Linear Model for Description

川田恵介

Table of contents

1 **線形モデルによる記述** 2

1.1 Linear Model による記述 . . . 2

1.2 OLS . . . 2

1.3 数値例: OLS . . . 3

1.4 例: OLS . . . 3

1.5 例: OLS . . . 5

1.6 LASSO . . . 7

1.7 例: LASSO . . . 7

1.8 まとめ . . . 9

2 **比較** 9

2.1 シンプルな比較研究 . . . 10

2.2 シンプルな比較研究 . . . 10

2.3 踏み込んだ研究課題: 差の理由 . . . 10

2.4 例: Dube et al. (2020) . . . 10

2.5 伝統的な方法 . . . 11

3 **OLS の別解釈** 11

3.1 OLS Algorithm: 単回帰 . . . 11

3.2 OLS Algorithm: General case . . . 11

3.3 OLS の解釈 . . . 12

4 **Constant Difference モデルによる解釈** 12

4.1 Constant Difference . . . 12

4.2 単回帰の解釈 . . . 12

4.3 単回帰の解釈 . . . 13

4.4 母集団への含意 (事例数無限大) . . . 13

4.5 重回帰の解釈 . . . 13

4.6 重回帰の解釈 . . . 13

4.7 母集団への含意 14
4.8 Mis-specification 14
4.9 Overfit 14
4.10 まとめ 14

5 Double Selection 14
5.1 Naive なアイディア 15
5.2 問題点 15
5.3 Double Selection Algorithm 15
5.4 重要な仮定: Sparsity 15
5.5 実装 15
5.6 実践 16
5.7 Next Step 16

Reference 16

1 線形モデルによる記述

```r
library(tidyverse)
library(recipes)
```

- Y と X の関係性を”簡潔な”関数で記述する
  - 非常に難しいチャレンジであり、(私見では) 経済学においては主流ではない

1.1 Linear Model による記述

- $$g_Y(X) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + .. + \beta_L X_L$$
  - 記述モデルの研究者が設定
- “モデル上の”関係性は容易に解釈可能
  - $\beta_1 = X_1$ が一単位大きい時に、Y の平均値はどのくらい大きいか?

1.2 OLS

- X の数が少ない (記述モデルがシンプル) であれば、OLS は有効
  - 信頼区間も導出可能
    - 多重検定への対応は必要 (ISL Chap 13 等参照)

