線形写像の表現行列と連立方程式

線型写像の単射性・全射性は、その表現行列の階数によって連立一次方程式の解の性質と結びつく。

ref: 行列と行列式の基礎 p67〜68

単射な線形写像と階数

線形写像 f が単射であることを、表現行列 A の性質として述べると、次のような言い換えができる

線形写像の単射性と表現行列　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値である。

i. f は単射
ii. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は自明な解しか持たない
iii. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が単射であることの言い換えは、

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

であり、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が自明解しか持たないことは、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

が成り立つということである

$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であるから、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

斉次形の非自明解の存在条件より、斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ に自明解しか存在しないことと

$$\text{rank}(A) = n$$

と同値である。 ■

全射な線形写像と階数

単射性と対比して、全射性についても表現行列の言葉で整理する。

⚓ **線形写像の全射性と表現行列**　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値である。

i. f は全射
ii. 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解が存在する
iii. $\text{rank}(A) = m$

証明

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が全射であることの言い換えは、

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

であり、これは

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

と同値である

よって、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\iff$ (iii)

連立方程式の解の存在条件より、$\mathrm{rank}(A) = m$ は、次の条件

$$^\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する}$$

ことと同値である。 ■

全単射な線形変換と階数

一般の線形写像と対比して、線形変換の大きな特徴は次が成り立つことである。

ref: 行列と行列式の基礎 p70

単射と全射は、一般には一方から他方が導かれるわけではない 2 つの性質だが、$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像（線形変換）の場合は同値になる。

線形代数における鳩の巣原理 f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換とし、A を f の表現行列とするとき、次はすべて同値である。

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は全単射
iv. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ において、表現行列を A とすると、

$$\begin{aligned} f \text{ が単射} &\iff \mathrm{rank}(A) = n \\ f \text{ が全射} &\iff \mathrm{rank}(A) = m \end{aligned}$$

である。

線形変換は、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の $m = n$ の場合であるので、f が単射であることも、全射であることも、

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

という条件と同値になる。

つまり、線形変換は単射かつ全射であり、これは全単射であることも意味する。 ■

この定理は、いわば線形代数版「鳩の巣原理」である。

⚓ **鳩の巣原理**　有限集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への写像 f に対して、単射と全射は同値である

鳩の巣原理は、歴史的には部屋割り論法とも呼ばれ、

> n 個のものを m 個の箱に入れるとき、$n > m$ であれば、少なくとも 1 個の箱には 1 個より多いものが中にある

ことを指す。

ここで鳩の巣原理と呼んだのはこの命題そのものではないが、その変種と考えてよい。

階数による正則判定

線形代数における鳩の巣原理から、次のことがいえる。

ref: 行列と行列式の基礎 p71

正則の判定と階数　n 次正方行列 A に対して、

$$A \text{ が正則行列} \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A) = n$$

この定理は、線形変換 f（もしくは正方行列 A）が正則かどうかについて、階数という 1 つの数値で判定できることを示している。