画像処理・AIのための数学ノート

tomixy

February 22, 2025

Contents

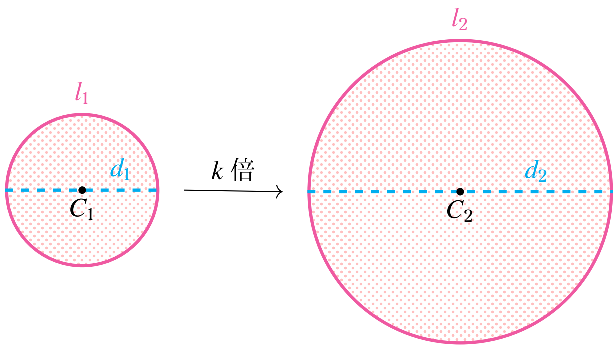
Chapter 1

基礎数学

1.1　三角関数

1.1.1　円周率

すべての円は、お互いを拡大もしくは縮小した関係にある。



円 C_2 が、円 C_1 を k 倍に拡大したものだとすると、その直径や円周も C_1 の k 倍となる。

$$d_2 = k \cdot d_1$$
$$l_2 = k \cdot l_1$$

この 2 つの式を各辺どうし割ることで、k が約分されて消え、直径と円周の比が等しくなることがわかる。

$$\frac{d_2}{l_2} = \frac{d_1}{l_1}$$

円の直径と円周の比　すべての円において、直径と円周の長さの比は一定である。

そして、この一定の比率は、円周率 π として知られている。

円周率　円の円周の長さ l と直径の長さ d の比を、円周率といい、π で表す。

$$\pi = \frac{l}{d} = 3.14\dots$$

π の定義式を変形すると、円周の長さを求める式が得られる。

半径を r とすると、直径 $d = 2r$ であるから、

$$l = \pi \cdot d = 2\pi r$$

円周の長さ　円の円周の長さ l は、半径 r を使って次のように表される。

$$l = 2\pi r$$

1.2 指数関数

1.2.1 同じ数のかけ算の指数による表記

指数と底

同じ数 a を n 回掛けたものを a の n 乗といい，a^n と表す。

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{個の} a}$$

このとき、n を指数、a を底という。

1.2.2 指数法則

指数を「かける回数」と捉えれば、いくつかの法則が当たり前に成り立つことがわかる。

「かける回数」の和

例えば、a を m 回かけてから、続けて a を n 回かける式を書いてみると、a は $m+n$ 個並ぶことになる。

$$\overbrace{a \times a \times a}^{a^3} \times \overbrace{a \times a}^{a^2} = \overbrace{a \times a \times a \times a \times a}^{a^5}$$

指数の和に関する指数法則

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

「かける回数」の差

例えば、a を m 回かけたものを、a を n 回かけたもので割ると、$m-n$ 個の a の約分が発生する。

$$\frac{\overbrace{a \times a \times a \times a \times a \times}^{a^5}}{\underbrace{a \times a}_{a^2}} = \overbrace{a \times a \times a}^{a^3}$$

指数の差に関する指数法則

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

「かける回数」の積

例えば、「a を m 回かけたもの」を n 回かける式を書いてみると、a は $m \times n$ 個並ぶことになる。

$$(a^2)^3 = \underbrace{\overbrace{a \times a}^{a^2} \times \overbrace{a \times a}^{a^2} \times \overbrace{a \times a}^{a^2}}_{a^6}$$

指数の積に関する指数法則

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

1.2.3 指数の拡張と指数関数

底を固定して、指数を変化させる関数を考えたい。

指数部分に入れられる数を拡張したいが、このとき、どんな数を入れても指数法則が成り立つようにしたい。

0 の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、$m = 0$ の場合を考える。

$$a^0 \times a^n = a^{0+n}$$
$$a^0 \times a^n = a^n$$

この式が成り立つためには、a^0 は 1 である必要がある。

0 の指数

どんな数も、0 乗すると 1 になると定義する。

$$a^0 = 1$$

そもそも、指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ は、「指数の足し算が底のかけ算に対応する」ということを表している。

- 「何もしない」足し算は $+0$
- 「何もしない」かけ算は $\times 1$

なので、$a^0 = 1$ は「何もしない」という観点で足し算とかけ算を対応づけたものといえる。

負の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、正の数 n を負の数 $-n$ に置き換えたものを考える。

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

さらに、指数法則 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ も成り立っていてほしいので、

$$a^m \times a^{-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

この式は、$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ とすれば、当たり前に成り立つものとなる。

負の整数の指数

n が正の整数であるとき、$-n$ 乗を次のように定義する。

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

有理数の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、指数 m, n を $\dfrac{1}{2}$ に置き換えたものを考える。

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a$$

$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$ は、$(a^{\frac{1}{2}})^2$ とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$$

つまり、$a^{\frac{1}{2}}$ は、2 乗すると a になる数（a の平方根）でなければならない。

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

同様に、$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$ を考えてみると、

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a$$

$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$ は、$(a^{\frac{1}{3}})^3$ とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$$

つまり、$a^{\frac{1}{3}}$ は、3 乗すると a になる数（a の 3 乗根）でなければならない。

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

このようにして、$a^{\frac{1}{n}}$ は、n 乗すると a になる数（a の n 乗根）として定義すればよい。

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

さて、分子が 1 ではない場合はどうだろうか？
$(a^m)^n = a^{mn}$ において、m を $\dfrac{m}{n}$ に置き換えたものを考えると、

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m$$

となるので、$a^{\frac{m}{n}}$ は、n 乗したら a^m になる数として定義すればよい。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

有理数の指数

m, n が整数で、n が正の整数であるとき、$\dfrac{m}{n}$ 乗を次のように定義する。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

実数への拡張

有理数は無数にあるので、指数 x を有理数まで許容した関数 $y = a^x$ のグラフを書くと、十分に繋がった線になる。
指数が無理数の場合は、まるでグラフ上の点と点の間を埋めるように、有理数の列で近似していくことで定義できる。

これで、x を実数とし、関数 $y = a^x$ を定義できる。

指数関数

a を正の実数とし、x を実数とするとき、次のような関数を指数関数という。

$$y = a^x$$

1.2.4 指数関数の底の変換

用途に応じて、使いやすい指数関数の底は異なる。

- e：微分積分学、複素数、確率論など
- 2：情報理論、コンピュータサイエンスなど
- 10：対数表、音声、振動、音響など

よって、これらの底を互いに変換したい場面もある。

指数の底を変えることは、指数の定数倍で実現できる。
例えば、底が 4 の指数関数 4^x を、底が 2 の指数関数に変換したいとすると、

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$$

のように、指数部分を 2 倍することで、底を 4 から 2 へと変換できる。
当たり前だが、この変換は、$4 = 2^2$ という関係のおかげで成り立っている。
「4 は 2 の何乗か？」がすぐにわかるから、4 から 2 への底の変換が簡単にできたのだ。

より一般に、a^x と b^X において、$a = b^c$ という関係があるとする。
つまり、a は b の c 乗だとわかっているなら、

$$a^x = (b^c)^x = b^{cx}$$

のように、底を a から b へと変換できる。

指数関数の底の変換

指数を定数倍することは、底を変えることと同じ操作になる。

$a = b^c$ という関係があるなら、次の変換が成り立つ。

$$a^x = b^{cx}$$

ここで重要なのは、指数関数の底を変換するには、「a は b の何乗か？」がわかっている必要があるということだ。

次章では、$a = b^c$ となるような c を表す道具として、対数を導入する。

1.3 対数関数

1.3.1 対数：指数部分を関数で表す

指数関数は、「a を x 乗したら y になる」という関係を表現するものだった。

ここで、逆に「y は a の何乗か？」という関係を表現するものとして、対数関数を定義する。

これは、y から x を導き出す関数であるから、指数関数 $y = a^x$ の逆関数といえる。

対数

$a^y = x$ を満たす y を、a を底とする x の対数といい、次のように表す。

$$y = \log_a x$$

ここで、x は真数、a は底と呼ばれる。

対数関数は指数関数の逆関数

対数関数 $y = \log_a x$ は、指数関数 $x = a^y$ の逆関数である。

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x$$

対数は、指数関数の指数部分を表す。

$a^y = x$ の y に、$y = \log_a x$ を代入することで、次のような式にまとめることもできる。

指数部分は対数で書き換えられる

$$a^{\log_a x} = x$$

1.3.2　対数の性質

指数法則を対数に翻訳することで、対数の性質を導くことができる。

真数のかけ算は log の足し算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$ として、指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ を考える。

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a^m \times a^n \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$m + n = \log_a(x_1 x_2)$ がいえる。
また、$x_1 = a^m$ より $m = \log_a x_1$、$x_2 = a^n$ より $n = \log_a x_2$ と表せるから、

$$m + n = \log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 x_2)$$

積の対数は対数の和

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

真数の割り算は log の引き算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$ として、指数法則 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ を考える。

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \frac{a^m}{a^n} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$m - n = \log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$ がいえる。

また、$x_1 = a^m$ より $m = \log_a x_1$、$x_2 = a^n$ より $n = \log_a x_2$ と表せるから、

$$m - n = \log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

商の対数は対数の差

$$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

真数の冪乗は log の指数倍

$x = a^m$ として、指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ を考える。

$$\begin{aligned} x^n &= (a^m)^n \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$mn = \log_a x^n$ がいえる。

