

母平均の「補助線」の推定

川田恵介

2024-10-27

Table of contents

Preface	5
Reference	5
第 1 章 要約の基本コンセプト	7
1.1 観察できない変数が引き起こす問題	7
1.2 コンセプト: 集計	8
1.3 少数事例の集計	10
1.4 Reference	10
第 2 章 母分布	11
2.1 頻度論	11
2.2 コンセプト: 母分布とサンプリング	12
2.3 数値例	13
2.4 大数の法則	15
2.4.1 信頼区間	15
2.5 Reference	17
第 3 章 データ上での OLS	19
3.1 線型モデル	19
3.2 OLS	20
3.3 例	21
3.3.1 単回帰	21
3.3.2 重回帰	22
3.3.3 交差項と高次項の導入	23
3.4 R による実践例	24
3.4.1 準備	24
3.5 Reference	25
第 4 章 母集団上での OLS	27
4.1 Population OLS	27
4.2 OLS = Population OLS の推定	29

4.3	モデルの複雑化	31
4.4	R による実践例	34
4.4.1	準備	34
4.5	Reference	36
第 5 章	LASSO	37
5.1	推定方法	37
5.1.1	事例数の拡大	39
5.2	信頼区間	39
5.3	R による実践例	40
5.3.1	準備	40
5.4	Reference	45
第 6 章	応用: 予測	47
6.1	推定目標	47
6.1.1	完璧な予測は不可能	47
6.1.2	理想の予測モデル	48
6.2	予測性能の測定	48
6.3	R による実践例	49
6.3.1	準備	49
6.4	まとめ	51
	Reference	51

Preface

X 内での Y の平均値 (“条件つき” 母平均) を推定する方法を紹介します。母平均の推定値は、さまざまな実務で活用されており、特に予測問題において、最も代表的な予測値となります。

伝統的には OLS が、母平均の推定方法として用いられてきました。近年、OLS は母平均の仮想的な線型モデル (“補助線”) を推定する手法として、理解できることが強調されています (Angrist and Pischke 2009; Aronow and Miller 2019)。仮にモデルの定式に誤りがあり、OLS の推定結果と母平均が一致することがあり得なかったとしても、推定結果は母平均の補助線として常に解釈できることがその理由です。

また近年では、機械学習の手法も積極的に活用されています。本ノートでは、OLS が”研究者が設定した母平均のシンプルなモデル”を推定する方法として優れていることを強調します。もしより複雑なモデルを推定したい場合は、OLS はその有効性を失います。このような”複雑なモデル”を推定する優れた方法として、LASSO を紹介します^{*1}。

最後に母平均の特徴を捉えることに成功した予測モデルは、予測においても有効であることを論じます。

Reference

^{*1} 他の予測モデルの推定方法については、[James et al. \(2021\)](#) 参照

第 1 章

要約の基本コンセプト

OLS や LASSO は、データが持つ特徴を要約するモデルを推定します。要約は、データ分析における中核的アイデアであり、その重要性の理解が分析の第一歩となります。本章では、要約の重要性を論じます。

1.1 観察できない変数が引き起こす問題

データから観察できない変数の存在は、あらゆる事例分析の最も深刻な問題の一つです。このような変数への対処について、膨大な議論が蓄積されています。

観察できない変数をもたらす問題は、個別事例分析において特に顕著です。以下では、取引価格 (Price; 単位 = 100 万円) = Y と物件の特徴 = X の関係性を把握するために、個別事例を丹念に見ていきます。例えば、以下の 2 億円で取引されている物件が、データの中に含まれていました。

Price	Size	TradeYear	LargeDistrict	Tenure
200	105	2022	中心 6 区	31

この事例から、部屋の広さが 105 平米で中心 6 区 (港、中央、千代田、新宿、渋谷、文教) に立地する物件は、2 億円で取引される傾向があったと結論づけても良いでしょうか？ほとんどの応用でこのような推測は、不適切です。

同じデータの中に、取引価格以外全く同じ特徴を持つ物件の取引事例が、以下の 3 件ありました。これらの事例と比較すると、2 億円はかなり高い価格での取引だったことがわかります。

Price	Size	TradeYear	LargeDistrict	Tenure
200	105	2022	中心 6 区	31

150	105	2022	中心 6 区	33
92	105	2022	中心 6 区	21
110	105	2022	中心 6 区	30

なぜこのような取引価格のブレが生じるのでしょうか？データの誤入力など潜在的な理由は複数ありますが、有力なのは**このデータに含まれない重要な変数**が存在することです。例えば、最寄駅や公園の近くにあるか否かなど、より詳細な立地情報が考えられます。あるいは売り手や買い手の”交渉力”を反映している可能性もあります。このような多様な要因が、取引価格に影響を与え、結果として事例の下振れ/上振れが生じます。

観察できない変数は不動産のみならず、労働者や家計、企業、あるいは国レベルの分析でも同様の問題を引き起こします。観察できる変数 X が一致した事例内でも、観察できない変数は事例間で大きく異なっている可能性が高く、結果 Y の値に大きな差が生まれます。そして現実の社会や市場の複雑さを考慮すると、どれだけ詳細な調査を行ったとしても、 Y に影響を与える全ての要因を観察することは困難です。

1.2 コンセプト: 集計

先の個別事例分析では、観察できない変数の偏りを確認する方法として、同じ X を持つ事例との整合性を確認しました。このようなアプローチの発展として、同じ X を持つ事例集団について、 Y の特徴を要約する方法があります。例えば、平均値や分散、中央値、あるいは研究者による”所見”や”印象”、代表的な事例を紹介するなどです。

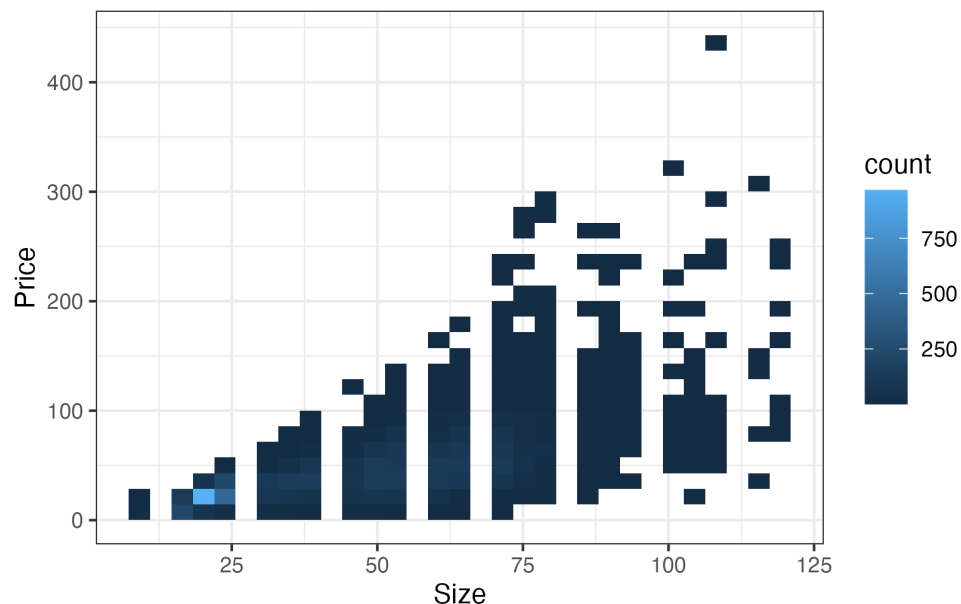
恣意的な分析を避けるためには、調査計画を立てる時点で、要約方法も決定し、分析を通じてコミットすることが望めます。代表的な値の候補としては、中央値や最頻値など多くの候補があります。現状よく用いられるのは、平均値の活用です。

! データ上の平均値

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_N}{N}$$

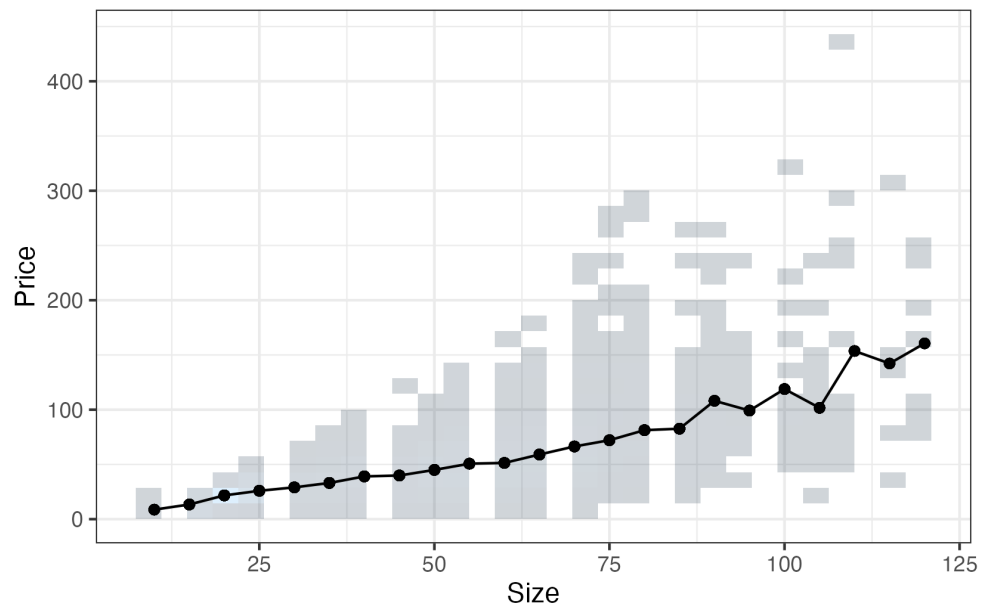
ただし Y_i は第 i 事例の値、 N は事例数を表す。

以下では、価格 (Price) と広さ (Size) について、データに含まれる事例の分布を Heat map で図示しています。



上記の散布図は、社会分析に用いるデータの持つ典型的な特徴を表しています。極めて乱雑であり、同じ X でも Y が異なる事例が多くなっています。これは、観察できない変数の偏りが深刻である可能性を示唆しています。また X の値に応じた事例数の偏りも顕著であり、特に 100 平米を超えるような物件の取引事例は少なくなっています。

以下の各点は、各 X の組み合わせごとに計算されたデータ上の平均値を図示しています。



同図からは、 Y と X のデータ上の関係性について、いくつか示唆を与えています。部屋が広くなると取引価格は高くなる傾向があります。

しかしながら多くの応用では、このような X ごとに集計するだけでは、不十分です。本ノートでは、以下の少数事例の問題に注意が必要です。

1.3 少数事例の集計

平均値は有力な要約方法ですが、算出に使用する事例の数に注意してください。上記の図では、特に 100 平米を超える物件について、事例が少なくなっています。Chapter 2 では、仮に平均値を計算するとしても、事例数が少ないと、各事例の観察できない変数の偏りの影響を強く受ける可能性を指摘します。Chapter 3 と Chapter 5 では、このような小規模事例の集計問題を緩和するための手法として、OLS や LASSO を紹介します。

1.4 Reference

第2章

母分布

2.1 頻度論

少数事例の集計が引き起こす問題を正確に理解するために、頻度論と呼ばれる概念的枠組みを導入します^{*1}。

まず、「自分と同じ課題に取り組む他の研究者達」を想像してください。この研究者達は、あなたと同じ社会を対象に同じ手法を用いて分析しています。ただし共通のデータではなく、独立して収集した異なるデータを用いるとします。このような独立した研究者達は、あなたと同じ分析結果に到達するでしょうか？

簡単な理科の実験であれば、到達することは可能です。例えば水の沸騰温度については、「水に不純物を入れない」、「大気圧が通常」などの実験の手続きを守れば、100度で沸騰します。このため誰がやっても同じ結果が導かれる”科学的事実”に合意することは容易です。

