Imaging Math

tomixy

March 14, 2025

Contents

Chapter 1

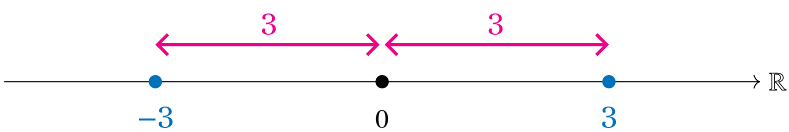
基礎数学

1.1　絶対値

1.1.1　数直線上の原点からの距離

実数 a の絶対値は、数直線上の原点 0 から a までの距離として定義される。

3 と -3 を例に考えると、どちらも絶対値は 3 となる。



-3 の絶対値が 3 であるように、負の数の絶対値は元の数から符号を取ったもの（元の数を -1 倍したもの）となる。

まとめると、

- 正の数の絶対値は元の数そのまま（0 の絶対値もそのまま 0）
- 負の数の絶対値は元の数の -1 倍

というように、絶対値は場合分けして定義される。

絶対値

実数 a について、a の 絶対値 を次のように定義する。

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

1.1.2 絶対値の性質

絶対値は 0 以上の数

負の数の場合は、符号を取って正の数にしたものを絶対値とすることから、絶対値が負の数になることはない。

絶対値は常に非負

実数 a の絶対値 $|a|$ は、常に 0 以上の数となる。

$$|a| \geq 0$$

等号が成立するのは、$a = 0$ の場合である。

中身の符号によらず絶対値は同じ

3 も −3 も、絶対値はともに 3 だった。つまり、

$$|3| = |-3| = 3$$

このことを一般化したのが、次の性質である。

中身の符号を変えても絶対値は不変

実数 a の絶対値について、次が成り立つ。

$$|-a| = |a|$$

積の絶対値は絶対値の積

絶対値の計算と、積の計算は、どちらを先に行っても結果が同じになる。

絶対値の積の性質

実数 a と b について、次の式が成り立つ。

$$|ab| = |a||b|$$

a と b がともに正の数なら、

- a と b は正の数なので、$|a| = a$、$|b| = b$
- ab も正の数なので、$|ab| = ab$

となり、$|ab| = |a||b|$ が成り立つことがわかる。

では、片方が負の数の場合はどうだろうか。
a か b のどちらかにマイナスの符号をつけてみると、

$$|-ab| = |-a||b|$$

$$|-ab| = |a||-b|$$

のどちらかとなるが、前の節で解説した $|-X| = |X|$ の関係から、これらはどちらも $|ab| = |a||b|$ に帰着する。

a と b の両方が負の数の場合は、

$$|ab| = |-a||-b|$$

となるが、これも $|-X| = |X|$ の関係を使えば、やはり $|ab| = |a||b|$ に帰着する。

1.1.3 数直線上の 2 点間の距離

Under construction...

1.1.4 max 関数による表現

実数 a の絶対値は、「a と $-a$ のうち大きい方を選ぶ」という考え方でも表現できる。

たとえば、3 と -3 の絶対値はともに 3 だが、これは 3 と -3 のうち大きい方（正の数の方）を絶対値として採用した、という見方もできる。

max 関数による絶対値の表現

実数 a について、a の 絶対値 を次のように定義することもできる。

$$|a| = \max\{a, -a\}$$

ここで登場した max は、「複数の数の中から最大のものを選ぶ」という操作を表している。

1.1.5 三角不等式

2 つの実数 a と b の「絶対値の和」と「和の絶対値」の間には、次のような大小関係がある。

絶対値に関する三角不等式

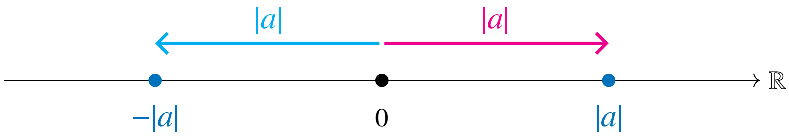
任意の実数 a と b について、次の不等式が成り立つ。

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

> この形の不等式は、実は今後登場するベクトルの長さ（ノルム）や、複素数の絶対値に対しても成り立つ。三角不等式と呼ばれる所以は、ベクトルに関する三角不等式で明らかになる。

絶対値の定義から、この不等式の証明を考えてみよう。

a の絶対値 $|a|$ は、a から符号を取り払ったものであるから、逆に絶対値 $|a|$ に $+$ か $-$ の符号をつけることで、元の数 a に戻すことができる。
a が負の数だったなら、$-|a|$ とすれば a に戻る。正の数だったなら、$|a|$ がそのまま a に一致する。



a は原点からの距離が $|a|$ の場所にあり、a は $-|a|$ か $|a|$ のどちらかに一致する。
どちらに一致するかはわからないので、次のような不等式で表しておく。

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

b についても、同じように考えることができる。

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

これらの不等式を使って、さらに式変形を行うことで、三角不等式を導くことができる。

Proof: 絶対値に関する三角不等式

絶対値の定義から、次の不等式が成り立つ。

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

両辺を足し合わせて、次の不等式を得る。

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$-(|a| + |b|) \leq a + b$ の両辺を -1 倍することで、次の関係も得られる。（不等式の両辺を -1 倍すると、不等号の向きが逆転することに注意）

$$|a| + |b| \geq -(a + b)$$

ここまでで得られた、$a+b$ についての不等式をまとめると、次のようになる。

$$|a|+|b| \geq a+b$$

$$|a|+|b| \geq -(a+b)$$

一方、$a+b$ の絶対値は、定義より次のように表せる。

$$|a+b| = \max\{a+b, -(a+b)\}$$

$a+b$ と $-(a+b)$ のうち大きい方が $|a+b|$ となるが、$a+b$ と $-(a+b)$ はどちらも $|a|+|b|$ 以下となることがすでに示されているので、

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

となり、定理は示された。 ■

1.2 数列

Under construction...

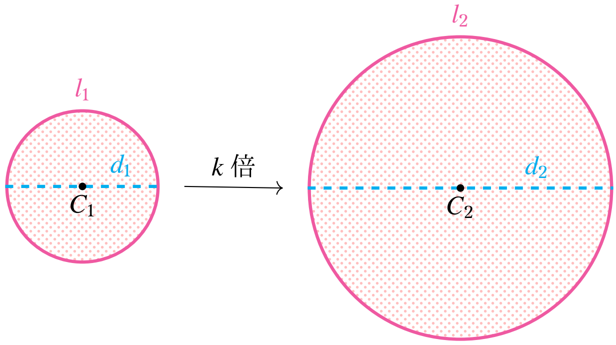
1.3 組合せ

Under construction...

1.4 三角関数

1.4.1 円周率

すべての円は、お互いを拡大もしくは縮小した関係にある。



円 C_2 が、円 C_1 を k 倍に拡大したものだとすると、その直径や円周も C_1 の k 倍となる。

$$d_2 = k \cdot d_1$$

$$l_2 = k \cdot l_1$$

この 2 つの式を各辺どうし割ることで、k が約分されて消え、直径と円周の比が等しくなることがわかる。

$$\frac{d_2}{l_2} = \frac{d_1}{l_1}$$

円の直径と円周の比　すべての円において、直径と円周の長さの比は一定である。

そして、この一定の比率は、円周率 π として知られている。

円周率　円の円周の長さ l と直径の長さ d の比を、円周率といい、π で表す。

$$\pi = \frac{l}{d} = 3.14\ldots$$

π の定義式を変形すると、円周の長さを求める式が得られる。
半径を r とすると、直径 $d = 2r$ であるから、

$$l = \pi \cdot d = 2\pi r$$

円周の長さ　円の円周の長さ l は、半径 r を使って次のように表される。

$$l = 2\pi r$$

1.5 指数関数

1.5.1 同じ数のかけ算の指数による表記

指数と底

同じ数 a を n 回掛けたものを a の n 乗といい，a^n と表す。

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個の }a}$$

このとき、n を指数、a を底という。

1.5.2 指数法則

指数を「かける回数」と捉えれば、いくつかの法則が当たり前に成り立つことがわかる。

「かける回数」の和

例えば、a を m 回かけてから、続けて a を n 回かける式を書いてみると、a は $m+n$ 個並ぶことになる。

$$\overbrace{a \times a \times a}^{a^3} \times \overbrace{a \times a}^{a^2} = \overbrace{a \times a \times a \times a \times a}^{a^5}$$

指数の和に関する指数法則

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

「かける回数」の差

例えば、a を m 回かけたものを、a を n 回かけたもので割ると、$m-n$ 個の a の約分が発生する。

$$\frac{\overbrace{a \times a \times a \times a \times a \times}^{a^5}}{\underbrace{a \times a}_{a^2}} = \overbrace{a \times a \times a}^{a^3}$$