- Estimand (Best Linear Projection) $\neq E[Y|X]$ であり、必ずし直感的ではないことに注意

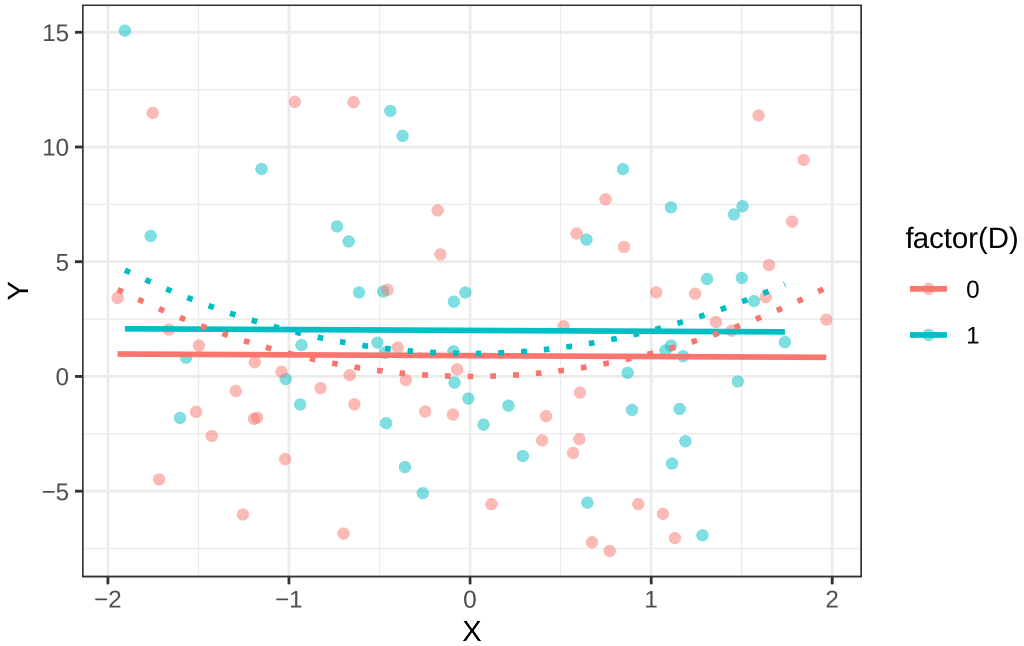
1.3 数値例: OLS

- $Y = \underbrace{D}_{\in\{0,1\}} + \underbrace{X^2}_{\sim Uniform(-2,2)} + \underbrace{u}_{\sim N(0,10)}$
  - 独立している場合:
    - $\Pr(D=1) = 0.5$
  - 相関している場合:
    - $\Pr(D=1|1 \geq X \geq -1) = 0.9$
    - $\Pr(D=1|X \geq 1|X \leq -1) = 0.1$

1.4 例: OLS

```
set.seed(1)
N = 100

Temp = tibble(
  X = runif(N,-2,2),
  D = sample(
    0:1,
    N,
    replace = TRUE
  ),
  Y = D + X^2 + rnorm(N,0,5),
  TrueY = D + X^2
  )

Pred = lm(
  Y ~ D + X,
  Temp
)$fitted

Temp |>
  mutate(
    Pred
  ) |>
```

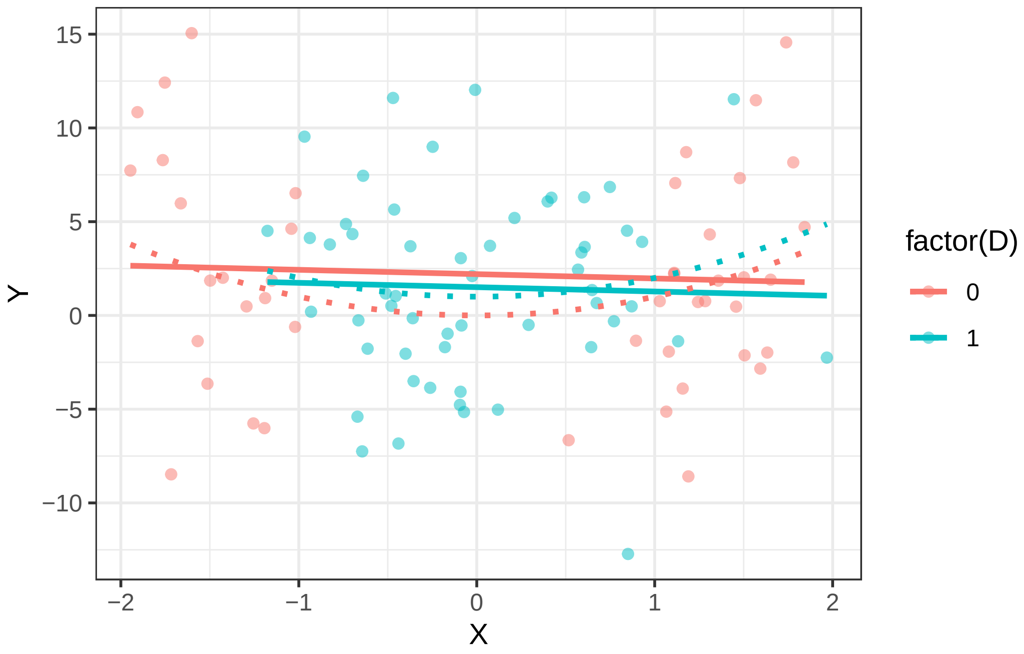
```r
ggplot(
  aes(
    x = X,
    y = Y,
    color = D |> factor()
  )
) +
theme_bw() +
geom_point(
  alpha = 0.5
) +
geom_smooth(
  aes(
    y = Pred
  ),
  method = "lm",
  se = FALSE
) +
geom_smooth(
  aes(
    y = TrueY
  ),
  method = "lm",
  se = FALSE,
  formula = y ~ poly(x,2),
  linetype = "dotted"
)
```



