第 1 章

線型独立な列ベクトルと階数

非自明解の存在と有限従属性

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の非自明解の存在に対して、次の解釈もできる。

ref: 行列と行列式の基礎 p40〜41

斉次形方程式の非自明解の存在と線形従属 $m \times n$ 型行列 A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ とするとき、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ に自明でない解がある} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属}$$

証明

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は、ベクトルの等式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$$

と同じものである。

$\Longrightarrow$

もし自明でない解があるならば、$x_1, \ldots, x_n$ のうち少なくとも 1 つは 0 ではない。

$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ が成り立つもとで、0 でない係

数が存在するということは、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属であることを意味する。 ■

$\Longleftarrow$

対偶を示す。

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立であれば、

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$$

において、すべての係数 $x_1, \ldots, x_n$ は 0 でなければならない。

よって、0 以外の解（非自明解）は存在しないことになる。

■

この命題の否定をとると、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ には自明解しか存在しない} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形独立}$$

となる。

ここで、斉次形方程式の非自明解の存在条件より、斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ において自明解しか存在しないことは、$\mathrm{rank}(A) = n$、すなわち解の自由度が 0 であることと同値であった。

つまり、次が成り立つことがわかる。

⚓ **列ベクトルの線型独立性と階数** $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とおくと、

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

有限従属性（方程式の視点）

$\mathrm{rank}(A) = n$ が成り立つ条件をさらに言い換えてみよう。

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とおくと、A は $m \times n$ 型行列である。

階数のとりうる値の範囲より、

$$\operatorname{rank} A \leq \min(m, n)$$

であるから、もしも列の方が行よりも多い、つまり $n > m$ であれば、$\operatorname{rank} A \leq m < n$ となり、$\operatorname{rank} A = n$ が成り立つことはない。

よって、次の関係がいえる。

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ に自明でない解がある} &\iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属} \\ &\iff \operatorname{rank} A \neq n \end{aligned}$$

ここで n は変数の個数、m は方程式の個数であるので、$n > m$ という状況を次のようにまとめることができる。

> ⚓ **斉次形方方程式における有限従属性**　斉次線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ において、変数の個数が方程式の個数よりも多いときには、非自明な解が存在する。

有限従属性（ベクトルの集合における視点）

連立方程式の文脈に限定せず、より抽象的に言い換えたものが次の定理である。

> ⚓ **有限従属性定理**　$\mathbb{R}^m$ 内の m 個よりも多いベクトルからなる集合は線形従属である。

$n > m$ の場合、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ は線形従属となることを述べている。

この結論は、幾何的な直観からは自然だといえる。

たとえば、平面 $\mathbb{R}^2$ 内に 3 つ以上のベクトルがあれば、自動的に線形従属になる。

この事実は、次元の概念を議論する際の基礎となる。

列ベクトルの線型独立性と行基本変形

行列の階数は、行基本変形を施した結果である行階段形からわかる。

ref: 行列と行列式の基礎 p42〜44

このとき、行階段形に至るまでの行変形の仕方は一通りとは限らない。
では、変形の仕方によって階数が変わることはないのだろうか？

その問いに答える第一歩となるのが、次の定理である。

行基本変形による線型独立性の不変性　行変形は列ベクトルの線形関係を保つ。

すなわち、行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ に行の変形を施して $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ が得られたとするとき、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{o} \iff \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{o}$$

特に、

$$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \text{ が線型独立} \iff \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \text{ が線型独立}$$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p42 （命題 1.6.8）]

主列ベクトルと掃き出し法

ref: 行列と行列式の基礎 p42〜44

主列ベクトル 行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を行階段形にしたときに、主成分のある列番号を $i_1, \ldots, i_r$ とする。ここで、r は A の階数である。

このとき、$\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ を主列ベクトルという。

主列ベクトルと線型独立性 行列の主列ベクトルの集合は線型独立である。

また、主列ベクトル以外の列ベクトルは、主列ベクトルの線形結合である。

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （命題 1.6.11）]

掃き出し法は、行列の列ベクトルの中から、$\operatorname{rank} A$ 個の線型独立な列ベクトルを選び出す方法を与えていることになる。

列ベクトルによる階数の再解釈

ref: 行列と行列式の基礎 p42〜44

列ベクトルの線形従属性と階数　行列 A の列ベクトルから $\operatorname{rank} A$ 個よりも多いベクトルを選ぶと、線形従属になる。

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （命題 1.6.12）]

以上によって、行列の階数に関する次の理解が得られたことになる。

階数と線型独立な列ベクトルの最大個数　行列 A の階数 $\operatorname{rank} A$ は、A の列ベクトルに含まれる線型独立なベクトルの最大個数と一致する。

証明

[Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （定理 1.6.13）]

これで、「行変形を繰り返して行階段形にしたときの 0 でない段の数」として導入した階数という量の、より本質的な意味がわかったことになる。

特に、

行変形によって定めた階数が行変形の仕方によらない

という事実がこの定理からしたがう。

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	4