対して現実社会における多くの現象について、独立した研究者が同じ結論に到達することは困難です。なぜならば、分析に用いる事例が異なるためです。ほとんどの応用で、独立して収集したデータが、完全に一致する可能性は無視できるほど小さいでしょう。このため、ある研究者が観察した事例を、別の研究者は確認できない可能性が高くなります。

！ 事例：報道機関による世論調査

分析結果の不一致の典型例として、報道機関による世論調査が挙げられます。複数の機関による調査結果が、毎月公開されますが、その結果は各社で異なります。理由は複数考えられますが、最も単純なものは、調査対象となる回答者が異なるためです。典型的な世論調査では、各社が独立して電話番号をランダムに発生させるなどの方法で、1000-2000名ほどの回答者を極力ランダムに選んでいます。しかし

^{*1} 頻度論以外にはベイズ法と呼ばれる枠組みもあります。Lin (2024)などを参照ください。

ながら、異なる調査に同じ人が回答する確率は、非常に低く、必然的に調査結果も異なります。

観察できない事例の存在は、観察できない変数の偏りをもたらします。ある研究者には、偶然、公園に近い物件の取引事例ばかり集まってくるかもしれません。このような研究者のデータで計算された取引価格の平均値は、他の研究者と比べて、上振れる可能性が高くなります。すなわち要約した値であったとしても、研究者間で同じ値に合意できなくなります。

事例研究において、人々が同じ結果を観察できない、という問題は深刻です。なぜならば、「独立した個人や組織が同じ結果を観察できるので推定結果を事実として認定する」、という強力な枠組みが活用できないからです。この問題に対処するためには、何らかの概念的な枠組みが必要となります。

2.2 コンセプト：母分布とサンプリング

観察できない事例の問題と、それに伴う分析結果の不一致の問題を適切に論じるために、母分布という分析概念を導入します。母分布は、すべての研究者に共通した**正答 (推定対象)**と各々のデータから得られる**回答 (推定値)**を、分離することを可能にします。

！ 母集団とサンプリング

以下を想定する

- 私たちが手にしているデータは、**母集団**という無数の事例の集団から、選ばれた (**サンプリングされた**) 限られた構成されている
 - 母集団の全ての事例を用いて算出された値を**推定対象**と呼ぶ
 - サンプリングされたデータから算出された値を**推定値**と呼ぶ
- 本ノートでは、事例は完全ランダムに選べる (ランダムサンプリング) を想定します。

私たちが得られる推定値は、このランダムに選ばれた一部の事例のみから得たものであり、推定対象とは一致しません。

例えば日本における男女間家事分担格差の実態把握を行いたいとします。この場合、母集団は日本の家計全体となります。もし日本の家計全体における家事負担を把握できれば、推定対象は容易に回答可能です。しかしながら私たちのデータは、家計全体の一部であり、そこから得られる推定値 (例えばデータ上の平均的な家事分担) は、推定対象 (日本全体の平均的な家事負担) とは異なります。このため日本全体では「女性の方が男性よりも家事負担が大きい」としても、データに含まれる事例が偶然偏り、「夫の家事負担がより大きい」という推定値を誤って示す可能性があります。

母集団として、仮想的な集団を想定することもできます。例えば、あるコンビニのレジデータに、ある日の全ての来客者について、購入金額が全て記録されているとします。この場合、現実の来客者全てが記録されているため、母集団は存在しないとも考えることも可能です。一方で、その日にコンビニを訪れた顧客は、潜在的な顧客の一部であると想定することもできます。皆さんも、よく利用するコンビニであったとしても、毎日利用しないのではないのでしょうか？この場合の母集団は、潜在的な顧客となります。

母集団を想定すると、母集団における変数の分布も定義できます。例えば、「取引物件の母集団において、中心 6 区に立地する物件の割合は 2 割」、といった感じです。また母分布を定義できれば、そこから母集団における平均値 (母平均) も定義できます。

! 母平均

Y の母集団における平均値

平均値の推定を目指す研究であれば、この母平均が推定対象となります。例えば、「中心 6 区に立地する 50 平米の中古マンションの 2022 年における平均取引価格は 5000 万円」、といった感じです。

注意が必要なのは、「我々には母分布や母平均を正確に知ることは不可能である」ことがデータ分析法の前提である点です。知ることができない母分布や母平均を、手元にある限られたデータから、推測するのが、データ分析の中心的な挑戦となります。データが母集団の一部であり、観察できていない事例が存在する以上、データ上の平均値と母平均は一致しません。またデータはランダムに選ばれているので、独立した研究者間で、平均値について厳密な合意はできません。

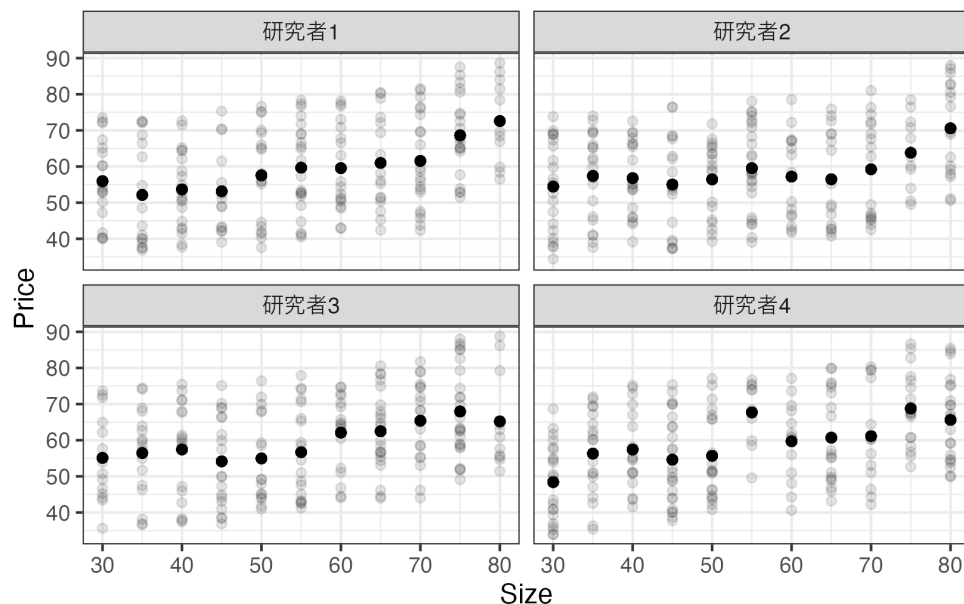
2.3 数値例

以上の概念を明確にするために、簡単な数値実験を行います。今、4 名の研究者が独立して 20 事例を集めたとします。各事例について、取引価格 Y と部屋の広さ X がデータから観察できるとします

母分布は以下のように設定しています。

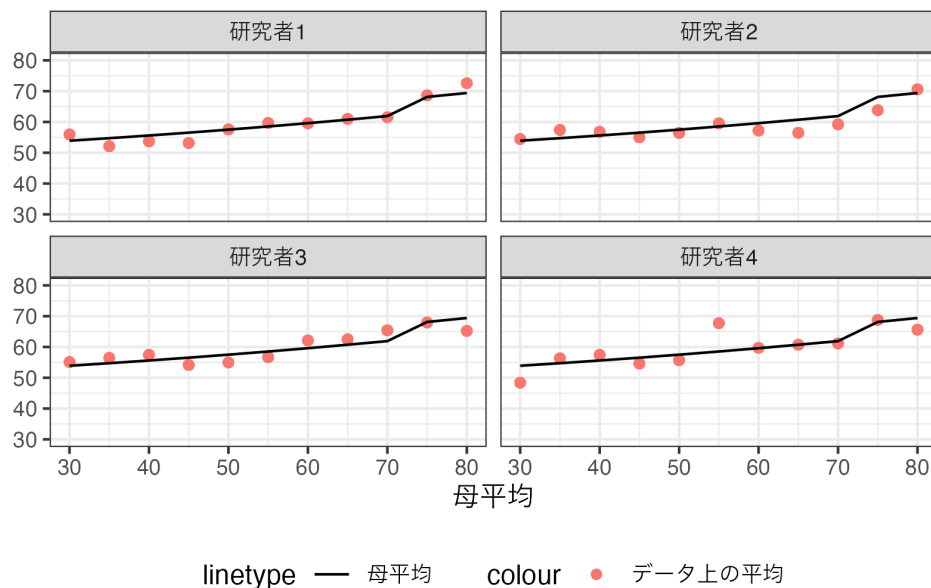
- 部屋の広さは、 $X \in \{30, 35, 40, \dots, 80\}$ が同じ割合で存在
- 取引価格は、広さが 70-75 平米の間、急上昇する

以下の図は、4 名の研究者が手にするデータと平均値を図示しています。



平均値について、研究者間で大きな違いが見られます。

この図に母平均を上書きすると以下ようになります。ただし図を簡略化するために、各事例の値は排除します。



重要な点として、母平均とデータ上の平均は乖離していることを確認してください。また乖離の仕方は、研究者によって異なります。言い換えるならば、母平均は全員共通である一方で、データ上の平均値は異なっています。

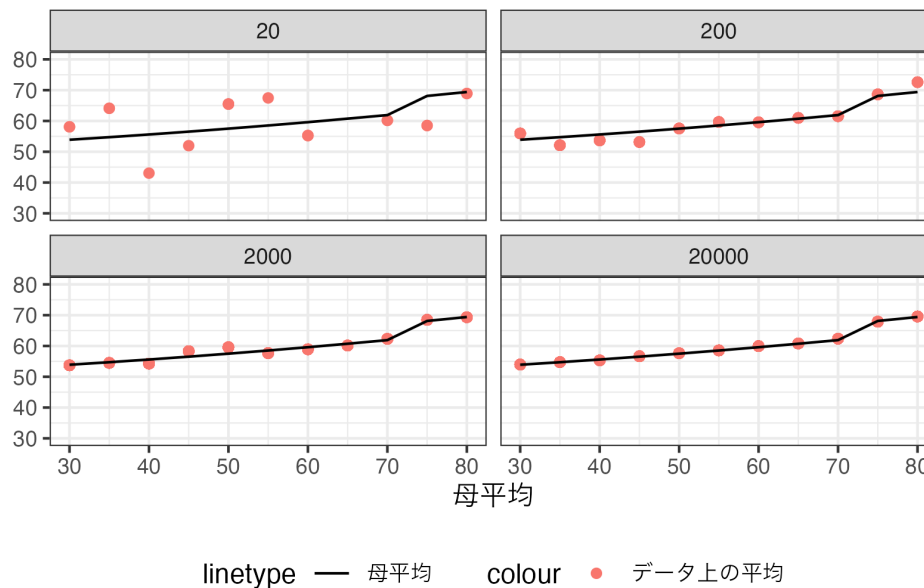
2.4 大数の法則

母平均を知る”唯一”の方法は、各 X の組み合わせについて、無限大の事例数で平均値を計算することです。これは大数の法則が成立するためです。

! 一致性

無限大の事例数をもつランダムサンプリングデータにおいて、計算された Y の平均値は、母平均と一致する。

以下では、事例数を 20,200,2000,20000 に随時変更した数値例を示しています。



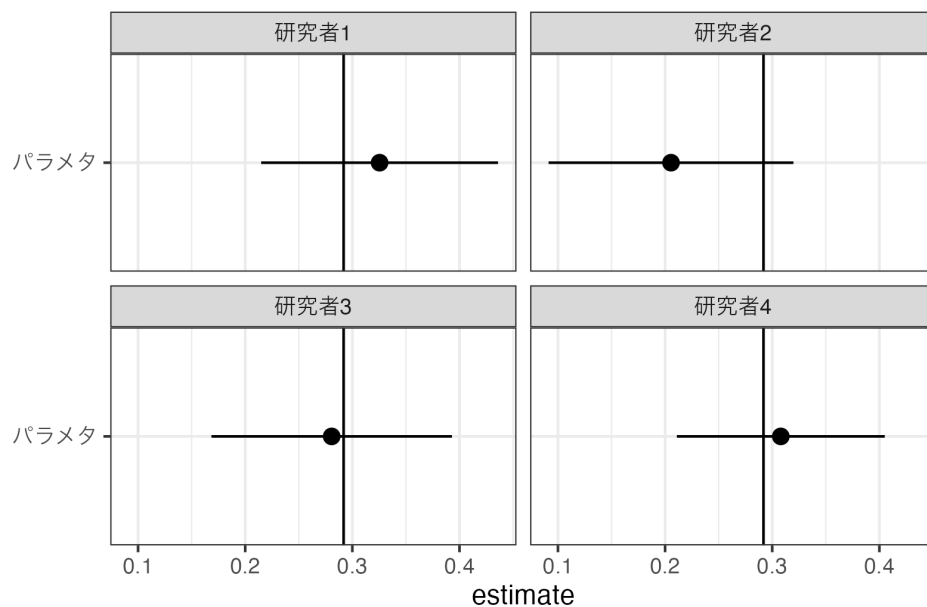
20 事例では、母平均とデータ上の平均値が大きく乖離していますが、20000 事例ではほぼ一致していることが確認できます。

