$\mathbb{R}^n$ 上の内積とノルム

$\mathbb{R}^n$ にはベクトル演算という構造があるわけだが、内積という付加的な構造を定める

ref: 行列と行列式の基礎 p76

🎓 $\mathbb{R}^n$ 上の内積　$\boldsymbol{a} = (a_i)_{i=1}^n$, $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

を $\mathbb{R}^n$ 上の内積と呼ぶ

特に、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$$

なので、

$$\|\boldsymbol{a}\| := \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})} \geq 0$$

が定義できる

🎓 $\mathbb{R}^n$ 上のノルム　$\mathbb{R}^n$ 上のベクトル $\boldsymbol{a}$ の長さ（ノルム）を次のように定義する

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

$\mathbb{R}^n$ 上の内積の性質

ref: 行列と行列式の基礎 p76

$\mathbb{R}^n$ 上の内積の双線形性　$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ に対して、以下が成立する

i. $(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$
ii. $(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
iii. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2)$
iv. $(\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

証明

行列のかけ算と和に関する分配法則、行列のスカラー倍についての性質から従う ■

$\mathbb{R}^n$ 上の内積の対称性　$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、次が成り立つ

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

証明

実数同士の乗算は可換であることから、$\mathbb{R}^n$ 上の内積の定義により

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

となり、明らかに成り立つ ■

$\mathbb{R}^n$ 上の内積の正値性　$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$$

であり、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ のときに限り、等号が成立する

証明

内積の定義より、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \geq 0$$

である

ここで現れた u_i^2 は、u_i が 0 のときに限り 0 になるので、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ のときに限り、等号が成立する ■

$\mathbb{R}^n$ 上の内積と直交

ref: 行列と行列式の基礎 p77

$\mathbb{R}^n$ 上の内積に対するコーシー・シュワルツの不等式

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、次が成り立つ

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

証明

任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\|\boldsymbol{u} - t\boldsymbol{v}\|^2 = (\boldsymbol{u} - t\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - t\boldsymbol{v}) \geq 0$$

が成り立つ

ここで、内積の双線形性を用いて左辺を展開すると、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - 2t(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + t^2(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &\geq 0 \\ \|\boldsymbol{u}\|^2 - 2t(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + t^2\|\boldsymbol{v}\|^2 &\geq 0\end{aligned}$$

これは t についての 2 次式であり、判別式が 0 以下であることか

ら、次の不等式が成り立つ

$$
\begin{aligned}
(-2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}))^2 - 4\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 &\leq 0 \\
4(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2 &\leq 4\|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2
\end{aligned}
$$

よって、両辺を 4 で割ると

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

が得られる ■

これより、$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ が 0 でないとき、

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} \leq 1$$

なので、

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を介して $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ のなす角を定義できる

🎓 $\mathbb{R}^n$ 上のベクトルのなす角　$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

により定まる θ を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ のなす角という

$\cos\theta = 0$ は、幾何学的には $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角が直角であることを意味する

🎓 $\mathbb{R}^n$ 上のベクトルの直交　$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

が成り立つとき、$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交するといい、

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$$

と表記する

$\mathbb{C}^n$ 上の内積

複素数 $z = a + bi$ に対して、

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 \geq 0$$

という式が成り立つ

このとき、$a - bi$ を z の共役複素数といい、$\overline{z}$ と表記する

また、$\sqrt{a^2+b^2}$ は z の絶対値と呼ばれ、$|z|$ と表記する

すなわち、冒頭の不等式は、

$$|z|^2 = z\overline{z} \geq 0$$

と書き換えられる

このことを利用して、$\mathbb{C}^n$ 上の内積は、次のように定義すると $\mathbb{R}^n$ の場合の自然な拡張になる

$\mathbb{C}^n$ 上の内積　$\boldsymbol{a} = (a_i)_{i=1}^n$, $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ に対して、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}$$

を $\mathbb{C}^n$ 上の内積と呼ぶ

このように定めることで、特に、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^n a_i \overline{a_i} = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \geq 0$$

であるので、$\mathbb{R}^n$ の場合と同様に、ベクトルのノルムを定義できる

$\mathbb{R}^n$ 上の内積で成り立つ性質の多くは、$\mathbb{C}^n$ 上の内積でも成り立つが、対称性に関しては注意が必要である

$\mathbb{C}^n$ 上の内積の対称性　$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して、次が成り立つ

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}$$

証明

$\overline{\overline{z}} = z$ をふまえると、

$$\begin{aligned}
\overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})} &= \overline{\sum_{i=1}^{n} v_i \overline{u_i}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i \overline{u_i}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \overline{v_i} u_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i} \\
&= (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

となり、目的の式が示された　■

複素数 $z = a + bi$ において、$b = 0$ の場合、z は実数である

このとき、$a + 0i = a - 0i = a$ であるから、z が実数の場合、

$$\overline{z} = z$$

が成り立つ

よって、$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ であるなら、$\mathbb{C}^n$ 上の内積の対称性の式は

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

と書き換えられ、これは $\mathbb{R}^n$ 上の内積の対称性そのものである

つまり、$\mathbb{C}^n$ 上の内積の対称性は、$\mathbb{R}^n$ 上の内積の対称性も含んだ表現になっている