

# Chapter 1

## 複素数と複素関数

### 1.1 虚数

#### 1.1.1 $x^2 = -1$ の解は存在するか？

「負の数と負の数をかけたら正の数になる」というのが、中学校で初めて数学の門を叩いて真っ先に学ぶ事実である。

$$(-1) \times (-1) = 1$$

方程式の言葉で書けば、 $x^2 = 1$  の解の一つは  $x = -1$  となる。(もう一つの解は  $x = 1$  だ。)

では、次の方程式の解は考えられるだろうか？

$$x^2 = -1$$

$x^2$  ということは、同じ数  $x$  どうしをかけて  $-1$  にならなければならない。

とはいえ、正の数どうしをかけても正の数になるし、負の数どうしをかけても正の数になる。

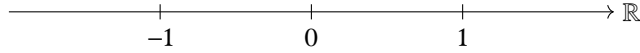
つまり、このような  $x$  は「存在しない」ということになる。

しかし、このような方程式の解が存在した方がありがたいと考えた人もいた。(私たちもこの先、その有り難さを知ることになる。)

「負の数と負の数をかけたら正の数になる」というこれまでの数の体系を壊さずに、 $x^2 = -1$  が成り立つような数を新たに考えよう、という話が始まる。

### 1.1.2 回転で捉える数直線の拡張

これまでの数の体系である実数は、すべて数直線上に存在していた。



$x^2 = -1$  の解となる  $x$  は、少なくともこの数直線上には存在しない。

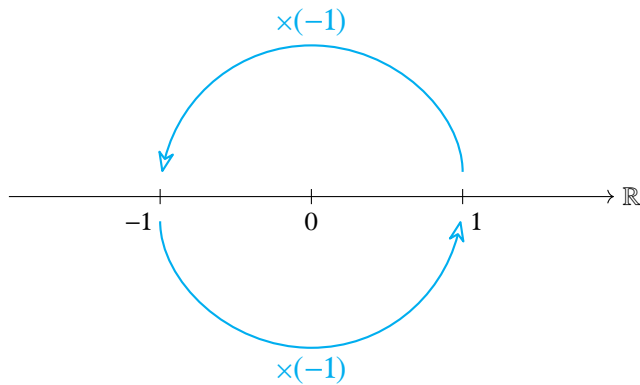
ならば、数の体系を平面に拡張して考えてみよう。

まずは、平面というスケールに飛び出して  $(-1) \times (-1) = 1$  を考えてみる。

$$1 \times (-1) \times (-1) = 1$$

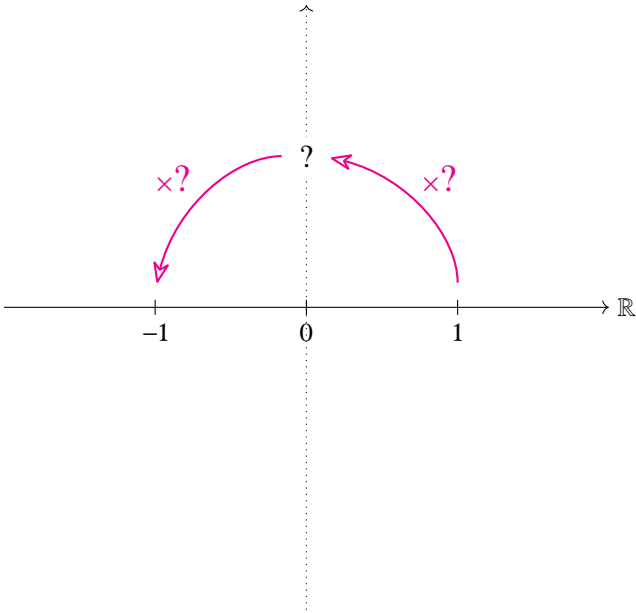
と書き直すと、「 $-1$  を 2 回かけたら 1 に戻る」ということがいえる。