指数の差に関する指数法則

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

「かける回数」の積

例えば、「a を m 回かけたもの」を n 回かける式を書いてみると、a は $m \times n$ 個並ぶことになる。

$$(a^2)^3 = \underbrace{\overbrace{a \times a}^{a^2} \times \overbrace{a \times a}^{a^2} \times \overbrace{a \times a}^{a^2}}_{a^6}$$

指数の積に関する指数法則

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

1.5.3 指数の拡張と指数関数

底を固定して、指数を変化させる関数を考えたい。

指数部分に入れられる数を拡張したいが、このとき、どんな数を入れても指数法則が成り立つようにしたい。

0 の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、$m = 0$ の場合を考える。

$$a^0 \times a^n = a^{0+n}$$
$$a^0 \times a^n = a^n$$

この式が成り立つためには、a^0 は 1 である必要がある。

0 の指数

どんな数も、0 乗すると 1 になると定義する。

$$a^0 = 1$$

そもそも、指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ は、「指数の足し算が底のかけ算に対応する」ということを表している。

- 「何もしない」足し算は $+0$
- 「何もしない」かけ算は $\times 1$

なので、$a^0 = 1$ は「何もしない」という観点で足し算とかけ算を対応づけたものといえる。

負の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、正の数 n を負の数 $-n$ に置き換えたものを考える。

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

さらに、指数法則 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ も成り立っていてほしいので、

$$a^m \times a^{-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

この式は、$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ とすれば、当たり前に成り立つものとなる。

負の整数の指数

n が正の整数であるとき、$-n$ 乗を次のように定義する。

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

有理数の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、指数 m, n を $\dfrac{1}{2}$ に置き換えたものを考える。

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a$$

$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$ は、$(a^{\frac{1}{2}})^2$ とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$$

つまり、$a^{\frac{1}{2}}$ は、2 乗すると a になる数（a の平方根）でなければならない。

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

同様に、$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$ を考えてみると、

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a$$

$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$ は、$(a^{\frac{1}{3}})^3$ とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$$

つまり、$a^{\frac{1}{3}}$ は、3 乗すると a になる数（a の 3 乗根）でなければならない。

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

このようにして、$a^{\frac{1}{n}}$ は、n 乗すると a になる数（a の n 乗根）として定義すればよい。

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

さて、分子が 1 ではない場合はどうだろうか？

$(a^m)^n = a^{mn}$ において、m を $\dfrac{m}{n}$ に置き換えたものを考えると、

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m$$

となるので、$a^{\frac{m}{n}}$ は、n 乗したら a^m になる数として定義すればよい。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

有理数の指数

m, n が整数で、n が正の整数であるとき、$\frac{m}{n}$ 乗を次のように定義する。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

実数への拡張

有理数は無数にあるので、指数 x を有理数まで許容した関数 $y = a^x$ のグラフを書くと、十分に繋がった線になる。
指数が無理数の場合は、まるでグラフ上の点と点の間を埋めるように、有理数の列で近似していくことで定義できる。

これで、x を実数とし、関数 $y = a^x$ を定義できる。

指数関数

a を正の実数とし、x を実数とするとき、次のような関数を指数関数という。

$$y = a^x$$

1.5.4 指数関数の底の変換

用途に応じて、使いやすい指数関数の底は異なる。

- e：微分積分学、複素数、確率論など
- 2：情報理論、コンピュータサイエンスなど
- 10：対数表、音声、振動、音響など

よって、これらの底を互いに変換したい場面もある。

指数の底を変えることは、指数の定数倍で実現できる。
例えば、底が 4 の指数関数 4^x を、底が 2 の指数関数に変換したいとすると、

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$$

のように、指数部分を 2 倍することで、底を 4 から 2 へと変換できる。
当たり前だが、この変換は、$4 = 2^2$ という関係のおかげで成り立っている。
「4 は 2 の何乗か？」がすぐにわかるから、4 から 2 への底の変換が簡単にできたのだ。

より一般に、a^x と b^X において、$a = b^c$ という関係があるとする。
つまり、a は b の c 乗だとわかっているなら、

$$a^x = (b^c)^x = b^{cx}$$

のように、底を a から b へと変換できる。

指数関数の底の変換

指数を定数倍することは、底を変えることと同じ操作になる。

$a = b^c$ という関係があるなら、次の変換が成り立つ。

$$a^x = b^{cx}$$

ここで重要なのは、指数関数の底を変換するには、「a は b の何乗か？」がわかっている必要があるということだ。
次章では、$a = b^c$ となるような c を表す道具として、対数を導入する。

1.6 対数関数

1.6.1 対数：指数部分を関数で表す

指数関数は、「a を x 乗したら y になる」という関係を表現するものだった。

ここで、逆に「y は a の何乗か？」という関係を表現するものとして、対数関数を定義する。

これは、y から x を導き出す関数であるから、指数関数 $y = a^x$ の逆関数といえる。

対数

$a^y = x$ を満たす y を、a を底とする x の対数といい、次のように表す。

$$y = \log_a x$$

ここで、x は真数、a は底と呼ばれる。

対数関数は指数関数の逆関数

対数関数 $y = \log_a x$ は、指数関数 $x = a^y$ の逆関数である。

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x$$

対数は、指数関数の指数部分を表す。

$a^y = x$ の y に、$y = \log_a x$ を代入することで、次のような式にまとめることもできる。

指数部分は対数で書き換えられる

$$a^{\log_a x} = x$$

1.6.2 対数の性質

指数法則を対数に翻訳することで、対数の性質を導くことができる。

真数のかけ算は log の足し算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$ として、指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ を考える。

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a^m \times a^n \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$m + n = \log_a(x_1 x_2)$ がいえる。

また、$x_1 = a^m$ より $m = \log_a x_1$、$x_2 = a^n$ より $n = \log_a x_2$ と表せるから、

$$m + n = \log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 x_2)$$

積の対数は対数の和

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

真数の割り算は log の引き算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$ として、指数法則 $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ を考える。

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \frac{a^m}{a^n} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$m - n = \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ がいえる。

また、$x_1 = a^m$ より $m = \log_a x_1$、$x_2 = a^n$ より $n = \log_a x_2$ と表せるから、

$$m - n = \log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

商の対数は対数の差

$$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

真数の冪乗は log の指数倍

$x = a^m$ として、指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ を考える。

$$\begin{aligned} x^n &= (a^m)^n \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$mn = \log_a x^n$ がいえる。

