正則行列

ref: 行列と行列式の基礎 p71

正則　線形変換 f は全単射であるとき、正則な線形変換であるという

正則行列　正方行列 A は、それが正則な線形変換を与えるとき、正則行列であるという

「線形代数における鳩の巣原理」から、次のことがいえる

正則の判定と階数　n 次正方行列 A に対して、次は同値である

i. A が正則行列
ii. $\mathrm{rank}(A) = n$

上の定理は、線形変換 f（もしくは正方行列 A）が正則かどうかについて、階数という 1 つの数値で判定できることを示している

正則の判定と線型独立性　n 次正方行列 A に対して、次は同値である

i. $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ が正則
ii. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線型独立

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p71 命題 2.4.4]

逆行列

写像 f が全単射であれば、逆写像 f^{-1} が存在する

ref: 行列と行列式の基礎 p71〜72

逆写像の線形性　f を $\mathbb{R}^n$ の正則な線形変換とするとき、逆写像 f^{-1} は線形である

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p71 問 2.16]

n 次正則行列 A は、正則な線形変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と対応している

逆写像 f^{-1} が存在し、線形であるから、ある n 次正方行列 B が対応するはずである

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ であり、線形写像の合成は行列の積に対応するから、

$$AB = BA = E$$

が成り立つ

このような B を A の逆行列と呼び、A^{-1} と書く

逆行列の一意性　正方行列 A に対して、A の逆行列が存在するならば、それは一意的である

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p71 問 2.17]

逆行列の計算と線形方程式

正則行列 A に対して、方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のただ 1 つの解は次で与えられる

ref: 行列と行列式の基礎 p72〜

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

A^{-1} が計算できれば、行列のかけ算によって線型方程式の解が求められる

正則行列 A の逆行列を計算するために、次の定理に注目しよう

逆行列の計算法の原理　正方行列 A に対して、$AB = E$ を満たす正方行列 B があるならば、A は正則であり、B は A の逆行列である

証明

[Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p72 命題 2.4.6]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	4