図示すると、次のようなことが起こっていると考えられないだろうか？



「 $-1$  をかける」という操作を、平面上の 180 度回転と捉える。

すると、2 回かけて  $-1$  になる数 ( $x^2 = -1$  の解) は、180 度回転の中間に位置する数と考えることができる。



このような方向性で拡張した数を複素数といい、?にあたる数は虚数  $i$  と呼ぶことにする。



1.1.3 虚数の定義

前節での話を踏まえて、新たな数を次のように定義する。

虚数 方程式  $x^2 = -1$  の解の一つを 虚数 と呼び、 $i$  と表す。

これで、 $x^2 = -1$  の解を、次のように記述できるようになった。

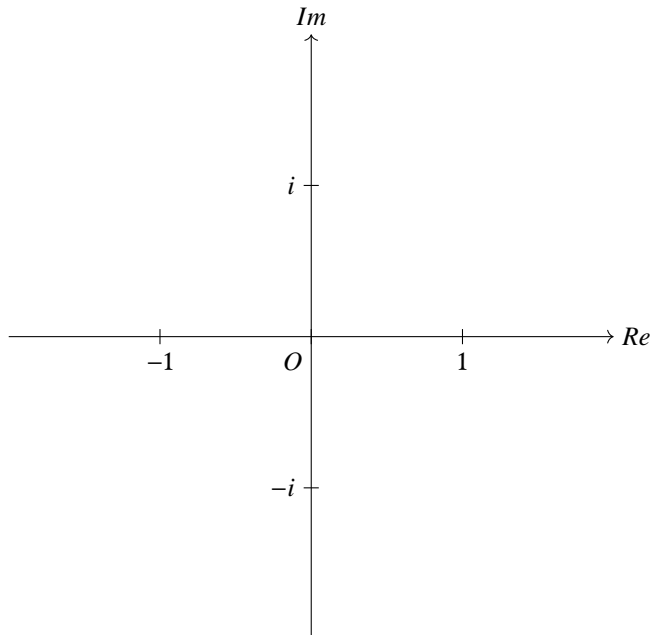
$x^2 = -1$  の解 方程式  $x^2 = -1$  の解は、 $x = i$  と  $x = -i$  の 2 つ存在する。

## 1.2 複素数と複素平面

### 1.2.1 複素数とその平面による表現

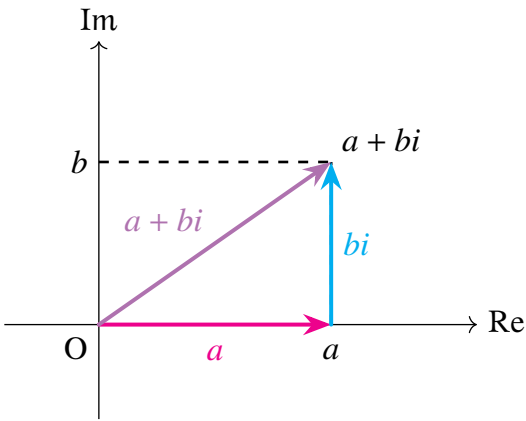
前章では、数直線上の 1 から 90 度回転したところに、虚数  $i$  という数が存在するという考え方を導入した。

このような平面において、実数が存在する軸（お馴染みの数直線）を実軸  $Re$ 、虚数が存在する軸を虚軸  $Im$  と呼ぶことにする。



では、実軸上にも虚軸上にもない、平面上の点に位置する数は、どう表せばよいだろうか？

平面上の点をベクトル（矢印）で表す考え方を流用して、次のように考えてみる。



$a$  というベクトルは実軸上の単位ベクトル  $1$  を  $a$  倍したもの、 $bi$  というベクトルは虚軸上の単位ベクトル  $i$  を  $b$  倍したものと考え、平面上の任意の数はそれらのベクトルの和の形で表す。

