読書ノート：ろんりと集合

tomixy

2025 年 5 月 20 日

目次

記号化の効用

文を記号化することにより、文の長さや内容に煩わされることなく、文の構造を把握することが容易となり、「思考の節約」になる

もともとの文は忘れて、記号で表された文の間の関係を調べる分野のことを記号論理学という

記号論理学は、

- 主張（命題）を扱う命題論理学
- 「すべての〜」とか「ある〜」とかを含む文を扱う述語論理学

に分かれている

＊　＊　＊

命題論理の法則

■結合法則

$$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$$
$$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$$

結合法則は、「どこから計算しても同じ」という性質を支えるもの

＊　＊　＊

記号論理では、ある法則が成り立つとき、

> その法則の $\land$ を $\lor$ に、そして、$\lor$ を $\land$ に置き換えた法則が成り立つ

という原理があり、双対性と呼ばれている

> 双対性は、2 つのことがら・概念が、ちょうどお互いに鏡で写し合っているような対称性を持つ状況

双対性は数学のいろんな分野で登場する

＊　＊　＊

■冪等法則

$$p \land p \equiv p$$
$$p \lor p \equiv p$$

これらを繰り返して適用すると、

$$p \land \cdots \land p \equiv p$$
$$p \lor \cdots \lor p \equiv p$$

であることが容易にわかる

これは、AND（あるいは OR）を「何度繰り返しても同値」であることを示している

$\land$ をかけ算（積）と見なすと、$p \land \cdots \land$ は p の累乗である

昔は、累乗のことを「冪」と呼んだので、「冪等法則」の名称もここから来ている

＊　＊　＊

■交換法則

$$p \land q \equiv q \land p$$
$$p \lor q \equiv q \lor p$$

p と q の順序が交換できることを示している

＊　＊　＊

■分配法則

$$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$$
$$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$$

交換法則を考慮すると、分配法則は右から分配することもできる

$$p \land (q \lor r) \equiv (q \lor r) \land p$$
$$p \lor (q \land r) \equiv (q \land r) \lor p$$

＊　＊　＊

■吸収法則

$$p \land (p \lor q) \equiv p$$
$$p \lor (p \land q) \equiv p$$

分配法則によく似ているが、分配する方と分配される方のどちらにも p が入っている

このような状況では q の影響がなくなって、命題が p と同値になるというのが吸収法則

＊　＊　＊

■ド・モルガンの法則（命題論理）

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$
$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

ド・モルガンの法則は、AND および OR の否定がどうなるかを述べたもの

命題の否定を作るときにはなくてはならない重要な公式

＊　＊　＊

これらの法則を前提にすると、真理表を使用せずに、同値変形という方法で、2 つの命題が同値であることを確かめることができる

＊　＊　＊

恒真命題と恒偽命題

同値変形をしていく場合に、真理値が一定な値をとる命題を考えると、便利であることがわかってくる

■定義（恒真命題）　真理値を 1 しかとらない命題を恒真命題と呼び、I で表す

■定義（恒偽命題）　真理値を 0 しかとらない命題を恒偽命題と呼び、O で表す

＊　＊　＊

恒真命題と恒偽命題の定義から、明らかに次が成り立つ

■恒真命題と恒偽命題の関係

$$\neg I \equiv O$$
$$\neg O \equiv I$$

なぜなら、否定をとるというのは、真理値について 0 を 1 にし、1 を 0 にする操作だから

＊　＊　＊

■恒真命題の性質

$$p \land I \equiv p$$
$$p \lor I \equiv I$$

■恒偽命題の性質

$$p \land O \equiv O$$
$$p \lor O \equiv p$$

これらの性質において、

- $\land$ を $\lor$ に
- $\lor$ を $\land$ に
- I を O に
- O を I に

置き換えると、

$$\begin{aligned} p \land I \equiv p \quad &\leftrightarrow \quad p \lor O \equiv p \\ p \lor I \equiv I \quad &\leftrightarrow \quad p \land O \equiv O \end{aligned}$$

