列ベクトルの線型独立性と非自明解の存在

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の非自明解の存在に対して、次の解釈もできる。

ref: 行列と行列式の基礎 p40〜41

斉次形方程式の非自明解の存在と線形従属　$m \times n$ 型行列 A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ とするとき、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ に自明でない解がある} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属}$$

証明

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は、ベクトルの等式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$$

と同じものである。

$\Longrightarrow$

もし自明でない解があるならば、$x_1, \ldots, x_n$ のうち少なくとも 1 つは 0 ではない。

$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ が成り立つもとで、0 でない係数が存在するということは、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属であることを意味する。 ■

$\Longleftarrow$

対偶を示す。

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立であれば、

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$$

において、すべての係数 $x_1, \ldots, x_n$ は 0 でなければならない。

よって、0 以外の解（非自明解）は存在しないことになる。

■

この命題の否定をとると、

$$Ax = o \text{ には自明解しか存在しない} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形独立}$$

となる。

ここで、斉次形方程式の非自明解の存在条件より、斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ において自明解しか存在しないことは、$\mathrm{rank}(A) = n$、すなわち解の自由度が 0 であることと同値であった。

つまり、次が成り立つことがわかる。

⚓ 列ベクトルの線型独立性と階数　$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とおくと、

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

有限従属性（方程式の視点）

$\mathrm{rank}(A) = n$ が成り立つ条件をさらに言い換えてみよう。

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とおくと、A は $m \times n$ 型行列である。

階数のとりうる値の範囲より、

$$\mathrm{rank}\, A \leq \min(m, n)$$

であるから、もしも列の方が行よりも多い、つまり $n > m$ であれば、$\mathrm{rank}\, A \leq m < n$ となり、$\mathrm{rank}\, A = n$ が成り立つことはない。

よって、次の関係がいえる。

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ に自明でない解がある} &\iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属} \\
&\iff \operatorname{rank} A \neq n
\end{aligned}
$$

ここで n は変数の個数、m は方程式の個数であるので、$n > m$ という状況を次のようにまとめることができる。

> ⚓ **斉次形方程式における有限従属性**　斉次線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ において、変数の個数が方程式の個数よりも多いときには、非自明な解が存在する。

有限従属性（ベクトルの集合における視点）

連立方程式の文脈に限定せず、より抽象的に言い換えたものが次の定理である。

> ⚓ **有限従属性定理**　$\mathbb{R}^m$ 内の m 個よりも多いベクトルからなる集合は線形従属である。

$n > m$ の場合、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ は線形従属となることを述べている。

この結論は、幾何的な直観からは自然だといえる。
たとえば、平面 $\mathbb{R}^2$ 内に 3 つ以上のベクトルがあれば、自動的に線形従属になる。

この事実は、次元の概念を議論する際の基礎となる。