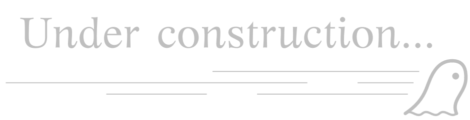
また、$x = a^m$ より $m = \log_a x$ と表せるから、

$$mn = n \log_a x \log_a x^n$$

冪の対数は対数の指数倍

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

1.6.3 常用対数と桁数



常用対数　底を 10 にした対数関数を、常用対数と呼ぶ。

$$\log_{10} x$$

1.6.4 指数関数の底の変換：対数を用いた表現

指数関数の底 a から b に変換するには、「a は b の何乗か？」がわかっている必要があった。

REVIEW

$a = b^c$ という関係があるなら、

$$a^x = b^{cx}$$

今では、$a = b^c$ となるような c を、対数で表すことができる。

$$b^c = a \Longleftrightarrow c = \log_b a$$

指数関数の底の変換公式

$$a^x = b^{(\log_b a)x}$$

Chapter 2

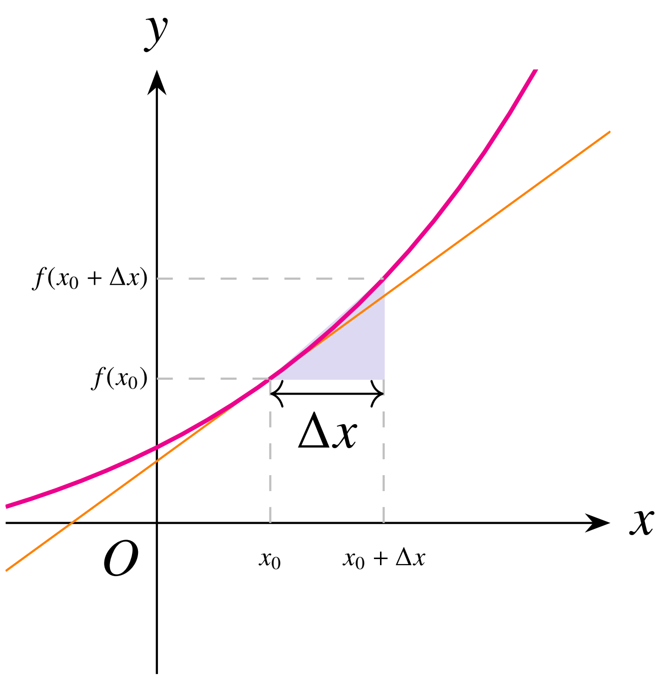
微分と積分

2.1　1 変数関数の微分

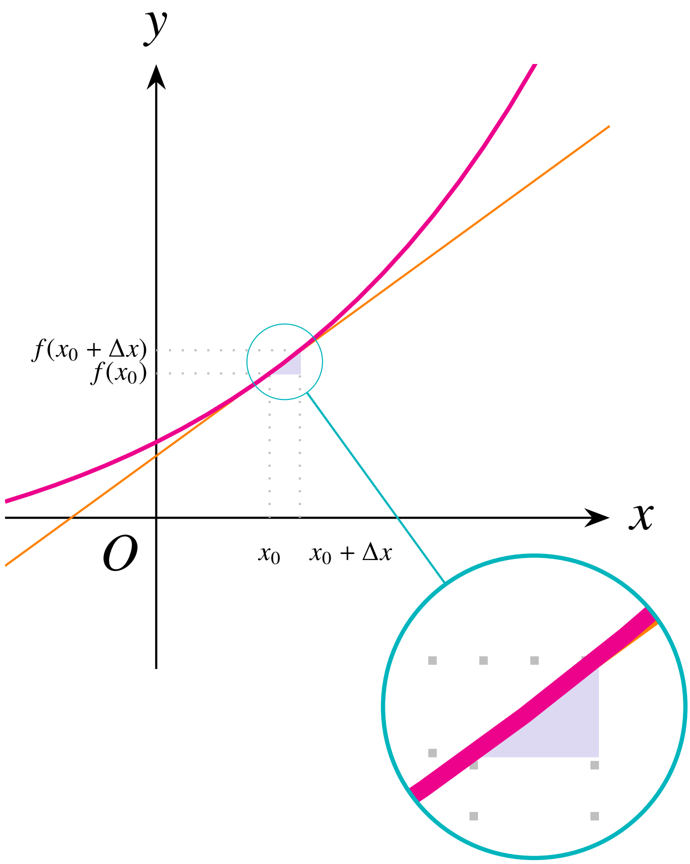
微分とは、複雑な問題も「拡大して見たら簡単に見える（かもしれない)」という発想で、わずかな変化に着目して入力と出力の関係（関数）を調べる手法といえる。

2.1.1　接線：拡大したら直線に近似できる

関数 $y = f(x)$ について、引数の値を $x = x_0$ からわずかに増加させて、$x = x_0 + \Delta x$ にした場合の出力の変化を考える。



このとき、増分の幅 Δx を狭くしていく（Δx の値を小さくしていく）と、$x = x_0$ 付近において、関数 $y = f(x)$ のグラフは直線にほとんど重なるようになる。



このように、関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

$$f(x) \simeq a(x - x_0) + b$$

という直線に近似することができる。

ここで、$f(x_0)$ の値を考えると、

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a(x_0 - x_0) + b \\ &= a \cdot 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$

であるから、実は $b = f(x_0)$ である。

一方、a はこの直線の傾きを表す。

そもそも、傾きとは、x が増加したとき、y がどれだけ急に（速く）増加するかを表す量である。

関数のグラフを見ると、急激に上下する箇所もあれば、なだらかに変化する箇所もある。

つまり、ある点でグラフにぴったりと沿う直線（接線）を見つけたとしても、その傾きは場所によって異なる。

そこで、「傾きは位置 x の関数」とみなして、次のように表現しよう。

$$a = f'(x)$$

これで、先ほどの直線の式を完成させることができる。

関数の各点での直線による近似

関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

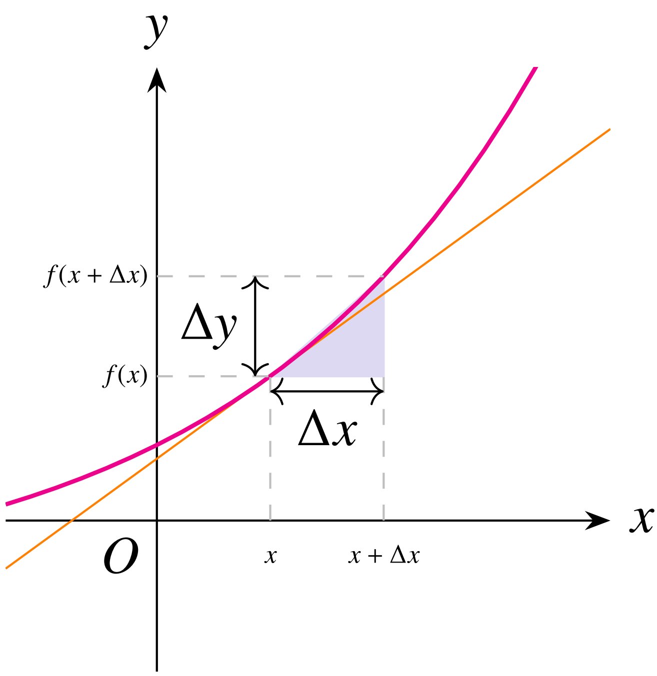
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

という傾き $f'(x)$ の直線に近似できる。

2.1.2 接線の傾きとしての導関数

傾きは位置 x の関数 $f'(x)$ としたが、この関数がどのような関数なのか、結局傾きを計算する方法がわかっていない。

直線の傾きは x と y の増加率の比として定義されているから、まずはそれぞれの増加率を数式で表現しよう。



この図から、y の増加率 Δy は次のように表せることがわかる。

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

この両辺を Δx で割ると、x の増加率 Δx と y の増加率 Δy の比率が表せる。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

図では Δx には幅があるが、この幅を限りなく 0 に近づけると、幅というより点になる。
つまり、$\Delta x \to 0$ とすれば、$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は任意の点 x での接線の傾きとなる。
「任意の点 x での傾き」も x の関数であり、この関数を導関数と呼ぶ。

導関数

関数 $f(x)$ の任意の点 x における接線の傾き（増加の速さ）を表す関数を導関数といい、次のように定義する。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2.1.3 微分とその関係式

微分 関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求める操作を微分という。

関数のグラフから離れて、微分という「計算」を考えるにあたって、先ほどの導関数の定義式よりも都合の良い表現式がある。

$x \to 0$ とした後の Δx を dx と書くことにして、$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ を取り払ってしまおう。

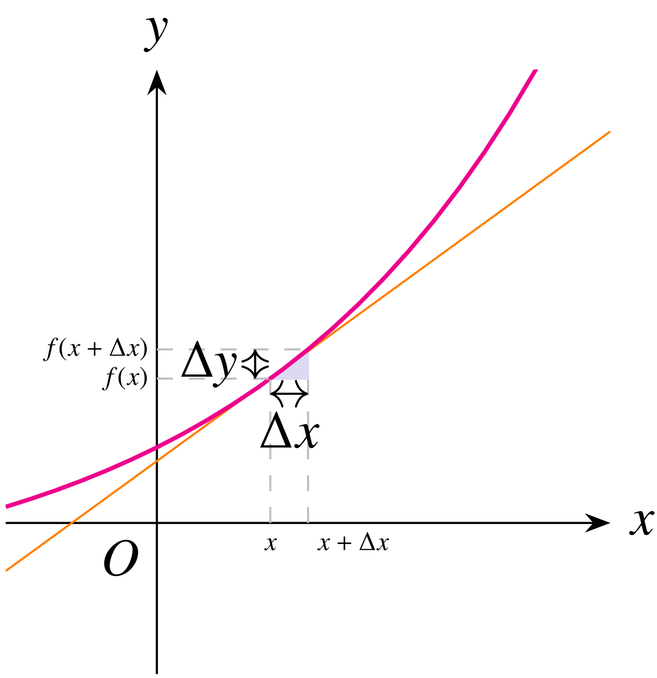
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} && \text{両辺} \times dx \\ f'(x)dx &= f(x+dx)-f(x) && f(x) \text{ を移項} \\ f'(x)dx + f(x) &= f(x+dx) \end{aligned}$$

