第 20 章

複素行列と対角化

転置行列と随伴行列

複素正方行列 A の転置行列において、各成分をその共役複素数に置き換えた行列を<mark>随伴行列という</mark>

酸伴行列 複素正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し、 $\overline{a_{ji}}$ を (i,j) 成分にもつ行列 $t\overline{A}$ を A の随伴行列といい、 A^* と表す

実数 x の複素共役は $\overline{x} = x$ であるので、A が実行列のときは、

$$A^* = {}^t A$$

すなわち、

実行列の世界では、随伴行列は転置行列

にすぎない

転置と似た性質

Theorem 2.3「転置操作の反復不変性」より、転置を二回行うと元に戻る。

このことと同様に、次が成り立つ

予 Theorem 20.1 - 随伴行列の自己反転性

複素正方行列 A に対し、随伴行列を二回とると元に戻る

$$(A^*)^* = A$$

証明

随伴行列の定義より、

$$(A^*)^* = {}^t \overline{A^*} = {}^t \overline{\overline{A}}$$

 $A = (a_{ij})$ とすると、A の各成分を共役複素数にした行列は、

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

これを転置すると、

$${}^{t}\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$$

さらに、もう一度各成分の複素共役をとると、

$$t\overline{\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji})$$

したがって、

$$(A^*)^* = {}^{t}\overline{\overline{A}} = (a_{ij}) = A$$

が成り立つ

♣ Theorem 20.2 - 積に対するエルミート共役の順序反転性

複素行列 AB の積 AB が定義できるとき、

$$(AB)^* = B^*A^*$$

証明

[Todo 1:]

随伴による内積の表現

標準内積は、随伴を用いて表現することもできる

♣ Theorem 20.3 - 随伴による標準内積の表現

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}^*\cdot\boldsymbol{a}$$

証明

Theorem 14.3「標準内積の対称性」より、

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}$$

ここで、Theorem 14.4「転置による内積の表現」より、右辺の内積を転置を用いて表すと、

$$\overline{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})} = \overline{\boldsymbol{b}^{\top} \cdot \overline{\boldsymbol{a}}} = \overline{\boldsymbol{b}^{\top}} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{a}}} = \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}$$

よって、

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})} = \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}$$

が成り立つ

随伴公式

随伴行列と標準内積は、次のような関係で結ばれる

予 Theorem 20.4 - 随伴公式

複素行列 A と計量空間上のベクトル u, v に対し、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},A^*\boldsymbol{v})$$

☎ 証明

Theorem 14.4「転置による内積の表現」より、転置を用いて内積を表すと、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = {}^{t}(A\boldsymbol{u})\overline{\boldsymbol{v}}$$

Theorem 2.4 「転置と行列積の順序反転性」より、 $^t(A\boldsymbol{u})=^t\boldsymbol{u}^t\!A$ なので、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=({}^t\boldsymbol{u}^t\!A)\overline{\boldsymbol{v}}$$

行列の積の結合法則を用いて、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = {}^{t}\boldsymbol{u}({}^{t}\!A\overline{\boldsymbol{v}})$$

ここで、 \overline{tA} は、 $A=(a_{ij})$ とすると、

1.
$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

2.
$${}^{t}\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$$

3.
$$\overline{{}^t\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji}) = {}^tA$$

となり、 tA と一致する

これを用いて書き換えると、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = {}^{t}\boldsymbol{u}({}^{t}\overline{A}\overline{\boldsymbol{v}})$$

複素共役の積の性質 $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ を用いて、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})={}^{t}\boldsymbol{u}^{\overline{t}}\overline{\overline{A}}\boldsymbol{v}$$

この時点で、右辺を内積として書き直すと、**Av** の複素共役がなくなることに注意して、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u},{}^{t}\overline{A}\boldsymbol{v})$$

随伴行列の定義 $A^* = {}^t\overline{A}$ より、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},A^*\boldsymbol{v})$$

