

# Best Linear Projection

異質性分析

川田恵介

## Table of contents

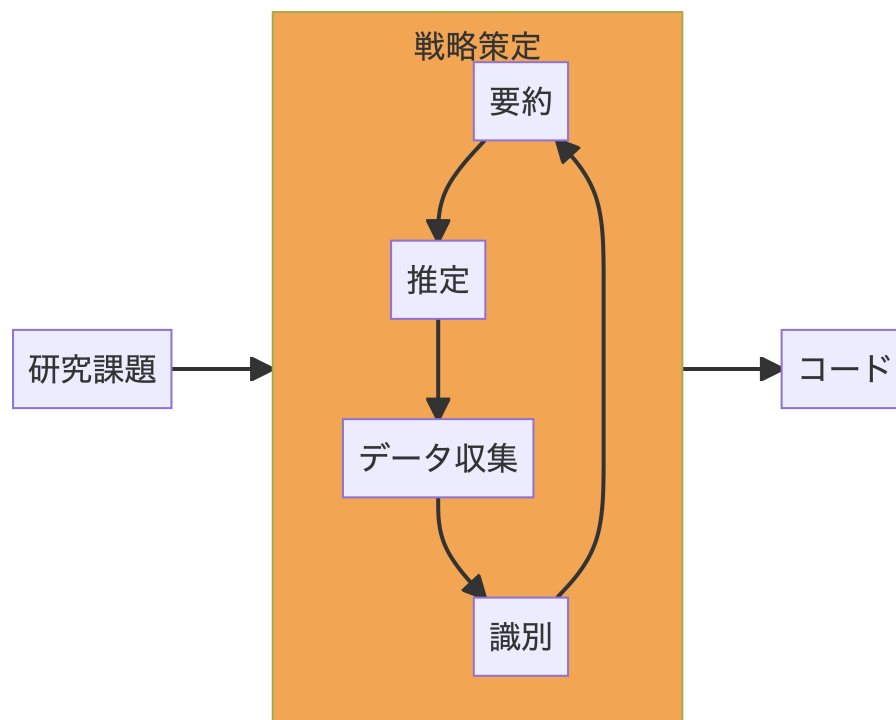
“差の異質性” 分析	2
復習: WorkFlow	2
研究課題: 予測問題	3
例: Inoue, Athey, and Tsugawa (2023)	3
研究課題: 母集団の推論問題	3
余談: 理論への含意	3
余談: 最低賃金	4
要約: 条件付き平均差	4
代表的な要約	4
Best Linear Projections	5
Get Start	5
推定	5
実例	5
補論: 「正しいモデルを推定する」の呪い	6
定数項問題	6
数値例	6
例	7
標準化	7
数値例: 標準化ずみ	8
実例	8
実例	9
まとめ	9
補論: 多重検定問題	9
探索的研究	9
例: サイコロゲーム	10

例 . . . . .	10
Family-wise Confidence Interval . . . . .	10
Bonferroni 補正法 . . . . .	11
実例 . . . . .	11
実践 . . . . .	11
まとめ . . . . .	11
Reference . . . . .	12

## “差の異質性” 分析

- 因果推論/格差研究への教師付き学習応用の利点: 関数系への依存度を下げる
- 効果の異質性分析において、より重要
  - “P-hack” の温床の一つ

### 復習: Workflow



- 異質性分析では、“要約”をしっかりと考えるのが特に重要

## 研究課題: 予測問題

- 異質性に関連する研究課題は、多く存在
- 医療行為の”個人化”:
  - 有効な医療行為は、個人の体質等に依存している可能性
  - 個人に合わせた医療行為を、“根拠”を持って、行いたい
- マンション経営コンサルタント
  - 改築を行えば、どの程度市場価値が上がるのか?
  - 根拠を持って、“予測”したい

