Introdução à Análise de dados em FAE **(Data: 13/10/20)**

Solução dos Exercícios

Professores: Sandro Fonseca, Sheila Amaral, Eliza Melo. *Name:* Matheus Macedo (`github:teteumac`).

Problema 0:

Quando um píon decai um dois fótons, qual a energia do fóton?

`Resposta` :

No referencial do laboratório temos a conservação da energia e do *momentum*. O decaimento do π^0 tem velocidade v e massa m_{π^0} e o fóton γ é emitido a um ângulo θ com respeito a direção original do píon.

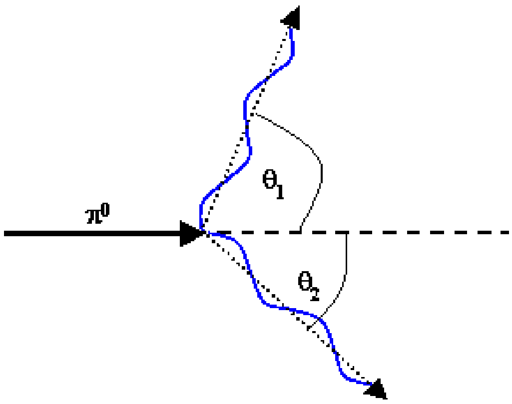

Figura 1: Decaimento do π^0 no referencial do laboratório

$$E_{\pi^0} = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2} \tag{0.1}$$
$$\gamma m_{\pi^0} c^2 = hf_1 + hf_2 \tag{0.2}$$
$$\gamma m_{\pi^0} v = hf_1 \cos\theta_1/c + hf_2 \cos\theta_2/c \tag{0.3}$$
$$\frac{hf_1 \sin\theta_1}{c} = \frac{hf_2 \sin\theta_2}{c} \tag{0.4}$$
$$\cos\theta_2 : (\gamma mv - hf_1 \cos\theta_1/c)^2 = (hf_2/c)^2 \left(1 - \sin^2\theta_2\right) = (hf_2/c)^2 - (hf_1/c)^2 \sin^2\theta_1 \tag{0.5}$$
$$hf_2 : (\gamma mv - hf_1 \cos\theta_1/c)^2 + (hf_1/c)^2 \sin^2\theta_1 = (hf_2/c)^2 = (\gamma mc - hf_1/c)^2 \tag{0.6}$$

Escrevendo todos os termos e eliminando $\cos\theta_2$ e hf_2, temos

$$\boldsymbol{hf_1 = \frac{mc^2}{2\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)\cos\theta_1} = E_\gamma}$$

Problema 1:

Prove a equação

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab} m_2}$$

`Resposta` :

A partir das variáveis de Mandelstam como mostra a Figura 2, usaremos apenas a s que denota a energia do centro de massa

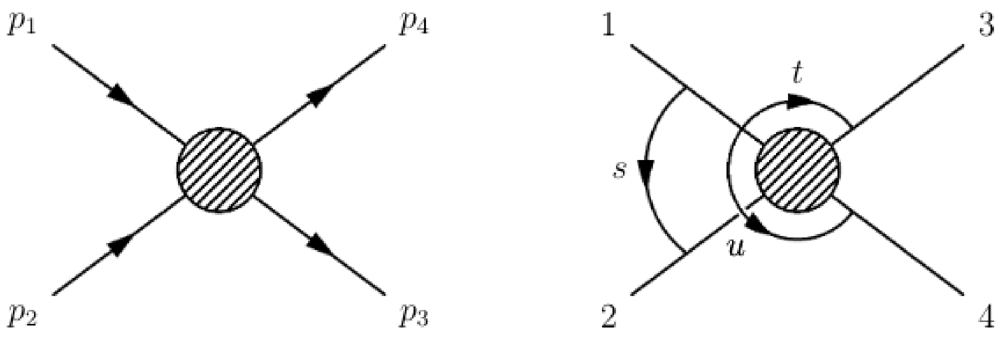

Figura 2: Vizualização das variáveis de Mandelstam

$$s = (p_{1L} + p_{2L})^2 = p_{1L}^2 + p_{2L}^2 + 2\left((p_{1L})^0(p_{2L})^0 - \vec{p}_{1L} \cdot \overset{referencial\ do\ lab}{\underbrace{\vec{p}_{2L}}_{=0}}\right)$$

