

**Universidade do Vale do Rio dos Sinos - UNISINOS**

Apostila da Disciplina de

# **Lógica**

**Prof. João Carlos Gluz**

**São Leopoldo, março de 2009**

# Sumário

## CAPÍTULO 1

### LÓGICA PROPOSICIONAL.....1

1.1. PROPOSIÇÕES E OPERADORES LÓGICOS.....	1
1.2. IMPLICAÇÃO MATERIAL E EQUIVALÊNCIA LÓGICA.....	3
1.3. FÓRMULAS E PRECEDÊNCIA.....	4
1.4. CONSTRUÇÃO DE TABELAS-VERDADE PARA FÓRMULAS.....	5
1.5. TAUTOLOGIAS E CONTRADIÇÕES.....	6
1.6. EQUIVALÊNCIAS TAUTOLÓGICAS E LEIS DE DEMORGAN.....	7
1.7. SIMBOLIZAÇÃO DE PROPOSIÇÕES.....	8
1.8. EXERCÍCIOS SOBRE PROPOSIÇÕES, FÓRMULAS E TAUTOLOGIAS.....	9

## CAPÍTULO 2

### DEDUÇÃO NA LÓGICA PROPOSICIONAL .....11

2.1. ARGUMENTOS VÁLIDOS.....	11
2.2. DEMONSTRAÇÕES.....	12
2.3. REGRAS DE DEDUÇÃO NATURAL.....	13
2.4. REGRAS HIPOTÉTICAS.....	16
2.5. REGRA DO MÉTODO DEDUTIVO.....	18
2.6. TEOREMAS.....	20
2.7. SIMBOLIZAÇÃO DE ARGUMENTOS VERBAIS.....	20
2.8. EXERCÍCIOS DE DEDUÇÃO E DEMONSTRAÇÃO.....	21

## CAPÍTULO 3

### SENTENÇAS ABERTAS.....24

3.1. SENTENÇAS ABERTAS COM UMA VARIÁVEL.....	24
3.2. CONJUNTO-VERDADE DE UMA SENTENÇA ABERTA.....	26
3.3. CONJUNÇÃO SOBRE SENTENÇAS ABERTAS ( $\wedge$ ).....	27
3.4. DISJUNÇÃO SOBRE SENTENÇAS ABERTAS ( $\vee$ ).....	30
3.5. NEGAÇÃO DE UMA SENTENÇA ABERTA ( $\neg$ ).....	32
3.6. DEMAIS OPERADORES.....	34
3.7. EQUIVALÊNCIAS TAUTOLÓGICAS.....	35
3.8. PREDICADOS COM DUAS VARIÁVEIS E SEU CONJUNTO-VERDADE.....	36
3.9. PREDICADOS COM N VARIÁVEIS E SEU CONJUNTO-VERDADE.....	37
3.10. EXERCÍCIOS SOBRE SENTENÇAS ABERTAS.....	38

## CAPÍTULO 4

### QUANTIFICADORES.....40

4.1. QUANTIFICADOR UNIVERSAL.....	40
4.2. QUANTIFICADOR EXISTENCIAL.....	42
4.3. VARIÁVEIS QUANTIFICADAS (APARENTES) E VARIÁVEIS LIVRES.....	44
4.4. NEGAÇÃO DE FÓRMULAS COM QUANTIFICADORES.....	45
4.5. QUANTIFICAÇÃO MÚLTIPLA E PARCIAL.....	45
4.6. COMUTATIVIDADE DE QUANTIFICADORES.....	46
4.7. SIMBOLIZAÇÃO DE ENUNCIADOS CATEGÓRICOS.....	46
4.8. EXERCÍCIOS SOBRE QUANTIFICADORES.....	48

## CAPÍTULO 5

### A LÓGICA DE PREDICADOS.....51

5.1. ESTRUTURAS, INTERPRETAÇÃO E SIGNIFICADO DAS FÓRMULAS.....	51
5.2. VALIDADE DE UMA FÓRMULA.....	54
5.3. REGRAS DE DEDUÇÃO PARA A LÓGICA DE PREDICADOS.....	56
5.4. PARTICULARIZAÇÃO UNIVERSAL.....	57
5.5. PARTICULARIZAÇÃO EXISTENCIAL.....	58
5.6. GENERALIZAÇÃO UNIVERSAL.....	59
5.7. GENERALIZAÇÃO EXISTENCIAL.....	60
5.8. PROVA POR CONTRA-EXEMPLO.....	60

5.9. EXERCÍCIOS DE LÓGICA DE PREDICADOS.....	61
<b>APÊNDICES .....</b>	<b>63</b>
APÊNDICE A - TABELAS VERDADE DOS OPERADORES LÓGICOS.....	63
APÊNDICE B - PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES.....	63
APÊNDICE C - REGRAS DE DEDUÇÃO DE EQUIVALÊNCIA E INFERÊNCIA.....	64
APÊNDICE E - REGRAS DE INFERÊNCIA DA LÓGICA DE PREDICADOS.....	66
<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>67</b>

## Lista de Figuras

FIGURA 1 - INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS COMO CONJUNÇÃO LÓGICA.....	29
FIGURA 2 - UM EXEMPLO DE INTERSECÇÃO COMO CONJUNÇÃO.....	29
FIGURA 3 - UNIÃO DE CONJUNTOS COMO DISJUNÇÃO LÓGICA.....	30
FIGURA 4 - UM EXEMPLO DE UNIÃO COMO DISJUNÇÃO.....	31
FIGURA 5 - COMPLEMENTAÇÃO DE CONJUNTOS E NEGAÇÃO LÓGICA.....	32
FIGURA 6 - UM EXEMPLO DE NEGAÇÃO COMO COMPLEMENTAÇÃO.....	33
FIGURA 7 - QUANTIFICAÇÃO UNIVERSAL, DOMÍNIO E CONJUNTO VERDADE .....	41
FIGURA 8 - QUANTIFICAÇÃO EXISTENCIAL, DOMÍNIO E CONJUNTO VAZIO.....	43

## Lista de Tabelas

TABELA 1 - EQUIVALÊNCIAS DA DISJUNÇÃO ( $\vee$ ) E DA CONJUNÇÃO ( $\wedge$ ).....	7
TABELA 2 - EQUIVALÊNCIAS DOS OUTROS OPERADORES.....	7
TABELA 3 - REGRAS BÁSICAS DE INFERÊNCIA.....	13
TABELA 4 - REGRAS DE INFERÊNCIA DERIVADAS.....	14
TABELA 5 - REGRAS DE EQUIVALÊNCIA.....	15
TABELA 6 - REGRAS DE INFERÊNCIA DA LÓGICA DE PREDICADOS.....	56

# Capítulo 1

## Lógica Proposicional

---

Neste capítulo serão apresentadas definições precisas sobre o que são **proposições**, **fórmulas** e **tautologias** que nos permitirão definir uma linguagem formal para a lógica das proposições, ou seja, nos permitirão criar uma **Lógica Proposicional**.

### 1.1. Proposições e Operadores Lógicos

#### Proposição Lógica

Intuitivamente, uma **proposição lógica** (ou apenas uma **proposição**) é uma frase ou sentença da língua portuguesa (ou de qualquer outro idioma) que pode assumir apenas um de dois valores verdade: ou a frase é **verdadeira** (ela diz uma **verdade**) ou ela é **falsa** (diz uma **falsidade**).

Note que embora as proposições sejam bastante comuns na linguagem natural, porque, por exemplo, todas as afirmações são naturalmente proposições, existem também vários exemplos de frases que não se encaixam na definição acima. Comandos e solicitações, por exemplo, não são exatamente proposições. Quando uma ordem é dada (“feche a porta!”) ou uma solicitação feita (“por favor, me passe o prato”) não há necessariamente um valor verdade por trás destas frases.

As proposições são usualmente simbolizadas (representadas) por letras maiúsculas do início do alfabeto: A, B, C, ... Os valores lógicos das proposições são representados de forma resumida usando V para verdadeiro e F para falso.

As proposições podem ser simples ou compostas. As proposições compostas são formadas de proposições simples conectadas através de **operadores** (ou **conetivos**) **lógicos**. Estes operadores ou conetivos representam as seguintes operações lógicas, que serão descritas mais adiante:

- Conjunção
- Disjunção
- Negação
- Implicação (ou condicional)
- Bi-implicação (ou bicondicional)

#### Conjunção de Proposições

O conetivo “e” é a forma mais usual de se formarem proposições compostas através da **conjunção lógica de proposições**. Este conetivo é usado, por exemplo, em sentenças como “gatos são mamíferos e canários são aves”, “ $3 < 5$  e  $2+3=5$ ”, etc. A conjunção também pode ser representada por proposições como “mas”, “também” e similares.

O símbolo  $\wedge$  é usado para representar formalmente a conjunção lógica. Caso A e B sejam proposições, então a fórmula  $A \wedge B$  representa a conjunção lógica das proposições A e B.

### **Exercício:**

(1.1) Agora responda as seguintes questões:

- (a) Se A é verdadeira e B verdadeira, que valor você atribuiria a  $A \wedge B$ ?
- (b) Se A é verdadeira e B falsa, que valor você atribuiria a  $A \wedge B$ ?
- (c) Se A é falsa e B verdadeira, que valor você atribuiria a  $A \wedge B$ ?
- (d) Se ambas A e B são falsas, que valor você atribuiria a  $A \wedge B$ ?
- (e) Construa uma tabela resumindo o resultado das questões (a) até (d). Use V para verdadeiro e F para falso. Mostre em cada linha da tabela a combinação de valores de A, B e de  $A \wedge B$ .

A tabela construída no exercício (1.1) é chamada de **tabela-verdade** do conetivo (ou **operador**) lógico  $\wedge$

**Dica:** uma **conjunção** somente é **verdadeira**, quando todas as proposições que a compõem são **verdadeiras**, e é falsa em todos os outros casos.

### **Disjunção de Proposições**

O símbolo  $\vee$  será empregado para representar um dos significados usuais do conetivo “ou” em frases da linguagem natural. O significado assumido por este símbolo é o do “ou *inclusivo*” que somente será falso se ambas as sentenças sendo conectadas por ele forem falsas, isto é,  $A \vee B$  será falso somente se ambos A e B forem falsos. Diz-se que o símbolo  $\vee$  representa a **disjunção lógica** das proposições A e B.

### **Exercício:**

(1.2) Construa a tabela-verdade do operador  $\vee$ .

**Dica:** uma **disjunção** somente é **falsa**, quando todas as proposições que a compõem são **falsas**, e é verdadeira em todos os outros casos.

### **Negação de uma Proposição**

Os símbolos  $\neg$  ou  $\sim$  serão usados para representar a **negação** de uma proposição. Neste caso, se A é uma proposição verdadeira então  $\neg A$  ou  $\sim A$  será uma proposição falsa e vice-versa. Ou seja  $\neg A$  é a **negação lógica** de A. (as vezes o símbolo ‘ (apóstrofo) também é usado para simbolizar a negação)

### **Exercício:**

(1.3) Construa a tabela da negação lógica

## 1.2. Implicação Material e Equivalência Lógica

### Implicação

O símbolo  $\rightarrow$  será usado para representar sentenças como “se chover, então a rua ficará molhada”, ou então “não estudar implica em tirar notas baixas” ou também “não fui ao cinema porque o carro estragou” e sentenças similares. Geralmente estas sentenças podem ser reescritas no formato “Se sentença A, então sentença B” que simbolicamente fica apenas:  $A \rightarrow B$ .

A noção que este operador lógico pretende capturar é a de existência de implicação ou de consequência entre as sentenças. Dessa forma a sentença B não poderia ser falsa se a sentença A fosse verdadeira, isto é, voltando aos exemplos não faria sentido afirmar “se chover, então a rua ficará molhada” se (A) realmente choveu e (B) a rua **não** ficou molhada (!?). Isto significa que se considera que a sentença simbolizada por  $A \rightarrow B$  seria falsa somente no caso em que A é verdadeira e B falsa. Nos outros casos a expressão  $A \rightarrow B$  seria verdadeira.

Um comentário, entretanto, deve ser feito sobre a definição deste operador: quando a sentença A em  $A \rightarrow B$  é falsa o resultado de  $A \rightarrow B$  é verdadeiro independente de B. Isto apesar de nem sempre parece muito natural, também pode ser aceitável se assumirmos o princípio de que partindo de uma falsidade pode-se até mesmo alcançar alguma verdade.

Entretanto, para se evitar conflitos com a relação de implicação lógica este conectivo  $\rightarrow$  é denominado de **implicação material** (às vezes também é denominado de operador **condicional**).

A proposição A, na fórmula  $A \rightarrow B$ , é denominada de **condição** (ou **antecedente**) da implicação material e a proposição B é denominada de **conclusão** (ou **consequente**) desta implicação.

### Exercício:

(1.4) Com base na discussão acima construa a tabela-verdade de  $A \rightarrow B$ .

**Dica:** uma **implicação material**  $A \rightarrow B$  somente é **falsa**, quando a condição A for **verdadeira** e a conclusão B for **falsa**. Ela é verdadeira em todos os outros casos.

### Bi-implicação ou Equivalência Lógica

A operação de equivalência lógica de duas proposições é definida de forma que esta operação resulte verdadeira apenas quando estas duas proposições forem iguais (tiverem o mesmo valor lógico). Esta operação é representada pelo símbolo  $\leftrightarrow$  e é denominada de **bi-implicação** ou de **equivalência lógica** (às vezes também denominada de **bi-condicional**).

O uso de bi-implicações não é comum na linguagem natural, mas existe uma forma tradicional de se traduzir (transliterar) o operador  $\leftrightarrow$  para a linguagem natural, através da expressão “se e somente se”.

A operação  $A \leftrightarrow B$ , na verdade, pode ser considerada uma abreviação da seguinte fórmula:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

ou seja:

$$(A \leftrightarrow B) = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

### **Exercício:**

(1.5) Construa a tabela-verdade de  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$  (e, por conseguinte, também de  $(A \leftrightarrow B)$ ).

**Dica:** uma **bi-implicação material**  $A \leftrightarrow B$  é verdadeira quando  $A=B$  e falsa caso  $A \neq B$ .

## **1.3. Fórmulas e Precedência**

Uma **fórmula** é construída pela composição de símbolos de sentenças simples ( $A, B, \dots$ ) e de conectivos lógicos binários ( $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ) e unários ( $\neg, \sim$ ). Também podem ser usados parênteses. A precedência usual é:

1. Fórmulas dentro de parênteses (os mais internos primeiro)
2.  $\neg, \sim$  (a negação)
3.  $\wedge$  (conjunção)
4.  $\vee$  (disjunção)
5.  $\rightarrow$  (implicação material)
6.  $\leftrightarrow$  (**bi-implicação** ou **equivalência lógica**)
7. Da esquerda para a direita

Uma fórmula que não tenha nenhum erro de sintaxe em sua escrita (por exemplo, não tenha excesso nem falta de parênteses, conectivos ou símbolos estranhos, etc.) é chamada de **fórmula bem-formada (wff em inglês)**. Aqui no texto, entretanto, quando nos referirmos a uma fórmula estaremos assumindo que ela é bem-formada.

### **Exemplos:**

Supondo que  $A, B$  e  $C$  são proposições lógicas então as seguintes expressões são fórmulas bem-formadas (ou apenas fórmulas)

$$\begin{aligned} &(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A) \\ &(A \vee \neg A) \rightarrow (B \wedge \neg B) \\ &\neg((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C) \\ &(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \\ &((A \wedge B \wedge C) \vee \neg(\neg B \vee A) \vee (A \wedge \neg C)) \rightarrow (C \vee \neg A) \\ &\neg\neg(A \wedge C) \end{aligned}$$

### **Contra-exemplos (erros mais comuns):**



As seguintes fórmulas apresentam alguns erros bastante comuns de escrita (sintaxe) que podem ocorrer nas fórmulas (do lado é indicado o tipo de erro):

$(A \rightarrow B \leftrightarrow (B \rightarrow A))$	<i>falta um fecho parênteses</i>
$(A \vee \neg) \rightarrow (B \wedge \neg B)$	<i>a primeira negação não foi seguida de uma proposição</i>
$\neg((A \neg B) \rightarrow \neg C)$	<i>falta um operador lógico entre A e <math>\neg B</math></i>
$(\vee \neg A) \rightarrow (B \wedge \neg B)$	<i>falta uma proposição no lado esquerdo do operador <math>\vee</math></i>
$(A \vee \neg A) \rightarrow (B \wedge)$	<i>falta uma proposição no lado direito do operador <math>\wedge</math></i>

### 1.4. Construção de Tabelas-Verdade para Fórmulas

Uma tabela-verdade mostra, em suas colunas mais a esquerda, todas as combinações de valores lógicos que as proposições de uma dada fórmula podem assumir. A partir destes valores de entrada pode-se “calcular” os valores que esta fórmula irá ter para cada uma destas combinações de valores. Este cálculo é feito passo a passo criando-se colunas intermediárias que ficam posicionadas à direita das colunas de entrada e que contém os valores das sub-fórmulas que compõem a fórmula principal. Na última coluna mais a direita se coloca a coluna que contém os valores finais desta fórmula. Resumindo, para se construir a tabela-verdade de uma fórmula lógica pode-se seguir os seguintes passos:

- (i) nas colunas à esquerda coloque os símbolos sentenciais simples (A, B, ...), depois
- (ii) se houverem sentenças simples negadas ( $\neg A$ ,  $\neg B$ , ...) coloque-as nas próximas colunas e por fim
- (iii) seguindo a precedência crie uma coluna para cada fórmula composta (não é necessário repetir as sentenças simples negadas).

A última coluna a direita deve ser a expressão ou fórmula final.

As sentenças ou símbolos proposicionais simples pertencentes a uma fórmula definem o número de *linhas* da tabela-verdade para esta fórmula através de uma regra simples:

1 símbolo: A	2 linhas ( $2^1$ combinações: V e F)
2 símbolos: A e B	4 linhas ( $2^2$ combinações: VV, VF, FV, FF)
3 símbolos: A, B e C	8 linhas ( $2^3$ combinações: VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF)
4 símbolos: A, B, C e D	16 linhas ( $2^4$ combinações)
$n$ símbolos: A, B, ...	$2^n$ linhas ( $2^n$ combinações)

A última linha da tabela acima define a regra: para  $n$  símbolos proposicionais simples devem existir  $2^n$  linhas na tabela para representar as  $2^n$  combinações de valores verdade possíveis.

#### Exemplo:

O operador de disjunção  $\vee$  é aplicado sobre duas proposições  $A \vee B$ . A tabela-verdade deste operador, usando V para indicar verdadeiro e F para indicar falso (que deveria ter sido construída no exercício 1.1.), é igual a:

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Outra forma de representar verdadeiro / falso é através de valores numéricos, 0 significa falso e 1 significa verdadeiro (esta é a forma mais comum usada em álgebra booleana e em circuitos lógicos). Usando esta notação a tabela acima ficaria:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Note que quando se usa 0 e 1 a disposição dos valores verdadeiros e falsos muda. No caso de se usar V e F geralmente se começa com a linha superior toda em V e as demais linhas vão aos poucos sendo preenchidas com F até que na linha inferior todos os valores são F. No caso de se usar 0 e 1 a disposição é exatamente contrária. O reflexo destas diferentes disposições aparece claramente na última coluna.

Neste texto somente será usada a primeira representação, com V para verdadeiro e F para falso, que é a forma usual da lógica proposicional.

### **Exercício:**

(1.6) Agora construa tabelas-verdade para as seguintes fórmulas:

- (a)  $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$
- (b)  $(A \vee \neg A) \rightarrow (B \wedge \neg B)$
- (c)  $\neg((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C)$
- (d)  $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
- (e)  $((A \wedge B \wedge C) \vee \neg(\neg B \vee A) \vee (A \wedge \neg C)) \rightarrow (C \vee \neg A)$

## **1.5. Tautologias e Contradições**

Uma **tautologia** é uma fórmula que assume apenas o valor V, ou seja, que é sempre verdadeira. Uma tautologia é “intrinsecamente verdadeira” pela sua própria estrutura; ela é verdadeira independente de qualquer valor lógico atribuído as suas letras de proposição.

Uma **contradição** é o oposto de uma tautologia, ou seja, é uma fórmula que assume apenas o valor F independente de qualquer combinação de valores verdade atribuída às proposições lógicas simples que entram em sua composição.

No caso da lógica proposicional para demonstrar que uma fórmula é uma tautologia ou uma contradição basta construir sua tabela-verdade.

O exercício **(1.6.d)**  $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  apresentado acima é um exemplo de tautologia (basta conferir sua tabela-verdade).

**(1.7)** Descobrir quais das seguintes fórmulas são tautologias, contradições ou fórmulas contingentes (fórmulas “simples” que não são tautologias ou contradições).

