Chapter 1

ε - δ 論法と極限

ここまでのこの本では、極限というものを厳密に定義していなかった。また、微分と積分において、イメージで導出できることを最重視し、厳密な議論を避けた箇所が多くある。

厳密には、極限は ε - δ 論法によって定義され、微分積分の基礎理論は極限の議論に基づいている。ε - δ 論法に踏み込んでいない私たちは、極限というものを語る言葉をまだ持ち合わせていない。

1.1　実数の集合

厳密な理論を展開する上で、知っておくべき言葉の定義を行う。

1.1.1　区間

2 つの実数の間の範囲は、区間と呼ばれる。

> 区間
>
> 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合のうち、$a < b$ である実数 a と b の間にあるすべての実数の集合を 区間 という。

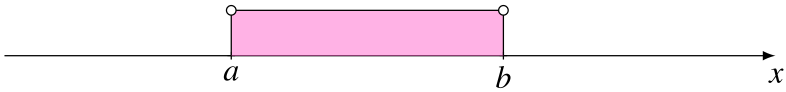
区間は、端点を含むかどうかによって、開区間、閉区間、半開区間に分類される。

開区間

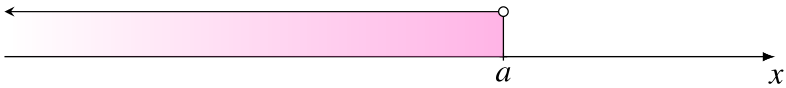
端点を含まない区間を開区間という。

開区間　$a \leq x \leq b$ となる実数 x の集合を 開区間 といい、(a, b) と表す。

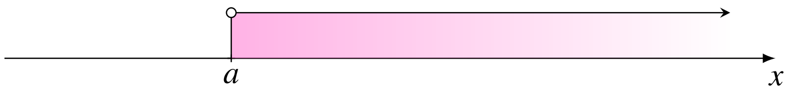
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\}$$



閉区間

端点を含まない区間を閉区間という。

閉区間　$a < x < b$ となる実数 x の集合を 閉区間 といい、$[a, b]$ と表す。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$[-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}$$

半開区間

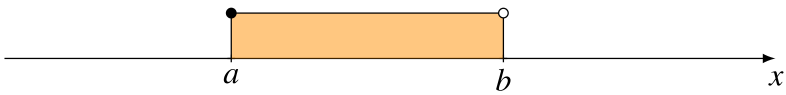
一方の端点を含み、他方の端点を含まない区間を半開区間という。

半開区間　次のような集合を 半開区間 という。

- $a \leq x < b$ となる実数 x の集合を、$[a, b)$ と表す。
- $a < x \leq b$ となる実数 x の集合を、$(a, b]$ と表す。

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



1.2　数列の極限

微分を定義するには関数の極限を考えるが、関数の極限の諸性質は、数列の極限から導かれる。まずは、$\varepsilon - \delta$ 論法（数列の場合は $\varepsilon - N$ 論法とも呼ばれる）によって数列の極限を定義し、その性質をひとつひとつ確かめていこう。

1.2.1　ε で「一致」をどう表現するか

「限りなく近づく」という表現では、「限りなく」の部分に無限という概念が含まれてしまう。有限の値 ε を使って、無限を表現しようとするのが ε - δ 論法である。

*　*　*

ε - δ 論法で極限を定義する前に、有限値 ε を使った議論の例を見てみよう。

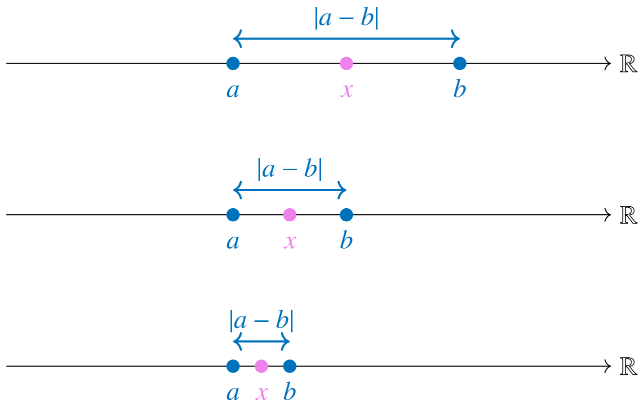
有限値 ε の不等式による一致の表現

a、b を実数とするとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次のことがいえる。

$$|a - b| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

実数は連続である（数直線には穴がない）ため、a と b が異なる実数であれば、a と b の間には無数の実数が存在する。

つまり、a と b が異なる限り、その間の距離 $|a - b|$ は絶対に 0 にはならない。



$|a - b|$ が 0 にならないということは、ここでも実数の連続性によって、$|a - b|$ より小さい実数が存在してしまう。

たとえば、a と b の間の中点 $x = \dfrac{|a - b|}{2}$ は、$|a - b|$ よりも小さい。

> a と b の間の中点というと $\dfrac{a - b}{2}$ だが、正の数 ε と比較するため、絶対値をつけて $\dfrac{|a - b|}{2}$ としている。

