Chapter 1

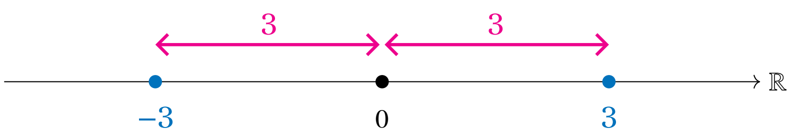
基礎数学

1.1　絶対値

1.1.1　数直線上の原点からの距離

実数 a の絶対値は、数直線上の原点 0 から a までの距離として定義される。

3 と -3 を例に考えると、どちらも絶対値は 3 となる。



-3 の絶対値が 3 であるように、負の数の絶対値は元の数から符号を取ったもの（元の数を -1 倍したもの）となる。

まとめると、

- 正の数の絶対値は元の数そのまま（0 の絶対値もそのまま 0）
- 負の数の絶対値は元の数の -1 倍

というように、絶対値は場合分けして定義される。

絶対値

実数 a について、a の 絶対値 を次のように定義する。

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

1.1.2 絶対値の性質

絶対値は 0 以上の数

負の数の場合は、符号を取って正の数にしたものを絶対値とすることから、絶対値が負の数になることはない。

絶対値は常に非負

実数 a の絶対値 $|a|$ は、常に 0 以上の数となる。

$$|a| \geq 0$$

等号が成立するのは、$a = 0$ の場合である。

中身の符号によらず絶対値は同じ

3 も −3 も、絶対値はともに 3 だった。つまり、

$$|3| = |-3| = 3$$

このことを一般化したのが、次の性質である。

中身の符号を変えても絶対値は不変

実数 a の絶対値について、次が成り立つ。

$$|-a| = |a|$$

積の絶対値は絶対値の積

絶対値の計算と、積の計算は、どちらを先に行っても結果が同じになる。

絶対値の積の性質

実数 a と b について、次の式が成り立つ。

$$|ab| = |a||b|$$

a と b がともに正の数なら、

- a と b は正の数なので、$|a| = a$、$|b| = b$
- ab も正の数なので、$|ab| = ab$

となり、$|ab| = |a||b|$ が成り立つことがわかる。

では、片方が負の数の場合はどうだろうか。
a か b のどちらかにマイナスの符号をつけてみると、

$$|-ab| = |-a||b|$$

$$|-ab| = |a||-b|$$

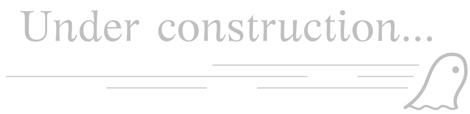
のどちらかとなるが、前の節で解説した $|-X| = |X|$ の関係から、これらはどちらも $|ab| = |a||b|$ に帰着する。

a と b の両方が負の数の場合は、

$$|ab| = |-a||-b|$$

となるが、これも $|-X| = |X|$ の関係を使えば、やはり $|ab| = |a||b|$ に帰着する。

1.1.3　数直線上の 2 点間の距離



1.1.4　max 関数による表現

実数 a の絶対値は、「a と $-a$ のうち大きい方を選ぶ」という考え方でも表現できる。

たとえば、3 と -3 の絶対値はともに 3 だが、これは 3 と -3 のうち大きい方（正の数の方）を絶対値として採用した、という見方もできる。

max 関数による絶対値の表現

実数 a について、a の 絶対値 を次のように定義することもできる。

$$|a| = \max\{a, -a\}$$

ここで登場した max は、「複数の数の中から最大のものを選ぶ」という操作を表している。

1.1.5　三角不等式

2 つの実数 a と b の「絶対値の和」と「和の絶対値」の間には、次のような大小関係がある。

絶対値に関する三角不等式

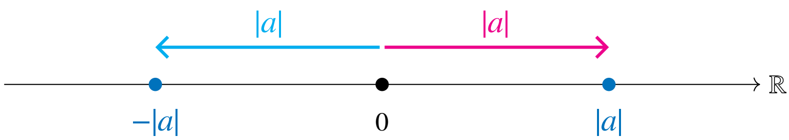
任意の実数 a と b について、次の不等式が成り立つ。

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

この形の不等式は、実は今後登場するベクトルの長さ（ノルム）や、複素数の絶対値に対しても成り立つ。三角不等式と呼ばれる所以は、ベクトルに関する三角不等式で明らかになる。