一致性は重要な理論的性質ですが、実践上の含意は限られています。多くの応用において、大量の X の組み合わせが発生します。このため十分な事例数を確保することができず、小規模事例の集計の問題と向き合う必要があります。

2.4.1 信頼区間

一致性は、データ上の平均値と母平均が一致を、無限大の事例数においてのみ保証します。現実の事例数では、データ上の平均値と母平均は一致せず、研究者間でのばらつきも残ってしまいます。

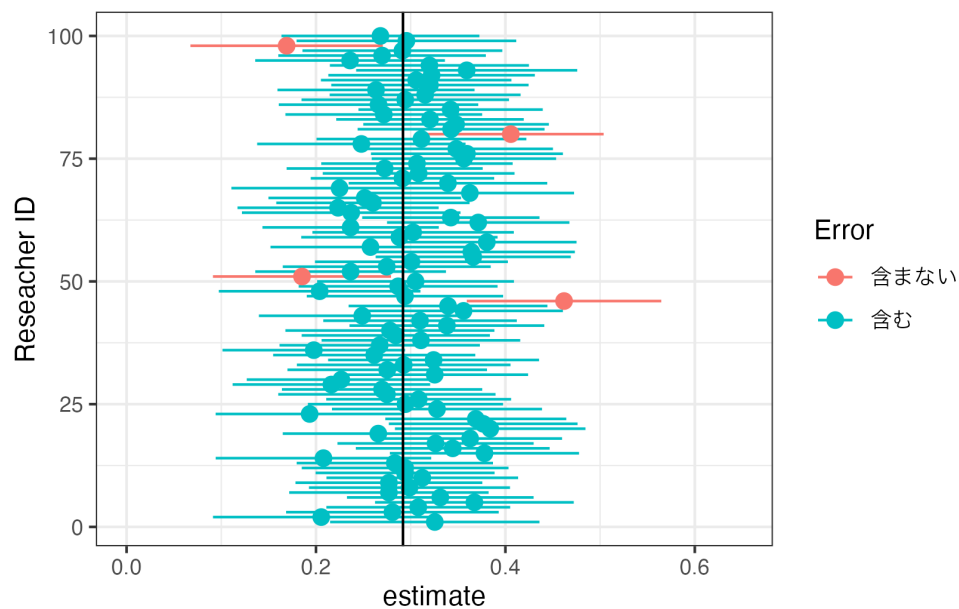
実際のデータ分析では、推定結果は**信頼区間**と共に示すことが一般的です。信頼区間とは、一定の確率（初期値では 95%）で、母平均を含む区間です。例えば 200 事例を用いて計算した平均値の信頼区間は以下です。



点で推定値、横線で 95 % 信頼区間、縦線が母平均を示しています。

本数値例では、4 名の研究者全員が、母平均を含む信頼区間を獲得できています。

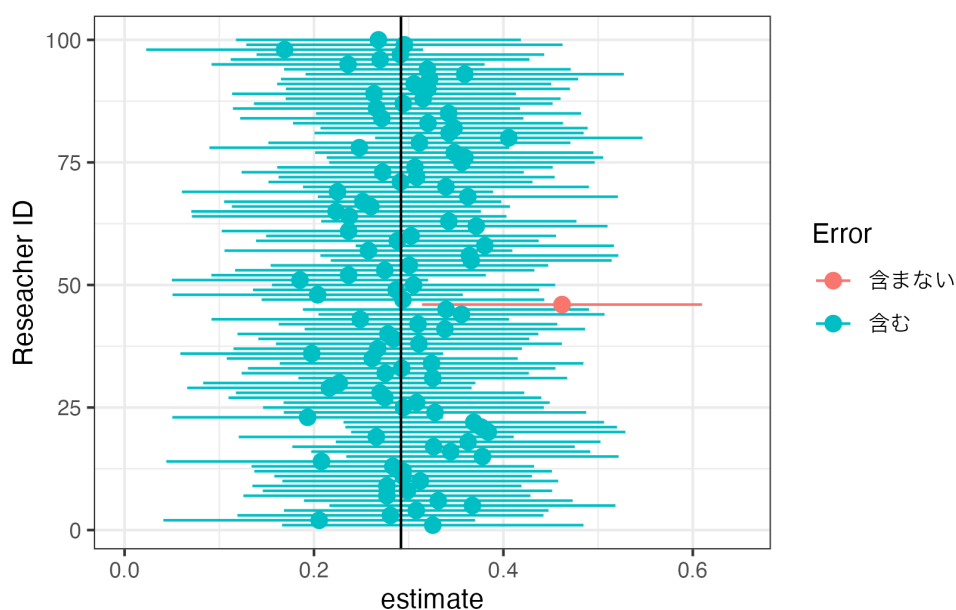
同じ数値例を、“100 名の研究者” 分実施した結果は以下です。



縦軸は研究者の名前 (ID) を示しています。「不幸にも」母平均を含まない信頼区間が推定されてしまった研究者は、赤字で示しています。100 名中 6 名 (概ね 95%) は、このような不幸に見舞われており、信頼区間の想定と整合的です。

実際の応用では、研究者自身は、自分が運の悪い 5% となるか、それとも幸運な 95% になるのかは、判断できません。通常は、「5% のリスクは低い」、として自身が計算した信頼区間の中に真の値が含まれているとして、結論を論じます。

このリスクを変更することは容易です。たとえばリスクを 0.5% に変更した場合の 99.5% 信頼区間は以下です。



「不幸な」研究者は 100 名中 1 名のみとなりましたが、その代償として信頼区間が拡大しています。すなわち結論を不明確にする代わりに、ミスリードな主張をするリスクを減らしています。

注意が必要なのは、「不幸な」研究者が発生する確率を 0% にすることは一般に不可能だということです。「100% 信頼区間」を計算しようとすると、区間の幅は無限大になります。

! 定義: 信頼区間

一定の確率 (初期値では 95%) で、母平均を含む区間

2.5 Reference

第 3 章

データ上での OLS

少数事例の要約を避けるためには、より”荒い”要約が必要となります。荒い要約の代表例として、手元のデータから Y の平均値が持つ性質を簡便に捉えるモデルである、線型モデルを紹介します。また線型モデルを推定する方法として最小二乗法 (OLS) を紹介します。

本アプローチは、研究者が任意にモデルを単純化することが可能です。適切な単純化がなされるのであれば、限られた事例数のもとでも、母平均の特徴を類推する有効な方法となり得ます Chapter 4。

3.1 線型モデル

Y の平均値と X の関係性を記述するモデルを導入します。

! 線型モデル

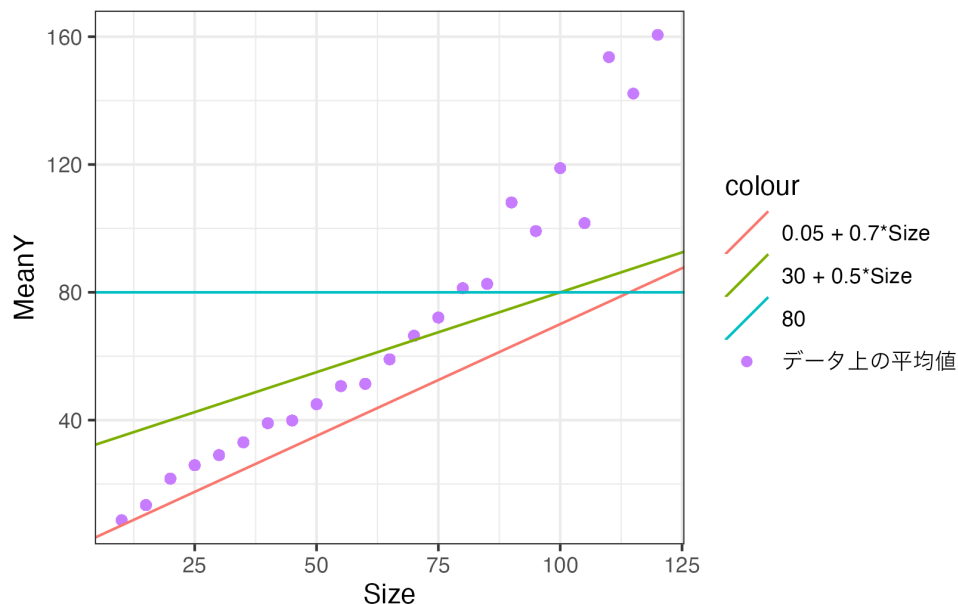
$$Y \simeq \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_L X_L$$

- β_0, \dots, β_L はパラメタと呼ぶ

以下では β_0, \dots, β_L を決定する具体的な方法として、OLS を紹介します。

線型モデルをどのように解釈すれば良いでしょうか？最も実践的な解釈は、平均値の”補助線”として捉えることです。

以下の図では、Price の平均値と Size の関係性を捉えるための 3 つの”補助線”を描きこんいます。すべて $\beta_0 + \beta_1 \times \text{Size}$ を使用し、パラメタの値のみ変更しています。



データ上の平均値は紫の点で示しています。赤線は $0.05 + 0.7 \times \text{Size}$ 、緑線は $30 + 0.5 \times \text{Size}$ を示しています。

水色線は 80、すなわち $\beta_0 = 80, \beta_1 = 0$ とした補助線を示しています。

赤線と緑線は、平均取引価格が持つ「Size とともに上昇する傾向がある」特徴をある程度とらえています。対して水色線は、このような特徴を捉えられておらず、不適切であると考えられます。モデルの大枠が同じでも、パラメタ β の値によって、適切な要約か否かが決まってきます。

