第 1 章

複素行列と対角化

転置行列と随伴行列

複素正方行列 A の転置行列において、各成分をその共役複素数に置き換えた行列を随伴行列という

随伴行列　複素正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し、$\overline{a_{ji}}$ を (i, j) 成分にもつ行列 ${}^t\overline{A}$ を A の随伴行列といい、A^* と表す

実数 x の複素共役は $\overline{x} = x$ であるので、A が実行列のときは、

$$A^* = {}^tA$$

すなわち、

> 実行列の世界では、随伴行列は転置行列

にすぎない

転置と似た性質

転置を二回行うと元に戻ることと同様に、次が成り立つ

随伴行列の自己反転性　複素正方行列 A に対し、随伴行列を二回とると元に戻る

$$(A^*)^* = A$$

証明

随伴行列の定義より、

$$(A^*)^* = {}^t\overline{A^*} = {}^t\overline{{}^t\overline{A}}$$

$A = (a_{ij})$ とすると、A の各成分を共役複素数にした行列は、

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

これを転置すると、

$${}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$$

さらに、もう一度各成分の複素共役をとると、

$$\overline{{}^t\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji})$$

したがって、

$$(A^*)^* = {}^t\overline{{}^t\overline{A}} = (a_{ij}) = A$$

が成り立つ　■

積に対するエルミート共役の順序反転性　複素行列 A B の積 AB が定義できるとき、

$$(AB)^* = B^*A^*$$

証明

[Todo 1:]

随伴による内積の表現

標準内積は、随伴を用いて表現することもできる

随伴による標準内積の表現

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}$$

証明

標準内積の対称性より、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$$

ここで、右辺の内積を転置を用いて表すと、

$$\overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} = \overline{\boldsymbol{b}^\top \cdot \overline{\boldsymbol{a}}} = \overline{\boldsymbol{b}^\top} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{a}}} = \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}$$

よって、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} = \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}$$

が成り立つ ■

随伴公式

随伴行列と標準内積は、次のような関係で結ばれる

随伴公式　複素行列 A と計量空間上のベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

証明

転置を用いて内積を表すと、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\overline{\boldsymbol{v}}$$

転置と行列積の順序反転性より、${}^t(A\boldsymbol{u}) = {}^t\boldsymbol{u}{}^tA$ なので、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ({}^t\boldsymbol{u}{}^tA)\overline{\boldsymbol{v}}$$

行列の積の結合法則を用いて、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}({}^tA\overline{\boldsymbol{v}})$$

ここで、$\overline{{}^t\overline{A}}$ は、$A = (a_{ij})$ とすると、

1. $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$
2. ${}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$
3. $\overline{{}^t\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji}) = {}^tA$

となり、${}^tA$ と一致する

これを用いて書き換えると、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}(\overline{{}^t\overline{A}}\overline{\boldsymbol{v}})$$

複素共役の積の性質 $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ を用いて、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}\overline{{}^t\overline{A}\boldsymbol{v}}$$

この時点で、右辺を内積として書き直すと、$A\boldsymbol{v}$ の複素共役がなくなることに注意して、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, {}^t\overline{A}\boldsymbol{v})$$

随伴行列の定義 $A^* = {}^t\overline{A}$ より、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

となり、目的の等式が得られた　■

ユニタリ行列と直交行列

ユニタリ行列　複素正方行列 A が次を満たすとき、A を**ユニタリ行列**という

$$A^* = A^{-1}$$

ユニタリ行列と内積

2 つのベクトルそれぞれにユニタリ行列を左からかけても、それらの内積は変わらない

ユニタリ行列の特徴づけとしての内積不変性　n 次複素行列 A がユニタリ行列であることと、任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことは同値である

証明

ユニタリ行列ならば内積を保つ

随伴公式より、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*A\boldsymbol{v})$$

ここで、A がユニタリ行列であることは、

$$A^*A = E$$

と言い換えられるので、これを用いると、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つ　■

内積を保つならばユニタリ行列

転置を用いて内積を表すと、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\overline{(A\boldsymbol{v})}$$
$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}\overline{\boldsymbol{v}}$$

これらが一致するというのが仮定なので、

$${}^t(A\boldsymbol{u})\overline{(A\boldsymbol{v})} = {}^t\boldsymbol{u}\overline{\boldsymbol{v}}$$