## 例: Inoue, Athey, and Tsugawa (2023)

- 高血圧治療介入 ( $D$  = 集中治療 VS 通常治療 (140 以下目標 VS 120 以下目標))
- Causal Forest (Athey, Tibshirani, and Wager 2019; Wager and Athey 2018) を用いて、集中治療因果効果を”予測”
  - 因果効果の予測値が正のグループ内での平均効果 VS 高リスクアプローチ (130 以上) の平均効果、を比較

## 研究課題: 母集団の推論問題

- 効果や格差にどの程度、グループ差がある、どのような特徴を持つのか?
  - 母集団上で
- あくまでも母集団の推論

## 余談: 理論への含意

- 経済理論: 前提と結論 (仮定) を結びつける枠組み
  - 実証の伝統的な役割: 反証する
- 平均差や効果がどのような値だろうが、理論は説明できる (てしまう) 場合が多い
  - 異質性までは難しい

## 余談: 最低賃金

- 効果が異質性である可能性は極めて強い
  - 初歩的な部分均衡モデルでは、最低賃金ギリギリで就業する可能性が強い労働者”のみ”が影響を受ける
- 最低賃金の上昇は、平均的に雇用を増やす/減らす
  - 教科書的な部分均衡モデルでも、供給/需要、どちらの制約が Binding かで説明可能
- 高所得 (を予想させる) 層であったとしても雇用増
  - 部分均衡では?
  - 一般均衡/サーチ理論等々を導入する必要性

## 要約: 条件付き平均差

- $D = \{0, 1\}$  について、多くの知見が蓄積済み
- 平均差に焦点を当てるのであれば、関数  $\tau_P(X) = E_P[Y|D = 1, X] - E_P[Y|D = 0, X]$  は理想的な Estimand
  - 限定的な事例数の元では、推定困難
- シンプルな近似モデル:  $\tau_P(X) \sim \tau_P$ 
  - ここまで用いてきたのは平均、中央値も可能 (Kallus and Oprescu 2023)
  - 異質性についての含意なし

## 代表的な要約

- BLP:  $\tau_P(X) \sim g(X) := \beta_0 + \dots + \beta_L X_L$
- NonParametric:  $g(X) \in \arg \min E_P[(\tau_P(X) - g(X))^2]$
- Risk:  $E_P[\tau_P(X)|\tau_P(X) \leq Q_P(\tau_P(X)|q)]$ 
  - $Q_P(\tau_P(X)|q) = \tau_P(X)$  の  $q$  分位点
- 線形モデルで記述するか、Nonparametric な予測モデルを作るか、Semiparametric な記述量も併用するか