また、$x = a^m$ より $m = \log_a x$ と表せるから、

$$mn = n \log_a x \log_a x^n$$

冪の対数は対数の指数倍

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

1.3.3 常用対数と桁数

常用対数　底を 10 にした対数関数を、常用対数と呼ぶ。

$$\log_{10} x$$

Chapter 2

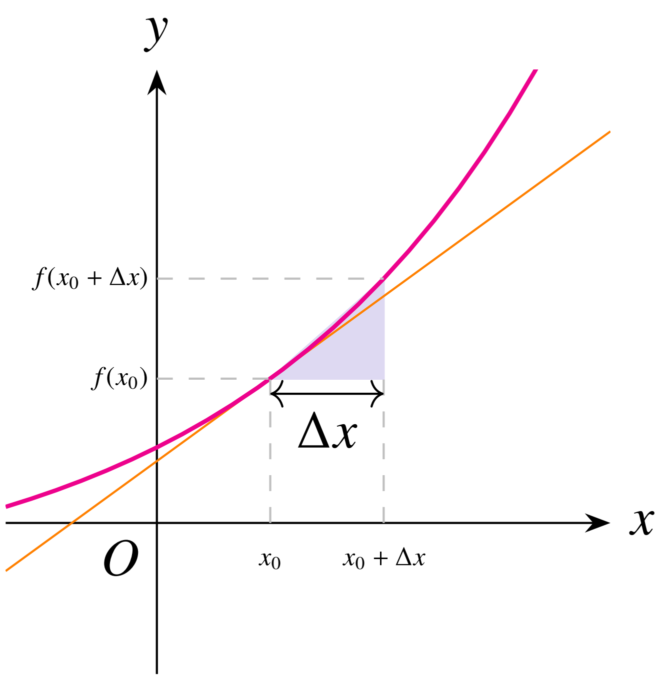
微分と積分

2.1　1変数関数の微分

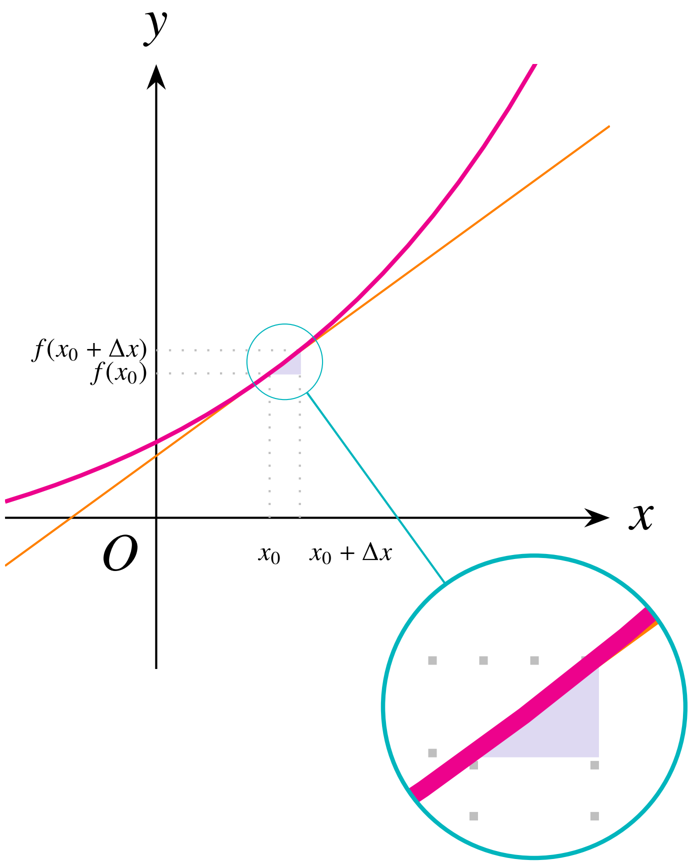
微分とは、複雑な問題も「拡大して見たら簡単に見える（かもしれない）」という発想で、わずかな変化に着目して入力と出力の関係（関数）を調べる手法といえる。

2.1.1　接線：拡大したら直線に近似できる

関数 $y = f(x)$ について、引数の値を $x = x_0$ からわずかに増加させて、$x = x_0 + \Delta x$ にした場合の出力の変化を考える。



このとき、増分の幅 Δx を狭くしていく（Δx の値を小さくしていく）と、$x = x_0$ 付近において、関数 $y = f(x)$ のグラフは直線にほとんど重なるようになる。



このように、関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

$$f(x) \simeq a(x - x_0) + b$$

という直線に近似することができる。

ここで、$f(x_0)$ の値を考えると、

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a(x_0 - x_0) + b \\ &= a \cdot 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$

であるから、実は $b = f(x_0)$ である。

一方、a はこの直線の傾きを表す。

そもそも、傾きとは、x が増加したとき、y がどれだけ急に（速く）増加するかを表す量である。

関数のグラフを見ると、急激に上下する箇所もあれば、なだらかに変化する箇所もある。

つまり、ある点でグラフにぴったりと沿う直線（接線）を見つけたとしても、その傾きは場所によって異なる。

そこで、「傾きは位置 x の関数」とみなして、次のように表現しよう。

$$a = f'(x)$$

これで、先ほどの直線の式を完成させることができる。

関数の各点の接線

関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

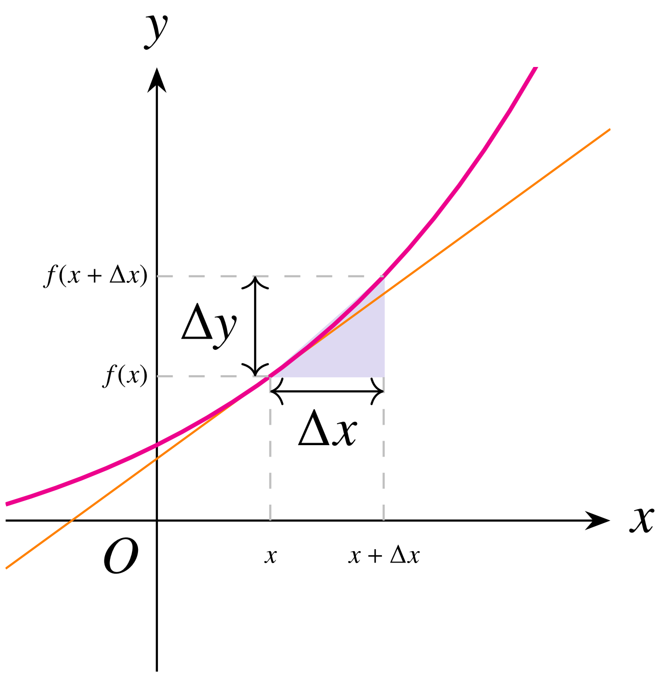
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

という傾き $f'(x)$ の直線に近似できる。

2.1.2 接線の傾きとしての導関数

傾きは位置 x の関数 $f'(x)$ としたが、この関数がどのような関数なのか、結局傾きを計算する方法がわかっていない。

直線の傾きは x と y の増加率の比として定義されているから、まずはそれぞれの増加率を数式で表現しよう。



この図から、y の増加率 Δy は次のように表せることがわかる。

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

この両辺を Δx で割ると、x の増加率 Δx と y の増加率 Δy の比率が表せる。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

図では Δx には幅があるが、この幅を限りなく 0 に近づけると、幅というより点になる。
つまり、$\Delta x \to 0$ とすれば、$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は任意の点 x での接線の傾きとなる。
「任意の点 x での傾き」も x の関数であり、この関数を導関数と呼ぶ。

導関数

関数 $f(x)$ の任意の点 x における接線の傾き（増加の速さ）を表す関数を導関数といい、次のように定義する。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2.1.3 微分とその関係式

微分 関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求める操作を微分という。

関数のグラフから離れて、微分という「計算」を考えるにあたって、先ほどの導関数の定義式よりも都合の良い表現式がある。
$x \to 0$ とした後の Δx を dx と書くことにして、$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ を取り払ってしまおう。

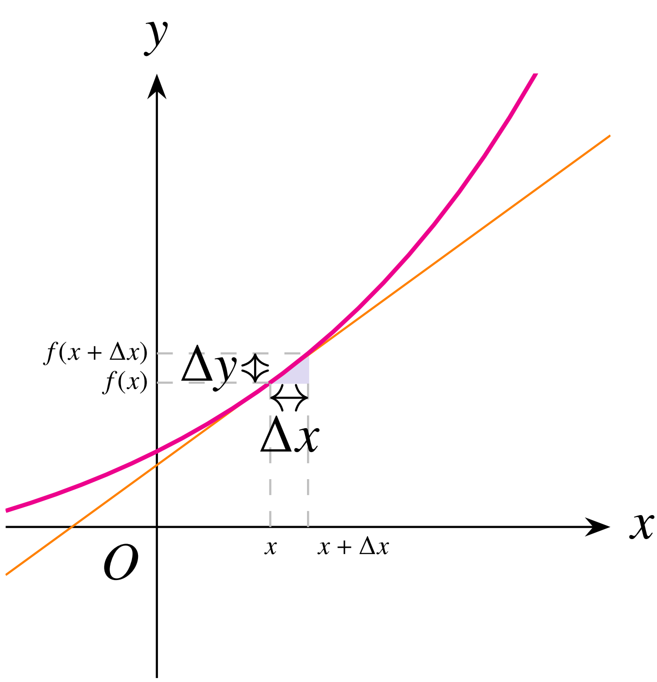
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} && \text{両辺 } \times dx \\
f'(x)dx &= f(x+dx)-f(x) && f(x) \text{ を移項} \\
f'(x)dx + f(x) &= f(x+dx)
\end{aligned}
$$

微分の関係式

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$$

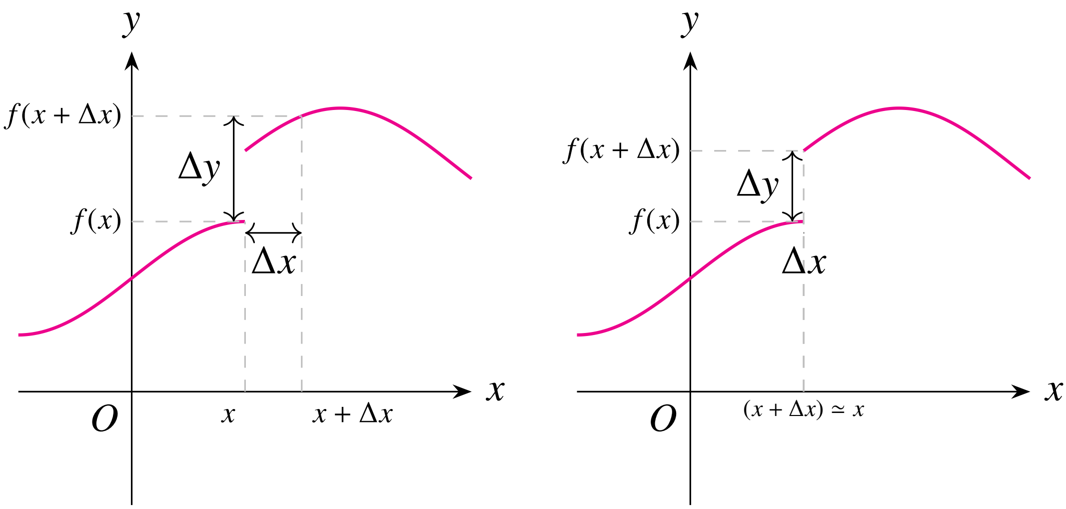
2.1.4 不連続点と微分可能性

点 x において連続な関数であれば、幅 Δx を小さくすれば、その間の変化量 Δy も小さくなるはずである。



しかし、不連続な点について考える場合は、そうはいかない。

下の図を見ると、Δx の幅を小さくしても、Δy は不連続点での関数の値の差の分までしか小さくならない。



このような不連続点においては、どんなに拡大しても、関数のグラフが直線にぴったりと重なることはない。

「拡大すれば直線に近似できる」というのが微分の考え方だが、不連続点ではこの考え方を適用できないのだ。

関数の不連続点においては、微分という計算を考えることがそもそもできない。

ある点での関数のグラフが直線に重なる（微分可能である）ためには、$\Delta x \to 0$ としたときに $\Delta y \to 0$ となる必要がある。

2.1.5 導関数のさまざまな記法

微分を考えるときは、$\Delta x \to 0$ としたときに $\Delta y \to 0$ となる前提のもとで議論する。

$\Delta x \to 0$ とした結果を dx、$\Delta y \to 0$ の結果を dy とすると、ある点 x での接線の傾きは、次のようにも表現できる。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

この接線の傾きが x の関数であることを表現したいときは、次のように書くこともある。

$$\frac{dy}{dx}(x)$$

これも一つの導関数（位置に応じた接線の傾きを表す関数）の表記法である。

この記法は、どの変数で微分しているかがわかりやすいという利点がある。

導関数のライプニッツ記法

次のような記号はいずれも、関数 $y = f(x)$ の導関数を表す。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

特に、$\frac{d}{dx}f(x)$ という記法は、$\frac{d}{dx}$ の部分を微分操作を表す演算子として捉えて、「関数 $f(x)$ に微分という操作を施した」ことを表現しているように見える。