このとき、 $a$  を実部、 $b$  を虚部と呼び、 $a + bi$  の形で表した数を複素数という。

複素数

$i$  を虚数単位、 $a, b$  を実数とし、次の形で表される数を 複素数 という。

$$a + bi$$

このとき、 $a$  を 実部、 $b$  を 虚部 と呼ぶ。

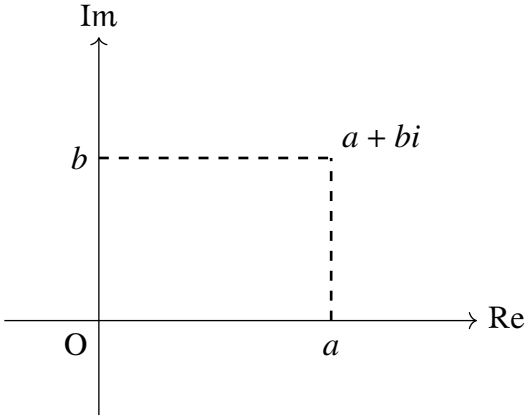
$b = 0$  であるとき、複素数  $a + bi$  は実数  $a$  となるので、複素数は実数を含む数の体系（実数の拡張）となっている。

また、数直線の拡張として考えてきた平面は、平面上の各点が複素数に対応するので、複素平面と呼ばれる。

数直線が実数の集合を表すのに対し、複素平面は複素数の集合を表す。

複素平面

複素数の実部を横軸、虚部を縦軸にとった平面を 複素平面 と呼ぶ。



複素平面において、実軸を  $\text{Re}$ 、虚軸を  $\text{Im}$  と表記しているのは、複素数の実部（Real Part）と虚部（Imaginary Part）をそれぞれの軸で表しているからである。

### 1.2.2 複素数の絶対値と偏角

複素数を複素平面上のベクトルとして捉えることで、複素数に幾何学的な意味を持たせることができる。

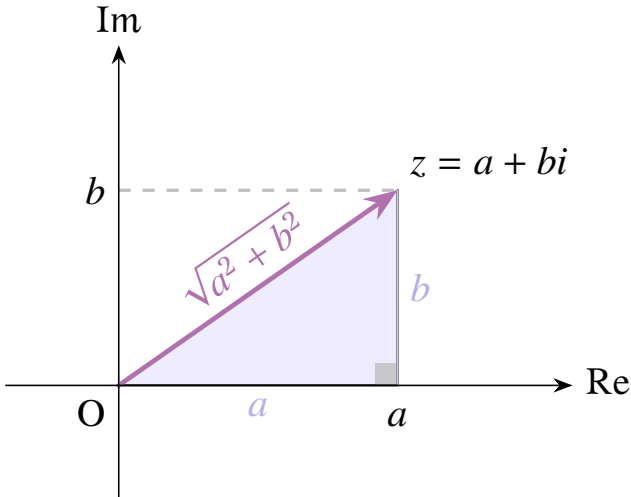
そして最終的には、 $-1$  をかける操作が  $180$  度回転であることや、 $i$  をかける操作が  $90$  度回転であることの一般化として、複素数のかけ算に複素平面上の回転という解釈を与える。

そのための準備として、まずは複素数に関する「長さ」と「角」を定義しよう。

#### 複素数の「長さ」

実数における絶対値は、数直線上の原点  $0$  からその数までの距離を表していた。

複素数の絶対値も、同じように「原点からの距離」として定義する。



## 複素数の絶対値

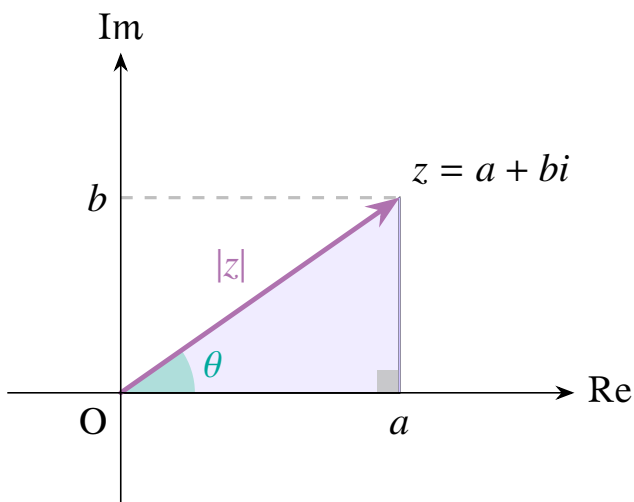
複素平面において、原点から複素数  $z = a + bi$  までの距離を複素数  $z$  の絶対値と定義する。

