



次元定理

連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解の自由度は、

$$\text{解の自由度} = (\text{変数の個数}) - \text{rank}(A)$$

で表された

この関係は、 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 、すなわち斉次形の場合にも成り立つ

そこで、変数の個数を n とおくと、次のようにも書き換えられる

$$\text{rank}(A) = n - (A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ の解の自由度})$$

線型方程式と階数に関するこの関係を、線形写像と次元の言葉で言い換えてい

次のような線形写像

$$\begin{array}{ccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \mathbf{x} & \longmapsto A\mathbf{x} \end{array}$$

を考えると、

- 写像 f は、行列 A に対応する
- 変数の個数は、 \mathbf{x} の動く空間 \mathbb{R}^n の次元 n に対応する
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は、写像 f で $\mathbf{0}$ になってしまうものの次元に対応する

という関係が読み取れる


ここで、写像 f で $\mathbf{0}$ になってしまう縮退するものは、写像 f の核 $\text{Ker}(f)$ である

このことを用いて関係式を表現し直すと、次のようになる

$$\text{rank}(f) = n - \dim \text{Ker}(f)$$

ref: 行列と行列式の基礎 p101

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p82~83

 線形写像の次元定理 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、
次が成り立つ

$$\text{rank}(f) = n - \dim \text{Ker}(f)$$

 証明

A を f の表現行列とし、 $\text{rank}(f) = r$ とする

このとき、 $\text{Ker}(f)$ の次元は $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解空間の自由度 $n - r$ と一致するため、

$$\begin{aligned}\dim \text{Ker}(f) &= n - r \\ &= n - \text{rank}(f)\end{aligned}$$

$$\therefore \text{rank}(f) = n - \dim \text{Ker}(f)$$

となり、定理が成り立つ 