times h \text{ বর্গএকক, যেহেতু } a + c + d = b$$

$$= \frac{1}{2}(AD + BE) \times AB \text{ বর্গএকক}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{(সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি } \times \text{ উচ্চতা) বর্গএকক}$$

বিকল্প পদ্ধতিতে ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল নির্ণয়

১. কাগজে নিচের চিত্রের মতো ট্রাপিজিয়াম এঁকে ট্রাপিজিয়ামটি কেটে নাও।



২. সমান্তরাল বাহুদ্বয় এবং উচ্চতা মেপে খাতায় লিখে সংরক্ষণ করো।

৩. এবার বৃহত্তর বাহু থেকে ক্ষুদ্রতর বাহুর সমান মাপ নিয়ে সামান্তরিক তৈরি করো।

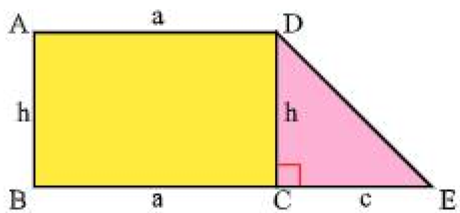
৪. এখন ত্রিভুজ অংশটুকু কেটে আলাদা করে ফেল। ফলে ট্রাপিজিয়ামটি সামান্তরিক ও একটি ত্রিভুজে বিভক্ত হবে।

৫. তোমারতো সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র জানা আছে। সুতরাং সামান্তরিক ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সূত্র ব্যবহার করে সহজেই ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে পারবে আশা করি।

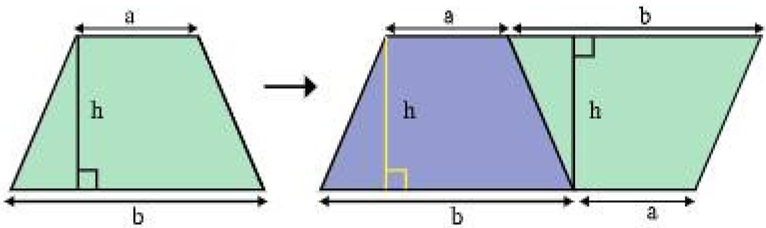
জোড়ায় কাজ

কাগজ কেটে নিচের (ক), (খ) ও (গ) চিত্রের মতো মডেল তৈরি করো। তারপর বিকল্প একাধিক পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

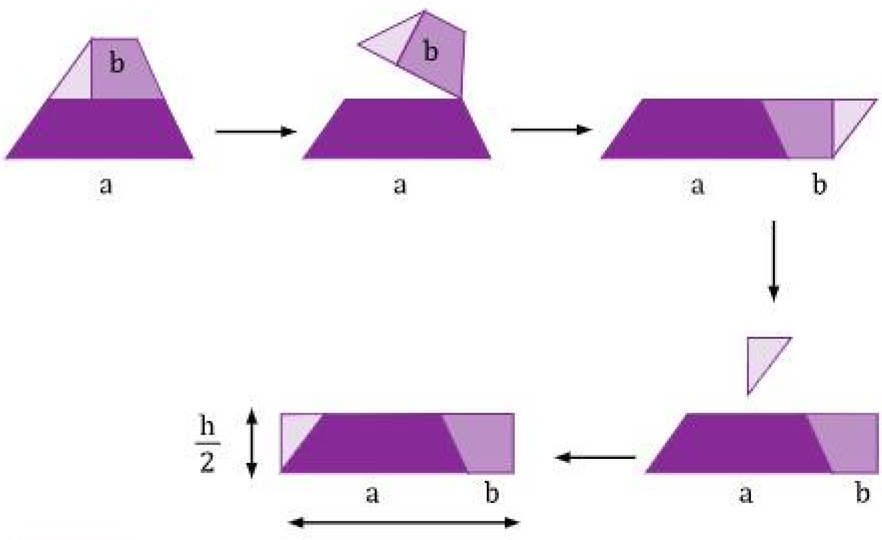
(ক)



(খ)



(গ)

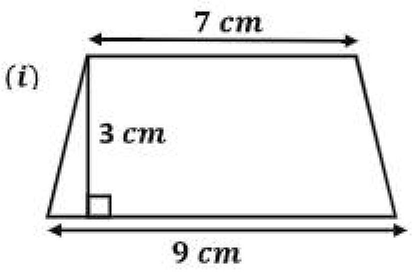


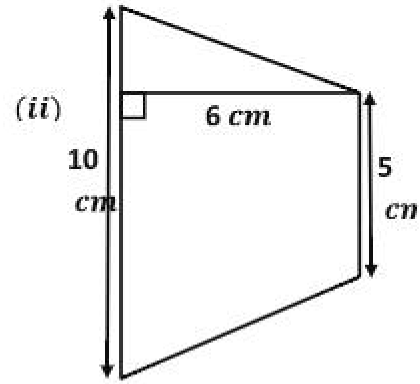
একক কাজ

১. গ্রাফ পেপারের উপর একটি ট্রাপিজিয়াম আঁকো। প্রতিটি ক্ষুদ্রতম বর্গকে 1 বর্গএকক এবং আংশিক ক্ষুদ্রতম অংশকে 0.5 বর্গএকক ধরে ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

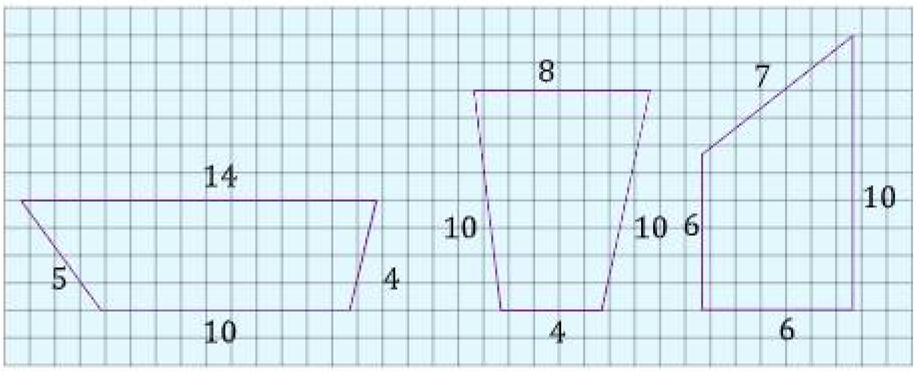
২. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুটির দৈর্ঘ্যের অন্তর 4 সেন্টিমিটার এবং এদের লম্ব দূরত্ব 16 সেন্টিমিটার। যদি ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল 352 বর্গসেন্টিমিটার হয়, তবে এর সমান্তরাল বাহু দুটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

৩. নিচের ট্রাপিজিয়াম দুটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো:



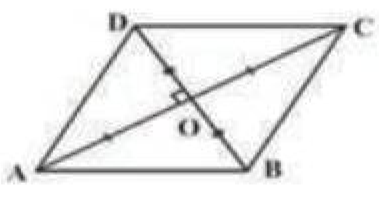


৪. নিচের কোন কোন ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল সমান কিন্তু পরিসীমা ভিন্ন? হিসাব করে যাচাই করো।



রম্বসের (Rhombus) ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র খুঁজি

মনে করো, নিচের ABCD চিত্রটি একটি রম্বস, যার AC ও BD দুটি কর্ণ। তুমিতো জানো, কোনো রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। তাহলে, AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। আবার AC কর্ণ ABCD রম্বসকে দুইভাগে বিভক্ত করেছে।



সুতরাং আমরা বলতে পারি,

রম্বস ABCD এর ক্ষেত্রফল = ΔADC এর ক্ষেত্রফল + ΔABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} AC \times OD + \frac{1}{2} \times AC \times OB$

$= \frac{1}{2} AC\ (OD + OB)$

$= \frac{1}{2} AC \times BD)$

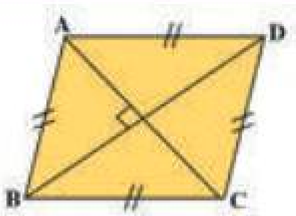
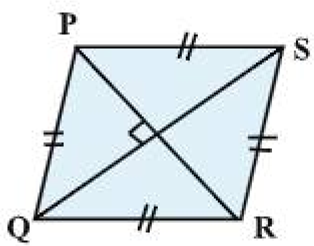
$= \frac{1}{2} (d_1 \times d_2)$; যেখানে $AC = d_1$ এবং $BD = d_2$

$= \frac{1}{2} \times$ কর্ণদ্বয়ের গুনফল

রম্বসের ক্ষেত্রফল = কর্ণদ্বয়ের গুণফলের অর্ধেক

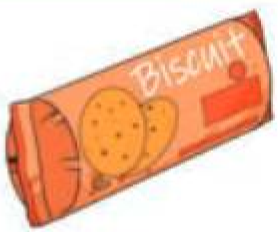
একক কাজ

নিচের ছকটি পূরণ করো।

আকৃতি	নাম	কর্ণ (d_1)	কর্ণ (d_2)	ক্ষেত্রফল
		$AC=d_1=8$ সেমি	$BD=d_2=12$ সেমি	
		PR=6 সেমি		42 বর্গ সেমি

ঘনবস্তু (solids)

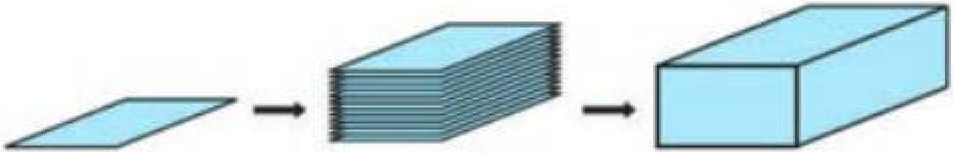
টুথপেস্ট, সাবান, বিস্কিট, ঔষধ আর অনেক নিত্য প্রয়োজনীয় জিনিসপত্র আমরা ব্যবহার করে থাকি। পূর্বের শ্রেণিতে এরূপ মোড়ক বা বাক্সের আকৃতি সম্পর্কে আমরা জেনেছি। এবার নিচের দ্রব্যগুলো ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করে ছকের খালি ঘরগুলো পূরণ করো এবং তোমার চেনা-জানা আরো দু-তিনটি দ্রব্যের প্যাকেট সংগ্রহ করে তাদের ছবি আঁকো, আকৃতির নাম, প্রতিটি পৃষ্ঠতলের আকার, পৃষ্ঠতলের সংখ্যা লেখো।

দ্রব্য	প্যাকেট অবস্থায় আকৃতির নাম	প্রতিটি পৃষ্ঠতলের আকৃতি	পৃষ্ঠতলের সংখ্যা
			
			
			
			

উপরের ছকে বিভিন্ন বস্তুর মোড়কের আকৃতি সম্পর্কে ভাবনা-চিন্তা করেছ। কিন্তু পড়া-লেখার জন্য তোমার বই, খাতা, পেনসিল, কলমের মতো অতি প্রয়োজনীয় জিনিসগুলোর আকৃতি সম্পর্কে ধারণা থাকা দরকার। তোমার গণিত বইয়ের আকৃতি এবং পেনসিলের আকৃতির মধ্যে কোনো পার্থক্য লক্ষ করেছ কি? আবার তুমি ও তোমার বন্ধুরা মাঝে মাঝেই 'রুবিক্স কিউব' নিয়ে প্রতিযোগিতায় মেতে ওঠো। এই 'রুবিক্স কিউব' এর আকৃতি অনেকটা মোটা ডিকশনারির মতো হলেও ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করলে এই দুটি জিনিসের আকৃতির মধ্যকার পার্থক্য বুঝতে পারবে।

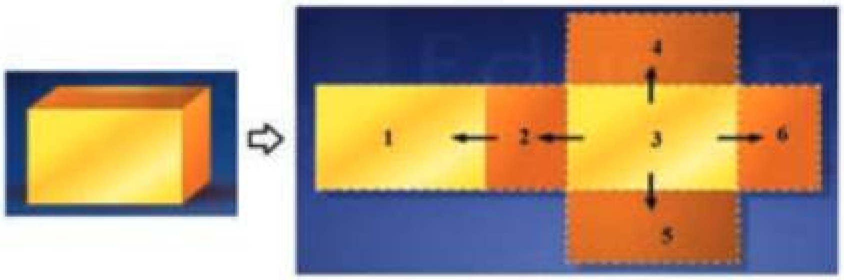
এবার চলো তোমার বই বা খাতা কীভাবে তৈরি হয় এবং তৈরিকৃত আকৃতিকে আমরা কী বলতে পারি তা জেনে নিই। সমান মাপের কতগুলো কাগজ নাও। A4 সাইজের প্রিন্টের কাগজ হলে আরও ভালো হয়।

তুমিতো জানো, A4 সাইজের এক তা কাগজকে দ্বিমাত্রিক আয়ত বিবেচনা করা হয়ে থাকে। এবার টেবিলের উপর কাগজটি রেখে একের পর এক অনেকগুলো রাখলে নিচের চিত্রের মতো হবে।

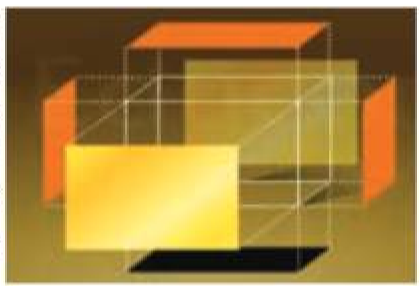


ফলে সর্বশেষ যে আকৃতিটি পাবে তা হবে একটি আয়তাকৃতি ঘনবস্তু। এক তা কাগজ দ্বিমাত্রিক (শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বিবেচনা করা হয়) হলেও অনেকগুলো কাগজ যখন পরপর রেখে স্তূপ করা হয় তখন আমরা আরেকটি মাত্রা উচ্চতা পেয়ে থাকি। তাহলে আমরা বলতে পারি, আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে। অর্থাৎ আয়তাকৃতি ঘনবস্তু তিন মাত্রিক।

নিচের ছবিটি লক্ষ করো। এটি একটি বাক্স। বাক্সটি আয়তাকৃতি ঘনবস্তু আকৃতির। বাক্সটির তলগুলো সতর্কতার সাথে খুলে ফেললে আমরা ছয়টি পৃষ্ঠতল দেখতে পাব।



একটি টিস্যু বক্স বা টুথপেস্টের মোড়ক সতর্কতার সাথে খুলে দেখতে পারো। দেখবে বাক্স বা মোড়কটির ৬টি পৃষ্ঠতল, ১২টি ধার এবং ৮টি শীর্ষ রয়েছে। আবার বাক্সের তলগুলোকে নিচের মতো দেখলে বিপরীত তিন জোড়া অভিন্ন সমান্তরাল সমতল পৃষ্ঠ পাওয়া যাবে। বাক্সটির প্রতিটি আয়তাকৃতি সমতল বা পৃষ্ঠ মেপে আমরা এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল বের করতে পারব। যদিও পূর্বের শ্রেণিতে আমরা এই ধরনের বাক্সের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল মপে বের করা শিখেছি, তারপরেও আবার একটু অনুশীলন করলে ভালো হয় তাই না?



দলগত কাজ

কাগজের আয়তাকৃতি ঘনবস্তু বানাই এবং সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন মাপি

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল মাপি

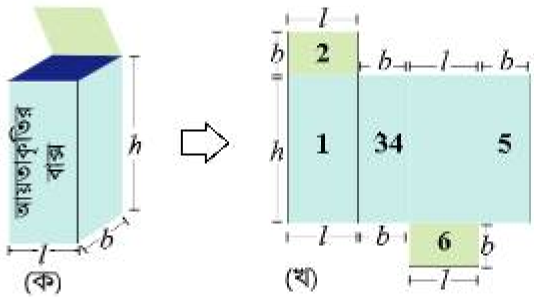
- কাগজ কেটে নিচের ছবির মতো প্রথমে একটি আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর কাঠামো তৈরি করো।
- কাঠামের প্রতিটি তলের সমান মাপ অনুযায়ী কাগজ কেটে নাও।
- কাঠামোতে দাগাঙ্কিত এককের সমান করে প্রতিটি তলের কাগজে ক্ষুদ্র বর্গএকক এঁকে নাও।

- কাঠামোটির ছয়টি তলে দাগাঙ্কিত কাগজগুলো আঠা দিয়ে লাগিয়ে নিলেই ঘনবস্তুটি তৈরি হয়ে যাবে।
- প্রতিটি পৃষ্ঠতলের ছোট ছোট ‘খোপ’ বা ঘরগুলোতে ক্রমানুসারে 1, 2, 3, ... সংখ্যাগুলো বসাও। এই ঘরগুলোর প্রত্যেকেই একেকটি বর্গ। কারণ, প্রত্যেকের বাহুর দৈর্ঘ্য সমান বা 1 একক। অর্থাৎ, এরা সবাই ‘একক বর্গক্ষেত্র’। তোমাদের নিশ্চয়ই জানা আছে ‘কোনো ক্ষেত্রকে (যেমন: ত্রিভুজক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র ইত্যাদি) যতগুলো একক বর্গক্ষেত্রে ভাগ করা যায়, ঐ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলও তত বর্গএকক হয়’। তাহলে, এখানে প্রতিটি আয়তাকৃতি তলে যতগুলা ছোট ছোট ‘খোপ’ বা ‘ঘর’ রয়েছে, তাদের সমষ্টিই হবে এই আয়তাকৃতি ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল। এবার পৃষ্ঠতলের খোপগুলো বা ঘরগুলোতে সবচেয়ে বড় সংখ্যাটিই হবে ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল।

ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র খুঁজি

আয়তাকৃতি ঘনবস্তু (cuboid)

একটি আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর প্রতিটি সমতল আয়তাকৃতি এবং এর তলগুলোর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থকে নিচের চিত্রের মতো অজানা প্রতীক দ্বারা চিহ্নিত করে চলো ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল বের করার একটা বীজগণিতীয় সূত্র তৈরি করার চেষ্টা করি।



(ক) (খ)

মনে করো, তোমার কাছে একটি আয়তাকৃতি ঘনবস্তু আকৃতির বাক্স আছে। বাক্সটির মাত্রাগুলো অর্থাৎ দৈর্ঘ্য (l) প্রস্থ (b) এবং উচ্চতা (h) নিচের (ক) চিত্রের মতো চিহ্নিত করতে পারো। এবার বাক্সটি ধীরে ধীরে খুলে ফেলো। দেখবে (খ) চিত্রের ন্যায় তিন গোড়া অভিন্ন পৃষ্ঠতল পাওয়া যাবে। পৃষ্ঠতলগুলোকে (খ) চিত্রের মতো চিহ্নিত করে নাও।

বাক্সটি খুলে ফেলায় তুমি যে ছয়টি পৃষ্ঠতল পেলে লক্ষ করলে দেখবে এর প্রতিটিই আয়তাকার। তুমিতো আয়তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা জানো, তাই না? একটু চিন্তা করে দেখো তো, বাক্সটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যাবে কিনা?

তুমি যদি বাক্সটির ছয়টি তলের ক্ষেত্রফল বের করে নাও তাহলে, বাক্সটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল হবে তোমার আলাদা আলাদাভাবে বের করা ছয়টি তলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। অর্থাৎ

বাক্সটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

= ক্ষেত্রফল 1 + ক্ষেত্রফল 2 + ক্ষেত্রফল 3 + ক্ষেত্রফল 4 + ক্ষেত্রফল 5 + ক্ষেত্রফল 6

$= (h\times l) + (l\times b) + (b\times h) + (h\times l) + (b\times h) + (l\times b)$ বর্গএকক

$= (hl + lb + bh + hl + bh + lb)$ বর্গএকক

$= (2lb + 2bh + 2hl)$ বর্গএকক

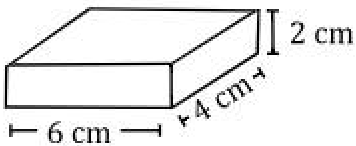
$= 2(lb + bh + hl)$ বর্গএকক।

সুতরাং আমরা বলতে পারি, আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য (l), প্রস্থ (b) এবং উচ্চতা (h) হলে,

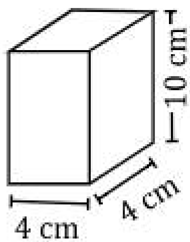
ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $(A) = 2(lb + bh + hl)$ বর্গএকক।

একক কাজ

নিচের (ক) এবং (খ) চিত্রের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



(ক)



(খ)

দলগত কাজ

শ্রেণিকক্ষের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা পরিমাপ করো। তারপর নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

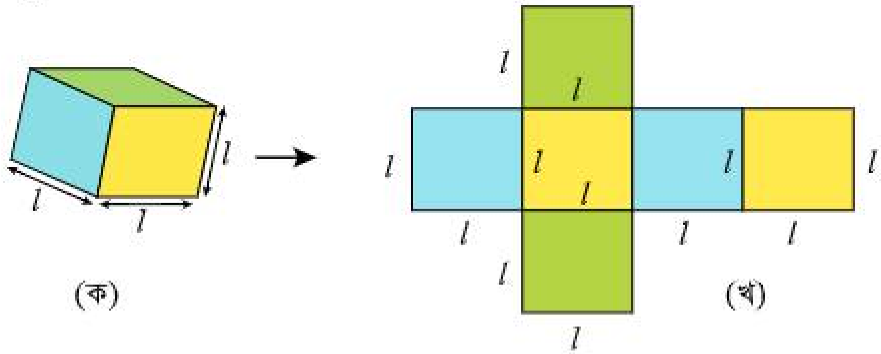
ক. শ্রেণিকক্ষের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল (দরজা ও জানালা বাদে)

খ. পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল

গ. প্রমাণ করো যে, শ্রেণিকক্ষের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল + $2\times$ মেঝের ক্ষেত্রফল

ঘনক (cube)

তুমি এমন একটি বাক্স নিলে যার মাত্রাগুলো সমান। অর্থাৎ বাক্সটির দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা। বাক্সটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হলে এরূপ আকৃতিকে কী বলবে? বাক্সটির আকৃতি (ক) চিত্রের মতো হবে। তুমি যদি বাক্সটির পৃষ্ঠতলগুলো খুলে ফেলো, তবে এটি (খ) চিত্রের মতো হবে। মনে করো বাক্সটির ধার (l) একক।



ক. বাক্সটির প্রত্যেকটি তলের আকৃতি কীরূপ হবে?

খ. প্রত্যেকটি তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। প্রতিটি তলের ক্ষেত্রফল কী সমান হবে?

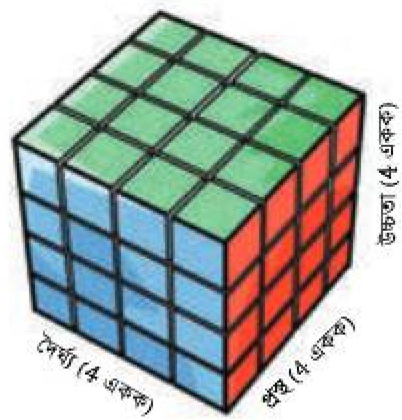
গ. বাক্সটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

তাহলে আমরা বলতে পারি, একটি ঘনকের ধার (l) একক হলে ঘনকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $(A) = 6l^2$ বর্গএকক।

একক কাজ

১. রবিনের একটি কেবিনেট আছে যার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 2 মিটার, 1 মিটার এবং 3 মিটার। কেবিনেটটির তলা বাদে বাইরের বাকি অংশ রং করাতে চায়। প্রতি বর্গমিটার রং করাতে 150 টাকা লাগলে তার মোট কত টাকা খরচ হবে?

ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয়ের সূত্র খুঁজি



তোমরা ইতোমধ্যেই জেনেছ, কোনো বস্তুর আয়তন ত্রিমাত্রিক। অর্থাৎ বস্তুটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বিদ্যমান। আমরা যদি 1 একক দৈর্ঘ্য, 1 একক প্রস্থ ও 1 একক উচ্চতা বিশিষ্ট কতগুলো ছোট ছোট বাক্স বানাতে পারি এবং ঐ বাক্সগুলো দ্বারা আয়তাকৃতি ঘনবস্তুটি সম্পূর্ণ পূর্ণ করি, তাহলেই ঘনবস্তুটির আয়তন পেয়ে যাব।

যেহেতু ছোট ছোট বাক্সগুলোর দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা। সুতরাং প্রতিটি বাক্স ঘনক আকৃতির হবে। একটি ঘনবস্তুর ভেতর কতগুলা 'একক ঘনক' রয়েছে তা বের করতে পারলেই

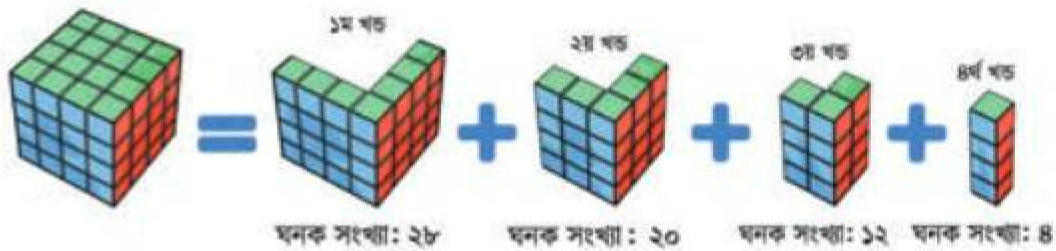
শিক্ষাবর্ষ ২০২৪

আয়তন বের করা হয়ে যাবে। এখানে, 'একক ঘনক' হচ্ছে সেই ঘনক, যার দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = 1 একক।

এবার তাহলে একটা উদাহরণ দেওয়া যাক।

আমরা প্রায় সবাই 'রুবিক্স কিউব' এর সাথে পরিচিত। তোমরা হয়ত ভাবছ উদাহরণ হিসেবে 'রুবিক্স কিউব'কে কেন আবার আনা হলো। এটি আনার কারণ হলো, লক্ষ করলে দেখবে 'রুবিক্স কিউব' অনেকগুলো একক ঘনক এর সমন্বয়ে তৈরি। তাছাড়া এটা নিয়ে আমরা অনেকেই খেলা করি।

এখানে এমন একটি 'রুবিক্স কিউব' দেখানো হয়েছে, যার দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = 4 একক। চিত্রের ভেতরে অনেকগুলো 'ঘনক' দেখা যাচ্ছে। যারা প্রত্যেকেই 'একক ঘনক'। কারণ ভেতরের ছোট ছোট ঘনকের প্রত্যেকের বাহুর দৈর্ঘ্য '1 একক'. ফলে তারা সবাই 'একক ঘনক'। এখন, ভেতরের সকল ছোট ছোট ঘনককে এক এক করে গুণতে হবে। যতটি ঘনক পাওয়া যাবে, 'রুবিক্স কিউব' এর আয়তন হবে তত। এবার তাহলে গণনা শুরু করা যাক। গণনার সুবিধার্থে আমরা 'রুবিক্স কিউব' কে কয়েকটা পৃথক পৃথক খণ্ডে ভাগ করব যাতে আমাদের গণনা করতে এবং বুঝতে সুবিধা হয়। নিচের চিত্রটি ভালোভাবে লক্ষ করো:



উপরের ছবিতে আমাদের নেওয়া ঘনককে চারটি খণ্ডে বিভক্ত করা হয়েছে। এই চারটি খণ্ড মিলে উক্ত 'রুবিক্স কিউব'টি গঠন করা যায়। ছবি হতে দেখা যায়:

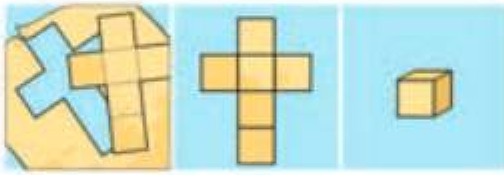
১ম খণ্ডে ঘনক সংখ্যা: 28টি, ২য় খণ্ডে 20টি, ৩য় খণ্ডে 12টি এবং ৪র্থ খণ্ডে 4টি

সুতরাং, মোট ঘনক সংখ্যা=28+20+12+4 = 64টি

অতএব, আমাদের নেওয়া 'রুবিক্স কিউব' এর আয়তন = 64 ঘনএকক।।

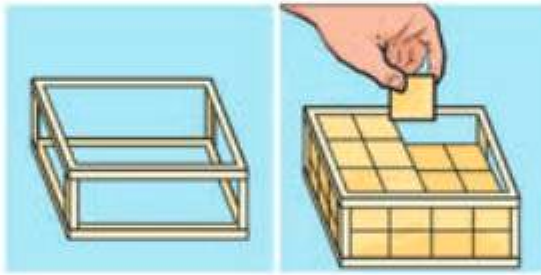
উপরের আলোচনা থেকে আমরা সবাই ঘনবস্তুর আয়তন সম্পর্কে জানতে পারলাম। ধারণাটিকে আরও পাকাপোক্ত করার জন্য চলো কাগজ কেটে 1 একক দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা বিশিষ্ট বাক্স বানাই। এর জন্য ধারাবাহিকভাবে নিচের কাজগুলো করতে হবে:

- প্রথমে এক তা কাগজ নাও।
- এবার আগের তৈরি করা ঘনবস্তুটির পৃষ্ঠতলের ছোট একটি ঘরের বাহুর সমান মাপ নিয়ে নিচের চিত্রের মতো কেটে নাও।



- তোমার কেটে নেওয়া কাগজটি দাগ বরাবর ভাঁজ করে আঠা বা স্কচটেপ দ্বারা পৃষ্ঠতলগুলো লাগিয়ে নিলেই ঘনক আকৃতির বাক্সটি তৈরি হয়ে যাবে।

- এভাবে অনেকগুলো ছোট ছোট বাক্স বানাও। কারণ আয়তাকৃতি ঘনবস্তুটি সম্পূর্ণ পূর্ণ করতে কয়টি ছোট ছোট বাক্স লাগবে তুমি আগে থেকে তা জানো না।
- এবার আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর কাঠামোর ভিতর নিচের চিত্রের মতো একটি একটি করে ছোট বাক্স সাজিয়ে রাখতে থাকো।



- আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর কাঠামোটি পরোপুরি পূর্ণ হলে, ছোট বাক্সে সংখ্যা গুণে নাও। কাঠামোটির ভিতরে যে কয়টি ছোট বাক্স ধরবে, আয়তাকৃতি ঘনবস্তুটির আয়তন তত ঘনএকক হবে।

তাহলে আমরা সিদ্ধান্ত নিতে পারি, একটি আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর মাত্রাগুলোর দখল করা জায়গার পরিমাণই ঘনবস্তুটির আয়তন।

আমাদের নেওয়া 'রুবিক্স কিউব' এর আয়তন ছিল 64 ঘনএকক। আবার, এই 64 হচ্ছে তিনটি 4 এর গুণফল। মানে, $64 = 4 \times 4 \times 4$ = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

ঘনকের ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা হওয়ায়, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতার প্রত্যেককে ঘনকের ধার বলে বিবেচনা করা যায়। ঘনকের ধার (l) একক হলে –

আয়তন (V) = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা $= l \times l \times l = l^3$ ঘনএকক

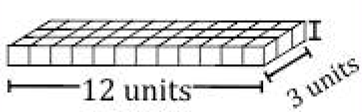
আবার তুমি কাগজ কেটে যে আয়তাকৃতি ঘনবস্তুটি বানালে তার দৈর্ঘ্য 4 একক, প্রস্থ 3 একক এবং উচ্চতা 2 একক ছিল। আর ঐ ঘনবস্তুর কাঠামোটি পরোপুরি পূর্ণ করতে মোট 24টি ছোট বাক্স প্রয়োজন হয়েছিল, তাই না? তাহলে, একটু চিন্তা করে দেখতো, তোমার বানানো ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতার সাথে 24টি ছোট বাক্সের কোনো সম্পর্ক আছে কিনা?

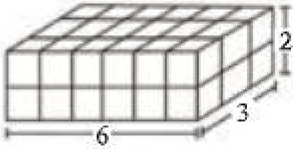
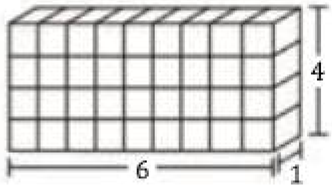
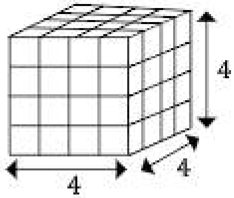
অর্থাৎ আমরা বলতে পারি, আয়তাকৃতি ঘনবস্তু আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

আয়তাকৃতি ঘনবস্তু দৈর্ঘ্য (l), প্রস্থ (b) এবং উচ্চতা (h) হলে,

একক কাজ

১. নিচের ছকটি পূরণ করো

ক্রমিক নং	ঘনবস্তু	দৈর্ঘ্য (l)	প্রস্থ (b)	উচ্চতা (h)	সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল	আয়তন
১.		12	3	1		

২.						
৩.						
৪.						

২. গণিত বইয়ের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা মেপে এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় করো।

৩. তিনটি ধাতব ঘনকের ধার যথাক্রমে 3 সেমি, 4 সেমি এবং 5 সেমি। ঘনক তিনটিকে গলিয়ে একটি নতুন ঘনক বানানো হলো। নতুন ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করো।

বেলন (cylinder)

বেলন, নামটি পড়েই ছবিতে থাকা নিচের উপকরণ দুটির কথা প্রথমেই মনে পড়ছে তাই না? খুঁজলে আমাদের প্রত্যেকের ঘরেই এদের পাওয়া যাবে। বিশেষ করে সকালের নাস্তায় আমরা অনেকেই রুটি-পরোটা খেয়ে থাকি। আর তা বানাতে নিচের জিনিস দুটি ব্যবহার করা হয়। বলতে পারবে জিনিস দুটির কোনটিকে কি বলা হয়?

পাশের হাতলওয়ালা উপকরণটির নাম বেলন এবং নিচের বৃত্তাকৃতি বস্তুটির নাম রুটি বানানোর পিঁড়ি। এখন তোমাকে একটি কাজ করতে হবে। রুটি বানানোর জন্য তোমার বাসায় যে পিঁড়িটি আছে, তার ব্যাসার্ধ, ব্যাস, পরিধি ও উপরের তলের ক্ষেত্রফল বের করতে হবে। তোমার জন্য তৈরি

নানা রকম আকৃতি মাপি

করা (কম পক্ষে তিনটি) রুটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। এবার রুটি ও পিঁড়ির মধ্যকার ক্ষেত্রফল সম্পর্কে মতামত নিচের ছকে লিখে ছকটি পূরণ করো।

উপকরণ	ব্যাসার্ধ	ব্যাস	পরিধি	ক্ষেত্রফল
পিঁড়ি				
রুটি - ১				
রুটি - ২				
রুটি - ৩				
রুটি - ৪				
রুটি - ৫				
মতামত				

আমরা আমাদের দৈনন্দিন ব্যাবহারিক জীবনে প্রত্যেকেই বেলন আকৃতির নানা ধরনের জিনিসপত্র দেখি বা ব্যবহার করে থাকি। তোমার স্কুলের বিজ্ঞানাগারে তুমি যখন ব্যাবহারিক ক্লাস করো তখন টেস্টটিউব, বিকার এমনকি শ্রেণিকক্ষের টিউবলাইট দেখে থাকবে। ভেবে দেখতো এই জিনিসগুলোর আকৃতি একই রকম কিনা। আমাদের চারপাশে যে গাছপালা রয়েছে, তাদের অনেককেই দেখতে বেলন আকৃতির মনে হয়। যেমন: সুপারি গাছ, তাল গাছ ইত্যাদি। নিচের ছবিগুলো দেখলে এই ধরনের আকৃতির আরও অনেক বস্তুর কথাই আমাদের মনে আসবে।

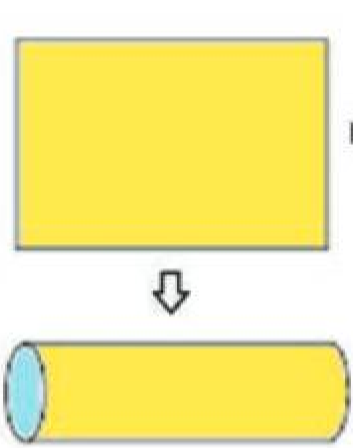
দলগত কাজ

'বেলন আকৃতির বস্তুর নাম লেখার প্রতিযোগিতা।' সময়: ৫ মিনিট। দলের প্রত্যেকে নিজ নিজ খাতায় বেলন আকৃতির বস্তুর নাম লিখবে। যে দল সবচেয়ে বেশি নাম লিখতে পারবে, সে দল জয়লাভ করবে।

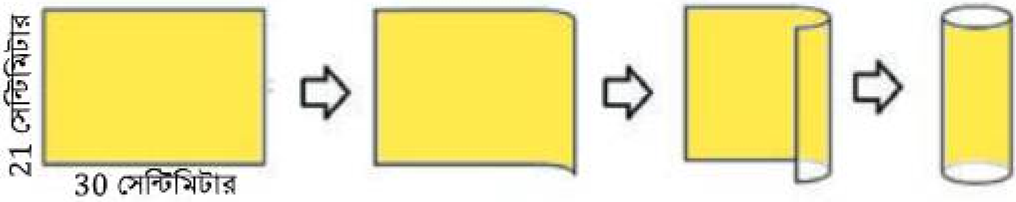
কাগজ কেটে বেলন বা সিলিন্ডার বানাই

আমরা এতক্ষণ বেলন বা সিলিন্ডার আকৃতির অনেক বস্তুর নাম ও তাদের ব্যবহার সম্পর্কে জেনেছি। এবার চলো কাগজ কেটে নমুনা সিলিন্ডার তৈরি করি।

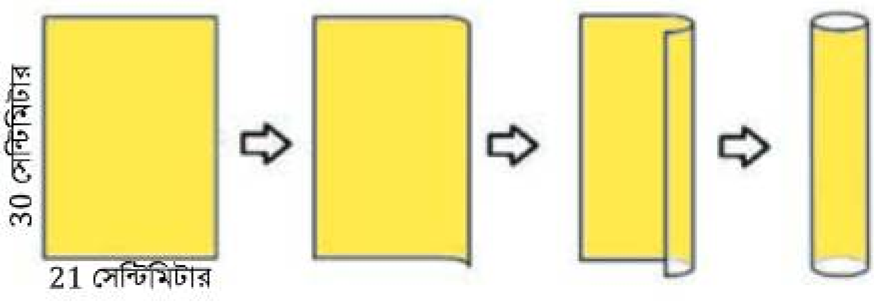
- প্রথমে A4 সাইজের এক তা কাগজ নাও। A4 সাইজের কাগজ না পাওয়া গেলে অন্য যেকোনো আয়তাকৃতি কাগজ হলেও চলবে।
- নিচের চিত্রের মতো কাগজটির দুই প্রান্ত ঘুরিয়ে কাগজটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর দুটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার বানানো যাবে।



- আমরা জানি, একটি A4 সাইজের কাগজের দৈর্ঘ্য মোটামোটি 30 সেন্টিমিটার এবং প্রস্থ 21 সেন্টিমিটার। প্রথমে প্রস্থ বরাবর কাগজটিকে ঘুরিয়ে সিলিন্ডারটি বানিয়ে ফেলো।



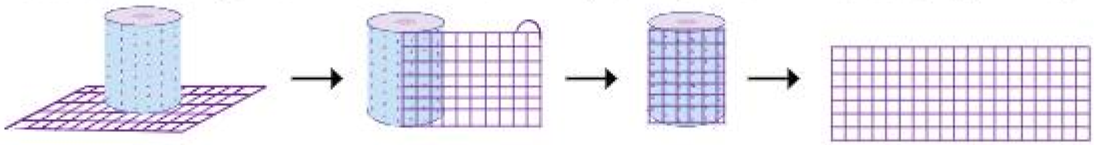
- এবার দৈর্ঘ্য বরাবর কাগজটিকে ঘুরিয়ে একইভাবে আরও একটি সিলিন্ডারটি বানাও।



- একই মাপের কাগজ থেকে প্রস্থ ও দৈর্ঘ্য বরাবর ঘুরিয়ে তুমিতো দুটি সিলিন্ডার বানালে। এবার ভেবে বলতো সিলিন্ডার দুটির মোড়ানো তল বা বক্রতলের ক্ষেত্রফল একই হবে, নাকি ভিন্ন হবে?

প্রশ্নের উত্তরটি জানার জন্য প্রথমে আমাদের সিলিন্ডার আকৃতির ঘনবস্তুর মোড়ানো বা বক্রতলের ক্ষেত্রফল সম্পর্কে জানতে হবে।

একটি সিলিন্ডার আকৃতির বস্তু নাও। এক টুকরা পাইপ বা একটি ব্যাটারি হলেও চলবে। নিচের চিত্রের মতো ব্যাটারিটি গ্রাফ পেপারে রেখে এমনভাবে কেটে নাও যেন গ্রাফ পেপারের প্রস্থ ব্যাটারির উচ্চতার সমান হয়। এবার দৈর্ঘ্য বরাবর গ্রাফ পেপারটিকে এমনভাবে কাটতে হবে যেন গ্রাফ পেপারটি ব্যাটারির মোড়ক মনে হয়।

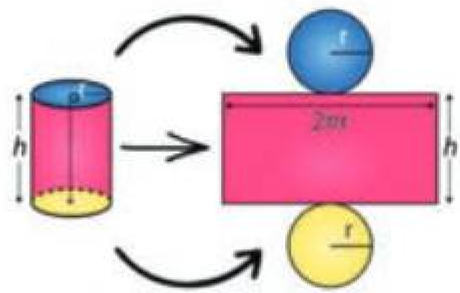


(১) (২) (৩) (৪)

গ্রাফ পেপারটিকে ব্যাটারি থেকে আলাদা করার পর ৪নং কাগজটির আকৃতি কীরূপ পেয়েছ? অবশ্যই আয়তাকার, তাই না? তোমার নিশ্চয়ই জানা আছে, আয়তাকার কাগজটির ছোট ছোট 'খোপ' বা ঘরগুলোর প্রত্যেকেই এককেটি বর্গ। কারণ, প্রত্যেকের বাহুর দৈর্ঘ্য সমান বা 1 একক। অর্থাৎ, এরা সবাই 'একক বর্গক্ষেত্র'। এবার ছোট ছোট 'খোপ' বা ঘরগুলো গুনে নাও। এই ঘরগুলোর সমষ্টিই হবে এই আয়তাকৃতি কাগজটির ক্ষেত্রফল। অর্থাৎ ব্যাটারিটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল।

সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র খুঁজি

আয়তাকৃতি কাগজটিকে মুড়িয়ে তোমার তৈরি করা সিলিন্ডারটিতে দুটি অভিন্ন খোলা মুখ আছে। এই খোলা মুখ দুটি আসলে অভিন্ন দুটি বৃত্ত। আয়তাকৃতি কাগজটিকে যদি দৈর্ঘ্য বরাবর মোড়ানো হয়, তবে কাগজটির দৈর্ঘ্য হবে বৃত্তটির পরিধির সমান। সেক্ষেত্রে কাগজটির প্রস্থ হবে সিলিন্ডারটির উচ্চতা।



তুমিতো ইতোমধ্যেই জেনেছ, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক হলে এর পরিধি $= 2\pi r$ একক। তাহলে, আয়তাকৃতি কাগজটির দৈর্ঘ্য হবে $2\pi r$ একক। কাগজটির প্রস্থ $=$ সিলিন্ডারটির উচ্চতা $= h$ একক।

সুতরাং সিলিন্ডারটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $=$ আয়তাকৃতি কাগজটির ক্ষেত্রফল $=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

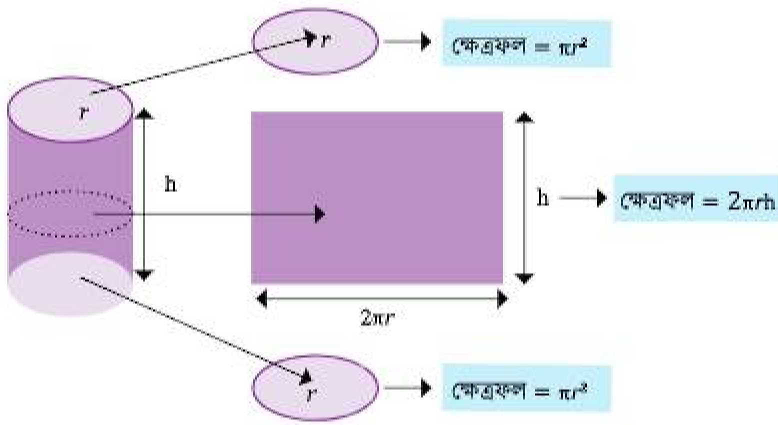
$= 2\pi r \times h$ বর্গএকক $= 2\pi rh$ বর্গএকক।

একক কাজ

কোনো এক কোম্পানি তাদের তৈরি করা গুঁড়োদুধ সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার আকৃতির টিনের পাত্রে বাজারজাত করতে চায়। টিনের পাত্রটির ব্যাস 16 cm এবং উচ্চতা 24 cm কোম্পানীটিনের পাত্রটির উপর ও নিচের দিকে 2 cm ফাঁকা রেখে পাত্রটি সম্পূর্ণ ঘুরিয়ে একটি মোড়ক লাগানোর সিদ্ধান্ত নিয়েছে। মোড়কটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সিলিন্ডারের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র খুঁজি

আমরা জেনেছি, সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারের দুই প্রান্ত অভিন্ন বৃত্তক্ষেত্র। আর বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক হলে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গএকক। পূর্বেই জেনেছ, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক হলে, বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গএকক।



সুতরাং উপরের চিত্র থেকে আমরা লিখতে পারি,

সিলিন্ডারের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল + 2 × বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$= 2\pi rh + 2 \times \pi r^2$ বর্গএকক

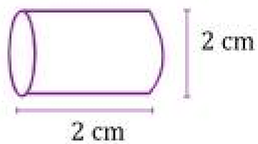
$= 2\pi rh + 2\pi r^2$ বর্গএকক

$= 2\pi r\,(h + r)$ বর্গএকক

একক কাজ

১. নিচের (i) ও (ii) নং চিত্র দুটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার হলে এদের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

(i)



(ii)

২. নমিতার স্কুলে 24টি গোলাকৃতির পিলার আছে। প্রতিটি পিলারের ব্যাস 30 সেন্টিমিটার এবং উচ্চতা 4 মিটার। প্রতি বর্গমিটার রং করতে 125 টাকা খরচ হলে সবগুলো পিলার রং করতে কত টাকা খরচ হবে?

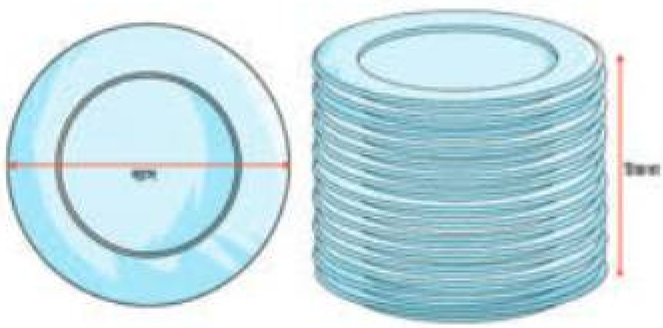
সমবৃত্তভূমিক বেলন বা সিলিন্ডারের আয়তন

তুমিতো ইতোমধ্যে জেনেছ, একটি আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা।

তুমি কি একইভাবে সিলিন্ডারের আয়তন নির্ণয় করতে পারবে?

চলো কয়েকটি ঘটনা পর্যবেক্ষণ করে বিষয়টি বোঝার চেষ্টা করি:

(ক) আচ্ছা নিচের ছবিটি লক্ষ করো। দোকানে এভাবে একই মাপের এক ডজন বা তারও বেশি প্লেট সাজিয়ে রাখতে দেখেছ। একটি বৃত্তাকৃতি প্লেটের উপর যখন অনেকগুলো একই মাপের প্লেট পরপর সাজিয়ে রাখা হয় তখন প্লেটগুলোর স্তুপের আকৃতি অনেকটা সিলিন্ডার আকৃতি হয়। তাই না?



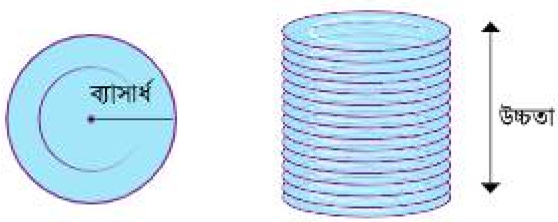
একই মাপের একটি প্লেট এবং পাশের ছবিতে ঐ মাপের অনেকগুলো প্লেটের স্তুপ

সবচেয়ে নিচের বৃত্তাকৃতি প্লেটটির ক্ষেত্রফল বের করে প্লেটের সংখ্যা দ্বারা গুণ করলেই প্লেটের স্তুপের আয়তন পেয়ে যাবে।

(খ) একই কাজ আমরা একটি মোটা বৃত্তাকৃতি কাগজ কেটেও করতে পারি।

পাশের চিত্র থেকে আমরা বলতে পারি,

বৃত্তাকৃতি কাগজের স্তুপের আয়তন = একটি বৃত্তাকৃতি কাগজের ক্ষেত্রফল × স্তুপের উচ্চতা



(গ) চলো প্লাস্টিকের মাটি দিয়ে বেলন বা সিলিন্ডার বানাই

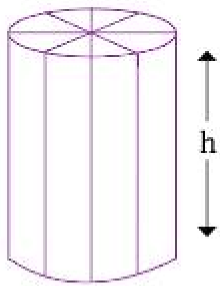
প্রয়োজনীয় উপকরণ:

প্লাটিকের মাটি, ছুরি এবং রুলার বা স্কেল

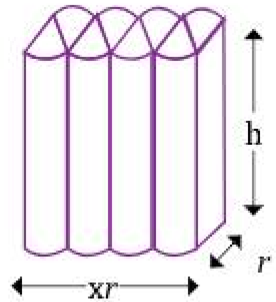
পদ্ধতি:

ধাপ ১: প্লাস্টিকের মাটির তৈরি একটি সিলিন্ডার বানাও যার উচ্চতা h এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r

ধাপ ২: একটি ধারালো ছুরি দিয়ে সিলিন্ডারটিকে চিত্রের মতো আটটি অংশে কেটে নাও।



ধাপ ১ ও ২



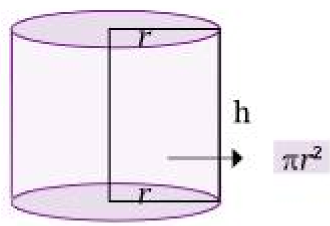
ধাপ ৩

ধাপ ৩: এবার চিত্রে দেখানো পদ্ধতিতে একটি আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর মতো শক্ত কাঠামো তৈরি করো। যেখানে আটটি অংশ একে অপরের সাথে সংযুক্ত অবস্থায় থাকবে।

পর্যবেক্ষণ এবং গণনা:

যেহেতু আটটি অংশ একত্র করে আয়তাকৃতি ঘনবস্তুটি তৈরি করা হয়েছে, সেহেতু ঘনবস্তুটির দৈর্ঘ্য হবে πr একক, প্রস্থ r একক এবং উচ্চতা h একক। তোমরা কিন্তু ইতোমধ্যেই ঘনবস্তুর আয়তন নির্ণয় করা শিখেছ, তাই না?

তাহলে, ঘনবস্তুটির আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা



$= \pi r \times r \times h$ ঘনএকক

$= \pi r^2 h$ ঘনএকক।

অর্থাৎ সিলিন্ডারটির আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘনএকক।

(ঘ) যেহেতু সিলিন্ডারের ভিত্তি একটি বৃত্তক্ষেত্র এবং বৃত্তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল πr^2 বর্গএকক

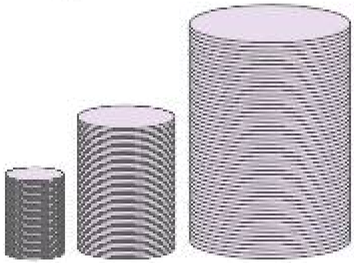
সুতরাং সিলিন্ডারের আয়তন = বৃত্তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \pi r^2 \times h$ ঘনএকক

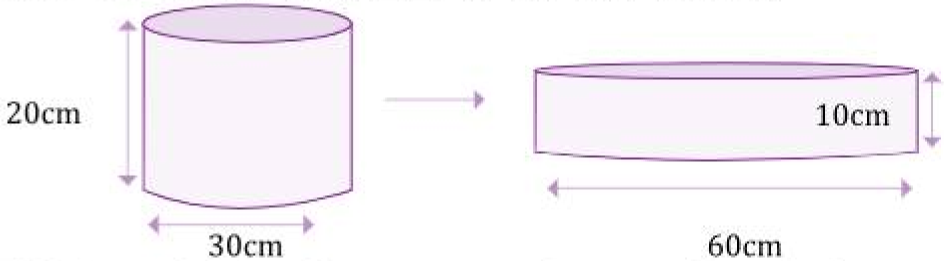
$= \pi r^2 h$ ঘনএকক।

অনুশীলনী

১. ছবিটি দেখো। এখানে সিলিন্ডারের মাত্রাগুলো ক্রমানুসারে (ব্যাসার্ধ ও উচ্চতা) দ্বিগুণ করা হয়েছে। ফলে আয়তনের কীরূপ পরিবর্তন ঘটবে? যুক্তিসহ মতামত ব্যক্ত করো।



২. নিচের ছবিটি লক্ষ করো। এখানে প্রথম সিলিন্ডারটির ব্যাস দ্বিগুণ এবং উচ্চতা অর্ধেক করে দ্বিতীয় সিলিন্ডারটি তৈরি করা হয়েছে। সিলিন্ডার দুটির আয়তনের অনুপাত নির্ণয় করো।

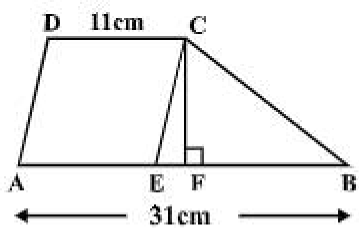


৩. একটি বিস্কুট কোম্পানী বিস্কুট প্যাকিং এর জন্য আয়তাকৃতি ঘনবস্তু আকৃতির বাক্স তৈরি করবে। সেজন্য নিচের দুই ধরনের বাক্সের পরিকল্পনা করে।

ক. দৈর্ঘ্য = 20 সেমি, প্রস্থ = 8 সেমি, উচ্চতা = 3 সেমি
খ. দৈর্ঘ্য = 12 সেমি, প্রস্থ = 10 সেমি, উচ্চতা = 4 সেমি

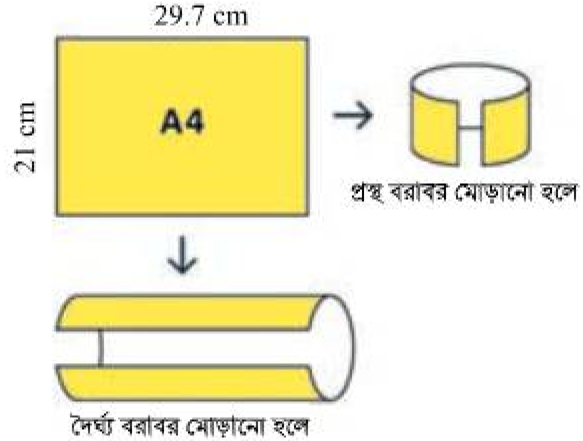
কোন ধরনের বাক্সটি বানালে কোম্পানীর জন্য লাভজনক হবে? যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো। আয়তন ঠিক রেখে বাক্সের মাত্রাগুলো শুধু পরিবর্তন করলেও আয়তন ঠিক থাকবে এবং কোম্পানীর লাভবান হবে। এমন পরামর্শ তুমি কী দিতে পারবে?