3.2 OLS

パラメタの値は、データに基づいて決定されることが通常です。代表的な決定方法としては、最小二乗法 (OLS) が挙げられます。

! OLS の定義

1. 研究者が予測モデルの大枠を以下のように設定する

$$= \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_L X_L$$

2. 以下を最小化するように β_0, \dots, β_L を決定する

$$(Y -)^2$$

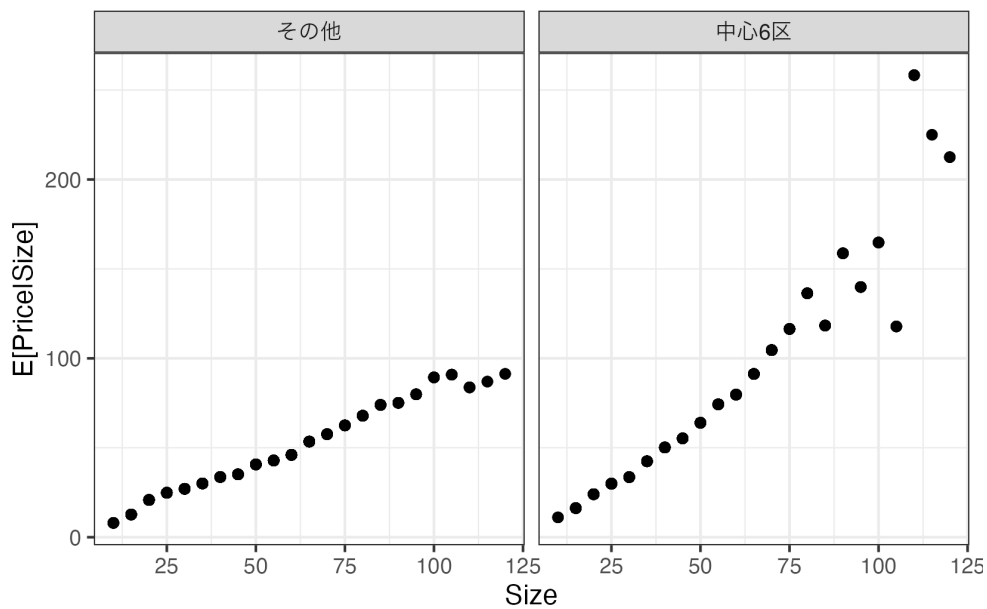
OLS は、研究者が事前に大枠を設定した予測モデルを、データに最も合うように推定す

る手法であると解釈できます。

3.3 例

3.3.1 単回帰

Size と立地 (中心 6 区か否か) に応じて、平均値を計算しました。



平均値の最もシンプルな線型モデルとして、以下を推定してみます。

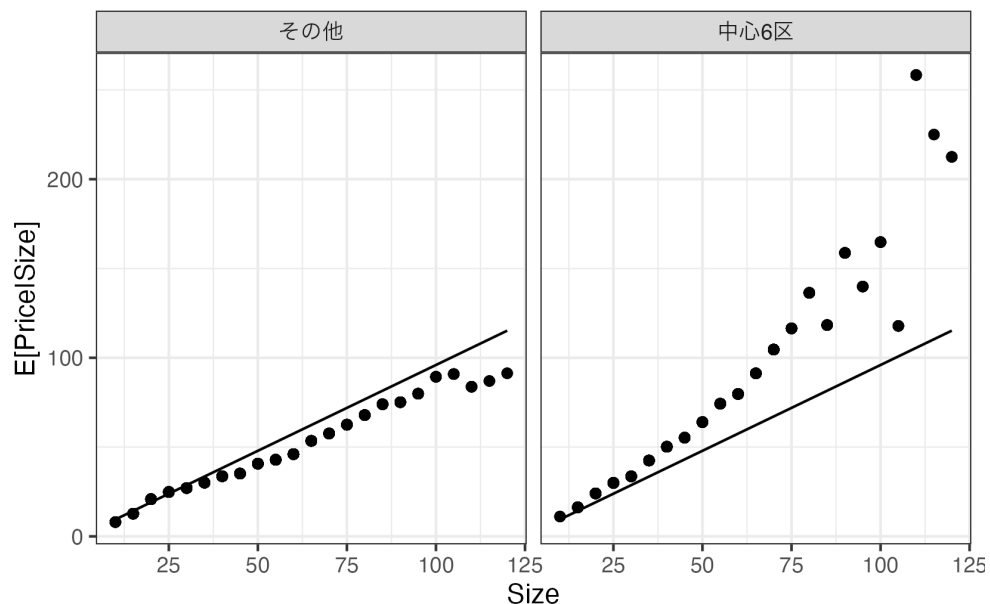
$$= \beta_0 + \beta_1 \times Size$$

β_0, β_1 は、以下のデータ上の平均二乗誤差を最小化するように推定します。

$$(Y - \hat{Y})^2$$

このような推定方法は、単回帰として教科書では紹介されてきました。

推定結果を図示すると、以下となります。



広い物件は取引価格が高くなる傾向を捉えることができます。しかしながら立地に関わらず同じモデルを当てはめており、中心6区の方が取引価格が高い傾向を捉えられていません。

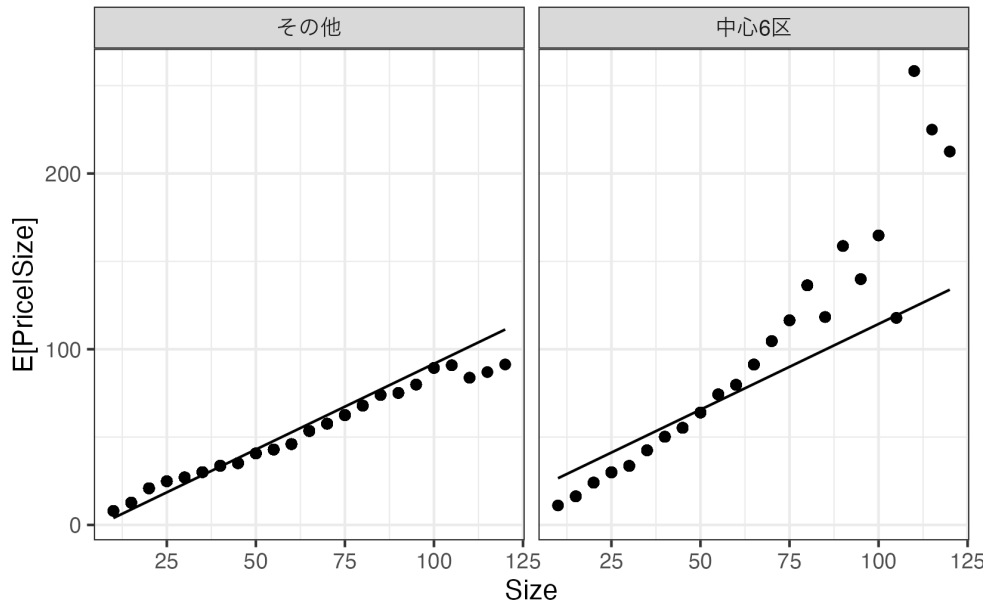
3.3.2 重回帰

District と平均取引価格の関係性を捉えるために、以下のモデルの推定を試みます。

$$= \beta_0 + \beta_1 \times \text{Size} + \beta_2 \times \text{District}$$

District は、中心6区に立地していれば1、それ以外では0を取ります。 β_0, \dots, β_2 は引き続き、データへの適合度を最大化するように推定できます。このような推定方法は、重回帰として教科書では紹介されてきました。

推定結果を図示すると、以下となります。



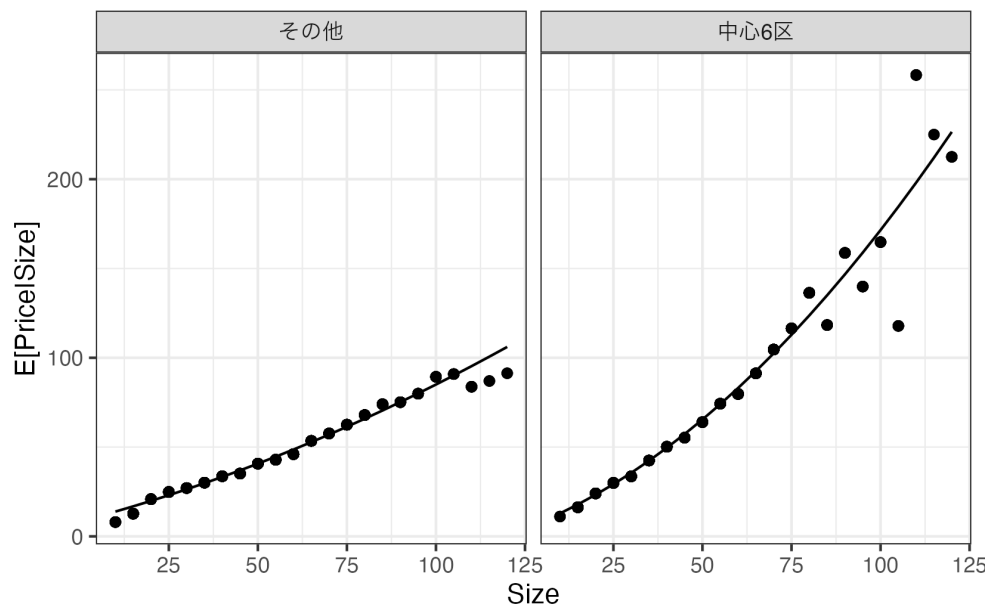
中心 6 区の方が平均取引価格が高いという性質を上手く捉えています。しかしながら、中心 6 区において広い物件の取引価格が一段上昇するという性質は捉えきれいていません。

3.3.3 交差項と高次項の導入

母平均が持つ複雑な性質を捉えるために、交差効果と高次項を導入し、さらに複雑なモデルを推定してみます。

$$\begin{aligned}
 &= \beta_0 + \beta_1 \text{Size} + \beta_7 \text{District} + \underbrace{\beta_2 \text{Size}^2 + \dots + \beta_6 \text{Size}^6}_{\text{高次項}} \\
 &\quad + \underbrace{\beta_8 \text{Size} \times \text{District} + \dots + \beta_{14} \text{Size}^6 \times \text{District}}_{\text{交差項}}
 \end{aligned}$$

このような複雑なモデルであったとしても、データへの適合度を最大化するように推定できます。



複雑なモデルを最小二乗法で推定すると、よりデータへの適合度を改善し、データ上の平均値に近づけることができます。しかしながら次節で論じる通り、母集団の特徴を捉えることを目標とするのであれば、このことは必ずしも望ましいとはいえません。なぜならば、データ上の平均値に近づくということは、少数の事例しかない X の組み合わせについては母平均から乖離するためです。

3.4 R による実践例

- 以下のパッケージを使用
 - readr (tidyverse に同梱): データの読み込み

3.4.1 準備

データを取得します。

```
Data = readr::read_csv("Public.csv") # データ読み込み
```

lm 関数を用いて OLS を推定します。

```
OLS = lm(Price ~ Size + Tenure + StationDistance,
        Data) # OLS
```

```
OLS
```


Call:

```
lm(formula = Price ~ Size + Tenure + StationDistance, data = Data)
```

Coefficients:

(Intercept)	Size	Tenure	StationDistance
19.7206	1.0199	-0.6392	-1.3851

Coefficients が β の推定値を示しています。例えば、推定された線型モデルにおいて、Size(部屋の広さ) と平均取引価格は正の関係性がありますが、Tenure(築年数) と StationDistance(駅からの距離) は負の関係性が見られます。