微分演算子

関数を微分するという操作を表現する演算子を微分演算子という。

例えば、次のような記号で表される。

$$\frac{d}{dx}$$

ところで、これまで使ってきた $f'(x)$ という導関数の記法にも、名前がついている。

導関数のニュートン記法

次の記号は、関数 $y = f(x)$ の導関数を表す。

$$f'(x)$$

この記法は、「f という関数から導出された関数が f' である」ことを表現している。

導関数はあくまでも関数 f から派生したものであるから、f という文字はそのまま、加工されたことを表すために $'$ をつけたものと解釈できる。

2.1.6 微分の性質

微分の関係式を使うことで、微分に関する有用な性質を導くことができる。

REVIEW

微分の関係式

$$f(x+dx) = \underbrace{f(x)}_{\text{元の関数}} + \underbrace{f'(x)}_{\text{導関数}}\, dx$$

関数の一次結合の微分

$\alpha f(x) + \beta g(x)$ において、x を dx だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned}
\alpha f(x+dx) + \beta g(x+dx) &= \alpha\{f(x) + f'(x)dx\} + \beta\{g(x) + g'(x)dx\} \\
&= \underbrace{\alpha f(x) + \beta g(x)}_{\text{元の関数}} + \{\underbrace{\alpha f'(x) + \beta g'(x)}_{\text{導関数}}\}dx
\end{aligned}$$

微分の線形性

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

関数の積の微分

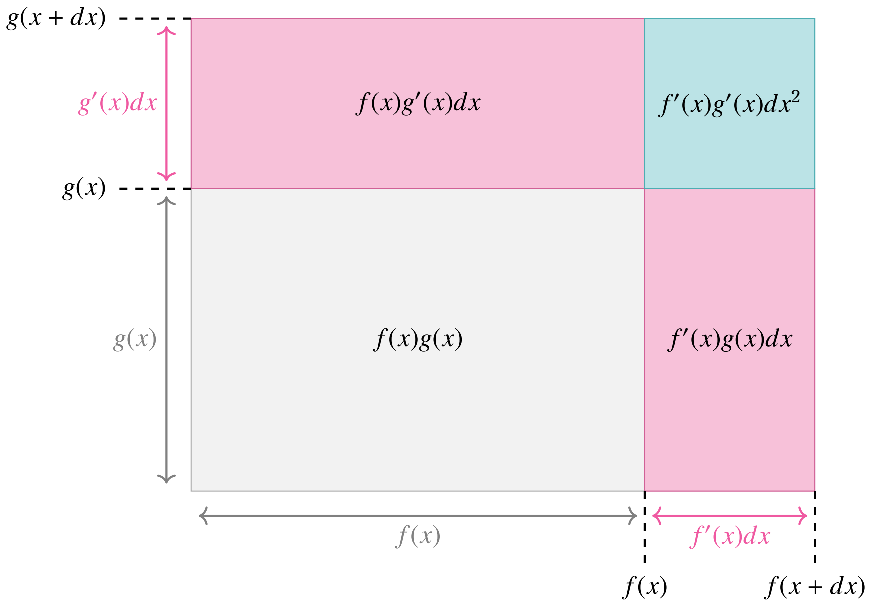
$f(x)g(x)$ において、x を dx だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned}
f(x+dx)g(x+dx) &= \{f(x) + f'(x)dx\}\{g(x) + g'(x)dx\} \\
&= f(x)g(x) + f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx + f'(x)g'(x)dx^2 \\
&= f(x)g(x) + \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx + \underbrace{f'(x)g'(x)dx^2}_{\text{2 次以上の微小量}}
\end{aligned}$$

ここで、dx^2 は、dx より速く 0 に近づくので無視できる。

荒く言ってしまえば、dx でさえ微小量なのだから、dx^2 なんて存在しないも同然だと考えてよい。

このことは、次の図を見るとイメージできる。



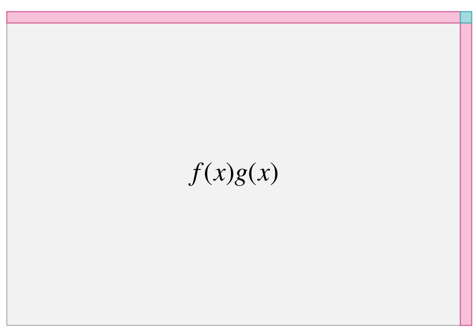
$dx \to 0$ のとき $dy \to 0$ となる場合に微分という計算を定義するのだから、dx を小さくしていくと、dy にあたる $f(x+dx) - f(x)$（これは $f'(x)dx$ と等しい）も小さくなっていく。
同様にして、$g(x+dx) - g(x)$（これは $g'(x)dx$ と等しい）も小さくなっていく。

REVIEW

微分の関係式 $f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$ より、

$$f'(x)dx = f(x+dx) - f(x)$$

dx を小さくした場合を図示すると、



2 次以上の微小量

$f'(x)g'(x)dx^2$ に相当する左上の領域は、ほとんど点になってしまうことがわかる。

このように、dx^2 の項は無視してもよいものとして、先ほどの計算式は次のようになる。

$$f(x+dx)g(x+dx) = \underbrace{f(x)g(x)}_{\text{元の関数}} + \{\underbrace{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}_{\text{導関数}}\}dx$$

微分のライプニッツ則

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

2.1.7 冪関数の微分

具体的な関数の導関数も、微分の関係式をもとに考えることができる。
まずは、基本的な例として、冪関数 $y = x^n$ の微分を考えてみよう。

$y = x^2$ の微分

$y = f(x) = x^2$ において、x を dx だけ微小変化させると、y は dy だけ変化するとする。
すると、微分の関係式は $y + dy = f(x + dx) = (x + dx)^2$ となるが、これを次のように展開して考える。

$$y + dy = (x + dx)(x + dx)$$

右辺の $(x + dx)(x + dx)$ からは、

- x^2 の項が 1 つ
- xdx の項が 2 つ
- dx^2 の項が 1 つ

現れることになる。
数式で表すと、

$$\boxed{y} + dy = \boxed{x^2} + 2xdx + dx^2$$

同じ

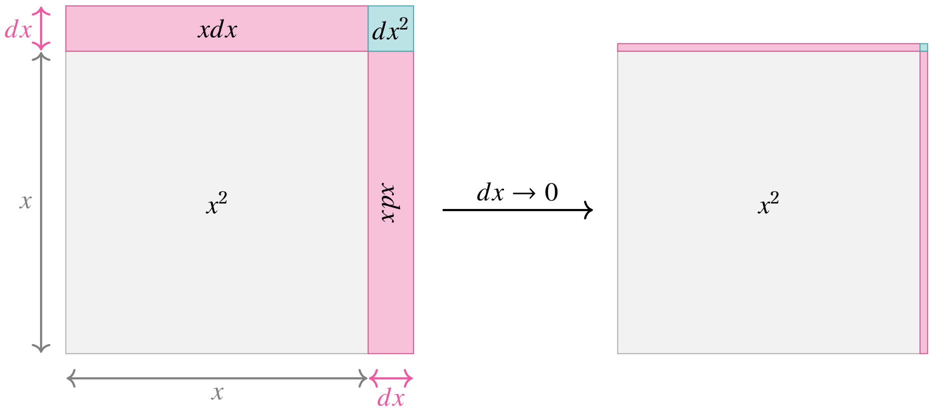
ここで $y = x^2$ なので、左辺の y と右辺の x^2 は相殺される。

$$\underbrace{}_{}dy = 2xdx + \boxed{dx^2}$$

高次の微小量

さらに、dx^2 の項は無視することができる。

なぜなら、dx を小さくすると、dx^2 は dx とは比べ物にならないくらい小さくなってしまうからだ。



というわけで、次のような式が得られる。

$$dy = 2xdx$$

よって、$y = x^2$ の導関数は、$y' = 2x$ となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$y = x^3$ の微分

同じように、$y = x^3$ の微分を考えてみよう。

$$y + dy = (x + dx)(x + dx)(x + dx)$$

右辺の $(x + dx)(x + dx)(x + dx)$ からは、

- x^3 の項が 1 つ
- $x^2 dx$ の項が 3 つ
- dx^3 の項が 1 つ

現れることになる。

$$\boxed{y} + dy = \boxed{x^3} + 3x^2dx + dx^3$$

同じ

ここで $y = x^3$ なので、左辺の y と右辺の x^3 は相殺される。

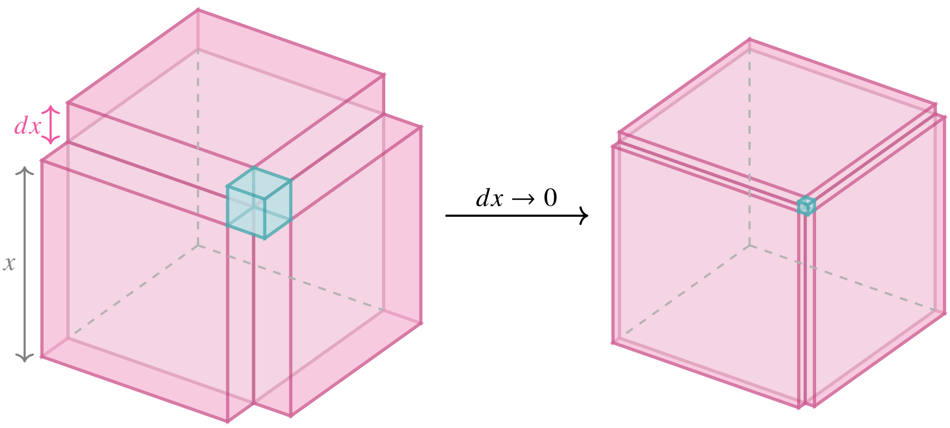
$$dy = 3x^2dx + \overset{\text{高次の微小量}}{\boxed{dx^3}}$$

さらにここでは、dx^3 の項を無視することができる。

次の図を見てみよう。

各辺 dx の立方体は、dx を小さくすると、ほぼ点にしか見えないほど小さくなる。

つまり、各辺 dx の立方体の体積 dx^3 は、考慮する必要がない。



というわけで、$y = x^3$ の導関数は、$y' = 3x^2$ となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$y = x^n$ の微分（n が自然数の場合）

n が自然数だとすると、$y = x^n$ の微分は、$y = x^2$ や $y = x^3$ の場合と同じように考えられる。

$$y + dy = \underbrace{(x + dx)(x + dx) \cdots (x + dx)}_{n\text{ 個}}$$

右辺の $(x + dx)(x + dx) \cdots (x + dx)$ を展開しようとすると、次のような 3 種類のかけ算が発生する。

- x どうしのかけ算
- x と dx のかけ算

- dx どうしのかけ算

つまり、右辺からは、

- x^n の項が 1 つ
- $x^{n-1}dx$ の項が n 個
- dx^n の項が 1 つ

という項が現れることになる。
そして、x^n は左辺の y と相殺され、dx^n の項は高次の微小量として無視できる。
すると、残るのは次のような式になるだろう。

$$dy = nx^{n-1}dx$$

この式は、$y = \alpha x$ という直線の式によく似ている。
高次の dx の項 dx^n を無視し、1 次の dx の項だけ残したのは、微分という計算が微小範囲における直線での近似であるからだ。
あくまでも微小範囲での直線の式であることを表すために、x, y を dx, dy として、$dy = \alpha dx$ という形の式になっていると考えればよい。