となり、目的の等式が得られた

ユニタリ行列と直交行列

□ ユニタリ行列 複素正方行列 A が次を満たすとき、A をユニタリ行列という

$$A^* = A^{-1}$$

ユニタリ行列と内積

2 つのベクトルそれぞれにユニタリ行列を左からかけても、それらの内積は変わらない

♣ Theorem 20.5 - ユニタリ行列の特徴づけとしての内積不変性

n 次複素行列 A がユニタリ行列であることと、任意の u. $v \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことは同値である

証明

ユニタリ行列ならば内積を保つ

随伴公式より、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*A\boldsymbol{v})$$

ここで、Aがユニタリ行列であることは、

$$A^*A = E$$

と言い換えられるので、これを用いると、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つ ■

転置を用いて内積を表すと、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = {}^{t}(A\boldsymbol{u})\overline{(A\boldsymbol{v})}$$

 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^{t}\boldsymbol{u}\overline{\boldsymbol{v}}$

これらが一致するというのが仮定なので、

$${}^{t}(A\boldsymbol{u})\overline{(A\boldsymbol{v})}={}^{t}\boldsymbol{u}\overline{\boldsymbol{v}}$$

この関係を用いて、行列 ${}^tA\overline{A}$ の (i,j) 成分を考えると、

$$t(Ae_i)\overline{(Ae_j)} = te_i\overline{e_j}$$
$$= \delta_{ij}$$

となり、これはすなわち、

$${}^{t}A\overline{A} = F$$

よって、両辺の複素共役をとることで、

$$A^*A = E$$

を得る

したがって、*A* はユニタリ行列である

この定理において、 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ の場合を考えると、ユニタリ行列とノルムに関する性質が導かれる

ユニタリ行列とノルム

ユニタリ行列を左からかけても、ベクトルのノルムは変わらない

北 Theorem 20.6 - ユニタリ行列の特徴づけとしてのノルム不変性 n 次複素行列 A がユニタリ行列であることと、任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$||A\boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{v}||$$

が成り立つことは同値である

証明

A がユニタリ行列であることと、任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことは同値であった

ccv, u = v ctoler

$$(A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことになり、ノルムの定義より、

$$\|A\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2$$

すなわち、

$$||A\boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{v}||$$

がしたがう

ユニタリ行列と直交性

A が実正方行列のときは、

$$A$$
 がユニタリ行列 \iff $^tA = A^{-1}$

となり、このような A は直交行列と呼ばれる

直交行列 実正方行列 A が次を満たすとき、A を直交行列という

$$^t A = A^{-1}$$

直交行列という名前の由来は、次のように考えられる

A を n 個の列ベクトルを横一列に並べたものとみなし、

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

 $\forall t \in \mathcal{L}, t$

$$egin{pmatrix} {}^t oldsymbol{a}_1 \ {}^t oldsymbol{a}_2 \ {}^t oldsymbol{a}_n \end{pmatrix} (oldsymbol{a}_1, oldsymbol{a}_2, \ldots, oldsymbol{a}_n) = egin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \ 0 & 1 & \cdots & 0 \ {}^t & {}^t \ddots & {}^t \ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

と表される

これは、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が、次の性質

$${}^t \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_j = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$$

を満たすことを意味する

すなわち、直交行列 A の列ベクトル $oldsymbol{a}_1, oldsymbol{a}_2, \dots, oldsymbol{a}_n$ は、互いに直交する単位ベクトルである

この事実は、複素行列に対しても成立する

♣ Theorem 20.7 - ユニタリ行列の列ベクトルの直交正規性

複素正方行列 A を $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と列ベクトル分解するとき、

$$A$$
 がユニタリ行列 \Longleftrightarrow $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$

すなわち、ユニタリ行列の列ベクトルは、互いに直交する単位ベクトルである

証明

A がユニタリ行列であることは、任意の \boldsymbol{u} , $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことと同値であった