৪.



$\triangle BCE$ এর ক্ষেত্রফল 100 বর্গসেন্টিমিটার হলে, ABCD ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

৫. একটি A4 আকৃতির কাগজকে প্রস্থ ও দৈর্ঘ্য বরাবর মোড়িয়ে নিচের চিত্রের মতো দুটি বেলন বা সিলিন্ডার বানাও।



ক. তোমার বানানো সিলিন্ডার দুটির মধ্যে কোনটির আয়তন বেশি?

খ. A4 আকৃতির কাগজ থেকে কোন আকৃতির অংশ কেটে নিলে উভয় সিলিন্ডারের আয়তন সমান হবে? তোমার উত্তরের সপক্ষে যুক্তি দাও।

৬. স্কেল দিয়ে মেপে 21cm দৈর্ঘ্য ও 12cm প্রস্থ বিশিষ্ট দুটি কাগজের টুকরা কেটে নাও। এবার কাগজের টুকরার একটিকে দৈর্ঘ্য বরাবর এবং অপরটিকে প্রস্থ বরাবর রোল বা গোল করে পাকিয়ে দুটি সমবৃত্তভূমিক বেলন বা সিলিন্ডার তৈরি করো।

ক. উভয় সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করো।

খ. উভয় সিলিন্ডারের আয়তনের মধ্যে কোনো পার্থক্য থাকলে, কেন পার্থক্য হয়েছে তা যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো।

৭. নির্দিষ্ট পুরুত্বের কাঠ দিয়ে একটি বাক্স তৈরি করা হলো। বাক্সটির বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সেমি, 8 সেমি ও 6 সেমি। বাক্সটির ভিতরের আয়তন 192 ঘনসেমি।

ক. বাক্সটির আয়তন কত?

খ. বাক্সটি তৈরিতে যে কাঠ ব্যবহার করা হলো তার মোট আয়তন কত?

৮. একটি বেলনের আয়তন 150 ঘন সেমি। বেলনটির ভূমির ব্যাসার্ধ ও উচ্চতা কি কি হওয়ার সম্ভাবনা আছে?

[একটি ছক তৈরি করে ব্যাসার্ধ ও উচ্চতার মান ধরে চেষ্টা করো]

বীজগাণিতিক রাশির ভগ্নাংশের গল্প

বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ

তোমরা ৬ষ্ঠ শ্রেণিতে বীজগণিতীয় রাশির যোগ ও বিয়োগ সম্পর্কে শিখেছ। আবার পাটীগণিতীয় ভগ্নাংশ সম্পর্কেও জেনেছ। এসো এবার আমরা বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ সম্পর্কে শিখি।

পাটীগণিতীয় ভগ্নাংশ সম্পর্কে নিশ্চই তোমাদের মনে আছে,

চলো, তোমাদের মনে আছে কি না পরীক্ষা করে দেখি।

প্রথমে তোমরা একটি সাদা বর্গাকার কাগজ নাও এবং সমান করে দুটি ভাঁজ করো। প্রতি ভাঁজে পুরো কাগজের কত অংশ পড়েছে চিন্তা করো এবং যার যার খাতায় লেখো।

চিত্র-১১.১

এসো হিসাব করে দেখি। কাগজ ১টি। ভাঁজ ৪টি। কাজেই প্রতি ভাঁজে কাগজের অংশ হয় $\frac{1}{4}$। যেহেতু

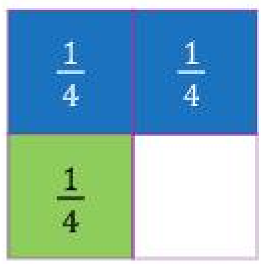
সম্পূর্ণ বর্গাকার ক্ষেত্রটি 1টি কাগজ। কাজেই,

নীল রঙের অংশ$=1$ এর $\frac{2}{4} = \frac{2}{4}$

সবুজ রঙের অংশ$=1$ এর $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

মোট রং করা অংশ $= \frac{2}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$



সুতরাং, সাদা অংশ$=(1 - \frac{3}{4}) = \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$

$= \frac{4-3}{4} = \frac{1}{4}$

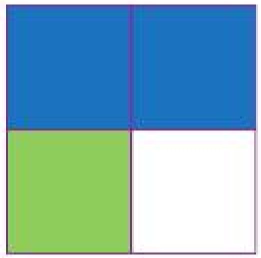
এবার চলো আমরা ঐ একই উদাহরণ বীজগণিতের ক্ষেত্রে দেখি। এ ক্ষেত্রে কাগজের ক্ষেত্রফল x বর্গএকক। প্রথমে এদের সমান করে দুটি ভাঁজ করো। প্রতি ভাঁজে পুরো কাগজের কত অংশ পরেছে চিন্তা করো। পুনরায় দুই ভাগের প্রতিটিকে দুইভাগ, অতঃপর চার ভাগে। এ ভাবে পর্যায়ক্রমে ভাগ করো এবং যার যার খাতায়

অংশগুলোর পরিমাণ লেখো। পরিশেষে প্রতি দুই ভাগ বা তিন ভাগ এক সাথে নিয়ে মিলাও এবং তাদের অংশগুলোর নিয়ে যোগ করো এবং বিয়োগ করে বাস্তব পরিমাণের সাথে মিল করো। অন্যান্য অংশগুলোর জন্য ও অনুশীলন করো।

চলো আমরা x বর্গএকক ক্ষেত্রফলের কাগজ নিয়ে অনুশীলন করি। প্রথমে কাগজটিকে দুইভাগ করি, দুই ভাগকে আবার চার ভাগ করি এবং অংশগুলোতে ভিন্ন ভিন্ন রং ব্যবহার করে পৃথক করি।

$\frac{x}{4}+\frac{x}{4}$

$\frac{x}{4}$



সম্পূর্ণ বর্গাকার ক্ষেত্রটিকে x ধরা হলে এর

নীল রঙের অংশ = x এর $\frac{2}{4}=\frac{2x}{4}$

সবুজ রঙের অংশ = x এর $\frac{1}{4}=\frac{x}{4}$

মোট রং করা অংশ = $\frac{2x}{4}+\frac{x}{4}$

$=\frac{2x+x}{4}=\frac{3x}{4}$

সুতরাং, সাদা অংশ $=(x-\frac{3x}{4})=\frac{4x}{4}-\frac{3x}{4}$

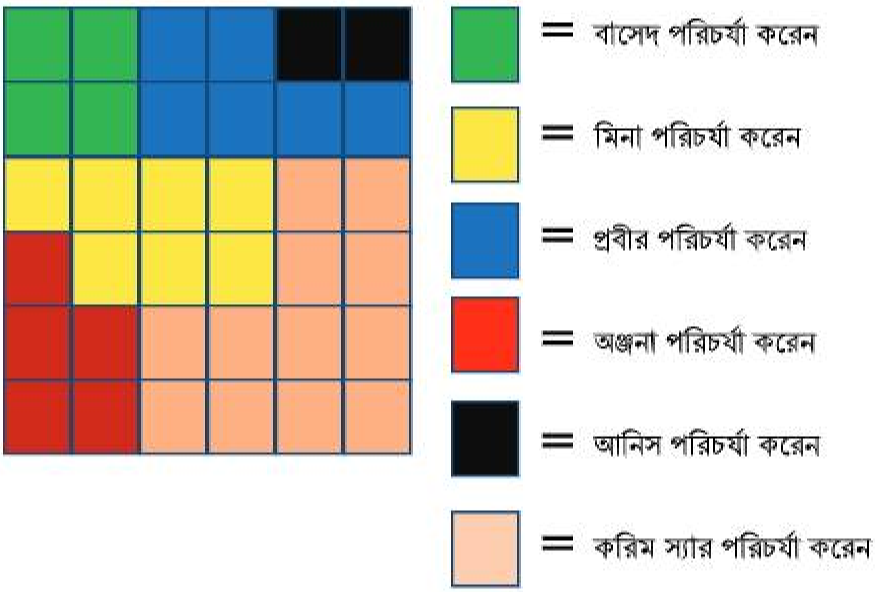
$=\frac{4x-3x}{4}=\frac{x}{4}$

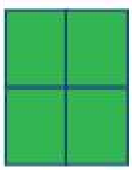
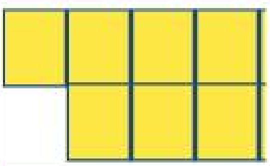
এতক্ষণ নিশ্চয়ই বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের ধারণাটি তোমাদের স্পষ্ট হয়েছে।

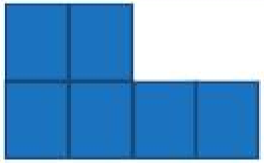
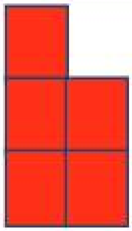
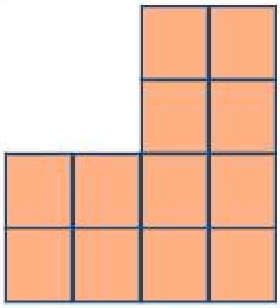
কর্মপত্র-১

এবার চলো একাধিক রং করা অংশসহ একটি সবজি বাগানের ম্যাপ নিয়ে চিন্তা করি। বাগানটির মোট পরিমাণ **x**। ৭ম শ্রেণির শিক্ষার্থীরা বাগানটির পরিচর্যা করে থাকেন। এ বছর বাগানটির পরিচর্যার দায়িত্ব পেয়েছেন যথাক্রমে বাসেদ, মিনা, প্রবীর, অঞ্জনা ও আনিস এবং বাকি অংশের দায়িত্বে আছেন কৃষিবিজ্ঞানের শিক্ষক করিম স্যার। এবার চলো আমরা বের করার চেষ্টা করি বাগানের মোট কত অংশ শিক্ষার্থীরা পরিচর্যা করে এবং কত অংশ কৃষিবিজ্ঞানের শিক্ষক করিম স্যার পরিচর্যা করেন।

প্রথমে তোমরা খাতা ও রং করার জন্য কলম নাও। খাতায় নিচের চিত্রের মত করে একটি বর্গক্ষেত্র নিয়ে সংশ্লিষ্ট ক্ষেত্রগুলো রং করো। অতঃপর কাঁচি দিয়ে রং অনুযায়ী কেটে কেটে আলাদা করে সাজাও।



	বাসেদ এর পরিচর্যার অংশ= x এর $\frac{4}{36} = \frac{4x}{36}$
	মিনা এর পরিচর্যার অংশ = x এর $\frac{7}{36} = \frac{7x}{36}$

	প্রবীর এর পরিচর্যার অংশ = x এর $\frac{6}{36} = \frac{6x}{36}$
	অঞ্জনা এর পরিচর্যার অংশ = x এর $\frac{5}{36} = \frac{5x}{36}$
	আনিস এর পরিচর্যার অংশ = x এর $\frac{2}{36} = \frac{2x}{36}$
	করিম স্যার এর পরিচর্যার অংশ = x এর $\frac{12}{36}$ $= \frac{12x}{36}$

কর্মপত্র ২

যদি করিম স্যার তার পরিচর্যার দায়িত্বে থাকা বাগানের অংশ থেকে আরও $\frac{1}{3}$ অংশের পরিচর্যার দায়িত্ব বাসেদকে দেন তবে, করিম স্যার ও বাসেদ সবশেষে বাগানের কত অংশের পরিচর্যার দায়িত্বে নিয়োজিত থাকবেন বলতে পারো কি?চলো বিষয়টি নিয়ে চিন্তা করি।

বর্তমানে করিম স্যার এর পরিচর্যার অংশ = $\frac{12x}{36}$

বাসেদকে দায়িত্ব হস্তান্তর করবে = $\frac{12x}{36}$ এর $\frac{1}{3}$ = $\frac{x}{3}$ এর $\frac{1}{3}$ = $\frac{x}{9}$ অংশ

করিম স্যার এর পরিচর্যার অংশ সবশেষে থাকবে = $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = \frac{3x}{9} - \frac{x}{9}$ অংশ

$$= \frac{3x-x}{9} = \frac{2x}{9}$$

সবশেষে বাসেদ এর পরিচর্যার অংশ হবে $= \frac{4x}{36} + \frac{x}{9} = \frac{4x}{36} + \frac{4x}{36}$ [সাধারণ হর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ, এখানে সাধারণ হর 36]

$= \frac{8x}{36}$ [লব= রূপান্তরিত ভগ্নাংশগুলোর লবের যোগফল]

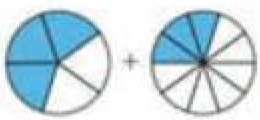
$= \frac{2x}{9}$

তোমরা অবশ্যই লক্ষ করে থাকবে $\frac{4x}{36}$ ও $\frac{x}{9}$ ভগ্নাংশ দুটিতে ভিন্ন ভিন্ন হর দেখা যায়। এ ক্ষেত্রে তোমাদের কী করা উচিত? এক্ষেত্রে তোমরা অবশ্যই ভগ্নাংশ দুটিকে সাধারণ হর বিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করে নিতে পারো।

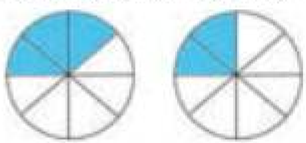
একক কাজ

(প্রশ্ন ১ ও ২ এর জন্য, যদি বৃত্তটির ক্ষেত্রফল x বর্গএকক হয়।)

১। নিম্নের মডেলটি থেকে ভগ্নাংশ বের করো এবং যোগ করো।



২। প্রথম বৃত্ত থেকে দ্বিতীয় বৃত্ত বিয়োগ করো



১ম বৃত্ত ২য় বৃত্ত

৩। x দৈর্ঘ্যের একটি বেতের $\frac{1}{3}$ অংশ লাল স্কচটেপ দ্বারা মোড়ানো, $\frac{1}{4}$ অংশ কালো স্কচটেপ দ্বারা মোড়ানো এবং অবশিষ্ট অংশ সাদা স্কচস্টেপ দ্বারা মোড়ানো হলে, সাদা স্কচস্টেপ দ্বারা মোড়ানো বেতের পরিমাণ কত?

৪. হেনা ৭ম শ্রেণির শিক্ষার্থী। সে তার বাড়ির উঠানে $\frac{1}{3}$ অংশে সবজি চাষ, $\frac{1}{4}$ অংশে ফুলের বাগান করল। উঠানের কত অংশ খালি রইল তা বীজগণিতীয় পদ্ধতিতে বের করো।

বীজগণিতীয় রাশির ভাগ (Division of Algebraic Expression)

একপদী রাশিকে একপদী রাশি দ্বারা ভাগ

আমরা ভগ্নাংশের গুণের ধারণা থেকে শিখেছি $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{b}$

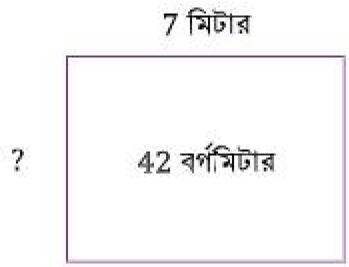
আমরা যদি ডান পক্ষকে বামে এবং বাম পক্ষকে ডানে স্থানান্তর করি, তাহলে লিখতে পারি $\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$
চলো এবার উপরের সম্পর্ক বীজগণিতীয় রাশির গুণের ক্ষেত্রেও ব্যবহার করি:

$$\frac{-30x^6}{2x^4} = \frac{-30}{2} . \frac{x^6}{x^4} = -15x^2$$

$$\frac{-21a^5b^4}{-3a^4b} = \frac{-21}{-3} . \frac{a^5}{a^4} . \frac{b^4}{b} = 7a^1\, b^3 = 7ab^3$$

$$\frac{21y^2z^2}{-4y^2z} = \frac{12}{4} . \frac{y^2}{z^2} . \frac{z^2}{z} = 3y^0z^1 = 3.1.z = 3z$$

যদি একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 42 বর্গমিটার এবং এর দৈর্ঘ্য 7 মিটার হয়, তাহলে প্রস্থ কত?
বিষয়টি আমরা চিত্রে উপস্থাপন করতে চেষ্টা করি।

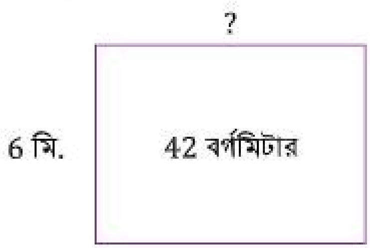


এখানে, ক্ষেত্রফল=42 বর্গমিটার

দৈর্ঘ্য= 7 মিটার

প্রস্থ= $\frac{42}{7}$ মিটার= 6 মিটার

আবার যদি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 42 বর্গমিটার এবং প্রস্থ 6 মিটার হয়, তাহলে এর দৈর্ঘ্য কত?



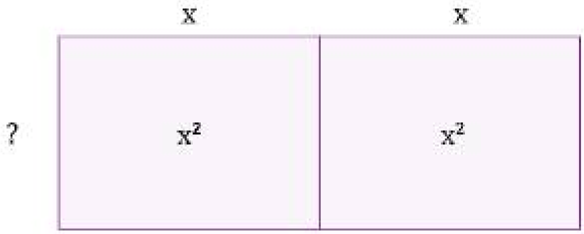
এখানে, ক্ষেত্রফল =42 বর্গমিটার

প্রস্থ =6 মিটার

দৈর্ঘ্য = $\frac{42}{7}$ মিটার =7 মিটার

অনুরূপভাবে, চলো আমরা আয়তাকৃতি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে বীজগণিতীয় রাশিমালার ক্ষেত্রে চিন্তা করি।

বিদ্যালয়ের একটি কক্ষের ভিতরের মেঝের ক্ষেত্রফল $2x^2$ বর্গমিটার, এর দৈর্ঘ্য $2x$ মিটার হলে প্রস্থ কত?



কক্ষের (ক্ষেত্রটির) মেঝের ক্ষেত্রফল $=2x^2$ বর্গমিটার

দৈর্ঘ্য$= 2x$ মিটার

প্রস্থ $= \frac{2x^2}{2x}$ মিটার $= x$ মিটার।

উদাহরণ ১:

$x^5 \div x^2 = x^{5-2} = x^3$

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

আমরা জানি, $a \times (-b) = (-a) \times b = -ab$

সুতরাং $-ab \div a = -b$

একইভাবে $-ab \div b = -a$

$-ab \div (-a) = b$

$-ab \div (-b) = a$

$-ab \div (-b) = a$

$$-\frac{ab}{a} = \frac{a \times (-b)}{a} = -b$$

$$\frac{ab}{b} = \frac{(-a) \times b}{b} = -a$$

$$\frac{-ab}{-a} = \frac{(-a) \times b}{-a} = b$$

$$\frac{-ab}{-b} = \frac{a \times (-b)}{-b} = a$$

লক্ষ করি,

* একই চিহ্নযুক্ত দুটি রাশির ভাগফল (+) চিহ্নযুক্ত হবে।
* বিপরীত চিহ্নযুক্ত দুটি রাশির ভাগফল (–) চিহ্নযুক্ত হবে।

$$\frac{+1}{+1} = +1$$

$$\frac{-1}{-1} = +1$$

$$\frac{-1}{+1} = -1$$

$$\frac{+1}{-1} = -1$$

উদাহরণ ২:

$$24a^2bc^3 \div (-6abc^2)$$

$$\frac{24a^2bc^3}{(-6abc^2)} = \left(-\frac{24}{6}\right) \times \frac{a^2bc^3}{abc^2}$$

$$= -4 \times (a^{2-1} \times b^{1-1} \times = -4ac$$

একক কাজ

ভাগ করো

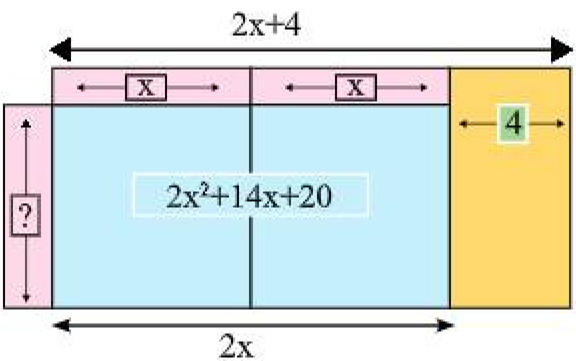
a. $\dfrac{24a^5}{-3a^2}$

b. $\dfrac{-18x^3y^2}{-6x^2y}$

c. $\dfrac{20a^3c^4d^2}{-5a^3c^3}$

বহুপদী রাশিকে একপদী রাশি দ্বারা ভাগ

যদি নিচের ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 4 মিটার বাড়ানো হয় এবং সেক্ষেত্রে ক্ষেত্রটির পরিবর্তিত ক্ষেত্রফল হয়, $2x^2+14x+20$, তবে ক্ষেত্রটির প্রস্থ কত?



আয়তাকৃতি ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=2x^2+14x+20$ বর্গ মিটার

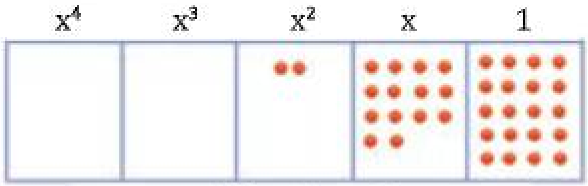
আয়তাকৃতি ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য= $(2x+4)$ মিটার

সুতরাং, আয়তাকৃতি ক্ষেত্রটির প্রস্থ = $\dfrac{2x^2+14x+20}{(2x+4)}$ মিটার

চলো আমরা গুটির খেলা পদ্ধতির সাহায্যে বহুপদী $(2x^2+14x+20)$ কে বহুপদী $(2x+4)$ দ্বারা ভাগ করে আয়তাকৃতি ক্ষেত্রটির প্রস্থ নির্ণয় করি।

১ম ধাপ: প্রথমে যতঘাতের বহুপদীকে ভাগ করতে হবে এর চেয়ে বেশি সংখ্যক বিশিষ্ট বাক্স আঁকি। যেমন: এখানে ভাঁজ্যে x এর সর্বোচ্চ ঘাত 2। কাজেই বাক্স নেবো 3 বা 4টি পর্যন্ত।

২য় ধাপ: ডান দিক থেকে ১ম বাক্সকে ধ্রুব পদের জন্য, ২য় বাক্সকে x ধারী সহগের জন্য, ৩য় বাক্সকে x^2 ধারী সহগের জন্য, ৪র্থ বাক্সকে x^3 ধারী সহগের জন্য, ৫ম বাক্সকে x^4 ধারী সহগের জন্য, ...নির্ধারণ করি।

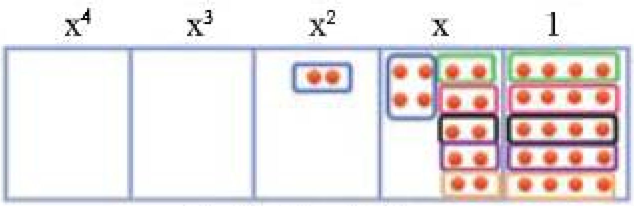


$2x^2 + 14x + 20$

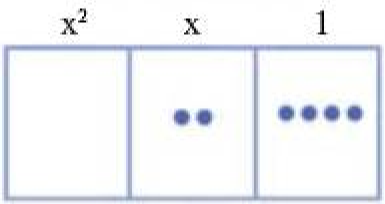
৩য় ধাপ: প্রদত্ত সমস্যাটিতে থাকা সহগগুলোর সমপরিমাণ গুটি ডান দিক থেকে পর্যায়ক্রমে বসাই। যেমন:

ডান দিক থেকে ১ম বাক্সে ধ্রুব পদ জন্য 20টি গুটি, ২য় বাক্সে x এর সহগের জন্য 14টি গুটি এবং ৩য় বাক্সে x^2 এর সহগের জন্য 2টি গুটি বসাই।

৪র্থ ধাপ: ডান দিক থেকে পর্যায়ক্রমে ভাজকের গুটির সমসংখ্যক গুটি নিয়ে দল গঠন করি।

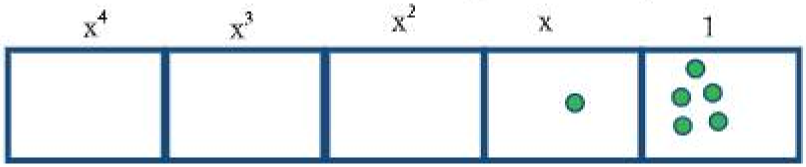


$2x^2 + 14x + 20$

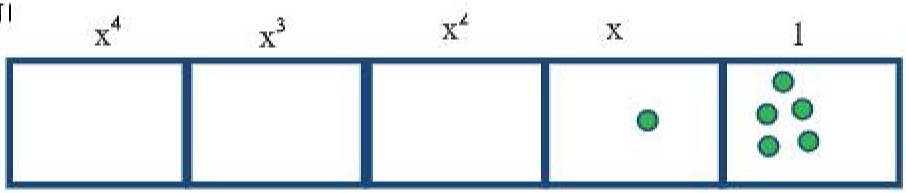


$2x + 4$

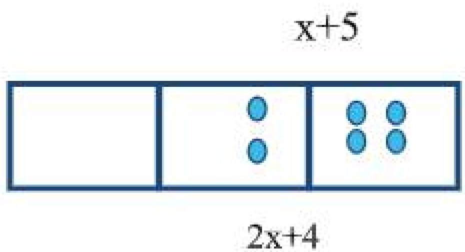
৫ম ধাপ: এক রাউন্ড হলে ১টি, ২ রাউন্ড হলে ২টি অন্য রঙের গুটি বসাই এবং পূর্বের দল সরিয়ে দেই।



৬ষ্ঠ ধাপ: নতুন রঙের গুটিকে সহগ ধরে এদেরকে চলকের সাথে মিল করি। ফলে নিম্নের মত ভাগফল পাওয়া যাবে।



সুতরাং, $\dfrac{2x^2+14x+20}{(2x+4)} = x+5$



নির্ণেয় প্রস্থ $=(x+5)$ মিটার

উদাহরণ-৪: $4x^5 - 14x^4 + 6x^3 - 2x^2$ কে $2x^2$ দ্বারা ভাগ করো।

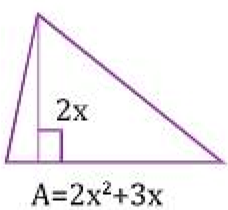
সমাধান: $\dfrac{4x^5}{2x^2} - \dfrac{14x^4}{2x^2} + \dfrac{6x^3}{2x^2} - \dfrac{2x^2}{2x^2} = 2x^3 - 7x^2 + 3x - 1$

উদাহরণ-৫: ১ম রাশিকে ২য় রাশি দ্বারা ভাগ কর: $3a^3b^2 - 2a^2b^3$, a^2b^2

সমাধান: $\dfrac{(3a^3b^2-2a^2b^3)}{(a^2b^2)} = \dfrac{a^2b^2(3a-2b)}{(a^2b^2)} = 3a - 2b$ $\therefore$ নির্ণেয় ভাগফল: $3a - 2b$

উদাহরণ-৬: একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $2x^2 + 3x$ বর্গএকক এবং উচ্চতা $2x$ একক হলে, এর ভূমির দৈর্ঘ্য কত?

