# 第 6 章

# 正則な線形変換と逆行列

## 線形変換と逆問題

$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ という形の式は、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の次元が同じならば、連立一次方程式として捉えることができた。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

そして、このような形の連立方程式を解くことは、「$\boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{x}$ を推定する」という逆問題を解くことに相当する。

一方、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ という式は、線形写像を表す式とみることもできる。
特に、$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像 $f$ を $\mathbb{R}^n$ の線形変換と呼ぶのだった。

言い換えると、表現行列 $A$ で表される線形写像 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ が線形変換と呼べるのは、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の次元が同じ場合である。
このように、線形変換と連立一次方程式を関連づけて考えることができる。

# 逆行列

「写り先 $\boldsymbol{y}$ から元の点 $\boldsymbol{x}$ を答える」という写像に対応する行列を逆行列といい、$A^{-1}$ と表す。

この行列 $A^{-1}$ は、

- どんな $\boldsymbol{x}$ を持ってきても、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ならば $A^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$
- どんな $\boldsymbol{y}$ を持ってきても、$A^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

となるような行列である。

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{x} \arrow[r, bend left, "A"] & \boldsymbol{y} \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \end{tikzcd}$$

別の言い方をすると、

- $A$ して $A^{-1}$ したら元に戻る
- $A^{-1}$ して $A$ したら元に戻る

となるような行列 $A^{-1}$ を逆行列として定義する。

**def - 逆行列**

正方行列 $A$ に対して、次式を満たす行列 $X$ を $A$ の逆行列といい、$A^{-1}$ と表す。

$$AX = XE = E$$

# 正則性と全単射性

$A$ の逆行列は、いつでも存在するとは限らない。

**def - 正則（行列の言葉で）**

正方行列 $A$ の逆行列が存在するとき、$A$ は正則であるという。

$A$ の逆行列が存在するには、$A$ が表す写像が全単射である、つまり $A$ によって「潰れない・はみ出さない」ことが必要である。

- 潰れてしまえば、元の $\boldsymbol{x}$ はわからない（単射でない場合）
- はみ出してしまえば、元の $\boldsymbol{x}$ は存在しない（全射でない場合）

**def 6.1 - 正則（写像の言葉で）**

線形変換 $f$ が全単射であるとき、$f$ は正則であるという。正方行列 $A$ が正則な線形変換を与えるとき、$A$ は正則行列であるという。

## 逆写像と逆行列の対応

一般に、写像 $f$ が全単射であれば、逆写像 $f^{-1}$ が存在する。

**theorem - 逆写像の線形性**

$f$ を $\mathbb{R}^n$ の正則な線形変換とするとき、逆写像 $f^{-1}$ は線形である

**証明**

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とし、次の 2 つを示せばよい

i. $f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$
ii. $f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$

(i)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}) \\
\boldsymbol{y} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{y}) \\
\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

また、$f$ は線形写像であるから、

$$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{v})$ は、$f(f^{-1}(\boldsymbol{v}))$ を意味する記号なので、

$$f(f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

両辺を $f^{-1}$ で写すと、

$$f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$$

となり、(i) が示された ■

(ii)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x})) \\
c\boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(c\boldsymbol{x}))
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{x} = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$ の両辺に $c$ をかけた、次も成り立つ

$$c\boldsymbol{x} = cf(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

さらに、$f$ は線形写像であるから、

$$cf(f^{-1}(\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

ここまでの $c\boldsymbol{x}$ の複数の表現により、次式が成り立つ

$$f(f^{-1}(c\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

両辺を $f^{-1}$ で写すと、

$$f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$$

となり、(ii) が示された ■

$n$ 次正則行列 $A$ は、正則な線形変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と対応している。

逆写像 $f^{-1}$ が存在し、線形であるから、ある $n$ 次正方行列 $B$ が対応するはずである。

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ であり、線形写像の合成は行列の積に対応するから、

$$AB = BA = E$$

が成り立つ。

このように、逆写像の性質から、逆行列の定義式を導くこともできる。

## 逆行列の一意性

逆行列は、存在するとしてもただ 1 つしか存在しない。

**theorem - 逆行列の一意性**

正方行列 $A$ に対して、$A$ の逆行列が存在するならば、それは一意的である。

証明

$A$ の逆行列が $B_1$ と $B_2$ の 2 つあるとする。

$$AB_1 = B_1A = E \quad \text{かつ} \quad AB_2 = B_2A = E$$

$AB_2 = E$ の両辺に $B_1$ をかけると、

$$B_1 = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2$$

よって、$B_1 = B_2$ となり、逆行列は一意的である。 ■

## 逆行列による連立一次方程式の解

正則行列 $A$ に対して、方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のただ 1 つの解は次で与えられる。

