読書ノート：大学数学 ほんとうに必要なのは「集合」

tomixy

2025 年 5 月 20 日

目次

命題関数

たとえば「α は整数である」という命題は、α が決まらなければ正しいか正しくないかは判断できない

- $\alpha = 1$ のときは「1 は整数である」という正しい命題
- $\alpha = 2.5$ のときは「2.5 は整数である」という正しくない命題

文字が一つ確定すると命題が一つ定まるというシステムを関数と捉えて**命題関数**という

> **■定義（命題関数）**　文章中に変数を含み、その変数を定めるごとに命題になる文章を**命題関数**という

命題関数が正しいかどうかは、あらゆる変数をすべて入れていき、その都度作られる命題がすべて正しい場合と定義される

> **■定義（命題関数が正しいとは）**　命題関数が正しいとは、含まれる変数を定めるごとに決まる命題が全て正しいということ

証明の方法

ある事柄が証明できるということは、「ある事柄が公理から導ける」ということ

「導く」という部分は厳密には**推論する**といわれる

導くことを、$\rightarrow$ を使って表現したりする

$\Rightarrow$ と $\rightarrow$ は本質的には違うもの

- 前者は論理演算子であり、新しい命題を作るための記号
- 後者は証明に必要な推論を表す記号で、論理式から論理式を「導く」ための記号

＊　＊　＊

対偶法

対偶法は「対偶は真偽が変わらない」ということを利用した証明方法

Mr. A「ゾウさんはみんな鼻が長いね」

Ms. B「だって鼻が長くなかったら象じゃないでしょ！」

前提条件（⇒ の前）が式にしにくかったり複雑な問題のときは、対偶をとってみるとよい

＊　＊　＊

背理法

最終的に否定することを期待して正しいと仮定した事柄から矛盾を導くという証明方法を背理法という

Mr. A　B ってモテるよね

Mr. B　そう？

Mr. A　だってモテない人はバレンタインにチョコ 10 個ももらえないよ

この論法の流れを詳しく見てみると、

仮定　B はモテない

事実　B はバレンタインにチョコを 10 個もらった

矛盾　モテない人はバレンタインにチョコを一切もらえない

結論　B はモテる

背理法は、$p \Rightarrow q$ が真であることを証明したいときに $p \land \neg q$ が偽であることを証明するという構造になっている

■背理法の原理　$p \land \neg q$ が偽であることと $p \Rightarrow q$ が真であることは同じである

1. 証明 p92

背理法の考え方は統計学の検定という分野でも使われていて、現代社会で大活躍している

＊　＊　＊

数学的帰納法

ドミノ倒しの理屈を考えてみる

1. 最初のドミノは人間の手で倒すから必ず倒れる
2. 一つ前のドミノが倒れたら、必ず次のドミノに当たって倒れるように配置されている

つまり、ドミノが全て倒れるためには、

1. 最初のドミノを手で倒す必要がある
2. 前が倒れたら後ろも倒れるように配置する必要がある

より一般化して述べると、次の 2 つが認められれば全て成り立つという証明方法が数学的帰納法

1. 初めは成り立つ
2. どの連続した 2 つも、前が成り立つなら後ろも成り立つ

述語論理

命題関数は、述語とも呼ばれる

述語は、変数がとりうる値の範囲とセットで考える

■定義（自由変数、変域）　命題関数 $P(x)$ について、代入する x のことを**自由変数**といい、自由変数がとりうる範囲を**変域**という

全称記号、存在記号

集合とは

「何かしらの対象」と「何かしらの集まり」としておけば、汎用性が高いまま抽象的な議論ができる点が集合を勉強する意義

■定義　何かしらの対象の集まりを**集合**といい、その集合に入る何かしらの対象を**元**という

■定義（空集合）　何も含まれていない集まりのことを**空集合**といい、ϕ で表す

任意の対象は、「ある集合 A の元」か「ある集合 A の元でない」かどちらかが考えられる

■定義　集合 A があるとする。このとき、ある対象 a が集合 A に入ることを $a \in A$ と表し、a が集合 A に入らないことを $a \notin A$ と表す

集合は、どんなものが集まっているかを表すために、{ 元 | 条件 } という書き方をする

$$（偶数の集合）= \{y \mid y = 2m, m \in \mathbb{Z}\}$$

集合同士の関係

補集合

たとえば「スマホを持っている人」の集合を考えると、「スマホを持っていない人」の集合も自然と考えることができる

■定義（補集合）　集合 A に対して A の元でないものの集合 $\{x \mid x \notin A\}$ を集合 A の**補集合**といい、A^c とかく

積集合

写像

数学の構造的視点

ToDo