連立一次方程式を解く

方程式を解くということは、次のような問題に答えることである

ref: 行列と行列式の基礎 p25

A. 解は存在するか？
B. 解が存在する場合、それはただ 1 つの解か？
C. 解が複数存在する場合は、どれくらい多く存在するのか？
D. 解全体の集合を以下にしてわかりやすく表示できるか？

拡大係数行列と解の存在条件

A を m 行 n 列の行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とし、線形方程式

ref: 行列と行列式の基礎 p31〜32

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を考える

これは、n 個の文字に関する m 本の連立方程式である

$\boldsymbol{x}$ は未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を成分とするベクトルである

このとき、A は方程式の係数行列と呼ばれる

A の右端に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を追加して得られる m 行 $(n+1)$ 列の行列

$$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$$

を考えて、これを拡大係数行列という

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合、つまり

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の形の線形連立方程式は斉次形であるという

斉次形の場合は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が明らかに解になっていて、これを自明解という

したがって、自明解以外に解が存在するかどうかが基本的な問題である

まず、一般の $\boldsymbol{b}$ の場合の解の存在（問題 A）について考える

$\tilde{A}$ は A の右端に 1 列追加して得られるので、掃き出しの過程を考えると、$\mathrm{rank}(\tilde{A})$ は $\mathrm{rank}(A)$ と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかであることがわかる

解の存在条件　A を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする
$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ とおくとき、

$$\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A) \Longleftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p31 （定理 1.5.1）]

解の存在条件の系　A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$^\forall\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する} \Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) = m$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p32 （定理 1.5.2, 1.5.3）]

右端の列に主成分がない場合は、一般には無数個の解が存在する

解の集合が直線を成していたり、もっと高い次元の図形になっていることがある

解が 1 つに定まらない場合は、解の全体像を知ることが方程式を「解く」ことになる

一般解のパラメータ表示

係数行列 A の n 個の列が、n 個の変数に対応していることを思い出そう

ref: 行列と行列式の基礎 p33〜36

主変数と自由変数　行列 A を行基本変形により行階段形にしたとき、主成分がある列に対応する変数を主変数と呼び、それ以外の変数を自由変数と呼ぶ

解が存在する場合には、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

という形の一般解の表示（問題 D の答え）が得られる

ここで、r は行列 A の階数である

自由変数、すなわちパラメータの個数を解の自由度と呼ぶ

$$\begin{aligned}\text{解の自由度} &= (\text{変数の個数}) - \mathrm{rank}(A) \\ &= n - r\end{aligned}$$

これは、解全体の集合が何次元の空間なのかを表している（問題 C の答え）

解の一意性

ここまでの議論で、問題 B が解決している

ref: 行列と行列式の基礎 p37〜

解の一意性　$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するとき、

$$\text{解が一意的である} \iff \operatorname{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p37 （定理 1.5.8）]

斉次形の場合の非自明解の存在問題も解決している

斉次形の非自明解の存在条件　斉次形の方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において、

$$\text{自明解しか存在しない} \iff \operatorname{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性は、それ以外の解がないということである ■

自由変数を $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ とするとき、一般解の表示

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

の j_k 番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる

このことから、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の $n-r$ 個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる

この事実は、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^m$ が線形独立であると表現される

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	3