

読書ノート：ろんりと集合

tomixy

2025 年 5 月 19 日

目次	集合の要素	8
記号化の効用	1 集合の表記法	8
命題論理の法則	2 集合の「等しい」	8
恒真命題と恒偽命題	3 有限集合と無限集合	8
矛盾法則と排中法則	4 空集合	8
ならば	4	
必要条件と十分条件	4	
三段論法	5	
逆と対偶	5	
2 つの同値	5	
命題関数	6	
すべての～	6	
ある～	6	
「すべての～」と「ある～」	7	
∀ と ∃ を含んだ式の同値変形	7	
∀ と ∃ の否定	7	
集合	8	

* * *

命題論理の法則

■結合法則

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

結合法則は、「どこから計算しても同じ」という性質を支えるもの

* * *

記号論理では、ある法則が成り立つとき、

その法則の \wedge を \vee に、そして、 \vee を \wedge に置き換えた法則が成り立つ

という原理があり、双対性と呼ばれている

双対性は、2つのことがら・概念が、ちょうどお互いに鏡で写し合っているような対称性を持つ状況

双対性は数学のいろんな分野で登場する

* * *

■冪等法則

$$p \wedge p \equiv p$$
$$p \vee p \equiv p$$

これらを繰り返して適用すると、

$$p \wedge \cdots \wedge p \equiv p$$
$$p \vee \cdots \vee p \equiv p$$

であることが容易にわかる

これは、AND（あるいは OR）を「何度繰り返しても同値」であることを示している

\wedge をかけ算（積）と見なすと、 $p \wedge \cdots \wedge$ は p の累乗である

昔は、累乗のことを「冪」と呼んだので、「冪等法則」の名称もここから来ている

* * *

■交換法則

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$

p と q の順序が交換できることを示している

* * *

■分配法則

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

交換法則を考慮すると、分配法則は右から分配することもできる

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (q \vee r) \wedge p$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (q \wedge r) \vee p$$

* * *

■吸収法則

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

分配法則によく似ているが、分配する方と分配される方のどちらにも p が入っている
このような状況では q の影響がなくなって、命題が p と同値になるというのが**吸収法則**

* * *

■ド・モルガンの法則（命題論理）

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

ド・モルガンの法則は、AND および OR の否定がどうなるかを述べたもの
命題の否定を作るときにはなくてはならない重要な公式

* * *

これらの法則を前提にすると、真理表を使用せずに、**同値変形**という方法で、2つの命題が同値であることを確かめることができる

* * *

恒真命題と恒偽命題

同値変形をしていく場合に、真理値が一定な値をとる命題を考えると、便利であることがわかってくる

■定義（恒真命題） 真理値を1しかとらない命題を**恒真命題**と呼び、 I で表す

■定義（恒偽命題） 真理値を0しかとらない命題を**恒偽命題**と呼び、 O で表す

* * *

恒真命題と恒偽命題の定義から、明らかに次が成り立つ

■恒真命題と恒偽命題の関係

$$\neg I \equiv O$$
$$\neg O \equiv I$$

なぜなら、否定をとるとというのは、真理値について0を1にし、1を0にする操作だから

* * *

■恒真命題の性質

$$p \wedge I \equiv p$$
$$p \vee I \equiv I$$

■恒偽命題の性質

$$p \wedge O \equiv O$$
$$p \vee O \equiv p$$

これらの性質において、

- \wedge を \vee に

- \vee を \wedge に
- I を O に
- O を I に

置き換えると、

$$\begin{aligned} p \wedge I &\equiv p & \leftrightarrow & & p \vee O &\equiv p \\ p \vee I &\equiv I & \leftrightarrow & & p \wedge O &\equiv O \end{aligned}$$

という対応が得られ、恒真命題と恒偽命題が**双対的**であることがわかる

* * *

矛盾法則と排中法則

「命題とその否定命題は同時に成り立たない」というのが**矛盾法則**

■矛盾法則

$$p \wedge \neg p \equiv O$$

矛盾法則とは双対的に、**排中法則**は、「命題とその否定命題のどちらかは常に成り立つ」ということを表している

■排中法則

$$p \vee \neg p \equiv I$$

* * *

否定を含む論理式の同値変形において、矛盾法則、排中法則、恒真命題の性質、恒偽命題の性質を用いると、次のような2つのステップで、式をより単純な形にすることができる

1. 矛盾法則や排中法則により、命題とその否定命題のペアは、恒真命題 I や恒偽命題 O に置き換えることができる
2. 恒真命題の性質や恒偽命題の性質により、恒真命題 I と恒偽命題 O は、式をより簡単にする