微分の関係式

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$$

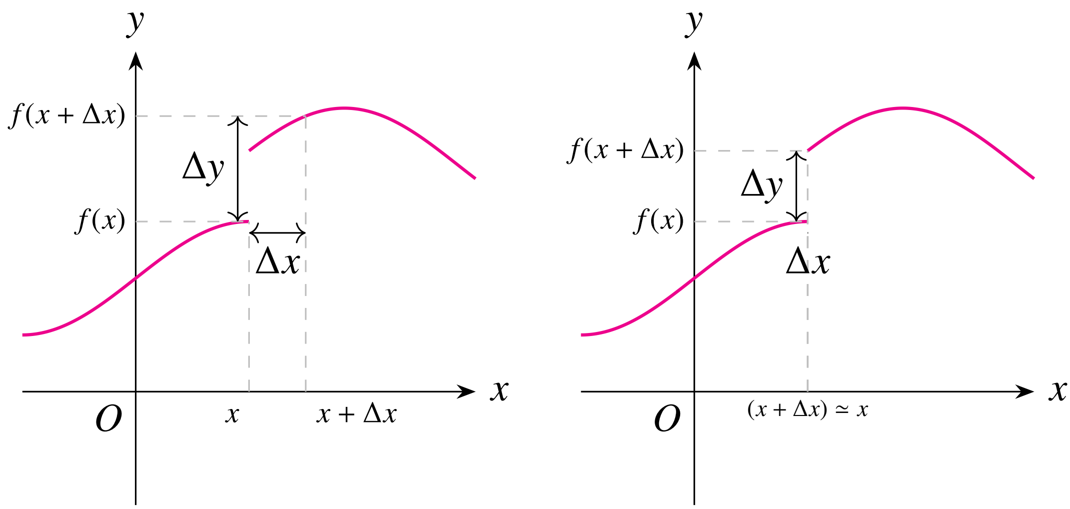
2.1.4 不連続点と微分可能性

点 x において連続な関数であれば、幅 Δx を小さくすれば、その間の変化量 Δy も小さくなるはずである。



しかし、不連続な点について考える場合は、そうはいかない。

下の図を見ると、Δx の幅を小さくしても、Δy は不連続点での関数の値の差の分までしか小さくならない。



このような不連続点においては、どんなに拡大しても、関数のグラフが直線にぴったりと重なることはない。

「拡大すれば直線に近似できる」というのが微分の考え方だが、不連続点ではこの考え方を適用できないのだ。

関数の不連続点においては、微分という計算を考えることがそもそもできない。

ある点での関数のグラフが直線に重なる（微分可能である）ためには、$\Delta x \to 0$ としたときに $\Delta y \to 0$ となる必要がある。

2.1.5 導関数のさまざまな記法

微分を考えるときは、$\Delta x \to 0$ としたときに $\Delta y \to 0$ となる前提のもとで議論する。

$\Delta x \to 0$ とした結果を dx、$\Delta y \to 0$ の結果を dy とすると、ある点 x での接線の傾きは、次のようにも表現できる。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

この接線の傾きが x の関数であることを表現したいときは、次のように書くこともある。

$$\frac{dy}{dx}(x)$$

これも一つの導関数（位置に応じた接線の傾きを表す関数）の表記法である。

この記法は、どの変数で微分しているかがわかりやすいという利点がある。

導関数のライプニッツ記法

次のような記号はいずれも、関数 $y = f(x)$ の導関数を表す。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

特に、$\frac{d}{dx}f(x)$ という記法は、$\frac{d}{dx}$ の部分を微分操作を表す演算子として捉えて、「関数 $f(x)$ に微分という操作を施した」ことを表現しているように見える。

微分演算子

関数を微分するという操作を表現する演算子を微分演算子という。

例えば、次のような記号で表される。

$$\frac{d}{dx}$$

ところで、これまで使ってきた $f'(x)$ という導関数の記法にも、名前がついている。

導関数のニュートン記法

次の記号は、関数 $y = f(x)$ の導関数を表す。

$$f'(x)$$

この記法は、「f という関数から導出された関数が f' である」ことを表現している。

導関数はあくまでも関数 f から派生したものであるから、f という文字はそのまま、加工されたことを表すために $'$ をつけたものと解釈できる。

2.1.6 微分の性質

微分の関係式を使うことで、微分に関する有用な性質を導くことができる。

REVIEW

微分の関係式

$$f(x+dx) = \underbrace{f(x)}_{\text{元の関数}} + \underbrace{f'(x)}_{\text{導関数}}\, dx$$

関数の一次結合の微分

$\alpha f(x) + \beta g(x)$ において、x を dx だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned}\alpha f(x+dx) + \beta g(x+dx) &= \alpha\{f(x) + f'(x)dx\} + \beta\{g(x) + g'(x)dx\} \\ &= \underbrace{\alpha f(x) + \beta g(x)}_{\text{元の関数}} + \{\underbrace{\alpha f'(x) + \beta g'(x)}_{\text{導関数}}\}dx\end{aligned}$$

微分の線形性

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

関数の積の微分

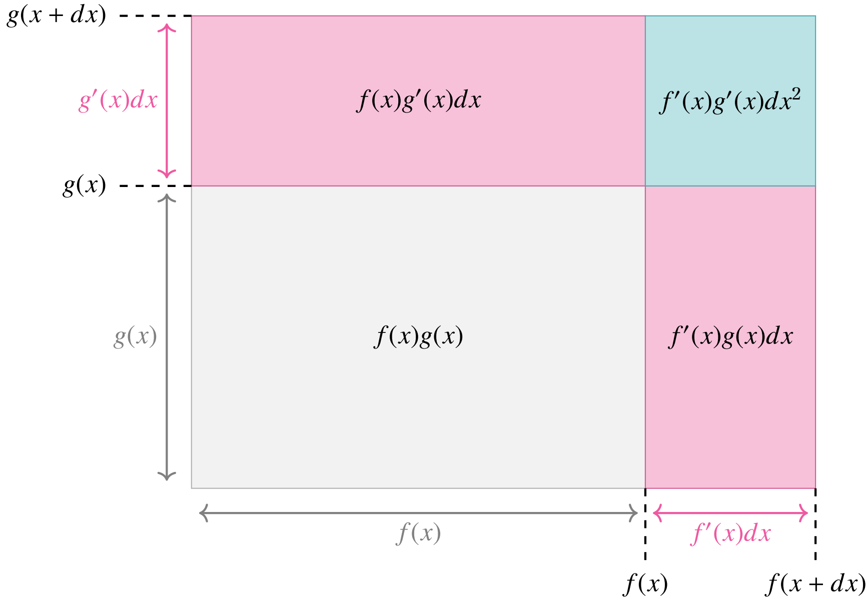
$f(x)g(x)$ において、x を dx だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned}f(x+dx)g(x+dx) &= \{f(x) + f'(x)dx\}\{g(x) + g'(x)dx\} \\ &= f(x)g(x) + f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx + f'(x)g'(x)dx^2 \\ &= f(x)g(x) + \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx + \underbrace{f'(x)g'(x)dx^2}_{\text{2 次以上の微小量}}\end{aligned}$$

ここで、dx^2 は、dx より速く 0 に近づくので無視できる。

荒く言ってしまえば、dx でさえ微小量なのだから、dx^2 なんて存在しないも同然だと考えてよい。

このことは、次の図を見るとイメージできる。



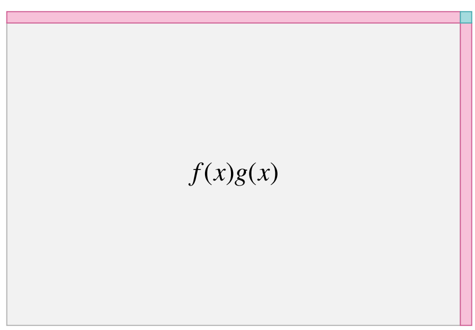
$dx \to 0$ のとき $dy \to 0$ となる場合に微分という計算を定義するのだから、dx を小さくしていくと、dy にあたる $f(x+dx)-f(x)$（これは $f'(x)dx$ と等しい）も小さくなっていく。
同様にして、$g(x+dx)-g(x)$（これは $g'(x)dx$ と等しい）も小さくなっていく。

REVIEW

微分の関係式 $f(x+dx)=f(x)+f'(x)dx$ より、

$$f'(x)dx = f(x+dx) - f(x)$$

dx を小さくした場合を図示すると、



2 次以上の微小量

$f'(x)g'(x)dx^2$ に相当する左上の領域は、ほとんど点になってしまうことがわかる。

このように、dx^2 の項は無視してもよいものとして、先ほどの計算式は次のようになる。

$$f(x+dx)g(x+dx) = \overbrace{f(x)g(x)}^{\text{元の関数}} + \{\overbrace{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}^{\text{導関数}}\}dx$$