この距離は三平方の定理から求められ、 $|z|$  と表す。

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

## 複素数の成す「角」

ここで、複素数  $z$  が 0 でなければ、原点  $O$  から  $z$  までを結ぶベクトルと、実軸  $\text{Re}$  の正の向きとのなす角  $\theta$  を考えることができる。



## 複素数の偏角

0 でない複素数  $z$  に対して、複素平面上の原点  $O$  から複素数  $z$  までを結ぶベクトルと、実軸の正の向きとのなす角  $\theta$  を、複素数  $z$  の 偏角 と呼び、次のように表す。

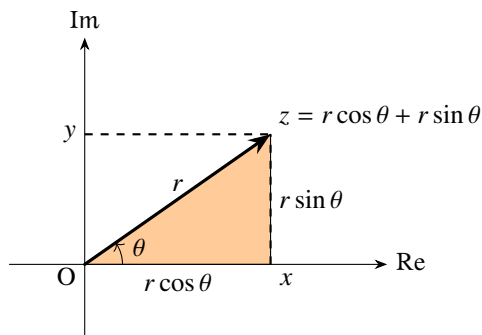
$$\arg z = \theta$$

### 1.2.3 複素数の極形式による表現

#### 極形式

複素数  $z$  は、絶対値  $r$  と偏角  $\theta$  を用いて次のように表すことができる。

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$



### 1.2.4 偏角と主値

$x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  に、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  を代入して整理した関係式から、偏角を改めて定義する。

#### 偏角

複素数  $z$  を極形式で表現すると、

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{という関係が成り立つ。}$$

この関係を満たす  $\theta$  を偏角と呼び、次のように表す。

$$\arg z := \theta$$

ここで、 $\theta$  を整数回  $2\pi$  シフトさせても (何周回っても)、複素数  $z$  の値は変わらない。

つまり、1つの複素数に対して偏角の値は複数考えられるので、次のような主値を定義する。



## 偏角の主値

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ 、もしくは  $-\pi < \theta \leq \pi$  の範囲にある偏角を偏角の主値と呼び、次のように表す。

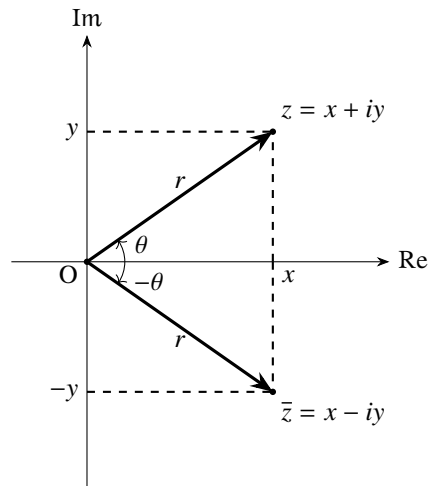
$$\text{Arg } z := \theta$$

## 1.2.5 共役複素数

## 共役複素数

複素数  $z = x + iy$  に対して、その共役複素数  $\bar{z}$  を次のように定義する。

$$\bar{z} := x - iy$$



## 共役複素数と絶対値

複素数  $z$  とその共役複素数  $\bar{z}$  の積は、 $z$  の絶対値の二乗に等しい。

$$z\bar{z} = |z|^2$$

## Proof

複素数  $z = x + iy$  とその共役複素数  $\bar{z} = x - iy$  の積を計算する。

$$\begin{aligned}
 z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\
 &= x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 \\
 &= x^2 + y^2 \\
 &= |z|^2
 \end{aligned}$$

### 1.3 オイラーの公式