1.5 例: OLS

```
set.seed(1)
N = 100

Temp = tibble(
  X = runif(N,-2,2),
  D = case_when(
    X >= -1 & X <= 1 ~ sample(
      0:1,
      N,
      replace = TRUE,
      prob = c(0.1,0.9)
      ),
    X < -1 | X > 1 ~ sample(
      0:1,
      N,
      replace = TRUE,
      prob = c(0.9,0.1)
      )
    ),
  Y = D + X^2 + rnorm(N,0,5),
```

```r
  TrueY = D + X^2
  )

Pred = lm(
  Y ~ D + X,
  Temp
)$fitted

Temp |>
  mutate(
    Pred
  ) |>
  ggplot(
    aes(
      x = X,
      y = Y,
      color = D |> factor()
    )
  ) +
  theme_bw() +
  geom_point(
    alpha = 0.5
  ) +
  geom_smooth(
    aes(
      y = Pred
    ),
    method = "lm",
    se = FALSE
  ) +
  geom_smooth(
    aes(
      y = TrueY
    ),
    method = "lm",
    se = FALSE,
    formula = y ~ poly(x,2),
    linetype = "dotted"
  )
```



1.6 LASSO

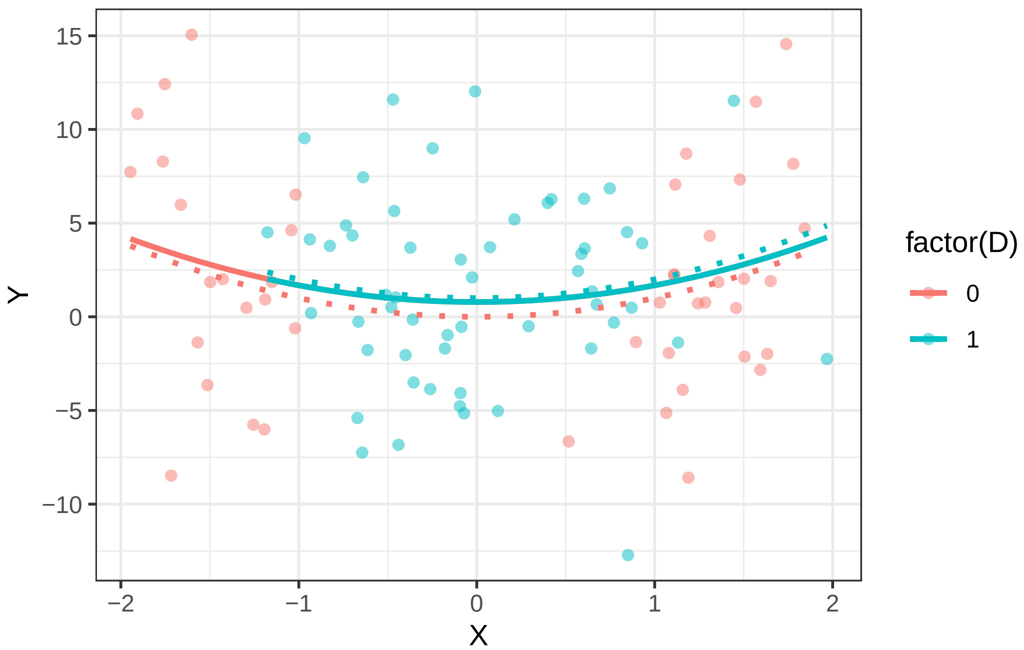
- X の数が多くても、変数の数を減らしてくれるので、一見良さそうだが、
  - 信頼区間の導出が難しい
  - 変数選択の精度はそこまで高くない