Como as partículas estão *on-shell*, isto é $p_1^2 = m_1^2$ e $p_2^2 = m_2^2$ como mostra o Diagrama de Feymann da Figura 2, podemos fazer a aproximação sugerida e $\vec{p}_{1L} = E_1^{lab}$.

$$\boldsymbol{E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab}m_2}}$$

Problema 2:

`Resposta` :

Considerando $E_L^{lab} >> m_1.m_2$, prove está aproximação;

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab}m_2}$$

Sabendo que para grandes valores de E_1^{lab} a soma dentro da raiz quadrada é predominada pelo fator que está multiplicado pela energia, fazendo com que as massas m_1 e m_2 fossem desprezadas, logo,

$$\boldsymbol{\sqrt{2E_1^{lab}m_2}}$$

Problema 3:

Prove a equação:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2\cos\theta)}$$

`Resposta` :

Pegando a Figuara 2 como referência

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu \tag{0.7}$$
$$p_{1\mu} - p_{3\mu} = p_{4\mu} - p_{2\mu} \tag{0.8}$$

Sabendo que $p_{i\mu}p^{i\mu} = \left(\frac{E_i^0}{c}\right)^2$

$$(E_1^0)^2 - 2(E_1E_3/c^2 - \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3) + (E_3^0/c)^2 = (E_4^0)^2 - 2(E_2E_4/c^2 - \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_4) + (E_2^0/c)^2$$

Introduzindo o ângulo de espalhamento (θ e ϕ)

$$(E_1^0)^2 - 2(E_1E_3 - c^2p_1p_3\cos\theta) + (E_3^0)^2 = (E_2^0)^2 - 2(E_2E_4 - c^2p_2p_4\cos\phi) + (E_4^0)^2$$

No referencial do Centro de Massa fazemos $p_2 = 0$ e $E_2 = E_2^0$

$$(E_1^0)^2 - 2(E_1E_3 - c^2p_1p_3\cos\theta) + (E_3^0)^2 = (E_2^0)^2 - 2E_2^0E_4 + (E_4^0)^2$$

Como a energia total do sistema é conservada e fazendo $c = 1$

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 = E_1 = E_2^0 \tag{0.9}$$
$$E_4 = E_1 + E_2^0 - E_3 \tag{0.10}$$
$$\tag{0.11}$$

Usando a relação da variável de Mandelstam,

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2$$

e fazendo

$$E = m$$

Logo,

$$\boldsymbol{E_T = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2 - 2E_1E_2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2\left(1 - \frac{|\vec{p}_1|}{E_1}\frac{|\vec{p}_2|}{E_2}\cos\theta\right)}}$$

Problema 4:

Considerando $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ e $m_1 = m_2$, prove

$$E_T = \sqrt{s} = 2E_1$$

`Resposta` :

Regredindo na última equação do problema 3, temos

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1p_2\cos\theta$$

Como os momentos são iguais, excerto por um sinal negativo, o valor do produto escalar é igual a 1 porque eles agora são iguais e tem o mesmo sentido. Logo, a expressão dentro da raiz fica:

$$2E_1E_2\left(1 - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1}{E_1E_2}\right) = 0$$

e sabendo que $E = m$, encontramos a equação

$$\boldsymbol{E_T = \sqrt{s} = 2E_1}$$

Problema 5:

Um feixe de prótons com momentum de 100 GeV atinge um alvo fixo de hidrogênio.

a) Qual é a energia de centro de massa para está interação?