自然数の冪を持つ冪関数の導関数

n が自然数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$y = x^n$ の微分（n が整数の場合）

指数法則を使うことで、n が負の整数の場合にも拡張することができる。

まずは、$y = x^{-1}$ の微分を考えてみよう。
指数法則より、$y = x^{-1}$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \\ xy &= 1 \end{aligned} \quad \text{両辺} \times x$$

微小変化を加えた微分の関係式を作って、次のように展開していく。

$$(x + dx)(y + dy) = 1$$

$$\boxed{xy} + xdy + ydx + \overset{\text{高次の微小量}}{\boxed{dydx}} = \boxed{1}$$

同じ

ここで、微小量の掛け合わせである $dydx$ は無視できるほど小さい。

また、$y = \dfrac{1}{x}$ より、$xy = 1$ なので、左辺の xy と右辺の 1 は相殺される。

すると、残った式は、

$$\begin{aligned}
xdy + ydx &= 0 && \quad ydx \text{ を移項} \\
xdy &= -ydx && \quad \text{両辺 } \div dx \\
x\frac{dy}{dx} &= -y && \quad \text{両辺 } \div x \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x}
\end{aligned}$$

y が残ってしまっているので、$y = \dfrac{1}{x}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \\
&= -x^{-2}
\end{aligned}$$

これは、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ において、$n = -1$ を代入したものになっている。

n が任意の負の整数の場合も、同様に考えられる。

$y = x^{-n}$ を、$x^n y = 1$ として、

$$\underbrace{(x+dx)(x+dx)\cdots(x+dx)}_{n\text{ 個}}\times(y+dy)=1$$

$$\left(x^n + nx^{n-1}dx + \overbrace{\boxed{dx^n}}^{\text{高次の微小量}}\right)\times(y+dy)=1$$

高次の微小量を無視

$$(x^n+nx^{n-1}dx)\times(y+dy)=1$$

$$\boxed{x^n y} + x^n dy + nx^{n-1}ydx + \overbrace{\boxed{nx^{n-1}dxdy}}^{\text{高次の微小量}} = \boxed{1}$$

同じ

相殺＆無視

$$x^n dy + nx^{n-1}ydx = 0$$

移項してさらに整理すると、

$$x^n dy = -nx^{n-1}ydx$$

両辺 $\div dx$

$$x^n\frac{dy}{dx} = -nx^{n-1}y$$

両辺 $\times x^{-n}$

$$\frac{dy}{dx} = -nx^{n-1}x^{-n}y$$

$y = x^{-n}$

$$= -nx^{n-1}x^{-n}x^{-n}$$

指数法則 $x^m x^n = x^{m+n}$

$$= -nx^{-n-1}$$

これもやはり、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ において、n を $-n$ に置き換えたものになっている。

つまり、自然数（正の整数）だけでなく、負の整数も許容して、次のことがいえる。

整数の冪を持つ冪関数の導関数

n が整数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$y = x^n$ の微分（n が実数の場合）

n が有理数の場合はどうだろうか。実はこれも、指数法則によって拡張することができる。

m と n はどちらも自然数として、$y = x^{\frac{m}{n}}$ の微分を考える。

まず、$y = x^{\frac{m}{n}}$ は、$y^n = x^m$ とまったく同じ式である。

$$\begin{aligned} y^n &= x^m \\ y &= x^{\frac{m}{n}} \end{aligned} \quad \text{両辺 } \frac{1}{n} \text{ 乗}$$

というわけで、$y^n = x^m$ を微小変化させて、展開してみよう。

$$\underbrace{(y+dy)(y+dy)\cdots(y+dy)}_{n\text{ 個}} = \underbrace{(x+dx)(x+dx)\cdots(x+dx)}_{m\text{ 個}}$$

ここで、n と m は自然数なのだから、自然数冪のときと同じように考えて、次のような式が残ることになる。

$$ny^{n-1}dy = mx^{m-1}dx$$

よって、$\dfrac{dy}{dx}$ の式の y を含まない形を目指すと、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} && \\
&= \frac{mx^{m-1}}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}} && y = x^{\frac{m}{n}} \\
&= \frac{mx^{m-1}}{nx^{m-\frac{m}{n}}} && \\
&= \frac{mx^m x^{-1}}{nx^m x^{-\frac{m}{n}}} && \text{指数法則 } x^{a+b} = x^a x^b \\
&= \frac{mx^{-1}}{nx^{-\frac{m}{n}}} && x^m \text{ で約分} \\
&= \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{-1}}{x^{-\frac{m}{n}}} && \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{-1-(-\frac{m}{n})} && \text{指数法則 } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{-1+\frac{m}{n}} && \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} &&
\end{aligned}$$

これは、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ において、n を $\dfrac{m}{n}$ に置き換えたものになっている。

つまり、整数だけでなく、有理数に対しても同様の導関数の式が成り立つ。

ここまで来ると、無理数はどうだろうか？という疑問が生まれるが、無理数への拡張は指数法則では対応できない。

無理数に対しては、極限操作によって同様の導関数の式を導くことができ、実数全体に対して同じ導関数の式が成り立つことが示される。

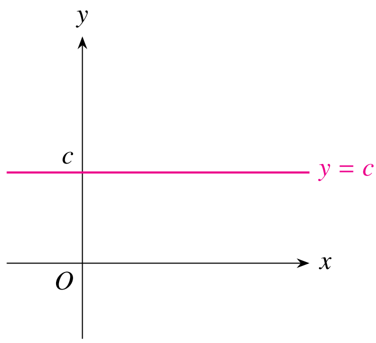
冪関数の導関数

n が実数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

2.1.8 定数関数の微分

常に一定の値 c を返す定数関数 $f(x) = c$ の微分はどうなるだろうか。
関数のグラフを描いて考えてみよう。



定数関数のグラフは、x 軸に対して平行な直線であり、この直線の傾きは見るからに 0 である。
実際、導関数の定義に従って計算することで、定数関数の導関数は 0 になることを確かめられる。

REVIEW

導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

どの点 x においても $f(x)$ が c を返すということは、$f(x + \Delta x)$ も c であるため、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、定数関数 $f(x) = c$ の微分の結果は c に依存せず、常に 0 になる。

定数関数の微分

常に定数 c の値をとる定数関数 $f(x) = c$ は、微分すると 0 になる。

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

2.1.9 合成関数の微分

合成関数の微分の一般的な式は、いろいろな関数の微分を考える上で重要な公式である。

関数の微小変化量

関数 $f(x)$ において、変数 x を dx だけ微小変化させた式は、これまで何度も登場した。

$$f(x+dx) = f(x) + \overset{\text{増えた分}}{\boxed{f'(x)dx}}$$

この式は、「x を dx だけ微小変化させることで、関数 f の値は $f'(x)dx$ だけ増加した」と捉えることもできる。
言い換えれば、関数 f の微小変化量は $f'(x)dx$ だということだ。
変化量という観点で眺めるには、次のように移項した式がわかりやすいかもしれない。

$$\overset{\text{区間 } dx \text{ での変化}}{\boxed{f(x+dx) - f(x)}} = \overset{\text{変化量}}{\boxed{f'(x)dx}}$$

関数 f の微小変化量 $f'(x)dx$ を、df と表すことにしよう。

合成関数の微分の関係式

今回はさらに、$t = f(x)$ を関数 $g(t)$ に放り込むことを考える。
$g(t)$ についても、次のような微分の関係式が成り立つはずだ。

$$g(t+dt) = g(t) + g'(t)dt$$

合成関数 $g(f(x))$ を作るため、$t = f$（引数 (x) を省略して書いた関数 $f(x)$）を代入する。

$$g(f+df)=g(f)+g'(f)df$$

f を $f(x)$ に、df を $f'(x)dx$ に書き戻すと、

$$g(f(x)+f'(x)dx)=g(f(x))+g'(f(x))f'(x)dx$$

となり、左辺の $g()$ の中身 $f(x)+f'(x)dx$ は $f(x+dx)$ と書き換えられるので、次の式を得る。

$$g(f(x+dx))=\underbrace{\boxed{g(f(x))}}_{\text{元の関数}}+\underbrace{\boxed{g'(f(x))f'(x)}}_{\text{導関数}}dx$$

合成関数の微分（ニュートン記法による表現）

合成関数 $g(f(x))$ の微分は、次の式で表される。

$$(g(f(x)))'=f'(x)g'(f(x))$$

連鎖律としての表現

ニュートン記法による表現はなかなかに覚えづらい式に見えるが、ライプニッツ記法を使って書き直すと、実は単純な関係式になっている。

- $(g(f(x)))'$ は、$g(f(x))$ を x で微分したもの：$\dfrac{d}{dx}g(f(x))$
- $f'(x)$ は、$f(x)$ を x で微分したもの：$\dfrac{d}{dx}f(x)$
- $g'(f(x))$ は、$g(t)$ を t で微分したもの $\dfrac{d}{dt}g(t)$ に、$t=f(x)$ に代入したもの：$\dfrac{d}{df}g(f(x))$

として書き直すと、

$$\frac{d}{dx}g(f(x))=\frac{d}{dx}f(x)\cdot\frac{d}{df}g(f(x))$$

さらに、引数を省略して書くと、

$$\frac{dg}{dx}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{dg}{df}$$

これは、df を約分できると考えたら、当たり前の式になっている。

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d\cancel{f}}{dx} \cdot \frac{dg}{d\cancel{f}}$$

合成関数の微分（連鎖律：ライプニッツ記法による表現）

$y = f(x)$、$z = g(y)$ という関係があるとき、次の式が成り立つ。

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

これは、x が微小変化すると y も微小変化し、さらに連鎖して z も微小変化するという関係から、連鎖律と呼ばれる。

2.1.10 逆関数の微分

関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の微分も、ライプニッツ記法で考えると、ごく当たり前の式として導出できる。

ネタバレすると、次の式がそのまま逆関数の微分を表すものになっている。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$\frac{dy}{dx}$ を $f'(x)$ と表記するなら、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

である。この発想を納得するために、もう少し詳しく見ていこう。

* * *

$y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、ライプニッツ記法では $\frac{dy}{dx}$ と表記される。

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ライプニッツ記法 $\frac{dy}{dx}$ には、「y で表される関数を x で微分する」という意味がこめられている。

ならば、逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の導関数は、「x で表される関数を y で微分する」という意味で、$\frac{dx}{dy}$ と表記できる。

$$\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y)$$

ここで、$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ という式から、次の等式も成り立つと考えられる。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