- (a)  $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$
- (b)  $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
- (c)  $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- (d)  $(A \wedge B) \wedge B \leftrightarrow \neg((B \wedge A) \wedge A)$

## 1.6. Equivalências Tautológicas e Leis de DeMorgan

### Equivalências Tautológicas

Considere que P e Q sejam duas fórmulas lógicas quaisquer e que  $P \leftrightarrow Q$  seja uma tautologia, então pela própria definição do conetivo  $\leftrightarrow$ , sempre que P for V numa dada linha da tabela-verdade de  $P \leftrightarrow Q$ , a fórmula Q também deverá ser V nesta linha. O mesmo acontece para quando P tem valor F. Neste caso se diz que P e Q são **fórmulas equivalentes**.

Esta propriedade é denotada pelo operador  $\leftrightarrow$  de **equivalência tautológica** entre as fórmulas P e Q, simbolicamente fica  $P \leftrightarrow Q$ .

Na tabela a seguir são apresentadas algumas equivalências tautológicas que definem propriedades importantes da disjunção e conjunção:

*Tabela 1 - Equivalências da Disjunção ( $\vee$ ) e da Conjunção ( $\wedge$ )*

Propriedade	Disjunção ( $\vee$ )	Conjunção ( $\wedge$ )
Comutativa	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$
Associativa	$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
Distributiva	$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
Elemento Neutro	$A \vee F \leftrightarrow A$	$A \wedge V \leftrightarrow A$
Complemento	$A \vee \neg A \leftrightarrow V$	$A \wedge \neg A \leftrightarrow F$
Idempotência	$A \vee A \leftrightarrow A$	$A \wedge A \leftrightarrow A$

Na tabela a seguir são apresentadas algumas equivalências tautológicas que permitem reescrever ou redefinir os outros operadores:

*Tabela 2 - Equivalências dos outros operadores*

Dupla Negação	$\neg\neg A \leftrightarrow A$
Equivalência da Implicação	$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$
Contraposição	$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
Prova Condicional	$A \rightarrow (B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$

**Exercício:**

**(1.8)** Demonstrar, pelo uso da tabela-verdade, as equivalências tautológicas acima (não precisa repetir as demonstrações para a equivalência comutativa, associativa e contraposição).

**Leis de De Morgan**

As equivalências vistas anteriormente permitem efetuar vários tipos de manipulações ou alterações numa fórmula sem que ela altere seu significado. Além destas fórmulas, entretanto, seria interessante que houvesse maneiras de se converter proposições conectadas pelo operador  $\vee$  em proposições conectadas por  $\wedge$ . Estas equivalências são denominadas Leis de De Morgan em homenagem ao matemático inglês do séc. XIX Augustus De Morgan, que foi o primeiro a enunciá-las.

<b>Negação da Disjunção</b>	<b>Negação da Conjunção</b>
<b>DeMorgan:</b> $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

**1.7. Simbolização de Proposições**

A seguir são apresentados alguns exemplos, tanto de passagem de uma fórmula para texto quando de texto para fórmula.

Supondo que  $A$  = “hoje está chovendo”,  $B$  = “hoje faz frio” e  $C$  = “hoje vamos para a praia”, então a seguinte fórmula:

$$A \wedge B \wedge \neg C$$

Poderia ser versada para o Português de várias formas diferentes:

- (a)** *Hoje está chovendo, hoje faz frio e não é verdade que hoje vamos para a praia.*
- (b)** *Hoje está chovendo, faz frio e não vamos para a praia.*
- (c)** *Hoje está chovendo e faz frio, todavia não vamos para a praia.*
- (d)** *Hoje está chovendo e faz frio, mas não vamos para a praia hoje.*

A frase **(a)** que é uma transliteração direta da fórmula  $A \wedge B \wedge \neg C$ , embora correta do ponto de vista gramatical, simplesmente não é usada pelo excessivo formalismo. As demais formas são mais usuais (e existem muitas outras equivalentes). Note que a negação quase nunca é colocada no início da proposição. Note também que são usadas várias formas de conjunções além do conectivo “e”: é usada a vírgula no caso **(b)** e as conjunções adversativas “todavia” e “mas” nos casos **(c)** e **(d)**.

Usando os mesmos significados para os símbolos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , a fórmula a seguir:

$$(A \wedge B) \vee C$$

Poderia ser versada para o Português das seguintes formas:

- Hoje está chovendo e faz frio, ou hoje vamos para a praia.*
- Ou hoje está chovendo e faz frio, ou hoje vamos para a praia.*

*Ou hoje está chovendo e faz frio, ou então hoje vamos para a praia.*

A fórmula:

$$\neg(A \wedge B)$$

É um pouco mais complexa de ser versada, por conta da negação de uma sub-fórmula em parênteses, algo simplesmente não usado na linguagem natural. A fórmula poderia ser transliterada no seguinte texto:

*Não é verdade que hoje está chovendo e fazendo frio.*

Mas este texto é ambíguo, podendo representar a fórmula  $\neg A \wedge B$ . Uma representação mais razoável da fórmula  $\neg(A \wedge B)$  exigiria a retirada dos parênteses, algo que somente pode ser feito pelo uso das Leis de DeMorgan. Neste caso a fórmula se torna:

$$\neg A \vee \neg B$$

Facilmente versada para:

*Hoje não está chovendo ou hoje não está fazendo frio.*

A seguir são apresentados exemplos de texto, com sua simbolização equivalente:

*Se hoje está chovendo, então ou vamos para a praia, ou está fazendo frio.*

$$A \rightarrow (C \vee B)$$

*Hoje não está chovendo, nem fazendo frio, portanto vamos para a praia.*

$$(\neg A \wedge \neg B) \rightarrow C$$

*Hoje não vamos para a praia, porque está chovendo e fazendo frio.*

$$(A \wedge B) \rightarrow \neg C$$

## 1.8. Exercícios sobre Proposições, Fórmulas e Tautologias

(1.9) Sejam A, B e C as seguintes proposições:

A Rosas são vermelhas.

B Violetas são azuis.

C Açúcar é doce.

Escreva as proposições a seguir em notação simbólica:

(a) Rosas são vermelhas e violetas são azuis.

(b) Rosas são vermelhas, e ou bem violetas são azuis ou bem açúcar é doce.

(c) Sempre que violetas são azuis, rosas são vermelhas e açúcar é doce.

(d) Rosas são vermelhas apenas se violetas não forem azuis e se açúcar for amargo.

(e) Rosas são vermelhas e, se açúcar for amargo, então ou violetas não são azuis ou açúcar é doce.

(1.10) Considerando A, B e C com o mesmo significado visto acima, transcreva para o português as seguintes fórmulas:

(a)  $B \vee \neg C$

(b)  $\neg B \vee (A \rightarrow C)$

(c)  $(C \wedge \neg A) \rightarrow B$

- (d)  $C \wedge (\neg A \leftrightarrow B)$   
 (e)  $\neg(B \wedge \neg C) \rightarrow A$

**(1.11)** Levando em conta o que aprendeu sobre equivalências e em particular sobre as Leis de De Morgan, escreva a negação das seguintes proposições compostas:

- (a) Se a comida é boa, então o serviço é excelente.  
 (b) Ou a comida é boa, ou o serviço é excelente.  
 (c) Ou a comida é boa e o serviço é excelente, ou então está caro.  
 (d) Nem a comida é boa, nem o serviço é excelente.  
 (e) Se é caro, então a comida é boa e o serviço é excelente.

**(1.12)** Toda proposição composta é equivalente a uma que use apenas os conectivos de conjunção e negação. Para verificar isto é necessário encontrar fórmulas equivalentes a  $A \vee B$  e  $A \rightarrow B$  usando apenas  $\wedge$  e  $\neg$ . Estas fórmulas poderiam substituir, respectivamente, qualquer ocorrência de  $A \vee B$  e  $A \rightarrow B$  sem alterar o significado da fórmula original (não é necessário encontrar fórmula equivalente para  $A \leftrightarrow B$  porque a bi-implicação já foi definida em termos da implicação material). Agora encontre as fórmulas equivalentes a:

- (a)  $A \vee B$   
 (b)  $A \rightarrow B$

**(1.13)** O número de linhas numa tabela-verdade de uma fórmula depende do número de proposições simples ( $A, B, C, \dots$ ) que entram nesta fórmula. Responda:

- (a) A tabela-verdade de uma fórmula com 10 proposições simples têm quantas linhas?  
 (b) A tabela-verdade de uma fórmula com 20 proposições simples têm quantas linhas?

**(1.14)** Você está viajando por um país onde todo habitante ou fala sempre a verdade ou é um mentiroso que sempre mente. Você encontra dois habitantes deste país, Percival e Levelim. Percival lhe diz “Pelo menos um de nós é mentiroso”. Agora responda: Percival é mentiroso ou está dizendo a verdade? E Levelim? Explique sua resposta.

**(1.15)** Montar a tabela-verdade de:  $(A \wedge (B \rightarrow C)) \vee (\neg C \wedge \neg((A \vee B) \rightarrow \neg A))$

**(1.16)** Verificar se a equivalência é válida:  $(\neg A \vee B) \vee (C \rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge C) \rightarrow C$

**(1.17)** Construa um argumento verbal apropriado para o seguinte argumento formal:

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \wedge (A \vee \neg D) \wedge B \rightarrow (D \rightarrow C)$$

Defina claramente que proposições verbais são simbolizadas por  $A, B, C$  e  $D$ .

**(1.18)** Construa um argumento verbal apropriado para o seguinte argumento formal:

$$((A \vee C) \rightarrow G) \wedge (C \rightarrow (\neg G \wedge \neg H)) \wedge (C \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

Defina claramente que proposições verbais são simbolizadas por  $A, B, C, G$  e  $H$ .

## Capítulo 2

### Dedução na Lógica Proposicional

---

As definições vistas até agora nos permitiram criar uma linguagem formal para a Lógica Proposicional. Estas definições também nos permitiram ver como se pode descobrir o valor-verdade de expressões nestas linguagens através de tabelas-verdade. Porém isso não é tudo que uma linguagem lógica pode nos fornecer. Ainda é necessário definir como são feitos raciocínios ou argumentações nesta linguagem. A lógica formal lida com um tipo particular de argumento, denominado de **argumento dedutivo**, que nos permite deduzir uma conclusão  $Q$ , com base num conjunto de proposições  $P_1$  a  $P_n$ , onde  $Q$  e  $P_1$  a  $P_n$  representam fórmulas inteiras bem-formadas da lógica proposicional (e não apenas proposições simples).

#### 2.1. Argumentos Válidos

Um argumento dedutivo pode ser representado de forma simbólica da seguinte forma:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$$

As proposições  $P_1$  a  $P_n$  são denominadas de **hipóteses** ou **premissas** do argumento. A proposição é denominada de **conclusão** do argumento. Em termos de língua natural este tipo de simbolismo pode ser lido como:

“ $P_1, P_2, \dots, P_n$  **acarretam**  $Q$ ” ou

“ $Q$  **decorre** de  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ” ou

“ $Q$  **se deduz** de  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ” ou ainda

“ $Q$  **se infere** de  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ”

Uma interpretação informal do argumento acima poderia levar em conta que  $Q$  seria uma conclusão lógica de  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sempre que a verdade das proposições  $P_1, P_2, \dots, P_n$  implicar na verdade  $Q$ , ou seja, apenas quando o condicional:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$$

for verdadeiro. O problema é que esta interpretação poderia afirmar como válido um argumento como:

$$A \wedge B \rightarrow C$$

onde  $A$  representa “um dia tem 24 horas”,  $B$  representa “bananas são frutas” e  $C$  representa “hoje é depois de ontem”. Embora estas três sentenças sejam verdadeiras e portanto, neste caso,  $A \wedge B \rightarrow C$  seja verdadeiro, não existe nenhuma relação real entre elas e portanto não se pode dizer que um argumento na forma tão genérica quanto  $A \wedge B \rightarrow C$  seja sempre **válido**, ou seja, que seja verdadeiro independente do valor verdade das premissas ou da conclusão, mas apenas em função apenas da sua forma.

Dessa forma um **argumento válido** é um argumento onde a fórmula:

$$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$$

é uma tautologia.

O fato do argumento  $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$  ser válido é simbolizado através da seguinte expressão:

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \models Q$$

Esta expressão afirma que a fórmula  $Q$  é logicamente implicada pelas premissas  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ .

Num argumento válido não interessam os valores verdade das hipóteses nem da conclusão, porque somente a forma do argumento é capaz de garantir sua validade. Por isto ele é denominado de **argumento formal** e esta é a razão por trás do poder de dedução da lógica formal, que pode verificar a validade ou correção de um argumento sem se ater às proposições que o compõem, isto é, sem se importar com seu significado.

## 2.2. Demonstrações

Para testar se o argumento  $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$  é uma tautologia poderíamos simplesmente construir a tabela-verdade correspondente ao argumento. Porém, em vez disso, vamos usar um processo baseado na aplicação de **regras de dedução** (ou **regras de inferência**) que modificam fórmulas de modo a preservar seu valor lógico.

A idéia básica é começar com as premissas  $P_1, P_2, \dots, P_n$  (supostamente verdadeiras) e tentar aplicar regras de dedução até terminar com a conclusão  $Q$ . Esta conclusão teria que ser, então, verdadeira uma vez que os valores lógicos são preservados sob as regras de inferência.

Dessa forma uma demonstração formal da lógica proposicional teria a seguinte estrutura:

$P_1$	(hipótese 1)
$P_2$	(hipótese 2)
...	
$P_n$	(hipótese n)
$F_1$	(fórmula obtida aplicando-se uma regra de dedução sobre as fórmulas anteriores)
$F_2$	(fórmula obtida aplicando-se uma regra de dedução sobre as fórmulas anteriores)
...	
$F_m$	(fórmula obtida aplicando-se uma regra de dedução sobre as fórmulas anteriores)
$Q$	(fórmula obtida aplicando-se uma regra de dedução sobre as fórmulas anteriores)

Neste tipo de argumento a conclusão  $Q$  simplesmente é a última forma obtida através da aplicação de uma regra de dedução.

A sequência de fórmulas obtidas por este processo é denominada de **seqüência de demonstração** ou apenas de **demonstração formal** da conclusão em função de suas premissas.



A sequência de fórmulas  $F_1, F_2, \dots, F_m$  é a **prova** (ou **demonstração**) que a conclusão  $Q$  se deduz das hipóteses  $P_1, P_2, \dots, P_n$ .

O fato que existe prova para um argumento  $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q$  é simbolizado através da seguinte expressão:

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \vdash Q$$

**Nota:** Muito embora pareça muito mais simples aplicar o método de construção da tabela verdade para verificar a validade de um argumento, o método da demonstração formal se justifica por duas razões:

- (i) Quando o número de proposições simples é muito grande, por exemplo, com apenas 40 proposições simples seria necessária uma tabela-verdade com aproximadamente 1 TRILHÃO de linhas.
- (ii) No caso das lógicas mais expressivas como a Lógica de Predicados simplesmente não é possível aplicar o método da tabela-verdade, ou seja, somente nos resta aplicar o método da demonstração formal.

### 2.3. Regras de Dedução Natural

Existem dois tipos básicos de regras de dedução:

- Regras de inferência que se baseiam em implicações tautológicas, ou seja, implicações materiais provadamente tautológicas.
- Regras de equivalência que se baseiam nas equivalências tautológicas vistas no capítulo 1 e que permitem substituir uma fórmula pela outra, já que ambas são equivalentes.

As regras que são baseadas em implicações que já se tenha demonstrado (por tabela-verdade p.ex.) serem tautológicas serão denominadas de **Regras de Inferência**. A tabela 3 apresenta as regras básicas de inferência da lógica proposicional.

Tabela 3 - Regras Básicas de Inferência

Inclusão de Operadores	Exclusão de Operadores
<p>Redução ao absurdo (<b>raa</b>) - <math>\neg I</math></p> $\frac{\begin{array}{c c} P & \\ \dots & \\ Q \wedge \neg Q & \end{array}}{\neg P}$	<p>Dupla negação (<b>dn</b>) - <math>\neg E</math></p> $\frac{\neg \neg P}{P}$
<p>Prova condicional (<b>pc</b>) - <math>\rightarrow I</math></p> $\frac{\begin{array}{c c} P & \\ \dots & \\ Q & \end{array}}{\rightarrow}$	<p><i>Modus Ponens</i> (<b>mp</b>) - <math>\rightarrow E</math></p> $\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q}$

$P \rightarrow Q$	
<b>Conjunção(cj) - <math>\wedge I</math></b> $\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$	<b>Simplificação(sp) - <math>\wedge E</math></b> $\frac{P \wedge Q}{P} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$
<b>Adição(ad) - <math>\vee I</math></b> $\frac{P}{P \vee Q} \quad \frac{P}{Q \vee P}$	<b>Eliminação da disjunção - <math>\vee E</math></b> $\frac{P \vee Q \quad P \rightarrow R \quad Q \rightarrow R}{R}$
<b>Introdução da equivalência - <math>\leftrightarrow I</math></b> $\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow P}{P \leftrightarrow Q}$	<b>Eliminação da equivalência - <math>\leftrightarrow E</math></b> $\frac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q} \quad \frac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$

Estas 10 regras são completas no sentido que permitem a manipulação de todos os operadores da lógica proposicional. Do lado esquerdo estão listadas as regras que permitem a inclusão de um dado operador em uma nova fórmula a ser adicionada no decorrer da prova. As regras do lado direito permitem adicionar uma nova prova à demonstração, onde um determinado operador foi eliminado.

Além destas regras básicas, existe também um conjunto de regras derivadas que também podem ser usadas em demonstrações. Embora todas as regras derivadas apresentadas na tabela 5 a seguir possam ser substituídas por demonstrações sem o uso delas, elas podem ser bastante úteis em determinados casos, facilitando o processo de demonstração.

*Tabela 4 - Regras de Inferência Derivadas*

<b>Modus Tollens (mt)</b> $\frac{P \rightarrow Q \quad \neg Q}{\neg P}$	<b>Silogismo Hipotético (sh)</b> $\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}$
<b>Silogismo Disjuntivo (sd)</b> $\frac{P \vee Q \quad \neg P}{Q}$	<b>Dilema Construtivo (dc)</b> $\frac{P \vee Q \quad P \rightarrow R \quad Q \rightarrow S}{R \vee S}$
<b>Exportação (exp)</b> $\frac{(P \wedge Q) \rightarrow R}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}$	<b>Inconsistência (inc)</b> $\frac{P \quad \neg P}{Q}$

As regras baseadas em equivalências tautológicas serão simplesmente denominadas de **Regras de Equivalência**. A seguir é apresentada uma tabela contendo as principais regras de equivalência (conferir com as equivalências tautológicas da seção 1.6):

*Tabela 5 - Regras de Equivalência*

Expressão	Equivale a	Nome (Abreviação) da Regra
$P \vee Q$ $P \wedge Q$	$Q \vee P$ $Q \wedge P$	Comutatividade ( <b>com</b> )
$(P \vee Q) \vee R$ $(P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R)$ $P \wedge (Q \wedge R)$	Associatividade ( <b>ass</b> )
$\neg(P \vee Q)$ $\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$ $\neg P \vee \neg Q$	De Morgan ( <b>dmor</b> )
$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	Condicional ( <b>cond</b> )
$P$	$\neg(\neg P)$	Dupla negação ( <b>dn</b> )
$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	Contraposição ( <b>cont</b> )
$P$	$P \wedge P$	Auto-referência ( <b>auto</b> )
$P \vee P$	$P$	Auto-referência ( <b>auto</b> )
$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Distributividade ( <b>dist</b> )
$P \vee (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Distributividade ( <b>dist</b> )

### Importante:

- Note que as regras de equivalência são “reversíveis”, isto é, durante uma demonstração também se pode passar de uma fórmula no formato da segunda coluna (**Equivale a**) para uma fórmula no formato da primeira coluna (**Expressão**) sem perder a validade lógica.
- Isto implica que uma regra de equivalência pode ser aplicada tanto na construção de seqüência de demonstração formal de um argumento, quanto na própria modificação de um argumento. Assim, as fórmulas de uma regra de equivalência são intercambiáveis: pode-se substituir uma sub-fórmula de um argumento por outra equivalente sem alterar a validade lógica do mesmo.
- Porém as regras de inferência **não são reversíveis**, isto é, somente pode-se passar da situação prevista na primeira coluna (**De**) para a(s) fórmula(s) da segunda coluna (**Pode-se deduzir**). O oposto, pela própria natureza da regra, não é permitido.
- Isto implica que não se pode usar este tipo de regra para alterar o argumento original, apenas se pode utilizá-la na construção de uma seqüência de demonstração.

### Exemplos:

Excetuando-se as regras de Redução ao Absurdo (raa) e Prova Condicional (pc), todas as demais regras de inferência e de equivalência apresentadas nas tabelas 3, 4 e 5 são de aplicação **direta**. Nesta seção serão mostrados exemplos de uso destas regras de aplicação direta.

Supondo que  $A \rightarrow (B \wedge C)$  e  $A$  são duas hipóteses de um argumento então a seguinte demonstração é válida:

1.	$A \rightarrow (B \wedge C)$	hip
2.	$A$	hip
3.	$B \wedge C$	1, 2 mp

As fórmulas das 2 primeiras linhas são inseridas por conta das hipóteses, enquanto que a fórmula da linha 3 é derivada das fórmulas das linhas 1 e 2 pela regra *modus ponens*.