この関係を用いて、行列 ${}^tA\overline{A}$ の (i, j) 成分を考えると、

$$\begin{aligned} {}^t(A\boldsymbol{e}_i)\overline{(A\boldsymbol{e}_j)} &= {}^t\boldsymbol{e}_i\overline{\boldsymbol{e}_j} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

となり、これはすなわち、

$${}^tA\overline{A} = E$$

よって、両辺の複素共役をとることで、

$$A^*A = E$$

を得る

したがって、A はユニタリ行列である ■

この定理において、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ の場合を考えると、ユニタリ行列とノルムに関する性質が導かれる

ユニタリ行列とノルム

ユニタリ行列を左からかけても、ベクトルのノルムは変わらない

⚓ **ユニタリ行列の特徴づけとしてのノルム不変性**　n 次複素行列 A がユニタリ行列であることと、任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことは同値である

証明

A がユニタリ行列であることと、任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことは同値であった

ここで、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ とすると、

$$(A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことになり、ノルムの定義より、

$$\|A\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2$$

すなわち、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

がしたがう ■

ユニタリ行列と直交性

A が実正方行列のときは、

$$A \text{ がユニタリ行列} \iff {}^tA = A^{-1}$$

となり、このような A は直交行列と呼ばれる

直交行列　実正方行列 A が次を満たすとき、A を直交行列という

$${}^tA = A^{-1}$$

直交行列という名前の由来は、次のように考えられる

A を n 個の列ベクトルを横一列に並べたものとみなし、

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

とおくと、${}^tA = A^{-1}$、すなわち ${}^tAA = E$ は、

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

と表される

これは、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ が、次の性質

$${}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$$

を満たすことを意味する

すなわち、直交行列 A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n$ は、互いに直交する単位ベクトルである

この事実は、複素行列に対しても成立する

ユニタリ行列の列ベクトルの直交正規性　複素正方行列 A を $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ と列ベクトル分解するとき、

$$A \text{ がユニタリ行列} \iff (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$$

すなわち、ユニタリ行列の列ベクトルは、互いに直交する単位ベクトルである

証明

A がユニタリ行列であることは、任意の $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことと同値であった

ここで、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$ とすると、

$$(A\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$$

が成り立つことになる

左辺の $A\boldsymbol{e}_i$ について考えると、

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{e}_i &= (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ &= \boldsymbol{a}_i \end{aligned}$$

$A\boldsymbol{e}_j$ についても同様なので、

$$\begin{aligned} (A\boldsymbol{e}_i, A\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} \\ \therefore \quad (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} \end{aligned}$$

となり、A がユニタリ行列であることは、$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ へと同値変形できる ■

ユニタリ行列と随伴・転置

⚓ **ユニタリ行列の随伴不変性**　ユニタリ行列 U の随伴行列 U^* もユニタリ行列である

証明

随伴行列を二回とると元に戻るので、

$$(U^*)^* = U$$

また、ユニタリ行列の定義より、

$$U^* = U^{-1}$$

したがって、

$$\begin{aligned} (U^*)^* &= U \\ U &= (U^*)^{-1} \end{aligned}$$

すなわち、

$$U^* = (U^*)^{-1}$$

となるので、U^* もユニタリ行列である ■

上の定理は、実行列の世界では、次の定理に対応する

直交行列の転置不変性　直交行列 Q の転置行列 ${}^tQ$ も直交行列である

エルミート行列と対称行列

エルミート行列　複素正方行列 A が次を満たすとき、A をエルミート行列という

$$A^* = A$$

A が実正方行列のときは、

$$A \text{ がエルミート行列} \iff {}^tA = A$$

となり、このような A は対称行列、あるいは実対称行列と呼ばれる

エルミート行列の固有値

行列の成分が実数であっても、特性方程式の根は一般には実数とは限らない

つまり、固有値は一般には複素数であるが、エルミート行列については次が成り立つ

エルミート行列の固有値の実数性　エルミート行列の固有値はすべて実数である

証明

エルミート行列 A の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とし、その固有値を $\alpha \in \mathbb{C}^n$ とすると、

$$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v}$$

より、次が成り立つ

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= (\alpha\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \\ &= \alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})\end{aligned}$$