## Best Linear Projections

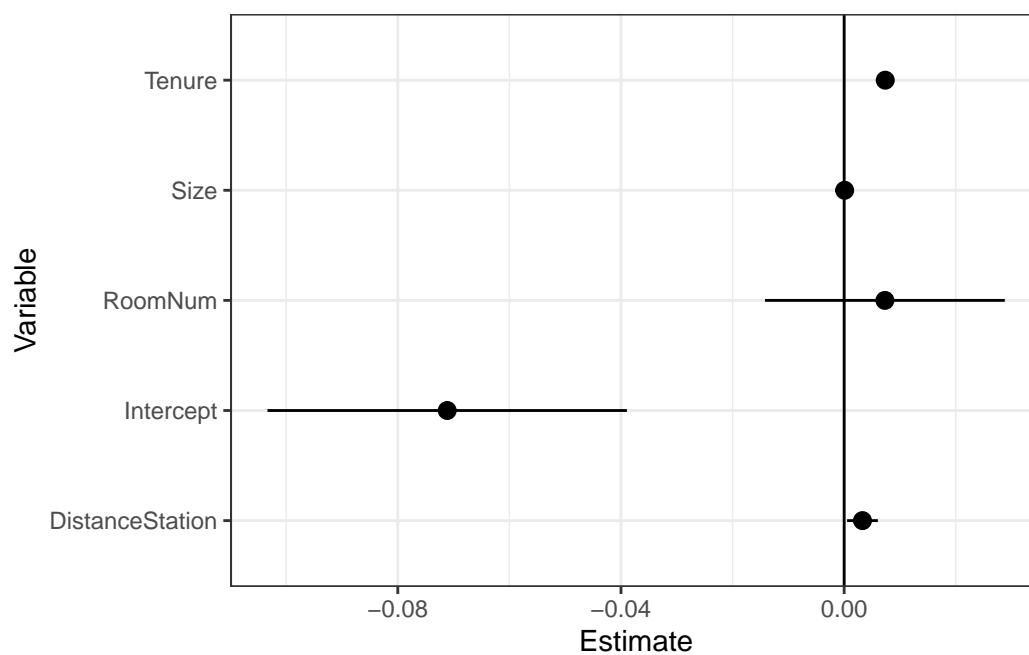
### Get Start

- $D = \{0, 1\}$  を想定
  - $X$  全体ないし一部の  $Z$  について、線形近似を構築
- 1. 交差検証を用いて、AIPW 用のスコア関数  $m^{AIPW}$  を推定
- 2.  $m^{AIPW} \sim \beta_0 + \dots + \beta_L Z_L$  を OLS で回帰し、信頼区間を近似計算
- Semenova and Chernozhukov (2021)

### 推定

- 本質的には AIPW 推定と同じ
  - 平均の推定 = 定数項だけの OLS
  - 複数のパラメタを増やしても、漸近性質は大きく変わらない
    - \* 多重線形 (線形の関係性にある  $X$ ) には注意

### 実例



## 補論: 「正しいモデルを推定する」の呪い

- 精度ではなく、単純さを重視した近似モデルなので、奇妙な推定結果も出てくる
  - ”正しいモデル” を推定している、のであれば生じない論点
- 特に定数項問題

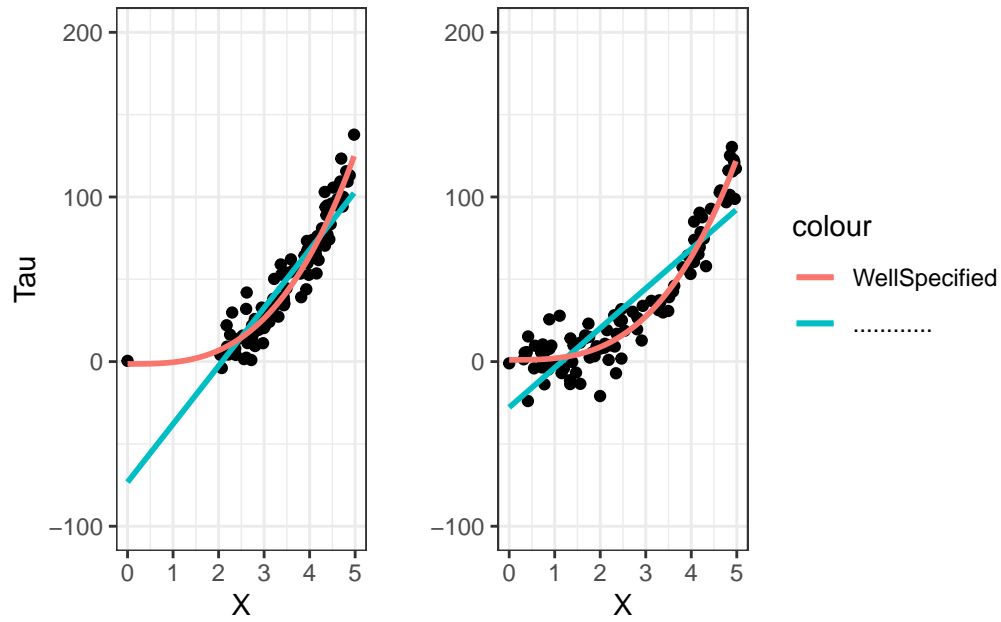
## 定数項問題

- $\beta_0 \simeq \tau(X=0)$  の”近似”であるはず、、、
- 多くの応用において、 $X=0$  事例が (母集団上にも) ほとんど存在しない
  - “無視して”BLP は定義される
- Mis-specification が前提であれば、真剣に解釈すべきではない
  - Well-specification であれば、解釈可能な”はず”
  - 例: 賃金関数 = 0 歳児から 120 歳までの平均賃金を表現できるモデルを推定する?