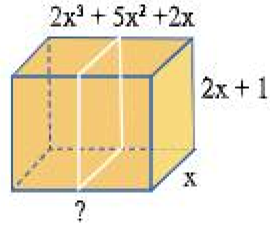
সমাধান:



$$\frac{(4x^2+6x)}{2x} = (4x^2+6x)\cdot\frac{1}{2x}$$
$$= 4x^2\cdot\frac{1}{2x} + 6x\cdot\frac{1}{2x}$$
$$= \frac{4x^2}{2x} + \frac{6x}{2x}$$
$$= \frac{4}{2}\left(\frac{x^2}{x}\right) + \frac{6}{2}\left(\frac{x}{x}\right)$$
$$= 2x^{(2-1)} + 3x^{(1-1)}$$
$$= 2X + 3$$

বহুপদী রাশিকে বহুপদী রাশি দ্বারা ভাগ

এবার চলো আমরা একটি শ্রেণিকক্ষের আয়তন পরিমাপ করতে চেষ্টা করি। যদি একটি বিদ্যালয় ভবনের নিচ তলার একটি কক্ষের আয়তন $2x^3+5x^2+2x$ ঘনমিটার, কক্ষের উচ্চতা= $(2x+1)$ মিটার এবং প্রস্থ = x মিটার হলে কক্ষটির দৈর্ঘ্য কত হতে পারে তোমরা বলতে পারো কি? নিশ্চয়ই তোমাদের আয়তাকৃতি ঘনবস্তুর কথা মনে আছে। চলো বের করতে চেষ্টা করি।



কক্ষের আয়তন $=2x^3+5x^2+2x$ ঘনমিটার

কক্ষের উচ্চতা = $(2x+1)$ মিটার

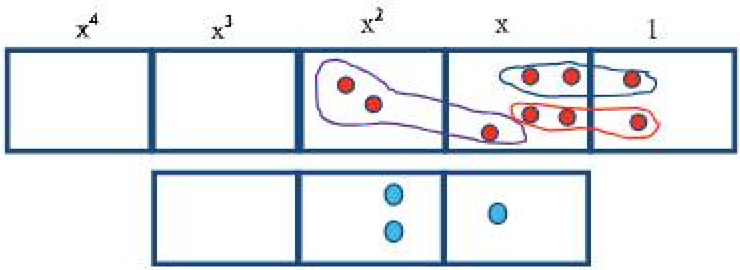
কক্ষের প্রস্থ = x মিটার

কক্ষের দৈর্ঘ্য = ?

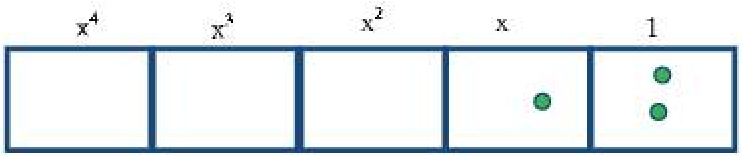
কক্ষের দৈর্ঘ্য= $\dfrac{(2x^2 + 5x^2 + 2x)}{(2x + 1)(x)} = \dfrac{(2x^2 + 5x + 2)}{(2x + 1)}$

দলগত কাজ

গুটির খেলা পদ্ধতিতে ভাগ নির্ণয়



$2x+1$



$x+2$

নির্ণেয় ভাগফল=$(x+2)$

একক কাজ

গুটির খেলা পদ্ধতির সাহায্যে বহুপদী (x^2+3x+2) কে বহুপদী $(x+2)$ দ্বারা ভাগ করো।

অনুশীলনী

(ক) গুটির খেলা পদ্ধতির সাহায্যে নিচের ১ম রাশিকে ২য় রাশি দ্বারা ভাগ করো।

১. $24a^2b2c - 15a^4b^4c^4 - 9a^2b^6c^2$, $-3ab^2$

২. $a^3b^2 + 2a^2b^3$, $a + 2b$

৩. $6x^2 + x - 2$, $2x - 1$

৪. $6y^2 + 3x^2 - 11xy$, $3x - 2y$

৫. $a^2 + 4axyz + 4x^2y^2z^2$, $a + 2xyz$

৬. $x^2 - 1$, $x + 1$

৭. $x^2 - 1$, $x - 1$

৮. $x^2 + 3x + 2$, $x + 1$

৯. $x^2 - 3x + 2$, $x - 2$

১০. $3a^3b^2 - 2a^2b^3$, a^2b^2

১১. $20x^3y + 10xy^2 - 15x^2y$, $5xy$

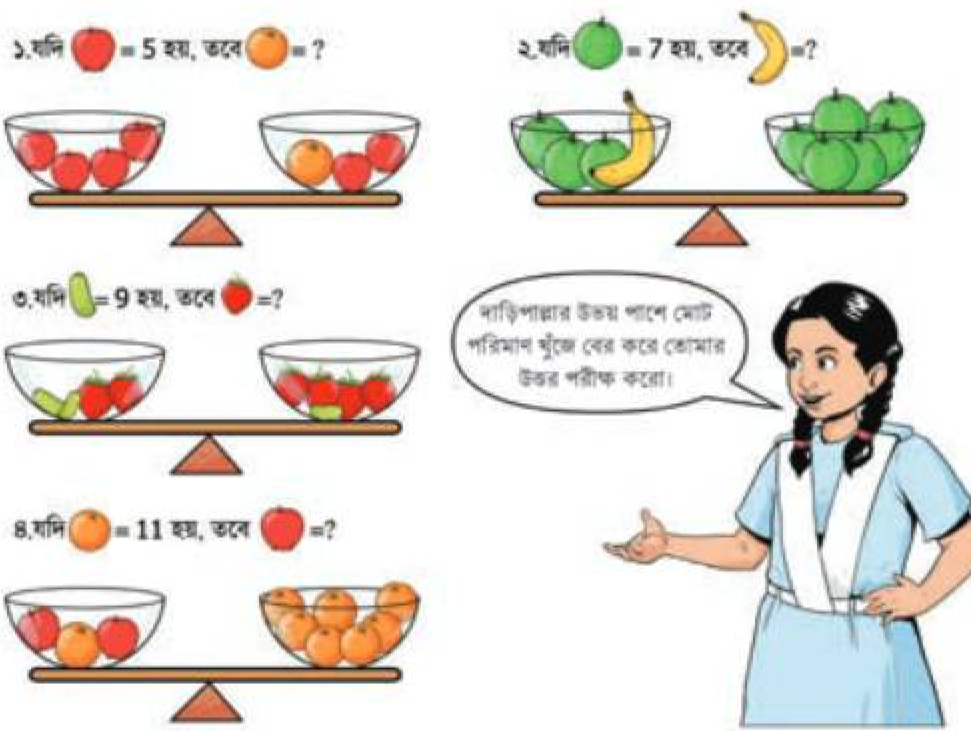
বীজগাণিতিক রাশির সমীকরণ

একচলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ (Linear Equations in one Variable)

আমরা ৬ষ্ঠ শ্রেণিতে সমীকরণ ও সরল সমীকরণ সম্পর্কে জেনে এসেছি এবং বাস্তবভিত্তিক সমস্যা থেকে সমীকরণ গঠন করতে শিখেছি। সপ্তম শ্রেণির এ অধ্যায়ে আমরা সমীকরণ সমাধানের কিছু বিধি ও প্রয়োগ সম্পর্কে জানব।

৬ষ্ঠ শ্রেণিতে আমরা সরল সমীকরণ সমাধানের জন্য কতগুলো নিয়ম শিখেছিলাম। চলো নিয়মগুলোর বাস্তব প্রমাণ করতে চেষ্টা করি।

নিচের নির্দেশিত ভারসাম্য থেকে অজানা মানগুলো কী হতে পারে তা চিন্তা করো এবং ফলাফল খাতায় লেখো।



উপরের চিত্রে বর্ণিত সমস্যা থেকে তোমরা কোনো সিদ্ধান্তে পৌঁছাতে পেরেছ কি? প্রাপ্ত সিদ্ধান্ত আমরা সমীকরণের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করতে পারি কি? চলো সিদ্ধান্তগুলো খাতায় লিখে ফেলি।

ভারসাম্য সমীকরণ

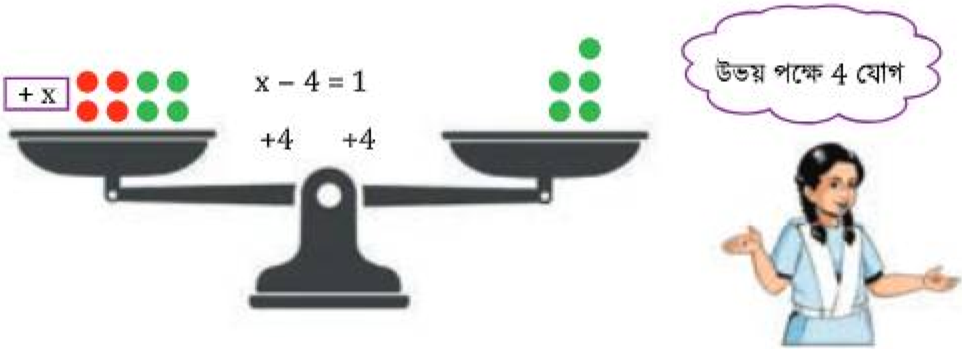
ভারসাম্য স্কেল করার নিয়মগুলিও সমীকরণের ভারসাম্যের জন্য ব্যবহার করা যেতে পারে। একটি সমীকরণের ভারসাম্য বজায় রাখা হবে যদি আমরা:

- উভয় পাশে একই পরিমাণ যোগ করি।
- উভয় দিক থেকে একই পরিমাণ বিয়োগ করি।
- উভয়পক্ষকে একই পরিমাণ দ্বারা গুণ করি।
- উভয়পক্ষকে একই পরিমাণ দ্বারা ভাগ করি।

একটি সমীকরণের ভারসাম্য বজায় থাকলে, আমরা সমীকরণের সমাধান (গুলি) পরিবর্তন করব না।

চলো উপরের সিদ্ধান্তগুলো সমীকরণের ক্ষেত্রে প্রয়োগ করতে চেষ্টা করি।

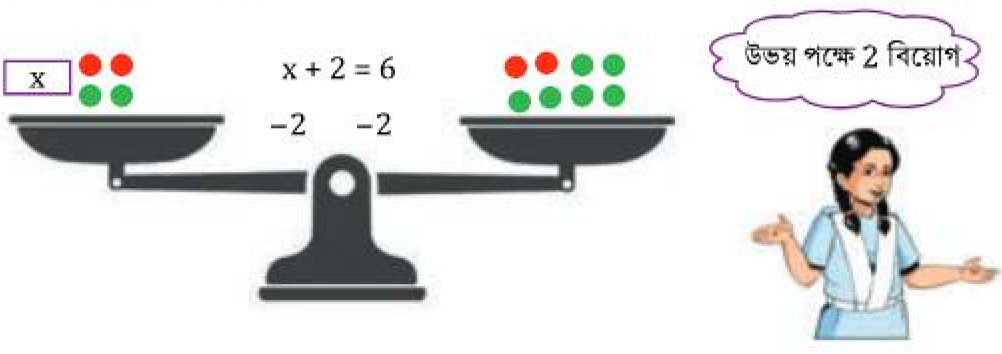
১। $x - 4 = 1$ মূল সমীকরণ



চলো, পাল্লা ও ওজন-বাটখারা ব্যবহার করে দুই পক্ষ আমরা সাম্যাবস্থায় আনতে চেষ্টা করি। পাল্লায় পর্যায়ক্রমে ওজন (বৃত্ত সংখ্যা) বসাই। দুই পক্ষ সাম্যাবস্থায় আনি। পরিশেষে আমরা পাবো $x = 5$.

> সিদ্ধান্ত-১: সমীকরণের উভয়পক্ষে একই সংখ্যা বা রাশি যোগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

২। $x + 2 = 6$ মূল সমীকরণ



চলো, পাল্লা ও ওজন-বাটখারা ব্যবহার করে দুই পক্ষ আমরা সাম্যাবস্থায় আনতে চেষ্টা করি। পাল্লায় পর্যায়ক্রমে ওজন (বৃত্ত সংখ্যা) বসাই। দুই পক্ষ সাম্যাবস্থায় আনি। পরিশেষে আমরা পাব $x = 4$.

সিদ্ধান্ত-২:সমীকরণের উভয়পক্ষ থেকে একই সংখ্যা বা রাশি বিয়োগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

একক কাজ

পাল্লা ও ওজন-বাটখারা ব্যবহার করে $x + 6 = 9$ সমীকরণটির পরির্তিত সমীকরণ বের করো এবং গুণ ও ভাগের বিধি নির্ণয় করো।

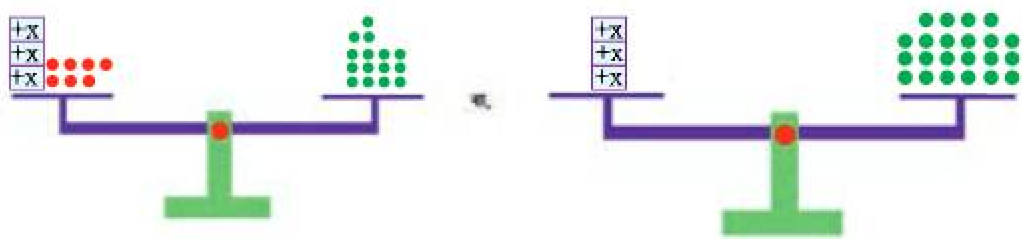
ক) সমীকরণটির সাথে 3 যোগ করা হয় খ) সমীকরণটি থেকে 3 বিয়োগ করা হয়

গ) 4 দ্বারা গুণ করা হয় ঘ) 2 দ্বারা ভাগ করা হয়

সমীকরণের বিধিসমূহ

১।

পাল্লা ও ওজন-বাটখারা ব্যবহার করে সমীকরণ $3x - 7 = 15$ থেকে সমীকরণ $3x = 15 + 7$ পাওয়ার প্রক্রিয়াটি পর্যবেক্ষণ করি।



আমরা কী বুঝতে পারলাম? এই প্রক্রিয়াটিকে আমরা সমীকরণের পক্ষান্তর বিধি বলতে পারি।

একক কাজ

১। $7x + 5 = 25$ থেকে $7x = 20$

২। $5(3x + 2) = 5(2x + 1)$ থেকে $3x + 2 = 2x + 1$

৩। $\frac{3x}{2} = \frac{7}{4}$ থেকে $12x = 14$

৪। $5x + 2 = 7x - 4$ থেকে $7x - 4 = 5x + 2$

এবার চলো সরল সমীকরণ গঠন ও সমাধান করতে চেষ্টা করি।

যোগের সমীকরণ

যদি বাংলাদেশের সর্বোচ্চ শৃঙ্গ তাজিনডং এর উচ্চতা বাংলাদেশের দ্বিতীয় সর্বোচ্চ শৃঙ্গ কেওকারাডং এর চেয়ে 295 মিটার বেশি হয় এবং তাজিনডং এর উচ্চতা 1280 মিটার হয়, তবে কেওকারাডং এর উচ্চতা চল বের করি।

কেওকারাডং এর উচ্চতা বের করার জন্য আমরা একটি সমীকরণ গঠন ও ইহার সমাধান করব।

ধরি, কেওকারাডং এর উচ্চতা = x মিটার

কেওকারাডং এর উচ্চতা +295 মিটার = তাজিনডং এর উচ্চতা

বা, $x+295 = 1280$

বা, $x+295-295 = 1280-295$

বা, $x = 985$

সুতরাং, কেওকারাডং এর উচ্চতা = 985 মিটার

> সমীকরণের উভয়পক্ষে একই সংখ্যা বা রাশি যোগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে।

বিয়োগের সমীকরণ

কবি নজরুল হাই স্কুলে 'নিরাপদ হাত ধোয়া কর্মসূচি' অনুষ্ঠিত হয়। উক্ত কর্মসূচীতে 42 জন শিক্ষার্থী অনুপস্থিত ছিল এবং 915 জন কর্মসূচিতে অংশ গ্রহণ করেছিল। কবি নজরুল হাই স্কুলে মোট শিক্ষার্থী সংখ্যা নির্ণয় করি।

কবি নজরুল হাই স্কুলে মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা বের করার জন্য প্রদত্ত তথ্যের আলোকে আমরা একটি সমীকরণ গঠন ও ইহার সমাধান করব।

মোট শিক্ষার্থী – অনুপস্থিত শিক্ষার্থী=উপস্থিত শিক্ষার্থী

বা, $x-42 = 915$

বা, $x-42+42 = 915+42$

বা, $x = 957$

সুতরাং, কবি নজরুল হাই স্কুলে মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা 957 জন

> সমীকরণের উভয়পক্ষে একই সংখ্যা বা রাশি যোগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে। যদি $x = a$ হয় তাহলে $x+b = a+b$

গুণের সমীকরণ

সালাম প্রতিদিন অতিরিক্ত সময় কাজের জন্য প্রতি ঘণ্টায় 300 টাকা করে পান। তিনি এ মাসে অতিরিক্ত সময় কাজের জন্য প্রাপ্ত 9000 টাকা দিয়ে একটি মোবাইল ক্রয় করেন। তিনি মোট কত সময় অতিরিক্ত কাজ করেন? প্রদত্ত তথ্যের আলোকে আমরা একটি সমীকরণ গঠন ও ইহার সমাধান করব।

প্রতি ঘণ্টায় অতিরিক্ত টাকা× অতিরিক্ত কাজের সময় = মোবাইলের ক্রয়মূল্য

বা, $300 \times h = 9000$

বা, $\frac{300}{300} h = \frac{9000}{300}$

> সমীকরণের উভয়পক্ষকে অশূন্য একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা ভাগ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে। যদি $x=a$ এবং $b\neq 0$ হয় তাহলে $x/b=a/b$

সুতরাং $h = 30$

অতিরিক্ত কাজের সময় 30 ঘণ্টা।

ভাগের সমীকরণ

একটি হাঙর ঘণ্টায় গড়ে 20 মাইল গতিতে সাঁতার কাটতে পারে। 24 ঘণ্টায় এই গতিতে সাঁতার কেটে সে কত দূরত্ব অতিক্রম করতে পারবে?

প্রদত্ত তথ্যের আলোকে আমরা একটি সমীকরণ গঠন ও ইহার সমাধান করব।
মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব ÷ মোট সময়=প্রতি ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব

বা, $d \div 24 = 20$

বা, $\frac{d}{24} = 20$

বা, $\frac{d}{24} \times 24 = 20 \times 24$

বা, $d = 20 \times 24 = 480$

সুতরাং, মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব = 480 মাইল

> সমীকরণের উভয়পক্ষকে একই সংখ্যা বা রাশি দ্বারা গুণ করলে পক্ষদ্বয় সমান থাকে। যদি $x = a$ হয় তাহলে $xb = ab$

একটি সরল সমীকরণের সমাধান ব্যাখ্যা

চল নিচের সমীকরণটি সমাধান করি এবং সমীকরণটির সমতা যাচাই করে দেখি।

$3(7 - 2x) = -4x + 30$

বা, $21 - 6x = -4x + 30$

বা, $-6x + 4x = 30 - 21$

বা, $-2x = 9$

বা, $2x = -9$

$x = -\frac{9}{2}$

সুতরাং, $x = -\frac{9}{2}$

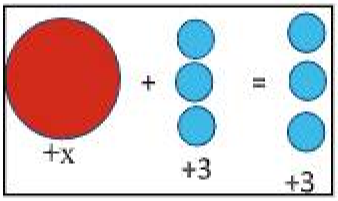
সমতা যাচাই

বামপক্ষ $= 3(7 - 2x) = 3\{7 - 2(-\frac{9}{2})\} = 3(7 + 9) = 48$

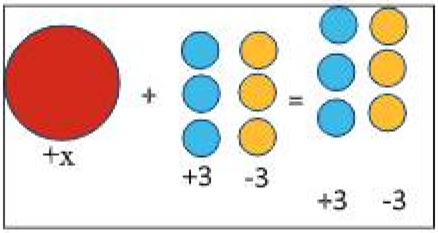
ডানপক্ষ $= -4x + 30 = -4(-\frac{9}{2}) + 30 = 18 + 30 = 48$

মূলটি সমীকরণের উভয়পক্ষে বসিয়ে বামপক্ষ ও ডানপক্ষের মান সমান পাওয়া গেল। সুতরাং x এর মান সঠিক।

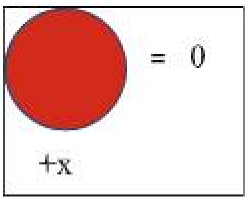
উদাহরণ: কাগজ কেটে এবং রং করে সরল সমীকরণের সমাধান করো: $x + 3 = 3$



বা,



বা,



একক কাজ

দাঁড়িপাল্লার ভারসাম্যের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলো সমাধান করে দেখাও।

১. কোন সংখ্যার দ্বিগুণের সাথে 5 যোগ করলে যোগফল 25 হবে?

২. দুটি সংখ্যার যোগফল 55 এবং বড় সংখ্যাটির 5 গুণ ছোট সংখ্যাটির 6 গুণের সমান। সংখ্যা দুটি নির্ণয় করো।

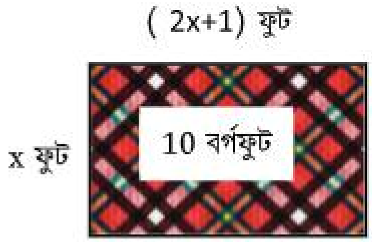
৩. গীতা, রিতা ও মিতার একত্রে 180 টাকা আছে। রিতার চেয়ে গীতার 6 টাকা কম ও মিতার 12 টাকা বেশি আছে। কার কত টাকা আছে?

একচলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ (Quadratic Equations in one Variable)

আমরা বিভিন্ন ধরনের বহুপদী রাশি শিখে এসেছি। বিভিন্ন ধরনের বহুপদী ব্যবহার করে এক চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণ গঠন ও সমাধান করা শিখেছি। এখন আমরা দ্বিমাত্রিক বহুপদী ব্যবহার করে একচলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন ও এর ব্যবহার সম্পর্কে পরিচিতি লাভ করব।

কর্মপত্র ১

ধরো তোমার পড়ার টেবিলের উপর একটি টেবিলক্লথ বিছানোর সিদ্ধান্ত নিয়েছে। এতে 10 বর্গফুট ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট কাপড় স্থাপন করা হবে যার দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণের চেয়েও 1 ফুট বেশি। আমরা যদি ঐ টেবিলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বের করতে চাই তা হলে কি করতে হবে ভেবেছ কি? প্রস্থ কত হবে তোমরা কি কেউ বলতে পার? যেহেতু প্রস্থ আমাদের অজানা, চলো আমরা প্রস্থকে আজানা রাশি x ফুট ধরে নিই। এবার তোমরা বলতে পারো কি ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য কত হবে? যেহেতু দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণের চেয়েও ১ ফুট বেশি। তা হলে আমরা দৈর্ঘ্যকে অজানা রাশির মাধ্যমে কীভাবে লিখব? নিশ্চয়ই দৈর্ঘ্য হবে $(2x+1)$ ফুট। এবার চলো আমরা এই তথ্যগুলোকে চিত্রে উপস্থাপন করে দেখি। তোমরা কি এই তথ্যগুলোকে নিয়ে গঠিত সমীকরণটি কেমন হবে বলতে পারো?



টেবিলক্লথের প্রস্থ x ফুট এবং এর দৈর্ঘ্য $=(2x + 1)$ ফুট, কাজেই, ক্ষেত্রফল হবে $x(2x+1)$ বর্গফুট। গঠিত সমীকরণটি হবে $x(2x+1)=10$

সুতরাং, $2x^2+x-10=0$

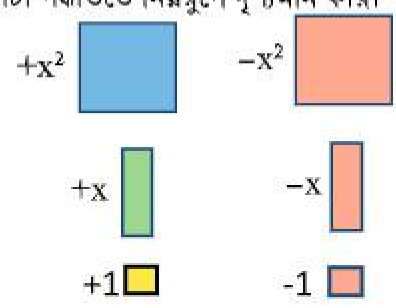
এই সমীকরণটি তোমরা লক্ষ করেছ কি? তোমরা কি বলতে পারো $2x^2+x-10=0$ সমীকরণে চলক কয়টি? তোমরা নিশ্চয়ই বলবে চলক ১টি। এখন যদি প্রশ্ন করি চলকের সর্বোচ্চ ঘাত কত? তোমরা নিশয়ই বলবে 2। তোমরা কি বলতে পারো সমীকরণটিতে x^2 এর সহগ কত ? x এর সহগ কত ?এবং ধ্রুবক কত?