一方、随伴公式から、次のようにも書ける

$$(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, A^*\boldsymbol{v})$$

A がエルミート行列であることから、$A^* = A$ なので、

$$\begin{aligned}(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) \\ &= (\boldsymbol{v}, \alpha\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

内積の共役線形性に注意して、

$$(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

ここまでで得られた $(A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ の 2 通りの表現をまとめると、

$$\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

移項して、

$$(\alpha - \overline{\alpha})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$$

ここで、$\boldsymbol{v}$ は固有ベクトルなので、$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ である

よって、$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \neq 0$ で両辺を割ることができ、次を得る

$$\alpha = \overline{\alpha}$$

すなわち、α は実数である ■

エルミート行列では、固有値が実数であることがうまく活きて、次の性質も成り立つ

エルミート行列の固有値の直交性　エルミート行列の相異なる固有値を持つ固有ベクトルは直交する

すなわち、エルミート行列 A の固有ベクトル $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}$ がそれぞれ固有値 $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^n$ を持つとし、$\alpha \neq \beta$ ならば、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

が成り立つ

証明

固有値と固有ベクトルの定義より、

$$A\boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{u}$$
$$A\boldsymbol{v} = \beta\boldsymbol{v}$$

が成り立つ

一方、随伴公式より、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

であるが、A はエルミート行列なので、$A^* = A$ が成り立つ

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v})$$

先ほどの固有値と固有ベクトルの関係を代入して、

$$(\alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \beta\boldsymbol{v})$$

ここで、$\alpha,\ \beta$ は実数なので、内積の共役線形性を考慮しても、

$$\alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \beta(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

として、スカラーをそのまま外に出すことができる

よって、

$$(\alpha - \beta)(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

であるが、$\alpha \neq \beta$ なので、$(\alpha - \beta) \neq 0$ で両辺を割ることができ、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

を得る ■

エルミート行列の対角化に向けた考察

H を n 次エルミート行列とすると、その固有値は n 個の実数として $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ とおける

そして、α_i に属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ をとると、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ はどの 2 つも互いに直交する

そこで、それぞれを次のように正規化する

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{v}_i}{\|\boldsymbol{v}_i\|} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

すると、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は互いに直交する単位ベクトルであるので、

$$U = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$$

とおけば、U はユニタリ行列となる

$\boldsymbol{u}_i$ は H の各固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ をスカラー倍したものなので、

$$H\boldsymbol{u}_i = \alpha_i \boldsymbol{u}_i$$

という関係が成り立つ

つまり、U の列ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ はそれぞれ H の固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に属する固有ベクトルである

さらに、ユニタリ行列はその定義から明らかに正則行列であるので、対角化行列の列ベクトルと固有ベクトルの対応を振り返ると、

> エルミート行列はユニタリ行列を用いて対角化できる

という「予感」がしてくる

まだ「予感」としかいえないのは、エルミート行列の固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が重複している可能性があるからである

正規行列

エルミート行列の対角化について議論するために、エルミート行列・ユニタリ行列を含むより包括的な概念として正規行列を導入する

正規行列　複素正方行列 A が次を満たすとき、A を正規行列という

$$AA^* = A^*A$$

正規行列の例

A をエルミート行列とすると、$A^* = A$ なので、

$$AA^* = A^2$$
$$A^*A = A^2$$

となり、正規行列の定義を満たす

エルミート行列の正規行列性　エルミート行列は正規行列である

また、A をユニタリ行列とすると、$A^* = A^{-1}$ なので、

$$AA^* = AA^{-1} = E$$
$$A^*A = A^{-1}A = E$$

となり、こちらも正規行列の定義を満たす

ユニタリ行列の正規行列性　ユニタリ行列は正規行列である

正規行列の性質

正規行列と随伴によるノルム保存性　複素正方行列 A が正規行列であることは、任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|A^*\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことと同値である

証明

[Todo 2: book: 行列と行列式の基礎 p262 問 6.9 (1)]

正規行列における固有ベクトルの随伴対応　A を正規行列とするとき、$\boldsymbol{v}$ が A の固有値 α の固有ベクトルならば、$\boldsymbol{v}$ は A^* の固有値 $\overline{\alpha}$ の固有ベクトルである