絶対値の定義から、この不等式の証明を考えてみよう。

a の絶対値 $|a|$ は、a から符号を取り払ったものであるから、逆に絶対値 $|a|$ に $+$ か $-$ の符号をつけることで、元の数 a に戻すことができる。
a が負の数だったなら、$-|a|$ とすれば a に戻る。正の数だったなら、$|a|$ がそのまま a に一致する。



a は原点からの距離が $|a|$ の場所にあり、a は $-|a|$ か $|a|$ のどちらかに一致する。
どちらに一致するかはわからないので、次のような不等式で表しておく。

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

b についても、同じように考えることができる。

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

これらの不等式を使って、さらに式変形を行うことで、三角不等式を導くことができる。

Proof: 絶対値に関する三角不等式

絶対値の定義から、次の不等式が成り立つ。

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

両辺を足し合わせて、次の不等式を得る。

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$-(|a| + |b|) \leq a + b$ の両辺を -1 倍することで、次の関係も得られる。（不等式の両辺を -1 倍すると、不等号の向きが逆転することに注意）

$$|a| + |b| \geq -(a + b)$$

ここまでで得られた、$a+b$ についての不等式をまとめると、次のようになる。

$$|a| + |b| \geq a + b$$
$$|a| + |b| \geq -(a + b)$$

一方、$a+b$ の絶対値は、定義より次のように表せる。

$$|a + b| = \max\{a + b, -(a + b)\}$$

$a+b$ と $-(a+b)$ のうち大きい方が $|a+b|$ となるが、$a+b$ と $-(a+b)$ はどちらも $|a|+|b|$ 以下となることがすでに示されているので、

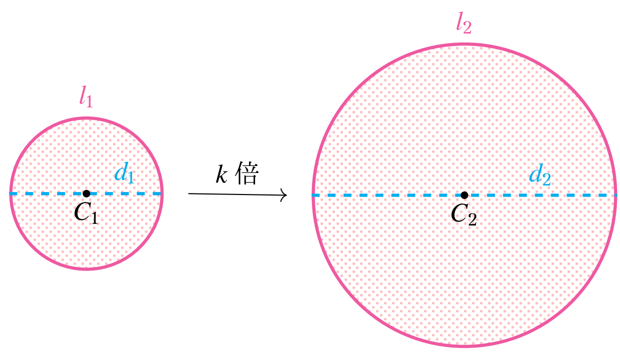
$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

となり、定理は示された。 ■

1.2 三角関数

1.2.1 円周率

すべての円は、お互いを拡大もしくは縮小した関係にある。



円 C_2 が、円 C_1 を k 倍に拡大したものだとすると、その直径や円周も C_1 の k 倍となる。

$$d_2 = k \cdot d_1$$
$$l_2 = k \cdot l_1$$

この 2 つの式を各辺どうし割ることで、k が約分されて消え、直径と円周の比が等しくなることが

わかる。

$$\frac{d_2}{l_2} = \frac{d_1}{l_1}$$

円の直径と円周の比　すべての円において、直径と円周の長さの比は一定である。

そして、この一定の比率は、円周率 π として知られている。

円周率　円の円周の長さ l と直径の長さ d の比を、円周率といい、π で表す。

$$\pi = \frac{l}{d} = 3.14\ldots$$

π の定義式を変形すると、円周の長さを求める式が得られる。

半径を r とすると、直径 $d = 2r$ であるから、

$$l = \pi \cdot d = 2\pi r$$

円周の長さ　円の円周の長さ l は、半径 r を使って次のように表される。

$$l = 2\pi r$$

1.3　指数関数

1.3.1　同じ数のかけ算の指数による表記

指数と底

同じ数 a を n 回掛けたものを a の n 乗といい，a^n と表す。

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個の }a}$$

このとき、n を指数、a を底という。

1.3.2 指数法則

指数を「かける回数」と捉えれば、いくつかの法則が当たり前に成り立つことがわかる。

「かける回数」の和

例えば、a を m 回かけてから、続けて a を n 回かける式を書いてみると、a は $m+n$ 個並ぶことになる。

$$\overbrace{a \times a \times a}^{a^3} \times \overbrace{a \times a}^{a^2} = \overbrace{a \times a \times a \times a \times a}^{a^5}$$

