線形写像の像と列空間

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の張る空間の記号を用いると、ベクトルの張る空間と $\mathrm{Im}\, A$ に関する考察は次のようにまとめられる。

ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97、ref: プログラミングのための線形代数 p135

$$\mathrm{Im}\, A = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

つまり、A の列ベクトルが張る空間が $\mathrm{Im}\, A$ である。

このことから、$\mathrm{Im}\, A$ を A の列空間と呼ぶこともある。

線形写像の像と表現行列の列空間の一致 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の像 $\mathrm{Im}\, f$ は、f の表現行列の列ベクトルが張る空間である。

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とするとき、$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

なので、

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}\, f \\
\iff& \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t.\ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}) \\
\iff& \exists v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \ s.t.\ \boldsymbol{u} = v_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n \\
\iff& \boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle
\end{aligned}$$

したがって、

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

が成り立つ。 ■

上述の証明の

$$\boldsymbol{u} \in \operatorname{Im} f \iff \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})$$

という変形に着目すると、この定理は次のように線型方程式の文脈で言い換えられる。

⚓ **線形写像の像空間と方程式の解の存在**　$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} A \iff \text{方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ}$$