



射影行列

任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は、 $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ 、 $\mathbf{u}^\perp \in \mathcal{U}^\perp$ を用いて

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{u}^\perp$$

ref: 線形代数セミナー

p5~6

と一意的に分解できる (直和分解)

ここで、 \mathbf{x} の \mathcal{U} への射影を表すのは、 \mathbf{u} である

つまり、 \mathcal{U} への射影とは \mathbf{x} のうち、 \mathcal{U} に含まれる成分 \mathbf{u} だけを取り出す

操作といえる

そこで、部分空間 \mathcal{U} へ射影する写像を $P_{\mathcal{U}}$ とすると、

$$P_{\mathcal{U}}\mathbf{x} = \mathbf{u}$$

このとき、 \mathbf{x} がもともと \mathcal{U} の元である場合は、 $\mathbf{u}^\perp = \mathbf{0}$ の場合と考えて、

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

つまり、射影しても変わらない

$$P_{\mathcal{U}}\mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathcal{U})$$


一方、 \mathbf{x} が \mathcal{U} の直交補空間 \mathcal{U}^\perp の元の場合は、 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ の場合と考えて、

$$P_{\mathcal{U}}\mathbf{x} = \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{x} \in \mathcal{U}^\perp)$$

まとめると、

$$P_{\mathcal{U}}\mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{x} & (\mathbf{x} \in \mathcal{U}) \\ \mathbf{0} & (\mathbf{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

同様に、直交補空間 \mathcal{U}^\perp へ射影する写像を $P_{\mathcal{U}^\perp}$ とすると、

$$P_{\mathcal{U}^\perp}\mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{0} & (\mathbf{x} \in \mathcal{U}) \\ \mathbf{x} & (\mathbf{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$


\mathbb{R}^n が \mathcal{U} と \mathcal{U}^\perp の直和に分解されることから、 \mathbb{R}^n の基底は \mathcal{U} の基底と \mathcal{U}^\perp の基底を合わせたものになる

そこで、部分空間 \mathcal{U} の正規直交基底 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r\}$ を選ぶと、これを \mathbb{R}^n の正規直交基底 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ に拡張できる

ここで、 $\{\mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$ は \mathcal{U}^\perp の正規直交基底になる

このとき、

$$P_{\mathcal{U}} \mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{x} & (\mathbf{x} \in \mathcal{U}) \\ \mathbf{0} & (\mathbf{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

という式は、 $P_{\mathcal{U}}$ が \mathbb{R}^n の正規直交基底

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}\}$$

同様に、

$$P_{\mathcal{U}^\perp} \mathbf{x} = \begin{cases} \mathbf{0} & (\mathbf{x} \in \mathcal{U}) \\ \mathbf{x} & (\mathbf{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

という式は、 $P_{\mathcal{U}^\perp}$ が \mathbb{R}^n の正規直交基底

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する

$$\{\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{r+1}, \dots, \mathbf{u}_n\}$$

ゆえに、正規直交基底による表現行列の展開より、 $P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^\perp}$ は次のように表現できる

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{U}} &= \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^\top + \dots + \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^\top \\ P_{\mathcal{U}^\perp} &= \mathbf{u}_{r+1} \mathbf{u}_{r+1}^\top + \dots + \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^\top \end{aligned}$$

$P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^\perp}$ をそれぞれ、部分空間 \mathcal{U} 、およびその直交補空間 \mathcal{U}^\perp への射影行列と呼ぶ



単位行列の射影行列への分解

直交射影と反射影の章で示した、

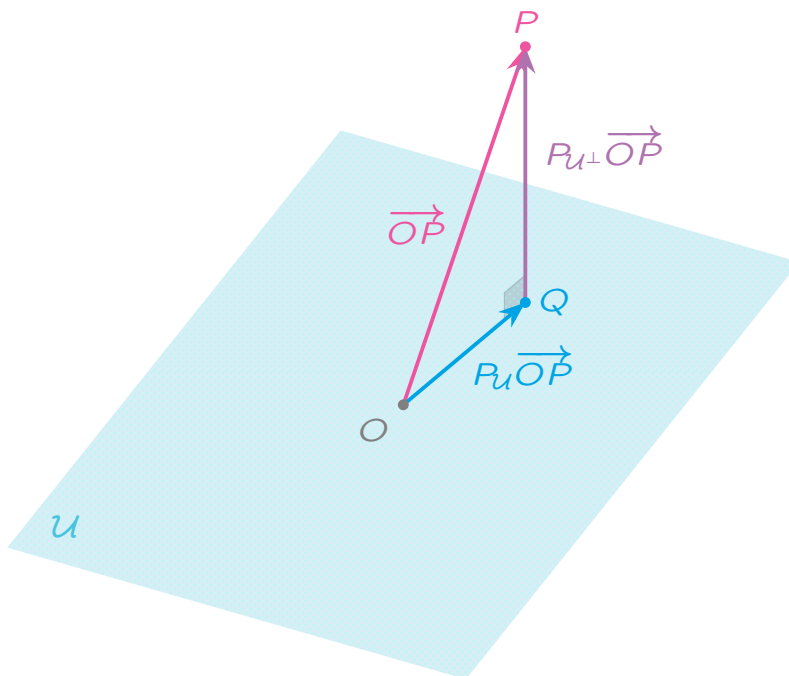
$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OQ} + \vec{QP} \\ \vec{OQ} &\in \mathcal{U}, \quad \vec{QP} \in \mathcal{U}^\perp\end{aligned}$$

ref: 線形代数セミナー

p6

という関係は、射影行列を用いて、次のようにも表せる

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= P_{\mathcal{U}}\vec{OP} + P_{\mathcal{U}^\perp}\vec{OP} \\ &= (P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp})\vec{OP}\end{aligned}$$



\mathbb{R}^n 内のすべての点 P に対して、 $\vec{OP} = (P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp})\vec{OP}$ が成り立つことから、

$$P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp} = E$$

が成り立っている

これはすなわち、単位行列 E が、部分空間 \mathcal{U} その直交補空間 \mathcal{U}^\perp への射影行列の和に分解できることを意味する

$$E = \underbrace{\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^\top + \cdots + \mathbf{u}_r \mathbf{u}_r^\top}_{P_{\mathcal{U}}} + \underbrace{\mathbf{u}_{r+1} \mathbf{u}_{r+1}^\top + \cdots + \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^\top}_{P_{\mathcal{U}^\perp}}$$

この式により、単位行列 E 自体を、空間全体 \mathbb{R}^n への射影行列と考えることもできる



射影行列とノルム

$P_U \vec{OP}$ と $P_{U^\perp} \vec{OP}$ は直交するから、三平方の定理より、

$$\|\vec{OP}\|^2 = \|P_U \vec{OP}\|^2 + \|P_{U^\perp} \vec{OP}\|^2$$

がいえる

ゆえに、任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \vec{OP}$ に対して、

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|P_U \boldsymbol{x}\|^2 + \|P_{U^\perp} \boldsymbol{x}\|^2$$

が成り立つ

ref: 線形代数セミナー

p6~7