`Resposta` :

Primeiramente, vamos calcular seu *4-vector*

$$p_1^\mu = (E_p, \vec{p}_1) \quad (0.12)$$
$$p_2^\mu = (m_p, \vec{0}) \quad (0.13)$$
$$s = (p_1^\mu + p_2^{mu})^2 = [(E_p, \vec{p}_1) + (m_p, \vec{0})]^2 \quad (0.14)$$
$$s = (E_p + m_p)^2 - \vec{p}^2 \quad (0.15)$$
$$s = E_p^2 + 2E_p m_p + m_p^2 - \vec{p}^2 \quad (0.16)$$
$$s = 2m_p^2 + 2E_p m_p \quad (0.17)$$
$$\sqrt{s} = \sqrt{2m_p^2 + 2E_p m_p} \approx \sqrt{2E_p m_p} \quad (0.18)$$

$$\boldsymbol{\sqrt{s} = 14.2\mathrm{GeV}}$$

b) Qual seria a energia do feixe necessária para atingir a mesma energia do LHC?

`Resposta` :

Para um colisor próton-próton, quase todo o momento das partículas está disponível para a interação, e apenas a energia do centro de massa seria necessário para o feixe, na orde de 7,1 GeV.

c) Quais os colisores assimétricos usados atualmente e por que não usar um colisor mais potente?

`Resposta`

Atualmente, nós temos o **Atlas/CMS** e **LHCb** para assimpetrico e simétrico respectivamente. A escolha de usar um colisor de alvo fixo, um colisor levemente assimétrico ou um colisor totalmente simétrico, depende principalmente de sua intenção e do que você está interessado. Em experimentos como ATLAS, o principal a intenção é criar e detectar partículas de grande massa como o bóson de Higgs, e menos ainda medir suas várias propriedades com tanta precisão. No entanto, no LHCb, as colisões são assimétricas, como você pode ver pela assimetria do detector. LHCb lida principalmente com partículas mais leves, como mésons B e kaons e, portanto, não está tão interessado na energia mais alta possível. Na verdade, a assimetria das colisões adicionalmente leva a um movimento do centro de massa após a colisão: este movimento relativo dá às partículas resultantes um *boost* de Lorentz e permite que seus decaimentos sejam observados com maior facilidade. Os aceleradores de alvo fixo se beneficiam da vantagem óbvia de serem mais fáceis e baratos de construir. Eles também têm uma maior luminosidade e seção choque de interação.

Problema 5a:

Encontre a energia de centro de massa para o experimento de alvo fixo e um colisor de partículas cujo o feixe de prótons tem uma energia de 3,5 TeV.

`Resposta` :

Usando a solução da equação 4, temos:

$$\boldsymbol{\sqrt{s} = 2E_1 = 2 \cdot 3.5\mathrm{TeV} = 7\mathrm{TeV}}$$

Problema 6:

Em espalhamento elástico do tipo: A+A = A+A, quais são as variáveis de Mandelstam?

`Resposta` :

$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$

- **Canal - s**

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + p_2^2 \tag{0.19}$$
$$s = m_1^2 + 2p_1 \cdot p_2 + m_2^2 \tag{0.20}$$
$$s = 2m_1^2 + 2(E_1E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2) \tag{0.21}$$
$$s = 2m_1^2 + 2(E_1^2 + p_1^2) \tag{0.22}$$
$$s = 2m_1^2 + 2((m_1^2 + p_1^2) + p_1^2) \tag{0.23}$$
$$\boldsymbol{s = 4(m_2 - p^2)} \tag{0.24}$$

- **Canal - t**

$$t = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 + p_3^2 \tag{0.25}$$
$$t = 2m_1^2 - 2E_1E_3 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 \tag{0.26}$$
$$t = 2m_1 - 2E_1^2 + 2p_1^2 \cos\theta \tag{0.27}$$
$$\boldsymbol{t = -2p^2(1 - \cos\theta) \leq 0} \tag{0.28}$$

- **Canal - u**

$$u = (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4 \tag{0.29}$$
$$\boldsymbol{u = -2p^2(1 + \cos\theta)} \tag{0.30}$$