Usando a lógica proposicional provar o seguinte argumento:

$$A, (B \rightarrow C), (A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow D), B \vdash D$$

Primeiro as hipóteses do argumento:

1.	$A$	hip
2.	$B \rightarrow C$	hip
3.	$(A \wedge B) \rightarrow (C \rightarrow D)$	hip
4.	$B$	hip

Alguns passos óbvios (que poderão ser úteis ou não):

5.	$C$	2, 4 mp
6.	$A \wedge B$	1, 4 cj
7.	$C \rightarrow D$	3, 6 mp

E agora, portanto:

8.	$D$	5, 7 mp
----	-----	---------

## 2.4. Regras Hipotéticas

As 6 regras básicas de inferência para a lógica proposicional que tratam da inclusão dos operadores  $\wedge, \vee, \leftrightarrow$ , além das regras de exclusão da implicação ( $\rightarrow E$  ou *Modus Ponens*) e da negação ( $\rightarrow E$  ou Dupla Negação) são de aplicação direta, não necessitando de um raciocínio hipotético para funcionar.

Por outro lado as duas regras de inclusão da implicação ( $\rightarrow I$ ) e da negação ( $\neg I$ ) necessitam de raciocínios hipotéticos para serem aplicadas. Estes raciocínios são incorporados na prova na forma de demonstrações auxiliares ou hipotéticas, que tem um caráter “temporário”, e que deverão ser descartadas quando a conclusão da demonstração auxiliar for atingida.

A forma como os resultados obtidos com a demonstração auxiliar serão usados na prova principal depende das regras de inferência usadas.

No caso da Redução ao Absurdo (**raa**), a demonstração auxiliar conseguiu mostrar que a partir de uma fórmula  $P$ , usada como hipótese inicial na demonstração auxiliar, foi possível demonstrar uma contradição lógica, isto é, uma fórmula do tipo  $Q \wedge \neg Q$ . Neste

caso a nova fórmula que se pode adicionar na prova principal é  $\neg P$  que pode ser assumida como válida, porque caso contrário se chega a uma contradição lógica.

Já no caso da Prova Condicional (**pc**), a demonstração auxiliar mostra que, caso se assuma a fórmula  $P$  como hipótese inicial da demonstração auxiliar, então é possível se deduzir uma dada fórmula  $Q$ . Se conseguirmos deduzir, a partir de  $P$  e das outras hipóteses, uma outra fórmula  $Q$ , então a fórmula  $P \rightarrow Q$  pode ser adicionada na seqüência normal de demonstração. Neste caso, a fórmula  $P \rightarrow Q$  adicionada a prova principal resume o fato (provado) que de  $P$  se pode deduzir  $Q$ .

Quando as regras que utilizam raciocínio hipotético são concluídas, então todas as fórmulas que constituem a demonstração auxiliar têm que ser “descartadas” e não mais utilizadas na seqüência normal de demonstração. Somente a fórmula que foi demonstrada através do artifício do raciocínio hipotético pode ser usada na demonstração normal.

### Exemplos:

Prove o seguinte argumento, que equivale a regras do Silogismo Hipotético:

$$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$$

A demonstração é a seguinte e usa a regras de Prova Condicional:

1	$P \rightarrow Q$	hip
2	$Q \rightarrow R$	hip
3	$P$	hip-pc
4	$Q$	1,3 mp
5	$R$	2,4 mp
6	$P \rightarrow R$	3-5 pc

Observe que a hipótese da prova condicional (hip-pc) e as fórmulas obtidas a partir dela e das hipóteses normais, foram escritas ao lado da barra vertical  $|$ , mais a esquerda que as fórmulas pertencentes a seqüência normal de demonstração. Isto é para deixar claro o caráter temporário destas fórmulas.

Um outro exemplo de uso de Prova Condicional é usado na demonstração do seguinte argumento:

$$P \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$$

A demonstração é a seguinte:

1	$P$	hip
2	$P \rightarrow Q$	hip-pc
3	$Q$	1,2 mp
4	$(P \rightarrow Q) \rightarrow Q$	2-3 pc

Demonstrações condicionais podem ser “aninhadas” uma dentro da outra se isto for necessário. Isto ocorre, por exemplo, na prova de:

$$(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$$

Cuja demonstração é a seguinte:

1	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	hip
2	$P$	hip-pc
3	$Q$	hip-pc
4	$P \wedge Q$	2,3 cj
5	$R$	1,4 mp
6	$Q \rightarrow R$	3-5 pc
7	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	2-6 pc

A regras de Redução ao Absurdo (raa) pode ser usada para provar o seguinte argumento (que é equivalente a regra de *Modus Tollens*):

$$P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$$

A demonstração fica:

1	$P \rightarrow Q$	hip
2	$\neg Q$	hip
3	$P$	hip-raa
4	$Q$	1,3 mp
5	$Q \wedge \neg Q$	2,4 cj
6	$\neg P$	3-5 raa

## 2.5. Regra do Método Dedutivo

Supondo um argumento na seguinte forma:

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n \vdash R \rightarrow S$$

então pelo uso da regra da Prova Condicional sempre se pode, em vez de usar  $P_1, \dots, P_n$  como hipóteses e tentar inferir  $R \rightarrow S$ , adicionar  $R$  como uma hipótese adicional e depois inferir  $S$ . Em outras palavras podemos transformar o argumento acima no seguinte argumento:

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, R \vdash S$$

Isto é uma vantagem, porque nos dá mais uma hipótese, isto é, “munição” adicional para a demonstração. Esta hipótese adicional será identificada como **hip-md** na sequência de demonstração.

### Exemplos:

A regra do método dedutivo é útil para provar o seguinte argumento:

$$A \rightarrow (A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow B$$

Pela regra do método dedutivo este argumento se transforma em:

$$A \rightarrow (A \rightarrow B), A \vdash B$$

Agora a demonstração fica:

1	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	hip
2	$A$	hip-md
3	$A \rightarrow B$	1, 2 mp
4	$B$	2, 3 mp

Provar que:

$$\neg A \vee B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$$

É possível demonstrar a validade deste argumento sem usar a Regra do Silogismo Hipotético (**sh**), essencialmente demonstrando a própria validade do silogismo hipotético como parte da demonstração (usando, entretanto, uma pequena ajuda da regra do método dedutivo):

1	$\neg A \vee B$	hip
2	$B \rightarrow C$	hip
3	$A \rightarrow B$	1 cond
4	$A$	hip-md
5	$B$	3, 4 mp
6	$C$	2, 5 mp

A Regra do Silogismo Hipotético (**sh**) afirma que de  $P \rightarrow Q$  e de  $Q \rightarrow R$ , pode-se inferir  $P \rightarrow R$ . A demonstração do argumento acima usando o silogismo hipotético é muito simples:

1	$\neg A \vee B$	hip
2	$B \rightarrow C$	hip
3	$A \rightarrow B$	1 cond
4	$A \rightarrow C$	2, 3 sh

### **Dicas de Dedução**

1. A regra de *modus ponens* é provavelmente a regra de inferência mais intuitiva. Tente usá-la muitas vezes.
2. Fórmulas na forma  $\neg(P \vee Q)$  ou  $\neg(P \wedge Q)$  dificilmente são úteis numa seqüência de demonstração. Tente usar as leis de DeMorgan para convertê-las, respectivamente, em  $\neg P \wedge \neg Q$  ou  $\neg P \vee \neg Q$ , separando os componentes individuais de cada fórmula.
3. Fórmulas na forma  $P \vee Q$  dificilmente são úteis numa seqüência de demonstração, já que não implicam  $P$  nem  $Q$ . Tente usar a dupla negação para converter  $P \vee Q$  em  $\neg(\neg P) \vee Q$  e depois usar a regra do condicional para obter  $\neg P \rightarrow Q$ .

## 2.6. Teoremas

Um **teorema** é simplesmente um argumento que não precisa de nenhuma hipótese (ou premissa) para ser válido (ou seja, para ser sempre verdadeiro). Por exemplo, o seguinte argumento é um teorema:

$$\vdash P \rightarrow P$$

A prova de um argumento sempre parte de uma regra hipotética (ou Redução ao Absurdo - **raa** - ou Prova Condicional - **pc**). No caso do teorema acima a prova pode ser feita pela regra da prova condicional:

$$\begin{array}{ll} 1 \mid P & \text{hip-pc} \\ 2 P \rightarrow P & \text{pc 1} \end{array}$$

Note que não há nenhuma hipótese ou premissa para este argumento, a linha 1 já começa pela regra de dedução da prova condicional.

## 2.7. Simbolização de Argumentos Verbais

Considere o argumento:

“Se as taxas de juros caírem, o mercado vai melhorar. Ou os impostos federais vão cair, ou o mercado não vai melhorar. As taxas de juros vão cair, portanto os impostos vão cair.”

Supondo que as proposições simples usadas no argumento acima são representadas pelos seguintes símbolos:

$$\begin{array}{ll} M = & \text{“O mercado vai melhorar”} \\ J = & \text{“A taxa de juros vai cair”} \\ I = & \text{“Os impostos federais vão cair”} \end{array}$$

Então o argumento verbal acima seria equivalente a seguinte fórmula da lógica proposicional:

$$(J \rightarrow M) \wedge (I \vee \neg M) \wedge J \rightarrow I$$

Que pode ser transformado no seguinte argumento formal:

$$J \rightarrow M, I \vee \neg M, J \vdash I$$

Uma demonstração possível da validade deste argumento formal é apresentada a seguir:

$$\begin{array}{ll} 1. & J \rightarrow M \quad \text{hip} \\ 2. & I \vee \neg M \quad \text{hip} \\ 3. & J \quad \text{hip} \\ 4. & \neg M \vee I \quad 2 \text{ com} \\ 5. & M \rightarrow I \quad 4 \text{ cond} \\ 6. & J \rightarrow I \quad 1, 5 \text{ sh} \\ 7. & I \quad 3, 6 \text{ mp} \end{array}$$



## 2.8. Exercícios de Dedução e Demonstração

(2.1) Justifique cada passo na demonstração do seguinte argumento:

$$A \rightarrow (B \vee C), \neg B, \neg C \vdash \neg A$$

- 1  $A \rightarrow (B \vee C)$
- 2  $\neg B$
- 3  $\neg C$
- 4  $\neg B \wedge \neg C$
- 5  $\neg(B \vee C)$
- 6  $\neg A$

(2.2) Justifique cada passo na seguinte demonstração:

$$\neg A, B, B \rightarrow (A \vee C) \vdash C$$

- 1  $\neg A$
- 2  $B$
- 3  $B \rightarrow (A \vee C)$
- 4  $A \vee C$
- 5  $\neg(\neg A) \vee C$
- 6  $\neg A \rightarrow C$
- 7  $C$

(2.3) Demonstre a validade dos seguintes argumentos formais (prove por dedução usando apenas as regras de dedução básicas, mostradas na tabela 3):

- (a)  $C, B \rightarrow A, C \rightarrow B \vdash A$
- (b)  $\neg A \rightarrow (B \rightarrow C), \neg A, B \vdash C$
- (c)  $(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S), \neg \neg P, Q \vdash S$
- (d)  $P \vdash P \wedge P$
- (e)  $P, \neg \neg(P \rightarrow Q) \vdash Q \vee \neg Q$
- (f)  $P \vee Q \vdash Q \vee P$
- (g)  $\neg P \vee \neg Q \vdash \neg(P \wedge Q)$

(2.4) Demonstre a validade dos seguintes argumentos formais (prove por dedução usando qualquer uma das regras de inferência e de equivalência apresentadas neste capítulo):

- (a)  $\neg A, B \rightarrow A \vdash \neg B$
- (b)  $A \rightarrow B, A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$
- (c)  $(C \rightarrow D) \rightarrow C \vdash (C \rightarrow D) \rightarrow D$
- (d)  $\neg A, A \vee B \vdash B$
- (e)  $A \rightarrow (B \rightarrow C), A \vee \neg D, B \vdash D \rightarrow C$
- (f)  $A \rightarrow B, B \rightarrow (C \rightarrow D), A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash A \rightarrow D$
- (g)  $A \wedge B \vdash \neg(A \rightarrow \neg B)$

Use a lógica proposicional para demonstrar a validade dos seguintes argumentos verbais (pode usar qualquer regras de inferência ou equivalência apresentada neste capítulo):

**(2.5)** “Se segurança é um problema, então o controle da informação deve ser aumentado. Se segurança não é um problema, então os negócios via Internet devem aumentar. Portanto, se o controle da informação não for aumentado, os negócios na Internet crescerão.” (sugestão: use S, C e N como símbolos proposicionais).

**(2.6)** “Se o programa é eficiente, executa rapidamente: ou o programa é eficiente ou tem algum *bug*.” (sugestão: use E, R e B como símbolos proposicionais).

**(2.7)** “A colheita é boa mas não há água suficiente. Se não haver muita chuva ou se não houver muito sol, então haverá água suficiente. Portanto a colheita é boa e há muito sol.” (sugestão: use C, A, V (chuva) e S como símbolos proposicionais).

**(2.8)** “A Rússia era uma potência superior e ou a França não era suficientemente poderosa, ou Napoleão cometeu um erro. Napoleão não cometeu um erro, mas, se o exército não perdeu, então a França era poderosa. Portanto, o exército perdeu e a Rússia era uma potência superior.” (sugestão: use R, F, N e E como símbolos proposicionais).

**(2.9)** “Se meu cliente fosse culpado, a faca estaria na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou José da Silva viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro, então José da Silva não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá no dia 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores, meu cliente é inocente.”

**(2.10)** Demonstre a validade dos seguintes argumentos formais usando as regras básicas de dedução e (se necessário) as regras derivadas de equivalência e :

- (a)  $P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R \vdash P \leftrightarrow R$
- (b)  $P \leftrightarrow Q \vdash \neg P \leftrightarrow \neg Q$
- (c)  $\neg P \vee Q \vdash \neg(P \wedge \neg Q)$
- (d)  $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q \vdash \neg P$
- (e)  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$
- (f)  $P \rightarrow Q \vdash (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)$
- (g)  $P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$
- (h)  $\neg P \rightarrow P \vdash P$

**(2.11)** Usando as regras básicas ou derivadas prove os seguintes teoremas:

- (a)  $\vdash P \rightarrow (Q \rightarrow (P \wedge Q))$
- (b)  $\vdash \neg(P \leftrightarrow \neg P)$
- (c)  $\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$
- (d)  $\vdash (P \wedge Q) \vee (\neg P \vee \neg Q)$

**(2.12)** Demonstrar a validade dos seguintes argumentos:

- (a)  $((A \wedge \neg B) \rightarrow \neg C) \wedge (D \rightarrow C) \wedge (D \wedge E) \rightarrow \neg(\neg B \wedge A)$
- (b)  $(A \rightarrow B) \wedge (\neg D \rightarrow \neg(A \wedge C)) \wedge (D \rightarrow \neg(E \vee F)) \wedge (\neg E \wedge \neg F) \rightarrow \neg B$



## Capítulo 3

### Sentenças Abertas

---

#### 3.1. Sentenças Abertas com uma Variável

Intuitivamente, uma **sentença aberta** pode ser considerada uma frase que contém “espaços em branco” (as **variáveis**) que devem ser preenchidos com valores retirados de algum conjunto predeterminado (o **domínio** das variáveis).

Quando algum elemento é retirado deste conjunto e “encaixado” na sentença aberta, então esta sentença deixa de ser aberta e passa a se comportar como uma proposição simples, tendo um valor lógico possível: ou ela é uma sentença que afirma algo verdadeiro (proposição verdadeira) ou uma sentença que afirma algo falso (uma proposição falsa). Diz-se que a sentença é **fechada** quando isto ocorre.

Construir sentenças abertas, definindo domínios apropriados para suas variáveis, é similar a jogar um jogo de montar frases, onde estas frases são formadas a partir de trechos sugeridos pelos participantes. Neste tipo de jogo, por exemplo, um participante, diz o início, um segundo diz o meio e um terceiro têm que sugerir um final engraçado para a frase (mas que também seja **consistente** com o que já foi dito).

No caso do “jogo de montar sentenças abertas” da lógica, é necessário escolher primeiro qual será o domínio das variáveis, ou seja, de onde serão retirados os elementos que se encaixarão na frase aberta. Isto ocorre também nos jogos de montar frases ou palavras, onde tipicamente recorreremos às pessoas, coisas, objetos, etc. conhecidos ou onde nos obrigamos a somente usar as palavras presentes num dicionário. Não faz sentido ou, na verdade, simplesmente não é engraçado falarmos sobre pessoas ou coisas que não conhecemos ou entendemos.

Como exemplo, vamos supor o conjunto de móveis que podem pertencer a uma sala de aula: estantes, mesas, cadeiras, quadro, computadores (e seus componentes), etc. Este será o domínio A das nossas sentenças.

Sabendo qual é o domínio então se pode começar a “montar” as sentenças. Em princípio, quaisquer frases que qualificam ou afirmam propriedades sobre os (possíveis) elementos deste domínio podem ser consideradas sentenças sobre estes elementos. No exemplo, poderíamos ter frases como:

- (a.1) “A minha mesa não está firme.”
- (b.1) “Esta é a cadeira que faltava.”
- (c.1) “A cadeira que falta aqui está sobrando lá no canto.”

Estes exemplos apresentam proposições simples, que são sentenças fechadas, sem variáveis. Porém as variáveis poderiam aparecer como espaços:

- (a.2) “A minha \_ \_ \_ não está firme.”

(b.2) “Esta é a \_ \_ \_ \_ que faltava.”

(c.2) “A \_ \_ \_ \_ que falta aqui está sobrando lá no canto.”

Um problema com a estrutura das frases acima é que cada “espaço em branco” é um espaço em branco igual aos outros. Quando existe um só espaço em branco na frase, isto é quando uma variável aparece somente num lugar dentro da sentença, então não há ambigüidade. Porém, quando ela aparece em vários lugares é necessário indicar claramente quem é quem em termos de “espaços em branco”. Embora isto ainda não pareça necessário porque estamos lidando apenas com uma variável, vamos ver que o conceito de sentença aberta pode ser (e é) facilmente estendido para sentenças abertas com múltiplas variáveis. A solução é dar “nome” aos espaços em branco, que deixam de ser espaços e passam a ser variáveis:

(a.3) “A minha  $x$  não está firme.”

(b.3) “Esta é a  $x$  que faltava.”

(c.3) “A  $x$  que falta aqui está sobrando lá no canto.”

Para os  $x$  pertencentes aos móveis da sala de aula.

Para completar o processo de simbolização e deixar claro somente a forma das sentenças, sem se preocupar com seu conteúdo (seu significado), são atribuídos símbolos para as afirmações abertas:

(a.4)  $P(x)$  = “A minha  $x$  não está firme.”

(b.4)  $Q(x)$  = “Esta é a  $x$  que faltava.”

(c.4)  $R(x)$  = “A  $x$  que falta aqui está sobrando lá no canto.”

Que são válidas para o domínio  $A$  que é o conjunto de móveis da sala de aula. Dessa forma as sentenças acima podem ser expressas simplesmente como:

$P(x)$ ,  $Q(x)$  e  $R(x)$  para  $x \in A$ .

Em termos da língua portuguesa, uma sentença simples é formada basicamente por dois elementos: o sujeito e seu predicado. As sentenças simples da língua portuguesa servem para afirmar alguma propriedade (o predicado) sobre alguma pessoa, objeto ou coisa (o sujeito). Por esta razão sentenças abertas também são denominadas simplesmente de **predicados**.

Já as sentenças abertas **formais** são normalmente construídas, considerando-se que o sujeito da frase é substituído por uma variável. Também é definido um domínio para esta variável, dizendo quem são os objetos, pessoas, entidades, coisas, etc. que podem ser representados pela variável. O predicado restante passa a ser então a afirmação que está sendo feita sobre algum sujeito do domínio.

Em termos formais, uma **sentença aberta com uma variável num conjunto  $A$**  ou simplesmente uma **sentença aberta em  $A$** , é uma expressão  $P(x)$  tal que  $P(a)$  é verdadeira ( $V$ ) ou falsa ( $F$ ) para todo elemento  $a$  pertencente ao conjunto  $A$ , ou seja, para todo  $a \in A$ . O conjunto  $A$  também é chamado de domínio da variável  $x$ .

Embora, em princípio sentenças abertas possam ser aplicadas a qualquer domínio conhecido (e às vezes até mesmo desconhecido), é muito comum que estas sentenças

sejam exemplificadas e caracterizadas através de proposições matemáticas, principalmente por causa da precisão e rigor que se consegue obter com exemplos matemáticos.

Na verdade, a definição teórica precisa sobre o significado de uma sentença aberta e sobre o significado das construções que podem ser feitas com elas será feita através da Teoria Elementar dos Conjuntos (que também fundamenta a Matemática).

