第 1 章

ベクトル

ベクトルと次元

いくつかの情報の組を並べて書いたものをベクトルという

また、ベクトルに並んだ情報の個数を次元という

ref: 意味がわかる線形代数 p16〜19

線型独立と線形従属

線型独立性の定義式を移項することで、次の事実が得られる

ref: 行列と行列式の基礎 p38〜40

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p31〜32

線型結合の一意性　線型独立性は、線形結合の一意性

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = c'_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c'_k\boldsymbol{a}_k \Longrightarrow c_1 = c'_1, \ldots, c_k = c'_k$$

と同値である

つまり、

線型独立性は、両辺の係数比較ができるという性質

であるとも理解できる

線形関係式　ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ に対する等式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

を、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形関係式という

特に、$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ として得られる線形関係式を自明な線形関係式という

これ以外の場合、つまり $c_i \neq 0$ となるような i が少なくとも 1 つあるならば、これは非自明な線形関係式である

非自明な線形関係式の存在と線形従属　ベクトルの集まりは、それらに対する非自明な線形関係式が存在するとき、そのときに限り線形従属である

証明

ベクトルの集まりが線型独立であることは、それらに対する線形関係式はすべて自明であるというのが定義である

それを否定すると、「自明でない線形関係式が存在する」となる ■

ベクトルの集合が張る空間

ref: 行列と行列式の基礎 p6〜8

ベクトルの集合が張る空間 k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ を与えたとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$$

によって表し、これを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が張る空間という