3.5 Reference

第 4 章

母集団上での OLS

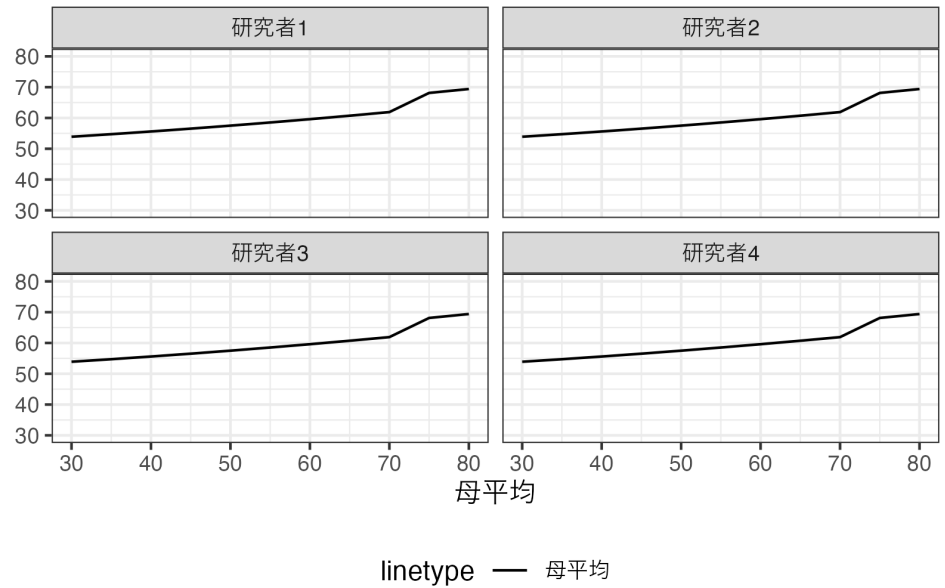
データ上で実施した OLS は、母集団の特徴について、何らかの含意を持つでしょうか？伝統的な教科書では、研究者が設定した線型モデルが、妥当な母平均のモデルであれば、OLS により推定された線型モデルは、母平均の優れた推定値であることが強調されます。しかしながら社会科学のほぼ全ての応用において、研究者が設定するモデルは、誤定式化 ((misspecification) を犯しており、どのように推定しても母平均から乖離してしまいます。

本章では、誤定式化を犯しているケースにおいても、OLS は母集団の特徴について明確な示唆を持つこと (Angrist and Pischke 2009; Aronow and Miller 2019) を紹介します。また誤定式化を減らすためには、モデルを複雑化する必要がありますが、パラメタの推定精度との間にトレードオフが生じることも強調します。

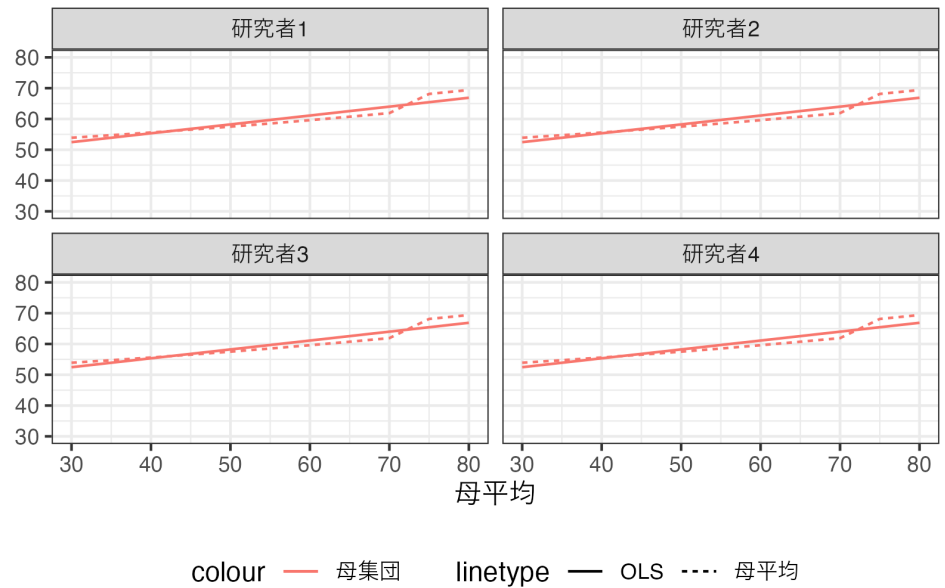
4.1 Population OLS

OLS の推定結果は、母集団上での**仮想的な** OLS の結果を推定していると解釈することができます。少しわかりにくい考え方なので、Chapter 2 における数値例とともに確認します。

仮想的な 4 名の研究者が、同じ母集団の特徴を解明しようとしています。母平均は、全研究者共通で、以下の通りとなります。



もし母集団上で、モデル $f(X) = \beta_0 + \beta_1 X$ を OLS 推定すれば、以下の推定結果を得ることができます。



Population OLS の結果は実践、母平均は点線で表しています。以下の要点に特に注意してください。

- Population OLS は、同じ”データ (母集団)”を用いて推定しているので、全ての研究者が同じ推定結果となります。

- 母平均とは必ずしも一致しません。本例において、母平均は 70~75 平米にかけて、平均取引価格が急上昇しています。しかしながら、“一直線”のモデルを推定しているため、このような傾向はモデルに反映されません。

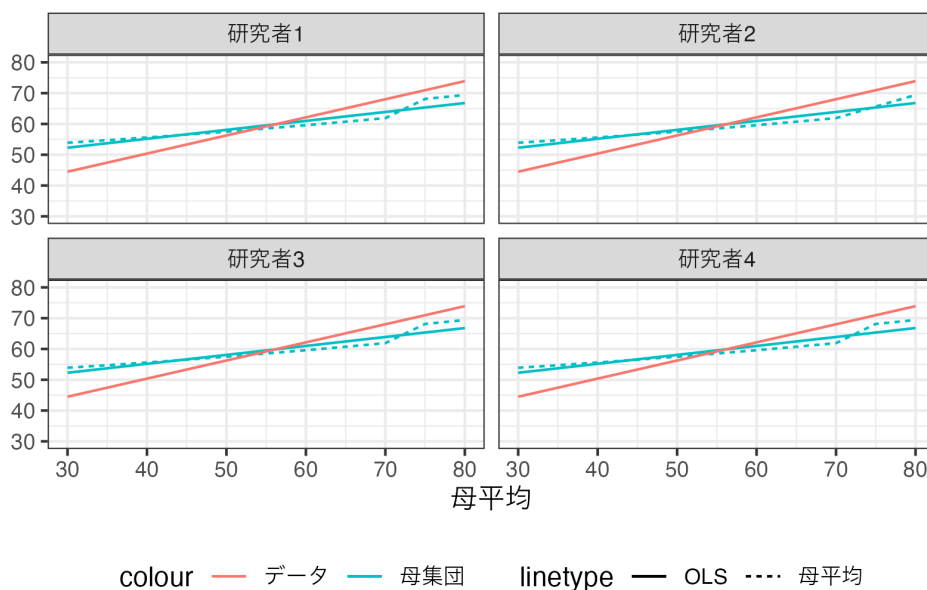
二番目の要点は、誤定式化の問題と呼ばれ、近年大きな議論がなされてきました。

! 誤定式化の定義

ある線型モデル $f(X_1..X_L) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + .. + \beta_L X_L$ について、 $(X_1..X_L)$ における Y の母平均とモデル $f(X_1..X_L)$ を一致させるような $\beta_0.. \beta_L$ は存在しない

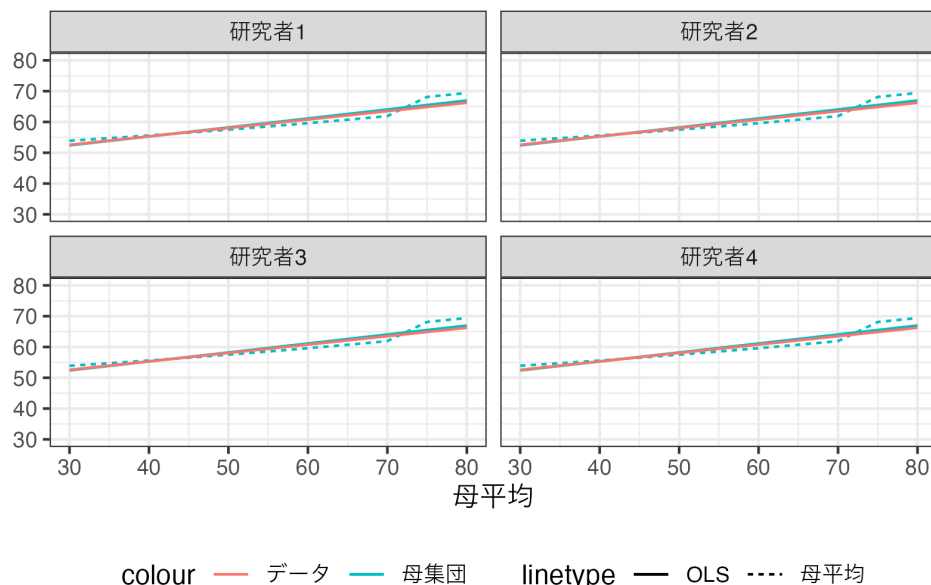
4.2 OLS = Population OLS の推定

現実において実行可能な推定は、母集団ではなく、そこからランダムに選ばれた事例を用いた OLS です。ここでは 50 事例を収集したとします。各研究者は独自にデータ収集を行うため、データ上で行う OLS の結果には違いが生じることに注意してください。



母平均は青の実線、Population OLS は青の点線、データ上での OLS の結果は赤の実線で示しています。

データ上の OLS 推定から得られるモデルは、母集団上での OLS と一致はしていませんが、かなり近い性質を持っています。事例数を増やすとさらに近くなることも確認できます。以下では 5000 事例まで増やしています。



全ての研究者について、Population OLS とデータ上での OLS の乖離 (赤と青の実践の乖離) は、“目視” できないほど小さくなっています。

注意が必要なのは、母平均とデータ上での OLS は引き続き乖離していることです。Population OLS と母平均が乖離している (誤定式化)、データ上での OLS は、どれだけ事例数が増えても母平均と一致しません。あくまでも Population OLS の結果に近づくだけです。

Population OLS とデータ上での OLS は、母平均とデータ上での平均値と類似した理論的関係性を持ちます。

！ 性質: 大表本性質

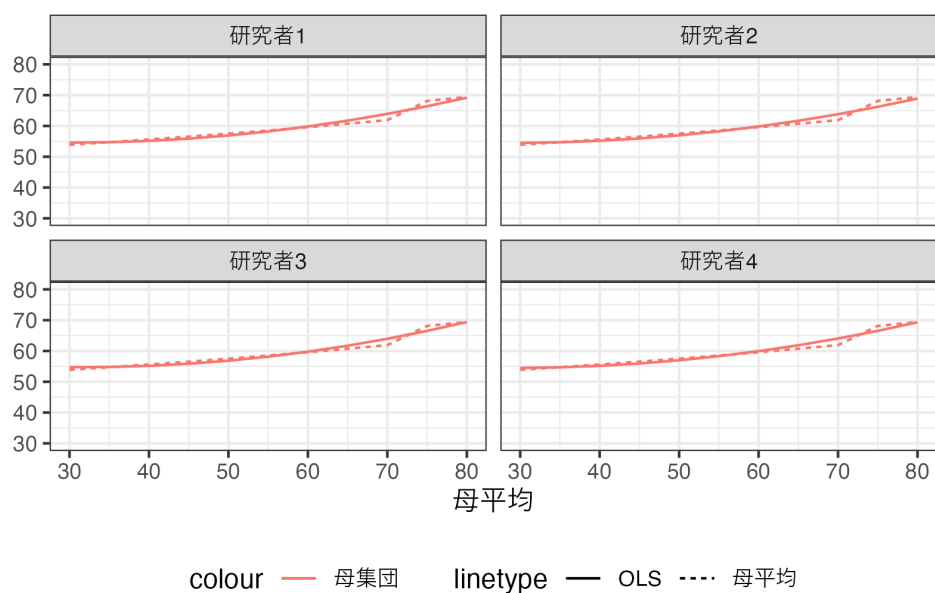
- 一致性: 事例数が無限大に大きくなると、データ上での OLS は Population OLS の結果と一致する。
 - 誤定式化がなければ、Population OLS と母平均は一致するので、データ上での OLS も母平均と一致する。
- 信頼区間: 事例数が、パラメタの数に比べて十分多いと、Population OLS の結果についての信頼区間を近似計算できる。