### **Observação:**

O significado (a *semântica*) que se atribuirá para as sentenças abertas será dado pela especificação de *conjuntos-verdade* correspondentes a estas sentenças. Estes conjuntos-verdade definirão a *extensão* correspondente da sentença na Teoria Elementar dos Conjuntos. Mais adiante será visto que a semântica dos predicados ou das operações lógicas pode ser definida sem a necessidade de se recorrer aos conjuntos da Teoria Elementar dos Conjuntos. Entretanto, por agora é melhor utilizar os conceitos familiares desta teoria para estudar o significado das sentenças abertas e os efeitos dos operadores lógicos sobre estas sentenças.

### **Exemplos:**

São sentenças abertas em  $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  as seguintes expressões:

$$(d) \ x+1 > 8$$

$$(e) \ x \text{ é primo}$$

$$(e) \ x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(f) \ x \text{ é divisor de } 10$$

para os  $x \in N$ .

## **3.2. Conjunto-Verdade de uma Sentença Aberta**

Chama-se **conjunto-verdade** de uma sentença aberta  $P(x)$  num domínio  $A$ , o conjunto de todos os elementos  $a \in A$  tais que  $P(a)$  é uma proposição **verdadeira**. Formalmente o conjunto-verdade pode ser definido como:

$$V_P = \{x \mid x \in A \wedge P(x) = V\}$$

ou, mais simplesmente como:

$$V_P = \{x \in A \mid P(x)\}$$

### **Exemplos:**

(a) O conjunto-verdade de  $P(x) = "x+1 > 8"$  em  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  (conjunto dos números naturais) é dado por:

$$V_P = \{x \in N \mid P(x)\} = \{x \in N \mid x+1 > 8\} = \{8, 9, 10, \dots\} \subset N$$

(b) O conjunto-verdade de  $P(x) = "x+7 < 8"$  em  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  (conjunto dos números naturais) é dado por:

$$V_P = \{x \in \mathbb{N} \mid x+7 < 8\} = \emptyset \subset \mathbb{N}$$

(c) O conjunto-verdade de  $P(x) = "x \text{ é divisor de } 10"$  em  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  (conjunto dos números naturais) é dado por:

$$V_P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é divisor de } 10\} = \{1, 2, 5, 10\} \subset \mathbb{N}$$

(d) O conjunto-verdade de  $P(x) = "x+5 > 3"$  em  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  (conjunto dos números naturais) é dado por:

$$V_P = \{x \in \mathbb{N} \mid x+5 > 3\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$$

Dos exemplos acima se pode tirar algumas conclusões importantes:

(i) O conjunto-verdade de uma sentença aberta com uma variável sempre está contido ou (no máximo) é igual ao domínio  $A$  da sentença:

$$V_P \subseteq A$$

(ii) Se  $P(x)$  é uma sentença aberta em  $A$ , então três casos podem ocorrer:

- (ii.1)  $P(x)$  é verdadeira para todo  $x \in A$ . Neste caso o conjunto-verdade de  $P(x)$  é igual ao próprio domínio  $A$ . Quando isto ocorre se diz que  $P(x)$  exprime uma **condição universal** ou **propriedade universal** no conjunto  $A$ .
- (ii.2)  $P(x)$  é verdadeira para alguns  $x \in A$ . Neste caso o conjunto-verdade de  $P(x)$  é um subconjunto próprio do domínio  $A$ . Quando isto ocorre se diz que  $P(x)$  exprime uma **condição possível** ou **propriedade possível** no conjunto  $A$ .
- (ii.3)  $P(x)$  não é verdadeira para nenhum  $x \in A$ . Neste caso o conjunto-verdade de  $P(x)$  é vazio ( $V_P = \emptyset$ ). Quando isto ocorre se diz que  $P(x)$  exprime uma **condição impossível** ou **propriedade impossível** no conjunto  $A$ .

### Exercício:

(3.1) Determinar o conjunto-verdade em  $\mathbb{N}$  (conjunto dos números naturais) de cada uma das sentenças abertas a seguir:

- |                        |                            |
|------------------------|----------------------------|
| (a) $2x = 6$           | (b) $x-1 < 4$              |
| (c) $x^2 - 5x + 6 = 0$ | (d) $x^2 - x + 2 = 0$      |
| (e) $x^2 - 5x = 0$     | (f) $x - 5 \in \mathbb{N}$ |

### **3.3. Conjunção sobre Sentenças Abertas ( $\wedge$ )**

A conjunção lógica (a operação E lógico, representada pelo símbolo  $\wedge$ ) pode ser aplicada sobre sentenças abertas ou predicados.

Vamos começar a análise da conjunção de sentenças abertas, supondo 2 sentenças abertas bastante simples:

“ $x$  é médico”, “ $x$  é professor”

que podem ser aplicadas sobre o domínio (conjunto) das pessoas vivas atualmente.

Agora se conectarmos ambas as afirmações pelo conectivo E lógico ( $\wedge$ ) fica-se com a expressão:

“ $x$  é médico”  $\wedge$  “ $x$  é professor”

que somente pode ser verdadeira (satisfeita) para as pessoas (os “ $x$ ”) que são ambos médico(a) e professor(a).

No caso das pessoas vivas atualmente (que é um conjunto finito) seria teoricamente possível montar uma tabela listando todas as pessoas e verificar quem é médico e quem é professor e, portanto, descobrir quem atende a ambas as condições:

$x$	$x$ é médico	$x$ é professor	$x$ é médico $\wedge x$ é professor
Pedro	$V$	$F$	$F$
Maria	$V$	$V$	$V$
Carlos	$F$	$F$	$F$
José	$V$	$V$	$V$
Beatriz	$V$	$F$	$F$
...	...	...	...

No caso o significado do operador  $\wedge$  é dado pela tabela-verdade deste operador que já foi usada na lógica proposicional. Quando os  $x$  são substituídos por elementos do conjunto das pessoas, então as proposições “ $x$  é médico” e “ $x$  é professor” se transformam em sentenças fechadas que são as proposições simples da lógica proposicional. No exemplo da tabela, quando  $x$ =Pedro, tem-se “Pedro é médico”, que é uma proposição verdadeira, e “Pedro é professor”, que é uma proposição falsa. A conjunção de ambas fica “Pedro é médico”  $\wedge$  “Pedro é professor” que é uma proposição composta falsa.

Em todas as conjunções de sentenças abertas onde os domínios são finitos pode-se teoricamente montar uma tabela similar a vista acima e verificar, usando as regras da lógica proposicional, qual o valor-verdade da conjunção. Porém o que se pode fazer quando os domínios são infinitos? Que tipo de significado se poderia atribuir para a conjunção de sentenças abertas sobre domínios infinitos?

A solução para este problema é dada usando-se a Teoria Elementar dos Conjuntos para definir o significado da operação de conjunção lógica sobre duas sentenças abertas.

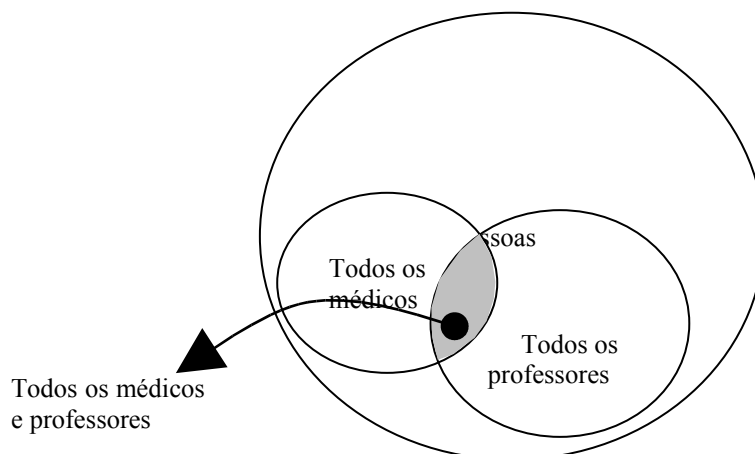
Para tanto é necessário definir qual poderia ser o significado da conjunção em termos de operações sobre conjuntos. Dessa forma, primeiro se deve definir que conjuntos poderão ser usados.

Uma sentença aberta  $P(x)$  já é definida em termos de 2 conjuntos: o domínio  $A$  de suas variáveis e o conjunto-verdade  $V_P$  implicado por  $P(x)$ . Portanto, será sobre estes dois conjuntos que o conceito de conjunção deverá ser definido.

Antes de usar uma linguagem mais formal sobre conjuntos vamos analisar a situação da conjunção de duas sentenças em termos de diagramas gráficos (os Diagramas de Venn)



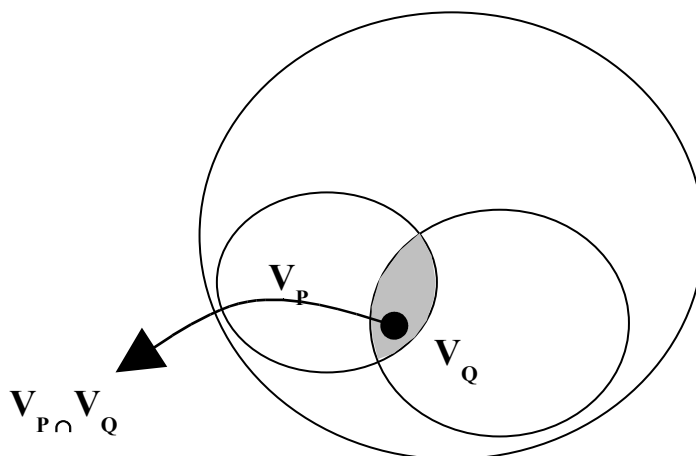
que conseguem expressar os conceitos da teoria dos conjuntos de uma forma muito mais intuitiva. Inicialmente, vamos supor as duas sentenças já vistas anteriormente:



*Figura 1 - Intersecção de Conjuntos como Conjunção Lógica*

Deste desenho deve ficar claro que somente a **intersecção** das duas áreas (e portanto dos dois conjuntos) é que corresponde as pessoas que são ambas médicos e professores. Genericamente, supondo duas sentenças abertas  $P(x)$  e  $Q(x)$  sobre um domínio  $A$ , tem-se que a conjunção de ambas somente pode-ser satisfeita pelos elementos de  $A$  que satisfizerem ambas  $P(x)$  e  $Q(x)$ , isto é, pela **intersecção** dos respectivos conjuntos-verdade.

Graficamente isto pode ser mostrado pelo seguinte diagrama:



*Figura 2 - Um Exemplo de Intersecção como Conjunção*

Ou seja, o conjunto-verdade correspondente a conjunção de duas sentenças abertas é dado pela intersecção dos conjuntos-verdade de ambas sentenças. Formalmente, este conjunto-verdade é definido como:

$$V_{P \wedge Q} = V_P \cap V_Q = \{x \in A \mid P(x)\} \cap \{x \in A \mid Q(x)\}$$

### **Exemplo:**

Sejam as seguintes sentenças abertas em  $\mathbb{Z}$  (conjunto dos número inteiros):

$$P(x) = x^2 + x - 2 = 0$$

$$Q(x) = x^2 - 4 = 0$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} V_{P \vee Q} &= \{x \in Z \mid P(x)\} \cap \{x \in A \mid Q(x)\} \\ &= \{x \in Z \mid x^2 + x - 2 = 0\} \cap \{x \in A \mid x^2 - 4 = 0\} \\ &= \{-2, 1\} \cap \{-2, 2\} \\ &= \{-2\} \end{aligned}$$

### 3.4. Disjunção sobre Sentenças Abertas ( $\vee$ )

A disjunção lógica (a operação OU lógico, representada pelo símbolo  $\vee$ ) também pode ser aplicada sobre sentenças abertas ou predicados.

Para começar vamos supor as 2 sentenças abertas já usadas anteriormente:

“x é médico”, “x é professor”

sobre o domínio das pessoas vivas atualmente. Agora, se conectarmos ambas afirmações pelo conectivo OU lógico ( $\vee$ ) ficaremos com a seguinte expressão:

“x é médico”  $\vee$  “x é professor”

que somente pode ser verdadeira (satisfeita) para as pessoas (os “x”) que são médicas ou pelas pessoas que são professoras ou pelas pessoas que tem ambas profissões (somente não podem ser satisfeita pelas pessoas que não são nem médicas nem professoras).

Da mesma forma que no caso da conjunção também seria teoricamente possível montar uma tabela listando todas as pessoas e verificando quem é médico e quem é professor e, portanto, descobrindo quem atende a uma das condições ou a ambas. Porém, por generalidade, vamos partir direto para a interpretação gráfica em termos da Teoria Elementar dos Conjuntos, ou seja, vamos ver qual o diagrama de Venn apropriado para este caso:

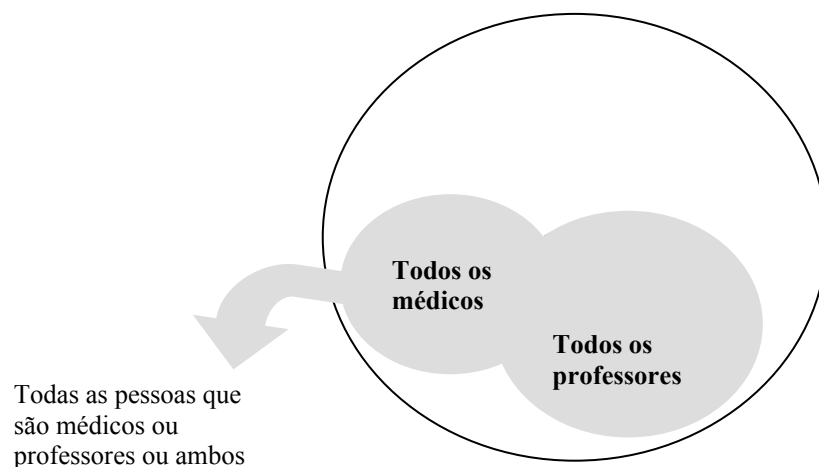
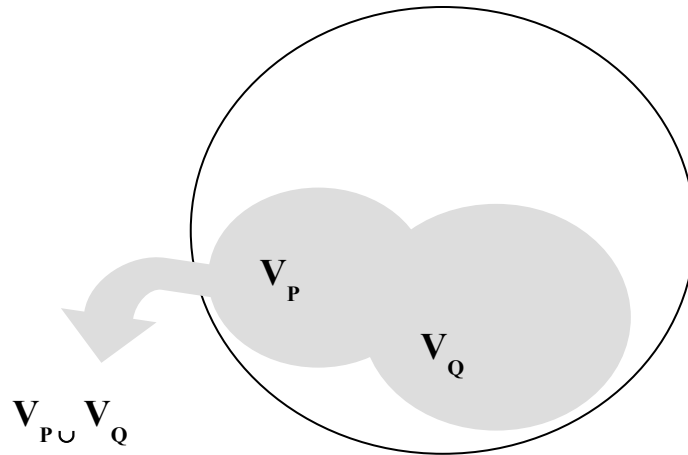


Figura 3 - União de Conjuntos como Disjunção Lógica

Do diagrama deve ficar claro que a **união** das duas áreas (e portanto dos dois conjuntos-verdade) é que corresponde as pessoas que são médicos ou são professores ou ambos. Genericamente, supondo duas sentenças abertas  $P(x)$  e  $Q(x)$  sobre um domínio  $A$ , tem-se que a disjunção de ambas somente pode-ser satisfeita pelos elementos de  $A$  que satisfizerem  $P(x)$  ou  $Q(x)$  ou ambas, isto é, pela **união** dos respectivos conjuntos-verdade. Graficamente isto pode ser mostrado pelo seguinte diagrama:



*Figura 4 - Um Exemplo de União como Disjunção*

Ou seja o conjunto-verdade correspondente a disjunção de duas sentenças abertas é dado pela união dos conjuntos-verdade de ambas sentenças. Formalmente, este conjunto-verdade é definido como:

$$V_{P \vee Q} = V_P \cup V_Q = \{x \in A \mid P(x)\} \cup \{x \in A \mid Q(x)\}$$

### **Exemplo:**

Sejam as seguintes sentenças abertas em  $Z$  (conjunto dos número inteiros):

$$P(x) = x^2 + x - 2 = 0 \qquad Q(x) = x^2 - 4 = 0$$

Tem-se que:

$$\begin{aligned} V_{P \vee Q} &= \{x \in Z \mid P(x)\} \cup \{x \in A \mid Q(x)\} \\ &= \{x \in Z \mid x^2 + x - 2 = 0\} \cup \{x \in A \mid x^2 - 4 = 0\} \\ &= \{-2, 1\} \cup \{-2, 2\} \\ &= \{-2, 1, 2\} \end{aligned}$$

### **Exercício:**

**(3.2)** Determinar o conjunto-verdade em  $A = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$  de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:

**(a)**  $x < 7 \wedge x$  é ímpar

**(b)**  $x$  é par  $\wedge x + 2 \leq 10$

**(c)**  $3 \mid x \wedge x < 8$

**(d)**  $(x+4) \in A \wedge (x^2 - 5) \notin A$

onde  $a \mid b$  é a relação “a divide b sem resto”.

### 3.5. Negação de uma Sentença Aberta ( $\neg$ )

A negação lógica (a operação NÃO lógico, representada pelo símbolo  $\neg$ ) também pode ser aplicada sobre sentenças abertas ou predicados.

Vamos começar considerando a sentença:

“x tem menos de 21 anos”

sobre o conjunto de todas as pessoas. Agora, antepondo a negação lógica sobre esta sentença, temos a expressão:

$\neg$  “x tem menos de 21 anos”

que deve ser satisfeita somente pelas pessoas (os “x”) que não tenham menos de 21 anos, ou seja, que tenham 21 anos ou mais.

Da mesma forma que nos conectivos visto anteriormente, seria teoricamente possível montar a tabela listando todas as pessoas e verificar quem têm menos de 21 anos. Porém, por generalidade, vamos partir direto para a interpretação em termos de diagramas de Venn:

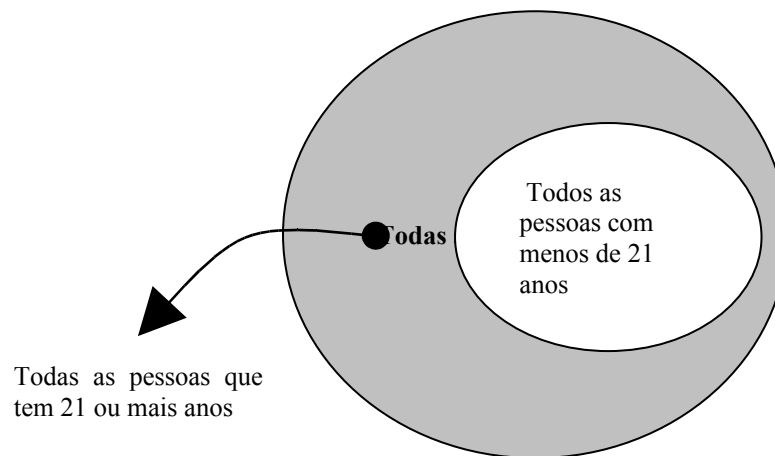


Figura 5 - Complementação de Conjuntos e Negação Lógica

Do diagrama deve ficar claro que a expressão:

$\neg$  “x tem menos de 21 anos”

somente é satisfeita pelos elementos do conjunto de todas as pessoas que **não estão** no conjunto das pessoas que tem menos de 21 anos. Este conjunto, por sua vez, é definido como a diferença entre dois conjuntos: o domínio da sentença que é conjunto de todas as pessoas subtraído do conjunto-verdade da sentença “x tem menos de 21 anos”.