Problema 7:

Prove a relação:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$$

`Resposta` :

Como consideramos que as partículas estão *on-shell*, ou seja $p_i^2 = m_i^2$ onde i varia para as partículas em questão, $i = 1, 2, 3, 4$. Temos a conservação do 4-*momentum*

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \tag{0.31}$$
$$p_1 = -p_2 + p_3 + p_4 \tag{0.32}$$

Usando as soluções das equações (0.19) , (0.25) , (0.29), e fazendo a soma de $s + t + u$, temos:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + \underbrace{2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 - 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_4}_{2p_1 \cdot (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) = 0}$$

Ao fazer, $m_3 = M_1$ e $m_4 = M_2$

$$\boldsymbol{s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2}$$

Problema 8:

Mostre esta transformação:

$$\begin{bmatrix} E' \\ p'_{//} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s \\ -\gamma_s\beta_s & \gamma_s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E \\ p_{//} \end{bmatrix}, \quad p'_T = p_T$$

onde $p_{//}$ e p_T são os componentes longitudinais e transversais de $\vec{p}$, que são paralelos e perpendiculares a β, respectivamente.

`Resposta:`

Portanto, as transformações de Lorentz inversas em E e pz dão:

$$y = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\gamma(E' + \beta p'_z) + \gamma(\beta E' + p'_z)}{\gamma(E' + \beta p'_z) - \gamma(\beta E' + p'_z)}\right] \tag{0.33}$$

$$y = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{E' + p'_z}{E' - p'_z}\right] + \frac{1}{2}\ln\left[\frac{1+\beta}{1-\beta}\right] \tag{0.34}$$

$$y = y' + y_{cm} \tag{0.35}$$

Podemos simplificar o segundo termo da seguinte maneira:

$$\ln\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \tanh^{-1}\left(\tanh\left(\ln\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\right) = \tanh^{-1}\left(\frac{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} - \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}{\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}}\right) = \tag{0.36}$$

$$= \tanh^{-1}\left(\frac{(1-\beta) - (1+\beta)}{(1-\beta) + (1+\beta)}\right) = -\tanh^{-1}\beta \tag{0.37}$$

$$\boldsymbol{y' = y - \tanh^{-1}\beta}$$

Problema 8:

Mostre em detalhes que o decaimento de dois corpos pode ser descrito por:

$$E_1 = \frac{M_2 - m_2 + m_1}{2M}, \quad |p_1| = |p_2|$$

$$E_1 = \frac{[(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}}{2M}$$

`Resposta:`

Escrevemos a equação do $4 - momentum$ como $P = p_1 + p_2$, onde $P = (M, \vec{0})$

$$p_2 = P - p_1 \tag{0.38}$$

$$p_2^2 = (P - p_1)^2 = P^2 - 2P \cdot p_1 + p_1^2 \tag{0.39}$$

$$m_2^2 = M^2 - 2ME_1 + m_1^2 \tag{0.40}$$

Onde $P \cdot p_1 = ME_1$, como estamos avaliando no refencial de repouso da partícula pai, apenas E_1 é desconhecido, então resolvendo a equação ara ele, temos

$$E_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \tag{0.41}$$

Sendo o $4 - momentum$ como $p_1 = \sqrt{E_1^2 - m_1^2}$

$$\boldsymbol{E_1 = \frac{\sqrt{(M^2 + m_1^2 - m_2^2)^2 - 4M^2 m_1^2}}{2M} = \frac{[(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)]^{1/2}}{2M}}$$

Problema9:

Determine a energia e momentum para os seguinte decaimento de dois corpos:

$$\pi^- \to \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$$

`Resposta` :

$$\left.\begin{aligned} m_\pi &= 0.1396 \\ m_\mu &= 0.1057 \\ m_\nu &= 0.0000 \end{aligned}\right\}$$

$$E_\mu = \frac{m_\pi^2 + m_\nu^2}{2m_\pi} = 0.1098\text{GeV} \tag{0.42}$$

$$E_\nu = \frac{m_\pi^2 - m_\nu^2}{2m_\pi} = 0.0298\text{GeV} = p_\mu = p_\nu 7 \tag{0.43}$$

Prolema 10:

Prove o decaimento de 3 corpos.