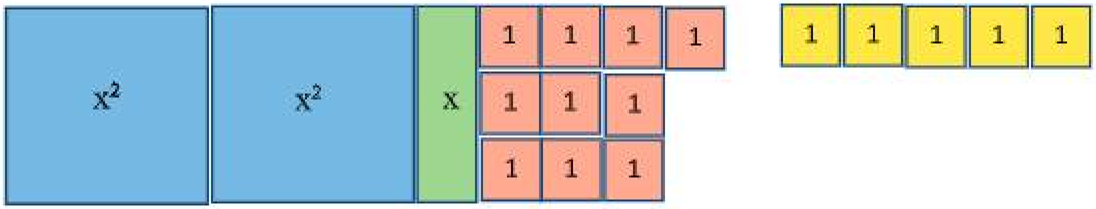
এখন চলো x^2 এর সহগকে a, x এর সহগকে b এবং ধ্রুব পদকে c দ্বারা সূচিত করি। ফলে আমরা $ax^2+bx+c=0$ যার ইংরেজি নাম হলো Quadratic Equation. তোমরা কি বলতে পারো এ ধরনের সমীকরণকে কি আকারের সমীকরণ বলে। এটি হলো সমীকরণের আদর্শ আকার। যেখানে, a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$

এখন চলো $2x^2+x-10=0$ দ্বিঘাত সমীকরণকে কাগজকাটা পদ্ধতিতে নিম্নরূপে দৃশ্যমান করি।

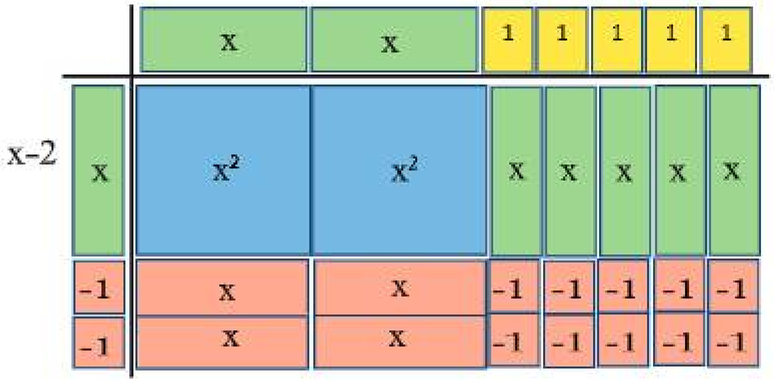
সমীকরণটিকে সমাধান করার জন্য প্রথমে লাল, সবুজ, নীল ও হলুদ রঙের কাগজ নিই। কাগজগুলোকে সঠিক আকৃতিতে কাটি এবং $+x^2, -x^2, +x, -x, +1, -1$ দ্বারা চিহ্নিত করি।

এবার সমীকরণটিকে কাগজের টুকরার সাহায্যে উপস্থাপন করি।





কাগজের টুকরাগুলোর সাহায্যে সমীকরণটিকে বিভিন্নভাবে রূপদান করে আয়তক্ষেত্র অথবা বর্গক্ষেত্র গঠন করি।



আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল, $(2x + 5)(x - 2)$

সুতরাং, $(2x + 5)(x - 2) = 0$

বা, $(2x + 5) = 0$ অথবা $(x - 2) = 0$

$\therefore x = -5/2$ অথবা $x = 2$

বিশেষ দ্রষ্টব্য: $x = -5/2$ গ্রহণযোগ্য নয় যেহেতু কাপড়ের দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক (–) হওয়া সম্ভব নয়।

একক কাজ

আদর্শ সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ আকারে লেখো এবং a, b, c এর মান খুঁজে বের করো।

	আদর্শ আকার	a, b, c
$3x - 2x^2 = 7$	$2x^2 - 3x + 7 = 0$	2, –3, 7
$(x-7)(x+7) = 3x$	....	....
$5 + 2z^2 = 6z$		

$2x(x-3) = 15$		
$5w(7w-2) = 10w + 1$		
$4y-3y(y) = 9$		
$A+2a^2-19 = 5a^2$		

কর্মপত্র: ২

সমীকরণ গঠন

নিচে একটি আয়তাকৃতি ক্ষেত্রের চিত্র দেওয়া আছে। চল উহার তথ্যগুলো থেকে সমীকরণ গঠন করি এবং উহা দ্বিঘাত সমীকরণ কি না পরীক্ষা করি।

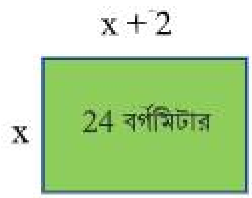
চিত্রটিতে আয়তাকৃতি ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = $(x + 2)$ মিটার, প্রস্থ = x মিটার

ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ) বর্গমিটার

$24 = (x+2)\, x$ বর্গমিটার

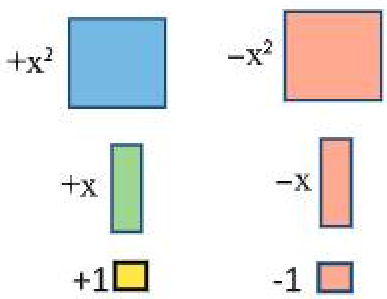
$x^2+2x-24 = 0$

সুতরাং, $x^2+2x-24 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ

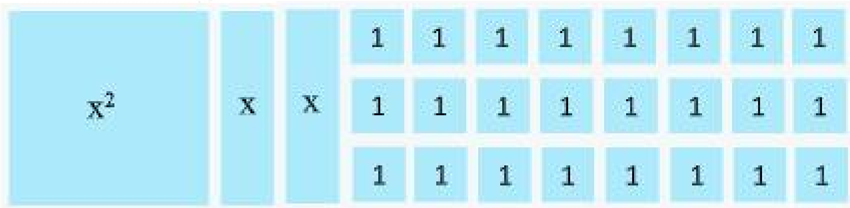


এখন চলো উপরের $x^2+2x-24 = 0$ সমীকরণকে কাগজকাটা পদ্ধতিতে নিম্নরূপে দৃশ্যমান করি।

সমীকরণটিকে সমাধান করার জন্য প্রথমে হালকা কমলা, সবুজ, নীল ও হলুদ রঙের কাগজ নিই। কাগজগুলোকে সঠিকভাবে নিম্নের আকৃতিতে কাটি এবং $+x^2$, $-x^2$, $+x$, $-x$, $+1$, -1 দ্বারা চিহ্নিত করি।



এবার সমীকরণটিকে কাগজের টুকরার সাহায্যে উপস্থাপন করি।



কাগজের টুকরাগুলোর সাহায্যে সমীকরণটিকে বিভিন্নভাবে রূপদান করে আয়তক্ষেত্র অথবা বর্গক্ষেত্র গঠন করি।

আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল,

$(x + 6)(x-4)=0$

সুতরাং, $(x + 6)(x-4)=0$

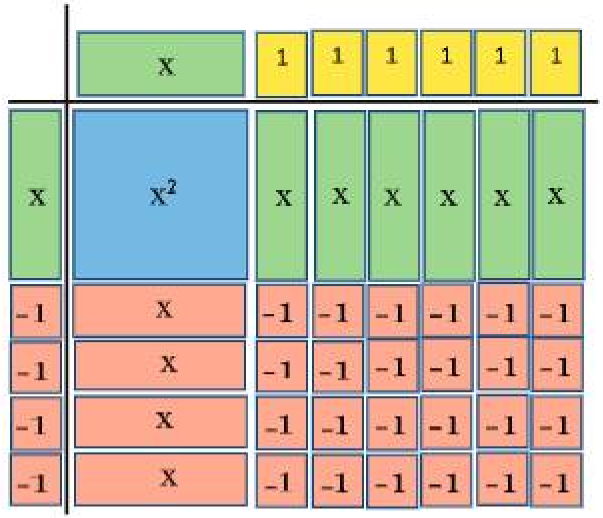
$(x + 6) = 0 \qquad (x-4)=0$

$X=- \ 6 \qquad x = 4$

বিশেষ দ্রষ্টব্য:

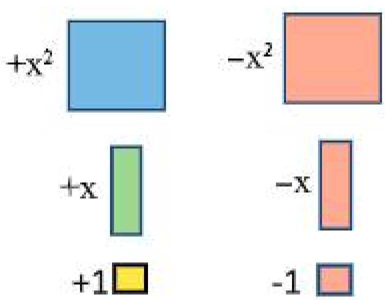
এখানে যেহেতু আয়তক্ষেত্র,

সেহেতু $X=-6$ গ্রহণযোগ্য নয়।

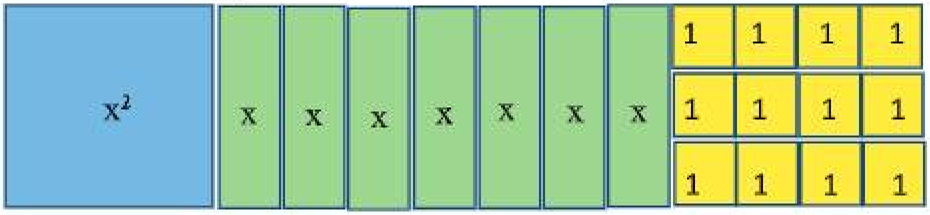


উদাহরণ: কাগজ কেটে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান কর: $x^2 + 7x + 12 = 0$

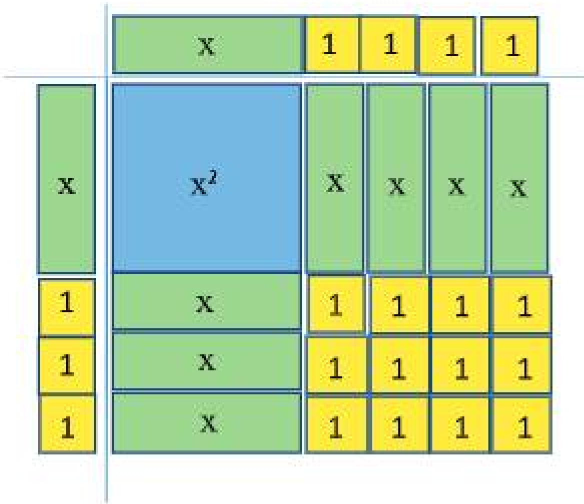
সমীকরণটিকে সমাধান করার জন্য প্রথমে হালকা কমলা, সবুজ, নীল ও হলুদ রঙের কাগজ নিই। কাগজগুলোকে সঠিকভাবে নিম্নের আকৃতিতে কাটি এবং $+x^2$, $-x^2$, $+x$, $-x$, $+1$, -1 দ্বারা চিহ্নিত করি।



এবার সমীকরণটিকে কাগজের টুকরার সাহায্যে উপস্থাপন করি।



কাগজের টুকরাগুলোর সাহায্যে সমীকরণটিকে বিভিন্নভাবে রূপদান করে আয়তক্ষেত্র অথবা বর্গক্ষেত্র গঠন করি।



আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল, $(x+4)(x+3)$

সুতরাং, $(x+4)(x+3)=0$

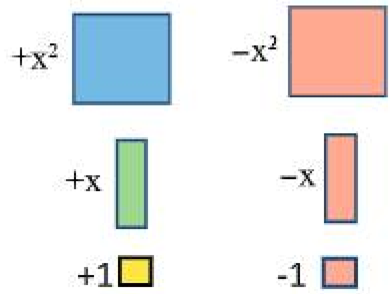
$(x+4)=0$ $\quad$ $(x+3)=0$

$X=-4$ বা $x=-3$

একক কাজ

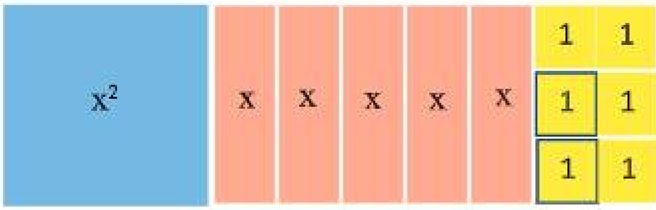
একটি পুকুরের দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা 8 মিটার বেশি এবং ইহার ক্ষেত্রফল 105 বর্গমিটার হলে, প্রদত্ত তথ্যের সাহায্যে সমীকরণ গঠন করো।

উদাহরণ: কাগজ কেটে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান কর: $x^2 - 5x + 6 = 0$

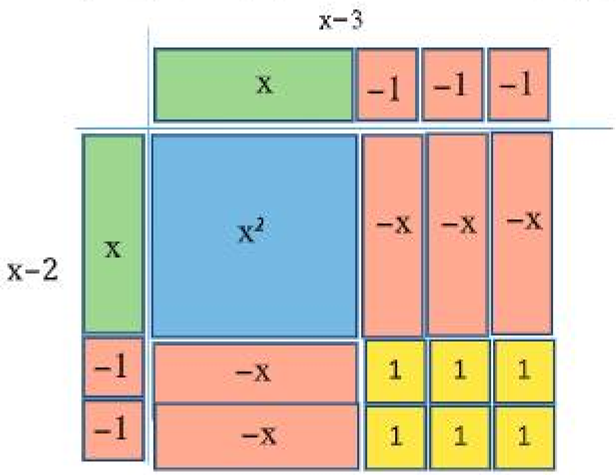


সমীকরণটিকে সমাধান করার জন্য প্রথমে হালকা কমলা, সবুজ, নীল ও হলুদ রঙের কাগজ নিই। কাগজগুলোকে সঠিকভাবে নিম্নের আকৃতিতে কাটি এবং $+x^2, -x^2, +x, -x, +1, -1$ দ্বারা চিহ্নিত করি।

এবার সমীকরণটিকে কাগজের টুকরার সাহায্যে উপস্থাপন করি।



কাগজের টুকরাগুলোর সাহায্যে সমীকরণটিকে বিভিন্নভাবে রূপদান করে আয়তক্ষেত্র অথবা বর্গক্ষেত্র গঠন করি।



আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল, $(x-3)(x-2)$

সুতরাং, $(x-3)(x-2) = 0$

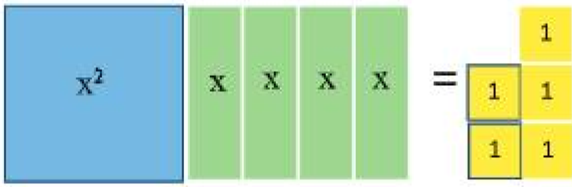
$(x-3)=0, \quad (x-2) = 0$

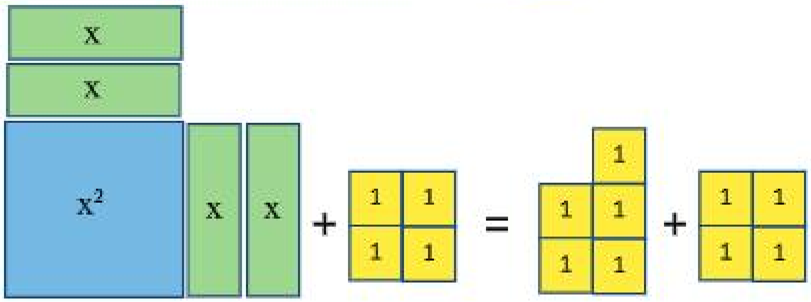
$x = 3 \qquad x = 2$

উদাহরণ: কাগজ কেটে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান কর: $x^2 + 4x = 5$

সমীকরণটিকে সমাধান করার জন্য প্রথমে হালকা কমলা, সবুজ, নীল ও হলুদ রঙের কাগজ নিই। কাগজগুলোকে সঠিকভাবে নিম্নের আকৃতিতে কাটি এবং $+x^2, -x^2, +x, -x, +1, -1$ দ্বারা চিহ্নিত করি। এবার সমীকরণটিকে কাগজের টুকরার সাহায্যে উপস্থাপন করি।

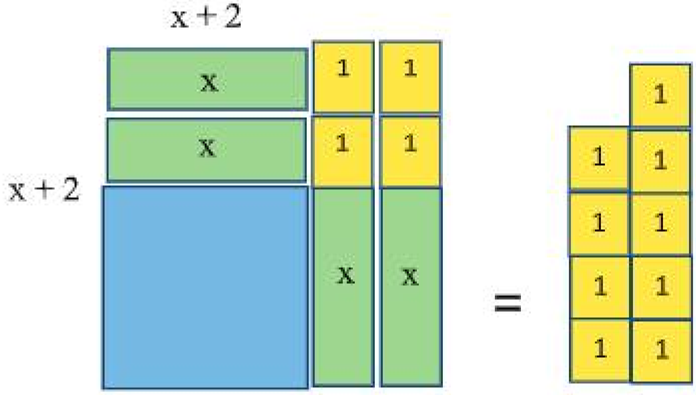
$$x^2 + 4x \quad = \quad 5$$





$$x^2 + 4x + 4 \quad = \quad 5 + 4$$

কাগজের টুকরাগুলোর সাহায্যে সমীকরণটিকে বিভিন্নভাবে রূপদান করে আয়তক্ষেত্র অথবা বর্গক্ষেত্র গঠন করি।



এখন, $x^2 + 4x + 4 = 5 + 4$

$(x + 2)^2 = 5 + 4$

$\sqrt{(x + 2)^2} = \sqrt{9}$

$x + 2 = \pm 3$

$x = 3 - 2 x = -3 - 2$

সমাধান, $x = 1$ অথবা $x = -5$

অনুশীলনী

দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করো এবং কাগজ কেটে সমাধান করো।

১. রাকার কাছে যত টাকা আছে, তার বন্ধুর কাছে তার চেয়ে আরও 10 টাকা বেশি আছে। দু'জনের টাকার গুণফল 119 হলে, কার কাছে কত টাকা আছে?

২. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোনো সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 12 এবং এদের গুণফল 27; সংখ্যাটি কত?

৩. একটি আয়তাকৃতি ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল 132 বর্গমিটার। মেঝের দৈর্ঘ্যকে 6 মিটার কমালে ও প্রস্থকে দ্বিগুন করলে ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকে। ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত?

৪. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের দৈর্ঘ্য 13 মিটার ও অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের অন্তর 7 মিটার। ঐ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ও পরিসীমা কত?

৫. একটি ত্রিভুজের উচ্চতা তার ভূমির তিনগুণ অপেক্ষা 2 সেমি কম। ত্রিভুজ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 20 বর্গসেমি হলে, ত্রিভুজটির উচ্চতা কত?

৬. $x^2 + 6x - 7 = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করো।

তথ্য অনুসন্ধান ও বিশ্লেষণ

মিতুদের স্কুলে প্রধান শিক্ষিকা আজ সমাবেশের সময় ঘোষণা দিলেন সব ক্লাসের জন্য খেলাধুলার সরঞ্জাম কেনা হবে। সবাই একটা আনন্দের শব্দ করল। কিন্তু তারপর প্রধান শিক্ষিকা বললেন, 'এখনই খুশি হয়ে যেও না। খেলার সরঞ্জাম তো অনেক রকমের, কোনগুলো কিনে নিয়ে আসব তা তো তোমরা বলো নাই। নাকি আমি যা কিনে আনবো তা-ই নিবে?' সবাই বলে উঠল, 'না ম্যাডাম, না! আমরা পছন্দ করার সুযোগ চাই!' প্রধান শিক্ষিকা বললেন, 'ঠিক আছে, এই সিদ্ধান্ত নেওয়ার সমস্যা তাহলে তোমরাই সমাধান করবে। '

প্রথম পিরিয়ডে রফিক স্যারের গণিত ক্লাস। স্যার ক্লাসে এসেই বললেন, 'তোমাদের ক্লাসের খেলাধুলোর সরঞ্জাম ক্রয়ের কাজটা সেরে ফেলা দরকার, কী বলো?' সবাই উল্লাস করে উঠল, 'জি স্যার!' স্যার বললেন, 'তাহলে বলো দেখি কিসের কিসের সরঞ্জাম কেনা যায়?' রায়হান বলল, 'স্যার, ক্রিকেট ব্যাট আর বল!' সুমি বলল, 'স্যার, দড়ি লাফ!' নয়ন বলল, 'একটা ফুটবল লাগবে, স্যার!' জিনাত আর বিথী বললো, 'আমাদের একটা লুডো সেট চাই, স্যার!' মহিম আর কৌশিক বলল, 'তাহলে একটা দাবা সেট থাকলেও বেশ হয়, স্যার!'

উত্তেজনায় কেউ খেয়াল করেনি যে ছেলে-মেয়েরা যা যা বলছে স্যার এক এক করে বোর্ডে লিখে যাচ্ছেন। এবার স্যার বললেন, 'এর বাইরে আর কিছু চাই?' মিতু কাঁচুমাচু করে বলল, 'স্যার, একটা ব্যাডমিন্টন সেট স্কুলে পেলে খেলতাম। ' স্যার হেসে মিতুর ব্যাডমিন্টনও লিখে দিলেন বোর্ডে। তারপর বললেন, 'আমি মোটামুটি একটা ধারণা করতে পারছি তোমরা কী কী চাও। কিন্তু সপ্তম শ্রেণির জবা ক্লাসের জন্য কোনগুলো প্রধান শিক্ষিকাকে দিবো, তার একটা পাকা তথ্যতালিকা দরকার, বুঝলে?'

এই বলে স্যার বললেন, 'আচ্ছা, দেখি ক্রিকেট সেট-এর জন্য কত জন হাত তুলবে?' দশ জন হাত তুলল। স্যার ক্রিকেটের ঘরের উপর দশটি তারা এঁকে দিলেন। তারপর বললেন, 'ফুটবল?' শিক্ষার্থীরা হাত তুলল। এমন করে একে একে সব খেলার ঘরেই তারা আঁকা হয়ে গেলে যা দাঁড়াল তা দেখতে খানিকটা পাশের ছবির মতো।

চিত্র: ১৩.১

স্যার বললেন, 'বাহ, বেশ হলো! দেখলে তো সবাই মিলে কেমন একটা ছক বানিয়ে ফেললাম! এবার বলো দেখি কী বোঝা যাচ্ছে?' মিশু ক্লাসের বিজ্ঞানী। ও বলল, 'স্যার, আমাদের ক্লাসের সবাই ক্রিকেট সবচেয়ে বেশি পছন্দ করে। ' স্যার বললেন, 'বাহ মিশু! ব্রিলিয়ান্ট! তোমরা বলো তো মিশু এটা কীভাবে বুঝল?' মিতু মন খারাপ করে বলল, 'স্যার, ক্রিকেটের ঘরে সবচেয়ে বেশি তারা। সবাই ক্রিকেটের বেলায় হাত তুলেছে। আর ব্যাডমিন্টনের ঘরে সবচেয়ে কম, মাত্র দু'টো। আমি আর আরেকজন ছাড়া কেউ ব্যাডমিন্টন খেলতে চায় না। ' স্যার বললেন, 'ঠিক বলেছ তো! মন খারাপ করছ কেন তাহলে?' রবিন পাশ থেকে বলল, 'স্যার, মিতু ভেবেছে কম ভোট পড়ার কারণে ব্যাডমিন্টন সেট কেনা হবে না!' স্যার হো হো করে হেসে উঠলেন, 'আরে না না, প্রধান শিক্ষিকা বলে দিয়েছেন, একজনও যদি চায়, তাহলেও সেই সরঞ্জাম কেনা হবে। কোনো চিন্তা নেই মিতু!' তখন মিশু দাঁড়িয়ে বলল, 'স্যার, আমি তাহলে চাই ক্লাসে একটা ম্যাগনিফাইং গ্লাস থাকুক। তাহলে ফুটবলে লিক হলে আমি দেখে দিতে পারব!' স্যার বললেন, 'বেশ তো! বিজ্ঞানের সরঞ্জাম কেনার সময় মনে করে বলো। আজকে কেবল খেলার গুলো জেনে নিই' সবাই হেসে উঠল।

এখন শোনো। যখন তোমাদের থেকে একদম শুরুতে জানতে চাইলাম, কী কী খেলতে চাও, তোমরা আমাকে যা যা বললে, সেগুলো হলো তথ্য। এমন তথ্য সংগ্রহ করা কেন দরকার? মনে করো আমি মুখে মুখে জিজ্ঞেস করলাম, তোমরা সবাই যে যা চাইছ সেটাই বললে। তাতে একটা ভাসা ভাসা ধারণা পাওয়া যেত। অর্থাৎ তোমাদের চাহিদাগুলো জানার ক্ষেত্রে একটা ফাঁক থেকে যেত।

সংগ্রহ করেই অবশ্য কাজ শেষ নয়। তরিতরকারি বাজার থেকে নিয়ে এসেই যেমন খেয়ে ফেলি না, সেগুলোকে রান্না করতে হয়, তারপর সেগুলো খাবার যোগ্য হয়। তেমনই সংগৃহীত তথ্যগুলোকেও আমাদের প্রক্রিয়াজাত করতে হবে। তাই আমরা তথ্যগুলোকে একটা ছকে বসিয়ে বিন্যস্ত করলাম, অর্থাৎ সাজালাম। তখন কিছুক্ষণ আগে সংগ্রহ করা তথ্যগুলো আমাদের সামনে অর্থপূর্ণ উপাত্ত হয়ে উঠল। আমরা বুঝতে পারলাম আমাদের চাহিদাটা কী।

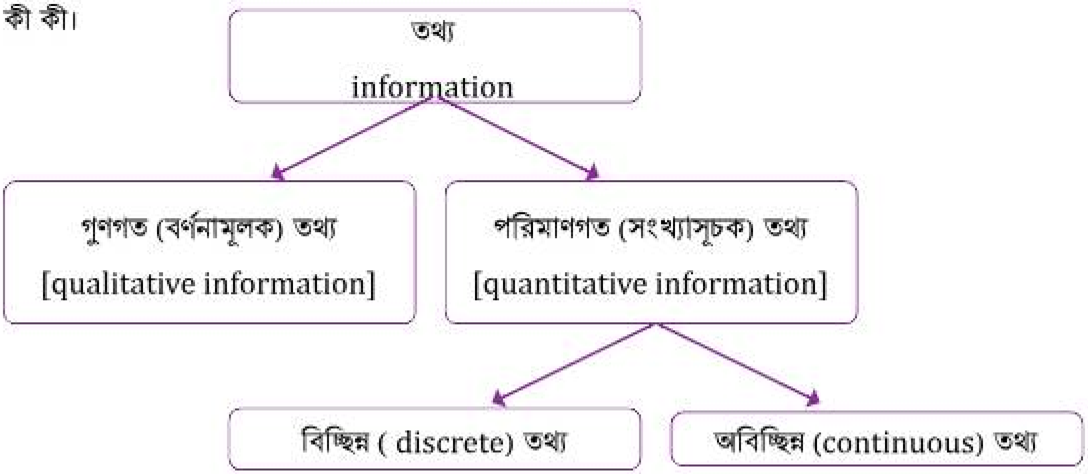
উপাত্তকে প্রক্রিয়াজাত করলে আমাদের সামনে সেগুলো অর্থপূর্ণ তথ্য রূপে ফুটে ওঠে। এই উপাত্তগুলি দেখে আমরা একটি সিদ্ধান্ত গ্রহণ করতে পারি। তোমাদের ক্লাসে খেলার সরঞ্জাম নিয়ে এই কাজটা করবে নাকি? সবাই চাহিদা এবং মতামত নিয়ে এমন একটি উপাত্ত সারণি বানিয়ে দাবি নিয়ে গেলে তোমাদের শিক্ষাপ্রতিষ্ঠানের প্রধান নিশ্চয়ই না করবেন না, তাই না?