という対応が得られ、恒真命題と恒偽命題が双対的であることがわかる

＊　＊　＊

矛盾法則と排中法則

「命題とその否定命題は同時に成り立たない」というのが矛盾法則

■矛盾法則

$$p \land \neg p \equiv O$$

矛盾法則とは双対的に、排中法則は、「命題とその否定命題のどちらかは常に成り立つ」ということを表している

■排中法則

$$p \lor \neg p \equiv I$$

＊　＊　＊

否定を含む論理式の同値変形において、矛盾法則、排中法則、恒真命題の性質、恒偽命題の性質を用いると、次のような 2 つのステップで、式をより単純な形にすることができる

1. 矛盾法則や排中法則により、命題とその否定命題のペアは、恒真命題 I や恒偽命題 O に置き換えることができる
2. 恒真命題の性質や恒偽命題の性質により、恒真命題 I と恒偽命題 O は、式をより簡単にする

＊　＊　＊

ならば

■定義　命題 p, q に対して、$\neg p \lor q$ という命題を $p \to q$ と書いて、「p ならば q」と読む

＊　＊　＊

必要条件と十分条件

■定義（必要条件と十分条件）　命題 p, q に対して、命題 $p \to q$ が常に正しいとき、$p \Rightarrow q$ と書き、

- p は q の必要条件である
- q は p の十分条件である

と呼ぶ

■定義（必要十分条件）　$p \Rightarrow q$ であり、$q \Rightarrow p$ であるとき、$p \Leftrightarrow q$ と書き、

- p は q の**必要十分条件**である
- q は p の**必要十分条件**である

と呼ぶ

＊　＊　＊

三段論法

「ならば」を用いた有名な議論の方法として、**仮言三段論法**がある

これは、「A ならば B」という主張と「B ならば C」という主張から、「A ならば C」という主張を導くことができるというもの

＊　＊　＊

逆と対偶

対偶 $\neg q \to \neg p$ と、もとの命題 $p \to q$ は同値である

$$\begin{aligned} &\neg q \to \neg p \\ \equiv\ &(\neg\neg q) \lor \neg p && \to \text{の定義} \\ \equiv\ &q \lor \neg p && \text{反射法則} \\ \equiv\ &\neg p \lor q && \text{交換法則} \\ \equiv\ &p \to q && \to \text{の定義} \end{aligned}$$

＊　＊　＊

「晴れるならば、外出する」はまともな主張だが、その対偶「外出しないならば、晴れない」というのは、少し違和感を感じる

これは、「外出しない」という原因によって「晴れない」という結果が導かれるととらえてしまうから

あくまで、論理の「ならば」は、「外出しない」という事実があるときに、「晴れない」という事実があるという状態を表すもの

「〜ならば〜」というのは、

> 原因と結果という因果関係ではなく、2 つの状態の間の事実関係である

と思っておくとよい

＊　＊　＊

$\neg p \to \neg q$ は、$p \to q$ の**裏**と呼ばれることもある

- $(\neg p \to \neg q) \equiv (\neg\neg p) \lor \neg q \equiv p \lor \neg q$
- $(p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$

であるため、裏 $\neg p \to \neg q$ と元の命題 $p \to q$ は特に関係がない

＊　＊　＊

2 つの同値

■定義（同値）　2 つの命題 p, q に対して、真理値がすべて等しい（真理表が一致する）ということを、p と q は**同値**であると呼び、

$$p \equiv q$$

と表す

一方、同値にはもう 1 つの定義がある

■定義（同値）　命題 p と命題 q がお互いに必要十分条件であるとき、言いかえると、$p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ であるとき、p と q は**同値**である

と呼び、

$$p \Leftrightarrow q$$

と表す

この 2 つの同値 $\equiv$ と $\Leftrightarrow$ は、実は同じ内容を表している

「$p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$」であるというのは、

命題 $p \rightarrow q$ および命題 $q \rightarrow p$ の真理値がすべて 1 である

ということだから、「p と q の真理値が等しいこと」と「$p \rightarrow q$ と $q \rightarrow p$ の真理値がどちらも 1 であること」は一致している