`Resposta` :

Análogo para o caso do decaimento de 2 corpos, temos agora uma partícula de massa m_a e quadrimomento P_a decaindo em 3 partículas de quadrimomento P_1, P_2 e P_3.

$$P_a = (E_a, \vec{p}_a)$$

$$P_1 = (E_1, \vec{p}_1), \quad P_2 = (E_2, \vec{p}_2), \quad P_3 = (E_3, \vec{p}_3)$$

A partir da conservação da energia e do 4-momento.

$$E_a = E_1 + E_2 + E_3 \tag{0.44}$$

$$\vec{p}_a = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \tag{0.45}$$

$$P_a = P_1 + P_2 + P_3 \tag{0.46}$$

Definindo

$$P_{ij} = P_i + P_j s_{ij} = P_{ij}^2 = (P_i + P_j) \cdot (P_i + P_j) \tag{0.47}$$

onde s é a energia do centro de massa e uma das variáveis de Maldestam

$$s_{12} \equiv s_{21} = (P_1 + P_2)^2 = (P_a - P_3)^2 \tag{0.48}$$

$$s_{13} \equiv s_{32} = (P_2 + P_3)^2 = (P_a - P_1)^2 \tag{0.49}$$

$$s_{31} \equiv s_{13} = (P_3 + P_1)^2 = (P_a - P_2)^2 \tag{0.50}$$

Somando todas essas constribuições.

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = \sum_{i=1}^{3}[(E_a - E_i)^2 - |\vec{p}_a - \vec{p}_i|^2] = \sum_{i=1}^{3}[(E_a^2 - 2E_aE_i + E_i^2) - (p_a^2 + p_i^2 - 2p_ap_i\cos\theta_i)] \quad (0.51)$$

Onde θ_i é o ângulo que $\vec{p}_i$ forma com $\vec{p}_a$. Arrumando os termos da última equação, temos:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = \sum_{i=1}^{3}[\underbrace{(E_a^2 - p_a^2)}_{m_a^2}+]\underbrace{(E_i^2 - p_i^2)}_{m_i^2} \quad (0.52)$$

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = 3m_a^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3 - 2E_a\underbrace{(E_1 + E_2 + E_3)}_{E_a} + 2p_a(\underbrace{(p_1\cos\theta_1 + p_2\cos\theta_2 + p_3\cos\theta_3)}_{p_a}) \quad (0.53)$$

Como devemos ter a conservação do momento tanto na direção de $\vec{p}_a$ quanto na direção transversa valem as igualdades:

$$p_a = p_1\cos\theta_1 + p_2\cos\theta_2 + p_3\cos\theta_3$$

$$p_1\sin\theta_1 + p_2\sin\theta_2 + p_3\sin\theta_3 = 0$$

A expressão se torna:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = 3m_a^2 + m_1^2m_2^2 + m_3^2 - 2(E_a^2 - p_a^2) = m_a^2 + m_1^2 + m_2^2m_3^2 \quad (0.54)$$

No sistema do Centro de Massa:

$$P_a^\star = (m_a, \vec{0})$$

A grandeza s_{12} fica:

$$s_{12} = (P_a^\star - P_3^\star)^2 = (m_a - E_3^\star)^2 - |\underbrace{\vec{p}_a^\star}_{=0} - \vec{p}_3^\star|^2 \quad (0.55)$$

$$s_{12} = m_a^2 - 2m_aE_3^\star + \underbrace{E_3^{2\star}}_{m_3^2} - p_3^{\star 2} \quad (0.56)$$

$$s_{12} = m_a^2 - 2m_aE_3^\star + m_3^2 \quad (0.57)$$

$$E_3^\star = \frac{m_a^2 + m_3^2 - s_{12}}{2m_a} \quad (0.58)$$

$$E_1^\star = \frac{m_a^2 + m_1^2 - s_{23}}{2m_a} \quad (0.59)$$

$$E_2^\star = \frac{m_a^2 + m_2^2 - s_{31}}{2m_a} \quad (0.60)$$

Para calcular o momento das partículas.