এবার একটু চিন্তা করে বলতে পারো, খেলার সরঞ্জাম নিয়ে আমরা যে তথ্যগুলো পেলাম সেগুলো কোন ধরনের তথ্য? পরিমাণগত নাকি গুণগত? আচ্ছা আরেকটু সাহায্য করি– পরিমাণগত তথ্যকে গাণিতিক সংখ্যা দিয়ে প্রকাশ করা যায়। আর গুণগত অর্থ হলো বর্ণনামূলক, এদের মাঝে সংখ্যাবাচক কোন কিছু থাকে না, এদের পরিমাণ পরিমাপ করা যায় না। এখন চিন্তা করে নিচের একক কাজটি করো:

১৩.১ নং ছকটিতে যে প্রকারের তথ্য আছে বলে মনে করো, নিচের ছকে তার বাম পাশের ঘরেটিক চিহ্ন (√) বসাও। ডান পাশের দুটি ফাঁকা ঘরেই তোমার সিদ্ধান্তের একটি করে কারণ লেখো।

টিক চিহ্ন	তথ্যের প্রকার	কারণ
	গুণগত	
	পরিমাণগত	

শিক্ষকের থেকে সঠিক উত্তর আর তার কারণটা জেনে নিও। এই পর্যায়ে আমরা জানলাম যে তথ্য মূলত দুই প্রকার: গুণগত আর পরিমাণগত। এর মাঝে পরিমাণগত তথ্য আবার দুই প্রকার। নিচের ছকে দেখে নিই সেগুলো কী কী।



পরের কাজগুলো করার জন্য তোমাদের কাছে বিচ্ছিন্ন আর অবিচ্ছিন্ন পরিমাণগত তথ্যের ধারণা পরিষ্কার হওয়া দরকার। দুটোই সংখ্যাবাচক তথ্য, তবে দুটির মাঝে কিছু পার্থক্য আছে।

প্রথমে বিচ্ছিন্ন তথ্য নিয়ে বলি। নাম শুনেই বুঝা যাচ্ছে এই ধরনের তথ্যগুলো এককভাবে থাকে, সংযুক্ত বা ধারবাহিকভাবে থাকে না। বিচ্ছিন্ন তথ্যের মূল বৈশিষ্ট্য হলো সময়ের সাথে এগুলো পরিবর্তনশীল নয়, অনেকগুলো পরিমাপের সংখ্যাও একত্রে সম্মিলিত নয়। এই সংখ্যাবাচক উপাত্তগুলো পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ উভয়ই হতে পারে। যেমন: আমাদের স্মৃতি সৌধের উচ্চতা ১৫০ ফুট এবং প্যারিসের আইফেল টাওয়ারের উচ্চতা ঠিক ৩০০ মিটার। আবার আমাদের পদ্মা সেতুর দৈর্ঘ্য ৬.১৫ কিলোমিটার। এক্ষেত্রে খেয়াল করো, স্মৃতি সৌধ এবং আইফেল টাওয়ার-এর উচ্চতা বা পদ্মা সেতুর দৈর্ঘ্য একটাই হতে পারে। আমরা এগুলো যতবারই পরিমাপ করি, এগুলোর সংখ্যাগত মান পরিবর্তন হবে না। আরও আছে। তোমার বর্তমান জুতার নম্বর, এই বছর তোমার ক্লাসের মোট শিক্ষার্থীদের সংখ্যা, তোমার স্কুলে মোট সিঁড়ির সংখ্যা, ইত্যাদি। নিচের ছকে তুমি কি আরও তিনটি বিচ্ছিন্ন তথ্যের উদাহরণ লিখতে পারবে?

বিচ্ছিন্ন তথ্য
১।
২।
৩।

এবার আসি অবিচ্ছিন্ন তথ্যে। অবিচ্ছিন্ন তথ্যের মূল বৈশিষ্ট্য হলো এর মান স্থির নয়, এই তথ্য যে কোনো মান গ্রহণ করতে পারে। যেমন: এক দিনের তাপমাত্রা। চিন্তা করে দেখো, সকালে যখন স্কুলে এসেছ, তখনকার তাপমাত্রা আর দুপুরের তাপমাত্রা কি এক? আবার দিন গড়িয়ে সন্ধ্যা হলে তখন কি এক থাকে? দুপুরে ঝমঝম বৃষ্টি আর বিকেলের মিঠে রোদেলা আবহাওয়ায় তাপমাত্রা ভিন্ন হয় না? তাহলে একই দিনের তাপমাত্রা বলতে গেলে তোমার অনেকগুলো তথ্য একত্র করতে হবে। আরও উদাহরণ আছে, এক বছরে একটি গাছের উচ্চতা, গত পাঁচ বছরে বাংলাদেশে ধানের উৎপাদনের পরিমাণ, ইত্যাদি। তুমি কি নিচের ছকে তিনটি অবিচ্ছিন্ন তথ্যের উদাহরণ দিতে পারবে?

অবিচ্ছিন্ন তথ্য
১।
২।
৩।

একক কাজ

এবার এসো একটি একক কাজ করি। এই কাজটি তথ্যের প্রকারভেদ নিয়ে সব ধারণা পরিষ্কার করে দিবে। এবারও বিভিন্ন উপাত্ত দিয়ে তোমার একটি ছক পূরণ করতে হবে। উপাত্তগুলোকে প্রক্রিয়াজাত করলে সেগুলি তথ্যে রূপান্তর হবে। এক্ষেত্রে আমরা সংগৃহীত উপাত্তগুলোকে প্রক্রিয়াজাতকৃত বলে ধরে নিবো। নিচের ছকে ইতোমধ্যে শ্রেণিবদ্ধ হয়ে থাকার কারণে আমরা উপাত্তগুলোকে তথ্য (information) বলেই সম্বোধন করব।

তথ্যগুলো তোমার বাসা আর স্কুল থেকেই সংগ্রহ করতে পারবে। নির্দিষ্ট ফাঁকা ঘরে সংগৃহীত তথ্য বসাও এবং সঠিক তথ্যের প্রকারেটিক চিহ্ন (√) দাও।

ক্রমিক নং.	বিবরণ	তথ্য	তথ্যের প্রকার		
			গুণগত	পরিমাণগত	
				বিচ্ছিন্ন	অবিচ্ছিন্ন
১	তোমার নাম				
২	তোমার বয়স				
৩	কোন শ্রেণিতে পড়?				
৪	তোমার স্কুলের প্রতিষ্ঠার সাল				
৮	তোমার উচ্চতা				
৯	তোমার পরিবারে সদস্যের সংখ্যা				
১০	তোমার বাসায় গত মাসের বিদ্যুতের বিল				
১১	গত মাসে কত কেজি চাল কেনা হয়েছে?				
১২	তোমার ঘরে বইয়ের সংখ্যা				

একক কাজ

কাজটিতে তথ্য সংগ্রহ করে নিশ্চয়ই মজা পেয়েছ। এবারে আরেকটু কাজ বাকি। কী উপায়ে তথ্যগুলো সংগ্রহ করেছ সেগুলো জানা দরকার। নিচের ছকে তথ্য সংগ্রহের কিছু উপায় বলে দেওয়া আছে, কোন কোন উপায় তুমি ব্যবহার করেছ, তার ডান পাশে ফাঁকা ঘরেটিক চিহ্ন (√) দাও। এগুলো ছাড়াও অন্য কোন উপায় ব্যবহার করলে বাকি ফাঁকা ঘরে লেখো।

ক্রমিক নং	তথ্য সংগ্রহের উপায়	ব্যবহার করেছি
১।	পর্যবেক্ষণ করে	
২।	পরীক্ষা করে	
৩।	কোন ফাইল বা ডেটাবেইজ থেকে	
৪।	ইন্টারনেট থেকে	
৫।	কোনো ব্যক্তিকে প্রশ্ন করে	
৬।	পত্রিকা/খবরের কাগজ থেকে	
৭।		
৮।		

উপরের দেখানো উপায়গুলো ছাড়াও তথ্য সংগ্রহের আরও উপায় আছে। যেমন: সাক্ষাৎকার গ্রহণ, প্রশ্নমালা ব্যবহার করা, নির্দিষ্ট দলের সাথে আলোচনা করা ইত্যাদি। তথ্য সংগ্রহের কাজ সব সময় সহজ হয় না। অনেক সময় একটি তথ্য একাধিক উপায়ে একাধিক উৎস থেকে সংগ্রহ করতে হয়। আবার অনেক ক্ষেত্রে উপাত্ত বা তথ্য সংগ্রহ বেশ সময় ও ব্যয়সাপেক্ষ হয়ে থাকে।

একক কাজটিতে তথ্য সংগ্রহের প্রাথমিক ধারণা অর্জন করেছ নিশ্চয়ই। আমাদের পরবর্তী কাজ হলো একটি দলগত প্রকল্প। প্রকল্পের বিষয়বস্তু, প্রয়োজনীয় নির্দেশনা এবং সহায়ক ধারণাসমূহ নিচেই দেওয়া আছে।

দলগত কাজ

১। শিক্ষকের সাহায্য নিয়ে সম্পূর্ণ ক্লাসকে ৫টি দলে ভাগ করা হবে। প্রতিটি দল একটি প্রকল্প নিয়ে কাজ করবে। প্রকল্পগুলো হলো:

ক. সহপাঠীদের প্রিয় রং

খ. সহপাঠীদের প্রিয় খাবার

গ. সহপাঠীদের উচ্চতা

ঘ. এক মাসের জন্য ক্লাসের প্রতিদিনের অনুপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা

ঙ. সহপাঠীদের পরিবারের সদস্য সংখ্যা

২। তুমি কোন প্রকল্পের অংশ হচ্ছ তা ফাঁকা ঘরে লেখো:

৩। তোমার দলে সদস্য সংখ্যা কত জন তা ফাঁকা ঘরে লেখো:

৪। উপাত্ত সংগ্রহের পরিকল্পনা:

ক্রমিক নং.	বিষয়	প্রস্তাবনা
১।	উপাত্তের উৎস	
২।	উৎস নির্বাচনের যুক্তি	
৩।	উপাত্ত সংগ্রহের মাধ্যম	
৪।	মাধ্যম নির্বাচনের যুক্তি	
৫।	উপাত্তের ধরন	
৬।	উপাত্তের ধরন নির্ধারণের যুক্তি	
৭।	উপাত্ত সংগ্রহের তারিখ	
৮।	উপাত্ত শেণিবদ্ধকরণের তারিখ	
৯।	উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণের তারিখ	
১০।	প্রক্রিয়াকৃত উপাত্ত উপস্থাপনের ধরন	
১১।	উপস্থাপনের ধরন পছন্দ করার কারণ	
১২।	চূড়ান্ত প্রতিবেদন জমাদানের তারিখ	

এবার তাহলে জেনে নাও তোমার দলের কাজগুলো কী কী। উপরের পরিকল্পনা অনুযায়ী নিচের ধাপগুলো সম্পন্ন করো।

১। তথ্য সংগ্রহের উপকরণ তৈরি করো।

২। তথ্য সংগ্রহ করো।

৩। নিচের দুটি থেকে একটি প্রযোজ্য পদ্ধতি ব্যবহার করে সংগৃহীত উপাত্তগুলো গণসংখ্যা নিবেশন সারণিবদ্ধ করো:

ক. স্বল্পসংখ্যক বিচ্ছিন্ন বা গুণবাচক উপাত্ত গণনা করার ক্ষেত্রে সরাসরি টালিচিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নির্ণয় করো।

খ. অধিকসংখ্যক অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের ক্ষেত্রে i) পরিসর নির্ণয় করো; ii) শ্রেণিব্যাপ্তি নির্ণয় করো; iii) শ্রেণিসংখ্যা নির্ণয় করো; এবং iv) টালিচিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা নির্ণয় করো।

৪। নিচের তিনটি পদ্ধতির মাঝে প্রযোজ্য পদ্ধতিটি ব্যবহার করে তোমার গণসংখ্যা নিবেশনের লেখচিত্র উপস্থাপন করো:

ক. রেখাচিত্র খ. আয়তলেখ গ. পাইচিত্র

৫। একটি প্রতিবেদন তৈরি করো। প্রতিবেদনে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দিতে পারো:

ক. তোমাদের প্রকল্পটির উদ্দেশ্য কী?

খ. প্রকল্পটির জন্য কী তথ্য-উপাত্ত সংগ্রহ করা প্রয়োজন?

গ. কী পদ্ধতিতে কোন উৎস থেকে তথ্য-উপাত্ত সংগ্রহ করেছ? এই উৎসটিই কেন সঠিক মনে করলে?

ঘ. কী উপায়ে উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণ করেছ? প্রক্রিয়াকরণের প্রতিটি ধাপ দেখাও।

ঙ. প্রক্রিয়াকৃত উপাত্তের লেখচিত্র উপস্থাপন করো। যে ধরনের লেখচিত্র বেছে নিয়েছ, তার কারণ কী?

চ. প্রক্রিয়াকৃত তথ্য হতে তোমরা কী সিদ্ধান্ত নিলে, লেখো।

এই পর্যায়ে তোমার দলের সাথে তুমি উপাত্ত এবং তথ্য সংগ্রহ আরম্ভ করতে পারো। উপাত্ত-তথ্য সংগ্রহের পর তোমার সেগুলো প্রক্রিয়াকরণ করতে হবে। ষষ্ঠ শ্রেণিতে তোমরা জেনেছ যে এই উপাত্ত এবং তথ্যগুলো পরিসংখ্যানিক কাজের অংশ। তাই এর প্রক্রিয়াকরণও পরিসংখ্যানিক উপায়ে হওয়া প্রয়োজন। পরিসংখ্যানিক উপায়ে তথ্য এবং উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণ করার আগে তোমাদের মূল কিছু ধারণা আর পদ্ধতি সম্পর্কে জানা দরকার। এই অধ্যায়ের বাকি অংশে সেগুলো ব্যাখ্যা করা হলো। এক্ষেত্রে শিক্ষক তোমাদের সাহায্য করবেন এবং প্রয়োজনীয় নির্দেশনা দিবেন। মনে রাখবে, তোমার প্রকল্পের কাজ এগিয়ে নেওয়ার জন্য এই ধারণাগুলো বার বার দেখে নিতেও দোষ নেই। তবে ধারণাগুলো পরিষ্কার হওয়ার জন্য তোমাদের কিছু কিছু একক কাজ করতে হবে।

উপাত্তের উপস্থাপন

তোমরা ইতোমধ্যেই জেনেছ, সংখ্যাসূচক তথ্যাবলি পরিসংখ্যানের উপাত্ত। এসকল উপাত্ত সাধারণত অবিন্যস্তভাবে থাকে এবং অবিন্যস্ত উপাত্ত থেকে সরাসরি প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত নেওয়া যায় না। এজন্য উপাত্তগুলোকে বিন্যস্ত বা সারণিভুক্ত করার প্রয়োজন হয়। ষষ্ঠ শ্রেণিতে তোমরা অবিন্যস্ত উপাত্তকে মানের ক্রমানুসারে সাজিয়ে বিন্যস্ত

করা শিখেছ। এ অধ্যায়ে অবিন্যস্ত উপাত্তকে কীভাবে শ্রেণিবিন্যাসের মাধ্যমে সারণিভুক্ত করে বিন্যস্ত করা যায়, তা জানার চেষ্টা করব।

কোনোকিছু শ্রেণিবিন্যাস করার অর্থ কী? মনে করো তোমারা ক্লাসে ৪০ জন শিক্ষার্থী আছ। তোমরা সকলে একসাথে শ্রেণিকক্ষে ঢুকে পড়ে যে যেখানে খুশি বসে পড়লে কেমন একটা এলোমেলো দেখায় না? শ্রেণিকক্ষটি অবিন্যস্ত হয়ে থাকে। কিন্তু প্রত্যেকের জন্য একটা বেঞ্চ বা সিট বরাদ্দ করে দিলে, সারিবদ্ধভাবে সবাই সুন্দর করে বসলে গোছানো লাগে, নিয়মতান্ত্রিক মনে হয়। সবাই নিজেদের বরাদ্দকৃত স্থানে বসলে শ্রেণিকক্ষটি বিন্যস্ত দেখায়। উপাত্তের ক্ষেত্রেও এমন। অনেকগুলো সংখ্যা এলোমেলো বসিয়ে রাখলে তার থেকে কোনো অর্থ উদ্ধার করা যায় না। কিন্তু, উপাত্তের সংখ্যার উপর ভিত্তি করে সুবিধাজনক ব্যবধান নিয়ে উপাত্তকে কতগুলো শ্রেণিতে বিভক্ত করলে তা বিন্যস্ত থাকে, এবং তা বিশ্লেষণ করা সহজ হয়। এই বিন্যস্ত করার প্রক্রিয়াই শ্রেণিবিন্যাস। চলো নিচের প্রশ্ন দুটির উত্তর খুঁজি।

- উপাত্ত কী প্রক্রিয়ায় শ্রেণিবিন্যাস করা যায়?
- এই অধ্যায়ের কোনো পর্যায়ে কি উপাত্ত শ্রেণিবিন্যাস করা হয়েছে?

গণসংখ্যা নিবেশন সারণি (frequency distribution table)

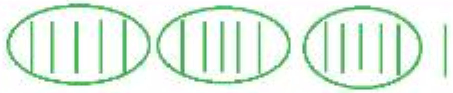
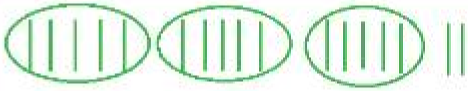
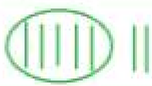
শ্রেণিবিন্যাস করার মাধ্যমে অবিন্যস্ত উপাত্তকে বিন্যস্ত করার সবচেয়ে নির্ভরযোগ্য বৈজ্ঞানিক পদ্ধতি হলো গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা। গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরির নির্দিষ্ট কোনো নিয়ম নেই। অনুসন্ধানকারী বা গবেষকগণ নিজেদের প্রয়োজনে বিভিন্ন সময়ে বিভিন্নভাবে গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করে থাকেন। চলো, একটি সহজ উদাহরণ দিয়ে দেখে নিই কীভাবে এই সারণি তৈরি করা যায়।

মনে করো, তোমাদের ক্লাসের শিক্ষার্থীরা সকালের নাস্তায় কি খেতে পছন্দ করে শিক্ষক তা জানতে চান। সকালের নাস্তায় অনেক কিছুই খাওয়া যায়, তবে এই ক্ষেত্রে আমরা কেবল ভাত, রুটি আর চা-বিস্কুটের মাঝে সীমাবদ্ধ থাকব। শিক্ষক ক্লাস ক্যাপটেন মাহিরকে তথ্যগুলো সংগ্রহ করার দায়িত্ব দিলেন। মাহির প্রথমে গেলো শরীফের কাছে জিজ্ঞেস করতে, শরীফের পছন্দ ভাত, মাহির ভাতের ঘরে পেনসিল দিয়ে একটি দাগ দিলো। মিতুর পছন্দ চা-বিস্কুট, সেই ঘরে পড়ল আরেকটি দাগ। এমন করে ক্লাসের ৪০ জন শিক্ষার্থীর প্রতিজনের বিপরীতে তাদের পছন্দ অনুযায়ী একটি করে দাগ দিল। সব উপাত্ত সংগ্রহ করে দিয়ে নিচের ছকের মতো করে শিক্ষকের কাছে উপস্থাপ করল।

<table>
<tr><th>পছন্দের খাবার</th><th>ট্যালি চিহ্ন</th></tr>
<tr><td>ভাত</td><td>| | | | | | | | | | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>রুটি</td><td>| | | | | | | | | | | | | | | | |</td></tr>
<tr><td>চা-বিস্কুট</td><td>| | | | | | |</td></tr>
</table>

প্রতিটি দাগকে আমরা ট্যালি (tally) বলে থাকি। ছকটিতে খেয়াল করে দেখো, প্রতিটি ট্যালি এক এক জন শিক্ষার্থীর উপাত্ত নির্দেশ করে। অন্যভাবে বললে প্রতিটি ট্যালি গণনার একটি করে সংখ্যা নির্দেশ করে। তাই প্রতিটি ট্যালি একেকটি গণসংখ্যা।

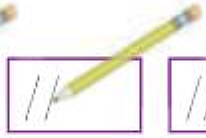
গণসংখ্যা কী জানার পর প্রীতি মাহিরের লেখা কাগজটিতে আরেকটি কলাম করে ভাত, রুটি এবং চা-বিস্কুটের প্রতিটির বিপরীতে মোট কয়জনের উপাত্ত পাওয়া গেল তা দেখতে চাইল। নতুন কলামটির নাম দিল গণসংখ্যা বা শিক্ষার্থীর সংখ্যা।

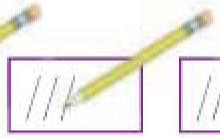
পছন্দের খাবার	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা বা শিক্ষার্থীর সংখ্যা
ভাত		১৬
রুটি		১৭
চা-বিস্কুট		৭
	মোট	৪০

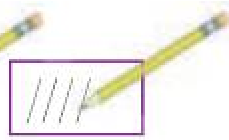
এবার শিক্ষক বললেন, মাহির যে ট্যালি ব্যবহার করে গণনা করেছে, গণসংখ্যা গণনা করার জন্য সেটি সঠিক একটি পদ্ধতি। কিন্তু ট্যালি ব্যবহার করেই আরও সহজে গণনা করার একটি উপায় আছে।

১ – ৪ পর্যন্ত ট্যালি চিহ্নগুলো আমরা নিম্নরূপে দিতে পারি।

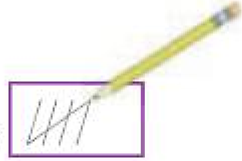

১

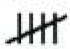

২

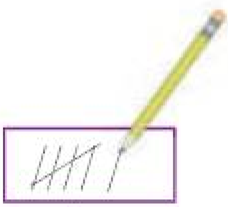

৩

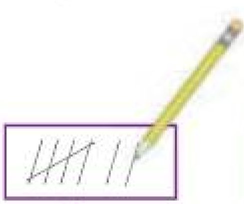

৪

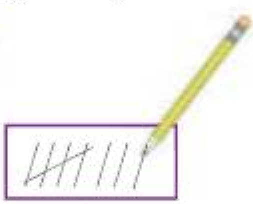
কিন্তু ৫ম ট্যালি চিহ্নটি চারটি চিহ্ন জুড়ে আড়াআড়িভাবে দিতে হয়, যা নিম্নরূপ:

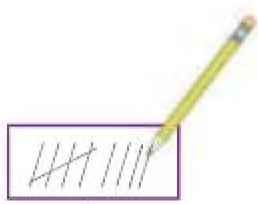

৫

তাই, ট্যালি গণনা করতে গিয়ে যখনই  এমন কিছু দেখবে, সেটিকে ৫ বলে ধরে নিবে। একইভাবে (৬ – ৯) পর্যন্ত ট্যালি চিহ্নগুলো নিম্নরূপ হবে –


৬


৭


৮


৯

তাহলে এবার চট করে ২৯ গণসংখ্যাটিকে ট্যালি করে দেখাও নিচের ফাঁকা ঘরে।

তাহলে মাহির ও প্রীতির তৈরি করা সারণিটি আমরা নিম্নরূপে উপস্থাপন করতে পারি।

পছন্দের খাবার	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা বা শিক্ষার্থীর সংখ্যা
ভাত		১৬
রুটি		১৭
চা-বিস্কুট		৭
	মোট	৪০

সারণি থেকে দেখা যায় যে, ঐ ক্লাসের সবচেয়ে বেশি ১৭ জন শিক্ষার্থী সকালের নাস্তায় রুটি এবং সবচেয়ে কম ৭ জন চা-বিস্কুট পছন্দ করে।

একক কাজ

তোমার ক্লাসের সকল শিক্ষার্থীর রক্তের গ্রুপ সংগ্রহ করো। তারপর নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক. গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করে তথ্যগুলো উপস্থাপন করো।
খ. কোন গ্রুপের রক্ত সবচেয়ে বেশি সংখ্যক শিক্ষার্থীর রয়েছে?
গ. কোন গ্রুপের রক্ত সবচেয়ে কম সংখ্যক শিক্ষার্থীর রয়েছে?