Portanto, supondo uma sentença aberta qualquer  $P(x)$  sobre um domínio  $A$ , tem-se que a negação desta sentença somente pode ser satisfeita pelos elementos de  $A$  que **não** estiverem no conjunto-verdade de  $P(x)$ , isto é, que estiverem no conjunto definido pela diferença entre  $A$  e  $V_P$ . Graficamente isto pode ser mostrado pelo seguinte diagrama:

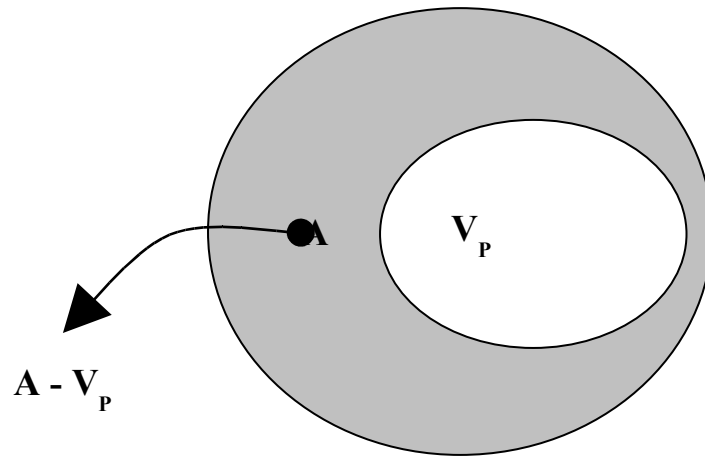


Figura 6 - Um Exemplo de Negação como Complementação

O conjunto-verdade correspondente a negação de uma sentença abertas é dado pela diferença entre o domínio da sentença e o conjunto-verdade desta. Formalmente, este conjunto-verdade é definido como:

$$V_{\neg P} = A - V_P = A - \{x \in A \mid P(x)\}$$

onde a diferença entre conjuntos  $A - B$  é definida como o conjunto formado pelos elementos de  $A$  que não pertencem a  $B$ , isto é:

$$A - B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Uma formulação alternativa para a negação, pode ser dada considerando-se que o conjunto-verdade de  $P(x)$  é um subconjunto de  $A$ , isto é, que  $V_P \subseteq A$ . Neste caso, a negação de uma sentença pode ser interpretada como a **complementação** em  $A$  do conjunto-verdade  $V_P$ . Formalmente fica:

$$V_{\neg P} = C_A V_P = C_A \{x \in A \mid P(x)\}$$

onde a complementação em  $A$  de de um conjunto  $B \subseteq A$  é dada pe subtração de  $B$  de  $A$ :

$$C_A B = A - B$$

### **Exemplo:**

Seja a seguinte sentença aberta em  $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ :

$$P(x) = x^2 \in A$$

cujo conjunto-verdade  $V_P$  é:

$$V_P = \{1, 2, 3\}$$

Sua negação fica:

$$\neg P(x) = \neg(x^2 \in A)$$

O conjunto-verdade desta expressão é dado por:

$$\begin{aligned} V_{\neg P} &= A - V_P \\ &= \{1, 2, 3, \dots, 10\} - \{1, 2, 3\} \\ &= \{4, 5, \dots, 10\} \end{aligned}$$

### 3.6. Demais Operadores

Em relação aos demais operadores da lógica proposicional que também poderiam ser aplicados as sentenças abertas, em particular aos operadores condicional ( $\rightarrow$ ) e bicondicional ( $\leftrightarrow$ ), existem duas abordagens que poderiam ser seguidas:

- Poder-se-ia proceder da mesma forma como estamos trabalhando até aqui, fazendo primeiro a uma análise intuitiva de cada um destes novos operadores e posteriormente refinando esta análise até se obter uma definição formal, em termos da Teoria Elementar dos Conjuntos, para eles.
- Outra abordagem, mais simples e também mais genérica, é assumir que as regras de equivalência da lógica proposicional também valem para as sentenças abertas compostas. Neste caso pode-se usar as equivalências para o condicional e bicondicional para definir a semântica (o significado) destes operadores.

Na verdade como não há nenhum empecilho em assumir que as regras de equivalência da lógica proposicional sejam as mesmas das sentenças abertas compostas, então será esta segunda abordagem que utilizaremos para definir a semântica do condicional e do bicondicional.

#### O Operador Condicional ( $\rightarrow$ )

A regra de equivalência do condicional (ou equivalência da implicação) afirma que:

$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

Quando aplicada as sentenças abertas pode assumir a seguinte forma:

$$P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee Q(x)$$

Dessa forma pode-se definir o conjunto-verdade para a expressão  $P(x) \rightarrow Q(x)$  como:

$$V_{P \rightarrow Q} = V_{\neg P} \cup V_Q = (A - V_P) \cup V_Q = (C_A - V_P) \cup V_Q$$

#### Exemplo:

Supondo que:

$$P(x) = x \mid 12 \qquad Q(x) = x \mid 45$$

para  $x \in \mathbb{N}$  (conjunto dos números naturais)

O conjunto-verdade para  $P(x) \rightarrow Q(x)$  será dado por:

$$\begin{aligned} V_{P \rightarrow Q} &= (\mathbb{N} - V_P) \cup V_Q \\ &= (\mathbb{N} - \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 12\}) \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 45\} \\ &= (\mathbb{N} - \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}) \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\} \\ &= \mathbb{N} - \{2, 4, 6, 12\} \end{aligned}$$

#### O Operador Bicondicional ( $\leftrightarrow$ )

O próprio operador bicondicional é definido em termos do condicional:

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow P \rightarrow Q \wedge Q \rightarrow P$$

que pode ser reescrito, pela equivalência do condicional, em :

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$$

Agora esta regra, quando aplicada as sentenças abertas pode assumir a seguinte forma:

$$P(x) \leftrightarrow Q(x) \Leftrightarrow (\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg Q(x) \vee P(x))$$

Dessa forma o conjunto-verdade para a expressão  $P(x) \leftrightarrow Q(x)$  é dado por:

$$\begin{aligned} V_{P \leftrightarrow Q} &= (V_{\neg P} \cup V_Q) \cap (V_{\neg Q} \cup V_P) \\ &= ((A - V_P) \cup V_Q) \cap ((A - V_Q) \cup V_P) \\ &= ((C_A \setminus V_P) \cup V_Q) \cap ((C_A \setminus V_Q) \cup V_P) \end{aligned}$$

### **Exemplo:**

Supondo que:

$$P(x) = x \mid 6 \qquad Q(x) = x \mid 15$$

para  $x \in \mathbb{N}$  (conjunto dos números naturais), temos:

$$\begin{aligned} (N - V_P) \cup V_Q &= (N - \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 6\}) \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 15\} \\ &= (N - \{1, 2, 3, 6\}) \cup \{1, 3, 5, 15\} \\ &= N - \{2, 6\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (N - V_Q) \cup V_P &= (N - \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 15\}) \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 6\} \\ &= (N - \{1, 3, 5, 15\}) \cup \{1, 2, 3, 6\} \\ &= N - \{5, 15\} \end{aligned}$$

e por conseguinte:

$$\begin{aligned} V_{P \leftrightarrow Q} &= (N - \{2, 6\}) \cap (N - \{5, 15\}) \\ &= N - \{2, 5, 6, 15\} \end{aligned}$$

### **3.7. Equivalências Tautológicas**

Assim como assumimos as equivalências do condicional e do bicondicional, as outras equivalências da lógica proposicional se aplicam as sentenças abertas compostas:

- A **conjunção** e a **disjunção** continuam a ser **comutativas** e **associativas**, e cada uma delas é **distributiva** em relação a outra.
- A propriedade da **dupla-negação** continua sendo válida, assim como as **Leis de De Morgan**.
- A **contraposição** e a **prova-condicional** também continuam sendo válidas.

Entretanto, as regras de **identidade** assumem um novo aspecto. Agora temos as seguintes regras:

- (i) A conjunção de uma sentença aberta com uma outra que exprime uma **condição universal** (isto é uma condição sempre verdadeira) é equivalente a primeira.
- (ii) A **disjunção** de uma sentença aberta com uma outra que exprime uma **condição impossível** (isto é uma condição sempre falsa) é equivalente a primeira.

### 3.8. Predicados com duas Variáveis e seu Conjunto-Verdade

Até agora foram apresentados e tratados apenas predicados como  $P(x)$  e  $Q(y)$  que utilizam somente uma variável. Predicados deste tipo são denominados de predicados *unários*. Porém estes não são os únicos tipos de predicados possíveis. Na verdade é possível se definir predicados que utilizem duas (ou mais variáveis) pertencentes ao mesmo domínio ou a domínios diferentes.

Predicados de duas variáveis são chamados *binários*. Predicados que utilizem duas variáveis também podem ser denominados de *relações* entre estas variáveis, porque eles definem uma relação entre os elementos de uma variável com a outra.

O significado atribuído para predicados de duas variáveis definido através do *produto cartesiano* dos domínios de cada uma das variáveis.

O produto cartesiano de dois conjuntos:  $A \times B$  é o conjunto formado por todas as *duplas* ordenadas  $(a, b)$  onde  $a \in A$  e  $b \in B$ . Supondo que  $A$  e  $B$  sejam usados como domínios individuais das duas variáveis do predicado, então pode-se considerar como o domínio conjunto do predicado como sendo o produto cartesiano destes domínios individuais:  $A \times B$ .

Dessa forma uma **sentença aberta ou predicado com duas variáveis num domínio  $A \times B$** , ou simplesmente um **predicado em  $A \times B$** , é uma expressão  $P(x, y)$  tal que  $P(a, b)$  é verdadeira ( $V$ ) ou falsa ( $F$ ) para toda dupla  $(a, b) \in A \times B$ .

O **conjunto-verdade** de uma sentença aberta  $P(x, y)$  no domínio  $A \times B$  é o conjunto de todas as duplas  $(a, b) \in A \times B$  tais que  $P(a, b)$  é uma proposição **verdadeira**. Formalmente este conjunto-verdade pode ser definido como:

$$V_P = \{(x, y) \in A \times B \mid P(x, y)\}$$

#### Exemplo:

O conjunto-verdade de  $P(x, y) = "x + y \leq 3"$  para  $x$  e  $y$  pertencentes ao conjunto  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  dos números naturais é dado por:

$$V_P = \{(x, y) \in N \times N \mid P(x, y)\} = \{(x, y) \in N \times N \mid x + y \leq 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$



### 3.9. Predicados com $n$ Variáveis e seu Conjunto-Verdade

Predicados de mais de duas variáveis também são possíveis. Na verdade, basta generalizar a idéia de produto cartesiano usada para definir os domínios dos predicados de duas variáveis para o caso em que são usadas 3 ou mais variáveis, ou seja, é possível se definir predicados que utilizem qualquer números de variáveis (pertencentes ao mesmo domínio ou a domínios diferentes).

Predicados de duas variáveis são chamados *binários*. Predicados de três variáveis são predicados *ternários* e assim por diante. No caso geral, predicados que utilizem  $n$  variáveis são chamados de predicados *n-ários*. Da mesma forma que no caso dos predicados binários, quaisquer predicados que utilizem duas ou mais variáveis também podem ser denominados de *relações* entre estas variáveis.

O significado atribuído para predicados  $n$ -ários é definido através do *produto cartesiano* dos domínios das suas variáveis.

O produto cartesiano de 2 conjuntos:  $A \times B$  é o conjunto formado por todas as *duplas* ordenadas  $(a, b)$  onde  $a \in A$  e  $b \in B$ . Generalizando para o caso de  $n$  conjuntos  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , tem-se como produto cartesiano o conjunto das *n-uplas*  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  onde cada  $a_i \in A_i$  para  $1 \leq i \leq n$ .

Supondo  $n$  conjuntos primitivos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  que serão usados como domínios individuais destas variáveis, pode-se então considerar como o domínio conjunto de todas as variáveis o conjunto resultante do produto cartesiano destes conjuntos primitivos:  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$

Dessa forma uma **sentença aberta ou predicado com  $n$  variáveis num domínio**  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , ou simplesmente um **predicado em**  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ , é uma expressão  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tal que  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  é verdadeira ( $V$ ) ou falsa ( $F$ ) para toda  $n$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ .

O **conjunto-verdade** de uma sentença aberta  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  no domínio  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  é o conjunto de todas as  $n$ -uplas  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  tais que  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  é uma proposição **verdadeira**. Formalmente este conjunto-verdade pode ser definido como:

$$V_P = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \mid P(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$$

#### Exemplo:

O conjunto-verdade de  $Q(x,y,z) = "y+x \leq z"$  para  $x \in A$ ,  $y \in B$  e  $z \in C$ , com  $A=\{1,2\}$ ,  $B=\{2,3\}$  e  $C=\{3,4\}$ , é dado por:

$$V_Q = \{(x,y,z) \in A \times B \times C \mid Q(x,y,z)\} = \{(x,y,z) \in A \times B \times C \mid y+x \leq z\}$$

Mas como:

$$\begin{aligned} A \times B \times C &= \{1, 2\} \times \{2, 3\} \times \{3, 4\} = \\ &\{(1,2,3), (1,3,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,2,3), (2,3,3), (2,2,4), (2,3,4)\} \end{aligned}$$

Tem-se que:

$$\{(x,y,z) \in A \times B \times C \mid y+x \leq z\} = \{(1,2,3), (1,2,4), (2,2,4)\}$$

Portanto:

$$V_Q = \{(1,2,3), (1,2,4), (2,2,4)\}$$

### 3.10. Exercícios sobre Sentenças Abertas

(3.3) Determinar o conjunto-verdade em  $A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:

- |                                    |   |
|------------------------------------|---|
| (a) $x^2 - 3x = 0 \vee x^2 = x$    | (b) $x$ é par $\vee x^2 < 9$            |
| (c) $x$ é primo $\vee (x+5) \in A$ | (d) $x^2 \geq 16 \vee x^2 - 6x + 5 = 0$ |

(3.4) Supondo  $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ , determinar o conjunto-verdade de:

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| (a) $\neg(x \leq 3)$          | (b) $\neg(x \text{ é ímpar})$ |
| (c) $\neg(x \mid 12)$         | (d) $\neg(x+1) \in A$         |
| (e) $\neg(x \text{ é primo})$ | (f) $\neg(x^2 - 3x = 0)$      |

(3.5) Sejam  $P(x)$ ,  $Q(x)$  e  $R(x)$  sentenças abertas em  $A$ . Expressar o conjunto-verdade das seguintes sentenças compostas em termos dos conjuntos-verdade de  $P(x)$ ,  $Q(x)$  e  $R(x)$ :

- |  |   |
|--|---|
| (a) $P(x) \rightarrow (Q(x) \vee \neg R(x))$                 | (b) $\neg(P(x) \vee Q(x))$                          |
| (c) $\neg P(x) \rightarrow \neg Q(x)$                        | (d) $P(x) \rightarrow (\neg R(x) \rightarrow Q(x))$ |
| (e) $(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow P(x))$ |   |

(3.6) Dados os conjuntos  $A=\{2, 3, 5\}$  e  $B=\{3, 6, 8, 11\}$  determinar o conjunto-verdade da sentença aberta “ $x \mid y$ ” ( $x$  divide  $y$  sem resto) em  $A \times B$ .

(3.7) Dados os conjuntos  $A=\{-2, 0, 1, 2\}$  e  $B=\{-1, 0, 3\}$  determinar o conjunto-verdade da sentença aberta “ $x + y < 1$ ” em  $A \times B$ .

(3.8) Determinar o conjunto-verdade em  $\mathbb{Z}$  (conjunto dos números inteiros) de cada uma das sentenças abertas a seguir:

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| (a) $x^2 - 9 = 0$   | (b) $x^2 \leq 3$    |
| (c) $3x^2 - 12 = 0$ | (d) $2x^2 + 5x = 0$ |
| (e) $ 2x - 1  = 5$  |                     |

(3.9) Dados os conjuntos  $A=\{1, 3, 4\}$  e  $B=\{2, 3, 5\}$  determinar o conjunto-verdade da sentença aberta “ $x + y > 5$ ” em  $A \times B$ .

(3.10) Determinar o conjunto-verdade da sentença aberta “ $x + 3y = 12$ ” em  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , sendo  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais.

(3.11) Determinar o conjunto-verdade da sentença aberta “ $3 \mid (x-y)$ ” em  $A \times A$ , sendo  $A=\{2, 3, 4, 5, 6\}$ , onde  $a \mid b$  é a relação “ $a$  divide  $b$  sem resto”.

**(3.12)** Determinar o conjunto-verdade em  $A=\{1,4,9,10,11\}$  de cada uma das sentenças abertas a seguir:

- (a)  $(x+1) \in A$   
 (c)  $x-2$  é primo

- (b)  $x+3$  é ímpar  
 (d)  $x^2 - 3x + 2 = 0$

**(3.13)** Determinar o conjunto-verdade em  $A=\{-3, -3, -1, 0, 1, 2, 3\}$  de cada uma das seguintes sentenças abertas compostas:

- (a)  $(x \text{ é par}) \rightarrow (x^2 - 1 = 0)$   
 (c)  $((x+5) \notin A) \rightarrow (x < 0)$

- (b)  $(x \mid 12) \rightarrow (x \text{ é primo})$   
 (d)  $(x^2 - 1 \neq 0) \rightarrow (x^2 + 4x + 3 = 0)$

onde  $a \mid b$  é a relação “a divide b sem resto”.

**(3.14)** Sejam as seguintes sentenças abertas em  $\mathbb{Z}$  (conjunto dos números inteiros):

- (a)  $P(x) = “2x - \leq 0”$  e  $Q(x) = “x + 1 \geq 0”$   
 Determinar  $V_{P \wedge Q}$  e  $V_{P \rightarrow Q}$ .

- (b)  $P(x) = “-3x + 3 \geq 0”$  e  $Q(x) = “5x + 2 > 0”$   
 Determinar  $V_{P \wedge Q}$ ,  $V_{\neg P}$  e  $V_{\neg Q}$ .

## Capítulo 4

# Quantificadores

---

Quantificadores são **operadores** lógicos aplicados a **uma variável** e a **uma expressão** (uma sentença aberta simples ou composta).

Os quantificadores foram definidos para capturar conceitos da linguagem natural como:

- Para todo mundo ...
- Não tem ninguém aqui que ...
- Todos aqui ...
- Tem alguém que poderia ...
- Qualquer um que ...
- Existe pelo menos um de nós ...

Estas orações exprimem afirmações que são verdadeiras para vários elementos do domínio. No caso da lógica de predicados somente são considerados dois tipos de afirmações sobre vários elementos de um domínio:

- Afirmações universais, que devem ser válidas para todos os elementos de um domínio;
- Afirmações existenciais, que devem ser válidas para pelo menos um dos elementos do domínio.

Para cada um destes tipos de afirmações, corresponde um diferente tipo de quantificador:

- Quantificadores universais, para representar as afirmações universais.
- Quantificadores existenciais, para representar as afirmações existenciais.

### 4.1. Quantificador Universal

O quantificador universal é usado para representar as afirmações universais, que no Português são expressas por orações similares a:

- Para todo mundo ...
- Todos aqui ...
- Qualquer um que ...

Ele deve ser aplicado sobre uma sentença aberta  $P(x)$  definida para um conjunto  $A$ .

Agora vamos supor que  $V_P$  seja o conjunto-verdade de  $P(x)$ . Dessa forma quando  $V_P$  for igual a  $A$  (isto é  $V_P=A$ ) então **todos** os elementos de  $A$  irão satisfazer  $P(x)$ , ou seja, para

todos os elementos de  $A$ ,  $P(x)$  deve ser verdadeira. Isto pode ser expresso um pouco mais formalmente como:

**Para todo**  $x \in A$ ,  $P(x)$  é verdadeira, ou ainda,  
**qualquer que seja** o  $x \in A$ , tem-se que  $P(x)$  é verdadeira.

Estas afirmações semi-formais, são completamente simbolizadas por:

$$(\forall x \in A) (P(x))$$

que, as vezes é simplificado para:

$$(\forall x) (P(x))$$

quando o domínio  $A$  está claro pelo contexto ou é desnecessário.

Pela definição que demos acima para a quantificação universal deve ter ficado claro que o significado deste operador, em termos do domínio e do conjunto-verdade de uma sentença  $P(x)$ , é o de afirmar uma igualdade entre ambos conjuntos, isto é, afirmação:

$$(\forall x \in A) (P(x))$$

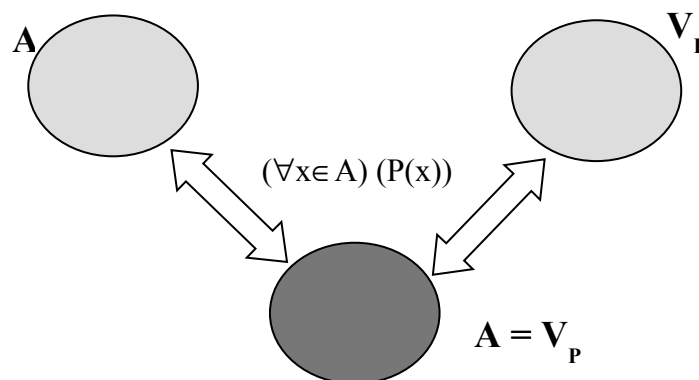
é equivalente a dizer que:

$$V_P = A$$

ou seja,

$$(\forall x \in A) (P(x)) \Leftrightarrow V_P = A$$

Graficamente esta relação pode ser representada como:



*Figura 7 - Quantificação Universal, Domínio e Conjunto Verdade*

É importante salientar que enquanto  $P(x)$  é uma sentença aberta, a sentença quantificada  $(\forall x \in A) (P(x))$  **não é mais uma sentença aberta**. A quantificação “fecha” uma sentença aberta, transformando-a numa proposição simples que pode ser verdadeira ou falsa no domínio  $A$ , dependendo do conjunto-verdade  $V_P$  ser ou não igual ao domínio  $A$ .

Em outras palavras, dada uma sentença aberta  $P(x)$  num domínio, o operador  $\forall$  representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta  $P(x)$  numa proposição que é verdadeira ou não dependendo de  $P(x)$  ser ou não uma condição universal sobre o domínio.

Em particular, quando o número de elementos do domínio  $A$  é finito, com  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , então é óbvio que a proposição  $(\forall x \in A) (P(x))$  é **equivalente** à conjunção das  $n$  proposições  $P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)$ :

$$(\forall x \in A) (P(x)) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \dots \wedge P(a_n)$$

### Exemplos:

Afirmações universais válidas (verdadeiras):

- $(\forall x \in H) (x \text{ é mortal})$ , para  $H$  o conjunto de seres humanos.
- $(\forall x \in N) (x+2 > x)$ , para  $N$  o conjunto dos números naturais.
- $(\forall x \in A) (x < 7)$ , para  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Afirmações universais inválidas (falsas):

- $(\forall x \in H) (x \text{ é mãe})$ , para  $H$  o conjunto de seres humanos.
- $(\forall x \in N) (x+2 > 2x)$ , para  $N$  o conjunto dos números naturais.
- $(\forall x \in A) (x \in N)$ , para  $A = \{0, 1, 2, 3, -3, 2.5, 4, 0.999, \pi\}$

## 4.2. Quantificador Existencial

O quantificador existencial é usado para representar as afirmações existenciais, que no Português são expressas por orações similares a:

- Tem alguém que poderia ...
- Para algum destes ...
- Existe pelo menos um de nós ...