## 数値例

- $\tau_P(X) = X^2$
- $X \in [0, 5]$

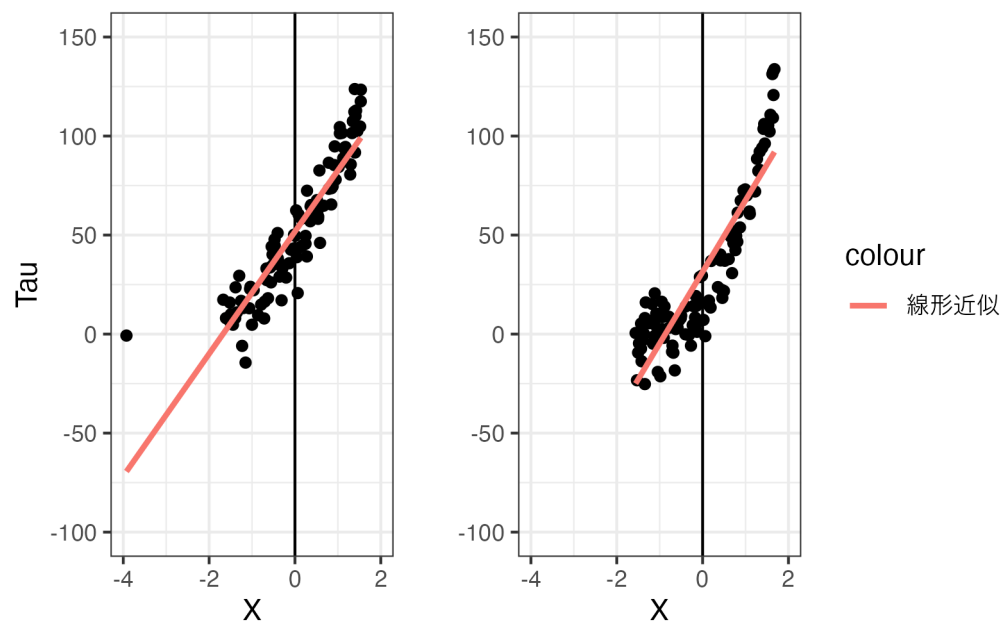
例



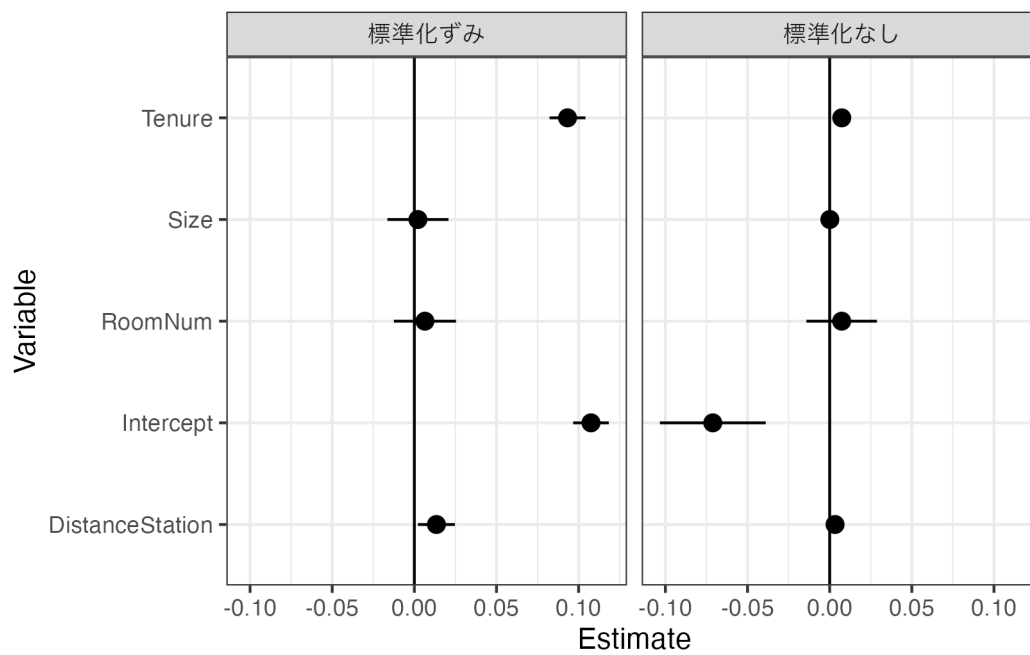
## 標準化

- 元の変数を平均 0、標準偏差 1、に変換
  - $Z = \frac{X - E[X]}{SD[X]}$
- $\beta_0 = E_P[\tau_P(X)]$  の推定値