* * *

ならば

■定義 命題 p, q に対して、 $\neg p \vee q$ という命題を $p \rightarrow q$ と書いて、「 p ならば q 」と読む

* * *

必要条件と十分条件

■定義（必要条件と十分条件） 命題 p, q に対して、命題 $p \rightarrow q$ が常に正しいとき、 $p \Rightarrow q$ と書き、

- p は q の**必要条件**である
- q は p の**十分条件**である

と呼ぶ

■定義（必要十分条件） $p \Rightarrow q$ であり、 $q \Rightarrow p$ であるとき、 $p \Leftrightarrow q$ と書き、

- p は q の**必要十分条件**である
- q は p の**必要十分条件**である

と呼ぶ

* * *

三段論法

「ならば」を用いた有名な議論の方法として、**仮言三段論法**がある

これは、「 A ならば B 」という主張と「 B ならば C 」という主張から、「 A ならば C 」という主張を導くことができるというもの

* * *

逆と対偶

対偶 $\neg q \rightarrow \neg p$ と、もとの命題 $p \rightarrow q$ は同値である

$$\begin{aligned} \neg q \rightarrow \neg p & \\ \equiv (\neg \neg q) \vee \neg p & \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{の定義} \\ \text{反射法則} \end{array} \right\} \\ \equiv q \vee \neg p & \quad \left. \begin{array}{l} \text{交換法則} \\ \rightarrow \text{の定義} \end{array} \right\} \\ \equiv \neg p \vee q & \\ \equiv p \rightarrow q & \end{aligned}$$

* * *

「晴れるならば、外出する」はまともな主張だが、その対偶「外出しないならば、晴れない」というのは、少し違和感を感じる

これは、「外出しない」という原因によって「晴れない」という結果が導かれるととらえてしまうから

あくまで、論理の「ならば」は、「外出しない」という事実があるときに、「晴れない」という事実があるという状態を表すもの

「～ならば～」というのは、

原因と結果という因果関係ではなく、2つの状態の間の事実関係である

とっておくとよい

* * *

$\neg p \rightarrow \neg q$ は、 $p \rightarrow q$ の**裏**と呼ばれることもある

- $(\neg p \rightarrow \neg q) \equiv (\neg \neg p) \vee \neg q \equiv p \vee \neg q$
- $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

であるため、裏 $\neg p \rightarrow \neg q$ と元の命題 $p \rightarrow q$ は特に関係がない

* * *

2つの同値

■定義（同値） 2つの命題 p, q に対して、真理値がすべて等しい（真理表が一致する）ということを、 p と q は**同値**であると呼び、

$$p \equiv q$$

と表す

一方、同値にはもう1つの定義がある

■定義（同値） 命題 p と命題 q がお互いに必要十分条件であるとき、言いかえると、 $p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ であるとき、 p と q は**同値**であると呼び、

$$p \Leftrightarrow q$$

と表す

この2つの同値 \equiv と \Leftrightarrow は、実は同じ内容を表している

「 $p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ 」であるというのは、

命題 $p \rightarrow q$ および命題 $q \rightarrow p$ の真理値がすべて 1 である

ということだから、「 p と q の真理値が等しいこと」と「 $p \rightarrow q$ と $q \rightarrow p$ の真理値がどちらも 1 であること」は一致している

したがって、2 つの同値 \equiv と \Leftrightarrow は同じ内容を表していることがわかる

* * *

命題関数

これまで、たとえば「1234567891 は素数である」というような命題を扱ってきた

ここで、たとえば x が自然数全体を動くとき、「 x は素数である」という形の主張を命題関数と呼ぶ

命題は記号 p で表されたのに対し、命題関数は $p(x)$ と書く

命題関数 $p(x)$ は、 x の値に応じて主張が変わり、真理値が変化していく

命題関数 $p(x)$ の x は、変数と呼ばれる

命題関数 $p(x)$ の変数は、実数や自然数のような数以外に、直線とか地図のような数学的対象や一般的概念をとる

* * *

すべての～

命題関数 $p(x)$ に対して、「すべての x について $p(x)$ である」という命題を

$$\forall x p(x)$$

と表す

「すべての～について〇〇である」は、

- 「すべての～は〇〇である」
- 「任意の～について〇〇である」
- 「任意の～は〇〇である」

と表すこともある

\forall という記号は、「all (すべての～)」や「any (任意の～)」の頭文字の A を逆さにしたものに由来する

* * *

変数 x が $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「すべての x について $p(x)$ である」というのは、

$p(a_1)$ であり、かつ、 $p(a_2)$ であり、かつ、 \dots 、
かつ、 $p(a_n)$ である

ということに他ならない

言い換えると、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \dots \wedge p(a_n)$$