Ele deve ser aplicado sobre uma sentença aberta  $P(x)$  definida para um conjunto  $A$ .

Agora vamos supor que  $V_P$  seja o conjunto-verdade de  $P(x)$ . Dessa forma quando  $V_P$  não for igual ao conjunto vazio  $\emptyset$  (isto é  $V_P \neq \emptyset$ ) então com certeza **existe algum** elemento de  $A$  que irá satisfazer  $P(x)$ , ou seja, para algum elemento de  $A$ ,  $P(x)$  deve ser verdadeira. Isto pode ser expresso um pouco mais formalmente como:

**Para algum**  $x \in A$ ,  $P(x)$  é verdadeira, ou ainda,  
**existe pelo menos um**  $x \in A$ , no qual  $P(x)$  é verdadeira.

Estas afirmações semi-formais, são completamente simbolizadas por:

$$(\exists x \in A) (P(x))$$

que, as vezes é simplificado para:

$$(\exists x) (P(x))$$

quando o domínio  $A$  está claro pelo contexto ou é desnecessário.

Pela definição que demos acima para a quantificação existencial deve ter ficado claro que o significado deste operador, em termos do domínio e do conjunto-verdade de uma sentença  $P(x)$ , é o de afirmar que o conjunto-verdade não pode ser vazio, isto é, afirmação:

$$(\exists x \in A) (P(x))$$

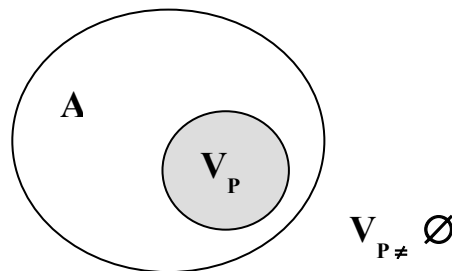
é equivalente a dizer que:

$$V_P \neq \emptyset$$

ou seja,

$$(\exists x \in A) (P(x)) \Leftrightarrow V_P \neq \emptyset$$

Graficamente esta relação pode ser representada como:



*Figura 8 - Quantificação Existencial, Domínio e Conjunto Vazio*

Da mesma forma que no caso do quantificador universal, também no caso do quantificador existencial tem-se que, embora  $P(x)$  seja uma sentença aberta, a sentença quantificada  $(\exists x \in A) (P(x))$  **não é mais uma sentença aberta**. A quantificação “fecha” uma sentença aberta, transformando-a numa proposição simples que pode ser verdadeira ou falsa no domínio  $A$ , dependendo de  $V_P$  ser ou não vazio.

Em outras palavras, dada uma sentença aberta  $P(x)$  num domínio, o operador  $\exists$  representa uma operação lógica que transforma a sentença aberta  $P(x)$  numa proposição que é verdadeira ou não dependendo de  $P(x)$  ser ou não uma condição possível sobre o domínio.

Em particular, quando o número de elementos do domínio  $A$  é finito, com  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , então é óbvio que a proposição  $(\exists x \in A) (P(x))$  é **equivalente** à disjunção das  $n$  proposições  $P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)$ :

$$(\exists x \in A) (P(x)) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \dots \vee P(a_n)$$

### Exemplos:

Afirmações existenciais válidas (verdadeiras):

$(\exists x \in H) (x \text{ é pai})$ , para  $H$  o conjunto de seres humanos.  
 $(\exists x \in \mathbb{N}) (x+2 > 2x)$ , para  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais.  
 $(\exists x \in A) ((500x + 3) \in A)$ , para  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Afirmações existenciais inválidas (falsas):

$(\exists x \in H) (x \text{ é mãe} \wedge x \text{ é homem})$ , para  $H$  o conjunto de seres humanos.  
 $(\exists x \in \mathbb{N}) (x+1 = x)$ , para  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números naturais.

### Exercício:

(4.1) Sendo  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais, determinar o valor lógico das seguintes expressões:

- |  |  |
|--|--|
| (a) $(\forall x \in \mathbb{R}) ( x  = x)$ | (b) $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 = x)$   |
| (c) $(\exists x \in \mathbb{R}) ( x  = 0)$ | (d) $(\exists x \in \mathbb{R}) (x + 2 = x)$ |
| (e) $(\forall x \in \mathbb{R}) (x+1 > x)$ | (f) $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 = x)$   |

Para  $|x|$  a função **módulo de  $x$** , que é calculada como:

$|x| = x$ , se  $x \geq 0$   
 $|x| = -x$ , se  $x < 0$

### 4.3. Variáveis Quantificadas (Aparentes) e Variáveis Livres

Quando um quantificador incide sobre uma variável dentro de uma expressão lógica formada pela composição de sentenças abertas, então se diz que esta variável é uma **variável quantificada** ou então uma **variável aparente**. Por outro lado, se uma variável numa dada expressão lógica não tiver nenhum quantificador previamente associada a ela, então se diz que ela é uma **variável livre**.

O termo variável aparente dado as variáveis quantificadas vem do fato que uma variável quantificada não se comporta realmente como uma variável, ou seja, ela está comprometida pelo quantificador a uma dada associação universal ou existencial com os elementos do domínio. Não se esqueça que uma sentença aberta quantificada não é realmente uma sentença aberta, mas uma proposição lógica fechada que pode ser apenas verdadeira ou falsa.

Um princípio simples, mas válido para a manipulação de expressões lógicas ou fórmulas compostas de sentenças quantificadas, afirma que todas as vezes que uma variável quantificada é substituída, em todos os lugares onde aparece numa expressão, por outra variável que não apareça nesta mesma expressão, então a expressão resultante é equivalente.

Este princípio garante a equivalência das seguintes fórmulas lógicas:

$(\forall \text{pessoa}) (\text{pessoa é mortal}) \Leftrightarrow (\forall x) (x \text{ é mortal}) \Leftrightarrow (\forall \text{coisa}) (\text{coisa é mortal}) \Leftrightarrow \dots$   
 $(\exists \text{pessoa}) (\text{pessoa foi à Lua}) \Leftrightarrow (\exists x) (x \text{ foi à Lua}) \Leftrightarrow (\exists \text{coisa}) (\text{coisa foi à Lua}) \Leftrightarrow \dots$



#### 4.4. Negação de Fórmulas com Quantificadores

Qualquer expressão ou fórmula lógica quantificada também pode ser precedida do operador de negação ( $\neg$ ). Por exemplo, considerando o domínio das pessoas atualmente vivas as expressões formais:

$$(\forall x) (x \text{ fala Inglês})$$

$$\neg (\forall x) (x \text{ fala Inglês})$$

$$(\exists x) (x \text{ foi à Antártida})$$

$$\neg (\exists x) (x \text{ foi à Antártida})$$

poderiam ser enunciadas, respectivamente, como:

Todas as pessoas falam inglês.

Nem todas as pessoas falam inglês.

Alguém foi a Antártida.

Ninguém foi a Antártida.

Analisando estas expressões deve ficar claro algumas equivalências intuitivas. Em primeiro lugar afirmar que nem todas as pessoas falam Inglês é claramente equivalente a afirmar que existe alguém que não fala Inglês. Formalizando temos:

$$\neg (\forall x) (x \text{ fala Inglês}) \Leftrightarrow (\exists x) \neg (x \text{ fala Inglês})$$

E em segundo lugar afirmar que ninguém foi à Antártida é obviamente equivalente a afirmar que para todas as pessoas vivas atualmente não é verdade que elas tenham ido à Antártida. Formalizando este argumento temos:

$$\neg (\exists x) (x \text{ foi à Antártida}) \Leftrightarrow (\forall x) \neg (x \text{ foi à Antártida})$$

Esta análise pode ser generalizada pelas seguintes regras:

- (i) A **negação** da fórmula  $(\forall x)(P(x))$  é equivalente a afirmação de que, **pelo menos para um**  $x \in A$ , tem-se que  $P(x)$  é falsa, ou então que  $\neg P(x)$  é verdadeira. Portanto deve valer a seguinte equivalência:

$$\neg (\forall x \in A) (P(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in A) \neg (P(x))$$

- (ii) Da mesma forma negar a fórmula  $(\exists x)(P(x))$  equivale a afirmar que para todos os  $x \in A$ , a sentença  $P(x)$  deve ser falsa, ou então que a sentença  $\neg P(x)$  deve ser verdadeira, o que nos leva a seguinte equivalência:

$$\neg (\exists x \in A) (P(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in A) \neg (P(x))$$

#### 4.5. Quantificação Múltipla e Parcial

Uma fórmula pode ter tantos quantificadores quanto o número de variáveis diferentes dentro da fórmula. Assim, para  $R$  o conjunto dos números reais, são possíveis fórmulas como:

$$(\exists x \in R) (\exists y \in R) (x^2 + y^2 + 2x + xy > 0)$$

$$(\exists x \in R) (\forall y \in R) (\exists z \in R) (x^2 + y^2 + z^3 - yz + x = 0)$$

que estão totalmente quantificadas, isto é, que não tem nenhuma variável sem quantificação

Contudo, nem todas as variáveis de uma fórmula precisam estar quantificadas. Quando nem todas as variáveis de uma fórmula estão quantificadas se diz que esta fórmula está **parcialmente quantificada**. Por exemplo as seguintes fórmulas em  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais:

$$(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 + y^2 = 0)$$

$$(\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}) (x^2 + y^2 + 2z = 0)$$

estão parcialmente quantificadas uma vez que existe pelo menos uma variável em cada fórmula que não foi previamente quantificada.

**Importante:** uma fórmula **parcialmente quantificada** continua sendo uma **sentença aberta** nas variáveis que não foram quantificadas.

#### 4.6. Comutatividade de Quantificadores

Os quantificadores de uma dada fórmula somente podem ser comutados, de acordo com as seguintes regras:

(i) Quantificadores de **mesmo tipo podem ser comutados**.

Portanto a seguinte equivalência é válida:

$$(\exists x) (\exists y) (P(x,y)) \Leftrightarrow (\exists y) (\exists x) (P(x,y))$$

e também é válida a equivalência:

$$(\forall x) (\forall y) (P(x,y)) \Leftrightarrow (\forall y) (\forall x) (P(x,y))$$

e outras equivalências similares.

(ii) Quantificadores de **tipos distintos não podem ser comutados**.

#### 4.7. Simbolização de Enunciados Categóricos

A combinação das sentenças abertas (predicados) com quantificadores dá origem a Lógica de Predicados (também chamada de Lógica de Primeira Ordem) que será estudada com mais detalhes no próximo capítulo. Porém, esta Lógica de Predicados deve muito de suas características à lógica tradicionalmente estudada nos textos de Filosofia, que trabalha com a noção de **enunciados categóricos**. Esta lógica tradicional tem suas origens na Lógica Aristotélica e também na Lógica Escolástica, criada pelos filósofos medievais.

Um enunciado categórico é uma afirmação (uma frase) da linguagem natural, mas que possui uma estrutura mais ou menos formal. Estes enunciados permitem definir em linguagem natural expressões formadas por quantificadores e predicados. Os componentes básicos que formam um enunciado categórico são os tradicionais elementos estudados na gramática das linguagens naturais: o *sujeito* e o *predicado* da frase. Também compõem um enunciado categórico palavras que definem o tipo de quantificação sendo usada no enunciado.

Existem quatro tipos clássicos de enunciados categóricos, tradicionalmente identificados pelas letras A, E, I e O:

Tipo	Formato Geral do Enunciado
A	Todo $S$ é $P$
E	Nenhum $S$ é $P$
I	Algum $S$ é $P$
O	Algum $S$ não é $P$

Nestes enunciados  $S$  representa o sujeito da frase e  $P$  o predicado. O predicado representa sempre uma classe de elementos ou de entidades ao qual o sujeito deve pertencer. Assim, são exemplos válidos de enunciados as seguintes frases, uma para cada tipo de enunciado:

- (A) Todo *ser humano* é *mortal*.
- (E) Nenhuma *fruta* é *de gosto amargo*.
- (I) Algum *pássaro* é *capaz de nadar*.
- (O) Algum *móvel da sala* não é *feito de madeira*.

A transformação deste tipo de enunciado para a lógica simbólica é feita levando em conta primeiro que todos os enunciados categóricos forçam que entidades que satisfazem as características ou propriedades do sujeito devem também satisfazer as características ou propriedades do predicado.

Por exemplo, ao se enunciar que Todo  $S$  é  $P$ , na verdade se está afirmando que toda entidade que é  $S$  também é  $P$ . Isto leva a uma primeira transformação dos enunciados acima em um formato um pouco mais formal, onde estas entidades são indicadas pela variável  $x$ :

- (A') Todo *ser humano* é *mortal*.  
 Todo  $x$  que é *ser humano*, também é *mortal*.
- (E') Nenhuma *fruta* é *amarga*.  
 Nenhum  $x$  que é *fruta* também é *de gosto amargo*.
- (I') Algum *pássaro* é *capaz de nadar*.  
 Algum  $x$  que é *pássaro* também é *capaz de nadar*.
- (O') Algum *móvel da sala* não é *feito de madeira*.  
 Algum  $x$  que é *móvel da sala* também não é *feito de madeira*.

As afirmações acima estão mais próximas da lógica simbólica, mas ainda falta esclarecer alguns detalhes relativos ao tipo de quantificador empregado em cada tipo de enunciado e também ao significado atribuído a palavra “também” usada nas afirmações acima.

As palavras “todo” e “algum” usadas acima são referências diretas, respectivamente, aos quantificadores universais (“para todo”) e existencial (“existe pelo menos um”). Porém a forma (E) “Nenhum  $S$  é  $P$ ” não designa diretamente um quantificador, mas

corresponde, na verdade, a afirmar que todos os  $x$  que são  $S$  não podem ser  $P$ . Isto permite a utilização do quantificador universal para representar o tipo (E).

A palavra “também” indica que há uma relação lógica entre a afirmação relativa ao sujeito e a afirmação relativa ao predicado. Neste caso, considera-se que esta relação seja de consequência (implicação) lógica no caso das quantificações universais e de conjunção lógica no caso das quantificações existenciais.

Levando isto em conta os exemplos acima podem ser transformados nas seguintes afirmações, quase simbólicas:

(A'') Todo *ser humano* é *mortal*.

Para todo  $x$ , se  $x$  é *ser humano*, então  $x$  é *mortal*.

(E'') Nenhuma *fruta* é *amarga*.

Para todo  $x$ , se  $x$  é *fruta*, então  $x$  não é *de gosto amargo*.

(I'') Algum *pássaro* é *capaz de nadar*.

Existe pelo menos um  $x$  tal que  $x$  é *pássaro* e  $x$  é *capaz de nadar*.

(O'') Algum *móvel da sala* não é *de madeira*.

Existe pelo menos um  $x$  tal que  $x$  é *móvel da sala* e  $x$  não é *feito de madeira*.

O resultado final pode ser totalmente simbolizado, se assumirmos que  $U$  seja o conjunto universo (domínio) para os enunciados categóricos acima e que os predicados simbólicos  $H(x)$ ,  $M(x)$ ,  $F(x)$ ,  $A(x)$ ,  $P(x)$ ,  $N(x)$ ,  $S(x)$  e  $D(x)$  representem, respectivamente, as sentenças abertas “ $x$  é *ser humano*”, “ $x$  é *mortal*”, “ $x$  é *fruta*”, “ $x$  é *de gosto amargo*”, “ $x$  é *pássaro*”, “ $x$  é *capaz de nadar*”, “ $x$  é *móvel da sala*” e “ $x$  não é *feito de madeira*”:

(A''') Todo *ser humano* é *mortal*.

$(\forall x \in U)(H(x) \rightarrow M(x))$

(E''') Nenhuma *fruta* é *amarga*.

$(\forall x \in U)(F(x) \rightarrow \neg A(x))$

(I''') Algum *pássaro* é *capaz de nadar*.

$(\exists x \in U)(P(x) \wedge N(x))$

(O''') Algum *móvel da sala de aula* não é *de madeira*.

$(\exists x \in U)(S(x) \wedge \neg D(x))$

## 4.8. Exercícios sobre Quantificadores

(4.2) Dar a negação das seguintes proposições (as mesmas do exercício (4.1)):

(a)  $(\forall x \in \mathbb{R}) (|x| = x)$

(b)  $(\exists x \in \mathbb{R}) (x^2 = x)$

(c)  $(\exists x \in \mathbb{R}) (|x| = 0)$

(d)  $(\exists x \in \mathbb{R}) (x + 2 = x)$

(e)  $(\forall x \in \mathbb{R}) (x+1 > x)$

(f)  $(\forall x \in \mathbb{R}) (x^2 = x)$

Para  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais e para  $|x|$  a função **módulo de x**, que é calculada como:

$$\begin{aligned} |x| &= x, \text{ se } x \geq 0 \\ |x| &= -x, \text{ se } x < 0 \end{aligned}$$

(4.3) Sendo  $A = \{2, 3, \dots, 8, 9\}$  dar um contra-exemplo para as afirmações:

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| (a) $(\forall x \in A) (x + 5 < 12)$ | (b) $(\forall x \in A) (x \text{ é primo})$ |
| (c) $(\forall x \in A) (x^2 > 1)$    | (d) $(\forall x \in A) (x \text{ é par})$   |
| (e) $(\forall x \in A) (0^x = 0)$    | (f) $(\forall x \in A) (x \mid 72)$         |

(4.4) Usando os seguintes símbolos:

- |                               |                       |
|-------------------------------|-----------------------|
| $D(x)$ = “x é um dia”         | $M$ = “segunda-feira” |
| $S(x)$ = “x está fazendo sol” | $T$ = “terça-feira”   |
| $C(x)$ = “x está chovendo”    |                       |

formalize os seguintes enunciados no domínio formado pelo conjunto de todas as coisas:

- (a) Todos os dias está fazendo sol.
- (b) Em alguns dias não está chovendo.
- (c) Todo dia que não está fazendo sol está chovendo.
- (d) Alguns dias está fazendo sol e chovendo.
- (e) Nenhum dia está fazendo sol e chovendo ao mesmo tempo.
- (f) Segunda-feira fez sol; portanto, vai fazer sol todos os dias.
- (g) Choveu na segunda e na terça-feira.
- (h) Se chover algum dia, então vai fazer sol todos os dias.

(4.5) Usando os seguintes símbolos:

- $P(x)$  = “x é uma pessoa”  
 $T(x)$  = “x é um período de tempo”  
 $E(x,y)$  = “x é enganado por y”

formalize os seguintes enunciados, no domínio formado pelo mundo inteiro:

- (a) Você pode enganar algumas pessoas durante todo o tempo.
- (b) Você pode enganar todas pessoas durante algum tempo.
- (c) Você não pode enganar todas as pessoas durante todo o tempo.

(4.6) Supondo os seguintes símbolos:

- |                         |                           |
|-------------------------|---------------------------|
| $A(x,y)$ = “x ama y”    | $j$ = “João”              |
| $V(x)$ = “x é vistoso”  | $c$ = “Cátia”             |
| $H(x)$ = “x é um homem” | $M(x)$ = “x é uma mulher” |
| $B(x)$ = “x é bonita”   |                           |

dê versões para o Português para as fórmulas apresentadas abaixo:

- (a)  $V(j) \wedge A(c,j)$
- (b)  $(\forall x) (H(x) \rightarrow V(x))$
- (c)  $(\forall x) (M(x) \rightarrow (\forall y) (A(x,y) \rightarrow (H(y) \wedge V(y))))$
- (d)  $(\exists x) (H(x) \wedge V(x) \wedge A(x,c))$
- (e)  $(\exists x) (M(x) \wedge B(x) \wedge (\forall y) (A(x,y) \rightarrow (V(y) \wedge H(y))))$

$$(f) (\forall x) (M(x) \wedge B(x) \rightarrow A(j, x))$$

**(4.7)** Sendo  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

$$(a) (\exists x \in A)(x+3=10)$$

$$(b) (\forall x \in A)(x+3 < 10)$$

$$(c) (\exists x \in A)(x+3 < 5)$$

$$(d) (\forall x \in A)(x+3 \leq 7)$$

$$(e) (\exists x \in A)(3^x > 72)$$

$$(f) (\exists x \in A)(x^2 + 2x = 15)$$

**(4.8)** Dar a negação de cada uma das proposições do exercício **(4.7)** (trazer o operador de negação para dentro da sentença aberta).