指数の和に関する指数法則

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

「かける回数」の差

例えば、a を m 回かけたものを、a を n 回かけたもので割ると、$m-n$ 個の a の約分が発生する。

$$\frac{\overbrace{a \times a \times a \times a \times a \times}^{a^5}}{\underbrace{a \times a}_{a^2}} = \overbrace{a \times a \times a}^{a^3}$$

指数の差に関する指数法則

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

「かける回数」の積

例えば、「a を m 回かけたもの」を n 回かける式を書いてみると、a は $m \times n$ 個並ぶことになる。

$$(a^2)^3 = \underbrace{\overbrace{a \times a}^{a^2} \times \overbrace{a \times a}^{a^2} \times \overbrace{a \times a}^{a^2}}_{a^6}$$

指数の積に関する指数法則

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

1.3.3 指数の拡張と指数関数

底を固定して、指数を変化させる関数を考えたい。
指数部分に入れられる数を拡張したいが、このとき、どんな数を入れても指数法則が成り立つようにしたい。

0 の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、$m = 0$ の場合を考える。

$$a^0 \times a^n = a^{0+n}$$
$$a^0 \times a^n = a^n$$

この式が成り立つためには、a^0 は 1 である必要がある。

0 の指数

どんな数も、0 乗すると 1 になると定義する。

$$a^0 = 1$$

そもそも、指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ は、「指数の足し算が底のかけ算に対応する」ということを表している。

- 「何もしない」足し算は +0

- 「何もしない」かけ算は $\times 1$

なので、$a^0 = 1$ は「何もしない」という観点で足し算とかけ算を対応づけたものといえる。

負の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、正の数 n を負の数 $-n$ に置き換えたものを考える。

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

さらに、指数法則 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ も成り立っていてほしいので、

$$a^m \times a^{-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

この式は、$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ とすれば、当たり前に成り立つものとなる。

負の整数の指数

n が正の整数であるとき、$-n$ 乗を次のように定義する。

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

有理数の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、指数 m, n を $\dfrac{1}{2}$ に置き換えたものを考える。

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a$$

$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$ は、$(a^{\frac{1}{2}})^2$ とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$$

つまり、$a^{\frac{1}{2}}$ は、2 乗すると a になる数（a の平方根）でなければならない。

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

同様に、$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$ を考えてみると、

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a$$

$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$ は、$(a^{\frac{1}{3}})^3$ とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$$

つまり、$a^{\frac{1}{3}}$ は、3 乗すると a になる数（a の 3 乗根）でなければならない。

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

このようにして、$a^{\frac{1}{n}}$ は、n 乗すると a になる数（a の n 乗根）として定義すればよい。

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

さて、分子が 1 ではない場合はどうだろうか？
$(a^m)^n = a^{mn}$ において、m を $\dfrac{m}{n}$ に置き換えたものを考えると、

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m$$

となるので、$a^{\frac{m}{n}}$ は、n 乗したら a^m になる数として定義すればよい。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

有理数の指数

m, n が整数で、n が正の整数であるとき、$\dfrac{m}{n}$ 乗を次のように定義する。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

実数への拡張

有理数は無数にあるので、指数 x を有理数まで許容した関数 $y = a^x$ のグラフを書くと、十分に繋がった線になる。
指数が無理数の場合は、まるでグラフ上の点と点の間を埋めるように、有理数の列で近似していくことで定義できる。