ここで、 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$ とすると、

$$(Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j)$$

が成り立つことになる

左辺の Ae_i について考えると、

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned\\ egin{aligned} egi$$

 Ae_j についても同様なので、

$$(Ae_i, Ae_j) = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

 $\vdots \quad (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$

となり、A がユニタリ行列であることは、 $(oldsymbol{a}_i,oldsymbol{a}_j)=\delta_{ij}$ へと同値変形できる

ユニタリ行列と随伴・転置

♣ Theorem - ユニタリ行列の随伴不変性

ユニタリ行列 U の随伴行列 U^* もユニタリ行列である

証明

Theorem 20.1「随伴行列の自己反転性」より、随伴行列を二回とると元に戻るので、

$$(U^*)^* = U$$

また、ユニタリ行列の定義より、

$$U^* = U^{-1}$$

したがって、

$$(U^*)^* = U$$

 $U = (U^*)^{-1}$

すなわち、

$$U^* = (U^*)^{-1}$$

となるので、*U** もユニタリ行列である

上の定理は、実行列の世界では、次の定理に対応する

♣ Theorem 20.8 - 直交行列の転置不変性

直交行列 Q の転置行列 tQ も直交行列である

エルミート行列と対称行列

$$A^* = A$$

A が実正方行列のときは、

A がエルミート行列 \iff $^tA = A$

となり、このような A は対称行列、あるいは実対称行列と呼ばれる



エルミート行列の固有値

行列の成分が実数であっても、特性方程式の根は一般には実数とは限らない つまり、固有値は一般には複素数であるが、エルミート行列については次が成り立つ

♣ Theorem 20.9 - エルミート行列の固有値の実数性

エルミート行列の固有値はすべて実数である

証明 証明

エルミート行列 A の固有ベクトルを \boldsymbol{v} とし、その固有値を $\alpha \in \mathbb{C}^n$ とすると、

$$A\mathbf{v} = \alpha \mathbf{v}$$

より、次が成り立つ

$$(A\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\alpha \mathbf{v}, \mathbf{v})$$
$$= \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

一方、Theorem 20.4「随伴公式」から、次のようにも書ける

$$(A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v},A^*\boldsymbol{v})$$

A がエルミート行列であることから、 $A^* = A$ なので、

$$(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v})$$

= $(\boldsymbol{v}, \alpha \boldsymbol{v})$

Theorem 14.5「内積の共役線形性」に注意して、

$$(A\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$$

ここまでで得られた (Av, v) の 2 通りの表現をまとめると、

$$\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

移項して、

$$(\alpha - \overline{\alpha})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$$

ここで、 \boldsymbol{v} は固有ベクトルなので、 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である よって、 $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq 0$ で両辺を割ることができ、次を得る

$$\alpha = \overline{\alpha}$$

すなわち、 α は実数である

エルミート行列では、固有値が実数であることがうまく活きて、次の性質も成り立つ

北 Theorem 20.10 - エルミート行列の固有値の直交性

エルミート行列の相異なる固有値を持つ固有ベクトルは直交する すなわち、エルミート行列 A の固有ベクトル u, v がそれぞれ固有値 α , $\beta \in \mathbb{R}^n$ を持つとし、 $\alpha \neq \beta$ ならば、

$$({\bf u},{\bf v})=0$$

が成り立つ



固有値と固有ベクトルの定義より、

$$A\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}$$

$$A\mathbf{v} = \beta \mathbf{v}$$

が成り立つ

一方、Theorem 20.4「随伴公式」より、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},A^*\boldsymbol{v})$$

であるが、A はエルミート行列なので、 $A^* = A$ が成り立つ

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},A\boldsymbol{v})$$

先ほどの固有値と固有ベクトルの関係を代入して、

$$(\alpha \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \beta \boldsymbol{v})$$

ここで、 α . β は実数なので、Theorem 14.5「内積の共役線形性」を考慮しても、

$$\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

として、スカラーをそのまま外に出すことができる

よって.