1.7 例: LASSO

```
set.seed(1)
N = 100

Temp = tibble(
  X = runif(N,-2,2),
  D = case_when(
    X >= -1 & X <= 1 ~ sample(
      0:1,
      N,
      replace = TRUE,
      prob = c(0.1,0.9)
      ),
    X < -1 | X > 1 ~ sample(
```

```
      0:1,
      N,
      replace = TRUE,
      prob = c(0.9,0.1)
      )
    ),
  Y = D + X^2 + rnorm(N,0,5),
  TrueY = D + X^2
  )

Pred = gamlr::gamlr(
  x = Temp |> select(D,X) |> mutate(X2 = X^2,DX = D*X),
  y = Temp$Y
) |> predict(
  Temp |> select(D,X) |> mutate(X2 = X^2,DX = D*X)
) |> as.numeric()


Temp |>
  mutate(
    Pred
  ) |>
  ggplot(
    aes(
      x = X,
      y = Y,
      color = D |> factor()
    )
  ) +
  theme_bw() +
  geom_point(
    alpha = 0.5
  ) +
  geom_smooth(
    aes(
      y = Pred
    ),
    method = "lm",
    se = FALSE,
```

```
    formula = y ~ poly(x,2)
  ) +
  geom_smooth(
    aes(
      y = TrueY
    ),
    method = "lm",
    se = FALSE,
    formula = y ~ poly(x,2),
    linetype = "dotted"
  )
```



1.8　まとめ

- Y と 大量の X の関係性を記述する、は非常に難しい課題
  - X の中から特に関心がある変数 D を選んで、Y との関係性を記述することが現実的

2　比較

- 本講義では、研究課題の段階で、関心とする変数を絞り込むことを推奨
  - 比較研究に持ち込む

2.1 シンプルな比較研究

- 特定の Y と D の関係性について関心があるケースが多い
  - 例: 男女間賃金格差
    - $Y = Wage, D = Gender$
  - 年功型賃金体系の程度
    - $Y = Wage, D = Tenure$

2.2 シンプルな比較研究

- 有力な Estimand は、母平均の差 $E[Y|D=1] - E[Y|D=0]$ ないし、Population OLS $Y \sim D$
  - データ上で Y を D で回帰すれば OK
- Y と関係していそうな X がデータに含まれていたとしても、“無視” して良い

2.3 踏み込んだ研究課題: 差の理由

- なぜ差が生まれるのか？
  - データから観察可能な他の変数 X に注目
    - X についての格差が、Y の差をもたらしている
    - X 以外についての格差が、Y の差をもたらしている
- 注目されてきた Estimand であり、多様な方法論開発が進む
  - 機械学習の導入も有力視されている

2.4 例: Dube et al. (2020)

- Online 労働市場において、求人が提示する賃金水準 $(= D)$ と応募者数 $(= Y)$ はどのような関係にあるのか?
  - 賃金が高い仕事は、高い技能が要求される/きつい... $(= X)$ 可能性がある
  - 求人内容 $(= X)$ 以外の要因で、どの程度の差が生じているのか?
    - 労働市場の不完全性 (独占力) の指標 (Langella and Manning 2021)

2.5 伝統的な方法

- X をコントロールする: 以下を推定

$$g_Y(D,X) = \underbrace{\beta_D}_{=X\text{以外による格差}} D + \underbrace{\beta_0 + \beta_1 X_1 + ..}_{X\text{の影響を除去}}$$

- 課題
  - 何が Estimand なのか?
    * コントロールとは？
  - 定式化の影響は?

3 OLS の別解釈

- $g_Y(D) = \beta_0 + \beta_D D + \beta_1 X_1 + ..$ を OLS で推定する
  - 議論の簡略のために、X は標準化されているとする
- (BLP ではなく)Weight 推定としても再解釈できる

3.1 OLS Algorithm: 単回帰

- $g_Y(D) = \beta_D D + \beta_0$ を OLS 推定すると

$$\beta_D = \sum_{i:D_i=1} \underbrace{\frac{1}{N_1}}_{=W_i} Y_i - \sum_{i:D_i=0} \underbrace{\frac{1}{N_0}}_{=W_i} Y_i$$

- 事例数の逆数を Weight とした比較と解釈できる
  - 注: $\sum_{i:D_i=1} W_1 = \sum_{i:D_i=0} W_0 = 1$

3.2 OLS Algorithm: General case

1. 全ての $X = [X_1, .., X_L]$ について、

$$\sum_{i:D_i=1} W_i X_{i,l} = \sum_{i:D_i=0} W_i X_{i,l},$$

$$\sum_{i:D_i=1} W_i = \sum_{i:D_i=0} W_i = 1$$

を満たす W から、分散が最も小さいものを選ぶ

2.