これで、x を実数とし、関数 $y = a^x$ を定義できる。

指数関数

a を正の実数とし、x を実数とするとき、次のような関数を指数関数という。

$$y = a^x$$

1.3.4 指数関数の底の変換

用途に応じて、使いやすい指数関数の底は異なる。

- e：微分積分学、複素数、確率論など
- 2：情報理論、コンピュータサイエンスなど
- 10：対数表、音声、振動、音響など

よって、これらの底を互いに変換したい場面もある。

指数の底を変えることは、指数の定数倍で実現できる。

例えば、底が 4 の指数関数 4^x を、底が 2 の指数関数に変換したいとすると、

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$$

のように、指数部分を 2 倍することで、底を 4 から 2 へと変換できる。

当たり前だが、この変換は、$4 = 2^2$ という関係のおかげで成り立っている。

「4 は 2 の何乗か？」がすぐにわかるから、4 から 2 への底の変換が簡単にできたのだ。

より一般に、a^x と b^X において、$a = b^c$ という関係があるとする。

つまり、a は b の c 乗だとわかっているなら、

$$a^x = (b^c)^x = b^{cx}$$

のように、底を a から b へと変換できる。

指数関数の底の変換

指数を定数倍することは、底を変えることと同じ操作になる。

$a = b^c$ という関係があるなら、次の変換が成り立つ。

$$a^x = b^{cx}$$

ここで重要なのは、指数関数の底を変換するには、「a は b の何乗か？」がわかっている必要があるということだ。

次章では、$a = b^c$ となるような c を表す道具として、対数を導入する。

1.4 対数関数

1.4.1 対数：指数部分を関数で表す

指数関数は、「a を x 乗したら y になる」という関係を表現するものだった。

ここで、逆に「y は a の何乗か？」という関係を表現するものとして、対数関数を定義する。

これは、y から x を導き出す関数であるから、指数関数 $y = a^x$ の逆関数といえる。

対数

$a^y = x$ を満たす y を、a を底とする x の対数といい、次のように表す。

$$y = \log_a x$$

ここで、x は真数、a は底と呼ばれる。

対数関数は指数関数の逆関数

対数関数 $y = \log_a x$ は、指数関数 $x = a^y$ の逆関数である。

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

対数は、指数関数の指数部分を表す。

$a^y = x$ の y に、$y = \log_a x$ を代入することで、次のような式にまとめることもできる。

指数部分は対数で書き換えられる

$$a^{\log_a x} = x$$

1.4.2 対数の性質

指数法則を対数に翻訳することで、対数の性質を導くことができる。

真数のかけ算は log の足し算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$ として、指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ を考える。

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a^m \times a^n \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$m + n = \log_a(x_1 x_2)$ がいえる。

また、$x_1 = a^m$ より $m = \log_a x_1$、$x_2 = a^n$ より $n = \log_a x_2$ と表せるから、

$$m + n = \log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 x_2)$$

積の対数は対数の和

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

真数の割り算は log の引き算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$ として、指数法則 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ を考える。

$$\begin{aligned}\frac{x_1}{x_2} &= \frac{a^m}{a^n} \\ &= a^{m-n}\end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$m - n = \log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$ がいえる。

また、$x_1 = a^m$ より $m = \log_a x_1$、$x_2 = a^n$ より $n = \log_a x_2$ と表せるから、

$$m - n = \log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

商の対数は対数の差

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

真数の冪乗は log の指数倍

$x = a^m$ として、指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ を考える。

$$\begin{aligned}x^n &= (a^m)^n \\ &= a^{mn}\end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$mn = \log_a x^n$ がいえる。

また、$x = a^m$ より $m = \log_a x$ と表せるから、

$$mn = n \log_a x \log_a x^n$$

冪の対数は対数の指数倍

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

1.4.3 常用対数と桁数

Under construction...

常用対数　底を 10 にした対数関数を、常用対数と呼ぶ。

$$\log_{10} x$$

1.4.4 指数関数の底の変換：対数を用いた表現

指数関数の底 a から b に変換するには、「a は b の何乗か？」がわかっている必要があった。

REVIEW

$a = b^c$ という関係があるなら、

$$a^x = b^{cx}$$

今では、$a = b^c$ となるような c を、対数で表すことができる。

$$b^c = a \iff c = \log_b a$$

指数関数の底の変換公式

$$a^x = b^{(\log_b a)x}$$