大標本理論は、データ上での OLS を Population OLS の推定値とみなすことを正当化します。しかしながら、母平均の推定値とみなすためには、誤定式化がないことが前提となります。誤定式化の確認は、社会データでは非常に困難です。特に X の数が多い場合、確立された確認方法は、筆者の知る限り存在しません。

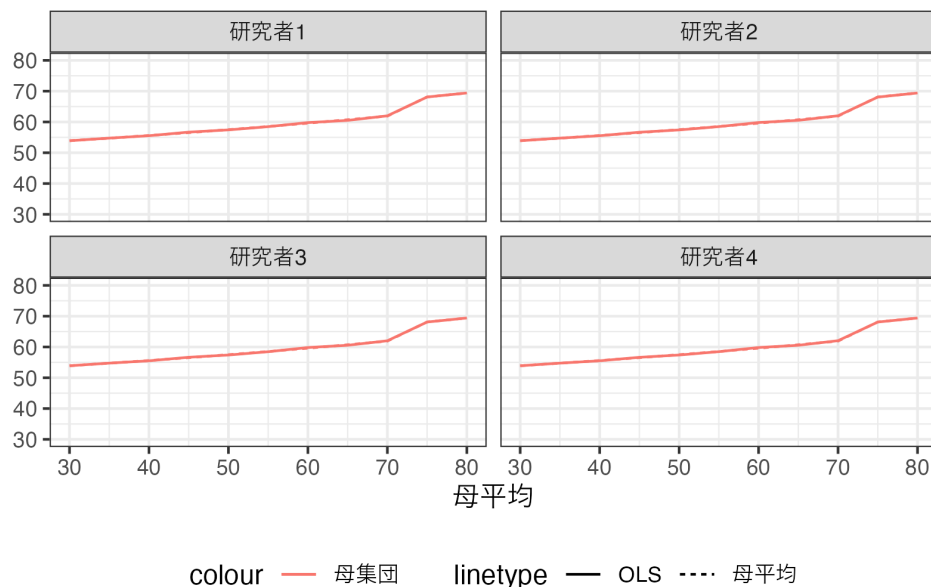
4.3 モデルの複雑化

実際の応用では、あらゆるモデルは誤定式化を犯している、少なくともその可能性を排除できない、と想定すべきです。特に社会現象や個人行動の大部分は Black Box であり、信頼できるモデルを想定することは、事実上不可能です。ただし誤定式化による母平均と Population OLS の乖離を削減することは容易です。

モデル $f(X) = \beta_0 + \beta_1 X$ に変わって、 $f(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$ を推定してみます。仮想的な Population OLS の結果は以下です。



$f(X) = \beta_0 + \beta_1 X$ の Population OLS の結果よりも、母平均に近づいていることが確認できます。さらに X の 8 乗まで加えると ($f(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \dots + \beta_8 X^8$)、Population OLS は母平均をほぼ近似できることが確認できます。

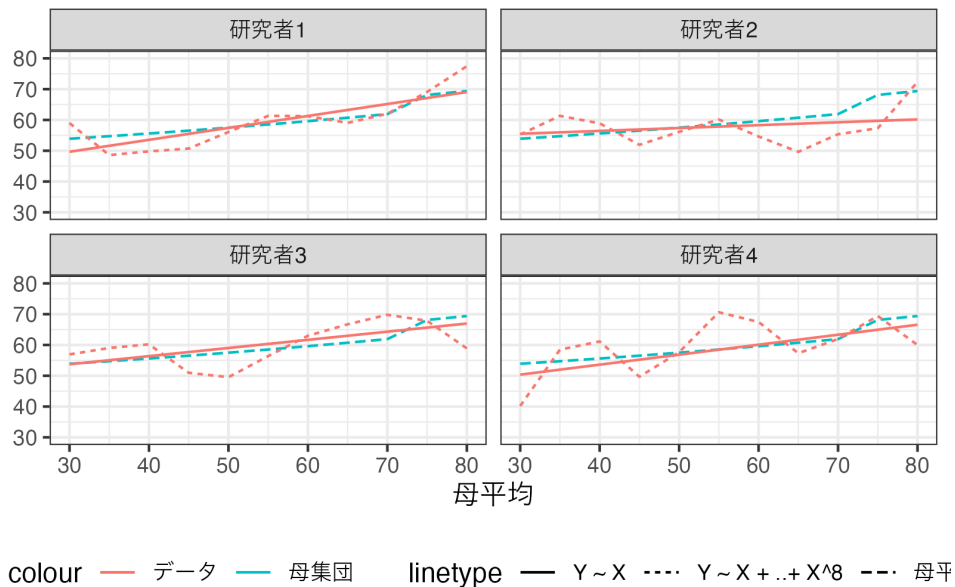


一般にモデルを複雑化する (β の数を増やす) と、Population OLS と母平均は必ず近づきます^{*1}。

もし母平均の推定が目的なのであれば、極力複雑なモデルを推定すべきでしょうか？ここで注意が必要なのは、Population OLS は実際には実行できず、事例数が限られたデータ上での OLS のみが可能なことです。

以下では 200 事例のデータについて、 $f(X) = \beta_0 + \beta_1 X$ ($Y \sim X$) および $f(X) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_8 X_8$ を OLS 推定しました。

^{*1} 多重共線性の発生など、例外的なケースは存在します。

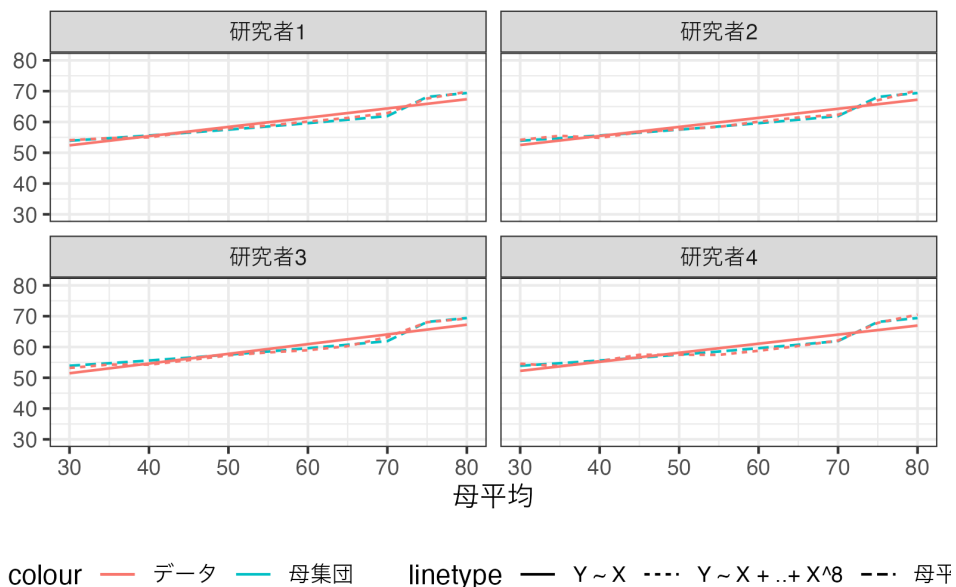


母平均は青の点線、データ上での OLS の結果は、複雑なモデルについては赤の点線、シンプルなモデルについては赤の実線で示しています。

複雑なモデルを推定した結果、単純なモデルよりも、母平均から大きく乖離した箇所が散見されました。さらに複雑なモデルについての推定結果は、研究者間で大きなばらつきが見られます。

これはモデルを複雑化した結果、データ上での平均値に近づくことに原因があります。限られた事例数のもとでは、小規模な事例のみから計算された平均値が発生します。このような小規模集計の弊害を減らす方法として、線型モデルを活用した集計を行っていますが、モデルを複雑化するとこの集計が再び上手くいかなくなります。このため小規模な事例の偶然の偏りを強く反映したモデルとなってしまう、結果母平均から大きく乖離してしまうリスクが高くなります。

この問題は、大規模事例が活用できる場合は、発生しにくくなります。例えば 20000 事例について、OLS 推定を行った結果は以下です。



複雑なモデルの推定結果は、母平均をよりよく近似していることが確認できます。

このようなモデルの複雑さをめぐる問題は、Bias-Variance トレードオフと呼ばれてきました。大規模事例を用いることができるのであれば、複雑なモデルが、母平均を上手く近似できます。事例数が少ない場合、複雑なモデルは、母平均から大きく乖離してしまう可能性が高く、「妥協的に」単純なモデルを推定することが現実的です。

応用上の問題は、適切なモデルの複雑さについて、理論的な示唆が限られていることです^{*2}。次の章では、複雑なモデルであったとしても適切に推定できる手法である、LASSO を紹介します。

4.4 R による実践例

- 以下のパッケージを使用
 - readr (tidyverse に同梱): データの読み込み
 - estimatr: OLS 推定 + 頑健な信頼区間の計算
 - dotwhisker: 信頼区間の可視化

4.4.1 準備

データを取得します。

^{*2} 赤池/バイズ情報量を用いるなどが有力です。

```
Data = readr::read_csv("Public.csv") # データ読み込み
```

lm 関数を用いて OLS を推定します。

```
OLS = estimatr::lm_robust(
  Price ~ Size + Tenure + StationDistance,
  Data,
  alpha = 0.05 # 95% 信頼区間を計算
) # OLS
```

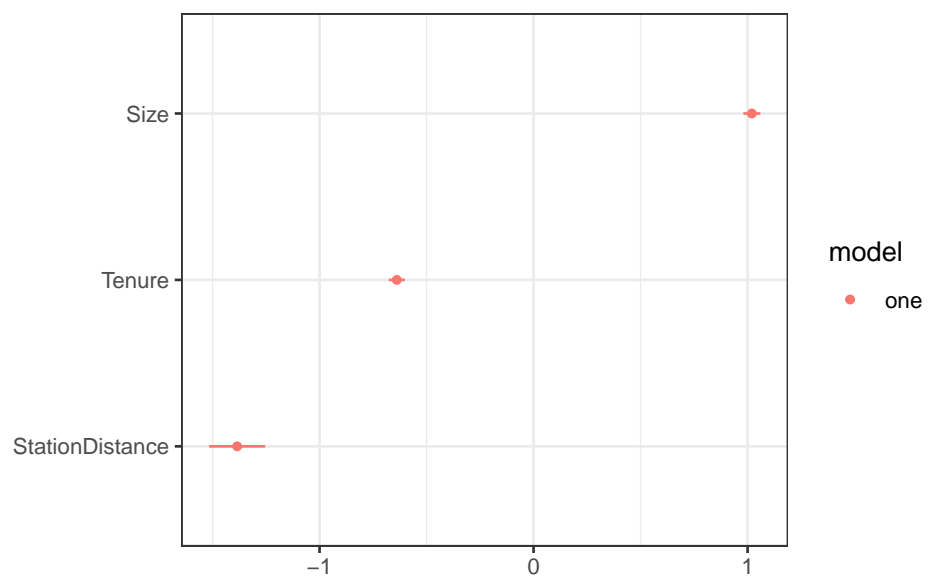
OLS

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	CI Lower
(Intercept)	19.7205516	0.62170089	31.72032	3.664958e-205	18.5018088
Size	1.0199061	0.02020485	50.47828	0.000000e+00	0.9802978
Tenure	-0.6391756	0.01919741	-33.29488	3.014245e-224	-0.6768090
StationDistance	-1.3850527	0.06684087	-20.72165	2.316510e-92	-1.5160833

	CI Upper	DF
(Intercept)	20.9392944	6374
Size	1.0595144	6374
Tenure	-0.6015422	6374
StationDistance	-1.2540221	6374

Estimate が β の推定値を、CI Lower/CI Upper が信頼区間の下限/上限を示します。例えば、推定された線型モデルにおいて、Size(部屋の広さ) と平均取引価格は正の関係性があります。さらに信頼区間は [18.5, 20.9] なので、Population OLS においても正の関係性があることを強く示唆しています。