$$\beta_D = \sum_{i:D_i=1} W_i Y_i - \sum_{i:D_i=0} W_i Y_i$$

3.3 OLS の解釈

- Y の Weight 付き平均差として解釈できる
  - データ上で、D 間で X の平均値が"Balance" するように Weight は選ぶ
- X^2 もモデルに加えれば、X^2 の平均値 (分散) も等しくなるように選ばれる
- $X_1 * X_2$ もモデルに加えれば、X_1, X_2 の共分散も等しくなるように選ばれる

4 Constant Difference モデルによる解釈

- 母集団に対する、かなり強い仮定を用いて、OLS の推定結果を解釈
- 注記: 不必要に強い仮定であり、将来緩める

4.1 Constant Difference

- $E[Y|1,X] - E[Y|0,X] = \tau$ を母集団上で仮定
  - $\tau = X$ が全く同じ集団間での平均格差
    - " X をコントロール/Ceteris paribus"
- 以下のモデルで表現できる

$$Y = \tau \times D + \underbrace{h(X)}_{\text{任意の関数}} + \underbrace{u}_{=E[u|X]}$$

  - Semiparametric estimation では、$h(X)$ は Nuisance function と呼ばれる

4.2 単回帰の解釈

- Y を代入すると

$$\beta_D = \frac{\sum_{i:D_i=1} Y_i}{N_1} - \frac{\sum_{i:D_i=0} Y_i}{N_0}$$

$$= \frac{\sum_{i:D_i=1}(\tau_D + h(X_i) + u_i)}{N_1}$$

$$- \frac{\sum_{i:D_i=0}(h(X_i) + u_i)}{N_0}$$

4.3 単回帰の解釈

$$\beta_D = \tau_D + \underbrace{\left[\frac{\sum_{i:D_i=1} h(X_i)}{N_1} - \frac{\sum_{i:D_i=0} h(X_i)}{N_0}\right]}_{\text{属性のずれ}}$$

$$+ \underbrace{\frac{\sum_{i:D_i=1} u_i}{N_1} - \frac{\sum_{i:D_i=0} u_i}{N_0}}_{\text{観察できない属性のずれ}}$$

4.4 母集団への含意 (事例数無限大)

$$\beta_D = \tau_D + \beta_X \underbrace{\left[\frac{\sum_{i:D_i=1} h(X_i)}{N_1} - \frac{\sum_{i:D_i=0} h(X_i)}{N_0}\right]}_{\underbrace{\rightarrow}_{N_1, N_0 \rightarrow \infty} E_X[h(X)|D=1] - E_X[h(X)|D=0]}$$

$$+ \underbrace{\frac{\sum_{i:D_i=1} u_i}{N_1} - \frac{\sum_{i:D_i=0} u_i}{N_0}}_{\rightarrow 0}$$

- 観察できる属性のずれの影響が残る

4.5 重回帰の解釈

- Y を代入すると

$$\begin{aligned}\beta_D &= \sum_{i:D_i=1} W_i Y_i - \sum_{i:D_i=0} W_i Y_i \\ &= \sum_{i:D_i=1} W_i(\tau_D + h(X_i) + u_i) \\ &\quad - \sum_{i:D_i=0} W_i(h(X_i) + u_i)\end{aligned}$$

4.6 重回帰の解釈

- Y を代入すると

$$\beta_D = \tau_D$$

$$+ \underbrace{\left[\sum_{i:D_i=1} W_i h(X_i) - \sum_{i:D_i=0} W_i h(X_i)\right]}_{h(X)=\beta_0+\beta_1 X \text{であれば} = 0}$$

$$+ \sum_{i:D_i=1} W_i u_i - \sum_{i:D_i=0} W_i u_i$$

4.7 母集団への含意

$$\beta_D = \tau_D + \beta_X \underbrace{\left[\sum_{i:D_i=1} W_i X - \sum_{i:D_i=0} W_i X\right]}_{h(X)=\beta_0+\beta_1 X\text{であれば}=0}$$

$$+ \underbrace{\sum_{i:D_i=1} W_i u_i - \sum_{i:D_i=0} W_i u_i}_{\to 0}$$

4.8 Mis-specification

- $g_Y(D,X) = \beta_0 + \beta_D D + \beta_1 X$ を OLS 推定するが、$h(X) = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$
  - X の分散 (X^2) は Balance しないので、β_D は τ_D に (事例数が無限大でも) 収束しない