**(4.9)** Sendo  $A = \{1, 2, 3\}$  determinar o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

$$(a) (\exists x \in A)(x^2 + x - 6 = 0)$$

$$(b) (\exists y \in A) \neg(y^2 + y = 6)$$

$$(c) \neg(\exists x \in A)(x^2 + 3x = 1)$$

$$(d) \neg(\forall x \in A)(x^2 + 3x = 6)$$

**(4.10)** Sendo  $A = \{3, 5, 7, 9\}$  dar um contra-exemplo para cada uma das seguintes proposições:

$$(a) (\forall x \in A)(x+3 \geq 7)$$

$$(b) (\forall x \in A)(x \text{ é impar})$$

$$(c) (\forall x \in A)(x \text{ é primo})$$

$$(d) (\forall x \in A)(|x| = x)$$

**(4.11)** Dar a negação de cada uma das seguintes proposições:

$$(a) (\forall x \in A)P(x) \wedge (\exists x \in A)Q(x)$$

$$(b) (\exists x \in A)P(x) \vee (\forall x \in A)Q(x)$$

$$(c) (\exists x \in A) \neg P(x) \vee (\forall x \in A) \neg Q(x)$$

$$(d) (\exists x \in A)P(x) \rightarrow (\forall x \in A) \neg Q(x)$$

## Capítulo 5

# A Lógica de Predicados

---

Todos os elementos que vimos até agora nos permitem construir uma nova linguagem lógica bastante distinta daquela que foi vista anteriormente, isto é, bastante distinta da Lógica das Proposições ou Lógica Proposicional.

O que nós vimos até agora foram os elementos que nos permitem construir uma Lógica sobre Predicados (ou uma Lógica sobre Sentenças Abertas, já que sentenças abertas são essencialmente equivalentes aos predicados). Esta Lógica de Predicados também é denominada de Lógica de Primeira Ordem, porque permite falar sobre as propriedades dos elementos pertencentes a um determinado domínio (ou conjunto). A Lógica Proposicional seria uma lógica de “ordem zero” porque não permitiria falar sobre elementos ou entidades, mas somente sobre frases fechadas (as proposições) que podem ser verdadeiras ou não. Por outro lado, seriam possíveis, embora não sejam estudadas neste texto, lógicas de ordens mais altas, que seriam lógicas que poderiam falar sobre os domínios (os conjuntos) em si, e sobre conjuntos de conjuntos, etc.

### 5.1. Estruturas, Interpretação e Significado das Fórmulas

Até agora estamos tratando as fórmulas da Lógica de Predicados como indissociavelmente ligadas aos conjuntos da Teoria Elementar dos Conjuntos que lhes dão significados. Dessa forma estamos sempre apresentando para uma dada fórmula qual o domínio de suas variáveis e a que propriedades, neste domínio, correspondem os símbolos de predicados (sentenças abertas) da fórmula. Esta abordagem derivada da Lógica Matemática define as propriedades de uma lógica através do significado que possa ser atribuído as suas construções em termos de algum modelo matemático.

Porém está não é a única abordagem possível para se tratar da Lógica de Predicados (ou de outros tipos de lógica). Na verdade de agora em diante estaremos interessados em tratar dos elementos da Lógica de Predicados de um ponto de vista mais abstrato, isto é, estaremos interessados em garantir que uma fórmula possa ser considerada verdadeira (ou falsa) somente de acordo com a sua forma, com o seu “formato”.

Embora isto possa parecer um tanto estranho e até mesmo impossível, vamos ver que é perfeitamente possível e perfeitamente válido. Mas para tanto é necessário, primeiro, generalizarmos um pouco a forma como estamos atribuindo significados a uma dada fórmula.

### Fórmulas Puramente Simbólicas

Primeiro é necessário considerar possível a existência das fórmulas como construções puramente simbólicas sem associação com nenhum domínio ou conjunto-verdade. Isto é nós temos que admitir que fosse possível existir fórmulas como:

$$\begin{array}{ll} (\forall x) (P(x)) & (\forall x) (P(x) \rightarrow P(x)) \\ (\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x)) & (\exists x) (P(x) \rightarrow Q(x) \rightarrow P(x)) \\ (\exists x) (P(x)) & (\exists x) (P(x) \wedge P(x)) \\ (\exists x) (\forall y) (P(x,y)) & (\forall x) (\exists y) (P(x) \wedge Q(y)) \end{array}$$

além de infinitas outras, sem que sejam definidos quaisquer domínios para as variáveis nem sejam atribuídos significados para os símbolos de predicados dentro destes domínios.

### Estruturas

Agora vamos considerar possível a existência, independente de qualquer fórmula lógica, de **estruturas A** formadas pela combinação de um **conjunto universo** ou **domínio A** com uma **interpretação I**. A única restrição que se faz destas estruturas é que seus domínios não sejam vazios, isto é, tenham pelo menos um elemento.

### Interpretações

Por fim, vamos definir que uma **interpretação I** de uma fórmula em uma dada estrutura consiste no **mapeamento** de cada um dos **símbolos de predicados** da fórmula em **subconjuntos do domínio**. Se houverem símbolos de elementos do domínio (constantes ou funções) eles também devem ser mapeados em elementos apropriados do domínio constante na estrutura.

Dessa forma o domínio A também pode ser dividido em uma série subconjuntos  $A_1, A_2, \dots$ , que formarão os **conjuntos-verdade** dos predicados da fórmula, de acordo com a interpretação **I**.

Intuitivamente, uma interpretação define os significados dos símbolos da fórmula dentro do domínio especificado pela estrutura. Assim, quando possuímos uma fórmula, uma estrutura e uma interpretação nós podemos saber o significado desta fórmula (qual seu conjunto-verdade), de acordo com as regras que já vimos até agora, isto é, usando as operações elementares sobre conjuntos: intersecção, união e complementação no domínio.

### Juntando Fórmulas, Estruturas e Interpretações

Se analisarmos um pouco mais detidamente a questão, veremos que para uma fórmula qualquer seria possível a ocorrência de três situações distintas:

- (i) Às vezes será possível encontrar interpretações e estruturas que a farão verdadeira e também será possível encontrar interpretações e estruturas que a tornarão falsa.
- (ii) Para certas fórmulas, entretanto, todas as interpretações e estruturas que forem encontradas tornarão a fórmula verdadeira.



(iii) Por fim, para outras fórmulas, somente será possível encontrar interpretações e estruturas que a tornarão falsa.

A primeira afirmação é bastante óbvia e não requer uma explanação adicional. Porém as afirmações (ii) e (iii) são um pouco mais difíceis de “digerir”. Realmente, as afirmações (ii) e (iii) parecem impossíveis de ocorrer, ou seja, elas levantam a questão de como seria possível que uma fórmula fosse sempre verdadeira (ou sempre falsa) para qualquer interpretação e estrutura que se “encaixasse” na fórmula?

Esta dúvida é perfeitamente válida e poderia ainda ser traduzida, em bom Português, no questionamento de como seria possível criar uma frase que sempre fosse verdadeira, independente de quem a está proferindo ou sobre o que ela está falando ou a quem ela está se referindo?

Apesar de parecer impossível, é perfeitamente possível construir fórmulas que tenham tal propriedade. Na verdade, um dos principais objetivos de estudo da Lógica de Predicados é encontrar e usar estas fórmulas que são sempre verdadeiras. Tais fórmulas são as equivalentes, em termos da Lógica de Predicados, das tautologias da Lógica Proposicional. A afirmação (ii) apenas diz que fórmulas lógicas que são sempre verdadeiras também são possíveis na Lógica de Predicados. Da mesma forma, a afirmação (iii) diz que contradições também são possíveis.

Fórmulas que são sempre verdadeiras, independente da estrutura ou interpretação que escolhamos, são denominadas de **fórmulas válidas**.

### Exemplos:

Para vermos como isto é possível, vamos mostrar alguns exemplos. Primeiro vamos considerar a fórmula:

$$(\forall x) (P(x))$$

E as seguintes estruturas:

- As estruturas  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  serão formadas pelo domínio  $A$  igual ao conjunto dos números naturais e pelas interpretações  $I_{A1}$ ,  $I_{A2}$  e  $I_{A3}$  que mapeiam  $P(x)$  em subconjuntos dos números naturais que satisfazem, respectivamente, as seguintes propriedades: “ $x$  é primo”, “ $x+1 > x$ ” e “ $x < 0$ ” aplicadas aos números naturais.
- As estruturas  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$  serão formadas pelo domínio  $B$  composto de todos os móveis de nossa sala de aula na Universidade com as interpretações  $I_{B1}$ ,  $I_{B2}$  e  $I_{B3}$  que mapeiam  $P(x)$  nos subconjuntos destes móveis que atendem, respectivamente, as seguintes propriedades: “ $x$  é preto”, “ $x$  é feito de ouro” e “ $x$  é de propriedade da Universidade”, onde  $x$  é um móvel da sala de aula.

Agora vamos definir algumas interpretações possíveis para esta fórmula, listadas na tabela abaixo:

Estrutura	Interpretação	Significado de $P(x)$	$(\forall x) (P(x))$
$A_1$	$I_{A1}$	$x$ é primo	$F$
$A_2$	$I_{A2}$	$x+1 > x$	$V$

$A_3$	$I_{A3}$	$x < 0$	$F$
$B_1$	$I_{B1}$	$x$ é preto	$F$
$B_2$	$I_{B2}$	$x$ é feito de ouro	$F$
$B_3$	$I_{B3}$	$x$ é de propriedade da Universidade	$V$

Pode-se ver claramente que para algumas interpretações e estruturas a fórmula é verdadeira enquanto que para outras a fórmula é falsa, ou seja, a fórmula  $(\forall x)(P(x))$  se encaixa no caso (i).

## 5.2. Validade de uma Fórmula

Agora vamos analisar como a fórmula:

$$(\forall x)(P(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x))$$

se comporta para as mesmas estruturas e interpretações:

Estrutura	Interpretação	Significado de $P(x)$	$(\forall x)(P(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x))$
$A_1$	$I_{A1}$	$x$ é primo	$V$
$A_2$	$I_{A2}$	$x+1 > x$	$V$
$A_3$	$I_{A3}$	$x < 0$	$V$
$B_1$	$I_{B1}$	$x$ é preto	$V$
$B_2$	$I_{B2}$	$x$ é feito de ouro	$V$
$B_3$	$I_{B3}$	$x$ é de propriedade da Universidade	$V$

Na verdade, ao analisarmos mais detalhadamente a situação veremos que a fórmula  $(\forall x)(P(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x))$  sempre será verdadeira, independente de que estrutura ou interpretação seja aplicada. Isto ocorre porque se  $(\forall x)(P(x))$  é  $F$  para alguma estrutura e interpretação, então a fórmula se reduz a  $F \rightarrow F$  que é verdadeiro, da mesma forma se  $(\forall x)(P(x))$  for  $V$  para outra estrutura ou interpretação, então temos  $V \rightarrow V$  que também é verdadeiro pela definição do condicional. Como  $P(x)$  somente pode ser  $V$  ou  $F$ , tem-se que  $(\forall x)(P(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x))$  será sempre verdadeira.

Ou seja, a fórmula  $(\forall x)(P(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x))$  é um exemplo claro de fórmula que se encaixa no caso (ii) e, portanto, a fórmula  $\neg((\forall x)(P(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x)))$  é um exemplo que se encaixa no caso (iii).

Em fórmulas deste tipo, portanto, simplesmente não é necessário afirmar a qual domínio as variáveis devem pertencer ou quais conjuntos-verdade (significados) devem ser atribuídos para cada símbolo de predicados. Sendo assim pode-se escrever apenas:

$$(\forall x)(P(x)) \rightarrow (\forall x)(P(x))$$

sem especificar o domínio dos  $x$  ou o que significa  $P(x)$ .

Fórmulas que são sempre verdadeiras para qualquer interpretação ou estrutura que se escolha são denominadas de **Fórmulas Válidas**. Estas fórmulas são às equivalentes, em termos da Lógica de Predicados, às tautologias (ou fórmulas tautológicas) da Lógica

Proposicional. O exemplo que vimos acima é simplesmente uma fórmula da Lógica de Predicados, equivalente a tautologia  $P \rightarrow P$  da Lógica proposicional.

Na verdade, todas as tautologias da Lógica Proposicional, se transformam em fórmulas válidas na Lógica de Predicados. Porém, é importante ressaltar, a Lógica de Predicados tem muitas outras fórmulas que são válidas, mas que não tem uma tautologia equivalente em termos da Lógica de Predicados. Por exemplo, a fórmula:

$$(\forall x) (P(x) \rightarrow P(x))$$

não tem uma fórmula tautológica da Lógica Proposicional que possa ser “casada” termo a termo, já que o quantificador  $(\forall x)$  simplesmente não tem um termo ou operador equivalente na Lógica Proposicional. A fórmula acima simplesmente não pode ser casada com nenhuma fórmula composta da Lógica Proposicional, por causa da inexistência da noção de quantificadores e variáveis nesta lógica (ela casaria apenas com uma proposição simples como  $P$ ). Dessa forma seria impossível dizer se ela é ou não válida.

Entretanto se analisarmos esta fórmula, em relação às estruturas e interpretações que já usamos nos exemplos acima, veremos que ela é verdadeira para qualquer uma delas. Na verdade, para qualquer  $x$  que escolhamos de qualquer estrutura ou interpretação se  $P(x)$  é  $F$  para este  $x$ , então a fórmula se reduz a  $(\forall x)(F \rightarrow F)$  que é verdadeiro, da mesma forma se  $P(x)$  for  $V$  para algum outro  $x$ , então temos  $(\forall x)(V \rightarrow V)$  que também é verdadeiro pela definição do condicional. Ou seja, esta fórmula, apesar de não ter equivalente em termos de fórmulas da Lógica Proposicional também é válida.

O problema pode ser ainda pior, porque pode acontecer de existir uma fórmula da Lógica de Predicados que casa com uma fórmula da Lógica Proposicional, sendo que esta última não é uma tautologia, enquanto que a fórmula da Lógica de Predicados é válida (é sempre verdadeira). Por exemplo, a fórmula:

$$(\forall x) (P(x)) \rightarrow P(a)$$

onde  $a$  é uma constante que designa um elemento particular de qualquer domínio que escolhamos, claramente se “encaixa” com a fórmula:

$$P \rightarrow Q$$

da Lógica Proposicional, que obviamente não é uma tautologia.

Entretanto, o problema aqui é que a fórmula:

$$(\forall x) (P(x)) \rightarrow P(a)$$

é **uma fórmula válida** na Lógica de Predicados. Vamos ver porque: se  $(\forall x) (P(x))$  é verdadeiro em alguma interpretação e estrutura, então para qualquer elemento  $x$  que escolhamos do domínio,  $P(x)$  será verdadeira, portanto também será verdadeira para um elemento  $a$  arbitrário deste domínio e, logo,  $P(a)$  também será verdadeiro, sendo a expressão reduzida a,  $V \rightarrow V$  que é verdadeiro. Por outro lado se  $(\forall x) (P(x))$  é falso em alguma interpretação e estrutura, então não precisamos nos preocupar com  $P(a)$ , porque tanto  $F \rightarrow V$  quanto  $F \rightarrow F$ , resultam verdadeiro.

### **Exercício:**

**(5.1)** Em cada uma das fórmulas a seguir encontre uma interpretação onde a fórmula é verdadeira e uma outra onde a fórmula é falsa:

**(a)**  $(\forall x) ( (A(x) \vee B(x)) \wedge \neg(A(x) \wedge B(x)) )$

**(b)**  $(\forall x) (\forall y) (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$

- (c)  $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(x,y)))$   
 (d)  $(\exists x)(A(x) \wedge (\forall y)(B(x,y)))$   
 (e)  $((\forall x)(A(x)) \rightarrow (\forall x)(B(x))) \rightarrow (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$

### 5.3. Regras de Dedução para a Lógica de Predicados

As regras de equivalência e as regras de inferência para a Lógica Proposicional também fazem parte da Lógica de Predicados. Sendo assim podemos usar estas regras da mesma forma que na Lógica Proposicional desde que consigamos casar perfeitamente os símbolos de fórmulas lógicas que constam nestas regras com fórmulas predicadas com ou sem quantificadores.

Por exemplo, um argumento da forma:

$$P, P \rightarrow Q \vdash Q$$

continua sendo válido por *modus ponens*, mesmo que as fórmulas envolvidas estejam predicadas (quantificadas ou não):

$$(\forall x)(R(x)), (\forall x)(R(x)) \rightarrow (\forall x)(S(x)) \vdash (\forall x)(S(x))$$

que pode ser provado pela seguinte demonstração:

- |   |        |
|---|--------|
| 1 $(\forall x)(R(x))$                               | hip    |
| 2 $(\forall x)(R(x)) \rightarrow (\forall x)(S(x))$ | hip    |
| 3 $(\forall x)(S(x))$                               | 1,2 mp |

Por outro lado, como já vimos anteriormente, existem inúmeros argumentos com fórmulas da Lógica de Predicados que não são tautologias, mas ainda assim são válidos devido a sua estrutura e ao significado dos quantificadores universal e existencial.

A abordagem geral para provar estes argumentos é retirar os quantificadores, manipular as fórmulas sem eles e depois recolocá-los no lugar. Algumas regras que levam em conta a manipulação de quantificadores já foram vistas anteriormente, notadamente as regras que:

- Tratam da negação de fórmulas quantificadas, e
- Permitem a comutação de quantificadores de mesmo tipo.

Porém estas regras, embora possam ser usadas se necessário, não retiram nenhum quantificador do lugar nem inserem um quantificador numa fórmula que não o possuía anteriormente, portanto, precisamos de novas regras de inferência que nos permitam manipular os quantificadores, isto é, que nos forneçam mecanismos para inseri-los e retirá-los quando necessário. Isto implica que iremos precisar de 4 regras novas: uma para retirada de cada um dos dois tipos de quantificadores e uma para a inserção de cada um deles. Estas regras são apresentadas na tabela abaixo:

Tabela 6 - Regras de Inferência da Lógica de Predicados

Regra	Restrições de Uso
Particularização Universal ( <b>pu</b> ) $\frac{(\forall x)(P(x))}{P(t)}$	Se o novo termo $t$ que substituirá a variável $x$ em $P(x)$ também for uma variável, então esta nova variável deve ser livre dentro da fórmula $P(x)$ original.

<b>Particularização Existencial (pe)</b> $\frac{(\exists x) (P(x))}{P(t)}$	O novo termo t que substituirá a variável x em P(x), quer seja variável ou constante, não deve ter sido usado anteriormente na demonstração.
<b>Generalização Universal (gu)</b> $\frac{P(x)}{(\forall x)(P(x))}$	A fórmula P(x) não pode ter sido deduzida de nenhuma hipótese onde x é uma variável livre. A fórmula P(x) também não pode ter sido deduzida por Particularização Existencial (pe) de uma fórmula onde x é uma variável livre.
<b>Generalização Existencial (ge)</b> $\frac{P(t)}{(\exists x) (P(x))}$	Se o termo t da fórmula original P(t) for um símbolo de uma constante do domínio, então a nova variável x que o substituirá não pode ter aparecido anteriormente na fórmula P(t).

Características da notação empregada na regras:

- A notação P(x) **não** implica que P é um predicado unário (com apenas uma variável) tendo x com sua única variável. Significa, simplesmente, que x é uma das variáveis na **fórmula** representada por P. Portanto P pode ser uma expressão como  $(\exists y) (\forall z) (Q(x,y,z))$ .
- O termo t representa variáveis ou símbolos para constantes do domínio

Vamos analisar agora a utilização destas regras com mais detalhes.

#### 5.4. Particularização Universal

Essa regra diz que podemos deduzir P(x), P(y), P(a), etc. de  $(\forall x)(P(x))$ , retirando seu quantificador universal. A justificativa intuitiva para esta regra é que se o predicado (ou fórmula) P é verdadeiro para todos os elementos do domínio, então podemos nomear um elemento qualquer deste domínio por um nome arbitrário de variável ou por um símbolo de constante que P continuará sendo verdadeiro para esta nova variável ou constante.

A particularização universal pode ser usada para demonstrar um dos silogismos clássicos da Lógica Aristotélica, que foi a primeira lógica sistematizada na história da humanidade, pelo filósofo grego Aristóteles, que viveu de 384 a 322 a.C. Todos os argumentos clássicos (silogismos), similares ao seguinte argumento:

Todos os seres humanos são mortais.

Sócrates é um ser humano.

Logo, Sócrates é mortal.

podem ser “semi-formalizados” pelo seguinte esquema:

Todos os A, são B.

a é um A.

Logo, a é um B.

Estes argumentos semi-formais podem, então, ser aplicados a uma enorme gama de casos. A formalização completa deste tipo de argumento, em termos da Lógica de Predicados, pode ser feita de acordo com a seguinte fórmula:

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)), A(a) \vdash B(a)$$

que pode facilmente ser demonstrado por:

1	$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$	hip
2	$A(a)$	hip
3	$A(a) \rightarrow B(a)$	1, pu
4	$B(a)$	2, 3, mp

A restrição da particularização universal evita que, por exemplo, fórmulas similares a  $(\forall x)(\exists y)(P(x,y))$  possam ser particularizadas como  $(\exists y)(P(y,y))$ , o que não seria válido. É fácil demonstrar que este tipo de inferência é inválido, através da apresentação de um contra-exemplo. Por exemplo, se assumirmos que  $P(x,y)$  significa  $x < y$  no domínio dos números naturais, então  $(\forall x)(\exists y)(P(x,y))$  é verdade (para todo natural sempre existe um número natural maior), enquanto que  $(\exists y)(P(y,y))$  é obviamente falsa, já que não existe nenhum número natural  $y$  tal que  $y < y$ .

