線形空間の公理

線形代数の理論は線型独立性や線形写像を基礎にしている

これらは線形結合、すなわちベクトルの和とスカラー倍を用いて定義された

任意のベクトルは線形結合で表され、線形写像は線形結合を保つ写像として定義される

そこで、和とスカラー倍が定義された一般の集合に対しても、線型空間の理論を適用できないか？と考える

和とスカラー倍が定義された一般の集合を、改めて線形空間として定義する

そして、その集合の元をベクトルと呼ぶことにする

和とスカラー倍が定義されていれば、線形結合によりその元を表すことができるからだ

線形空間　集合 V の任意の元 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ と体 K の任意の元 k に対して、V の元 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（和）が定まり、$V$ の元 $k\boldsymbol{a}$（スカラー倍）が定まるとする

これらの演算が次の条件を満たすとき、V を K 上の線形空間、あるいは K 線型空間と呼び、線型空間の元をベクトルと呼ぶ

i. 交換法則：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

ii. 結合法則：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$、$k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$

iii. 分配法則：$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$、$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$

iv. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$（1 は体 K の乗法に関する単位元）

v. 零元の存在：$\boldsymbol{0}$ と書かれる特別な元が存在し、任意の $\boldsymbol{a}\in V$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$

vi. 和に関する逆元の存在：任意の $\boldsymbol{a}\in V$ に対して $-\boldsymbol{a}$ と書かれる特別な元が存在し、$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$

ref: ベクトル空間からはじめる抽象代数入門 p158〜163

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p143〜166

ref: テンソル代数と表現論 p25〜27