行列の積と行列式

行列式の特徴づけから導ける性質として、次が重要である

ref: 行列と行列式の基礎 p164
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p131〜132

行列式の乗法性　$A,\ B$ を同じ型の行列とするとき、

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

証明

B の列ベクトルを $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ とし、次の関数

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = \det(A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$$

を考える

ここで、$\det$ は列ベクトルに対して交代性をもつため、この関数 F も交代性をもつ

また、$\det$ の多重線形性に加え、A による作用は線形写像であるから、F も多重線形性を満たす

よって、多重線形性と交代性による行列式の特徴づけより、

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\det(B)$$

一方、F の引数を単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ にしたもの

$$F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \det(A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n)$$

を考えると、

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) &= \det(A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n) \\ &= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

よって、

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = \det(A)\det(B)$$

ここで、$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ の定義を思い出すと、

$$\det(A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n) = \det(A)\det(B)$$

左辺の行列 $(A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$ は、行列 B の各列ベクトルに対して A を左から作用させたものであり、行列 AB を意味している

したがって、

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

が成り立つ ■

行列式の乗法性を繰り返し適用することで、次の定理が得られる

累乗行列の行列式と行列式の累乗 A, B を正方行列とするとき、任意の自然数 n について、

$$\det(A^n) = \det(A)^n$$