




部分空間の和

 線形部分空間の和は部分空間 U, W を体 K 上の V の部分空間とすると、**和空間**

$$U + W := \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$$

は V の部分空間である

ref: 図で整理！例題で
納得！線形空間入門 p22
~23

ref: 長岡亮介 線形代数
入門講義 p231~232

証明

和について

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in U, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in W$ とする


U と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \in U, \quad \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \in W$$

一方、和空間の定義より、 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$ はそれぞれ $U + W$ の元である

これらの元の和をとったときに、その和も $U + W$ に属していれば、和空間は和について閉じているといえる

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2) &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \\ &\in U + W \end{aligned}$$

上式で、和空間は和について閉じていることが示された 

スカラー倍について

$\mathbf{a} \in U, \mathbf{b} \in W$ と $c \in K$ をとる

U と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$c\mathbf{a} \in U$$

$$c\mathbf{b} \in W$$

一方、和空間の定義より、 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ は $U + W$ の元である
この元をスカラー倍したときに、そのスカラー倍も $U + W$
に属していれば、和空間はスカラー倍について閉じていると
いえる


$$c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$$

$$\in U + W$$

上式で、和空間はスカラー倍について閉じていることが示された ■



部分空間を生成するベクトルを用いて、部分空間の和を表せる

 部分空間の和と生成ベクトル K^n の 2 つの部分空間 $U = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle$ と $W = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$ に対して、和空間 $U + W$ は

$$U + W = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$$

となる

証明

和空間 $U + W$ は

$$U + W = \{\mathbf{x} \in K^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$$

と定義される

また、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ の張る部分空間は

$$H = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$$

である

これらが等しいことを示せばよい

$$\underline{U + W \subseteq H}$$

任意の $\mathbf{x} \in U + W$ に対し、 $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ ($\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} \in W$) と書ける

すなわち、

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_m \mathbf{u}_m \quad (a_i \in K)$$

$$\mathbf{w} = b_1 \mathbf{w}_1 + \dots + b_k \mathbf{w}_k \quad (b_j \in K)$$

よって、

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^k b_j \mathbf{w}_j \in H$$

$$\underline{H \subseteq U + W}$$

任意の $\mathbf{x} \in H$ は

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^k b_j \mathbf{w}_j$$

と書ける

ここで

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{u}_i \in U$$

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^k b_j \mathbf{w}_j \in W$$

とすれば、


$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \in U + W$$

以上より、 $U + W \subseteq H$ と $H \subseteq U + W$ が成り立つので、
 $U + W = H$ が示された ■



和空間の包含関係

ref: 長岡亮介 線形代数
入門講義 p233

 和空間における部分空間の和集合の包含 和空間は、和集合を部分集合として包含する

すなわち、 U, W を V の部分空間とすると、

$$U + W \supset U \cup W$$

が成り立つ

証明

部分空間はいずれも零ベクトルを含むので、たとえば、 $U = \{0\}$ の場合、

$$U + W \supset W$$

同様に、


$$U + W \supset U$$

よって、 $U + W$ は U または W を包含することがわかる
すなわち、

$$U + W \supset U \cup W$$

が成り立つ



 和空間の最小包含性 U, W を V の部分空間とする

和空間 $U + W$ は、 U と W を含む部分空間のうち、最小のものである

 証明

V の任意の部分空間のうち、 U と W の両方を包含するもの V' を考える

このとき、部分空間は和に閉じているため、 V' は $U + W$ も包含する

$$V' \supset U + W$$

よって、 V' の任意性から、 $U + W$ は U と W を含む部分空間のうち、最小のものとなる ■



このように、和空間 $U + W$ は、 U や W を部分空間として含むが、 U や W より真に大きい (U, W を真部分集合として含む) とは限らない

別の角度からいうと、

$$V = W_1 + W_2$$

という関係があるだけで、「 V が W_1 と W_2 の和に分解された」というのは適当ではない

和空間が持つこの欠陥を補うために、和空間の概念をより精密化したものが、次に述べる **直和** である