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

これが「ただ 1 つ」の解といえるのは、係数行列 $A$ が与えられれば、その逆行列 $A^{-1}$ は一意的に定まるからである。

つまり、$A$ が正則行列であり、その逆行列 $A^{-1}$ が求まれば、行列のかけ算によって連立一次方程式の解が求められる。

## 行列の演算と逆行列

### 逆行列の逆行列

「$A$ の取り消し」を取り消すには、$A$ すればよい。

**theorem 6.1 – 逆行列に対する逆行列**

正則行列 $A$ の逆行列 $A^{-1}$ は正則であり、その逆行列は $A$ である。

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

**証明**

$A$ の逆行列が $A^{-1}$ であることから、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

この式は、$A^{-1}$ が正則であり、その逆行列が $A$ であることを示す式でもある。 ■

### 行列の積の逆行列

「$B$ して $A$ したもの」を元に戻すには、まず $A$ を取り消してから $B$ を取り消す必要がある。

**theorem 6.2 - 正則行列の積に対する逆行列**

正則行列 $A$, $B$ の積 $AB$ は正則であり、その逆行列は次のようになる。

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

証明

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AEA^{-1} \\ &= E\end{aligned}$$

であり、同様に

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B \\ &= B^{-1}EB \\ &= E\end{aligned}$$

であるので、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ。 ■

## 転置行列の正則性

**theorem 6.3 - 正則行列の転置の正則性**

正則行列 $A$ に対して、その転置行列 ${}^tA$ も正則である。

証明

$A$ が正則であることから、その逆行列 $A^{-1}$ が存在し、

$$A^{-1}A = E$$

両辺の転置をとると、右辺の単位行列は転置しても単位行列であり、左辺には theorem 6.2「正則行列の積に対する逆行列」を用いて、

$$^t(A^{-1}A) = {}^tA{}^t(A^{-1}) = E$$

この等式より、$^tA$ の逆行列は $^t(A^{-1})$ であることがわかる。 ■

## 三角行列の正則性

**theorem – 上三角行列の正則性**

対角成分がすべて 0 でない上三角行列は正則である。

証明

[ Todo 1: book: 行列と行列式の基礎 p74 命題 2.4.9]

**theorem 6.4 – 正則な上三角行列の逆行列**

正則な上三角行列は、その逆行列も上三角行列である。

証明

[ Todo 2: ]

正則な上三角行列と関連して、次の事実が成り立つ。

**⚓ theorem – 行基本変形と対角行列**

正則行列 $A$ に対して、行のスカラー倍以外の行基本変形を繰り返し行って対角行列にできる。

証明

[ Todo 3: book: 行列と行列式の基礎 p75 命題 2.4.12]

## 正則行列と対角行列

[ Todo 4: book: プログラミングのための線形代数 p46〜47]

**⚓ theorem 6.5 – ブロック対角行列の正則性**

次のようなブロック対角行列 $M$ において、対角ブロック $A,\ B$ が正則であれば、$M$ も正則である。

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} l & n-l \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right) & \begin{array}{c} l \\ n-l \end{array} \end{array}$$

証明

$A$ と $B$ が正則であるから、逆行列 $A^{-1}$ と $B^{-1}$ が存在する。

それらを用いて、次のような積を考える。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AA^{-1} & O \\ O & BB^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_l & O \\ O & E_{n-l} \end{pmatrix} \\ &= E_n \end{aligned}$$

この等式は、$M$ の逆行列の存在を示している。

$$M \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = E_n$$

つまり、対角ブロックがそれぞれ正則であれば、それらの逆行列を並べることで全体の逆行列が構成できる。

このようにして、$M$ が正則であることがわかる。 ■

## Zebra Notes

| Type | Number |
|---|---:|
| todo | 4 |