## 正規行列

エルミート行列の対角化について議論するために、エルミート行列・ユニタリ行列を含むより包括的な概念として正規行列を導入する

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p197〜200
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p287〜292
ref: 行列と行列式の基礎 p209

**正規行列**　複素正方行列 $A$ が次を満たすとき、$A$ を正規行列という

$$AA^* = A^*A$$

### 正規行列の例

$A$ をエルミート行列とすると、$A^* = A$ なので、

$$AA^* = A^2$$
$$A^*A = A^2$$

となり、正規行列の定義を満たす

**エルミート行列の正規行列性**　エルミート行列は正規行列である

また、$A$ をユニタリ行列とすると、$A^* = A^{-1}$ なので、

$$AA^* = AA^{-1} = E$$
$$A^*A = A^{-1}A = E$$

となり、こちらも正規行列の定義を満たす

**ユニタリ行列の正規行列性**　ユニタリ行列は正規行列である

## 正規行列の性質

**todo**　複素正方行列 $A$ が正規行列であることは、任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|A^*\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことと同値である

証明

[ Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p262 問 6.9 (1)]

**todo**　$A$ を正規行列とするとき、$\boldsymbol{v}$ が $A$ の固有値 $\alpha$ の固有ベクトルならば、$\boldsymbol{v}$ は $A^*$ の固有値 $\overline{\alpha}$ の固有ベクトルである

すなわち、

$$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} \implies A^*\boldsymbol{v} = \overline{\alpha}\boldsymbol{v}$$

証明

[ Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p262 問 6.9 (2)]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# Zebra Notes

| Type | Number |
|---|---|
| todo | 2 |