ということになる

* * *

ある～

命題関数 $p(x)$ に対して、「ある x について $p(x)$ である」という命題を

$$\exists x p(x)$$

と表す

「ある～について〇〇である」は、

- 「ある～は〇〇である」
- 「ある～が存在して〇〇である」
- 「〇〇であるような～が存在する」

と表すこともある

∃ という記号は、「exists（存在する）」の頭文字の E を逆さにしたもの由来する

* * *

変数 x が $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「ある x について $p(x)$ である」というのは、

$p(a_1)$ であるか、あるいは、 $p(a_2)$ であるか、あるいは、 \dots 、あるいは、 $p(a_n)$ である

ということに他ならない
言い換えると、

$$\exists x p(x) = p(a_1) \vee p(a_2) \vee \dots \vee p(a_n)$$

ということになる

* * *

「すべての～」と「ある～」

「すべての～」と「ある～」の2つの概念の間には**双対性**がある

$$\begin{aligned} \forall x p(x) &= p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \dots \wedge p(a_n) \\ \exists x p(x) &= p(a_1) \vee p(a_2) \vee \dots \vee p(a_n) \end{aligned}$$

という式を比較してみると、「すべての～（ \forall ）」と「ある～（ \exists ）」は、AND（ \wedge ）と OR（ \vee ）の双対性を反映していることがわかる

* * *

\forall と \exists を含んだ式の同値変形

■ \forall と \exists の性質

$$\begin{aligned} \forall x (p(x) \wedge q(x)) &\equiv \forall x p(x) \wedge \forall x q(x) \\ \exists x (p(x) \vee q(x)) &\equiv \exists x p(x) \vee \exists x q(x) \end{aligned}$$

これらはそれぞれ、

- 「すべての～」（ $\forall x$ ）と AND（ \wedge ）
- 「ある～」（ $\exists x$ ）と OR（ \vee ）

が対応していると思って眺めるとよい

* * *

\forall と \exists の否定

「すべての～」（ \forall ）と「ある～」（ \exists ）を含む命題の否定は、次の**ド・モルガンの法則**で与えられる

■ ド・モルガンの法則（述語論理）

$$\begin{aligned} \neg \forall x p(x) &\equiv \exists x \neg p(x) \\ \neg \exists x p(x) &\equiv \forall x \neg p(x) \end{aligned}$$

$\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$ より、

「すべての～について…である」の否定は、「ある～について…でない」

$\neg \exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$ より、

「ある～について…である」の否定は、「すべての～について…でない」

要するに、否定をとると、「すべての～」は「ある～」になり、「ある～」は「すべての～」になる

* * *

述語論理のド・モルガンの法則は、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっている

x が $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ というように、有限個の値

しかとらない場合、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$$

$$\exists x p(x) = p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)$$

であり、

$$\forall x \neg p(x) = \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(a_n)$$

$$\exists x \neg p(x) = \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \cdots \vee \neg p(a_n)$$

であるので、述語論理のド・モルガンの法則は、それぞれ次のように書き換えられる

$$\begin{aligned} \neg(p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)) \\ \equiv \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \cdots \vee \neg p(a_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg(p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)) \\ \equiv \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(a_n) \end{aligned}$$

これらはそれぞれ、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっていることは一目瞭然

* * *

集合

集合とは「ものの集まり」のことであり、その「ものの集まり」に入っているか、あるいは、入っていないかが客観的に判断できるもの

* * *

集合の要素

集合を構成する個々の「もの」を、その集合の**要素**あるいは**元**と呼ぶ

x が集合 A の要素であるとき、 x は A に**含まれる**、あるいは**属する**と言い、記号では $x \in A$ と書く

* * *

集合の表記法

次のような 2 つの方法がある

- $\{x_1, x_2, \cdots\}$ (集合を書き並べる方法：**外延的記法**)
- $\{x \mid x \text{ は条件} \sim \text{を満たす}\}$ (要素になる条件を書く方法：**内包的記法**)

集合では、このように、要素を括弧 $\{\}$ で囲んで記述する

* * *

集合の「等しい」

集合 A と集合 B が**等しい**とは、

A の要素がすべて B の要素であり、かつ、 B の要素がすべて A の要素である

ことを言う

集合 A と集合 B が等しいとき、 $A = B$ と書く

* * *

有限集合と無限集合

集合に含まれる要素の個数が有限個のとき**有限集合**といい、無限個のとき**無限集合**と呼ぶ

* * *

空集合

「要素が 1 つもない集まり」も、1 つの集合とみなして、**空集合**と呼び、記号 \emptyset で表す