  - 多くの応用で十分な事例数が期待できる

## 数値例: 標準化ずみ

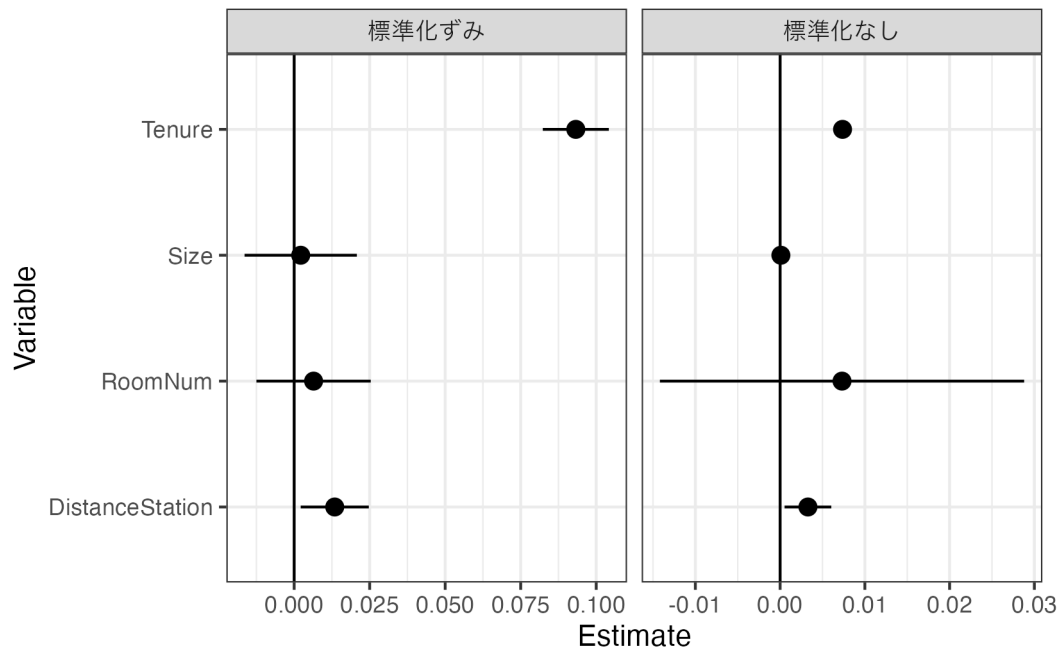


## 実例





## 実例



## まとめ

- $D \in \{0, 1\}$  であれば、 $\tau(X)$  の BLP は、AIPW 推定のシンプルな拡張
- 連続のケースは、まだ議論が続いている?
  - [Chernozkov](#) による、[PartiallingOut](#) のシンプルな拡張

