不変部分空間

V 上の線形変換 f について、「変換 f で写しても変わらない」という性質 を考える

ightharpoonup f 不変 f を線形空間 V の線形変換とする V の部分空間 W に対して、

 $f(W) \subset W$

すなわち、

 $\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{W} \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in \mathcal{W}$

が成り立つとき、W は f 不変な部分空間であるという

また、 $V=\mathbb{R}^n$ で、f が正方行列 A によって定まっているときは、f 不変な部分空間 W を A 不変な部分空間ともいう

ref: 行列と行列式の基 礎 p114

ref: 長岡亮介 線形代数 入門講義 p238~239

写像の制限と不変部分空間

写像の制限 写像 $f: X \to Y$ において、X のある部分集合 S が与えられたとき、定義域を S に限定したものを f の S に対する制限といい、

 $f|_S \colon S \to Y$

と表す

ref: 行列と行列式の基

礎 p114

ref: 長岡亮介 線形代数 入門講義 p240~242、

p363~364

・ 不変部分空間による線形変換のブロック構造表現 V を n 次元線形空間とし、線形変換 $f:V\to V$ を考える このとき、V のある部分空間 W が f 不変ならば、V の適当な基底について、f は

という形の行列で表すことができる

証明

 $\dim(W) = r$ とし、W の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を延長して V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をとる このとき、表現行列の構成法より、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} \boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^n a_{ij} \boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

とおける

ここで、W は f 不変であることは、 $1 \leq j \leq r$ の範囲では $f(oldsymbol{v}_j) \in W$ であることを意味する

W の元 $f(\boldsymbol{v}_i)$ は、W の基底だけを用いて表現できるので、

$$f(oldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} oldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

すなわち、もともとの $f(\boldsymbol{v}_i)$ の式において、

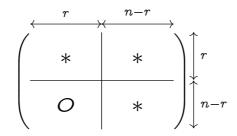
$$\sum_{i=r+1}^n a_{ij} oldsymbol{v}_i = oldsymbol{0} \quad (1 \leq j \leq r)$$

となっている

 v_i は基底なので線型独立であり、したがって、

$$a_{ij} = 0$$
 $(1 \le j \le r, r+1 \le i \le n)$

この条件より、f の表現行列 (a_{ij}) は、



というような形になる

また、V の基底として、順序を変えた $oldsymbol{v}_{r+1},\ldots,oldsymbol{v}_n,oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_r$ を取ることもできる

この場合は、

$$f(oldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} oldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^n a_{ij} oldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

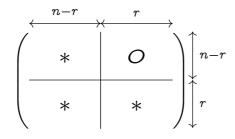
とおくと、 $r+1 \leq j \leq n$ の範囲 (V の基底の後半部分) で

$$\sum_{i=1}^r a_{ij} oldsymbol{v}_i = oldsymbol{0}$$

となるので、すなわち、

$$a_{ij} = 0$$
 $(r + 1 \le j \le n, 1 \le i \le r)$

よって、f の表現行列 (a_{ij}) は、



という形になる

以上より、2 通りの f の表現行列の形が得られた