

## 0.1 論理

数学では「曖昧さ」を取り除いた議論が重要である。

ここでは、文章（表現）の曖昧さを取り除くために、文章の意味を記号化して扱おう、というアプローチを考えていく。

### 0.1.1 命題：客観的視点に絞る

数学では、多くの問いを立てて、それが正しいかどうかをひとつひとつ確かめていくことになる。このとき、数学の議論の対象にできるのは、主観を含まない、「真偽を問うことができる」文章である。

たとえば、「数学は面白い」という文章は、私たちにとっては事実かもしれないが、主観を含む（もはや個人的感想に近い）主張である。

このような、人によって回答が分かれるような文章について議論するのは、また別の学問領域に任せてしまおう。

数学の議論の対象とできる文章は、「正しい」か「正しくない」かをはっきりと定められるもので、そのような文章は**命題**と呼ばれる。

命題 客観的に正しいか正しくないかが判断できる主張を 命題 という。

### 0.1.2 記号化：解釈を一通りに絞る

数学で扱う命題は、文章ではなく記号で表現されることも多い。どのような記号をどんな意味で使うかを見ていく前に、そもそもなぜ記号化するのか、ということを考えておきたい。

私たちが日常で使う言葉は、表現のパターンがあまりにも多い。英語に比べると、日本語は特にその傾向がある。

たとえば、次の3つの文章は、まったく同じことを主張しているものである。

1. パンケーキは太る
2. パンケーキを食べると太る
3. パンケーキを食べたならば、体重が増える





否定命題になると真偽が入れ替わる



ということになる。

命題の否定

命題  $p$  に対して、「 $p$  ではない」という命題を  $p$  の 否定命題 といい、次のように表す。

$\neg p$

$\neg$  は「not」を意味する記号で、命題の否定を表す論理演算子である。

真理値表

ここで、初めての論理演算子が登場した。  
論理演算子によって新たな命題を作り出すとき、元の命題からの真偽値の変化を一覧化しておく  
とわかりやすい。そのように真偽値を一覧化した表を、**真理値表**という。

この「否定の真理値表」では、次の対応関係が示されている。

- $p$  の真偽値が 1 のとき、 $\neg p$  の真偽値は 0 である
- $p$  の真偽値が 0 のとき、 $\neg p$  の真偽値は 1 である

否定の真理値表

$p$	$\neg p$
1	0
0	1

真理値表を使うと、「否定命題になると真偽が入れ替わる」ことも  
瞬時に捉えられる。

0.1.6 論理積と論理和：「かつ」と「または」

2 つの命題を組み合わせて、新たな命題を作り出す操作もある。  
その代表例が**論理積**「かつ」と**論理和**「または」である。

日常生活での感覚

「かつ」と「または」という言葉は、日常生活でも意外と馴染みのあるものである。  
命題としての厳密さを一旦忘れて、日常の感覚で考えてみよう。

- 1. 晴れていて風も弱ければ散歩に行こう
- 2. 紅茶かコーヒーをお選びください

1つめの文章では、「晴れている」かつ「風が弱い」という条件を使っている。  
「晴れている」と「風が弱い」という、2つの条件を両方満たすときにしか、散歩には行きたくないのである。

2つめの文章では、「紅茶」または「コーヒー」という、2つの選択肢を提示している。  
ところで、大抵の人は「紅茶」か「コーヒー」のどちらか片方だけを選ぶだろうが、数学者は両方を手に取ってしまうかもしれない。というのも、「または」という言葉は、日常生活でのニュアンスと数学での定義が若干異なるからだ。

- 日常生活での「A または B」: A と B のどちらか一方
- 数学での「A または B」: A と B の少なくとも一方（両方でもよい）

これらの感覚を踏まえて、「かつ」と「または」を数学的に定義していこう。

数学での定義：論理積

論理積

$p, q$  を命題とすると、「 $p$  かつ  $q$ 」すなわち「 $p$  と  $q$  が両方真である」という命題を論理積 という。


論理積は、論理演算子  $\wedge$  を使って、次のように表す。

$$p \wedge q$$

論理積は、AND 演算と呼ばれることもある。  
 $p$  と  $q$  の両方が1でない限り、 $p \wedge q$  は決して1にはならない。

論理積の真理値表が言わんとしていることは、次のシンプルな事実である。

論理積（AND）は、  
両方とも 1 のときのみ、1 になる



論理積の真理値表

$p$	$q$	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

数学での定義：論理和

論理和


$p, q$  を命題とすると、「 $p$  または  $q$ 」すなわち「 $p$  と  $q$  の少なくとも一方が真である」  
という命題を 論理和 という。  
論理和は、論理演算子  $\vee$  を使って、次のように表す。

$$p \vee q$$

論理和は、OR 演算と呼ばれることもある。  
 $p$  と  $q$  のどちらかだけでも 1 であれば、 $p \vee q$  は 1 になる。

論理和の真理値表では、次の事実に着目しよう。

論理和（OR）は、  
片方だけでも 1 であれば、1 になる



論理和の真理値表

$p$	$q$	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

0.1.7 命題関数