射影行列

ref: 線形代数セミナー p5〜6

任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は、$\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$、$\boldsymbol{u}^\perp \in \mathcal{U}^\perp$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^\perp$$

と一意的に分解できる（直和分解）

ここで、$\boldsymbol{x}$ の $\mathcal{U}$ への射影を表すのは、$\boldsymbol{u}$ である

つまり、$\mathcal{U}$ への射影とは $\boldsymbol{x}$ のうち、$\mathcal{U}$ に含まれる成分 $\boldsymbol{u}$ だけを取り出す操作といえる

そこで、部分空間 $\mathcal{U}$ へ射影する写像を $P_\mathcal{U}$ とすると、

$$P_\mathcal{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$$

このとき、$\boldsymbol{x}$ がもともと $\mathcal{U}$ の元である場合は、$\boldsymbol{u}^\perp = \boldsymbol{0}$ の場合と考えて、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u}$$

つまり、射影しても変わらない

$$P_\mathcal{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U})$$

一方、$\boldsymbol{x}$ が $\mathcal{U}$ の直交補空間 $\mathcal{U}^\perp$ の元の場合は、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ の場合と考えて、

$$P_\mathcal{U}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp)$$

まとめると、

$$P_\mathcal{U}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

同様に、直交補空間 $\mathcal{U}^\perp$ へ射影する写像を $P_{\mathcal{U}^\perp}$ とすると、

$$P_{\mathcal{U}^\perp}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

$\mathbb{R}^n$ が $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}^\perp$ の直和に分解されることから、$\mathbb{R}^n$ の基底は $\mathcal{U}$ の基底と $\mathcal{U}^\perp$ の基底を合わせたものになる

そこで、部分空間 $\mathcal{U}$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ を選ぶと、これを $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に拡張できる
ここで、$\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathcal{U}^\perp$ の正規直交基底になる

このとき、

$$P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

という式は、$P_{\mathcal{U}}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}\}$$

同様に、

$$P_{\mathcal{U}^\perp}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

という式は、$P_{\mathcal{U}^\perp}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する

$$\{\boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

ゆえに、正規直交基底による表現行列の展開より、$P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^\perp}$ は次のように表現できる

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{U}} &= \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_r\boldsymbol{u}_r^\top \\ P_{\mathcal{U}^\perp} &= \boldsymbol{u}_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1}^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n^\top \end{aligned}$$

$P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^\perp}$ をそれぞれ、部分空間 $\mathcal{U}$、およびその直交補空間 $\mathcal{U}^\perp$ への射影行列と呼ぶ

単位行列の射影行列への分解

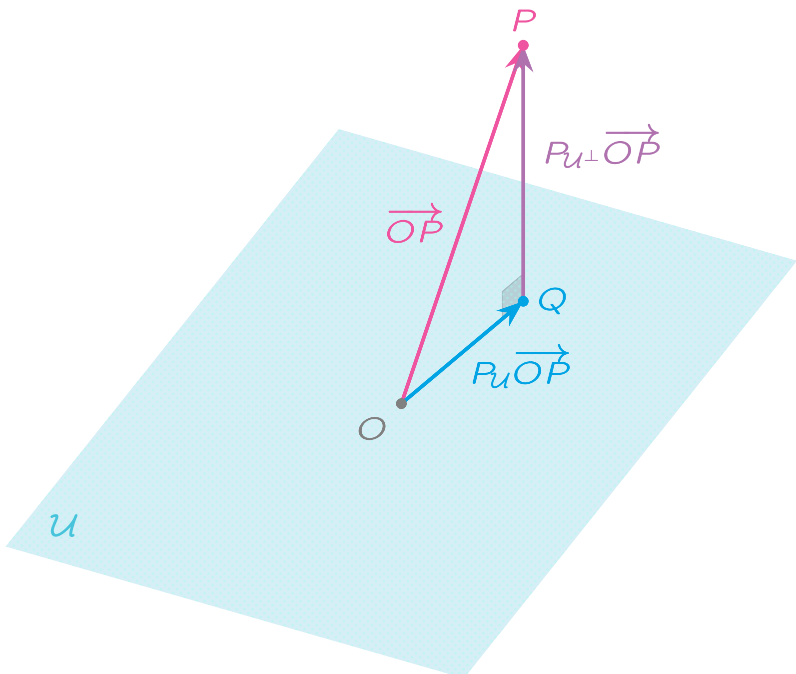
直交射影と反射影の章で示した、

ref: 線形代数セミナー p6~7

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$
$$\overrightarrow{OQ} \in \mathcal{U}, \quad \overrightarrow{QP} \in \mathcal{U}^\perp$$

という関係は、射影行列を用いて、次のようにも表せる

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= P_{\mathcal{U}}\overrightarrow{OP} + P_{\mathcal{U}^\perp}\overrightarrow{OP} \\ &= (P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp})\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$



$\mathbb{R}^n$ 内のすべての点 P に対して、$\overrightarrow{OP} = (P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp})\overrightarrow{OP}$ が成り立つことから、

$$P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp} = E$$

が成り立っている

これはすなわち、単位行列 E が、部分空間 $\mathcal{U}$ その直交補空間 $\mathcal{U}^\perp$ への射影行列の和に分解できることを意味する

$$E = \underbrace{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_r\boldsymbol{u}_r^\top}_{P_{\mathcal{U}}} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1}^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n^\top}_{P_{\mathcal{U}^\perp}}$$

この式により、単位行列 E 自体を、空間全体 $\mathbb{R}^n$ への射影行列と考えることもできる