線形写像の像と核

写像の像や逆像を、線形写像の場合に考える

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p79〜84

線形写像による像　線形写像 $f\colon V \to W$ に対して、f による V の像 $f(V)$ を、線形写像 f の像といい、$\mathrm{Im}(f)$ と表記する

$$\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\} \subset W$$

線形写像による像は、像空間とも呼ばれる

線形写像による核　線形写像 $f\colon V \to W$ に対して、f による $\{\mathbf{0}\}$ の逆像 $f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ を、線形写像 f の核といい、$\mathrm{Ker}(f)$ と表記する

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\} \subset V$$

線形写像による核は、核空間あるいはカーネルとも呼ばれる

像空間と全射性

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の全射性は、$\mathbb{R}^m$ の部分集合である像空間 $\mathrm{Im}(f)$ と関係している

ref: 行列と行列式の基礎 p68〜69

> 全射な写像は、定義域の元の像で値域を「埋め尽くす」

ということから、f が全射であることは、$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ と同値だとわかる

核空間と単射性

線形写像 f が単射であることは、次の条件と同値であった

$$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

この条件は、次のように言い換えることができる

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

線形写像の単射性　f を線形写像とするとき、

$$f \text{ が単射} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

証明

$\mathrm{Ker}(f)$ の定義は

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$$

これを踏まえて、次の 2 つが同値であることを示す

i. $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
ii. $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

このとき、$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ が $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ を意味するので、$\mathrm{Ker}(f)$ の元は零ベクトルのみになる

よって、$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ ■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ であれば、$\mathrm{Ker}(f)$ の元は零ベクトルのみである

よって、$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つとき、$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ が成り立つこ

とになる

すなわち、$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ ■

核空間と解空間

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\}$$

と定めると、$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ という関係から、$\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Ker}(A)$ は同じものを指す

これは、斉次形の連立線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間そのものである

$\mathrm{Ker}(A)$ の元は、$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解を使ってパラメータ表示できる