$$(\alpha - \beta)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

であるが、 $\alpha \neq \beta$ なので、 $(\alpha - \beta) \neq 0$ で両辺を割ることができ、

$$({\bf u},{\bf v})=0$$

を得る

エルミート行列の対角化に向けた考察

H を n 次エルミート行列とすると、その固有値は n 個の実数として $lpha_1, \ldots, lpha_n$ とおける

そして、 α_i に属する固有ベクトル \boldsymbol{v}_i をとると、 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ はどの 2 つも互いに直交する

そこで、それぞれを次のように正規化する

$$oldsymbol{u}_i = rac{oldsymbol{v}_i}{\|oldsymbol{v}_i\|} \quad (i=1,\ldots,n)$$

すると、 $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ は互いに直交する単位ベクトルであるので、

$$U = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$$

とおけば、 $Theorem\ 20.7$ 「ユニタリ行列の列ベクトルの直交正規性」より、U はユニタリ行列となる

 u_i は H の各固有ベクトル v_i をスカラー倍したものなので、

$$H\mathbf{u}_i = \alpha_i \mathbf{u}_i$$

という関係が成り立つ

つまり、U の列ベクトル $oldsymbol{u}_1,\ldots,oldsymbol{u}_n$ はそれぞれ H の固有値 $lpha_1,\ldots,lpha_n$ に属する固有ベクトルである

さらに、ユニタリ行列はその Theorem item 20「ユニタリ行列と直交行列」から明らかに正則行列であるので、Theorem 19.6「対角化行列の列ベクトルと固有ベクトルの対応」を振り返ると、

エルミート行列はユニタリ行列を用いて対角化できる

という「予感」がしてくる

まだ「予感」としかいえないのは、エルミート行列の固有値 $lpha_1,\ldots,lpha_n$ が重複している可能性があるからである



正規行列

エルミート行列の対角化について議論するために、エルミート行列・ユニタリ行列を含むより包括的な概念として正規行列を導入する

☞ 正規行列 複素正方行列 A が次を満たすとき、A を正規行列という

$$AA^* = A^*A$$

正規行列の例

A をエルミート行列とすると、 $A^* = A$ なので、

$$AA^* = A^2$$
$$A^*A = A^2$$

となり、正規行列の定義を満たす

♣ Theorem - エルミート行列の正規行列性

エルミート行列は正規行列である

また、A をユニタリ行列とすると、 $A^* = A^{-1}$ なので、

$$AA^* = AA^{-1} = E$$
$$A^*A = A^{-1}A = E$$

となり、こちらも正規行列の定義を満たす

♣ Theorem - ユニタリ行列の正規行列性

ユニタリ行列は正規行列である

正規行列の性質

♣ Theorem - 正規行列と随伴によるノルム保存性

複素正方行列 A が正規行列であることは、任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|A^*\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことと同値である

証明

「Todo 2: book: 行列と行列式の基礎 p262 問 6.9 (1)]

♣ Theorem - 正規行列における固有ベクトルの随伴対応

A を正規行列とするとき、m v が A の固有値 α の固有ベクトルならば、m v は A^* の固有値 $\overline{\alpha}$ の固有ベクトルである すなわち、

$$A\mathbf{v} = \alpha \mathbf{v} \Longrightarrow A^* \mathbf{v} = \overline{\alpha} \mathbf{v}$$

証明

「Todo 3: book: 行列と行列式の基礎 p262 問 6.9 (2)]

正規行列の対角化

A の固有値 α に属する線型独立な固有ベクトルがちょうど k 個存在することは、

$$\dim\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\} = k$$

と表せる

これは、固有値 α の<mark>固有空間</mark>の次元が k であること、噛み砕くと、固有値 α の固有ベクトル α の集合が部分空間であり、k 個の固有ベクトルがこの部分空間の基底を成す(線型独立である)ことを意味する

