直交変換

体 $\mathbb{R}^n$ 上の計量空間において、内積を保つ線形変換を直交変換という

ref: 行列と行列式の基礎 p77〜82

直交変換　体 $\mathbb{R}^n$ 上の計量空間 V における線形変換 f が直交変換であるとは、任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し、

$$(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことである

直交変換は、ベクトルの長さを変えない変換でもある

直交変換とノルム保存性　計量空間 V における線形変換を f が直交変換であることと、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し

$$\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことは同値である

証明

f が直交変換 $\Longrightarrow$ f はノルムを保つ

直交変換の定義より、

$$(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{v}\|^2$$

ここで、$\|f(\boldsymbol{v})\| = \sqrt{(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v}))}$ であるから、

$$\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つ　■

f はノルムを保つ $\Longrightarrow$ f は直交変換

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し、

$$\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つというのが仮定である

そこで、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ とすると、

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|$$

両辺を二乗して、

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|^2$$

このとき、左辺は次のように展開できる

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\
&= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2
\end{aligned}$$

右辺も同様に、

$$\begin{aligned}
&\|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|^2 \\
&\qquad = \|f(\boldsymbol{a})\|^2 + 2(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})) + \|f(\boldsymbol{b})\|^2
\end{aligned}$$

さて、仮定より、$\|f(\boldsymbol{a})\| = \|\boldsymbol{a}\|$ と $\|f(\boldsymbol{b})\| = \|\boldsymbol{b}\|$ が成り立つことから、

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|^2$$

という等式の両辺を展開した結果、残る項は

$$2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}))$$

だけとなる

したがって、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}))$$

が成り立つので、f は直交変換である ■