拡大係数行列

次のような連立一次方程式を考える

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p99〜100

$$
\begin{cases}
x + y \quad = 3 \\
-x \quad + z = -1 \\
-2x - y + 2z = -4
\end{cases}
$$

0 や 1 の係数を省略せずに書くと、

$$
\begin{cases}
1x + 1y + 0z = 3 \\
-1x + 0y + 1z = -1 \\
-2x - 1y + 2z = -4
\end{cases}
$$

となるので、これを行列で表すと、

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}
$$

左辺の行列は、連立方程式の係数だけを取り出した行列になっているので、係数行列と呼ばれる

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

また、右辺のベクトルは定数項をまとめたものになっているので、定数項ベクトルと呼ばれる

$$
\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}
$$

連立方程式の解を求める過程の式変形（行基本変形）によって、係数行列 A と定数項ベクトル $\boldsymbol{b}$ の成分が変化していく

そこで、変形の過程で変化する数（操作の対象）を、次のように 1 つの行列 $(A \mid \boldsymbol{b})$ としてまとめてしまおう

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

このように、係数行列と定数項ベクトルを 1 つの行列としてまとめたものを拡大係数行列という

拡大係数行列に対して行基本変形を行うことで、連立一次方程式の解を求めることができる