行列式の基本性質

次の性質により、以後議論する行列式の性質が列に対して成り立つなら、行に対しても成り立つといえるようになる

ref: 行列と行列式の基礎 p161〜166
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p113〜121

行列式の対称性

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$$

証明

行列式の定義より、行列 ${}^tA$ の行列式は、行列 A の行列式に現れる $a_{i,\sigma(i)}$ の添字を入れ替えたもの $a_{\sigma(i),i}$ の積和になる

$$\det\left({}^tA\right) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

一方、$j = \sigma(i)$ とおくと、$i = \sigma^{-1}(j)$ となるので、添字の変数を変換して

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

よって、$\det\left({}^tA\right)$ の各項は、

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

となるが、これは $\det(A)$ の定義式の σ^{-1} に対応する項と同じである

ここで、$\rho = \sigma^{-1}$ とおくと、$\sigma = \rho^{-1}$ であり、逆置換の符号から $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) = \operatorname{sgn}(\rho)$ であるから、

$$\det\left({}^tA\right) = \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\rho(j)} = \det(A)$$

よって、$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$ が示された ■

行列式の列についての交代性　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ において、2 つの列を入れ替えた行列を作ると、その行列の行列式の値は、元の行列 A の行列式の値の (-1) 倍になる

$$\begin{aligned}&\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &\qquad = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (1 \leq i < j \leq n)\end{aligned}$$

証明

元々の行列 A の行列式の各項が、

$$f(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

であるのに対し、第 i 列と j 列を入れ替えた行列の行列式の各項は、

$$\mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i),j} \cdots a_{\sigma(j),i} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

となる

ここで、i を j に、j を i に写す互換 $\sigma_0 = (ij)$ を考え、$\tau = \sigma\sigma_0$ とおくと、$\sigma(j) = \tau(i),\ \sigma(i) = \tau(j)$ となるので、

$$f(\tau) = \mathrm{sgn}(\tau) a_{\tau(1),1} \cdots a_{\tau(i),i} \cdots a_{\tau(j),j} \cdots a_{\tau(n),n}$$

このとき、置換群の左右作用に対する和の不変性より、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma\sigma_0) = \sum_{\tau \in S_n} f(\tau)$$

すなわち、σ 全体の総和は τ 全体の総和に一致する

さらに、置換の符号の乗法性より、

$$\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma_0) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$$

であるから、

$$f(\sigma) = -f(\tau)$$

よって、列の交換後、行列式全体が (-1) 倍される　■

行列式の列についての多重線形性　行列式を列の関数とみたとき、この関数は、どの列についても線形である

$$\begin{aligned}&\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{a}_n) \\ &\qquad = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{u}, \dots, \boldsymbol{a}_n) \\ &\qquad\qquad + \beta \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{a}_n)\end{aligned}$$

証明

$\sigma \in S_n$ に対応する各項について、

$$a_{\sigma(1),1} \cdots (\alpha u_{\sigma(i)} + \beta v_{\sigma(i)}) \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$C = a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ とし、$A = \alpha u_{\sigma(i)}$, $B = \beta v_{\sigma(i)}$ とおくと、

$$C(A + B) = CA + CB = \alpha C u_{\sigma(i)} + \beta C v_{\sigma(i)}$$

のように展開できる

よって、

$$\begin{aligned}&\alpha(a_{\sigma(1),1} \cdots u_{\sigma(i)} \cdots a_{\sigma(n),n}) \\ &\qquad + \beta(a_{\sigma(1),1} \cdots v_{\sigma(i)} \cdots a_{\sigma(n),n})\end{aligned}$$

を用いれば、行列式の定義に基づいて定理が成り立つことがわかる

■

行列式の対称性より、次の定理も得られる

行列式の行についての多重線形性と交代性　行列式は行に関しても多重線形性と交代性をもつ

以降、列に対して成り立つ性質は行に対しても成り立つとし、列の場合のみを記載する

行列式の値が零になる条件

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p118

列の重複による行列式の零化　$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の n 個の列の中に、まったく同じものがあれば、

$$\det(A) = 0$$

となる

証明

行列 A の列ベクトルに、共通のベクトル $\boldsymbol{u}$ が含まれているとする

$$A = (\ldots, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}, \ldots)$$

この 2 つの $\boldsymbol{u}$ の列を入れ替えると、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}, \ldots) = -\det(\ldots, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}, \ldots)$$

ところが、入れ替えの前後で行列そのものは変化していない（まったく同じ列を入れ替えても行列は同じ）ので、行列式の値も変わらないはずである

すなわち、

$$\det A = -\det A$$

が成り立つ

ここで、両辺に $\det(A)$ を足すと、

$$2\det A = 0$$

より、$\det A = 0$ が成り立つ ■

列ベクトルの線形従属性による行列式の零化 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の n 個の列ベクトルが線形従属であるとすれば、

$$\det(A) = 0$$

となる

証明

列ベクトルのうち 1 つ $\boldsymbol{a}_i$ が、残りのいくつかの線型結合で表されるとすると、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots) = \det\left(\ldots, \sum_{j=1}^{k} c_j \boldsymbol{a}_j, \ldots\right)$$

行列式の多重線形性より、

$$\det\left(\ldots, \sum_{j=1}^{k} c_j \boldsymbol{a}_j, \ldots\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j \det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots)$$

ここで、$\boldsymbol{a}_j$ は $\boldsymbol{a}_i$ 以外のいずれかの列ベクトルであるため、右辺の行列式では列ベクトルの重複が生じている

よって、行列式の値は 0 になる ■

この定理の対偶をとることにより、次の定理が得られる

⚓ 非零行列式による列ベクトルの線形独立性　$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の行列式の値が 0 でないならば、A の n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線形独立である

基本変形と行列式

行列式の性質から、行列の列や行に関する基本変形と行列式の関係が見えてくる

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p117〜118
ref: 行列と行列式の基礎 p162

⚓ 基本変形と行列式の関係

i. 列（行）を交換すると行列式の符号が交換される
ii. 列（行）を定数倍すると、行列式の値も定数倍される
iii. 列（行）に他の列（行）の定数倍を加えても行列式の値は変化しない

(i) は行列式の交代性、(ii) は多重線形性であり、(iii) は次の定理によって示される

⚓ 列の掃き出しに関する不変性　$i \neq j$ のとき、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) = \det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots)$$

証明

行列式の多重線形性より、

$$
\begin{aligned}
&\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) \\
=& \det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) + c\det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots)
\end{aligned}
$$

ここで、同じ列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ が 2 つ含まれている行列式の値は 0 になるので、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) = \det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots)$$

だけが残る ■