





正則行列


ref: 行列と行列式の基礎 p71

 **正則** 線形変換 f は全単射であるとき、**正則**な線形変換であるという

 **正則行列** 正方行列 A は、それが正則な線形変換を与えると、**正則行列**であるという




「線形代数における鳩の巣原理」から、次のことがいえる

 **正則の判定と階数** n 次正方行列 A に対して、

$$A \text{ が正則行列} \iff \text{rank}(A) = n$$

この定理は、線形変換 f (もしくは正方行列 A) が**正則**かどうかについて、**階数**という 1 つの数値で判定できることを示している



 **列ベクトルの線型独立性による正則の判定** n 次正方行列

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

に対して、次が成り立つ

$$A \text{ が正則行列} \iff \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \text{ が線型独立}$$

証明

$\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ が線型独立であることは、

$$\text{rank}(A) = n$$

と同値であることを以前示した


さらに、先ほど示した定理より、 $\text{rank}(A) = n$ は A が正則行列であることと同値である ■



逆行列

写像 f が全単射であれば、逆写像 f^{-1} が存在する

ref: 行列と行列式の基礎 p71~72

 逆写像の線形性 f を \mathbb{R}^n の正則な線形変換とすると、逆写像 f^{-1} は線形である

証明

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ とし、次の 2 つを示せばよい

- i. $f^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f^{-1}(\mathbf{x}) + f^{-1}(\mathbf{y})$
- ii. $f^{-1}(c\mathbf{x}) = cf^{-1}(\mathbf{x})$

(i)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= f \circ f^{-1}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{y} &= f \circ f^{-1}(\mathbf{y}) \\ \mathbf{x} + \mathbf{y} &= f \circ f^{-1}(\mathbf{x} + \mathbf{y})\end{aligned}$$

また、 f は線形写像であるから、

$$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{v})$ は、 $f(f^{-1}(\boldsymbol{v}))$ を意味する記号なので、

$$f(f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

両辺を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$$

となり、(i) が示された ■

(ii)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$\boldsymbol{x} = f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

$$c\boldsymbol{x} = f \circ f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(c\boldsymbol{x}))$$

$\boldsymbol{x} = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$ の両辺に c をかけた、次も成り立つ

$$c\boldsymbol{x} = cf(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

さらに、 f は線形写像であるから、

$$cf(f^{-1}(\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

ここまでの $c\boldsymbol{x}$ の複数の表現により、次式が成り立つ

$$f(f^{-1}(c\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

両辺を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$$

となり、(ii) が示された ■



n 次正則行列 A は、正則な線形変換 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ と対応している


逆写像 f^{-1} が存在し、線形であるから、ある n 次正方行列 B が対応するはずである

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ であり、線形写像の合成は行列の積に対応するから、

$$AB = BA = E$$

が成り立つ

このような B を A の逆行列と呼び、 A^{-1} と書く

 逆行列の一意性 正方行列 A に対して、 A の逆行列が存在するならば、それは一意的である


 証明

A の逆行列が B_1 と B_2 の 2 つあるとする

$$AB_1 = B_1A = E \quad \text{かつ} \quad AB_2 = B_2A = E$$

$AB_2 = E$ の両辺に B_1 をかけると、

$$B_1 = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2$$

よって、 $B_1 = B_2$ となり、逆行列は一意的である 

逆行列の計算法と線形方程式


正則行列 A に対して、方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ のただ 1 つの解は次で与えられる

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

A^{-1} が計算できれば、行列のかけ算によって線型方程式の解が求められる

ref: 行列と行列式の基礎 p72~73

正則行列 A の逆行列を計算するために、次の定理に注目しよう

 逆行列の計算法の原理 正方行列 A に対して、 $AB = E$ を満たす正方行列 B があるならば、 A は正則であり、 B は A の逆行列である

 証明



[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p72 命題 2.4.6]

上の定理の証明は、逆行列の計算法のヒントを含んでいる

A の逆行列 B を求めるには、 n 個の線形方程式

$$A\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

を解けばよい

A は階数 n の n 次正方行列なので、行変形で A から E に到達することができる

\mathbf{b}_i を求めるには、行変形により

$$(A \mid \mathbf{e}_i) \rightarrow \cdots \rightarrow (E \mid \mathbf{b}_i)$$

とすればよい


i ごとに掃き出し法を何度も実行しないといけないのかと思いきや、一度にまとめられる

$$(A \mid E) = (A \mid \mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) \rightarrow \cdots \rightarrow (E \mid \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n) = (E \mid B)$$

このようにすれば、行変形は 1 通りで十分である

正則行列と対角行列

ref: 行列と行列式の基礎
p74~75


 上三角行列の正則性 対角成分がすべて 0 でない上三角行列は正則である

 証明



[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p74 命題 2.4.9]



 ブロック対角行列の正則性 次のようなブロック対角行列 M において、対角ブロック A, B が正則であれば、 M も正則である

$$M = \begin{pmatrix} \overset{\substack{\longleftarrow l \\ \longrightarrow n-l}}{A} & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow l \\ \times \\ \downarrow n-l \end{matrix}$$

 証明

A と B が正則であるから、逆行列 A^{-1} と B^{-1} が存在する
それらを用いて、次のような積を考える

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AA^{-1} & O \\ O & BB^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_l & O \\ O & E_{n-l} \end{pmatrix} \\ &= E_n \end{aligned}$$


この等式は、 M の逆行列の存在を示している

$$M \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = E_n$$

つまり、対角ブロックがそれぞれ正則であれば、それらの逆行列を並べることで全体の逆行列が構成できる

このようにして、 M が正則であることがわかる ■



 行基本変形と対角行列 正則行列 A に対して、行のスカラー倍以外の行基本変形を繰り返し行って対角行列にできる

 証明



[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p75 命題 2.4.12]

.....

Zebra Notes

Type	Number
todo	3