これは逆関数の導関数になっているが、逆関数が y の関数なのだから、その導関数 $\dfrac{dx}{dy}$ も y の関数であってほしい。

そこで、x を消すために $x = f^{-1}(y)$ を代入することで、逆関数の導関数を完成させる。

$$\frac{dx}{dy} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}$$

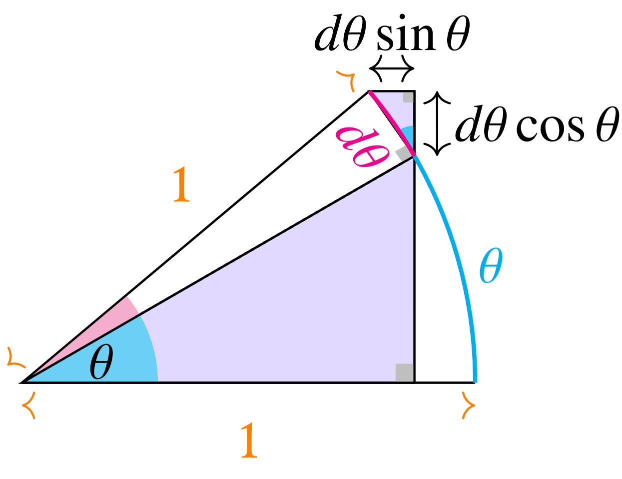
逆関数の微分

逆関数の導関数は、元の関数の導関数の逆数になる。

$$\frac{dx}{dy} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}$$

ここで、$\Big|_{x=f^{-1}(y)}$ は、その直前の式を計算した後に、$x = f^{-1}(y)$ を代入することを意味する。

2.1.11 三角関数の微分



2.1.12 ネイピア数

指数関数を定義した際に、「どんな数も 0 乗したら 1 になる」と定義した。
つまり、指数関数 $y = a^x$ において、$x = 0$ での関数の値は 1 である。
ここでさらに、$x = 0$ でのグラフの傾きも 1 となるような a を探し、その値をネイピア数と呼ぶことにする。

> ネイピア数（自然対数の底）
> 指数関数 $y = a^x$ において、$x = 0$ での接線の傾きが 1 となるような底 a の値をネイピア数と呼び、e と表す。

この定義では、「$x = 0$ では関数の値も傾きも等しく 1 になる」という、$x = 0$ での振る舞いにしか言及していない。
だが、実はネイピア数を底とする指数関数は、「微分しても変わらない（すべての x において、関数の値と傾きが一致する）」という性質を持つ。

2.1.13 ネイピア数を底とする指数関数の微分

指数関数 $y = e^x$ の微分は、導関数の定義から次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
&= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

ここで、$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ は x によらない定数であり、

$$
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x}
$$

というように、これは $x = 0$ における傾き（導関数に $x = 0$ を代入したもの）を表している。
そもそも、ネイピア数 e の定義は「$x = 0$ での e^x の傾きが 1」というものだったので、

$$
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1
$$

となり、「e^x は微分しても変わらない」という性質が導かれる。

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

ネイピア数を底とする指数関数の微分

ネイピア数を底とする指数関数は、微分しても変わらない関数である。

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

2.2 1変数関数の積分

積分とは、「部分を積み重ねる」演算である。

微小部分を調べる微分と、微小部分を積み重ねる積分は、互いに逆の操作になっている。

2.2.1 区分求積法：面積の再定義

長方形の面積は、なぜ「縦 × 横」で求められるのだろうか？

そこには、長方形の横幅分の長さを持つ線分を、長方形の高さに達するまで積み重ねるという発想がある。

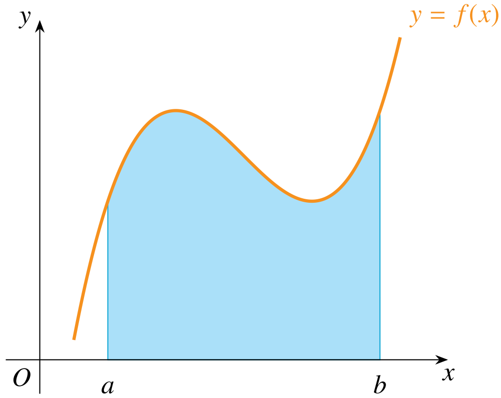
面積の計算を「線を積み重ねる」という発想で捉えると、あらゆる形状の面積を考えることができる。

長方形では、積み重ねる線の長さは一定だが、他の形状では、積み重ねる線の長さが変化する。

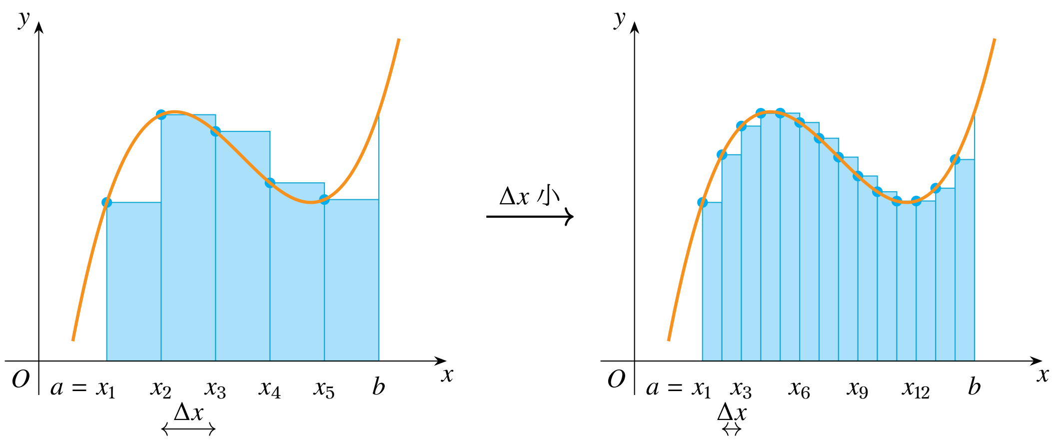
積み重ねるべき線の長さを、関数で表すことができたら…

* * *

関数 $y = f(x)$ が与えられたとき、高さ $f(x)$ の線分を a から b までの区間で積み重ねることで、x 軸とグラフに挟まれた部分の面積を求めることを考える。



この考え方は、面積を求めたい部分を長方形に分割し、長方形の幅を限りなく 0 に近づけるという操作で表現できる。

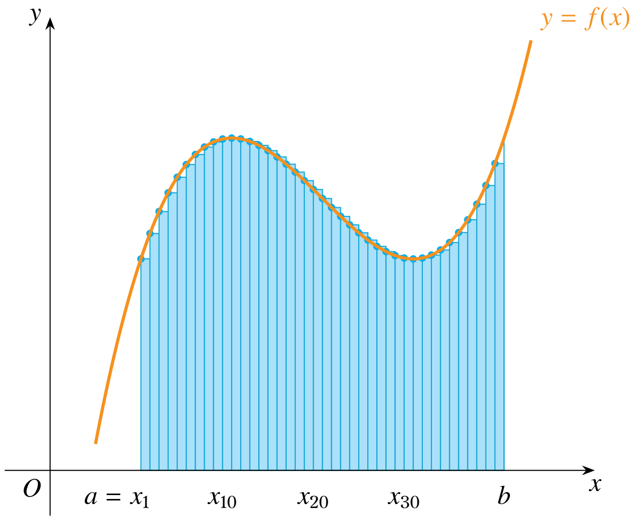


$a \le x \le b$ の区間を n 等分して、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする。

分割された各長方形は、幅が Δx で、高さが $f(x)$ であるので、各長方形の面積は次のように表せる。

$$\Delta S = f(x) \cdot \Delta x$$

どんどん Δx を小さくしていくと、細かい長方形分割で、面積を求めたい図形を近似できる。



つまり、求めたい面積は、分割した長方形の面積をすべて足し合わせることで近似できる。

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$\Delta x \to 0$ の果てでは、幅を持たなくなった長方形は線分とみなせるので、もはや近似ですらなくなるだろう。

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

このような考え方は、区分求積法と呼ばれる。

2.2.2 定積分：面積を求める積分

ここで、区間 $a \leq x \leq b$ における関数 $y = f(x)$ と x 軸の間の面積 S を求める式を、次のように表記する。

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\sum$ は離散的な和を表す記号であり、例えば $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}$ であれば、i を 1 ずつ増やして n に達するまで足し合わせることを意味する。
一方、ここで新たに導入した $\int$ は連続的な和を表す記号であり、微小変化を繰り返しながら足し合わせることを意味する。

$\sum$ は間隔を取って足し合わせるのに対し、$\int$ は間隔を限りなく小さくして足し合わせる。

足し合わせる間隔を限りなく小さくするという操作は、極限を取る操作に相当するので、$\sum$ の極限を取ったもの $\lim \sum$ をまとめて $\int$ という記号で表記したと捉えることができる。
さらに、$\lim_{\Delta x \to 0}$ とした果ての Δx は、微小変化を意味する dx と書き換えられている。

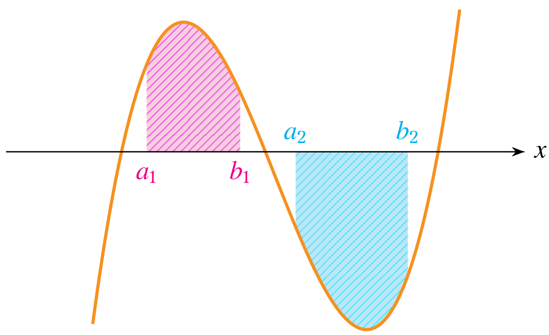
定積分

$a \leq x \leq b$ の区間内における関数 $f(x)$ のグラフと x 軸の間の領域の符号付き面積を求める演算を定積分と定義し、次のように表記する。

$$\int_a^b f(x)dx$$

このとき、$f(x)$ を被積分関数と呼ぶ。

$f(x)$ の値が負になる区間では、定積分の値も負になるため、定積分は符号付き面積を表す。



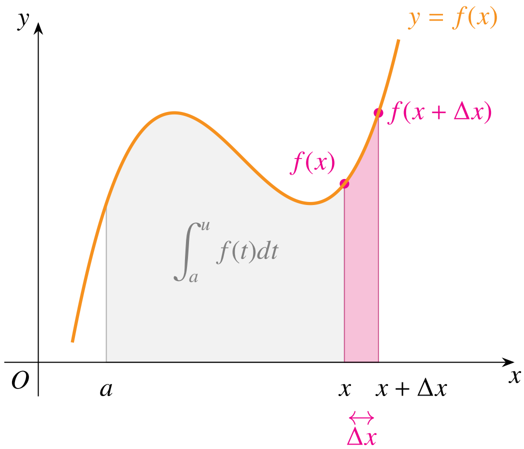
2.2.3 微小範囲の定積分から微分へ

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は、積分区間の取り方（a や b の値）を変えると、当然異なる計算結果になる。

ここで、下端 a は固定し、上端 b を変化させて積分区間を広げていくことを考えよう。
上端が変化することを強調するため、上端は x と表記することにする。
このとき、定積分 $\int_a^x f(t)dt$ は、上端 x の関数として捉えられる。

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$\int$ の中で使っている変数 t は、積分区間の下端から上端まで動く変数であり、どんな文字を使ってもよい。「t が下端 a から上端 x まで動く」なら違和感なく聞こえるが、「x が下端 a から上端 x まで動く」というのはややこしいので、上端 x と区別するために t を使うことにした。