## 補論: 多重検定問題

- 通常の信頼区間は、特定の推定値について信頼区間を提供する (Point-wise)
  - 探索的な推定への Naive な応用は、危険
- List, Shaikh, and Xu (2019), Imbens (2021) など包括的な議論

## 探索的研究

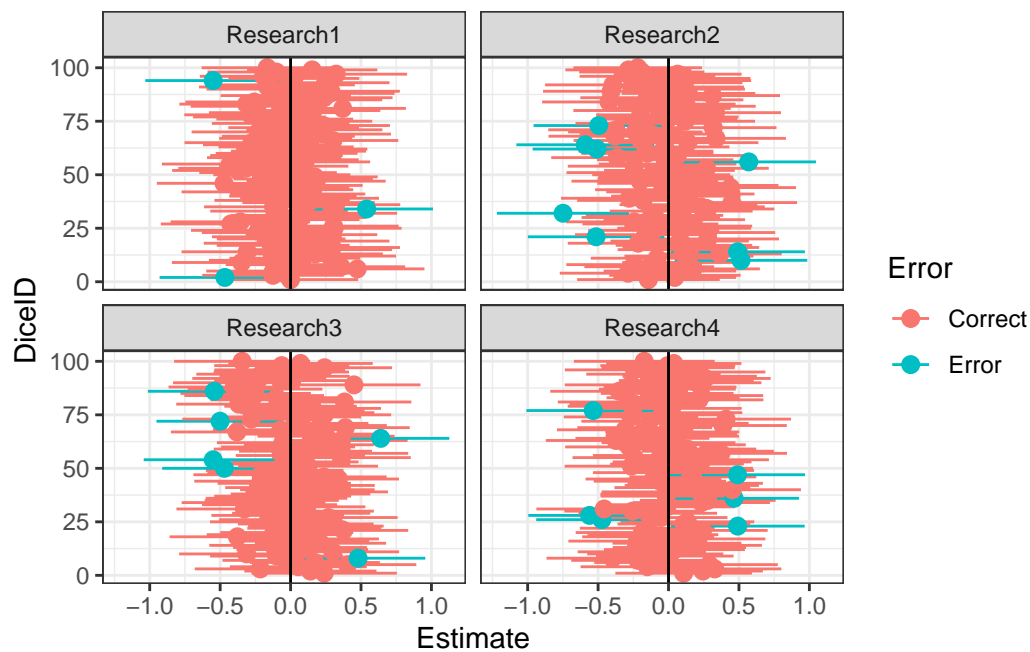
- 多数の変数/グループ/地点から、特定の**母集団**の特徴をもつものを探し出す
  - データの偏りからの誤発見を抑止したい

- 通常の信頼区間が活用可能?
  - 1つの推定値について、**信頼できる**信頼区間を形成する

### 例: サイコロゲーム

- ディーラーとプレイヤーが、一つずつサイコロをふり、出目が大きい方が勝利
- 研究課題: インチキサイコロを使っているどうか?
  - 関心のある特徴:  $E[Y|D = \text{ディーラー}] \neq E[Y|D = \text{プレイヤー}]$
- データ: 100個のサイコロを抽出し、100回振り、出目を記録する
  - “無数の独立した研究者”という脳内イメージはそのまま