### 5.5. Particularização Existencial

Essa regra diz que, a partir de  $(\exists x)(P(x))$ , podemos deduzir  $P(y)$ ,  $P(z)$ ,  $P(a)$ ,  $P(b)$ , etc. desde que  $y$ ,  $z$ ,  $a$ ,  $b$ , etc. sejam essencialmente símbolos novos. A justificativa intuitiva para esta regra é que se  $P$  é verdadeira para algum elemento do domínio, então podemos dar um nome específico para ele, mas não podemos supor nada mais a seu respeito, isto é, nada nos impede de dar um (novo) nome a este suposto elemento “ $x$ ” que satisfaz  $P(x)$ .

Para exemplificar, vamos considerar uma reescrita do argumento similar ao silogismo clássico:

Todos os A são B.

Existe algum A.

Logo, um fulano é B.

onde “fulano” indica alguém que não conhecemos mas que sabemos certamente que “é B”. Este argumento pode ser totalmente formalizado por:

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)), (\exists y)A(y) \vdash B(a)$$

e pode facilmente ser demonstrado por:

1	$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$	hip
2	$(\exists y)A(y)$	hip
3	$A(a)$	2, pe
4	$A(a) \rightarrow B(a)$	1, pu
5	$B(a)$	3, 4, mp

Um detalhe importante em relação a esta demonstração é que os passos 3 e 4 **não podem ser trocados** de ordem por causa da restrição de aplicação da regra de particularização existencial. Se assim o fosse, ou seja, se **pu** tivesse sido usada primeiro sobre a hipótese 1, então não haveria nenhuma razão para supor que este termo  $a$  particular é o que tem a propriedade  $P$ , como na hipótese 2. Portanto o efeito básico da restrição de uso desta regra é que você é obrigado, primeiro, a olhar todas as hipóteses e, se quiser usar a **pe** em alguma delas, têm que fazer isso primeiro.

## 5.6. Generalização Universal

Essa regra permite que se insira um quantificador universal. No entanto, isso precisa ser feito muito cuidadosamente. Esta inserção somente pode ser feita se estivermos seguros que a **sentença aberta**  $P(x)$  é verdadeira e que a variável  $x$ , usada nesta sentença, indica um elemento realmente arbitrário, isto é  **$x$  pode realmente ser qualquer** elemento do domínio. Neste caso então **nada nos impede de afirmar**  $(\forall x)(P(x))$ . Porém se existir alguma pressuposição na demonstração de que  **$x$  é algum elemento específico** do domínio (por exemplo,  $P(x)$  foi obtido por particularização existencial) então **não podemos generalizar**  $P(x)$  para  $(\forall x)(P(x))$ .

Para exemplificar, vamos provar mais um argumento similar ao silogismo clássico:

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)), (\forall y)P(y) \vdash (\forall x)(Q(x))$$

através da seguinte demonstração:

- |   |                                      |  |
|---|--------------------------------------|--|
| 1 | $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$ | hip  |
| 2 | $(\forall y)P(y)$                    | hip  |
| 3 | $P(x) \rightarrow Q(x)$              | 1, pu  |
| 4 | $P(x)$                               | 2, pu (note que não existe restrição em pu sobre usar novamente um mesmo nome) |
| 5 | $Q(x)$                               | 3, 4, mp   |
| 6 | $(\forall x)(Q(x))$                  | 5, gu  |

A utilização da generalização universal no passo 6 é correta, uma vez que  $x$  não era uma variável livre em nenhuma hipótese, nem a particularização existencial (**pe**) foi utilizada para se chegar até  $Q(x)$ .

A primeira restrição da generalização universal evita que a utilização de alguma variável livre nas hipóteses possa ser usada como base para inferir uma propriedade universal. A afirmação em alguma hipótese de uma sentença aberta  $P(x)$  com a variável  $x$  pode tanto indicar que exista pelo menos um elemento do domínio que satisfaça  $P(x)$  quanto indicar que todos satisfazem  $P(x)$ , mas não dá nenhuma informação adicional, portanto não pode ser usada como base de uma generalização correta.

A segunda restrição apenas evita que o formalismo desconsidere o significado por trás da operação de generalização, isto é, se nós chegamos a um  $P(x)$  numa demonstração com base numa particularização de um existencial, isto implica que estamos seguros que existe pelo menos um elemento do domínio no qual vale  $P(x)$ . Como já vimos anteriormente não faz nenhum mal em chamarmos este elemento de “ $x$ ”, mas não podemos, daí, inferir que qualquer outro elemento do domínio também atenda a sentença  $P(x)$ , logo é impossível generalizar este  $P(x)$  para  $(\forall x)(P(x))$ . Do ponto de vista puramente formal isto é evitado pela restrição que obriga que  $P(x)$ , para ser generalizado universalmente, não possa ter sido previamente demonstrado por uma particularização existencial.

Para exemplificar o uso de regras hipotéticas no caso da lógica de predicados, vamos provar o seguinte argumento:

$$P(x) \rightarrow (\forall x)(Q(x,y)) \vdash (\forall y) (P(x) \rightarrow (Q(x,y)))$$

pela seguinte demonstração:

- |   |  |     |
|---|--|-----|
| 1 | $P(x) \rightarrow (\forall x)(Q(x,y))$ | hip |
|---|--|-----|

2		$P(x)$	hip-pc
3		$(\forall x)(Q(x,y))$	1, 2 mp
4		$Q(x,y)$	3 pu
5		$P(x) \rightarrow Q(x,y)$	2-4 pc
6		$(\forall y)(P(x) \rightarrow Q(x,y))$	5, gu

### 5.7. Generalização Existencial

A última regra permite a inserção de um quantificador existencial. De  $P(x)$  ou  $P(a)$ , podemos deduzir  $(\exists x)(P(x))$ . A justificativa intuitiva para esta regra é que se alguma já foi nomeada como tendo a propriedade  $P$ , então podemos afirmar que existe alguma coisa com a propriedade  $P$ , logo  $(\exists x)(P(x))$ .

Para exemplificar, vamos provar o argumento:

$$(\forall x)(P(x)) \vdash (\exists x)(P(x))$$

pela seguinte demonstração:

1	$(\forall x)(P(x))$	hip
2	$P(x)$	1, pu
3	$(\exists x)(P(x))$	2, ge

A restrição da generalização existencial tem uma base similar a da restrição empregada na particularização universal. Ela serve para evitar que, por exemplo, de fórmulas similares a  $P(a,y)$  possamos deduzir  $(\exists y)(P(y,y))$ . Como já vimos anteriormente, isso não seria válido. Novamente é fácil mostrar um contra-exemplo que mostre isto porque, por exemplo, se assumirmos que  $P(x,y)$  significa  $x < y$  no domínio dos números naturais, então  $P(a,y)$  pode ser verdade (para algum  $a$  e para algum  $y$ ), enquanto que  $(\exists y)(P(y,y))$  é obviamente falsa, já que é impossível que  $y < y$  para qualquer  $y$  pertencente aos números naturais.

### 5.8. Prova por Contra-Exemplo

Normalmente não é fácil demonstrar a validade de uma afirmação universal, uma vez que se é obrigado a demonstrar a validade desta afirmação para todos os elementos de um domínio (possivelmente infinito). Embora existam formas de se demonstrar afirmações universais, principalmente sobre domínios matemáticos (indução matemática), ainda assim isto normalmente não é uma tarefa muito simples.

Por outro lado afirmações existenciais podem ser demonstradas pela apresentação de (pelo menos) um elemento que satisfaça a afirmação, o que, às vezes, é muito mais fácil do que tentar demonstrar uma propriedade universal dos elementos de um conjunto.

Sendo assim, se houvesse uma forma de se transformar um argumento composto de sentenças com quantificadores universais em um argumento equivalente, mas composto de sentenças existenciais, então, muitas vezes, este segundo argumento teria uma demonstração mais fácil.



Na verdade existe este método que é chamado de *Prova por Contra-Exemplo*. Vamos ver como este método pode ser aplicado. O método é aplicável sobre argumentos com afirmações puramente universais na seguinte forma:

$$(\forall x)(P(x)) \rightarrow (\forall x)(Q(x))$$

Uma forma direta de demonstrar a veracidade deste argumento seria demonstrar primeiro a validade da afirmação universal  $(\forall x)(P(x))$  e então deduzir  $(\forall x)(Q(x))$  por *modus ponens*. Entretanto, a demonstração de  $(\forall x)(P(x))$  poderia ser uma tarefa muito difícil.

Para facilitar um pouco as coisas, pode-se considerar que um argumento nesta forma pode, pela regra de equivalência da contraposição, ser transformado em:

$$\neg(\forall x)(Q(x)) \rightarrow \neg(\forall x)(P(x))$$

Além disso, pela regra da negação dos quantificadores, o argumento acima pode ser transformado na seguinte fórmula equivalente:

$$(\exists x)\neg(Q(x)) \rightarrow (\exists x)(P(x))$$

Uma prova para o argumento acima, pelo fato dele ser equivalente ao argumento original, também é uma prova para o argumento original.

O que nos deixa com a necessidade de demonstrar a afirmação  $(\exists x)\neg(Q(x))$  que é uma afirmação existencial.

Agora basta encontrar um elemento que faça  $Q(x)$  se tornar falsa, e portanto tornar  $\neg Q(x)$  verdadeira, para garantir a validade de  $(\exists x)\neg(Q(x))$ .

Este elemento passa a ser, então, o **contra-exemplo** da afirmação  $(\forall x)(Q(x))$ , ou seja, o exemplo contrário que faz  $(\forall x)(Q(x))$  ficar falsa e, portanto, faz  $\neg(\forall x)(Q(x))$  se tornar válida.

Caso este elemento seja encontrado então a fórmula  $(\exists x)(P(x))$  é deduzida por *modus ponens* da fórmula  $(\exists x)\neg(Q(x)) \rightarrow (\exists x)(P(x))$  provando este argumento e, portanto, provando o argumento original.

## 5.9. Exercícios de Lógica de Predicados

Prove que os seguintes argumentos são válidos:

$$(5.2) (\forall x)(P(x)) \vdash (\forall x)((P(x) \vee Q(x))$$

$$(5.3) (\forall x)(P(x)), (\exists x)(Q(x)) \vdash (\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$$

$$(5.4) (\forall x)(P(x)), (\exists x)(\neg P(x)) \vdash (\exists x)(Q(x))$$

$$(5.5) (\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \vdash (\exists x)(A(x)) \wedge (\exists x)(B(x))$$

$$(5.6) (\exists x)(\forall y)(Q(x,y)) \vdash (\forall y)(\exists x)(Q(x,y))$$

$$(5.7) (P(x) \rightarrow (\exists y)(Q(x,y))) \vdash (\exists y)(P(x) \rightarrow Q(x,y))$$

Agora simbolize e demonstre a validade dos seguintes argumentos verbais:

(5.8) Todo crocodilo é maior do que qualquer jacaré. Samurai é um crocodilo. Mas existe uma serpente e Samurai não é maior do que esta serpente. Portanto, alguma coisa não é um jacaré. Use os símbolos:  $C(x)$ ,  $J(x)$ ,  $M(x,y)$ ,  $s$  e  $S(x)$ , para representar, respectivamente, “ $x$  é um crocodilo”, “ $x$  é um jacaré”, “ $x$  é maior que  $y$ ”, “Samurai” e “ $x$  é uma serpente”.

(5.9) Todos os membros do conselho vêm da indústria ou do governo. Todos que vêm do governo e são advogados são a favor da moção. João não vem da indústria mas é advogado. Portanto, se João é um membro do conselho, ele é a favor da moção. Use os símbolos:  $M(x)$ ,  $I(x)$ ,  $G(x)$ ,  $A(x)$ ,  $F(x)$  e  $j$ .

(5.10) Em cada uma das fórmulas a seguir encontre uma interpretação onde a fórmula é verdadeira e outra onde a fórmula é falsa:

- (a)  $(\forall x) (H(x) \rightarrow V(x))$
- (b)  $(\forall x) (\forall y) (M(x) \rightarrow H(y) \rightarrow V(y))$
- (c)  $(\exists x) (\exists y) (H(x) \wedge V(x) \wedge M(y) \wedge V(y))$

(5.11) Prove os seguintes argumentos:

- (a)  $(\forall x) (M(x) \rightarrow L(x)), (\forall x) (S(x) \rightarrow M(x)) \vdash (\forall x) (S(x) \rightarrow L(x))$
- (b)  $\neg(\exists x) (M(x) \wedge L(x)), (\forall x) (S(x) \rightarrow M(x)) \vdash \neg(\exists x) (S(x) \wedge L(x))$
- (c)  $(\forall x) (M(x) \rightarrow L(x)), (\exists x) (S(x) \wedge M(x)) \vdash (\exists x) (S(x) \wedge L(x))$
- (d)  $\neg(\exists x) (M(x) \wedge L(x)), (\exists x) (S(x) \wedge M(x)) \vdash (\exists x) (S(x) \wedge \neg L(x))$

(5.12) Prove os seguintes teoremas:

- (a)  $\vdash (\forall x) (P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow ((\forall x) P(x) \rightarrow (\forall x) Q(x))$
- (b)  $\vdash (\forall x) (\forall y) P(x,y) \rightarrow (\forall x) P(x,x)$
- (c)  $\vdash (\forall x) (P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow ((\forall x) P(x) \wedge (\forall x) Q(x))$

## Apêndices

### Apêndice A - Tabelas Verdade dos Operadores Lógicos

*Tabelas-verdade das operações lógicas binárias*

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

*Tabela-verdade da operação lógica unária de negação:*

A	$\neg A$
V	F
F	V

### Apêndice B - Propriedades das Operações

*Equivalências da Disjunção ( $\vee$ ) e da Conjunção ( $\wedge$ )*

Propriedade	Disjunção ( $\vee$ )	Conjunção ( $\wedge$ )
Comutativa	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$	$A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$
Associativa	$(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	$(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
Distributiva	$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
Elemento Neutro	$A \vee F \leftrightarrow A$	$A \wedge V \leftrightarrow A$
Complemento	$A \vee \neg A \leftrightarrow V$	$A \wedge \neg A \leftrightarrow F$
Idempotência	$A \vee A \leftrightarrow A$	$A \wedge A \leftrightarrow A$
DeMorgan:	$\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$	$\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

*Equivalências dos Demais Operadores*

Dupla Negação	$\neg\neg A \leftrightarrow A$
Equivalência da Implicação	$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg A \vee B$
Contraposição	$A \rightarrow B \leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
Prova Condicional	$A \rightarrow (B \rightarrow C) \leftrightarrow (A \wedge B) \rightarrow C$

## Apêndice C - Regras de Dedução de Equivalência e Inferência

### Regras Básicas de Inferência

Inclusão de Operadores	Exclusão de Operadores
Redução ao absurdo ( <b>raa</b> ) - $\neg I$ $\frac{\begin{array}{ l} P \\ \dots \\ Q \wedge \neg Q \end{array}}{\neg P}$	Dupla negação ( <b>dn</b> ) - $\neg E$ $\frac{\neg \neg P}{P}$
Prova condicional ( <b>pc</b> ) - $\rightarrow I$ $\frac{\begin{array}{ l} P \\ \dots \\ Q \end{array}}{P \rightarrow Q}$	Modus Ponens ( <b>mp</b> ) - $\rightarrow E$ $\frac{P \quad P \rightarrow Q}{Q}$
Conjunção( <b>cj</b> ) - $\wedge I$ $\frac{P \quad Q}{P \wedge Q}$	Simplificação( <b>sp</b> ) - $\wedge E$ $\frac{P \wedge Q}{P} \quad \frac{P \wedge Q}{Q}$
Adição( <b>ad</b> ) - $\vee I$ $\frac{P}{P \vee Q} \quad \frac{P}{Q \vee P}$	Eliminação da disjunção - $\vee E$ $\frac{P \vee Q \quad P \rightarrow R \quad Q \rightarrow R}{R}$
Introdução da equivalência - $\leftrightarrow I$ $\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow P}{P \leftrightarrow Q}$	Eliminação da equivalência - $\leftrightarrow E$ $\frac{P \leftrightarrow Q}{P \rightarrow Q} \quad \frac{P \leftrightarrow Q}{Q \rightarrow P}$

### Regras de Inferência Derivadas

Modus Tollens ( <b>mt</b> ) $\frac{P \rightarrow Q \quad \neg Q}{\neg P}$	Silogismo Hipotético ( <b>sh</b> ) $\frac{P \rightarrow Q \quad Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}$
Silogismo Disjuntivo ( <b>sd</b> ) $\frac{P \vee Q \quad \neg P}{Q}$	Dilema Construtivo ( <b>dc</b> ) $\frac{P \vee Q \quad P \rightarrow R \quad Q \rightarrow S}{R \vee S}$
Exportação ( <b>exp</b> ) $\frac{(P \wedge Q) \rightarrow R}{P \rightarrow (Q \rightarrow R)}$	Inconsistência ( <b>inc</b> ) $\frac{P \quad \neg P}{Q}$

*Regras de Equivalência*

<b>Expressão</b>	<b>Equivale a</b>	<b>Nome (Abreviação) da Regra</b>
$P \vee Q$ $P \wedge Q$	$Q \vee P$ $Q \wedge P$	Comutatividade ( <b>com</b> )
$(P \vee Q) \vee R$ $(P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R)$ $P \wedge (Q \wedge R)$	Associatividade ( <b>ass</b> )
$\neg(P \vee Q)$ $\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$ $\neg P \vee \neg Q$	De Morgan ( <b>dmor</b> )
$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	Condicional ( <b>cond</b> )
$P$	$\neg(\neg P)$	Dupla negação ( <b>dn</b> )
$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	Contraposição ( <b>cont</b> )
$P$	$P \wedge P$	Auto-referência ( <b>auto</b> )
$P \vee P$	$P$	Auto-referência ( <b>auto</b> )
$P \wedge (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Distributividade ( <b>dist</b> )
$P \vee (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	Distributividade ( <b>dist</b> )

## Apêndice E - Regras de Inferência da Lógica de Predicados

### Regras de Inferência da Lógica de Predicados

Regra	Restrições de Uso
Particularização Universal ( <b>pu</b> ) $\frac{(\forall x)(P(x))}{P(t)}$	Se o novo termo t que substituirá a variável x em P(x) também for uma variável, então esta nova variável deve ser livre dentro da fórmula P(x) original.
Particularização Existencial ( <b>pe</b> ) $\frac{(\exists x) (P(x))}{P(t)}$	O novo termo t que substituirá a variável x em P(x), quer seja variável ou constante, não deve ter sido usado anteriormente na demonstração.
Generalização Universal ( <b>gu</b> ) $\frac{P(x)}{(\forall x)(P(x))}$	A fórmula P(x) não pode ter sido deduzida de nenhuma hipótese onde x é uma variável livre. A fórmula P(x) também não pode ter sido deduzida por Particularização Existencial ( <b>pe</b> ) de uma fórmula onde x é uma variável livre.
Generalização Existencial ( <b>ge</b> ) $\frac{P(t)}{(\exists x) (P(x))}$	Se o termo t da fórmula original P(t) for um símbolo de uma constante do domínio, então a nova variável x que o substituirá não pode ter aparecido anteriormente na fórmula P(t).

## Bibliografia

---

ALENCAR FILHO, Edgard. **Iniciação à Lógica Matemática**. São Paulo: Nobel, 1999.

AZEREDO, Vânia Dutra de (org.). **Introdução à Lógica**. Ijuí: Unijuí, 2000.

DAGHLIAN, Jacob. **Lógica e Álgebra de Boole**. São Paulo: Atlas, 1995.

DEL PICCHIA, Walter. **Métodos Numéricos Para Resolução de Problemas Lógicos**. São Paulo: Edgard Blücher, 1993.

GERSTING, Judith L. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação**. Rio de Janeiro: LTC, 2001 (trad. 4 ed.)

HEGENBERG, Leônidas. **Lógica – O Cálculo de Predicados**. São Paulo: USP, 1973.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Teoria dos Conjuntos**. São Paulo: Mc Graw Hill, 1976.

MENDELSON, Elliott. **Álgebra Booleana e Circuitos de Chaveamento**. São Paulo: Mc Graw Hill, 1977.

MORTARI, Cezar A. **Introdução à Lógica**. São Paulo: UNESP, 2001.

NOLT, John; ROHATYN, Dennis. **Lógica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1991 (Coleção Schaum).

POFFAL, Cristiana Andrade; RENZ, Sandra Pacheco. **Fundamentos de Lógica Matemática**. Porto Alegre: La Salle, 2001.

YAGLOM, I. M. **Álgebra Booleana**. São Paulo: Atual, 1999.