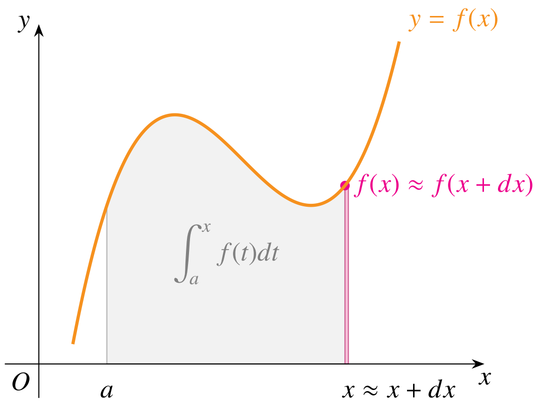


x を Δx だけ増加させたときに増える面積は、

$$S(x + \Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

となるが、ここでさらに Δx を小さくしていくと…

増えた領域は、幅 dx、高さ $f(x)$ の長方形とみなせるので、その面積は $f(x)dx$ となる。



よって、$\Delta x \to 0$ としたときには、

$$S(x + dx) - S(x) = f(x)du$$

という式が成り立ち、これは実は見慣れた微分の関係式と同じ形をしている。

$$S(x+dx) = \underbrace{S(x)}^{\text{元の関数}} + \underbrace{f(x)}^{\text{導関数}}du$$

この式は、定積分したもの $F(x)$ を x で微分すると、積分前の関数 $f(x)$ に戻るということを示している。

このような「積分したものを微分すると、元の関数に戻る」という事実は、微積分学の基本定理として知られている。

微積分学の基本定理　積分の逆の演算は微分である。

2.2.4 不定積分：原始関数を求める積分

定積分の定義は面積から始まったが、定積分という操作で「微分したら元の関数に戻る」ような関数を作ることもできた。

ここで、「微分したら元の関数に戻る」関数を次のように定義する。

原始関数

微分することで元の関数 $f(x)$ が得られる関数を、$f(x)$ の 原始関数 と呼び、$F(x)$ と表す。

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

「微分したら元の関数に戻る」関数の 1 つが、前節で調べた $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ であったが、実はこのような関数は他にも存在する。

例えば、定数を微分すると 0 になるため、$S(x)$ に任意の定数 C を加えた関数 $S(x) + C$ を作っても、その微分結果は変わらず元の関数になる。

このことは、「原始関数には定数 C 分の不定性がある」などと表現されることがある。

「微分したら元の関数に戻る」関数を求める演算、すなわち「微分の逆演算」として捉えた積分を新たに定義してみよう。

不定積分

関数 $f(x)$ から原始関数 $F(x)$ を求める演算を、$f(x)$ の 不定積分 と呼び、次のように表す。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ここで、C は 積分定数 と呼ばれる任意の定数である。

2.2.5 原始関数による定積分の表現

少し前に、定積分 $\int_a^x f(t)dt$ を上端 x の関数 $S(x)$ とみて、x を微小変化させることで、$S(u)$ が $f(u)$ の原始関数である（$S(u)$ を u で微分したら $f(u)$ になる）ことを確かめた。

REVIEW

区間 Δx での面積の増分を考え、

$$S(x + \Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$\Delta x \to 0$ とすれば、次のような微分の関係式が得られる。

$$S(x + dx) = \underbrace{S(x)}_{\text{元の関数}} + \underbrace{f(x)}_{\text{導関数}} dx$$

さらに前節では、「微分したら元に戻る」原始関数は 1 つだけではなく、任意の定数 C を用いた $F(x) + C$ も、$f(x)$ の原始関数であることを述べた。

そこで、$f(x)$ の任意の原始関数を $F(x)$ とおくことにする。

原始関数は任意の定数 C 分だけ異なるので、$f(x)$ の原始関数の 1 つである $S(x)$ は、$f(x)$ の他の原始関数 $F(x)$ を C 分ずらしたものになるはずである。

$$S(x) = F(x) + C$$

ここで、$S(x) = \int_a^x f(t)dt$ に、$x = a$ を代入すると、下端と上端が一致する領域の面積（定積分）は明らかに 0 なので、

$$S(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

なんとここから、C を求めることができる。

$S(a) = F(a) + C = 0$ より、

$$C = -F(a)$$

この C を用いて、$S(x)$ を次のように表現できる。

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

$x = b$ を代入することで、積分区間の上端を b に戻した定積分を考えると、

$$S(b) = F(b) - F(a)$$
$$S(b) = \int_a^b f(x)dx$$

という、$S(b)$ について 2 通りの表現が得られる。

> 上端を表す x という変数が現れなくなったので、$\int$ の中で使っていた変数 t はしれっと x に戻している。$\int$ の中の x は「下端 a から上端 b まで動く」という意味しか持っていないので、何の文字を使っても意味は変わらない。

得られた 2 通りの表現式を組み合わせることで、次のような関係が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

原始関数による定積分の表現

関数 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であれば、定積分は次のように計算できる。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ここで現れる $F(b) - F(a)$ という量は、次の記号で表される。

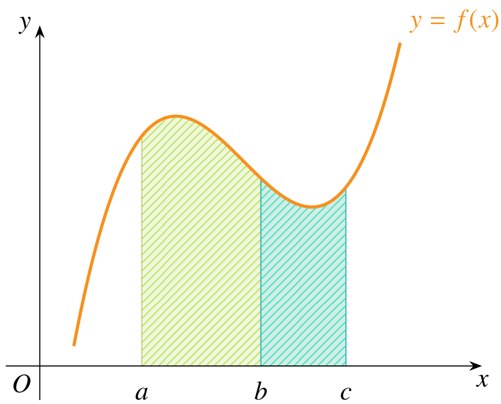
$$\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

2.2.6 定積分の性質

面積としての理解だけではうまく想像できない性質も、原始関数との関係を使うことで数式で確かめられるようになる。

積分区間の結合

2 つの定積分があり、それらの積分区間が連続していれば、1 つの定積分としてまとめて計算できる。



積分区間が連続する定積分の和

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

面積として考えれば明らかな性質だが、原始関数を使って証明することもできる。

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\
&= F(c) - F(a) \\
&= \int_a^c f(x)dx
\end{aligned}
$$

として、式が成立することがわかる。

積分区間の反転

積分区間の上限と下限を入れ替わると、符号が変わる。

定積分の積分区間の反転

$$
\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx
$$

これは、積分区間が連続する定積分の和の性質における、$c = a$ の場合の式である。

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx &= \int_a^a f(x)dx \\
&= 0 \\
\int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx
\end{aligned}
$$

定積分の線形性

微分や $\sum$ 記号などと同様に、定積分も線形性を持つ。

定積分の線形性

$$
\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx
$$

この性質は、微分の線形性から導かれる。

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$、$g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすると、微分の線形性より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left\{\alpha F(x)+\beta G(x)\right\} &= \alpha\frac{d}{dx}F(x)+\beta\frac{d}{dx}G(x)\\ &= \alpha f(x)+\beta g(x)\end{aligned}$$

となるから、$\alpha f(x)+\beta g(x)$ の原始関数は $\alpha F(x)+\beta G(x)$ である。

よって、定積分を原始関数を使って書き表すと、

$$\begin{aligned}\int_a^b \left\{\alpha f(x)+\beta g(x)\right\} dx &= \alpha F(b)-\alpha F(a)+\beta G(b)-\beta G(a)\\ &= \alpha\left\{F(b)-F(a)\right\}+\beta\left\{G(b)-G(a)\right\}\\ &= \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

となり、原始関数を使うことで、微分の線形性から定積分の線形性につながることがわかる。

Chapter 3

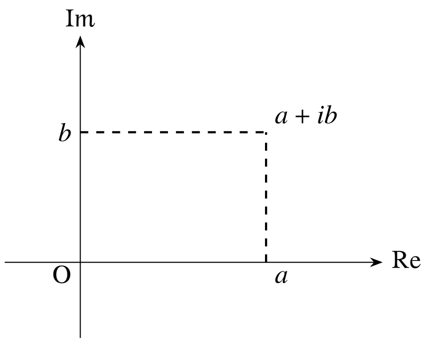
複素数と複素関数

3.1　複素平面

複素数は、実部（Real Part）と虚部（Imaginary Part）という 2 つの数から成る。

そのため、実部を横軸に、虚部を縦軸にとった平面を考え、1 つの複素数をこの平面上の 1 点として表すことができる。

複素平面　実部を横軸、虚部を縦軸にとった平面を複素平面と呼ぶ。



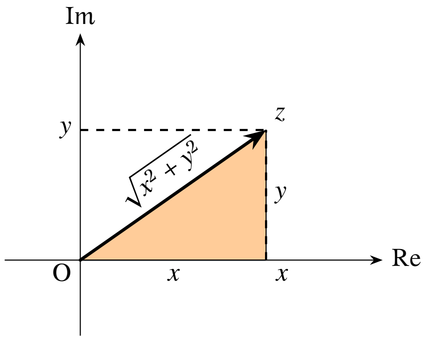
3.2　複素数の絶対値

複素数の絶対値

複素平面において、原点から複素数 z までの距離を複素数 z の絶対値と定義する。

この距離は三平方の定理から求められ、$|z|$ と表す。

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

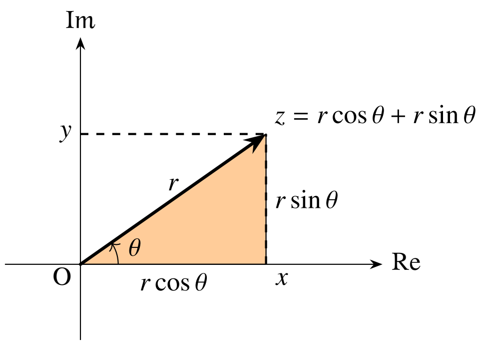


3.3 複素数の極形式による表現

極形式

複素数 z は、絶対値 r と偏角 θ を用いて次のように表すことができる。

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$



3.4 偏角と主値

$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ に、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を代入して整理した関係式から、偏角を改めて定義する。

偏角

複素数 z を極形式で表現すると、

$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$、$\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ という関係が成り立つ。

この関係を満たす θ を偏角と呼び、次のように表す。

$$\arg z := \theta$$

ここで、θ を整数回 2π シフトさせても（何周回っても）、複素数 z の値は変わらない。

つまり、1 つの複素数に対して偏角の値は複数考えられるので、次のような主値を定義する。

偏角の主値

$0 \leq \theta \leq 2\pi$、もしくは $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲にある偏角を偏角の主値と呼び、次のように表す。