$|a - b|$ より小さい実数が存在してしまうと、「任意の」$\varepsilon > 0$ に対して、$|a - b| < \varepsilon$ を成り立たせることができない。

ε はなんでもよいのだから、$|a - b|$ より小さい実数を ε として選ぶこともできてしまう。

しかし、$|a - b|$ より小さい実数を ε としたら、$|a - b| < \varepsilon$ は満たされない。

$|a - b|$ が 0 でないという状況下では、あらゆる実数 ε より $|a - b|$ を小さくすることは不可能である。

したがって、$|a - b| < \varepsilon$ を常に成り立たせるなら、$|a - b| = 0$、すなわち $a = b$ となる。

* * *

ここまでの考察から直観を取り除いて、この定理の数学的な証明をまとめておこう。

Proof: 有限値 ε の不等式による一致の表現

$a \neq b$ と仮定する。

$\varepsilon_0 = \dfrac{|a-b|}{2}$ とおくと、絶対値 $|a-b|$ が正の数であることから、ε_0 も正の数となる。
よって、$|a-b| < \varepsilon_0$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} |a-b| &< \frac{|a-b|}{2} \\ 2|a-b| &< |a-b| \\ 2|a-b| - |a-b| &< 0 \\ |a-b| &< 0 \end{aligned}$$

両辺 ×2

絶対値が負になることはありえないので、$a \neq b$ の仮定のもとでは矛盾が生じる。
したがって、$a = b$ でなければならない。 ■

1.2.2 ε - N 論法による数列の収束

$\varepsilon - \delta$ 論法は、数列の極限に適用する場合、$\varepsilon - N$ 論法と呼ばれることが多い。

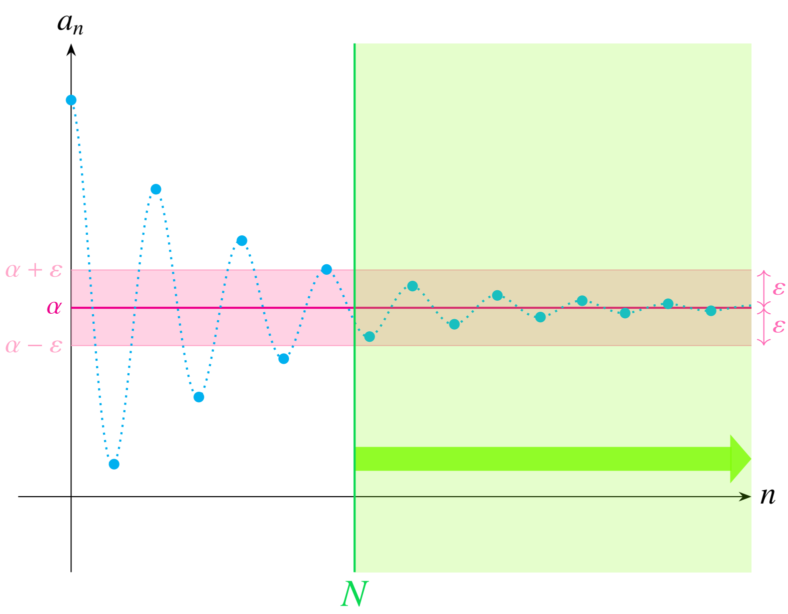
「数列が $\{a_n\}$ が α に収束する」ことの $\varepsilon - N$ 論法による表現を、まずはイメージで掴んでみよう。

