次元定理

ref: 行列と行列式の基礎 p101

⚓ 線形写像の次元定理　$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、次が成り立つ

$$\mathrm{rank}(f) = n - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

証明

A を f の表現行列とし、$\mathrm{rank}(f) = r$ とする

このとき、$\mathrm{Ker}(f)$ の次元は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の自由度 $n - r$ と一致するため、

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}(f) &= n - r \\ &= n - \mathrm{rank}(f) \\ \therefore \quad \mathrm{rank}(f) &= n - \dim \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

となり、定理が成り立つ　■

次元による部分空間の比較

ref: 行列と行列式の基礎 p102

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p41

⚓ 次元による部分空間の比較　K^n の部分空間 V, W につい

て、$V \subseteq W$ ならば、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立するのは、$V = W$ のときに限る

証明

$V \subseteq W$ であることから、基底の延長により、V の基底を延長して W の基底にできるので、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

このとき、$\dim V = \dim W$ であることは、V の基底をこれ以上延長しなくても W の基底にできることを意味する

つまり、$\dim V = \dim W$ ならば、V と W は同じ基底で張られる空間であるので、$V = W$ が成り立つ ■