微分のライプニッツ則

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

2.1.7 冪関数の微分

具体的な関数の導関数も、微分の関係式をもとに考えることができる。
まずは、基本的な例として、冪関数 $y = x^n$ の微分を考えてみよう。

$y = x^2$ の微分

$y = f(x) = x^2$ において、x を dx だけ微小変化させると、y は dy だけ変化するとする。
すると、微分の関係式は $y + dy = f(x + dx) = (x + dx)^2$ となるが、これを次のように展開して考える。

$$y + dy = (x + dx)(x + dx)$$

右辺の $(x + dx)(x + dx)$ からは、

- x^2 の項が 1 つ
- xdx の項が 2 つ
- dx^2 の項が 1 つ

現れることになる。
数式で表すと、

$$\boxed{y} + dy = \boxed{x^2} + 2xdx + dx^2$$

同じ

ここで $y = x^2$ なので、左辺の y と右辺の x^2 は相殺される。

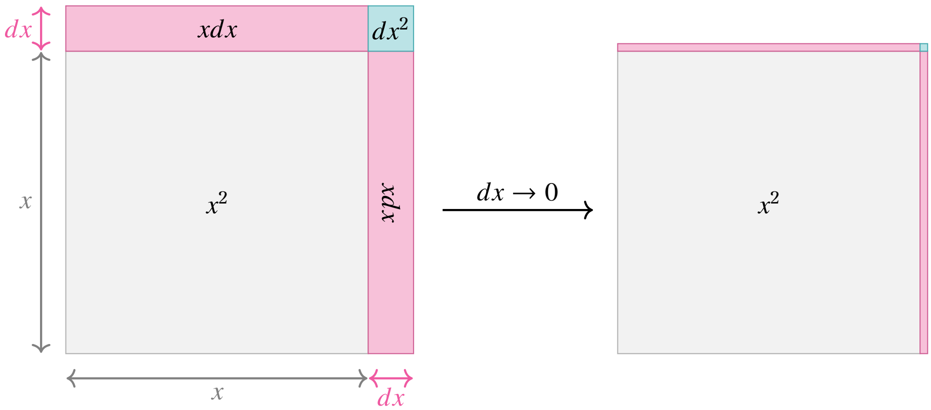
$$\underbrace{dy = 2xdx + \boxed{dx^2}}_{}$$

高次の微小量

$$dy = 2xdx + \boxed{dx^2}$$

さらに、dx^2 の項は無視することができる。

なぜなら、dx を小さくすると、dx^2 は dx とは比べ物にならないくらい小さくなってしまうからだ。



というわけで、次のような式が得られる。

$$dy = 2xdx$$

よって、$y = x^2$ の導関数は、$y' = 2x$ となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$y = x^3$ の微分

同じように、$y = x^3$ の微分を考えてみよう。

$$y + dy = (x + dx)(x + dx)(x + dx)$$

右辺の $(x + dx)(x + dx)(x + dx)$ からは、

- x^3 の項が 1 つ
- x^2dx の項が 3 つ
- dx^3 の項が 1 つ

現れることになる。

$$\underbrace{\boxed{y}}_{\text{同じ}} + dy = \underbrace{\boxed{x^3}}_{\text{同じ}} + 3x^2dx + dx^3$$

ここで $y = x^3$ なので、左辺の y と右辺の x^3 は相殺される。

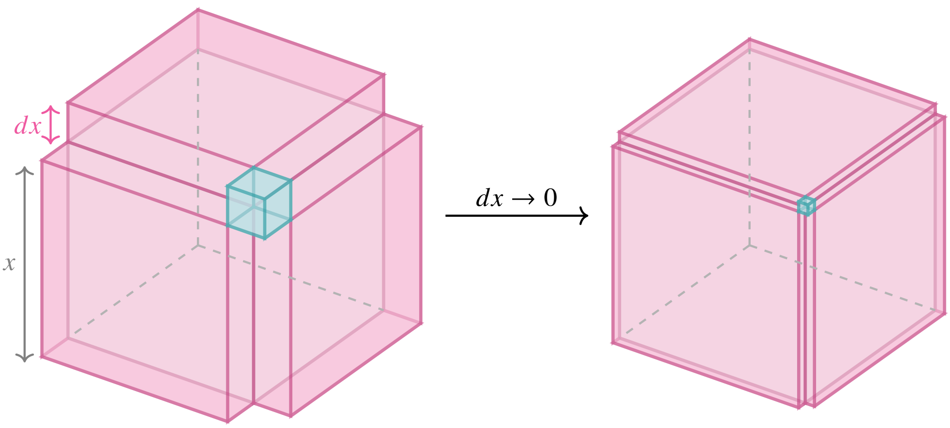
$$dy = 3x^2dx + \overbrace{\boxed{dx^3}}^{\text{高次の微小量}}$$

さらにここでは、dx^3 の項を無視することができる。

次の図を見てみよう。

各辺 dx の立方体は、dx を小さくすると、ほぼ点にしか見えないほど小さくなる。

つまり、各辺 dx の立方体の体積 dx^3 は、考慮する必要がない。



というわけで、$y = x^3$ の導関数は、$y' = 3x^2$ となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$y = x^n$ の微分（n が自然数の場合）

n が自然数だとすると、$y = x^n$ の微分は、$y = x^2$ や $y = x^3$ の場合と同じように考えられる。

$$y + dy = \underbrace{(x + dx)(x + dx)\cdots(x + dx)}_{n\text{ 個}}$$

右辺の $(x + dx)(x + dx)\cdots(x + dx)$ を展開しようとすると、次のような 3 種類のかけ算が発生する。

- x どうしのかけ算
- x と dx のかけ算

- dx どうしのかけ算

つまり、右辺からは、

- x^n の項が1つ
- $x^{n-1}dx$ の項が n 個
- dx^n の項が1つ

という項が現れることになる。
そして、x^n は左辺の y と相殺され、dx^n の項は高次の微小量として無視できる。
すると、残るのは次のような式になるだろう。

$$dy = nx^{n-1}dx$$

この式は、$y = \alpha x$ という直線の式によく似ている。
高次の dx の項 dx^n を無視し、1次の dx の項だけ残したのは、微分という計算が微小範囲における直線での近似であるからだ。
あくまでも微小範囲での直線の式であることを表すために、x, y を dx, dy として、$dy = \alpha dx$ という形の式になっていると考えればよい。

自然数の冪を持つ冪関数の導関数

n が自然数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$y = x^n$ の微分（n が整数の場合）

指数法則を使うことで、n が負の整数の場合にも拡張することができる。

まずは、$y = x^{-1}$ の微分を考えてみよう。
指数法則より、$y = x^{-1}$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \\ xy &= 1 \end{aligned} \quad \text{両辺} \times x$$

微小変化を加えた微分の関係式を作って、次のように展開していく。

$$(x + dx)(y + dy) = 1$$

$$\boxed{xy} + xdy + ydx + \overset{\text{高次の微小量}}{\boxed{dydx}} = \boxed{1}$$

同じ

ここで、微小量の掛け合わせである $dydx$ は無視できるほど小さい。

また、$y = \dfrac{1}{x}$ より、$xy = 1$ なので、左辺の xy と右辺の 1 は相殺される。

すると、残った式は、

$$\begin{aligned}
xdy + ydx &= 0 && \text{ydx を移項} \\
xdy &= -ydx && \text{両辺 $\boldsymbol{\nabla} \cdot dx$} \\
x\frac{dy}{dx} &= -y && \text{両辺 $\boldsymbol{\nabla} \cdot x$} \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x}
\end{aligned}$$

y が残ってしまっているので、$y = \dfrac{1}{x}$ を代入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \\
&= -x^{-2}
\end{aligned}$$

これは、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ において、$n = -1$ を代入したものになっている。

n が任意の負の整数の場合も、同様に考えられる。

$y = x^{-n}$ を、$x^n y = 1$ として、

$$\underbrace{(x+dx)(x+dx)\cdots(x+dx)}_{n\ \text{個}}\times(y+dy)=1$$

$$(x^n+nx^{n-1}dx+\overbrace{\boxed{dx^n}}^{\text{高次の微小量}})\times(y+dy)=1$$

高次の微小量を無視

$$(x^n+nx^{n-1}dx)\times(y+dy)=1$$

$$\boxed{x^n y}+x^n dy+nx^{n-1}ydx+\overbrace{\boxed{nx^{n-1}dxdy}}^{\text{高次の微小量}}=\boxed{1}$$

同じ

相殺＆無視

$$x^n dy+nx^{n-1}ydx=0$$

移項してさらに整理すると、

$$\begin{aligned}
x^n dy &= -nx^{n-1}ydx && \text{両辺 } \nabla\cdot dx\\
x^n\frac{dy}{dx} &= -nx^{n-1}y && \text{両辺 } \times x^{-n}\\
\frac{dy}{dx} &= -nx^{n-1}x^{-n}y && y=x^{-n}\\
&= -nx^{n-1}x^{-n}x^{-n} && \text{指数法則 } x^m x^n=x^{m+n}\\
&= -nx^{-n-1}
\end{aligned}$$

