線形関数

横ベクトル（$1 \times n$ 型行列）を縦ベクトル（$n \times 1$ 型行列）にかけると、1×1 のスカラー値が得られる

ref: 行列と行列式の基礎 p120

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

これは、縦ベクトルを入力とする線形関数（$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像）と見なすことができる

列ベクトルを $\boldsymbol{v}$、この線形関数を ϕ とすると、

$$\phi(\boldsymbol{v}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

と書ける

横ベクトルの集合

$n \times 1$ 型行列（n 次の縦ベクトル）全体の集合は $\mathbb{R}^n$ と表された

$1 \times n$ 型行列（n 次の横ベクトル）全体の集合を ${}^t\mathbb{R}^n$ と表すことにする

ref: 行列と行列式の基礎 p120

${}^t\mathbb{R}^n$ の元は $1 \times n$ 型行列なので、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像（すなわち $\mathbb{R}^n$ 上の線形関数）を表現している行列だと考えることができる

座標関数の表現行列

基本ベクトルを転置したもの ${}^t\boldsymbol{e}_j$ を列ベクトルにかけると、j 番目の成分が得られる

たとえば、$n = 3,\ j = 2$ の場合、

$$
{}^t\boldsymbol{e}_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2
$$

このように、ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、j 番目の成分を返す関数を座標関数 x_j という

横基本ベクトル ${}^t\boldsymbol{e}_j \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、座標関数 $x_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ の表現行列になっている

基底としての座標関数

任意の横ベクトルは、横基本ベクトルの線形結合として一意的に表現できる

$$
\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = a_1 {}^t\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n {}^t\boldsymbol{e}_n
$$

これを用いると、

$$
\begin{aligned}
\phi &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= a_1 {}^t\boldsymbol{e}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \cdots + a_n {}^t\boldsymbol{e}_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\
&= a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n
\end{aligned}
$$

となる

任意の線形関数 $\phi \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、座標関数 $x_1, \ldots, x_n$ の線型結合として

$$
\phi = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n
$$

のように一意的に書くことができる

つまり、$\{x_1, \ldots, x_n\}$ は ${}^t\mathbb{R}^n$ の基底である

また、縦ベクトルが基底の線形結合で表現できたのと同様に、ϕ は横ベクトル $(a_1, \ldots, a_n)$ と同一視できる

自然なペアリング

$\boldsymbol{\phi} \in {}^t\mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

ref: 行列と行列式の基礎 p120

$$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle = \phi(\boldsymbol{v})$$

とおく

これは線形関数 $\boldsymbol{\phi}$ に $\boldsymbol{v}$ を入力して得られる値を表しているが、$\boldsymbol{\phi}$ を横ベクトル、$\boldsymbol{v}$ を縦ベクトルとみれば、$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle$ は行列としての積 $\boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{v}$ と一致している

左辺の記法 $\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle$ を用いると、見通しの良い議論ができることがある

これを自然なペアリングと呼ぶ