したがって、2 つの同値 $\equiv$ と $\Leftrightarrow$ は同じ内容を表していることがわかる

* * *

命題関数

これまで、たとえば「1234567891 は素数である」というような命題を扱ってきた

ここで、たとえば x が自然数全体を動くとき、「x は素数である」という形の主張を命題関数と呼ぶ

命題は記号 p で表されたのに対し、命題関数は $p(x)$ と書く

命題関数 $p(x)$ は、x の値に応じて主張が変わり、真理値が変化していく

命題関数 $p(x)$ の x は、変数と呼ばれる

命題関数 $p(x)$ の変数は、実数や自然数のような数以外に、直線とか地図のような数学的対象や一般的概念をとる

* * *

すべての〜

命題関数 $p(x)$ に対して、「すべての x について $p(x)$ である」という命題を

$$\forall x p(x)$$

と表す

「すべての〜について○○である」は、

- 「すべての〜は○○である」
- 「任意の〜について○○である」
- 「任意の〜は○○である」

と表すこともある

$\forall$ という記号は、「all（すべての〜）」や「any（任意の〜）」の頭文字の A を逆さにしたものに由来する

* * *

変数 x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「すべての x について $p(x)$ である」というのは、

$p(a_1)$ であり、かつ、$p(a_2)$ であり、かつ、$\cdots$、かつ、$p(a_n)$ である

ということに他ならない

言い換えると、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$$

ということになる

* * *

ある〜

命題関数 $p(x)$ に対して、「ある x について $p(x)$ である」という命題を

$$\exists x p(x)$$

と表す

「ある〜について○○である」は、

- 「ある〜は○○である」
- 「ある〜が存在して○○である」
- 「○○であるような〜が存在する」

と表すこともある

∃ という記号は、「exists（存在する）」の頭文字の E を逆さにしたものに由来する

＊　＊　＊

変数 x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「ある x について $p(x)$ である」というのは、

> $p(a_1)$ であるか、あるいは、$p(a_2)$ であるか、あるいは、$\cdots$、あるいは、$p(a_n)$ である

ということに他ならない

言い換えると、

$$\exists x p(x) = p(a_1) \lor p(a_2) \lor \cdots \lor p(a_n)$$

ということになる

＊　＊　＊

「すべての〜」と「ある〜」

「すべての〜」と「ある〜」の 2 つの概念の間には双対性がある

$$\forall x p(x) = p(a_1) \land p(a_2) \land \cdots \land p(a_n)$$
$$\exists x p(x) = p(a_1) \lor p(a_2) \lor \cdots \lor p(a_n)$$

という式を比較してみると、「すべての〜（∀)」と「ある〜（∃)」は、AND（∧）と OR（∨）の双対性を反映していることがわかる

＊　＊　＊

∀ と ∃ を含んだ式の同値変形

■∀ と ∃ の性質

$$\forall x (p(x) \land q(x)) \equiv \forall x p(x) \land \forall x q(x)$$
$$\exists x (p(x) \lor q(x)) \equiv \exists x p(x) \lor \exists x q(x)$$

これらはそれぞれ、

- 「すべての〜」（$\forall x$）と AND（∧）
- 「ある〜」（$\exists x$）と OR（∨）

が対応していると思って眺めるとよい

＊　＊　＊

∀ と ∃ の否定

「すべての〜」（∀）と「ある〜」（∃）を含む命題の否定は、次のド・モルガンの法則で与えられる

■ド・モルガンの法則（述語論理）

$$\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$$
$$\neg \exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$$

$\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$ より、

「すべての〜について…である」の否定は、「ある〜について…でない」

$\neg\exists xp(x) \equiv \forall x\neg p(x)$ より、

「ある〜について…である」の否定は、「すべての〜について…でない」

要するに、否定をとると、「すべての〜」は「ある〜」になり、「ある〜」は「すべての〜」になる

＊　＊　＊

述語論理のド・モルガンの法則は、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっている

x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ というように、有限個の値しかとらない場合、

$$\forall xp(x) = p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$$
$$\exists xp(x) = p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)$$

であり、

$$\forall x\neg p(x) = \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(a_n)$$
$$\exists x\neg p(x) = \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \cdots \vee \neg p(a_n)$$

であるので、述語論理のド・モルガンの法則は、それぞれ次のように書き換えられる

$$\neg(p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)) \equiv \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \cdots \vee \neg p(a_n)$$

$$\neg(p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)) \equiv \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(a_n)$$

