双対性

$\{\phi_i\}_{i=1}^n$ を ${}^t\mathbb{R}^n$ の基底とする

ref: 行列と行列式の基礎 p122

写像 ι を $\boldsymbol{v}_i \mapsto \langle -, \boldsymbol{v}_i \rangle$ と定めると、

$$\psi_i(\phi_j) = \langle \phi_j, \boldsymbol{v}_i \rangle = \delta_{ij}$$

を満たす $\psi_i \in ({}^t\mathbb{R}^n)^*$ が、各 $1 \leq i \leq n$ に対して定まるといえる

一方で、ι が単射であることから、$\iota(\boldsymbol{v}_i) = \psi_i$ を満たす $\boldsymbol{v}_i$ が一意的に存在する

単射とは、$\iota(\boldsymbol{v}_i) = \iota(\boldsymbol{v}_j) \Longrightarrow \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_j$ という性質であり、ある ψ_i に対して、$\iota(\boldsymbol{v}_i) = \psi_i$ を満たす $\boldsymbol{v}_i$ はただ一つしか存在しないことを意味する

したがって、$\iota(\boldsymbol{v}_i)$ は、$\phi \in {}^t\mathbb{R}^n$ に対して $\langle \phi, \boldsymbol{v}_i \rangle$ を返す線形関数である

$$\iota(\boldsymbol{v}_i) = \psi_i(\phi) = \langle \phi, \boldsymbol{v}_i \rangle$$

$\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり、これを $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ の双対基底という

定義を考えると、$\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ の双対基底は $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ になっていることがわかる

このように、縦ベクトル空間と横ベクトル空間とは、表と裏のような関係になっていて、裏の裏は表である

こういう状況を双対性と呼ぶ