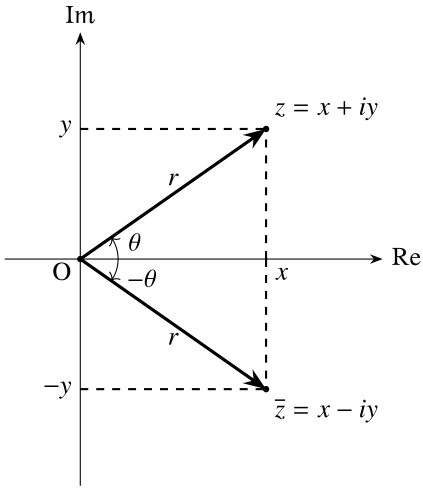
$$\operatorname{Arg} z := \theta$$

3.5 共役複素数

共役複素数

複素数 $z = x + iy$ に対して，その共役複素数 $\bar{z}$ を次のように定義する。

$$\bar{z} := x - iy$$



共役複素数と絶対値

複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ の積は、z の絶対値の二乗に等しい。

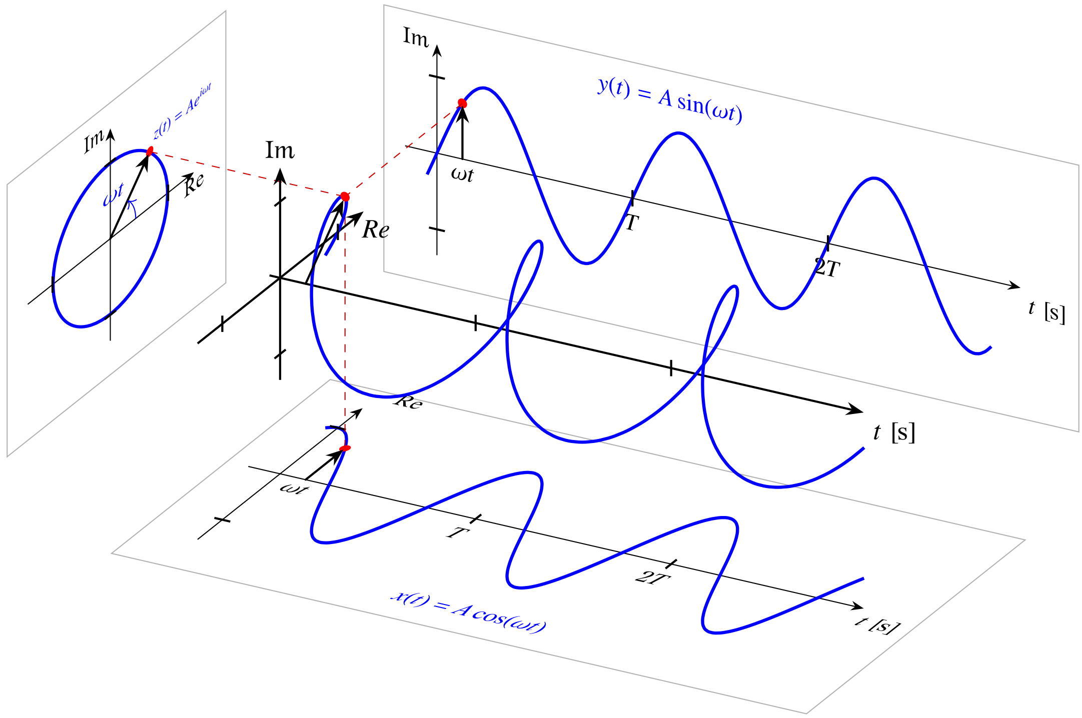
$$z\bar{z} = |z|^2$$

Proof

複素数 $z = x + iy$ とその共役複素数 $\bar{z} = x - iy$ の積を計算する。

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

3.6 オイラーの公式



$z(t) = Ae^{j\omega t}$
Im
Re
ωt
Im
Re
t [s]
Re
$y(t) = A\sin(\omega t)$
Im
ωt
T
$2T$
t [s]
ωt
T
$2T$
$x(t) = A\cos(\omega t)$
t [s]

Chapter 4

フーリエ解析

4.1　波の 2 つの捉え方

波は 2 つの捉え方ができる。

- 空間的に捉える波：波の形そのもの
- 時間的に捉える波：波の振動

4.1.1　空間的に捉える波

波とは、一定の間隔で同じ形が繰り返されるものである。

空間的に捉える波は、まさにその波の形そのもので、波の形を位置 x の関数として表す。

波長　波を構成する最小パターンの幅を波長と呼び、λ で表す。

周期関数　次の式を満たす関数 $f(x)$ を、周期 λ の周期関数という。

$$f(x+\lambda) = f(x)$$

波数　2π の長さに含まれる、波の最小パターンの数を波数という。

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

4.1.2　時間的に捉える波

波を時間軸から見たとき、波を構成する最小パターンは幅ではなく時間である。

その最小パターンを周期と呼ぶ。

周期は、波を時間軸から見たときの「波長」の言い換えともいえる。

周期　波が 1 回振動するのにかかる時間を周期と呼び、T で表す。

周期関数　次の式を満たす関数 $f(t)$ を、周期 T の周期関数という。

$$f(t+T) = f(t)$$

周波数（振動数）

単位時間に含まれる、波の最小パターンの数を周波数という。

$$\nu = \frac{1}{T}$$

これは、単位時間に何回振動するかを表すため、振動数とも呼ばれる。

4.2　角周波数と正弦波

角周波数　動径が単位時間内に進む角を角周波数と呼び、ω で表す。

任意の時間における動径

時間が t だけ経過したときの動径 θ は、角周波数 ω を使って次のように表すことができる。

$$\theta = \omega t$$

$\sin\theta$ や $\cos\theta$ は、$\theta = \omega t$ の関係を用いると、動径 θ ではなく角周波数 ω の関数とみることができる。

正弦波　$\sin\omega t$ や $\cos\omega t$ を、角周波数 ω の正弦波と呼ぶ。

4.2.1 角周波数と振動数の関係

円の 1 周は 2π であり、単位時間あたりに進む円周は角周波数 ω である。

（角周波数は「角」の大きさとして定義したが、弧度法のおかげで、「円周」の長さとしても捉えられる。）

ここで、単位時間あたりに進む円周 ω は、1 周 2π のうちのどれくらいだろうか？

その答えは、ω を「1 周あたりの量」2π で割ったものになる。

角周波数と円周の関係

角周波数 ω で動径が回転するとき、その動径は単位時間に

$$\frac{\omega}{2\pi}$$

だけ円を回ることになる。

ここで、三角関数は円関数とも呼ばれるように、円の 1 周は三角関数の 1 振動に対応する。

振動を円周上の回転として表す三角関数のおかげで、「どれくらい回るか？」を「どれくらい振動するか？」とみることができる。

つまり、動径が単位時間に $\frac{\omega}{2\pi}$ だけ回転するということは、単位時間に $\frac{\omega}{2\pi}$ だけ振動するということだ。

角周波数と振動数の関係

角周波数を ω とすると、振動数 ν は次のように表せる。

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

4.2.2 角周波数と周期の関係

ここまでで、振動数 ν は 2 通りの表し方ができることがわかった。

- $\nu = \frac{1}{T}$（周波数：単位時間に含まれる、最小波の時間幅）
- $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$（振動数：単位時間に含まれる、振動の回数）

この 2 式を組み合わせて、次のような関係が得られる。

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

角周波数と周期の関係

角周波数を ω、周期を T とすると、次のような関係が成り立つ。

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

4.3 偶関数と奇関数

sin 関数と cos 関数は、どちらも正弦波と呼ばれるが、その性質は異なる。

sin は奇関数であり、cos は偶関数である。

この違いが、後に議論するフーリエ級数展開においても重要な役割を果たす。

4.3.1 偶関数と奇関数は異なる対称性を持つ

偶関数

グラフが y 軸に対して対称な関数を偶関数と呼ぶ。

偶関数は、任意の x に対して次の関係が成り立つ関数として定義される。

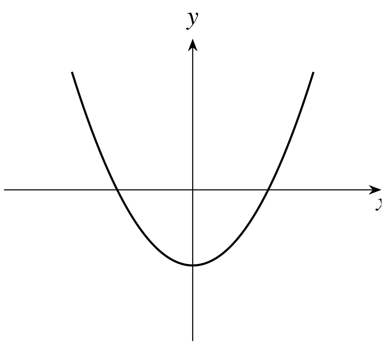
$$f(-x) = f(x)$$

奇関数

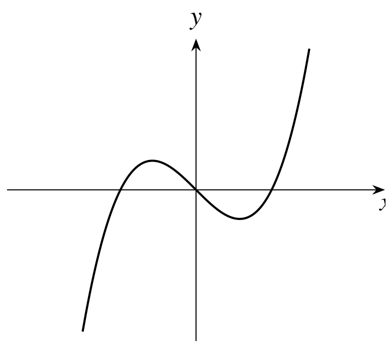
グラフが原点に対して対称な関数を奇関数と呼ぶ。

奇関数は、任意の x に対して次の関係が成り立つ関数として定義される。

$$f(-x) = -f(x)$$



偶関数: $f(-x) = f(x)$



奇関数: $f(-x) = -f(x)$

1 つの関数が、この両方の性質を持つことはない。

つまり、偶関数であり奇関数でもある関数は存在しない。

4.3.2 積に関する性質

偶関数と奇関数の積　偶関数と奇関数の積は、奇関数となる。

Proof

$f(x)$ を奇関数、$g(x)$ を偶関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= -f(-x)g(-x) \\ f(-x)g(-x) &= -f(x)g(x) \end{aligned}$$

両辺 -1 倍して両辺入れ替え

となり、引数を -1 倍すると符号が反転するため、$f(x)g(x)$ は奇関数である。

奇関数どうしの積　奇関数と奇関数の積は、偶関数となる。

Proof

$f(x), g(x)$ を奇関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= -f(-x) \cdot \{-g(-x)\} \\ &= f(-x)g(-x) \end{aligned}$$

となり、引数を -1 倍しても符号がそのままなので、$f(x)g(x)$ は偶関数である。

偶関数どうしの積　偶関数と偶関数の積は、偶関数となる。

Proof

$f(x), g(x)$ を偶関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(-x)g(-x) \\ f(-x)g(-x) &= f(x)g(x) \end{aligned}$$

両辺入れ替え

となり、引数を -1 倍しても符号がそのままなので、$f(x)g(x)$ は偶関数である。

4.3.3 和に関する性質

奇関数どうしの和　奇関数と奇関数の和は、奇関数となる。

Proof

$f(x), g(x)$ を奇関数とすると、

$$
\begin{aligned}
f(x) + g(x) &= -f(-x) - g(-x) \\
&= -\{f(-x) + g(-x)\} \\
f(-x) + g(x) &= -\{f(x) + g(x)\}
\end{aligned}
$$

両辺 -1 倍して両辺入れ替え

となり、引数を -1 倍すると符号が反転するため、$f(x) + g(x)$ は奇関数である。

偶関数どうしの和　偶関数と偶関数の和は、偶関数となる。

Proof

$f(x), g(x)$ を偶関数とすると、

$$
f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)
$$

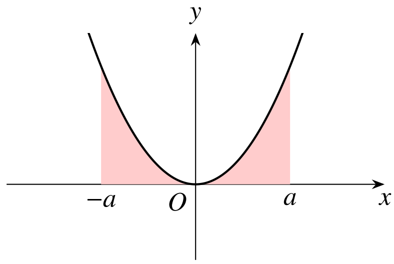
となり、引数を -1 倍しても符号がそのままなので、$f(x) + g(x)$ は偶関数である。

4.3.4 偶関数・奇関数の積分

偶関数の積分公式

原点に関して対称な区間 $-a \leq x \leq a$ において、$f(x)$ が偶関数なら、次の式が成り立つ。

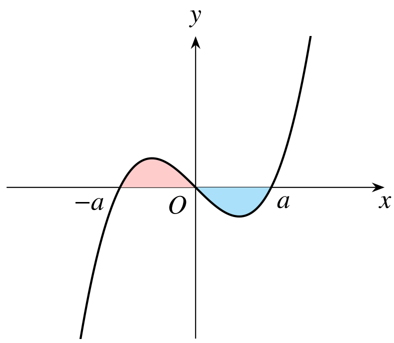
$$
\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx
$$