### 例



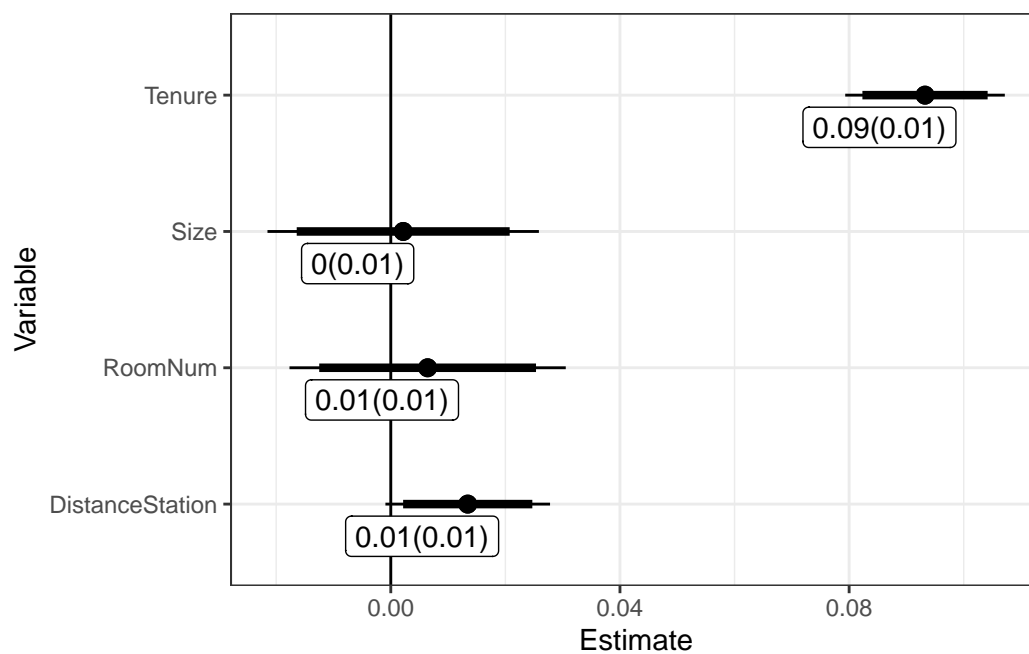
### Family-wise Confidence Interval

- 1つの推定値について、**信頼できる**信頼区間 (Point-wise Confidence Interval) は、複数のパラメータに関心がある場合、解釈が難しい

## Bonferroni 補正法

- 結論として議論したいパラメータの数 =  $k$
- 95% 信頼区間 =  $1 - (0.05/k)$  % 信頼区間
  - かなり保守的 (信頼区間を広くしすぎる) な補正法

## 実例



## 実践

- 「都合の悪い推定結果を隠さない」ことが重要
  - 信頼区間の補正をしなかったとしても、全ての推定結果が報告されている限りは、Bonferroni 補正は読者ができる

## まとめ

- 多重検定問題は、近年改めて大きな注目と警告
- [Introduction to Statistical Learning \(第2版\)](#) でさまざまな補正方法が提案されている
  - 様々な補正法が議論されている

## Reference

- Athey, Susan, Julie Tibshirani, and Stefan Wager. 2019. “Generalized Random Forest.” *The Annals of Statistics* 47 (2): 1148–78.
- Imbens, Guido W. 2021. “Statistical Significance, p-Values, and the Reporting of Uncertainty.” *Journal of Economic Perspectives* 35 (3): 157–74.
- Inoue, Kosuke, Susan Athey, and Yusuke Tsugawa. 2023. “Machine-Learning-Based High-Benefit Approach Versus Conventional High-Risk Approach in Blood Pressure Management.” *International Journal of Epidemiology*, dyad037.
- Kallus, Nathan, and Miruna Oprescu. 2023. “Robust and Agnostic Learning of Conditional Distributional Treatment Effects.” In *International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, 6037–60. PMLR.
- List, John A, Azeem M Shaikh, and Yang Xu. 2019. “Multiple Hypothesis Testing in Experimental Economics.” *Experimental Economics* 22: 773–93.
- Semenova, Vira, and Victor Chernozhukov. 2021. “Debiased Machine Learning of Conditional Average Treatment Effects and Other Causal Functions.” *The Econometrics Journal* 24 (2): 264–89.
- Wager, Stefan, and Susan Athey. 2018. “Estimation and Inference of Heterogeneous Treatment Effects Using Random Forests.” *Journal of the American Statistical Association* 113 (523): 1228–42.