第 12 章

線形同型

線形同型

線形同型は、部分空間が「同じ」であることを述べた概念である

線形同型写像　V, W を線形空間とし、線形写像 $f\colon V \to W$ が全単射であるとき、f は線形同型写像あるいは単に線形同型であるという

このとき、同型を表す記号 $\cong$ を用いて、

$$f\colon V \xrightarrow{\cong} W$$

と書くこともある

部分空間の線形同型　V と W の間に線形同型写像が存在するとき、V と W は線形同型であるとい、

$$V \cong W$$

と書く

線形同型の性質

ここでは、線形同型写像の恒等写像、逆写像、合成写像との関係を述べる

線形同型と恒等写像

Theorem – 恒等写像の線形同型性

恒等写像は線形同型写像である

証明

恒等写像は明らかに全単射であり、線形写像でもあるため、線形同型写像である ■

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

Theorem – 部分空間の自己同型性

部分空間 V は V 自身と線形同型である

すなわち、

$$V \cong V$$

線形同型と逆写像

Theorem – 線形同型写像の逆写像

線形同型写像の逆写像は線形同型写像である

証明

[Todo 1: book: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p93～94]

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

⚓ Theorem – 線形同型性の対称性

部分空間 V が部分空間 W と線形同型なら、W は V と線形同型である

すなわち、

$$V \cong W \Longrightarrow W \cong V$$

線形同型と合成写像

⚓ Theorem – 線形同型写像の合成

線形同型写像の合成は線形同型写像である

証明

[Todo 2: book: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94]

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

⚓ Theorem – 線形同型性の推移性

部分空間 V が部分空間 W と線形同型で、W が部分空間 U と線形同型ならば、V は U と線形同型である

すなわち、

$$V \cong W \land W \cong U \Longrightarrow V \cong U$$

ここまでで登場した、部分空間の線形同型に関する性質をまとめると、

⚓ Theorem – 線形同型の同値関係としての性質

i. $V \cong V$

ii. $V \cong W \Longrightarrow W \cong V$

iii. $V \cong W \land W \cong U \Longrightarrow V \cong U$

となり、これらは、

> 同型 $\cong$ が等号 $=$ と同じ性質をもつ

ことを意味している

線形同型写像と基底

Theorem – 線形同型写像による基底の保存

線形同型写像 f によって、部分空間の基底は基底に写る

証明

Theorem 5.3「単射な線型写像は線型独立性を保つ」ことから、f の単射性により、基底の線型独立性が保たれる

また、f の全射性により、基底の生成性も保たれる

よって、f によって基底は基底に写る ■

座標写像

[Placeholder 1: 再編予定（book: 線形代数の世界 p42〜43）]

座標写像　V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする

このとき、K^n から V への線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}} \colon K^n \to V$ を

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{x} \in (x_i)_{i=1}^{n} \in K^n)$$

を $\mathcal{V}$ で定まる座標写像と呼ぶ

このように定めた線形写像が座標写像と呼ばれる背景は、この座標写像が線形同型であることを示し、それがどんな意味を持つのかを考えることでわかる

Theorem – 線形空間の基底によって定まる線形同型写像

V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする

このとき、K^n から V への線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}} \colon K^n \to V$ を

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{x} \in (x_i)_{i=1}^{n} \in K^n)$$

と定めると、これは線形同型写像である

証明

線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ が全単射であることを示す

単射であること

基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の線型独立性は、

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

で表される線形結合が、$x_i = 0$ を満たすことを意味する

$\Phi_{\mathcal{V}}$ の定義をふまえると、この条件は、

$$\mathrm{Ker}(\Phi_{\mathcal{V}}) = \{\boldsymbol{0}\}$$

と書ける

よって、Theorem 5.2「線形写像の単射性と核の関係」より、$\Phi_{\mathcal{V}}$ は単射である ■

全射であること

基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V を生成することは、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \in V &\iff \boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle \\ &\iff \exists (x_i)_{i=1}^n \in K^n \ s.t.\ \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i \\ &\iff \exists \boldsymbol{x} \in K^n \ s.t.\ \Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u} \\ &\iff \boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(\Phi_{\mathcal{V}}) \end{aligned}$$

