行列式の定義

ある正方行列の行列式は、

ref: 行列と行列式の基礎 p159
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p107〜108

1. 各列から 1 つずつ、行に重複がないように成分を選ぶ
2. それらをかけ合わせる
3. 符号をつけて足す

という手順で定まる値である

行列式　n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

で定められる値を A の行列式と呼び、$|A|$ あるいは $\det(A)$ と表記する

三角行列の行列式

三角行列の場合、各列から 1 つずつ、0 でない成分を重複なく選び出す方法は、対角成分をすべて選ぶしかない

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p111〜112
ref: 行列と行列式の基礎 p160

三角行列の行列式　三角行列の行列式は、対角成分の積で

ある

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

証明

行列式において、

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)} = 0$$

となる項は、和をとったときに消えてしまう

したがって、

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

すなわち

$$a_{1,\sigma(1)} \neq 0, \dots, a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

となるような選び方を考える

上三角行列の場合

上三角行列の定義より、$i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ である

$a_{ij} \neq 0$ とするには、$i \leq j$ でなければならないので、

$a_{i,\sigma(i)}$ においては、

$$i \leq \sigma(i)$$

である必要がある

そして、この条件を満たす置換は、恒等置換しか存在しないので、

$$\sigma(i) = i$$

より、a_{ii} の積によって行列式の値が構成される

また、恒等置換は 0（偶数）回の互換で構成されるので、各項の符号は正となる ■

下三角行列の場合

下三角行列の定義より、$i < j$ ならば $a_{ij} = 0$ である

$a_{ij} \neq 0$ とするには、$i \geq j$ でなければならないので、$a_{i,\sigma(i)}$ においては、

$$i \geq \sigma(i)$$

である必要がある

そして、この条件を満たす置換も、恒等置換しか存在しないので、上三角行列の場合と同様の結果が得られる ■

対角行列は、上三角行列でもあり下三角行列でもあるので、上の定理の特別な場合として次が成り立つ

対角行列の行列式　対角行列の行列式は、対角成分の積である

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & \text{\huge 0} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特に、対角成分がすべて 1 の場合が単位行列である

単位行列の行列式　単位行列の行列式は 1 である

$$|E| = 1$$