これらはそれぞれ、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっていることは一目瞭然

＊　＊　＊

集合

集合とは「ものの集まり」のことであり、その「ものの集まり」に入っているか、あるいは、入っていないかが客観的に判断できるもの

＊　＊　＊

集合の要素

集合を構成する個々の「もの」を、その集合の要素あるいは元と呼ぶ

x が集合 A の要素であるとき、x は A に含まれる、あるいは属すると言い、記号では $x \in A$ と書く

＊　＊　＊

集合の表記法

次のような 2 つの方法がある

- $\{x_1, x_2, \cdots\}$（集合を書き並べる方法：外延的記法）
- $\{x \mid x$ は条件〜を満たす $\}$（要素になる条件を書く方法：内包的記法）

集合では、このように、要素を括弧 {} で囲んで記述する

＊　＊　＊

集合の「等しい」

集合 A と集合 B が等しいとは、

A の要素がすべて B の要素であり、かつ、B の要素がすべて A の要素である

ことを言う

集合 A と集合 B が等しいとき、$A = B$ と書く

＊　＊　＊

有限集合と無限集合

集合に含まれる要素の個数が有限個のとき有限集合といい、無限個のとき無限集合と呼ぶ

＊　＊　＊

空集合

「要素が 1 つもない集まり」も、1 つの集合とみなして、空集合と呼び、記号 $\emptyset$ で表す

＊　＊　＊

部分集合

2 つの集合 A と B に対して、A は B の部分集合である（A は B に含まれる）とは、

> A のすべての要素が B の要素になっている

ことを言い、記号では $A \subset B$ と書く

「$A \subset B$ かつ $B \subset A$ である」ことは、$A = B$ であることに他ならない

＊　＊　＊

共通部分

いくつかの集合があったとき、それらの「共通の部分」、すなわち、

> それらの共通の要素を集めてできた集合

のことを共通部分という

共通部分には $\cap$ という記号が用いられる

＊　＊　＊

たとえば、2 つの集合 A, B に対して、A と B のどちらにも含まれている要素の全体からなる集合を A と B の共通部分と呼び、記号では $A \cap B$ と書く

すなわち、

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

＊　＊　＊

有限個の集合でも同様に、集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して、すべての A_i に含まれている要素の全体からなる集合を、集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の共通部分と呼び、記号で

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \quad \text{あるいは} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

と書く

すなわち、

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n &= \{x \mid \forall A_i, c \in A_i\} \\ &= \{x \mid x \in A_1 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\} \end{aligned}$$

＊　＊　＊

いくつかの集合があって、それらのどの 2 つも共通部分をもたないとき、それらは互いに素であるという

＊　＊　＊

和集合

いくつかの集合があったとき、

> それらの集合をすべて集めてできた集合

のことを和集合という

和集合には $\cup$ という記号が用いられる

＊　＊　＊

たとえば、2 つの集合 A, B に対して、A と B のどちらかに含まれている要素の全体からなる集合を A と B の和集合と呼び、記号では $A \cup B$ と書く

すなわち、

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

＊　＊　＊

有限個の集合でも同様に、集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して、ある A_i に含まれている要素の全体からなる集合を、集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ の**和集合**と呼び、記号で

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \quad \text{あるいは} \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

と書く

すなわち、

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n &= \{x \mid \exists A_i, c \in A_i\} \\ &= \{x \mid x \in A_1 \vee \cdots \vee x \in A_n\} \end{aligned}$$

＊　＊　＊

集合と論理の間の対応関係

「集合」と「論理」は対応しているため、論理で登場した法則は集合に対しても成り立つ

■冪等法則

$$A \cap A = A$$
$$A \cup A = A$$

■交換法則

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

■結合法則

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

■分配法則

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

■吸収法則

$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

たとえば、交換法則の証明は次のようになる

$$\begin{aligned} & A \cap B \\ &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} && \text{∩の定義} \\ &= \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} && \text{論理の交換法則} \\ &= B \cap A && \text{∩の定義} \end{aligned}$$

この証明を見てみると、「集合の性質」と「論理の性質」が対応していることがわかる

＊　＊　＊

「集合」というのは、内包的記法により

$$\text{集合} = \{x \mid x \text{ は〜である }\}$$

という形で表現できるが、「x は〜である」というのは、「論理」の命題関数である

すなわち、命題関数 $p(x)$ を用いて、

$$\text{集合} = \{x \mid p(x)\}$$

と書ける

このとき、∩と∪の定義から、

$$\{x \mid p(x)\} \cap \{x \mid q(x)\} = \{x \mid p(x) \wedge q(x)\}$$
$$\{x \mid p(x)\} \cup \{x \mid q(x)\} = \{x \mid p(x) \vee q(x)\}$$