という言い換えにより、

$$V = \mathrm{Im}(\Phi_{\mathcal{V}})$$

を意味する

よって、像空間と全射性の関係により、$\Phi_{\mathcal{V}}$ は全射である ■

この定理を部分空間の線形同型に関して言い換えると、次のような主張になる

Theorem 12.1 – 有限次元部分空間と数ベクトル空間の線形同型性

任意の部分空間は次元の等しい数ベクトル空間と線形同型である

つまり、

> 和とスカラー倍だけに着目すれば、
>
> どんな部分空間も数ベクトル空間と「同じ」

ということを意味する

この同型により、部分空間に**座標**を与えることができる

そしてその座標によって、ベクトルの**成分表示**が得られる

線形代数における鳩の巣原理

Theorem 12.2 - 線形代数における鳩の巣原理の抽象版

$V,\ W$ を同じ次元の線形空間とするとき、線形写像 $f\colon V \to W$ に関して、次はすべて同値である

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は線形同型
iv. $\operatorname{rank}(f) = \dim V = \dim W$

証明

$\mathcal{V},\ \mathcal{W}$ をそれぞれ $V,\ W$ の基底として、線形写像の合成

$$g\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{V}}} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{W}}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

を考える

このとき、g は $\mathbb{R}^n$ の線形変換である

f が単射（全射）であると仮定すると、座標写像は全単射であるので、f との合成写像 g も単射（全射）となる

逆に、g が単射（全射）であると仮定した場合について考える

f は g を用いて次のように表現でき、

$$f = \Phi_{\mathcal{W}} \circ g \circ \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}$$

座標写像は全単射であるので、g との合成写像 f も単射（全射）となる

以上より、f が単射（全射）であることと、g が単射（全射）であることは同値である

線形変換 g に対して、Theorem 11.3「線形代数における鳩の巣原理」より、

$$g \text{ が単射} \iff g \text{ が全射} \iff g \text{ が全単射}$$

が成り立つが、g の単射性・全射性は f についても成り立つことがわかったので、

$$f \text{ が単射} \iff f \text{ が全射} \iff f \text{ が線形同型}$$

がいえる

最後に、階数に関する条件を示す

像空間と全射性の関係により、f が全射であることは、$\mathrm{Im}(f) = W$ と同値であるから、

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim W$$

より、

$$\mathrm{rank}(f) = \dim W = \dim V$$

が得られる ■

次元による部分空間の比較

次の事実は、数の一致で空間の一致が結論できる有用な結果である

Theorem 12.3 - 次元の一致による部分空間の一致判定

2 つの線型空間について、$V \subset W$ ならば、

$$\dim V = \dim W \Longrightarrow V = W$$

証明

$\boldsymbol{v} \in V$ をそのまま W の元と考えることで得られる写像を $\iota \colon V \to W$ とする（包含写像）

この包含写像は、V の元 $\boldsymbol{v}$ を W の中にそのまま「埋め込む」操作を表しているため、$\iota(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ 自身である

$$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$$

特に、$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ そのものを意味する

$$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

したがって、Theorem 5.1「零ベクトルへの写像による単射性の判定」より、ι は単射である

また、ι が単射であることと、仮定 $\dim V = \dim W$ を合わせると、Theorem 12.2「線形代数における鳩の巣原理の抽象版」より、ι は全射であることがわかる

よって、全射の定義より、すべての $\boldsymbol{w} \in W$ に対して $\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v}$ が存在する

すなわち、W の元はすべて V の元であり、$V \subset W$ もふまえると、これは $V = W$ を意味する ■

Theorem – 次元による部分空間の比較

K^n の部分空間 V, W について、$V \subseteq W$ ならば、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立するのは、$V = W$ のときに限る

証明

$V \subseteq W$ であることから、Theorem 10.6「基底の延長」により、V の基底を延長して W の基底にできるので、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立する場合については、前述の Theorem 12.3「次元の一致による部分空間の一致判定」を参照 ■

核空間・像空間の次元

Theorem – 線形写像の単射性と核の次元

線形写像 $f\colon V \to W$ について、

$$f \text{ が単射} \iff \dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$

証明

Theorem 5.2「線形写像の単射性と核の関係」より、f が単射であることは次と同値である

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

次元の定義より、$\{\mathbf{0}\}$ の次元は 0 であるので、

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$

が成り立つ ■

Theorem – 線形写像の全射性と像の次元

線形写像 $f\colon V \to W$ について、

$$f \text{ が全射} \iff \dim \mathrm{Im}(f) = \dim W$$

証明

Theorem 12.2「線形代数における鳩の巣原理の抽象版」の主張そのものである

■

Zebra Notes

Type	Number
todo	2
placeholder	1