# 線形代数 2. 連立一次方程式と階数

tomixy

2025 年 5 月 25 日

## 目次



## 連立一次方程式を解く

方程式を解くということは、次のような問題に答えることである

ref: 行列と行列式の基礎 p25

- 解は存在するか？
- 解が存在する場合、それはただ 1 つの解か？
- 解が複数存在する場合は、どれくらい多く存在するのか？
- 解全体の集合を以下にしてわかりやすく表示できるか？

## 掃き出し法

連立一次方程式において、文字の個数や方程式の本数が増えた場合にも見通しよく計算を進めるためには、掃き出し法と呼ばれる方法がある

ref: 行列と行列式の基礎 p18〜21

掃き出し法の基本方針は、次の形を目指すことである

$$\begin{cases} \star x_1 + * x_2 + * x_3 = * \\ \qquad\quad \star x_2 + * x_3 = * \\ \qquad\qquad\qquad \star x_3 = * \end{cases}$$

- $*$ はどんな数であってもよい（同じ数でなくてもよい）
- $\star$ は 0 でない数を意味する

この形の方程式は上三角形と呼ばれ、いつでもこの形に変形できるわけではないが、1 つの理想形である

## 連立一次方程式の行列表記

未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する連立方程式として

ref: 行列と行列式の基礎 p22〜25

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を考える

$a_{ij}$ などは与えられた定数であり、係数と呼ばれる

$i$ 番目の式の $x_j$ の係数を $a_{ij}$ と書いている

ここで、係数だけを集めて行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

すると、先ほどの連立方程式は、ベクトル形で

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

と書ける

また、$n$ 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ からベクトルを作る

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

すると、ベクトル形の方程式の左辺のベクトルを、行列 $A$ とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積と考えて、$A\boldsymbol{x}$ と表記できる

こうして、もとの連立一次方程式は、行列形の方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に書き換えられる

## 行基本変形

連立一次方程式を行列によってとり扱うとき、1 つ 1 つの方程式は行列の行によって表されている

ref: 行列と行列式の基礎 p25

よって、行列の行に関する次のような操作（変形）を考えることは自然である

🎓 行基本変形　行列への次の 3 種類の操作を行基本変形という

i. ある行の定数倍を他の行に加える
ii. ある行に 0 でない数をかける
iii. 2 つの行を交換する

原則として上三角型を目指してこのような変形を繰り返すが、いつでも上三角型にできるわけではなく、行階段行列と呼ばれる形を作っていくのが掃き出し法と呼ばれる手法である

## 行階段行列

掃き出し法では、あるステップで下の成分がすべて 0 になって、

ref: 行列と行列式の基礎 p26〜28

$$\begin{pmatrix} \spadesuit & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のような形になるのが典型例である

0 でない成分を $\spadesuit$ で、任意の値をもつ成分を $*$ で表した

一般には、成分が 0 ばかりの行が下にくる

そのような行を零行という

零行が現れない場合もあるし、複数現れる場合もある

零行でない行に対して、一番左の 0 でない成分 $\spadesuit$ を主成分と呼ぶ

先ほど示した形では、行の主成分は左上から斜め右下 45° 方向にまっすぐ並んでいるが、一般にはそうできるとは限らない

しかし、次のような形には必ずできる

$$\begin{pmatrix} 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**行階段行列**　次の条件を満たす行列を**行階段行列**という

- 零行でない行の主成分が、下の行ほど 1 つ以上右にある
- 零行がある場合は、まとめてすべて下にある

どんな行列も、行基本変形の繰り返しで行階段行列にできる

## 行列の階数

行階段行列に変形することで、重要な量が読み取れる

ref: 行列と行列式の基礎 p28〜29

**行列の階数**　行列 $A$ を行階段行列に変形したとき、零行でない行の個数を $A$ の**階数**（rank）と呼び、$\mathrm{rank}(A)$ と書く

変形の結果として得られる行階段行列は 1 通りとは限らないし、変形の途中の掃き出しの手順も 1 通りとは限らないが、階数は $A$ のみによって定まる値であることが後に証明できる

$A$ が $m \times n$ 型ならば、行は $m$ 個なので、$\mathrm{rank}(A)$ は 0 以上 $m$ 以下の整数である

行階段行列において、零行でない行の個数は主成分の個数と一致するので、階数は行階段行列に変形したときの主成分の個数でもある

行基本行列の主成分は各列に高々 1 つなので、主成分の個数は列の個数 $n$ を超えない

したがって、次の重要な評価が成り立つ

$$0 \leq \mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$$

## 簡約化された行階段行列

必要に応じて、行階段行列をさらに変形して次のような形にする

ref: 行列と行列式の基礎 p29〜30

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行の主成分はすべて 1 で、主成分のある列の主成分以外の成分はすべて 0 である

この形を**簡約化された行階段行列**と呼ぶ

与えられた行列 $A$ に対して、行基本変形の繰り返しで得られる行階段行列は一意的ではないが、簡約化された行階段行列は一意的であることを後に議論する

そこで、簡約化された行階段行列を $A_\circ$ と書くことにする

変形の過程を

$$\text{行列 } A \longrightarrow \text{行階段行列} \longrightarrow \text{簡約化された行階段行列 } A_\circ$$

と 2 段階にわけるのは、計算の効率以上の意味がある

行階段行列にするところまでで解決する問題（解の存在と一意性など）もあるからである