これもやはり、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$ において、n を $-n$ に置き換えたものになっている。

つまり、自然数（正の整数）だけでなく、負の整数も許容して、次のことがいえる。

整数の冪を持つ冪関数の導関数

n が整数のとき、$y=x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

$y=x^n$ の微分（n が実数の場合）

n が有理数の場合はどうだろうか。実はこれも、指数法則によって拡張することができる。

m と n はどちらも自然数として、$y=x^{\frac{m}{n}}$ の微分を考える。

まず、$y = x^{\frac{m}{n}}$ は、$y^n = x^m$ とまったく同じ式である。

$$
\begin{aligned}
y^n &= x^m \\
y &= x^{\frac{m}{n}} \qquad \text{両辺 } \frac{1}{n} \text{ 乗}
\end{aligned}
$$

というわけで、$y^n = x^m$ を微小変化させて、展開してみよう。

$$\underbrace{(y+dy)(y+dy)\cdots(y+dy)}_{n\text{ 個}} = \underbrace{(x+dx)(x+dx)\cdots(x+dx)}_{m\text{ 個}}$$

ここで、n と m は自然数なのだから、自然数冪のときと同じように考えて、次のような式が残ることになる。

$$ny^{n-1}dy = mx^{m-1}dx$$

よって、$\dfrac{dy}{dx}$ の式の y を含まない形を目指すと、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} \\
&= \frac{mx^{m-1}}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}} \qquad y = x^{\frac{m}{n}} \\
&= \frac{mx^{m-1}}{nx^{m-\frac{m}{n}}} \\
&= \frac{mx^m x^{-1}}{nx^m x^{-\frac{m}{n}}} \qquad \text{指数法則 } x^{a+b} = x^a x^b \\
&= \frac{mx^{-1}}{nx^{-\frac{m}{n}}} \qquad x^m \text{ で約分} \\
&= \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{-1}}{x^{-\frac{m}{n}}} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{-1-(-\frac{m}{n})} \qquad \text{指数法則 } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{-1+\frac{m}{n}} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}
\end{aligned}
$$

これは、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ において、n を $\dfrac{m}{n}$ に置き換えたものになっている。

つまり、整数だけでなく、有理数に対しても同様の導関数の式が成り立つ。

ここまで来ると、無理数はどうだろうか？という疑問が生まれるが、無理数への拡張は指数法則では対応できない。

無理数に対しては、極限操作によって同様の導関数の式を導くことができ、実数全体に対して同じ導関数の式が成り立つことが示される。

冪関数の導関数

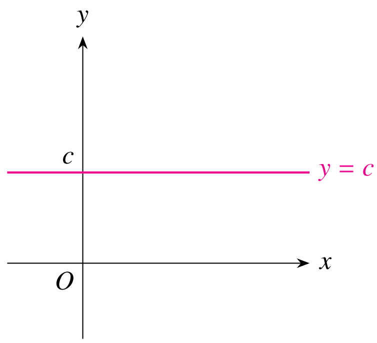
n が実数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

2.1.8 定数関数の微分

常に一定の値 c を返す定数関数 $f(x) = c$ の微分はどうなるだろうか。

関数のグラフを描いて考えてみよう。



定数関数のグラフは、x 軸に対して平行な直線であり、この直線の傾きは見るからに 0 である。

実際、導関数の定義に従って計算することで、定数関数の導関数は 0 になることを確かめられる。

REVIEW

導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

どの点 x においても $f(x)$ が c を返すということは、$f(x + \Delta x)$ も c であるため、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、定数関数 $f(x) = c$ の微分の結果は c に依存せず、常に 0 になる。

定数関数の微分

常に定数 c の値をとる定数関数 $f(x) = c$ は、微分すると 0 になる。

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

2.1.9 合成関数の微分

合成関数の微分の一般的な式は、いろいろな関数の微分を考える上で重要な公式である。

関数の微小変化量

関数 $f(x)$ において、変数 x を dx だけ微小変化させた式は、これまで何度も登場した。

$$f(x + dx) = f(x) + \overbrace{f'(x)dx}^{\text{増えた分}}$$

この式は、「x を dx だけ微小変化させることで、関数 f の値は $f'(x)dx$ だけ増加した」と捉えることもできる。

言い換えれば、関数 f の微小変化量は $f'(x)dx$ だということだ。

変化量という観点で眺めるには、次のように移項した式がわかりやすいかもしれない。

$$\overbrace{f(x + dx) - f(x)}^{\text{区間 } dx \text{ での変化}} = \overbrace{f'(x)dx}^{\text{変化量}}$$

関数 f の微小変化量 $f'(x)dx$ を、df と表すことにしよう。

合成関数の微分の関係式

今回はさらに、$t = f(x)$ を関数 $g(t)$ に放り込むことを考える。

$g(t)$ についても、次のような微分の関係式が成り立つはずだ。

$$g(t + dt) = g(t) + g'(t)dt$$

合成関数 $g(f(x))$ を作るため、$t = f$（引数 (x) を省略して書いた関数 $f(x)$）を代入する。

$$g(f + df) = g(f) + g'(f)df$$

f を $f(x)$ に、df を $f'(x)dx$ に書き戻すと、

$$g(f(x) + f'(x)dx) = g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)dx$$

となり、左辺の $g()$ の中身 $f(x) + f'(x)dx$ は $f(x + dx)$ と書き換えられるので、次の式を得る。

$$g(f(x + dx)) = \overbrace{\boxed{g(f(x))}}^{\text{元の関数}} + \overbrace{\boxed{g'(f(x))f'(x)}}^{\text{導関数}}\, dx$$

合成関数の微分（ニュートン記法による表現）

合成関数 $g(f(x))$ の微分は、次の式で表される。

$$(g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$$

連鎖律としての表現

ニュートン記法による表現はなかなかに覚えづらい式に見えるが、ライプニッツ記法を使って書き直すと、実は単純な関係式になっている。

- $(g(f(x)))'$ は、$g(f(x))$ を x で微分したもの：$\frac{d}{dx}g(f(x))$
- $f'(x)$ は、$f(x)$ を x で微分したもの：$\frac{d}{dx}f(x)$
- $g'(f(x))$ は、$g(t)$ を t で微分したもの $\frac{d}{dt}g(t)$ に、$t = f(x)$ に代入したもの：$\frac{d}{df}g(f(x))$

として書き直すと、

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{df}g(f(x))$$

さらに、引数を省略して書くと、

$$\frac{dg}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{df}$$

これは、df を約分できると考えたら、当たり前の式になっている。

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\cancel{df}}{dx} \cdot \frac{dg}{\cancel{df}}$$

合成関数の微分（連鎖律：ライプニッツ記法による表現）

$y = f(x)$、$z = g(y)$ という関係があるとき、次の式が成り立つ。

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

これは、x が微小変化すると y も微小変化し、さらに連鎖して z も微小変化するという関係から、連鎖律 と呼ばれる。

2.1.10 逆関数の微分

関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の微分も、ライプニッツ記法で考えると、ごく当たり前の式として導出できる。
ネタバレすると、次の式がそのまま逆関数の微分を表すものになっている。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$\dfrac{dy}{dx}$ を $f'(x)$ と表記するなら、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

である。この発想を納得するために、もう少し詳しく見ていこう。

* * *

$y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、ライプニッツ記法では $\dfrac{dy}{dx}$ と表記される。

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ライプニッツ記法 $\dfrac{dy}{dx}$ には、「y で表される関数を x で微分する」という意味がこめられている。
ならば、逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の導関数は、「x で表される関数を y で微分する」という意味で、$\dfrac{dx}{dy}$ と表記できる。

$$\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y)$$

ここで、$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ という式から、次の等式も成り立つと考えられる。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