となる

さらに、次の 2 つの主張は同値である

- $p(x) \equiv q(x)$
- $\{x \mid p(x)\} = \{x \mid q(x)\}$

もっと一般に、次の 2 つの主張が同値であることが確かめられる

- $p(x) \Rightarrow q(x)$
- $\{x \mid p(x)\} \subset \{x \mid q(x)\}$

＊　＊　＊

全体集合と補集合

集合にも、論理の「否定」に対するものがある
それが補集合というもの

集合の場合は「～でない」という要素を集めてくる必要があるので、「どこまでの範囲」の中で集めるかということをあらかじめ設定しておかなければならない
その「どこまでの範囲」として、あらかじめ定められた 1 つの集合のことを全体集合という

＊　＊　＊

枠組みとなる集合を 1 つ固定して、扱う集合をその部分集合に限るとき、その枠組みとなる集合を全体集合という
全体集合は Ω という記号を用いることが多い

また、全体集合 Ω が定まっているとき、Ω の部分集合 A に対して、A に含まれていない Ω の要素の全体からなる集合を A の補集合と呼び、記号では $\overline{A}$ あるいは A^c と書く

$$\begin{aligned} A^c &= \{x \mid x \in \Omega \wedge x \notin A\} \\ &= \Omega - A \end{aligned}$$

＊　＊　＊

補集合を用いると、論理の反射法則とド・モルガンの法則に対応する、集合の法則が得られる

■反射法則

$$(A^c)^c = A$$

■ド・モルガンの法則

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

補集合は論理の「否定」に対応している

＊　＊　＊

全体集合という枠組みの設定のもとで、「空集合」と「全体集合」は双対的な概念であることがわかる

■空集合の性質

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup \emptyset = A$$

■全体集合の性質

$$A \cap \Omega = A$$
$$A \cup \Omega = \Omega$$

これらの性質において、

- $\cap$ を $\cup$ に
- $\cup$ を $\cap$ に
- $\emptyset$ を Ω に
- Ω を $\emptyset$ に

置き換えると、

- $A \cap \emptyset = \emptyset \quad \leftrightarrow \quad A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cup \emptyset = A \quad \leftrightarrow \quad A \cap \Omega = A$

という対応が得られ、空集合と全体集合が双対的であることがわかる

＊　＊　＊

空集合の性質は恒偽命題の性質に対応し、全体集合の性質は恒真命題の性質に対応する

つまり、

空集合 $\emptyset$ が論理の恒偽命題 O に対応し、全体集合 Ω が論理の恒真命題 I に対応している

実際、

$$\Omega = \{x \in \Omega \mid I\}$$
$$\emptyset = \{x \in \Omega \mid O\}$$

ということ

この証明も、対応する論理の法則を用いれば容易に得られる

また、「空集合と全体集合の双対性」は「恒偽命題と恒真命題の双対性」に対応している

＊　＊　＊

補集合については、次の性質が定義からわかる

■補集合の性質

$$A \cap A^c = \emptyset$$
$$A \cup A^c = \Omega$$

これらの性質はそれぞれ、論理の矛盾法則と排中法則に対応している

＊　＊　＊

「集合」と「論理」は、双対性を備えた単純できれいな構造を持ち、それらの間には双対的な関係が成り立っている

＊　＊　＊

直積集合

2 つの集合 A, B に対して、A の要素 a と B の要素 b の組 (a, b) をすべて集めてできた集合のことを $A \times B$ と書き、A と B の**直積集合**、あるいは単に**直積**という

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}$$

有限個の集合でも同様に、有限個の集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ に対して、A_1 の要素 a_1、A_2 の要素 a_2、$\cdots$、A_n の要素 a_n の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ をすべて集めてできた集合を $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ と書き、$A_1, A_2, \cdots, A_n$ の**直積集合**、あるいは単に**直積**という

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

＊　＊　＊

集合 A の n 個の直積 $A \times A \times \cdots \times A$ のことを A^n と書く

たとえば、

$$A^2 = A \times A$$
$$A^3 = A \times A \times A$$

などであり、このような記述は、「平面 $\mathbb{R}^2$」や「空間 $\mathbb{R}^3$」のように使われる

＊　＊　＊

同値関係と商集合