


行列の積

 線形写像の合成 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への線形写像 g と、 \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^l への線形写像 f が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g: \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^l への線形写像である

証明

1.ref: 行列と行列式の基礎 p56 (問 2.2)

f と g の表現行列をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする

A は $l \times m$ 型、 B は $m \times n$ 型の行列である

このとき、 $f \circ g$ は $l \times n$ 型行列で表現される

それを C と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

B を列ベクトルに分解して $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ と書くとき、

$$(f \circ g)(\mathbf{e}_j) = f(g(\mathbf{e}_j)) = f(\mathbf{b}_j) = A\mathbf{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n)$$

となる

C の (i, j) 成分は $A\mathbf{b}_j$ の第 i 成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、 C の (i, j) 成分を計算するときは、 A の第 i 行、 B の第 j 列だけを見ればよい

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、 A と B の積と呼ぶ