固有空間は核空間 $Ker(A-\alpha E)$ と定義されるため、この次元がk であることは、次のようにも書ける

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \alpha E) = k$$

正規行列について、一般に次が成り立つ

♣ Theorem 20.11 - 正規行列における固有空間の次元と固有値の重複度の 一致

n 次複素正方行列 A が正規行列であるとき、 $\Phi_A(x)$ における固有値 α の重複度 k について、次の等式が成り立つ

$$k = n - \text{rank}(A - \alpha E)$$

Theorem 11.2 「線形写像の次元定理」を用いて言い換えると、lpha の固有空間 W(lpha) について、

$$\dim W(\alpha) = k$$

が成り立つ

証明

 $l=n-{\sf rank}(A-\alpha E)$ とおく(l が重複度 k に等しいことを示すことが目標) すなわち、

$$rank(A - \alpha E) = n - l$$

であると仮定する

また、固有値 α の固有ベクトルは、斉次形方程式

$$(A - \alpha E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

の非自明解である

この方程式の解空間は $Ker(A - \alpha E)$ であるが、次元定理より、

$$\dim \operatorname{Ker}(A - \alpha E) = n - \operatorname{rank}(A - \alpha E) = l$$

であるので、 $Ker(A-\alpha E)$ は次元 l の部分空間である

すなわち、方程式 $(A-\alpha E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を満たす l 個の線型独立なベクトルが存在する

これらを $m{v}_1, m{v}_2, \ldots, m{v}_l$ とすると、これらはすべて固有値 α の固有ベクトルであるこれらが正規直交系でない場合は、グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交系に変換し、それを改めて $m{v}_1, m{v}_2, \ldots, m{v}_l$ とする

次に、これら \boldsymbol{l} 個のベクトルを補う形で、正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_l,\boldsymbol{v}_{l+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n$ を作る

これらを用いて、行列 Uを

$$U = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_l, \mathbf{v}_{l+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$$

とおくと、 U はユニタリ行列である

さらに、 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ は \boldsymbol{A} の固有値 $\boldsymbol{\alpha}$ に属する固有ベクトルであることから、

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} & & & & & & & \\ & \alpha & & & & & \\ & & \ddots & & & B & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & C & \end{pmatrix} \uparrow_{n-l}$$

ユニタリ行列 U の定義より、 $U^{-1} = U^*$ が成り立つので、

$$U^*AU = \begin{pmatrix} & & & & & & & \\ & \alpha & & & & & \\ & & \ddots & & & B & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & O & & C & \end{pmatrix} \uparrow_{n-l}$$

ここで、両辺の随伴行列をつくることを考える

左辺は、Theorem 20.2「積に対するエルミート共役の順序反転性」より、積の随 伴行列をつくると積の順序が入れ替わることに注意して、

$$(U^*AU)^* = U^*A^*(U^*)^* = U^*A^*U$$

右辺は、転置してから各成分を共役複素数に置き換えればよいので、

$$U^*A^*U = \begin{pmatrix} & & & & & & & \\ & \overline{\alpha} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \overline{\alpha} & & & \\ & & & & & & \end{pmatrix} \uparrow_{n-l}$$

一方、A が正規行列であることから、 $m{v}_1,\ldots,m{v}_l$ は、 A^* の固有値 $\overline{\alpha}$ に属する固有ベクトルでもあるので、

$$U^{-1}A^*U = U^*A^*U = \begin{pmatrix} & & & & & \\ & \overline{\alpha} & & & & \\ & & \ddots & & B' \\ & & \overline{\alpha} & & & \\ & & & C' & \end{pmatrix} \uparrow_{n-l}$$

とも表せる

ここで、B と C は l × (n-l) 型行列、B' と C' は (n-l) × l 型行列であり、型が一致するので成分を比較できるよって、

$$B^* = O$$
, $C^* = C'$

0 の複素共役は 0 であることから、 $B^* = O$ より、

$$B = O$$

がしたがう

このことをふまえて、あらためて U^*AU を表すと、

$$U^*AU = \begin{pmatrix} & & & & & & & \\ & \alpha & & & & & \\ & & \ddots & & & O \\ & & & \alpha & & & \\ & & & O & & C \end{pmatrix} \uparrow_{n-l}$$

となる

ここで、Theorem 19.4「相似な行列の特性多項式」より、A と U^*AU の特性多項式は一致するので、実際に計算すると、

また、 $\alpha E - U^*AU$ を考えると、

より、

$$\operatorname{rank}(\alpha E - U^*AU) = \operatorname{rank}(\alpha E_{n-l} - C)$$