すなわち、

$$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} \Longrightarrow A^*\boldsymbol{v} = \overline{\alpha}\boldsymbol{v}$$

証明

[Todo 3: book: 行列と行列式の基礎 p262 問 6.9 (2)]

正規行列の対角化

A の固有値 α に属する線型独立な固有ベクトルがちょうど k 個存在することは、

$$\dim\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\} = k$$

と表せる

これは、固有値 α の固有空間の次元が k であること、噛み砕くと、固有値 α の固有ベクト

ル $\boldsymbol{x}$ の集合が部分空間であり、k 個の固有ベクトルがこの部分空間の基底を成す（線型独立である）ことを意味する

固有空間は核空間 $\mathrm{Ker}(A-\alpha E)$ と定義されるため、この次元が k であることは、次のようにも書ける

$$\dim \mathrm{Ker}(A-\alpha E) = k$$

正規行列について、一般に次が成り立つ

正規行列における固有空間の次元と固有値の重複度の一致　n 次複素正方行列 A が正規行列であるとき、$\Phi_A(x)$ における固有値 α の重複度 k について、次の等式が成り立つ

$$k = n - \mathrm{rank}(A-\alpha E)$$

次元定理を用いて言い換えると、α の固有空間 $W(\alpha)$ について、

$$\dim W(\alpha) = k$$

が成り立つ

証明

$l = n - \mathrm{rank}(A-\alpha E)$ とおく（l が重複度 k に等しいことを示すことが目標）

すなわち、

$$\mathrm{rank}(A-\alpha E) = n - l$$

であると仮定する

また、固有値 α の固有ベクトルは、斉次形方程式

$$(A-\alpha E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の非自明解である

この方程式の解空間は $\mathrm{Ker}(A-\alpha E)$ であるが、次元定理より、

$$\dim \mathrm{Ker}(A-\alpha E) = n - \mathrm{rank}(A-\alpha E) = l$$

であるので、$\mathrm{Ker}(A-\alpha E)$ は次元 l の部分空間である

すなわち、方程式 $(A-\alpha E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を満たす l 個の線型独立なベクトルが存在する

これらを $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ とすると、これらはすべて固有値 α の固有ベクトルである

これらが正規直交系でない場合は、グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交系に変換し、それを改めて $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ とする

次に、これら l 個のベクトルを補う形で、正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{v}_{l+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を作る

これらを用いて、行列 U を

$$U = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l, \boldsymbol{v}_{l+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$

とおくと、U はユニタリ行列である

さらに、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ は A の固有値 α に属する固有ベクトルであることから、

$$U^{-1}AU = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad l \quad} & \overleftrightarrow{\quad n-l \quad} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \alpha & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \\ \updownarrow n-l \end{array} \end{array}$$

ユニタリ行列 U の定義より、$U^{-1}=U^*$ が成り立つので、

$$U^*AU = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad l \quad} & \overleftrightarrow{\quad n-l \quad} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \alpha & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \\ \updownarrow n-l \end{array} \end{array}$$

ここで、両辺の随伴行列をつくることを考える

左辺は、積の随伴行列をつくると積の順序が入れ替わることに注意して、

$$(U^*AU)^* = U^*A^*(U^*)^* = U^*A^*U$$

右辺は、転置してから各成分を共役複素数に置き換えればよいので、

$$U^*A^*U = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{\quad l \quad} & \xleftrightarrow{\quad n-l \quad} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{\alpha} & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \overline{\alpha} & \\ \hline & B^* & & C^* \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \updownarrow n-l \end{array} \end{array}$$

一方、A が正規行列であることから、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ は、A^* の固有値 $\overline{\alpha}$ に属する固有ベクトルでもあるので、

$$U^{-1}A^*U = U^*A^*U = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{\quad l \quad} & \xleftrightarrow{\quad n-l \quad} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{\alpha} & & & \\ & \ddots & & B' \\ & & \overline{\alpha} & \\ \hline & O & & C' \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \updownarrow n-l \end{array} \end{array}$$

とも表せる

ここで、B と C は $l \times (n-l)$ 型行列、B' と C' は $(n-l) \times l$ 型行列であり、型が一致するので成分を比較できる