上記の推定結果は、dotwhisker 内の dwplot 関数を用いて可視化できます。



4.5 Reference

第 5 章

LASSO

複雑なモデルを適切に推定する方法として、LASSO (Tibshirani 1996) を紹介します。LASSO は、罰則付き回帰と呼ばれる枠組みの一つの手法です。OLS と同様に線型予測モデルを推定しますが、データへの当てはまりだけでなく、モデルの複雑性も抑制することも目指します。

5.1 推定方法

例えば、以下のモデルの推定を目指します。

$$\beta_1 \text{Size} \times \quad + \dots + \beta_6 \text{Size}^6 \times \\ + \dots + \beta_{132} \text{Size} \times \quad + \dots + \beta_{138} \text{Size} \times$$

合計 138 個のパラメタがあり、事例数次第では、OLS 推定は深刻な過剰適合に直面します。これは OLS 推定が、以下を最小化するように β を推定しているためです。

$$(Y - \quad)^2$$

β の数が多いと、データへの不適合度 $(Y - \quad)^2$ をいくらでも低下させられるため、複雑なモデルを推定すると**データへの過剰適合** (母平均からの乖離) を引き起こします。

LASSO 推定では、 β の値を以下を最小化するように決定します。

定義 LASSO

$$(Y - \quad)^2 \\ + \underbrace{\lambda}_{\text{Tunning Parameter}} (\beta_1 + \dots)$$

λ は、データへの当てはまりではなく、モデルの予測性能を高めるように決定する。具体的には、交差検証を用いる方法、情報基準などの理論的な評価指標を用いる方

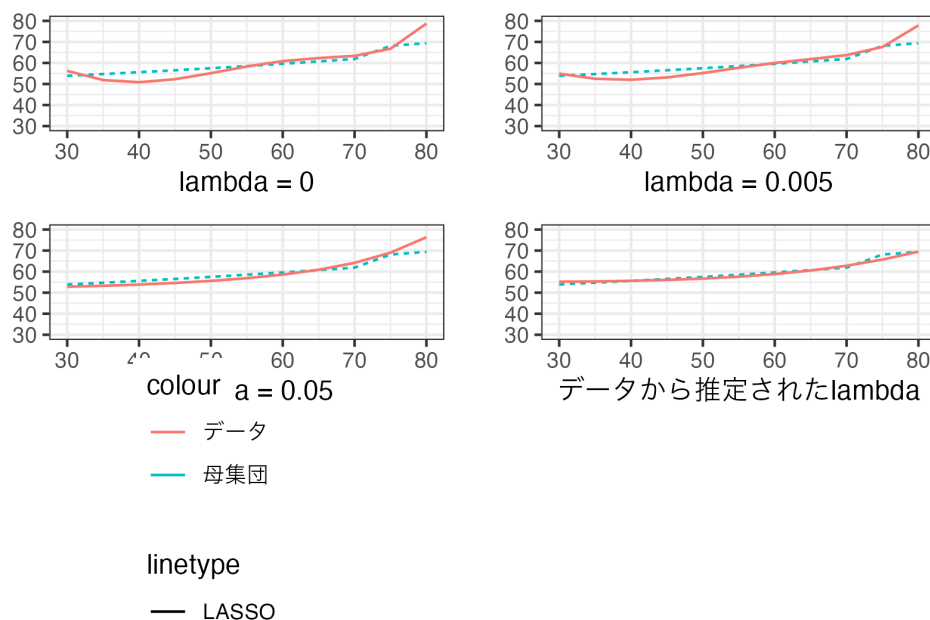
法などがある (Belloni, Chernozhukov, and Hansen 2014; Taddy 2017)。

λ に応じて、予測モデルがどのように変化するか考えてみます。 λ を変化させることで、予測モデルは、単純平均と複雑なモデルの OLS の間で変化することになります。 $\lambda = 0$ であれば、OLS と全く同じモデルを推定します。よって、複雑な線型モデルを推定した場合は丸暗記モデルに近いモデルとなります。 λ を非常に大きい値を設定した場合、 $\beta_1 = \beta_2 = \dots = 0$ となります。この場合は β_0 をデータに当てはまるように推定することになり、単純平均と一致します。

以下の数値例は、200 事例からなるデータについて、LASSO により以下のモデルを推定しました

$$\beta_0 + \beta_1 \text{Size} + \dots + \beta_6 \text{Size}^6$$

λ については、0, 0.005, 0.05、および赤池情報基準により選ばれた値 (Taddy 2017) を使用した結果を図示しています。



$\lambda = 0$ に比べると、 λ の値が大きくなるにつれ、モデルが単純な曲線に近づいていることが確認できます。また Taddy (2017) に基づいて設定された λ のもとでは、かなり単純化されたモデルが推定されたことも確認できます。

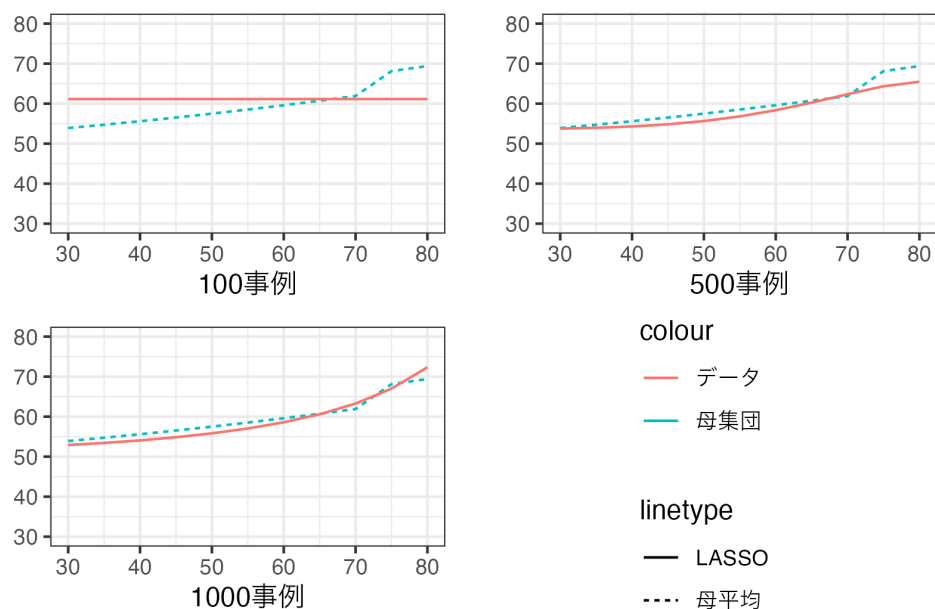
i 練習問題

λ は、 β と異なり、データへの当てはまりを最大化するように決定できません。なぜでしょうか？

5.1.1 事例数の拡大

推定結果は、一般に事例数に強く影響を受けます。特に LASSO などの機械学習の方法においては、データの特徴により強く依存します。

以下の数値例では、事例数を 100 事例から 1000 事例まで増やし、 $Y \sim Size + \dots + Size^{10}$ を LASSO で推定しています (λ は Taddy (2017) の方法で設定しています)。



事例数の増加とともに、モデルの複雑性が、「自動調整」されていることが確認できます。100 事例では、単純平均値が推定されており、極めて単純なモデルが採用されています。事例が増えると、モデルの傾きのみならず、「曲がり方」も変化し、モデルが複雑化しています。

5.2 信頼区間

LASSO による推定されたパラメタについて、信頼区間を計算する方法は盛んに議論されているものの、筆者の知る限り、現状確立された方法は存在しません^{*1}。

^{*1} 具体的な議論については、Chernozhukov, Hansen, and Spindler (2015); Kuchibhotla, Kolassa, and Kuffner (2022)、などを参照

5.3 Rによる実践例

- 以下のパッケージを使用
 - readr (tidyverse に同梱): データの読み込み
 - gamlr: LASSO

5.3.1 準備

データとその事例数を取得し、データをランダムに分割します。

```
Data = readr::read_csv("Public.csv") # データ読み込み

X = model.matrix(
  ~ 0 +
    (Size + Tenure + StationDistance + District)**2 + # 交差項
    I(Size^2) + I(Tenure^2) + I(StationDistance^2), # 二乗項
  Data
) # X の作成

X = scale(X) # 標準化

colnames(X) # X に格納されている変数の確認
```

[1] "Size"	"Tenure"
[3] "StationDistance"	"District世田谷区"
[5] "District中央区"	"District中野区"
[7] "District北区"	"District千代田区"
[9] "District台東区"	"District品川区"
[11] "District大田区"	"District文京区"
[13] "District新宿区"	"District杉並区"
[15] "District板橋区"	"District江戸川区"
[17] "District江東区"	"District渋谷区"
[19] "District港区"	"District目黒区"
[21] "District練馬区"	"District荒川区"
[23] "District葛飾区"	"District豊島区"
[25] "District足立区"	"District墨田区"
[27] "I(Size^2)"	"I(Tenure^2)"

[29] "I(StationDistance^2)"	"Size:Tenure"
[31] "Size:StationDistance"	"Size:District中央区"
[33] "Size:District中野区"	"Size:District北区"
[35] "Size:District千代田区"	"Size:District台東区"
[37] "Size:District品川区"	"Size:District大田区"
[39] "Size:District文京区"	"Size:District新宿区"
[41] "Size:District杉並区"	"Size:District板橋区"
[43] "Size:District江戸川区"	"Size:District江東区"
[45] "Size:District渋谷区"	"Size:District港区"
[47] "Size:District目黒区"	"Size:District練馬区"
[49] "Size:District荒川区"	"Size:District葛飾区"
[51] "Size:District豊島区"	"Size:District足立区"
[53] "Size:District墨田区"	"Tenure:StationDistance"
[55] "Tenure:District中央区"	"Tenure:District中野区"
[57] "Tenure:District北区"	"Tenure:District千代田区"
[59] "Tenure:District台東区"	"Tenure:District品川区"
[61] "Tenure:District大田区"	"Tenure:District文京区"
[63] "Tenure:District新宿区"	"Tenure:District杉並区"
[65] "Tenure:District板橋区"	"Tenure:District江戸川区"
[67] "Tenure:District江東区"	"Tenure:District渋谷区"
[69] "Tenure:District港区"	"Tenure:District目黒区"
[71] "Tenure:District練馬区"	"Tenure:District荒川区"
[73] "Tenure:District葛飾区"	"Tenure:District豊島区"
[75] "Tenure:District足立区"	"Tenure:District墨田区"
[77] "StationDistance:District中央区"	"StationDistance:District中野区"
[79] "StationDistance:District北区"	"StationDistance:District千代田区"
[81] "StationDistance:District台東区"	"StationDistance:District品川区"
[83] "StationDistance:District大田区"	"StationDistance:District文京区"
[85] "StationDistance:District新宿区"	"StationDistance:District杉並区"
[87] "StationDistance:District板橋区"	"StationDistance:District江戸川区"
[89] "StationDistance:District江東区"	"StationDistance:District渋谷区"
[91] "StationDistance:District港区"	"StationDistance:District目黒区"
[93] "StationDistance:District練馬区"	"StationDistance:District荒川区"
[95] "StationDistance:District葛飾区"	"StationDistance:District豊島区"
[97] "StationDistance:District足立区"	"StationDistance:District墨田区"

合計 101 個のパラメタ推定を目指します。

hdm パッケージ内の `rlasso` 関数を用いて LASSO 推定をします。また LASSO 推定は、複雑なモデルを推定に利点を持つため、交差項と二乗項までを導入したモデルも推定して