ここで、 $A \ U^*AU$ は相似な行列であり、 $Theorem \ 19.5$ 「相似な行列の固有値」より、相似な行列の固有値(特性方程式の根)は重複度も含めて一致するので、

$$\operatorname{rank}(\alpha E - U^*AU) = \operatorname{rank}(\alpha E - A) = n - l$$

よって、

$$rank(\alpha E_{n-l} - C) = n - l$$

 $\alpha E_{n-l} - C$ は行列の階数が次数 n-l に等しいので、Theorem~11.4 「階数による正則の判定」より、正則行列である

ゆえにその行列式は、

$$\det(\alpha E_{n-l} - C) \neq 0$$

となることから、 $x=\alpha$ は方程式 $\det(xE_{n-l}-C)=0$ の解ではないことがわかる

よって、 $\det(xE-A)=0$ の解 $x=\alpha$ は、 $(x-\alpha)^l$ の部分から現れることになるため、 $x=\alpha$ は l 重解である

したがって、 α の重複度 k は l に等しいことが示された

Theorem 19.8「固有空間次元と重複度の一致による対角化可能性」より、正規行列は対 角化可能である

さらに、上の定理の証明過程から、正規行列はユニタリ行列によって対角化できることもわかる

北 Theorem 20.12 - 正規行列のユニタリ対角化

複素正方行列 A について、A が正規行列であることと、A がユニタリ行列を用いて対角化できることは同値である

証明 証明

正規行列 ⇒ ユニタリ行列を用いて対角化可能

Theorem 20.11「正規行列における固有空間の次元と固有値の重複度の一

致」の定理の証明過程より明らか ■

ユニタリ行列を用いて対角化可能 ―― 正規行列

A がユニタリ行列 U を用いて、次のように対角化されたとする

$$U^*AU = egin{pmatrix} lpha_1 & & O \ & \ddots & \ O & & lpha_n \end{pmatrix}$$

このとき、両辺に左から U をかけ、右から U^* をかけると、ユニタリ行列の定義より $U^*U = UU^* = E$ であることから、

$$A = U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} U^*$$

と変形できる

よって、A* は、Theorem 20.2「積に対するエルミート共役の順序反転性」より、積の随伴行列をつくると積の順序が入れ替わることに注意して、

$$A^* = (U^*)^* \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & O \\ & \ddots & \\ O & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*$$
$$= U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & O \\ & \ddots & \\ O & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*$$

以上をふまえて、 AA^* と A^*A をそれぞれ計算すると、

$$AA^* = U \begin{pmatrix} \alpha_1 & O \\ & \ddots & \\ O & \alpha_n \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & O \\ & \ddots & \\ O & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*$$

$$= U \begin{pmatrix} \alpha_1 \overline{\alpha_1} & O \\ & \ddots & \\ O & \alpha_n \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*$$

$$A^*A = U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & O \\ & \ddots & \\ O & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*U \begin{pmatrix} \alpha_1 & O \\ & \ddots & \\ O & \alpha_n \end{pmatrix} U^*$$
$$= U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1}\alpha_1 & O \\ & \ddots & \\ O & \overline{\alpha_n}\alpha_n \end{pmatrix} U^*$$

 $\forall x \in \alpha_i \overline{\alpha_i} = \overline{\alpha_i} \alpha_i \text{ and } x \in \alpha_i$

$$AA^* = A^*A$$

が成り立つ

これは、*A* が正規行列であることを意味する



実対称行列の対角化

エルミート行列は正規行列なので、次のことがいえる

♣ Theorem - エルミート行列のユニタリ対角化 エルミート行列はユニタリ行列を用いて対角化できる

この定理を実行列の世界にもってくると、次のようになる

♣ Theorem - 実対称行列の直交対角化 実対称行列は直交行列を用いて対角化できる

Zebra Notes

Туре	Number
todo	3