$$E_i^{\star 2} - p_i^{\star 2} = m_i^2 \quad (0.61)$$

$$p_3^{\star 2} = E_3^{\star 2} - m_3^2 = \frac{(m_a^2 + m_3^2 - s_{12})^2 - 4m_a^2m_3^2}{4m_a^2} \quad (0.62)$$

$$|p_3| = \frac{[(m_a^2)^2 + (m_3^2)^2 + s_{12}^2 - 2m_a^2s_{12} - 2m_3^2s_{12}]^{1/2}}{2m_a} \quad (0.63)$$

arrumando os termos com o que temos na expressão dada...

$$\boldsymbol{|p_3| = \frac{([M^2 - (m_{12} + m_3)^2)(M^2 - (m_{12} - m_3)^2)]^{1/2})}{2M}}$$

Prolema 10a:

Prove o decaimento abaixo:

$$\pi + p \to \pi + \pi + \pi + p$$

`Resposta` :

O processo acima trata da produção elástica de píons a partir da interação de um píon com um próton. A energia de centro de massa deve ser maior que a soma da massa de repouso das partículas criadas, para que haja conservação de energia. Ou seja:

$$\sqrt{s} \geq \sum_{i=1} m_i \tag{0.64}$$

Vamos determinar a variável s. Da definição de s, temos:

$$s = (p_\pi + p_p)^2 = p_\pi^2 + p_p^2 + 2p_\pi p_p = m_\pi^2 + m_p^2 + 2(E_\pi E_p - \vec{p}_\pi \cdot \vec{p}_p)$$

Vamos considerar o próton em repouso (ou, de forma mais geral, porém equivalente, o referencial onde o próton está em repouso). Desta forma, $|\vec{p}_p| = 0$ e $E_p = m_p$. Teremos:

$$s = (p_\pi + p_p)^2 = p_\pi^2 + p_p^2 + 2p_\pi p_p = m_\pi^2 + m_p^2 + 2E_\pi m_p$$

A energia do píon será:

$$E_\pi = \frac{s - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p}$$

Mas, da Equação 0.64, podemos escrever:

$$E_\pi \geq \frac{(\sum_i m_i)^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p}$$

No caso da produção elástica de 2 píons, temos que $\sum_i m_i = 2m_\pi$
Portanto:

$$\boldsymbol{E_\pi \geq \frac{4m_\pi^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p} = \frac{3m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p} = \frac{3 \times 135^2 - 938^2}{2 \times 938} \sim 500} \text{ MeV}$$

Prolema 11:

Prove a equação abaixo

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2}$$

`Resposta` :

A massa invariante é a porção da massa total de um objeto (ou de um sistema de objetos) que é independente do movimento geral do sistema. Em outras palavras, é uma característica do sistema que é independente do sistema de referência, é um invariante. Se existe um referencial de centro de massa, então a massa invariante é a massa de repouso neste sistema de referência. Em outros sistemas de referência, a massa total do sistema é maior ou igual a sua massa invariante.

No caso de uma única partícula, sua massa invariante é sua massa de repouso, que já é por si só um invariante de Lorentz:

$$m_0 = E^2 - |\vec{p}|^2$$

Considere agora o decaimento de uma partícula. Como a massa invariante é determinada por quantidades que são conservadas durante o decaimento, o cálculo da massa invariante a partir da energia e *momentum* dos produtos desse decaimento é igual a massa invariante da partícula que decaiu. Em outras palavras, podemos calcular a massa invariante a partir da soma da energia e do *momentum* dos produtos de um decaimento, obtendo a massa invariante da partícula de decaiu:

$$M = \sqrt{\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2}$$