4.9 Overfit

- Mis-specification を避けるためには、X を十分に複雑にしてモデルに導入する必要がある
- より多くの変数の平均値を揃える必要があるので、Weight W_i の分散が大きくなる
- 特定の個人 (u_i) の影響が非常に強くなり、推定精度が悪化

4.10 まとめ

- OLS = X の平均値を Balance させる Algorithm
  - 高次項 ($X_1^2, X_1^3, X_1 \times X_2 ...$) を導入すると、$X$ の分布を Balance させられる
  - 弊害: Weight の分散が大きくなり、推定精度が悪化する
- 課題: “重要な”X のみ Balance させたい

5 Double Selection

- LASSO の” 副産物” である変数選択を利用
  - “AI” によるダブルチェックを行い、変数選択のミスを減らす
- Belloni, Chernozhukov, and Hansen (2014)
  - Gentle introduction: Angrist and Frandsen (2022)

5.1 Naive なアイディア

- X を全てバランスさせるのではなく、Y との相関が強いものだけをバランスさせる
  - $g_Y(X)$ を LASSO で推定し、選択された変数だけを OLS に加える

5.2 問題点

- 問題点: LASSO による変数選択は、Y とそこそこ相関がある変数も除外されてしまう可能性がある
  - Y の予測のためであれば、(Tuning parmeter が正しく選ばれている限り)、許容できる (Bias-variance Tradeoff)
- D との相関が強い (分布が Unbalance) な変数が除外されると β_D の推定結果が大きな影響を受ける
  - τ の推定という目標について、モデルが過度に単純化される (Regulization bias)

5.3 Double Selection Algorithm

1. $g_Y(X)$ および $g_D(X)$ を LASSO で推定し、選択された変数を記録
2. **どちらかの**予測モデルで選択された変数 (Z) のみを用いて、$Y \sim D + Z$ を回帰

- Yの予測モデルと D の予測モデルによる" ダブルチェック"

5.4 重要な仮定: Sparsity

- $$E[Y|D,X] = \tau D + \beta_0 + \underbrace{\beta_1 X_1 + .. + \beta_L X_L}_{L > \text{事例数でも} OK}$$
- (Approximately) sparsity: 事例数に比べて、十分に少ない変数数 $S < L$ で、母平均をうまく近似できる
- 実戦: 十分に複雑なモデルについて LASSO を推定し、変数選択
  - もともとのモデルには、“trivial” な変数も含まれていると仮定

5.5 実装

- hdm package が有益

```
rlassoEffect(
  x = X, # Must be matrix
  d = D, # Must be vector
  y = Y # Must be vector
)
```

- 注: Tuning parameter は、交差推定ではなく、理論値を使用

5.6 実践

- かなり制約的なアプローチ (Variable selection を行う Algorithm しか使えない)
  - 後日、より柔軟なアプローチを紹介
- 今でも多くの応用研究が、Robustness check として活用
  - 最終的には OLS なので、Editor/Referee に理解させやすい!?
  - すぐに活用できるという意味で、十分に実践的
    - OLS でコントロールしている自身の研究があれば、使ってみてください!!!

5.7 Next Step

- ここまでの議論は以下に限定
  - Algorithm: Liner Model
  - Estimand: 平均値関数/平均差の推定
- 課題: より幅広い Algorithm (Tree/Stacking model)/Estimand ("Exact" Average Difference/Heterogeneity)

Reference

Angrist, Joshua D, and Brigham Frandsen. 2022. "Machine Labor." *Journal of Labor Economics* 40 (S1): S97–140.

Belloni, Alexandre, Victor Chernozhukov, and Christian Hansen. 2014. "Inference on Treatment Effects After Selection Among High-Dimensional Controls." *Review of Economic Studies* 81 (2): 608–50.

Dube, Arindrajit, Jeff Jacobs, Suresh Naidu, and Siddharth Suri. 2020. "Monopsony in Online Labor Markets." *American Economic Review: Insights* 2 (1): 33–46.

Langella, Monica, and Alan Manning. 2021. "Marshall Lecture 2020: The Measure of Monopsony." *Journal of the European Economic Association* 19 (6): 2929–57.