います。

```
LASSO = gamlr::gamlr(
  y = Data$Price,
  x = X
) # LASSO 推定
```

LASSO で推定されたモデルで使用する変数リストは、以下で表示できます。True が選択された変数です。

推定された値は、以下で示します。

```
coef(LASSO) # 推定値
```

```
99 x 1 sparse Matrix of class "dgCMatrix"
                                seg100
intercept                      42.705221072
Size                          22.085283332
Tenure                        -0.949260232
StationDistance                .
District世田谷区              0.885399681
District中央区                .
District中野区                .
District北区                  .
District千代田区              .
District台東区                .
District品川区                .
District大田区                .
District文京区                .
District新宿区                .
District杉並区                .
District板橋区                .
District江戸川区              .
District江東区                .
District渋谷区                .
District港区                  .
District目黒区                0.145531303
District練馬区                .
District荒川区                .
District葛飾区                .
District豊島区                .
```

District足立区	.
District墨田区	.
I(Size^2)	5.098523148
I(Tenure^2)	0.764221115
I(StationDistance^2)	.
Size:Tenure	-9.504525202
Size:StationDistance	-3.840468008
Size:District中央区	2.207591886
Size:District中野区	.
Size:District北区	-0.947403269
Size:District千代田区	4.536157097
Size:District台東区	.
Size:District品川区	1.556391250
Size:District大田区	-0.999011985
Size:District文京区	1.658065622
Size:District新宿区	2.554318454
Size:District杉並区	0.092031271
Size:District板橋区	-2.322997154
Size:District江戸川区	-2.265860521
Size:District江東区	-0.573435169
Size:District渋谷区	5.671810968
Size:District港区	12.715565955
Size:District目黒区	2.106822926
Size:District練馬区	-1.492913960
Size:District荒川区	-1.064818067
Size:District葛飾区	-2.532339361
Size:District豊島区	0.818647790
Size:District足立区	-3.474390892
Size:District墨田区	-0.677389749
Tenure:StationDistance	0.285838918
Tenure:District中央区	.
Tenure:District中野区	.
Tenure:District北区	.
Tenure:District千代田区	-1.110147900
Tenure:District台東区	0.400329988
Tenure:District品川区	-0.002439637
Tenure:District大田区	.
Tenure:District文京区	.
Tenure:District新宿区	-0.219994692

Tenure:District杉並区	.
Tenure:District板橋区	.
Tenure:District江戸川区	.
Tenure:District江東区	.
Tenure:District渋谷区	-1.158716799
Tenure:District港区	-2.258199491
Tenure:District目黒区	.
Tenure:District練馬区	.
Tenure:District荒川区	.
Tenure:District葛飾区	.
Tenure:District豊島区	.
Tenure:District足立区	.
Tenure:District墨田区	.
StationDistance:District中央区	.
StationDistance:District中野区	0.006454483
StationDistance:District北区	.
StationDistance:District千代田区	-0.259898503
StationDistance:District台東区	.
StationDistance:District品川区	.
StationDistance:District大田区	.
StationDistance:District文京区	.
StationDistance:District新宿区	0.099488399
StationDistance:District杉並区	.
StationDistance:District板橋区	.
StationDistance:District江戸川区	.
StationDistance:District江東区	.
StationDistance:District渋谷区	.
StationDistance:District港区	-2.157523041
StationDistance:District目黒区	0.217234860
StationDistance:District練馬区	.
StationDistance:District荒川区	.
StationDistance:District葛飾区	.
StationDistance:District豊島区	.
StationDistance:District足立区	.
StationDistance:District墨田区	.

“.”は、厳密に0であることを意味しています。

5.4 Reference

第6章

応用：予測

母平均のモデルの有力な応用例として、 Y の予測問題への活用があります。予測を目的とする研究では、観察できる変数 X から意思決定に必要なだが欠損している情報 Y を予測するモデル（予測モデル）の推定を目指します。以下のような実例があげられます。

- 視聴履歴やいいね数 (X) \Rightarrow 好む未視聴動画 (Y)
- メールの文名や件名 (X) \Rightarrow 迷惑メール (Y)
- 事業の内容や財務状況 (X) \Rightarrow デフォルトリスク (Y)

もし Y, X が共に観察できるデータを活用できれば、統計学や機械学習分野によって、推定方法がある程度確立されています。

6.1 推定目標

本章では、データと同じ母集団から**新たに**抽出された事例を、予測するモデルの推定を目指します。予測能力は、母集団における平均二乗誤差で測定します

$$= (Y - \hat{Y})^2$$

母集団における平均二乗誤差は、直接観察することは不可能です。ただし本章で紹介する通り、推定することは可能です。

6.1.1 完璧な予測は不可能

予測研究における究極的な目標の一つは、 Y を完璧に予測するモデルの推定です。しかしながら多くの応用で、この目標には到達することができません。予測モデルは、ある X の組み合わせについて、一つの予測値のみを出力します。このため**母集団**において、同じ X 内で Y の値にばらつきがあれば、予測が外れる事例は必ず存在します。

完璧な予測には、 Y の全ての決定要因を X として観察し、 X 内での個人差をなくす必要があります。しかしながら人間行動や社会的な事象などの社会的変数の決定要因は無数に存在し、その多くは観察が難しいと考えられます。結果、社会的変数について、完璧な予測は不可能と考えられます。

6.1.2 理想の予測モデル

最も高い予測性能 (母集団における平均二乗誤差が最小化) を達成する予測モデルは、母平均であることが証明できます。このため予測研究においては、データから推定した予測モデルを理想の予想モデルである母平均に極力近づけることが、実質的な目標となります。具体的には以下の予測誤差を極力削減することを目指します

$$(\underline{XY} -)^2$$

OLS や LASSO は、母平均のモデルを指定しており、理想の予測モデル推定を目指すための有力な方法です。

6.2 予測性能の測定

予測を目指す分析では、推定された予測モデルの性能を評価することが重要となります。OLS や LASSO により推定されたモデルの性質について、多くの理論研究が蓄積されています。しかしながら現状、幅広いデータや状況において、一貫して高い予測性能を生み出す方法は存在しません。また実際の予測力を理論のみに基づいて、算出することは困難です。このため複数の予測モデルを”試作”し、データを用いてその性能を比較することが求められます。

最もシンプルな評価方法は、サンプル分割です。

! サンプル分割法の定義

1. データをランダムに訓練データとテストデータに分割する
 - 訓練/テスト間での事例数の比率については、8 対 2 や 95 対 5 が (経験則として) 推奨されることが多い。
2. 訓練データのみでモデルを試作する
3. テストデータへの当てはまりを (平均二乗誤差などで) 評価する

実際の取引データに適用した結果は以下です。6378 事例のうち、ランダムに選んだ半分を訓練、残り半分をテストに用いました。テストした推定方法は以下です。

- **OLS:** 取引価格 ~ 部屋の広さ + 立地 + 取引年

- **OLS (含む交差項 + 高次項):** 取引価格 ~ 部屋の広さ + 立地 + 取引年 + 交差項 + 高次項 (6次まで)
- **LASSO (含む交差項 + 高次項):** 取引価格 ~ 部屋の広さ + 立地 + 取引年 + 交差項 + 高次項 (6次まで)

推定された予測モデルの評価結果は以下となりました。

OLS	OLS 交差項 + 高次項	LASSO
369	316	303

LASSO が最も予測性能が高く、単純な OLS と比較し、0.179 パーセントほど平均二乗誤差を削減しています。対して、交差項と高次項を追加した OLS と LASSO を比較した場合、0.041 パーセントほどの改善にとどまります。これはモデルの複雑さに比べて、事例数が多く、LASSO によるモデル単純化の恩恵が限定的であることを示しています。

6.3 Rによる実践例

- 以下のパッケージを使用
 - readr (tidyverse に同梱): データの読み込み
 - gamlr: LASSO

6.3.1 準備

データとその事例数を取得し、データをランダムに分割します。

```
set.seed(111)

Data = readr::read_csv("Public.csv") # データ読み込み

X = model.matrix(
  ~ 0 +
    (Size + Tenure + StationDistance + District)**2 + # 交差項
    I(Size^2) + I(Tenure^2) + I(StationDistance^2), # 二乗項
  Data
) # X の作成

X = scale(X) # 標準化
```

```

N = nrow(Data) # 事例数の取得

Group = sample(
  1:2,
  N, # 事例数
  replace = TRUE, # 復元抽出を指定
  prob = c(0.8,0.2) # "1" が 8 割、"2" が 2 割
) # サンプル分割のために 1 または 2 をランダムに発生

```

lm 関数を用いて OLS, hdm パッケージ内の rlasso 関数を用いて LASSO 推定をします。また LASSO 推定は、複雑なモデルを推定に利点を持つため、交差項と二乗項までを導入したモデルも推定しています。

```

LASSO = gamlr::gamlr(
  y = Data$Price[Group == 1],
  x = X[Group == 1,]) # LASSO

OLS = lm(
  Price ~ Size + Tenure + StationDistance + District,
  Data,
  subset = Group == 1
)

OLS_Long = lm(
  Price ~ +
    (Size + Tenure + StationDistance + District)**2 +
    I(Size^2) + I(Tenure^2) + I(StationDistance^2),
  Data,
  subset = Group == 1
)

HatLASSO = predict(LASSO,X)
HatOLS = predict(OLS,Data)
HatOLS_Long = predict(OLS_Long,Data)

mean((Data$Price - HatLASSO)[Group == 2]^2)

```

```
[1] 154.7488
```

```
mean((Data$Price - HatOLS)[Group == 2]^2)
```

```
[1] 265.1663
```

```
mean((Data$Price - HatOLS_Long)[Group == 2]^2)
```

```
[1] 149.513
```

6.4 まとめ

典型的な予測問題においては、データを用いた予測モデルの推定と評価、という二つの作業が求められます。一般にこの作業を同じデータで行うと多くの問題が発生します。本章では、データをランダムに2分割し、片方のデータで予測を、残りのデータで評価を行う方法を紹介しました。

評価値としては平均二乗誤差を用いました。現在、他の評価方法も盛んに研究されています (Angelopoulos, Bates, et al. (2023)などを参照してください)。

Reference

- Angelopoulos, Anastasios N, Stephen Bates, et al. 2023. “Conformal Prediction: A Gentle Introduction.” *Foundations and Trends® in Machine Learning* 16 (4): 494–591.
- Angrist, Joshua D, and Jörn-Steffen Pischke. 2009. *Mostly Harmless Econometrics: An Empiricist’s Companion*. Princeton university press.
- Aronow, Peter M, and Benjamin T Miller. 2019. *Foundations of Agnostic Statistics*. Cambridge University Press.
- Belloni, Alexandre, Victor Chernozhukov, and Christian Hansen. 2014. “Inference on Treatment Effects After Selection Among High-Dimensional Controls.” *Review of Economic Studies* 81 (2): 608–50.
- Chernozhukov, Victor, Christian Hansen, and Martin Spindler. 2015. “Valid Post-Selection and Post-Regularization Inference: An Elementary, General Approach.” *Annu. Rev. Econ.* 7 (1): 649–88.
- James, Gareth, Daniela Witten, Trevor Hastie, Robert Tibshirani, et al. 2021. *An Introduction to Statistical Learning*. Vol. 112. Springer.
- Kuchibhotla, Arun K, John E Kolassa, and Todd A Kuffner. 2022. “Post-Selection Inference.” *Annual Review of Statistics and Its Application* 9 (1): 505–27.
- Lin, Hanti. 2024. “To Be a Frequentist or Bayesian? Five Positions in a Spectrum.” *Harvard Data Science Review* 6 (3).

- Taddy, Matt. 2017. “One-Step Estimator Paths for Concave Regularization.” *Journal of Computational and Graphical Statistics* 26 (3): 525–36.
- Tibshirani, Robert. 1996. “Regression Shrinkage and Selection via the Lasso.” *Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology* 58 (1): 267–88.