固有値と固有ベクトル

与えられた線形写像を表現する行列を単純化（対角化）する上で、一次元不変部分空間への直和分解が本質的な役割を果たす

ref: 行列と行列式の基礎 p183〜184
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p178〜179
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p251〜252

一次元の f 不変部分空間 W の基底 $\boldsymbol{a}$ とは、

ある $\lambda \in K$ について $f(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a}$

となるような $\mathbf{0}$ 以外のベクトルだった

固有値と固有ベクトル　体 K 上の線形空間 V 上の線形変換 $f : V \to V$ に対して、

$$f(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$$

となるベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ が存在するとき、このようなスカラー $\lambda \in K$ を、線形変換 f の固有値という

また、このようなベクトル $\boldsymbol{a}$ を、f の固有値 λ に属する固有ベクトルという

線形変換 f の表現行列を A とすると、これは正方行列であり、$f(\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$ と表せる

よって、固有値と固有ベクトルの定義は、次のようにも書ける

行列の固有値と固有ベクトル　正方行列 A に対して、

$$A\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$$

となるベクトル $\boldsymbol{a}$ とスカラー λ が存在するとき、このようなスカラー λ を行列 A の固有値という

また、このようなベクトル $\boldsymbol{a}$ を、行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルという

固有ベクトルによる行列の対角化

一次元不変部分空間に関する議論で見たように、

$$f(\boldsymbol{a}_i) = \lambda_i \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

となるような $\boldsymbol{a}_i$ を基底として用いると、線形変換 f は次のような対角行列で表現できる

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

そして、このような $\boldsymbol{a}_i$ を固有ベクトル、λ_i を固有値として定義したため、このことは、

> 行列 A の固有ベクトルからなる基底が存在すれば、A は対角化できる

と言い換えられる

ref: 行列と行列式の基礎 p184〜185