正則性と全単射性

A の逆行列は、いつでも存在するとは限らない。

正則（行列の言葉で）　正方行列 A の逆行列が存在するとき、A は正則であるという。

A の逆行列が存在するには、A が表す写像が全単射である、つまり A によって「潰れない・はみ出さない」ことが必要である。

- 潰れてしまえば、元の $\boldsymbol{x}$ はわからない（単射でない場合）
- はみ出してしまえば、元の $\boldsymbol{x}$ は存在しない（全射でない場合）

正則（写像の言葉で）　線形変換 f が全単射であるとき、f は正則であるという。正方行列 A が正則な線形変換を与えるとき、A は正則行列であるという。

逆写像と逆行列の対応

一般に、写像 f が全単射であれば、逆写像 f^{-1} が存在する。

ref: 行列と行列式の基礎 p71～72

逆写像の線形性　f を $\mathbb{R}^n$ の正則な線形変換とするとき、逆写像 f^{-1} は線形である

証明

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とし、次の 2 つを示せばよい

i. $f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$
ii. $f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$

(i)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{y} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\end{aligned}$$

また、f は線形写像であるから、

$$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{v})$ は、$f(f^{-1}(\boldsymbol{v}))$ を意味する記号なので、

$$f(f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

両辺を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$$

となり、(i) が示された ■

(ii)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x})) \\ c\boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(c\boldsymbol{x}))\end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$ の両辺に c をかけた、次も成り立つ

$$c\boldsymbol{x} = cf(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

さらに、f は線形写像であるから、

$$cf(f^{-1}(\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

ここまでの $c\boldsymbol{x}$ の複数の表現により、次式が成り立つ

$$f(f^{-1}(c\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

両辺を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$$

となり、(ii) が示された ■

n 次正則行列 A は、正則な線形変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と対応している。逆写像 f^{-1} が存在し、線形であるから、ある n 次正方行列 B が対応するはずである。

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ であり、線形写像の合成は行列の積に対応するから、

$$AB = BA = E$$

が成り立つ。このように、逆写像と対応する行列として、逆行列の定義を与えることができる。