転置行列と内積

内積は、転置を用いて表現することもできる

ref: 行列と行列式の基礎 p78〜79

⚓ 転置による内積の表現

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

転置行列と内積は、次の公式によってうまく関係している

⚓ 随伴公式　A を n 次正方行列とするとき、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, {}^tA\boldsymbol{v})$$

証明

転置を用いて内積を書くと、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}$$

転置と行列積の順序反転性より、${}^t(A\boldsymbol{u}) = {}^t\boldsymbol{u}{}^tA$ なので、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ({}^t\boldsymbol{u}{}^tA)\boldsymbol{v}$$

行列の積の結合法則を用いて、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}({}^tA\boldsymbol{v})$$

右辺を内積として書き直すと、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, {}^tA\boldsymbol{v})$$

となり、目的の等式が得られる ■