* * *

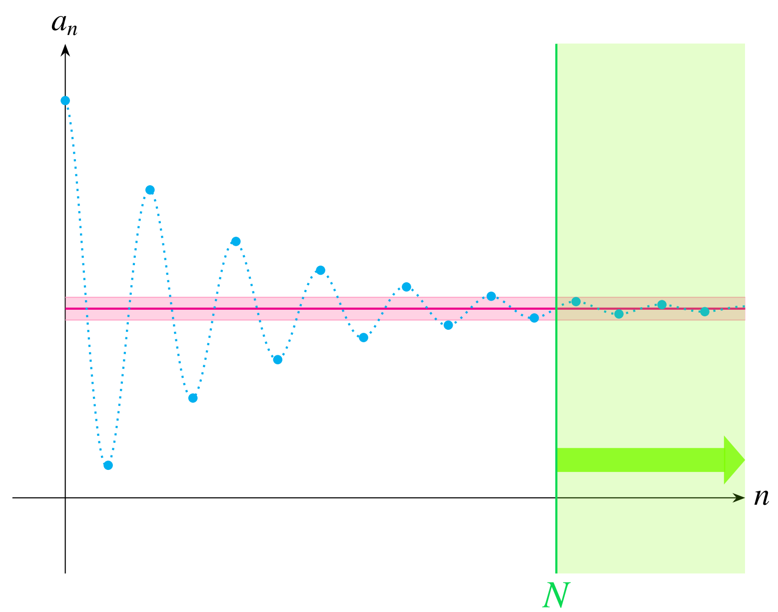
まず、α の周りに、両側それぞれ ε だけ広げた区間を考える。

ε は正の数ならなんでもよいとすれば、ε を小さな数に設定し、いくらでも区間を狭めることができる。

そして、「ここから先の項はすべて区間内に収まる」といえる位置に、N という印をつけておく。



ε を小さくしていくと、ε による α 周辺の区間に入る項は少なくなる。
それでも、N をずらしていけば、N 以降はこの区間に収まる項だけになる。
これこそが「収束」という現象だと定義するのが、$\varepsilon - N$ 論法の考え方である。



区間幅（の半分）となる ε をどんなに小さくしても、「N 番目以降は区間内に収まる項だけになる」といえるような N を設定できるか？が肝心で、そのような N が存在するなら、数列は収束するといえる。
このことを、数学の言葉でまとめておこう。

数列の収束と極限値

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 α について、次の条件を考える。

任意の正の数 ε に対して

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つような自然数 N が存在する

この条件が成り立つとき、数列 $\{a_n\}$ は α に 収束 するといい、次のように表す。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

このとき、α を数列 $\{a_n\}$ の 極限値 という。

$\varepsilon - \delta$ 論法によるこの定義を用いることで、数列の収束に関する諸性質を証明できるようになる。

1.2.3 数列の極限の一意性

数列が最終的に複数の極限値に散らばるとしたら、それは収束と呼べるだろうか？

$\varepsilon - \delta$ 論法による収束の定義は、そのような状況をきちんと除外するようになっている。

数列が複数の値に収束することはない。このことを示すのが、次の定理である。

数列の極限の一意性

数列 $\{a_n\}$ が収束するならば、その極限値はただ 1 つに定まる。

Proof: 数列の極限の一意性

数列 $\{a_n\}$ が α と β の 2 つの極限値を持つと仮定する。

このとき、任意の正の数 ε に対して、

$$
\begin{aligned}
n \geq N_1 \quad &\Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon \\
n \geq N_2 \quad &\Longrightarrow \quad |a_n - \beta| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

が成り立つような自然数 N_1 と N_2 が存在する。

ここで、$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \geq N$ のとき、N_1 と N_2 の大きい方が n 以下に収まることから、$n \geq N_1$ と $n \geq N_2$ がともに成り立つ。

よって、$n \geq N$ のとき、$|\alpha - \beta|$ を考えると、

$$
\begin{aligned}
|\alpha - \beta| &= |\alpha - \beta + \underbrace{a_n - a_n}_{0}| \\
&= |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)| \qquad \text{三角不等式} \\
&\leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| \\
&= |-(a_n - \alpha)| + |a_n - \beta| \qquad |-A| = |A| \\
&= |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| \qquad n_1 \geq N \text{ と } n_2 \geq N \text{ より} \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon \\
\therefore \quad |\alpha - \beta| &< 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

ここで、ε は任意の正の数であるから、2ε も任意の正の数をとりうる。
よって、「有限値 ε の不等式による一致の表現」より、$|\alpha - \beta| < 2\varepsilon$ から、

$$
\alpha = \beta
$$

がいえる。
これで、数列 $\{a_n\}$ の極限値はただ 1 つに定まることが示された。 ■