よって、

$$B^* = O, \quad C^* = C'$$

0 の複素共役は 0 であることから、$B^* = O$ より、

$$B = O$$

がしたがう

このことをふまえて、あらためて U^*AU を表すと、

$$U^*AU = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{\quad l \quad} & \xleftrightarrow{\quad n-l \quad} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \alpha & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \updownarrow n-l \end{array} \end{array}$$

となる

ここで、A と U^*AU の特性多項式は一致するので、実際に計算すると、

$$\begin{aligned}
\det(xE - A) &= \det(xE - U^*AU) \\
&= \left|\begin{array}{ccc|c} x-\alpha & & & \\ & \ddots & & O \\ & & x-\alpha & \\ \hline & O & & xE_{n-l} - C \end{array}\right| \\
&= \left|\begin{array}{ccc} x-\alpha & & \\ & \ddots & \\ & & x-\alpha \end{array}\right| \det(xE_{n-l} - C) \\
&= (x-\alpha)^l \det(xE_{n-l} - C)
\end{aligned}$$

また、$\alpha E - U^*AU$ を考えると、

$$\alpha E - U^*AU = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad l \quad} & \overleftrightarrow{\quad n-l \quad} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & 0 & \\ \hline & O & & \alpha E_{n-l} - C \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \updownarrow n-l \end{array}$$

より、

$$\operatorname{rank}(\alpha E - U^*AU) = \operatorname{rank}(\alpha E_{n-l} - C)$$

ここで、A と U^*AU は相似な行列であり、相似な行列の固有値（特性方程式の根）は重複度も含めて一致するので、

$$\operatorname{rank}(\alpha E - U^*AU) = \operatorname{rank}(\alpha E - A) = n - l$$

よって、

$$\operatorname{rank}(\alpha E_{n-l} - C) = n - l$$

つまり、$\alpha E_{n-l} - C$ は行列の階数が次数 $n - l$ に等しいので、正則行列である

ゆえにその行列式は、

$$\det(\alpha E_{n-l} - C) \neq 0$$

となることから、$x = \alpha$ は方程式 $\det(xE_{n-l} - C) = 0$ の解ではないことがわかる

よって、$\det(xE-A)=0$ の解 $x=\alpha$ は、$(x-\alpha)^l$ の部分から現れることになるため、$x=\alpha$ は l 重解である

したがって、α の重複度 k は l に等しいことが示された ■

固有空間の次元と重複度が一致すれば対角化可能であることから、正規行列は対角化可能である

さらに、上の定理の証明過程から、正規行列はユニタリ行列によって対角化できることもわかる

正規行列のユニタリ対角化　複素正方行列 A について、A が正規行列であることと、A がユニタリ行列を用いて対角化できることは同値である

証明

正規行列 $\Longrightarrow$ ユニタリ行列を用いて対角化可能

正規行列における固有空間の次元と固有値の重複度の一致の定理の証明過程より明らか ■

ユニタリ行列を用いて対角化可能 $\Longrightarrow$ 正規行列

A がユニタリ行列 U を用いて、次のように対角化されたとする

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n\end{pmatrix}$$

このとき、両辺に左から U をかけ、右から U^* をかけると、ユニタリ行列の定義より $U^*U=UU^*=E$ であることから、

$$A=U\begin{pmatrix}\alpha_1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n\end{pmatrix}U^*$$

と変形できる

よって、A^* は、積の随伴行列をつくると積の順序が入れ替わることに注意して、

$$\begin{aligned} A^* &= (U^*)^* \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

以上をふまえて、AA^* と A^*A をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} AA^* &= U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} U^*U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} \alpha_1\overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n\overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^*A &= U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1}\alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n}\alpha_n \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

となり、$\alpha_i\overline{\alpha_i} = \overline{\alpha_i}\alpha_i$ なので、たしかに、

$$AA^* = A^*A$$

が成り立つ

これは、A が正規行列であることを意味する ■

実対称行列の対角化

エルミート行列は正規行列なので、次のことがいえる

⚓ **エルミート行列のユニタリ対角化**　エルミート行列はユニタリ行列を用いて対角化できる

この定理を実行列の世界にもってくると、次のようになる

⚓ **実対称行列の直交対角化**　実対称行列は直交行列を用いて対角化できる

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	3