এই পর্যন্ত আমরা একটি সহজ গণসংখ্যা নিবেশন সারণি নিয়ে কাজ করলাম। এই সারণিতে উপাত্তের সংখ্যা কম, তাই এর ব্যবস্থাপনায় কম সময় লাগে। এ ছাড়াও এই সারণিতে অবস্থিত তথ্যগুলো বিচ্ছিন্ন। বিচ্ছিন্ন তথ্য কি মনে আছে তো? যা হোক, অবিচ্ছিন্ন তথ্যের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি একটু ভিন্ন। চলো নিচের উদাহরণটি থেকে প্রথমে জেনে নিই, কীভাবে অবিচ্ছিন্ন উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করা যায়।

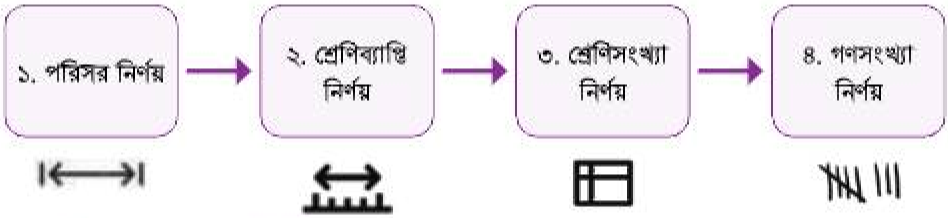
যদি তথ্য বা উপাত্তের সংখ্যা বেশি এবং অবিচ্ছিন্ন হয় তবে উপাত্তসমূহকে উপরের নিয়মে উপস্থাপন করা কঠিন ও সময় সাপেক্ষ হয়।

মনে করো কোনো ৬০ জন শ্রমিকের ঘণ্টাপ্রতি মজুরি (টাকায়) নিচে দেওয়া হলো:

৫০, ৪০, ৫৮, ৪৫, ৫৫, ৪৮, ৫২, ৬০, ৪২, ৫৫, ৪৫, ৬২, ৬১, ৫৭, ৫৮, ৬১, ৪২, ৪৩, ৫০, ৪৪, ৩৭, ৫৭, ৪৩, ৬২, ৫৩, ৪৩, ৪২, ৪৫, ৫১, ৫৪, ৬২, ৩৮, ৩৭, ৪৯, ৫৫, ৬৪, ৫৫, ৬০, ৬১, ৪০, ৩৮, ৩৪, ৪১, ৩৬, ৩৮, ৫১, ৩৮, ৬২, ৪৫, ৪৭, ৫২, ৩৯, ৫১, ৩৩, ৪৯, ৬৩, ৬৪, ৬৫, ৫০, ৫৫।

তুমি যদি প্রত্যেকের ওজনের জন্য গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করতে চাও, তাহলে সারণিটি অনেক বড় হবে এবং তা তৈরি করতে অনেক সময় লাগবে। আবার ভুল হওয়ার সম্ভাবনাও থেকে যায়। এক্ষেত্রে শ্রেণিবিন্যাসের মাধ্যমে অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহ তুমি অতি সহজে বিন্যস্ত করতে পারবে এবং গণসংখ্যা নিবেশন সারণির মাধ্যমে উপস্থাপন করা তোমার জন্য সহজতর হবে।

অবিচ্ছিন্ন উপাত্ত গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করার জন্য সাধারণত নিচের ধাপগুলো অনুসরণ করা হয়।



১. পরিসর (range) নির্ণয়:

কোনো উপাত্তের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মানের পার্থক্যকে আমরা পরিসর বলতে পারি। তাহলে, পরিসর নির্ণয়ের সূত্রটি হবে = (সর্বোচ্চ মান – সর্বনিম্ন মান) + ১

উপাত্তের সর্বোচ্চ নম্বর ৬৫ এবং সর্বনিম্ন নম্বর ৩৩

সুতরাং উপাত্তের পরিসর = (৬৫ – ৩৩) + ১ = ৩৩

শ্রেণিব্যাপ্তি (class interval) নির্ণয়:

অনুসন্ধানলব্ধ উপাত্তের পরিসর নির্ণয়ের পর প্রয়োজন হয় শ্রেণিব্যাপ্তি নির্ধারণ। সেজন্য উপাত্তগুলোকে সুবিধাজনক ব্যবধান নিয়ে কতকগুলো শ্রেণিতে ভাগ করা হয়। উপাত্তের সংখ্যার উপর ভিত্তি করে এগুলো সাধারণত ভাগ করা হয। শ্রেণিতে ভাগ করার নির্ধারিত কোনো নিয়ম নেই। তবে প্রত্যেক শ্রেণির একটি সর্বোচ্চ ও একটি সর্বনিম্ন মান থাকে। যেকোনো শ্রেণির সর্বনিম্ন মানকে এর নিম্নসীমা এবং সর্বোচ্চ মানকে এর উচ্চসীমা বলা হয়। আর যেকোনো শ্রেণির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমার ব্যবধান হলো সেই শ্রেণির শ্রেণিব্যাপ্তি। উদাহরণস্বরূপ, ১ – ১০, ১১ – ২০, ২১ – ৩০ ইত্যাদি হলো এক-একটি শ্রেণি। এখানে ১ – ১০ শ্রেণির নিম্নসীমা ১ এবং উচ্চসীমা ১০। শ্রেণিব্যাপ্তি হবে (১০ – ১)+১ = ১০। শ্রেণিব্যাপ্তি সবসময় সমান রাখাই শ্রেয়।

শ্রেণিসংখ্যা (class number) নির্ণয়:

শ্রেণিসংখ্যা হচ্ছে পরিসরকে যতগুলো শ্রেণিতে ভাগ করা হয় তার সংখ্যা।

অর্থাৎ শ্রেণিসংখ্যা $= \frac{\text{পরিসর}}{\text{শ্রেণিব্যাপ্তি}}$ (পূর্ণসংখ্যায় রূপান্তরিত)

শ্রমিকদের ঘণ্টাপ্রতি মজুরির (টাকায়) পরিসর = ৩৩, মনে করো শ্রেণিব্যাপ্তি = ৫

সুতরাং শ্রেণিসংখ্যা = $\frac{৩৩}{৫}$ = ৬.৬ ≈ ৭ (পরবর্তী পূর্ণসংখ্যায় রূপান্তরিত)। [আসন্ন মান বা প্রায় বোঝাতে ≈ চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়]

এখন একটি জটিল প্রশ্নের উত্তর দাও দেখি। শ্রেণিসংখ্যা হিসাবে ৬.৬ এর পরবর্তী পূর্ণসংখ্যা ৭ কেন নেওয়া হলো? এর পরিবর্তে পূর্ববর্তী পূর্ণসংখ্যা ৬ নিলে কি সারণি তৈরি করতে কোনো সমস্যা হতো বলে তুমি মনে করো?

উপাত্তের সংখ্যাসূচক তথ্যরাশির মান কোনো না কোনো শ্রেণিতে পড়বে। শ্রেণির বিপরীতে প্রতিটি সাংখ্যিক মানের জন্য ট্যালি চিহ্ন দিতে হয় এবং এর মাধ্যমে গণসংখ্যা নির্ধারণ করা হয়। যে শ্রেণিতে যতগুলো ট্যালি চিহ্ন পড়বে তত হবে ঐ শ্রেণির গণসংখ্যা, যা গণসংখ্যা কলামে লিখতে হয়।

এবার চলো ঐ ৬০ জন শ্রমিকের মজুরির গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করি। তোমার জন্য দুটি করে দেওয়া আছে।

শ্রেণিব্যাপ্তি	ট্যালি চিহ্ন	গণসংখ্যা
৩০ – ৩৫	||	২
৩৬ – ৪০	~~||||~~ |||	৮
	মোট	

একক কাজ

তোমার সহপাঠীরা আগের সপ্তাহে প্রত্যেকে মোট কত ঘণ্টা টেলিভিশন দেখেছে, সেই তথ্য সংগ্রহ করো। তারপর শ্রেণিবিন্যাসের মাধ্যমে অবিন্যস্ত উপাত্তসমূহের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করে বিষয় শিক্ষককে দেখাও।

প্রকৃত শ্রেণিসীমা নির্ণয়:

তোমাদের দলগত কাজটি করতে পারার জন্য শ্রেণিসীমা এবং প্রকৃত শ্রেণিসীমা নির্ণয় করতে শেখা জরুরি। কোনটি কী সেটি বলে না দিয়ে এসো আমরা একটি দলগত কাজের মাধ্যমে বুঝে দেখি।

দলগত কাজ

কয়েকটি দলে বিভক্ত হয়ে শ্রেণির প্রত্যেক শিক্ষার্থীর ওজন (কিলোগ্রামে) পরিমাপ করো। তারপর প্রাপ্ত ওজন সংশ্লিষ্ট শিক্ষার্থীর নামের পাশে লিখে একটি তালিকা তৈরি করো।

তোমাদের ক্লাসের সকল শিক্ষার্থীর প্রত্যেকের ওজন (কেজিতে) মেপে যে উপাত্তগুলো পেয়েছিলে, তার শ্রেণিবিন্যাসকৃত গণসংখ্যা সারণির গণসংখ্যা বা শিক্ষার্থীর সংখ্যার খালি ঘরগুলো পূরণ করো।

শ্রেণিব্যাপ্তি বা ওজন (কেজিতে)	গণসংখ্যা বা শিক্ষার্থীর সংখ্যা
৩১ – ৩৫	
৩৬ – ৪০	
৪১ – ৪৫	
৪৬ – ৫০	
৫১ – ৫৫	
৫৬ – ৬০	
৬১ – ৬৫	
৬৬ – ৭০	
মোট	

এখন যদি ৪৫.৫ কেজি এবং ৫০.৫ কেজি ওজনের দুইজন শিক্ষার্থী তোমাদের ক্লাসে নতুন ভর্তি হয়, তবে কোন শ্রেণিতে তুমি তাদের অন্তর্ভুক্ত করবে? নতুন শ্রেণি তৈরি করে তুমি তাদের অন্তর্ভুক্ত করতে পারবে না। আবার ৪১ – ৪৫ বা ৪৬ – ৫০ শ্রেণিতেও অন্তর্ভুক্ত করতে পারবে না। যেহেতু পরপর দুটি শ্রেণির উচ্চসীমা ও নিম্নসীমার মধ্যে ১ পার্থক্য রয়েছে, সেহেতু ৪৫.৫ এবং ৫০.৫ উপাত্ত দুটি কোনো শ্রেণিতেই অন্তর্ভুক্ত করা যাবে না। এমতাবস্থায় পার্থক্য ১ কে সমান দুইভাগে (১ ÷ ২ = ০.৫) ভাগ করে ভাগফল প্রতিটি শ্রেণির উচ্চসীমার সাথে যোগ এবং নিম্নসীমা থেকে বিয়োগ করে প্রকৃত শ্রেণিসীমা নির্ণয় করতে হবে।

উদাহরণস্বরূপ, মনে করো ৪১ – ৪৫ এবং ৪৬ – ৫০ দুটি শ্রেণি

৪১ – ৪৫ শ্রেণির উচ্চসীমা = ৪৫ এবং ৪৬ – ৫০ শ্রেণির নিম্নসীমা = ৪৬

সুতরাং উচ্চসীমা ও নিম্নসীমার পার্থক্য (৪৬ – ৪৫) = ১

অতএব, পার্থক্যের অর্ধেক (১ ÷ ২) = ০.৫

সুতরাং ৪১ – ৪৫ এর প্রকৃত শ্রেণিব্যাপ্তি হবে = (৪১ – ০.৫) – (৪৫ + ০.৫) অর্থাৎ ৪০.৫ – ৪৫.৫

একইভাবে ৪৬ – ৫০ এর প্রকৃত শ্রেণিব্যাপ্তি হবে = (৪৬ – ০.৫) – (৫০ + ০.৫) অর্থাৎ ৪৫.৫ – ৫০.৫

এক্ষেত্রে তোমাদের ক্লাসের শিক্ষার্থীদের ওজনের প্রকৃত শ্রেণিব্যাপ্তি নিম্নরূপ হবে:

শ্রেণিব্যাপ্তি বা ওজন (কেজিতে)	প্রকৃত শ্রেণিব্যাপ্তি
৩১ – ৩৫	৩০.৫ – ৩৫.৫
৩৬ – ৪০	৩৫.৫ – ৪০.৫
৪১ – ৪৫	৪০.৫ – ৪৫.৫
৪৬ – ৫০	৪৫.৫ – ৫০.৫
৫১ – ৫৫	৫০.৫ – ৫৫.৫
৫৬ – ৬০	৫৫.৫ – ৬০.৫
৬১ – ৬৫	৬০.৫ – ৬৫.৫
৬৬ – ৭০	৬৫.৫ – ৭০.৫

এখন তোমার পক্ষে নতুন শিক্ষার্থীদের ওজন সারণিতে অন্তর্ভুক্ত করা সম্ভব। কিন্তু তাদের ওজন অন্তর্ভুক্ত করার ক্ষেত্রে আর কোনো সমস্যা দেখতে পাচ্ছ কি? লক্ষ করে দেখো ৪০.৫ – ৪৫.৫ এবং ৪৫.৫ – ৫০.৫ উভয় শ্রেণিতেই ৪৫.৫ আছে।

তোমার মতে, কোন শ্রেণিতে ৪৫.৫ কে বিবেচনা করা উচিত? যদি তুমি উভয় শ্রেণিতে ৪৫.৫ কে অন্তর্ভুক্ত করো, তবে ৪৫.৫ দুইবার গণনা করা হবে। সেজন্য, নিয়ম অনুসারে ৪৫.৫ কে ৪৫.৫ – ৫০.৫ শ্রেণিতে অন্তর্ভুক্ত করতে হবে। ৪০.৫ – ৪৫.৫ শ্রেণিতে নয়। এবার ভেবে বলো তো, ৫০.৫ কে কোন শ্রেণিতে অন্তর্ভুক্ত করতে হবে?

সুতরাং ৪৫.৫ কেজি এবং ৫০.৫ কেজি ওজন দুটি যথাক্রমে ৪৫.৫ – ৫০.৫ এবং ৫০.৫ – ৫৫.৫ শ্রেণিতে অন্তর্ভুক্ত করতে হবে।

তাহলে নতুন গণসংখ্যা নিবেশন সারণিটি হবে –

শ্রেণিব্যাপ্তি বা ওজন (কেজিতে)	প্রকৃত শ্রেণিব্যাপ্তি	গণসংখ্যা বা শিক্ষার্থীর সংখ্যা
৩১ – ৩৫	৩০.৫ – ৩৫.৫	
৩৬ – ৪০	৩৫.৫ – ৪০.৫	
৪১ – ৪৫	৪০.৫ – ৪৫.৫	
৪৬ – ৫০	৪৫.৫ – ৫০.৫	
৫১ – ৫৫	৫০.৫ – ৫৫.৫	
৫৬ – ৬০	৫৫.৫ – ৬০.৫	
৬১ – ৬৫	৬০.৫ – ৬৫.৫	
৬৬ – ৭০	৬৫.৫ – ৭০.৫	
	মোট	

একক কাজ

গণসংখ্যা নিবেশন সারণিটি পর্যবেক্ষণ করো এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও। এটি একটি কারখানার ৬৪৫ জন শ্রমিকের দৈনিক আয়ের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি

শ্রেণিব্যাপ্তি (দৈনিক আয় টাকায়)	গণসংখ্যা (শ্রমিকের সংখ্যা)
৫০০ – ৬০০	৪৫
৬০০ – ৭০০	৫০
৭০০ – ৮০০	৯০
৮০০ – ৯০০	১৫০
৯০০ – ১০০০	২০০
১০০০ – ১১০০	৫০
১১০০ – ১২০০	৩৫
১২০০ – ১৩০০	২০
১৩০০ – ১৪০০	৫
মোট	৬৪৫

ক. শ্রেণিব্যাপ্তি কত?
খ. কোন শ্রেণির গণসংখ্যা সবচেয়ে বেশি?
গ. কোন শ্রেণির গণসংখ্যা সবচেয়ে কম?
ঘ. ৯০০ – ১০০০ শ্রেণির উচ্চসীমা কত?
ঙ. কোন দুটি শ্রেণির গণসংখ্যা সমান?

একক কাজ

শিক্ষকের সহায়তায় উপাত্ত প্রক্রিয়াকরণ এবং বিশ্লেষণের বেশ কিছু কাজ তোমরা ইতোমধ্যে শিখে ফেলেছ। এই পর্যায়ে তোমাদের একটি একক কাজ করা দরকার।

তোমার প্রতিবেশীদের মাঝে ২০ জনের রক্তচাপ (blood pressure) সংগ্রহ করো। তারপর নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লিখে বিষয় শিক্ষকের নিকট পরবর্তী ক্লাসে জমা দাও।

ক. সংগ্রহ করা দুই ধরনের উপাত্তের কোনগুলো বিচ্ছিন্ন এবং কোনগুলো অবিচ্ছিন্ন? যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো।

খ. কোন ধরনের উপাত্তের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করার ক্ষেত্রে প্রকৃত শ্রেণিসীমা প্রয়োজন হয় এবং কেন?

গ. দুই ধরনের উপাত্তেরই পরিসর নির্ণয় করো।

ঘ. উপযুক্ত শ্রেণিব্যাপ্তি নিয়ে উপাত্তের শ্রেণিসংখ্যা নির্ণয় করো।

ঙ. উপযুক্ত শ্রেণিব্যাপ্তি নিয়ে তোমার সহপাঠী প্রত্যেকের পারিবারের লোকসংখ্যাকে গণসংখ্যা নিবেশন

সারণির মাধ্যমে উপস্থাপন করো।

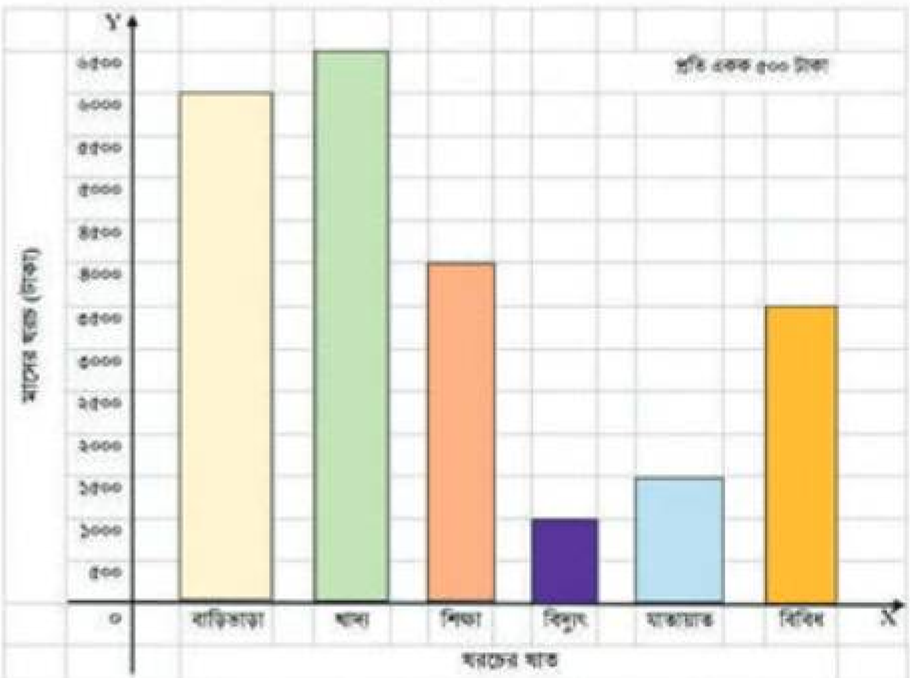
চ. উপযুক্ত প্রকৃত শ্রেণিব্যাপ্তি নিয়ে প্রতিবেশিদের রক্তচাপের গণসংখ্যা নিবেশন সারণি তৈরি করো।

উপাত্ত লেখচিত্রে উপস্থাপন (Graphical Representation of Data)

টেবিল বা সারণির মাধ্যমে তথ্য উপস্থাপন আমরা ইতোমধ্যে আলোচনা করলাম। এবার চলো তথ্যকে আরোও একটি উপায়ে উপস্থাপনের চিন্তা করি। অর্থাৎ তথ্য বা উপাত্ত ছবির মাধ্যমে বা লেখচিত্রে উপস্থাপন। কেননা কথায় বলে, একটি ছবি হাজার শব্দের সমান। হাজার শব্দের প্রতিবেদনে যে কথাটি ফুটিয়ে তোলা যায় না, অনেক সময় একটি ছবিই সেই ভাবটি সম্পূর্ণভাবে ফুটিয়ে তোলে। তাছাড়া তথ্য ও উপাত্ত লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন একটি বহুল প্রচলিত পদ্ধতি।

স্তম্ভলেখ (bar graph)

মৃদুল তার মা-বাবার সাথে প্রতি বছর কোথাও না কোথাও ঘুরতে যায়। ঘোরার খরচ সামলে ওঠার জন্য অবশ্য ওরা সারা বছর ধরে অর্থ সঞ্চয় করে। মৃদুলের বাবা একটি লাল মলাট করা খাতায় প্রতি মাসের আয় ও খরচের হিসাব লিখে রাখেন। মজার ব্যাপার হলো প্রতি মাসের শেষে তিনি বাড়ির সবাইকে নিয়ে বসে একটি ছবিও আঁকেন। ছবি আঁকার সময় বলেন যে এই ছবি দেখে এক ঝলকেই বলে দেওয়া যায় কোন খাতে খরচ বেশি হচ্ছে এবং কতটা কমাতে হবে। এ ছাড়াও পরবর্তী মাসের খরচ সম্পর্কে সিদ্ধান্ত নেওয়া যায় এবং কতটা সঞ্চয় করা সম্ভব তা অগ্রিম ধারণা করা যায়। নিচের ছবিটিতে মৃদুলদের পারিবারিক হিসাবের খাতার ছবিটি দেওয়া আছে।



চিত্রটি দেখার পর মৃদুলের মনে পরে, এই ধরনের চিত্র সে পূর্বের শ্রেণিতে দেখেছে যার নাম স্তম্ভলেখ বা সরল

স্তম্ভলেখ। মৃদুল লক্ষ করে তার বাবার আঁকা চিত্রটিতে তাদের পরিবারের এক মাসের পারিবারিক খরচের তথ্য ও উপাত্ত উপস্থাপন করা আছে।

মৃদুলের বাবার আঁকা চিত্রটি তোমরাও ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করো এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর খাতায় লেখো।

ক. লেখচিত্রটির নাম কী?

খ. লেখচিত্রটি থেকে কোন ধরনের তথ্য ও উপাত্ত পাওয়া যাবে?

গ. লেখচিত্রটিতে উলম্ব বরাবর প্রতি একক কত ধরা হয়েছে?

ঘ. সংশ্লিষ্ট মাসে কোন খাতে সবচেয়ে বেশি খরচ হয়েছে?

ঙ. সংশ্লিষ্ট মাসে কোন খাতে সবচেয়ে কম খরচ হয়েছে?

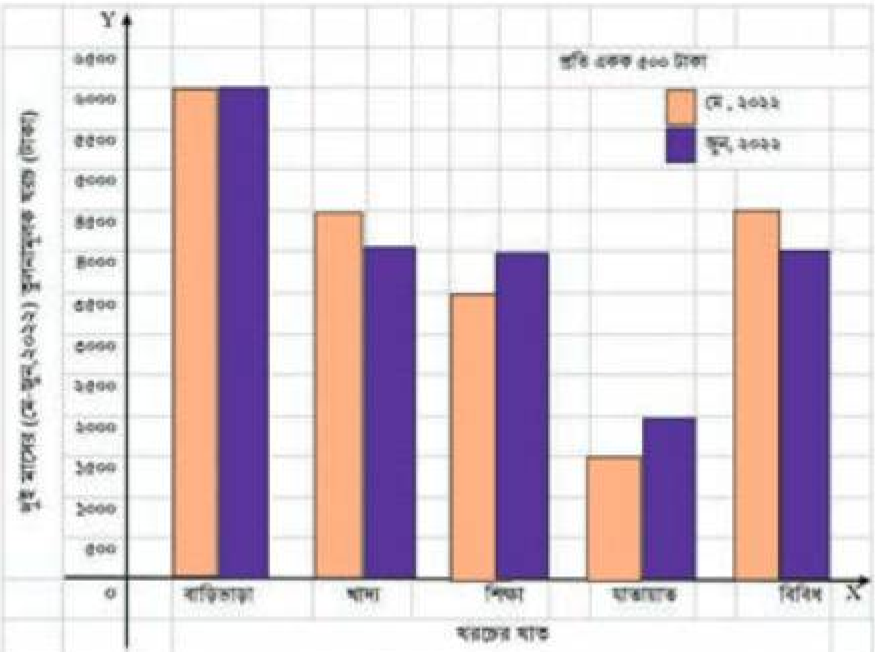
চ. শিক্ষা খাতে ঐ মাসে কত টাকা খরচ হয়েছিল?

ছ. তথ্য ও উপাত্ত লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপনের সুবিধাগুলো কী কী?

একক কাজ

তোমার পরিবারের যেকোনো এক মাসের পারিবারিক খরচের তথ্য ও উপাত্ত সংগ্রহ করো। তারপর খাত অনুযায়ী পারিবারিক খরচ স্তম্ভলেখের মাধ্যমে উপস্থাপন করে মূল্যায়নের জন্য পরবর্তী ক্লাসে বিষয় শিক্ষককের কাছে জমা দাও।

মৃদুল দেখে, খাতায় আরও একটি চিত্র আছে। মৃদুল নিজের খাতায় অনুরূপ একটি চিত্র আঁকে, যা দেখতে নিচের মতো:



চিত্রটি আঁকার পর মৃদুল দেখতে পায়, চিত্রের প্রতিটি খাতে দুটি করে স্তম্ভ পাশাপাশি আঁকা হয়েছে। তাহলে এ ধরনের স্তম্ভলেখকে যৌগিক স্তম্ভলেখ বলা যেতে পারে। সে আরো দেখতে পায়, লেখচিত্রে দুই মাসের খাতওয়ারি পারিবারিক খরচের তথ্য ও উপাত্ত পাশাপাশি উপস্থাপন করা হয়েছে। মজার বিষয় হলো, চিত্র থেকে সহজেই দুই মাসের খাতওয়ারি পারিবারিক খরচের পার্থক্য নির্ণয় করা যাচ্ছে। মৃদুল মনে মনে স্থির করে, ঐ দুই মাসের খাতওয়ারি পারিবারিক খরচের পার্থক্যের কারণগুলো সে বাবার কাছ থেকে জেনে নিবে।

যদি কেউ তিন বা চার মাসের খরচের তুলনামূলক চিত্র একসাথে দেখতে চায়, তবে এভাবে তিনটি বা চারটি স্তম্ভ পাশাপাশি এঁকে তথ্য ও উপাত্তগুলো উপস্থাপন করলেই হবে।

একক কাজ

তোমার পরিবারের পরপর তিন মাসের খাতওয়ারি পারিবারিক খরচের তথ্য ও উপাত্ত সংগ্রহ করো। তারপর যৌগিক স্তম্ভলেখ অঙ্কন করে তথ্যগুলো উপস্থাপন করো এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর লেখো।

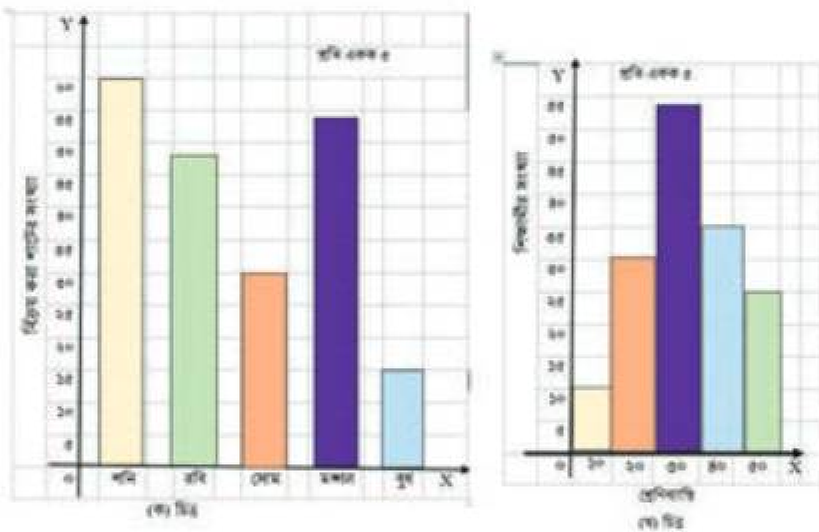
ক. স্তম্ভলেখটি থেকে তুমি কী কী তথ্য ও উপাত্ত পেয়েছ?