これは逆関数の導関数になっているが、逆関数が y の関数なのだから、その導関数 $\dfrac{dx}{dy}$ も y の関数であってほしい。

そこで、x を消すために $x = f^{-1}(y)$ を代入することで、逆関数の導関数を完成させる。

$$\frac{dx}{dy} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}$$

逆関数の微分

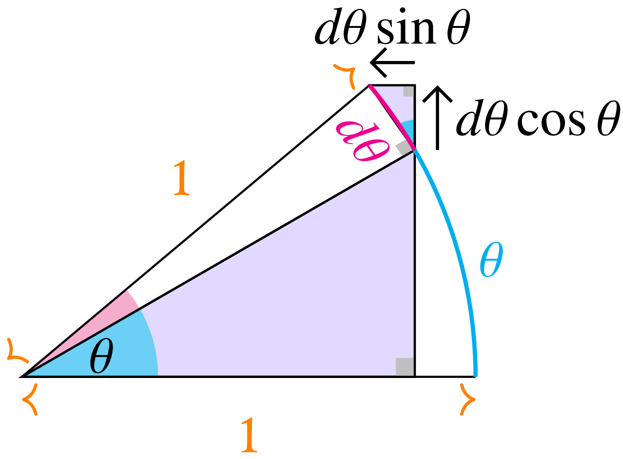
逆関数の導関数は、元の関数の導関数の逆数になる。

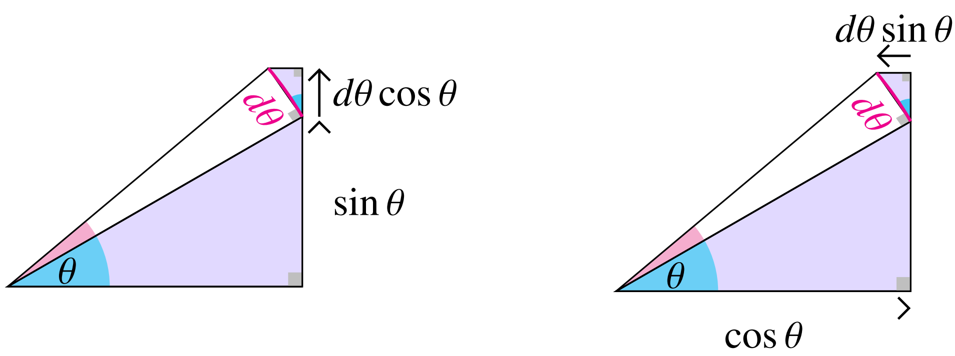
$$\frac{dx}{dy} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}$$

ここで、$\Big|_{x=f^{-1}(y)}$ は、その直前の式を計算した後に、$x = f^{-1}(y)$ を代入することを意味する。

2.1.11 三角関数の微分

角度 θ を $d\theta$ だけ微小変化させたときの、三角形の高さの変化が $\sin\theta$ の微小変化であり、底辺の長さの変化が $\cos\theta$ の微小変化である。





sin の微分

三角形の高さは、$d\theta\cos\theta$ だけ増えているので、

$$\sin(\theta + d\theta) = \overset{\text{元の関数}}{\boxed{\sin\theta}} + \overset{\text{導関数}}{\boxed{\cos\theta}}\, d\theta$$

sin 関数の微分

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$$

cos の微分

三角形の底辺の長さは、$d\theta\sin\theta$ だけ減っているので、

$$\cos(\theta + d\theta) = \cos\theta - \sin\theta d\theta$$

$$\cos(\theta + d\theta) = \underbrace{\cos\theta}_{\text{元の関数}} + (\underbrace{-\sin\theta}_{\text{導関数}})d\theta$$

cos 関数の微分

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$

2.1.12 ネイピア数

指数関数を定義した際に、「どんな数も 0 乗したら 1 になる」と定義した。

つまり、指数関数 $y = a^x$ において、$x = 0$ での関数の値は 1 である。

ここでさらに、$x = 0$ でのグラフの傾きも 1 となるような a を探し、その値をネイピア数と呼ぶことにする。

ネイピア数（自然対数の底）

指数関数 $y = a^x$ において、$x = 0$ での接線の傾きが 1 となるような底 a の値をネイピア数と呼び、e と表す。

この定義では、「$x = 0$ では関数の値も傾きも等しく 1 になる」という、$x = 0$ での振る舞いにしか言及していない。

だが、実はネイピア数を底とする指数関数は、「微分しても変わらない（すべての x において、関数の値と傾きが一致する）」という性質を持つ。

2.1.13 ネイピア数を底とする指数関数の微分

指数関数 $y = e^x$ の微分は、導関数の定義から次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
&= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

ここで、$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ は x によらない定数であり、

$$
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x}
$$

というように、これは $x = 0$ における傾き（導関数に $x = 0$ を代入したもの）を表している。

そもそも、ネイピア数 e の定義は「$x = 0$ での e^x の傾きが 1」というものだったので、

$$
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1
$$

となり、「e^x は微分しても変わらない」という性質が導かれる。

$$
\frac{d}{dx}e^x = e^x
$$

ネイピア数を底とする指数関数の微分

ネイピア数を底とする指数関数は、微分しても変わらない関数である。

$$
\frac{d}{dx}e^x = e^x
$$

指数が定数倍されている場合

$y = e^{kx}$ のように、指数が定数倍（k 倍）されている場合は、合成関数の微分の公式を使って計算できる。

$t = kx$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dt}{dx}\cdot\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{d}{dx}(kx)\cdot\frac{d}{dt}(e^t) \\
&= k\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}}\cdot e^t \\
&= ke^t \\
&= ke^{kx}
\end{aligned}
$$

となり、e^{kx} 自体は変わらず、指数の係数 k が e の肩から「降りてくる」形になる。

ネイピア数を底とする指数関数の微分（指数が定数倍されている場合）

k を定数とし、指数が k 倍されている場合は、微分すると全体が k 倍される。

$$
\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx}
$$

指数が関数の場合

指数が関数になっている場合 $y = e^{f(x)}$ の微分も、合成関数の微分を使って考えればよい。

$t = f(x)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \\
&= \frac{d}{dt}e^t\cdot\frac{d}{dx}f(x) \\
&= e^t\cdot f'(x) \\
&= e^{f(x)}\cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

ネイピア数を底とする指数関数の微分（指数が関数の場合）

$$
\frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}
$$

2.1.14 一般の指数関数の微分

指数関数の底の変換公式より、a を底とする指数関数の微分は、ネイピア数 e を底とする指数関数の微分（指数が定数倍されている場合）に帰着できる。

REVIEW

指数関数の底の変換公式

$$a^x = b^{(\log_b a)x}$$

指数関数の底の変換公式において、$b = e$ の場合を考えると、

$$a^x = e^{(\log a)x}$$

となるので、指数が $\log a$ 倍された、e を底とする指数関数の微分として考えればよい。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}a^x &= \frac{d}{dx}e^{(\log a)x} \\ &= (\log a)e^{(\log a)x} \\ &= (\log a)a^x \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx}$$

$$e^{(\log a)x} = a^x$$

指数関数の微分

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x(\log a)$$

2.1.15 対数関数の微分

自然対数の微分（底がネイピア数の対数の微分）

底がネイピア数である対数は、自然対数と呼ばれる。

自然対数

底がネイピア数 e である対数関数を 自然対数 といい、次のように底 e を省略して表記する。

$$\log x$$

$y = \log x$ は $x = e^y$ の逆関数であるから、e^y の微分 e^y の逆数を考えればよい。

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

自然対数の微分

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$$

2.1.16 対数微分法

真数が関数である自然対数の微分

$y = \log f(x)$ の微分は、対数微分法と呼ばれる微分テクニックの原理となる。

この微分は、$t = f(x)$ として合成関数の微分を考えることで計算できる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log f(x) &= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\\ &= \frac{d}{dt}\log t\cdot\frac{d}{dx}f(x)\\ &= \frac{1}{t}\cdot f'(x)\\ &= \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\\ &= \frac{f'(x)}{f(x)}\end{aligned}$$

真数が関数である自然対数の微分

$$\frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ここで、この式を $f'(x) = \ldots$ の形に直してみよう。

$$f'(x) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}\log f(x)$$

関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ は、log を取ってから微分したもの $\frac{d}{dx}\log f(x)$ に、元の関数 $f(x)$ をかけることでも計算できることがわかる。

対数微分法の原理

log を取ってから微分したものに元の関数をかける操作は、微分することと同じになる。

$$f'(x) = f(x) \cdot (\log f(x))'$$

この原理によって、$f(x)$ の微分計算を、$\log f(x)$ の微分計算に置き換えることが可能になる。

対数を取ることで、対数の性質が使えるようになるため、微分が簡単になることがある。そんなときにこの原理が役に立つ。

対数微分法でライプニッツ則（関数の積の微分）を導く

$f(x)g(x)$ の微分を、対数経由で計算してみよう。

まず、$\log(f(x)g(x))$ の微分は、「積の対数が対数の和になる」という対数の性質を用いて、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log(f(x)g(x)) &= \frac{d}{dx}(\log f(x) + \log g(x)) \\ &= \frac{d}{dx}\log f(x) + \frac{d}{dx}\log g(x) \\ &= \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}\end{aligned}$$