奇関数の積分公式

原点に関して対称な区間 $-a \le x \le a$ において、$f(x)$ が奇関数なら、次の式が成り立つ。

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$



4.4 フーリエ級数

4.4.1 そもそも級数とは

級数展開

ある関数 $f(x)$ を、より基本的な関数系

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots\}$$

を使って、次のような級数で表すことを級数展開という。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

級数展開は、近似や性質の分析に役立つ。

代表的な級数展開：マクローリン展開

$f(x)$ が無限回微分可能なとき、$f(x)$ は多項式関数 $\{x^0, x^1, x^2, \dots\}$ を使って級数展開できる。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

このような級数展開をマクローリン展開という。

代表的な級数展開：フーリエ級数展開

$f(x)$ が特定の条件を満たすとき、$f(x)$ は三角関数を使って級数展開できる。

このような級数展開をフーリエ級数展開といい、これからの議論の対象となる。

4.4.2 有限区間で定義された関数のフーリエ級数展開

有限区間で定義された関数のフーリエ級数展開

$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$（区間幅 T の有限区間）で定義された関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

4.4.3 フーリエ級数展開の周期関数への拡張

元の関数 $f(t)$ には区間の制限を設けていたが、フーリエ級数を構成する三角関数は、無限区間で定義されている。

そして、三角関数は、区間幅 T だけずらしても同じ値をとる、周期 T の周期関数である。

つまり、特定の区間内の関数 $f(t)$ の形を、無限区間内で T ずつずらしていっても、それを表現するフーリエ級数の式は変わらない。

関数 $f(t)$ が、区間の制限をなくしても同じ形を繰り返すだけ（周期関数）であれば、先ほどのフーリエ級数展開がそのまま成り立つことになる。

周期関数のフーリエ級数展開

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right\}$$

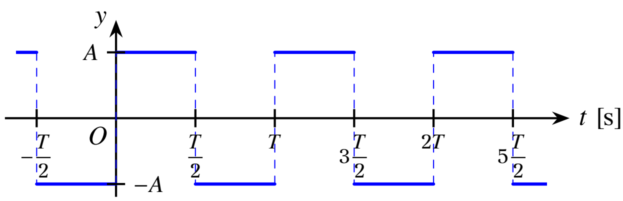
が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

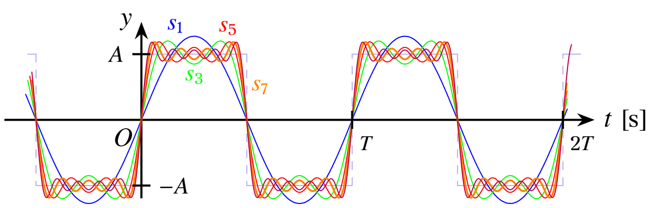
4.4.4 不連続点におけるフーリエ級数の値

次のような矩形波 $f(t)$ では、$t = \dfrac{T}{n}$ が不連続な点となる。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$$



この関数をフーリエ級数展開し、k 項までの和を求めた結果が、s_k のような波形となる。



k が大きくなるほど、s_k は元の矩形波 $f(t)$ に近づいていることがわかる。
ここで、元の関数の不連続点である $t = \dfrac{T}{n}$ において、s_k は不連続点を通過している。
例えば、$t = 0$ において、$t = 0$ より左側では $-A$ に近い値、右側では A に近い値をとる。

- $t = 0$ に右から近づいていくと、s_k は A に近づいていく（右極限は A）
- $t = 0$ に左から近づいていくと、s_k は $-A$ に近づいていく（左極限は $-A$）

そして、$t = 0$ において、s_k は A と $-A$ の間の値（原点）を通過している。
一般に、不連続となる t において、フーリエ級数展開の値は、その点での左右の極限値の平均値となる。

不連続点におけるフーリエ級数の収束

$f(t)$ が $t = a$ で不連続のとき、フーリエ級数の値は左極限 $f(a-0)$ と右極限 $f(a+0)$ の平均値に収束する。

$$\lim_{t \to a} s_k(t) = \frac{f(a-0) + f(a+0)}{2}$$

4.4.5 フーリエ級数展開の意味

フーリエ級数展開の式は、

- 1 の係数が a_0
- $\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ の係数が a_n
- $\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ の係数が b_n

となっていた。
フーリエ級数展開は、次の基本関数系を使った級数展開といえる。

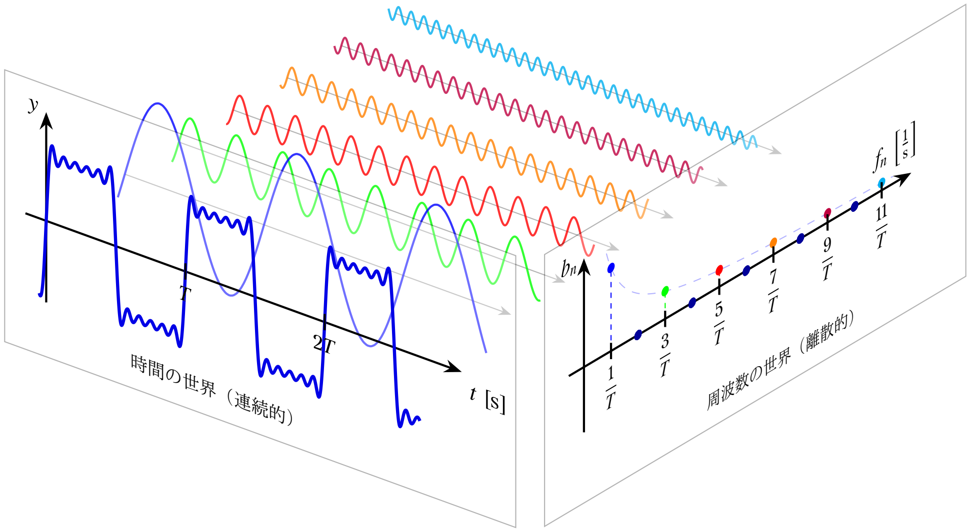
$$\left\{1, \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right\}$$

ここで、

REVIEW

$\sin \omega t$ や $\cos \omega t$ は、角周波数 ω の正弦波と呼ばれる

ことを思い出すと、フーリエ級数展開を構成する基本関数系は、角周波数 $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ の正弦波である。
（1 は $\cos \frac{2\pi nt}{T}$ における、$n = 0$ の場合だと考えることができる。）
つまり、フーリエ級数展開は、関数 $f(t)$ を角周波数 ω_n の正弦波に分解することである。



関数 $f(t)$ がどのような周波数成分で構成されているか？を解き明かすのがフーリエ級数展開で、フーリエ係数は時間領域から周波数領域へのマッピングの役割を果たしている。

4.4.6 フーリエ級数展開のさまざまな表現式

フーリエ級数展開の式は、文献によって異なるいくつかの形で表現される。

定数項をまとめた表現

定数項 a_0 を、a_n の $n = 0$ の場合として考えることができる。

その場合、フーリエ級数展開は次のように表される。

フーリエ級数展開（フーリエ係数を整理した表現）

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_n, b_n は次のようになる。

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

角周波数を使った表現

角周波数 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ を使って、フーリエ級数展開の式を書き換えることもできる。

フーリエ級数展開（角周波数を使った表現）

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、角周波数 ω_0 を用いて、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\omega_0 nt + b_n \sin\omega_0 nt)$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\omega_0 ntdt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\omega_0 ntdt$$

区間を 0 始まりにずらした表現

有限区間 $-\dfrac{T}{2} \le t \le \dfrac{T}{2}$ で定義された関数のフーリエ級数展開を考えてきたが、その有限区間は区間幅が T であればなんでもよい。

特に、$0 \le t \le T$ で定義された関数のフーリエ級数展開を考えることも多い。

区間を変えても、周期関数への拡張は同様の議論により成り立ち、次のことがいえる。

フーリエ級数展開（積分区間を 0 始まりにした表現）

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ a_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \end{aligned}$$

このフーリエ係数の式は、区間 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ の場合の式を平行移動＋置換積分することで示される。

4.4.7 奇関数のフーリエ級数（フーリエ正弦級数）

$f(t)$ が奇関数の場合、それを表現するフーリエ級数には、奇関数しか入らない。

奇関数と奇関数の和が奇関数になることから、そう予想できる。

偶関数 cos の項が消え、奇関数 sin の項だけが残ることを確かめるため、各フーリエ係数を計算してみよう。

定数項 a_0

原点に対して対称な範囲での奇関数の積分は 0 になるから、

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{奇}}{\boxed{f(t)}}\, dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

cos の項の係数 a_n

$\int$ の中身を見ると、奇関数と偶関数の積は奇関数になるので、積分結果は 0 になる。

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{奇}}{\boxed{\overset{\text{奇}}{\boxed{f(t)}}\ \overset{\text{偶}}{\boxed{\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}}}}\, dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

sin の項の係数 b_n

$\int$ の中身を見ると、奇関数と奇関数の積は偶関数になるので、

REVIEW

偶関数の積分公式

$$
\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx
$$

を使って計算する。

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{偶}}{\boxed{\overset{\text{奇}}{\boxed{f(t)}}\ \overset{\text{奇}}{\boxed{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}}}}\, dt \\
&= \frac{2}{T}\cdot 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\
&= \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt
\end{aligned}
$$

まとめ：フーリエ正弦級数

以上より、a_0、a_n は 0 になるため、奇関数のフーリエ級数は、sin の項だけで表現される。

奇関数のフーリエ級数は、フーリエ正弦級数と呼ばれる。

フーリエ正弦級数

周期 T の周期関数 $f(t)$ が奇関数であり、

$$f(t) = \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}^{\text{フーリエ正弦級数}}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 b_n は次のようになる。

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

4.4.8 偶関数のフーリエ級数（フーリエ余弦級数）

$f(t)$ が偶関数の場合、それを表現するフーリエ級数には、偶関数しか入らない。

偶関数と偶関数の和が偶関数になることから、そう予想できる。

奇関数 sin の項が消え、偶関数 cos の項だけが残ることを確かめるため、各フーリエ係数を計算してみよう。

定数項 a_0

偶関数の積分公式を使って計算する。

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overbrace{f(t)}^{\text{偶}}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\cdot 2\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\ &= \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt \end{aligned}$$

cos の項の係数 a_n

$\int$ の中身を見ると、偶関数と偶関数の積は偶関数になるので、偶関数の積分公式を使って計算する。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{偶}}{\boxed{\overset{\text{偶}}{f(t)}\ \overset{\text{偶}}{\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}}}\ dt \\ &= \frac{2}{T}\cdot 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\ &= \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \end{aligned}$$

sin の項の係数 b_n

$\int$ の中身を見ると、偶関数と奇関数の積は奇関数になるので、積分結果は 0 になる。

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{奇}}{\boxed{\overset{\text{偶}}{f(t)}\ \overset{\text{奇}}{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}}}\ dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

まとめ：フーリエ余弦級数

以上より、b_n は 0 になるため、偶関数のフーリエ級数は、cos の項だけで表現される。

偶関数のフーリエ級数は、フーリエ余弦級数と呼ばれる。

フーリエ余弦級数

周期 T の周期関数 $f(t)$ が偶関数であり、

フーリエ余弦級数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

Chapter 5

線形システム

5.1　線形性

線形性の 1 つの解釈　システムにおいて、次のような性質を線形性という。

1. 倍の刺激があれば、倍の反応が生まれる
2. 2 つの刺激があれば、それぞれが独立して反応する