খ. বিভিন্ন খাতে খরচের তারতম্যের কারণগুলো ব্যাখ্যা করো।

গ. 'পারিবারিক খরচের সুষম বাজেট তৈরিতে যৌগিক স্তম্ভলেখ বিশেষ ভূমিকা রাখে' – তোমার মতামতসহ ব্যাখ্যা করো।

আয়তলেখ (histogram)

নিচের চিত্র দুটি ভালোভাবে লক্ষ করো:



জোড়ায় কাজ

সহপাঠীর সাথে আলোচনা করে উপরের চিত্র দুটির মধ্যে মিল ও অমিলগুলো খুঁজে বের করে পাঠ্য বইয়ের নির্ধারিত স্থানে লেখো। তারপর যেকোনো একজন তোমাদের পর্যবেক্ষণ শ্রেণিকক্ষে উপস্থাপন করো। অন্য সহপাঠীদের কাছ থেকে যে ফিডব্যাক আসবে তা অপরজন পাঠ্যবই বা খাতায় লেখো।

(ক) ও (খ) চিত্র দুটির মধ্যকার মিলগুলো হলো:

(ক) চিত্র	(খ) চিত্র

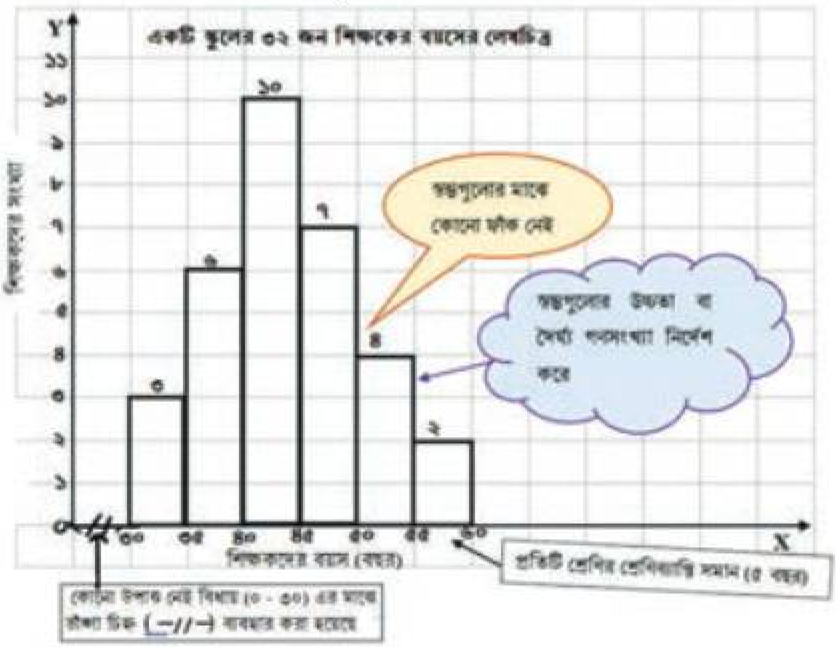
(ক) ও (খ) চিত্র দুটির মধ্যকার অমিলগুলো হলো:

(ক) চিত্র	(খ) চিত্র

তোমাদের পর্যবেক্ষণ ও আলোচনার পর আমরা বলতে পারি, (খ) চিত্রের স্তম্ভগুলো পাশাপাশি আঁকা হয়েছে। অর্থাৎ পাশাপাশি স্তম্ভগুলোর মধ্যে কোনো ফাঁক নেই। অনুভূমিক বা x অক্ষ বরাবর প্রকৃত শ্রেণিব্যাপ্তি এবং উলম্ব বা y অক্ষ বরাবর শিক্ষার্থীর সংখ্যা বা গণসংখ্যা নেওয়া হয়েছে। প্রতিটি স্তম্ভ বা আয়তের প্রস্থ বা ভূমি হলো শ্রেণিব্যাপ্তি এবং উচ্চতা বা দৈর্ঘ্য হলো গণসংখ্যা। তথ্য ও উপাত্ত এ ধরনের লেখচিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করা হলে, তাকে আয়তলেখ (histogram) বলা হয়। Histogram শব্দটি ইংল্যান্ডের গণিতবিদ কার্ল পিয়ারসন সর্বপ্রথম ব্যবহার করেন।

আয়তলেখে প্রতিটি আয়তের ক্ষেত্রফল সংশ্লিষ্ট আয়তের গণসংখ্যার সমানুপাতিক। আবার আয়তক্ষেত্রগুলোর প্রস্থ সব সমান বলে, আয়তক্ষেত্রগুলোর দৈর্ঘ্য গণসংখ্যার সমানুপাতিক হবে। এই কারণেই আমরা শুধু দৈর্ঘ্য এঁকে থাকি। নিচের আয়তলেখটি লক্ষ করো:

উপরের আয়তলেখটি পর্যবেক্ষণ করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:



ক. কতজন শিক্ষকের বয়স ৫০ বছরের বেশি কিন্তু ৫৫ বছরের কম?

খ. কতজন শিক্ষকের বয়স ৪৫ বছরের কম?

একক কাজ

ক. তোমার প্রতিবেশী পরিবারগুলোর বিভিন্ন বয়সের (বছরে) লোকজনের তথ্য সংগ্রহ করে ছকটি পূরণ করো।

বয়স (বছরে)	০-১০	১০-২০	২০-৩০	৩০-৪০	৪০-৫০	৫০-৬০	৬০-৭০	৭০-৮০	৮০-৯০
লোকসংখ্যা									

খ. তৈরি করা ছক অনুসারে আয়তলেখ অঙ্কন করো।

গ. কোন শ্রেণিব্যাপ্তিতে সবচেয়ে বেশি সংখ্যক লোকজনের অবস্থান তা আয়তলেখ থেকে নির্ণয় করো।

পাইচিত্র (Pie Chart or Circle Graph)

উপাত্তকে চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করার আরেকটি উপায় হলো পাইচার্ট বা পাইচিত্র। অনেকেই হয়ত জানো পাই (pie) কী? পাইকে বলতে পারো বিদেশি এক ধরনের পিঠা। এগুলো বৃত্তাকৃতি এবং পুরু হয়ে থাকে। নিচের ছবিতে দেখো পাই দেখতে কেমন হয়।

জিভে জল এসে গেল তো? পাই খেতে আসলেও মজাদার। লক্ষ করো এটি কেমন করে কেটেছে। পাইয়ের মত আরও কিছু গোলাকৃতি খাবার অবশ্য আমাদের চেনার কথা। আমরা চিতই পিঠা, ভাপা পিঠা খেয়ে থাকি। চিতই ও ভাপা পিঠা কিন্তু বৃত্তাকৃতি। আবার ইতালির খাবার পিজ্জাও বৃত্তাকার। ভাবছ যে হঠাৎ বৃত্তাকৃতি খাবার নিয়ে এত কথা কেন? তার আগে নিচের খাবারের ছবিগুলো দেখে নাও, এর পর একটি ছোট কাজ রয়েছে।

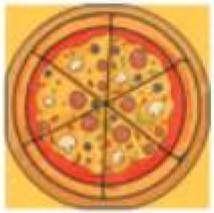
চিতই পিঠা ভাপা পিঠা পিজ্জা

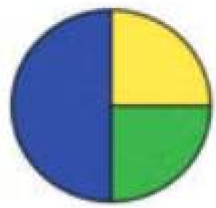
এখন মনে করো তুমি আর তোমার বন্ধু রাতুল কোনো একটি গোলাকৃতি খাবার ভাগাভাগি করে খাচ্ছ, হতে

পারে চিতই পিঠা, অথবা পিজ্জা, অথবা পাই। নিচের প্রথম ছবিটি দেখে ফাঁকা ঘরে লেখো তুমি কত ভাগ পেয়েছ আর রাতুল কত ভাগ পেয়েছে। কিছুক্ষণ পর তোমরা পিঠা খাবে, তোমাদের সাথে যোগ হলো তোমাদের আরেক বন্ধু সুমি। দ্বিতীয় ছবিটি দেখে ফাঁকা ঘরে লেখো কে কত ভাগ পেল।

রাতুলের ভাগ: %

তোমার ভাগ: %

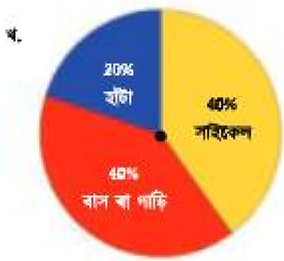




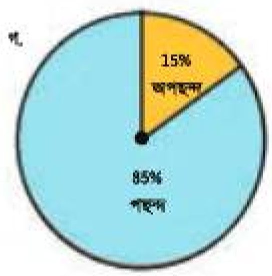
উপরের কাজটি থেকে বৃত্তকে ভাগ করে শতকরা বুঝানো হচ্ছে ধরতে পেরেছ নিশ্চয়? একটি পাই বা পিজ্জাকে যেমন নির্দিষ্ট উপায়ে সমান বা অসমান অনেক ভাগে ভাগ করা যায়, যে কোনো বৃত্তকেও তেমন অনেক ভাগে ভাগ করা সম্ভব। বৃত্তকে ত্রিকোণাকৃতিতে ভাগ করে শতকরা দ্বারা প্রকাশ করার এই পদ্ধতিকে বলে পাইগ্রাফ বা পাইচিত্র।

নিচে কয়েকটি পাইচিত্র দেওয়া আছে যেগুলোতে একটি ক্লাসের শিক্ষার্থীদের বিভিন্ন তথ্য রয়েছে। চলো চেষ্টা করে দেখি সেগুলিকে ব্যাখ্যা করা সম্ভব কি না।

তোমার ক্লাসে বালক এবং বালিকার সংখ্যা



স্কুলে আসা-যাওয়ার ক্ষেত্রে যানবাহনের ব্যবহার



গণিত পছন্দ / অপছন্দ

একক কাজ

উপরের পাইচিত্রগুলো দেখে ঐ ক্লাসের শিক্ষার্থীদের বিষয়ে কী কী জানতে পারলে তা ৫ – ১০ লাইনের মধ্যে নিচের ফাঁকা ঘরে লেখো।

এবার এসো দেখি, পাইচিত্র কীভাবে তৈরি করে। আমরা জানি, বৃত্তের কেন্দ্রে সৃষ্ট কোণের পরিমাণ ৩৬০°। আর, বৃত্তের প্রতিটি অংশের কেন্দ্রীয় কোণ হবে ৩৬০° এর অংশ। কোনো পরিসংখ্যান ৩৬০° এর অংশ হিসেবে উপস্থাপিত হলে তা হবে পাইচিত্র।

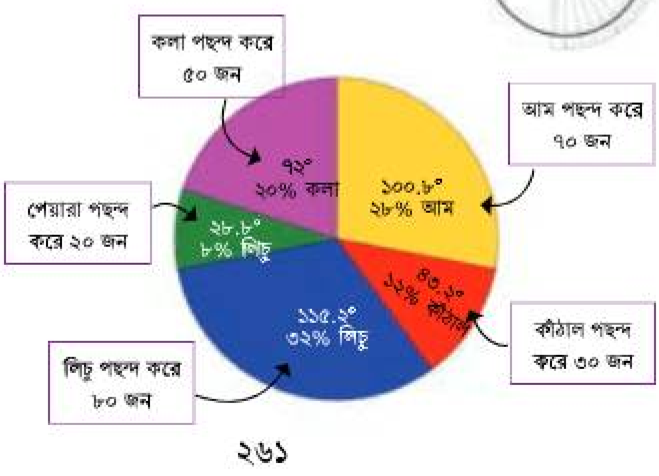
আব্রাহাম সপ্তম শ্রেনির ২৫০ জন শিক্ষার্থীর পছন্দের ফলের তথ্য সংগ্রহ করে যা নিচের সারণিতে দেখানো হলো:

পছন্দের ফল	আম	কাঁঠাল	লিচু	পেয়ারা	কলা	মোট
শিক্ষার্থীর সংখ্যা	৭০	৩০	৮০	২০	৫০	২৫০

চলো, আব্রাহামের সংগ্রহ করা উপাত্ত পাইচিত্রের মাধ্যমে দেখানোর জন্য আমরা একটি সারণি তৈরি করি।

পছন্দের ফল	শিক্ষার্থীর সংখ্যা	শতকরায় প্রকাশ	বৃত্তের প্রতিটি অংশের কেন্দ্রীয় কোণ
আম	৭০	$\frac{৭০}{২৫০} \times ১০০ = ২৮\%$	$\frac{৭০}{২৫০} \times ৩৬০^\circ = ১০০.৮^\circ$
কাঁঠাল	৩০	$\frac{৩০}{২৫০} \times ১০০ = ১২\%$	$\frac{৩০}{২৫০} \times ৩৬০^\circ = ৪৩.২^\circ$
লিচু	৮০	$\frac{৮০}{২৫০} \times ১০০ = ৩২\%$	$\frac{৮০}{২৫০} \times ৩৬০^\circ = ১১৫.২^\circ$
পেয়ারা	২০	$\frac{২০}{২৫০} \times ১০০ = ৮\%$	$\frac{২০}{২৫০} \times ৩৬০^\circ = ২৮.৮^\circ$
কলা	৫০	$\frac{৫০}{২৫০} \times ১০০ = ২০\%$	$\frac{৫০}{২৫০} \times ৩৬০^\circ = ৭২^\circ$
মোট	২৫০	১০০%	৩৬০°

চাঁদার সাহায্যে বৃত্তের প্রতিটি অংশের কেন্দ্রীয় কোণ পরিমাপ করি। এবার উপরের সারণি অনুসারে চলো একটি পাইচিত্র অঙ্কন করি এবং তথ্য ও উপাত্তগুলো চিত্রের মাধ্যমে উপস্থাপন করি।

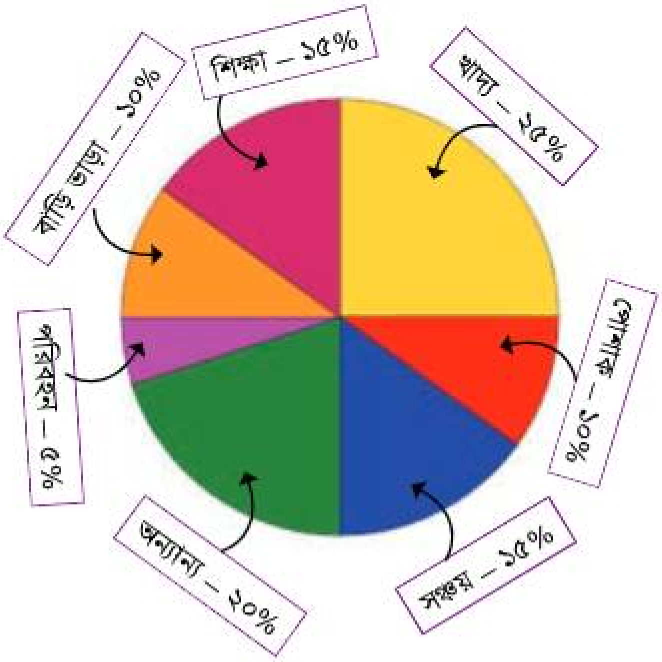


একক কাজ

তোমার পরিবারের সকলের বয়স (বছরে) জেনে নাও। সকলের বয়সের উপাত্ত নিয়ে সারণি তৈরি করো। তারপর সারণি ব্যবহার করে পাইচিত্র আঁকো এবং উপস্থাপন করো।

জোড়ায় কাজ

চিত্রে সুমন চাকমার এক মাসের সঞ্চয়সহ পরিবারের বিভিন্ন খাতের খরচ দেখানো হলো। চিত্রটি ভালোভাবে পর্যবেক্ষণ করো এবং আলোচনা করে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।



ক. সুমন চাকমা ৩০০০ টাকা সঞ্চয় করে। সঞ্চয় বাদে ঐ মাসে সুমন চাকমার মোট কত টাকা খরচ হয়?

খ. শিক্ষাবাবদ তার কত টাকা খরচ হয়?

গ. কোন খাতে সুমন চাকমার সবচেয়ে বেশি খরচ হয় এবং কত টাকা খরচ হয়?

ঘ. পাইচিত্রের প্রতিটি অংশের কেন্দ্রীয় কোণ নির্ণয় করো।

অনুশীলনী

১। তুমি তোমার দৈনন্দিন জীবন থেকে ১০টি তথ্য সংগ্রহ করো। তথ্যগুলোকে ট্রি-এর মাধ্যমে শ্রেণিবদ্ধ করো।

২। তোমার বাড়ি বা বাসার চারপাশ ঘুরে দেখো, সেখানে বিভিন্ন প্রকারের গাছপালা আছে। তুমি কি সবগুলো গাছের নাম জানো? প্রয়োজনে অভিভাবকের সাহায্য নাও। এবার দেখো, কোন প্রকারের কয়টি করে গাছ আছে। তুমি চাইলে গাছগুলোর ছবিও আঁকতে পারো। এমনকি গাছগুলোর আনুমানিক উচ্চতা তোমার পছন্দমতো এককে লিখে রাখতে পারো। ট্যালি চিহ্ন ব্যবহার করে বিভিন্ন প্রকার গাছের সংখ্যা এবং গাছগুলোর মোট সংখ্যা লিখে নিচের ছকটি পূরণ করো।

গাছের নাম	ট্যালি চিহ্ন	আনুমানিক উচ্চতা	সংখ্যা
....			

নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক. কোন গাছটি সবচেয়ে বেশি সংখ্যক দেখেছ?

খ. কোন গাছটি সবচেয়ে কম সংখ্যক দেখেছ?

গ. মোট কতগুলো গাছ আছে?

ঘ. তোমার দেখা কোন গাছটির উচ্চতা সবচেয়ে বেশি এবং কত?

ঙ. তোমার দেখা কোন গাছটির উচ্চতা সবচেয়ে কম এবং কত?

চ. ছক থেকে প্রাপ্ত গাছের নাম ও গাছের সংখ্যা ব্যবহার করে স্তম্ভলেখ অঙ্কন করো।

ছ. গাছের উচ্চতার পরিসর নির্ণয় করো।

জ. উপযুক্ত শ্রেণিব্যাপ্তি নিয়ে গাছের উচ্চতার শ্রেণি সংখ্যা নির্ণয় করো।

ঝ. খাতায় একটি ছক তৈরি করে ছকটি পূরণ করো এবং ছক অনুযায়ী আয়তলেখ অঙ্কন করো।

নমুনা ছক

গাছের উচ্চতা বা শ্রেণিব্যাপ্তি (তোমার লেখা একক অনুসারে)	প্রকৃত শ্রেণিব্যাপ্তি	উচ্চতা	সংখ্যা

৩। মিনার ক্লাসের বন্ধুরা অবসর সময়ে কী কী কাজ করে তাদের মাতা-পিতাকে সবচেয়ে বেশি সাহায্য করে তার একটি তালিকা তৈরি করে, যা নিম্নরূপ:

কাজের নাম	বন্ধুদের সংখ্যা
বাজার করে	১৫
কাপড় কাচে	৬
ঘর পরিষ্কার করে	৫
খাবার তৈরি ও পরিবেশন করে	১২
গৃহপালিত পশুদের পরিচর্যা করে	৮
কৃষিকাজ করে	১০
মোট	....

ক. উপরের ছকটি ব্যবহার করে পাইচিত্র অঙ্কন করো।

খ. মিনার মতো তোমার ক্লাসের বন্ধুরা অবসর সময়ে কী কী কাজ করে তাদের মাতা-পিতাকে সবচেয়ে বেশি সাহায্য করে তার একটি তালিকা তৈরি করো এবং তা পাইচিত্রে প্রদর্শন করো।

৪। একটি কারখানার ৪০ জন শ্রমিকের দৈনিক মজুরি (টাকায়) দেওয়া হলো:

৭২০, ৫৫০, ৬৩০, ৭০০, ৬৫০, ৫০০, ৮৫০, ৬৫০, ৭৫০, ৫৭৫, ৬৮০, ৯২০, ৬৫০, ৮২০, ৯৩০, ৯৯০, ৭৬০, ৮৪০, ৬৫০, ৫৮০, ৯০০, ৮৪০, ৭৬০, ৮৫০, ৯৫০, ৫৫০, ৯৯০, ৭৬০, ৮২০, ৮৯০, ৯৭৫, ৬৭৫, ৬৯০, ৭৫০, ৯৪০, ৬৫০, ৭৪০, ৮৬০, ৮৭৫, ৯৮০

ক. উপাত্তের পরিসর নির্ণয় করো।

খ. ৫৫০ – ৫৯৯, ৬০০ – ৬৪৯, ৬৫০ – ৬৯৯, ... শ্রেণিগুলোর শ্রেণিব্যাপ্তি কত?

গ. 'খ' এ প্রাপ্ত শ্রেণিব্যাপ্তি অনুসারে উপাত্তের শ্রেণি সংখ্যা নির্ণয় করো।

ঘ. ট্যালিচিহ্ন ব্যবহার করে গণসংখ্যা সারণি তৈরি করো এবং আয়তলেখ অঙ্কন করো।

ঙ. কতজন শ্রমিকের দৈনিক মজুরি ৮০০ টাকার বেশি, আয়তলেখ থেকে নির্ণয় করো।

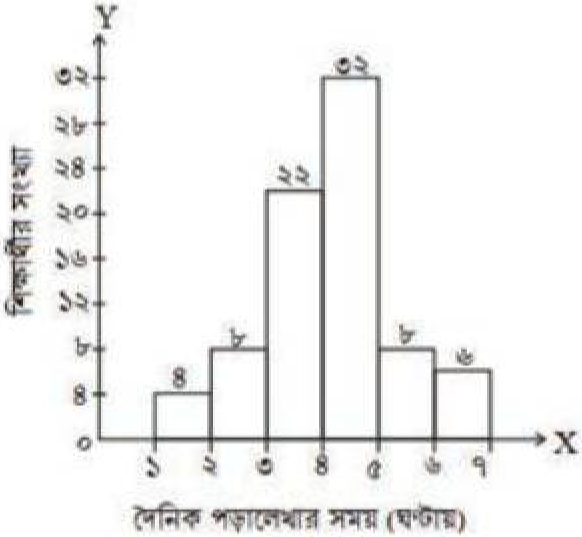
৫। নিচে ৮০ জন শিক্ষার্থীর দৈনিক পড়ালেখার সময়ের (ঘণ্টায়) একটি লেখচিত্র দেওয়া হলো। লেখচিত্রটি ভালো করে পর্যবেক্ষণ করো এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক. নিচের লেখচিত্রটির নাম কী? এর বৈশিষ্ট্যগুলো লেখো।

খ. সর্বাধিক কত ঘণ্টা শিক্ষার্থীরা পড়ালেখা করে?

গ. কতজন শিক্ষার্থী ৪ ঘণ্টার কম সময় পড়ালেখা করে?

ঘ. কতজন শিক্ষার্থী ৫ ঘণ্টার বেশি সময় পড়ালেখা করে?



নিচের তথ্যগুলো ভালো করে লক্ষ করো, চিন্তা করো, প্রয়োজনে বন্ধুর সাথে আলোচনা করো। তারপর কোন ক্ষেত্রে কোন ধরনের লেখচিত্র অধিক প্রযোজ্য তা অঙ্কন করে যুক্তিসহ ব্যাখ্যা করো।

ক. তোমার ক্লাসের সকল শিক্ষার্থীর জন্মমাসের ছকটি পূরণ করো এবং লেখচিত্র অঙ্কন করো।

মাসের নাম	ট্যালিচিহ্ন	গণসংখ্যা
জানুয়ারি		
ফেব্রুয়ারি		

খ. এঞ্জেল, সুমিত, নিপা ও মিনতি কস্তার পরিবারের সদস্যদের ওজন (কেজিতে) নিম্নরূপ:
৩০.২, ৮.৫, ১১.৬, ৪৫, ৩২.৮, ৬৫.৩, ৩৮.৪, ৪৮.৬, ৫৫.৫, ২৬.৯, ৪০.৮, ১৭.৬, ২২.৩, ৬৮.২, ৪৮.৫, ৫৬, ৬২, ৩৬.৪, ৬৭.৩, ৫২.৮

গ. কোনো এক জেলার উন্নয়ন পরিকল্পনায় বিভিন্ন খাতে বরাদ্ধকৃত টাকার শতকরা হিসাব নিম্নরূপ:

খাত	কৃষি	শিল্প	যোগাযোগ	বিদ্যুৎ	শিক্ষা	অন্যান্ন
বরাদ্ধকৃত টাকা (শতকরায়)	৩০	২৫	১৫	৮	১২	১০

৬। মতিন ৭২০ জন শিক্ষার্থীকে প্রশ্ন করে জেনেছে তারা কীভাবে স্কুলে যাতায়াত করে। মতিন যে তথ্য পেল তার পাইচিত্রটি নিচে আঁকা হলো। চিত্রটি পর্যবেক্ষণ করো এবং নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

ক. কতজন শিক্ষার্থী পায়ে হেঁটে স্কুলে আসে?

খ. কতজন শিক্ষার্থী সাইকেলে চড়ে স্কুলে আসে?

গ. রিকসায় আসা শিক্ষার্থীর সংখ্যা নির্ণয় করো।

৭। নিচের সারণিটির তথ্যের ভিত্তিতে আয়তলেখ আঁকো।

নম্বর	০ – ২০	২০ – ৩০	৩০ – ৪০	৪০ – ৫০	৫০ – ৬০	৬০ – ৭০	৭০ – ১০০
গণসংখ্যা	৮	৯	১২	১৬	২০	১৫	২০

১৩ তম এসএ গেমস এ ১৯টি স্বর্ণ, ৩২টি রৌপ্য ও ৮৭টি ব্রোঞ্জ পদক জয় বাংলাদেশের ক্রীড়াবিদদের

দক্ষিণ এশিয়ার মাল্টি ইভেন্ট স্পোর্টস এর সবচেয়ে বড় আসর এসএ গেমস (সাউথ এশিয়ান ফেডারেশন গেমস)। ১৯৮৪ সালে নেপালে এসএ গেমস প্রথমবারের মতো অনুষ্ঠিত হয় এবং দু'বছর পরপর প্রায় নিয়মিতভাবেই দক্ষিণ এশিয়ার বিভিন্ন দেশে অনুষ্ঠিত হয়ে আসছে। বাংলাদেশসহ দক্ষিণ এশিয়ার সাতটি দেশের ক্রীড়াবিদগণ এই গেমসে অংশগ্রহণ করেন। ২০১৯ সালে নেপালের কাঠমান্ডুতে অনুষ্ঠিত হয় ১৩ তম এসএ গেমস। পদক অর্জনের বিবেচনায় এটিই বাংলাদেশের এসএ গেমসে সেরা অর্জন। সঠিক পরিকল্পনা ও অনুশীলনের মাধ্যমে ক্রীড়ায় উত্তরোত্তর সাফল্য অর্জনের দিকে এগিয়ে যাচ্ছে বাংলাদেশ।

২০২৪ শিক্ষাবর্ষ
৭ম শ্রেণি
গণিত

সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ে তোলার জন্য যোগ্যতা অর্জন করো
- মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা

আলস্য দোষের আকর

তথ্য, সেবা ও সামাজিক সমস্যা প্রতিকারের জন্য '৩৩৩' কলসেন্টারে ফোন করুন

নারী ও শিশু নির্যাতনের ঘটনা ঘটলে প্রতিকার ও প্রতিরোধের জন্য ন্যাশনাল হেল্পলাইন সেন্টারে
১০৯ নম্বর-এ (টোল ফ্রি, ২৪ ঘণ্টা সার্ভিস) ফোন করুন

শিক্ষা মন্ত্রণালয়