対数微分法の原理より、この式に $f(x)g(x)$ をかけたものが、$f(x)g(x)$ の微分になる。

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= f(x)g(x) \cdot \frac{d}{dx}\log(f(x)g(x)) \\ &= \cancel{f(x)g(x)} \cdot \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{\cancel{f(x)g(x)}} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

これは、関数の積の微分公式である、ライプニッツ則の式に一致している。

対数微分法で分数関数の微分（関数の商の微分）を考える

続いて、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の微分も対数微分法で計算してみよう。

$\log \dfrac{f(x)}{g(x)}$ の微分は、「商の対数が対数の差になる」という対数の性質を用いて、次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \log \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx} (\log f(x) - \log g(x)) \\
&= \frac{d}{dx} \log f(x) - \frac{d}{dx} \log g(x) \\
&= \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}
\end{aligned}
$$

対数微分法の原理より、この式に $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ をかけたものが、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の微分になる。

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{d}{dx} \log \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \frac{\cancel{f(x)}}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\cancel{f(x)}g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}
$$

分数関数の微分

$$
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
$$

関数の積・商の微分の比較

対数を取ってから微分すると、ライプニッツ則と分数関数の微分の違いがシンプルに表現される。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log\left(f(x)g(x)\right) &= \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} \\
\frac{d}{dx}\log\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}
\end{aligned}
$$

あとは、これらに $f(x)g(x)$ や $\frac{f(x)}{g(x)}$ をかけることで、元の関数の微分の式が導ける。

2.2　高階微分とテイラー展開

2.2.1　高階微分とその表記

関数 $f(x)$ を微分したもの $f'(x)$ をさらに微分して、その結果をさらに微分して…というように、「導関数の導関数」を繰り返し考えていくことを高階微分という。

まずは、2 回微分した場合について定義しよう。

$f(x)$ を 2 回微分したものは、ニュートン記法では $f''(x)$ と表される。

ライプニッツ記法で表現するには、次のように考えるとよい。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

二階微分（二階導関数）

関数 $f(x)$ を微分して得られた導関数 $f'(x)$ をさらに微分することを 二階微分 といい、その結果得られた導関数を 二階導関数 という。

二階導関数は、次のように表記される。

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

n 階微分も同様に定義される。

n が大きな値になると、プライム記号をつける表記では $f'''''''(x)$ のようになってわかりづらいので、$f^{(n)}(x)$ のようにプライムの数 n を添える記法がよく使われる。

n 階微分（n 階導関数）

関数 $f(x)$ を n 回微分することを n 階微分 といい、その結果得られた導関数を n 階導関数 という。

n 階導関数は、次のように表記される。

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

2.2.2 冪関数の高階微分

n 次の冪関数 $f(x) = x^n$ を k 回微分すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^n \\
f'(x) &= nx^{n-1} \\
f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\
f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))x^{n-k} \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}
\end{aligned}$$

ここで、$k = n$ とすると、

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)x^{n-n} \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 1 \cdot x^0 \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 1 \\
&= n!
\end{aligned}$$

となり、n 階微分した時点で定数 $n!$ になるので、これ以上微分すると 0 になる。

$$f^{(n+1)}(x) = 0$$

n 次冪関数の高階微分

n 次冪関数 $f(x) = x^n$ の n 階微分は $n!$ となり、$n+1$ 回以上微分すると 0 になる。

$$f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} f^{(n)}(x) &= n! \\ f^{(n+1)}(x) &= 0 \end{aligned}$$

2.2.3 指数関数の高階微分

ネイピア数を底とする指数関数 $f(x) = e^x$ は、何度微分しても変わらない関数である。

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ f'''(x) &= e^x \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= e^x \end{aligned}$$

ネイピア数を底とする指数関数の高階微分

e を底とする指数関数 $f(x) = e^x$ の n 階微分は変わらず e^x となる。

$$f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f^{(n)}(x) = e^x$$

指数が k 倍されている場合 $f(x) = e^{kx}$ は、微分するたびに k が前に落ちてきて、n 階微分すると k^n が前につくことになる。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{kx} \\
f'(x) &= ke^{kx} \\
f''(x) &= k^2 e^{kx} \\
f'''(x) &= k^3 e^{kx} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= k^n e^{kx}
\end{aligned}
$$

ネイピア数を底とする指数関数の高階微分（指数が定数倍されている場合）

e を底とし、指数が定数 k 倍された指数関数 $f(x) = e^{kx}$ の n 階微分は $k^n e^{kx}$ となる。

$$
f(x) = e^{kx} \implies f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}
$$

2.2.4 テイラー展開

微分の導入として話した、関数の各点での直線による近似に立ち返ろう。

REVIEW

関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

$$
f(x) \simeq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)
$$

という傾き $f'(x)$ の直線に近似できる。

この式に $x = x_0$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
f(x_0) &\simeq f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) \\
f(x_0) &\simeq f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 \\
\therefore \quad f(x_0) &= f(x_0)
\end{aligned}
$$

となり、たしかに点 x_0 では一致することがわかる。

ここで、両辺を高階微分しても、点 x_0 で一致するような近似式を作りたい。

一階微分が一致するなら点 x_0 でのグラフの傾きが等しく、二階微分が一致するなら点 x_0 でのグラフの曲がり具合が等しい、…といった具合に、高階微分を一致させていけば、どんどん本物の関数 $f(x)$ に近い近似式が得られるからだ。

n 階微分してから $x = x_0$ を代入しても、$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ が成り立つようにするには、近似式の右辺 $f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ をどのように変更すればよいだろうか？

$f'(x)(x - x_0)$ の n 階微分

右辺を微分した時点で定数項 $f(x_0)$ は消えてしまうので、$f'(x)(x - x_0)$ の微分結果だけが残ることになる。

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(f'(x)(x - x_0)\right)$$

そこで、$f'(x)(x - x_0)$ の高階微分がどうなるかを探っていく。1 階微分から順に見ていこう。

この計算では、関数の積の微分（ライプニッツ則）を思い出す必要がある。

REVIEW

関数の積の微分（ライプニッツ則）

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x)$$

積の各項の微分を計算しておくと、

$$\frac{d}{dx}f'(x) = f''(x)$$
$$\frac{d}{dx}(x - x_0) = \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}x_0 = 1 - 0 = 1$$

となるので、ライプニッツ則より、1 階微分は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f'(x)(x - x_0)\right) &= \underbrace{\boxed{f''(x)}}_{f'(x)\text{ の微分}}(x - x_0) + f'(x) \cdot \underbrace{\boxed{1}}_{(x - x_0)\text{ の微分}} \\ &= f''(x)(x - x_0) + f'(x)\end{aligned}$$

この結果をもう一度微分すると、2 階微分が求まる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= \frac{d}{dx}\left(f''(x)(x-x_0)+f'(x)\right)\\
&= \frac{d}{dx}f''(x)(x-x_0) + \frac{d}{dx}f'(x)\\
&= \overset{f''(x)\text{ の微分}}{\boxed{f'''(x)}}\,(x-x_0) + f''(x)\cdot \overset{(x-x_0)\text{ の微分}}{\boxed{1}} + f''(x)\\
&= f'''(x)(x-x_0) + 2f''(x)
\end{aligned}
$$

さらにもう一度微分することで、3 階微分が求められる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= \frac{d}{dx}\left(f'''(x)(x-x_0)+2f''(x)\right)\\
&= \frac{d}{dx}f'''(x)(x-x_0) + 2\frac{d}{dx}f''(x)\\
&= \overset{f'''(x)\text{ の微分}}{\boxed{f''''(x)}}\,(x-x_0) + f'''(x)\cdot \overset{(x-x_0)\text{ の微分}}{\boxed{1}} + 2f'''(x)\\
&= f''''(x)(x-x_0) + 3f'''(x)
\end{aligned}
$$

プライム記号の数が増えてきたので、$f''' = f^{(3)}$ のように書き直して結果をまとめると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(2)}(x)(x-x_0) + f^{(1)}(x)\\
\frac{d^2}{dx^2}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(3)}(x)(x-x_0) + 2f^{(2)}(x)\\
\frac{d^3}{dx^3}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(4)}(x)(x-x_0) + 3f^{(3)}(x)\\
&\vdots\\
\frac{d^n}{dx^n}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(n+1)}(x)(x-x_0) + nf^{(n)}(x)
\end{aligned}
$$

のように続き、n 階微分の結果が得られる。

$x = x_0$ を代入すると…

これで、$f(x)$ の n 階微分 $f^{(n)}(x)$ は、次のように表せることがわかった。

$$f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)(x - x_0) + nf^{(n-1)}(x)$$

ここに、$x = x_0$ を代入してみると、

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)\underbrace{(x_0 - x_0)}_{0} + n \overbrace{\boxed{f^{(n-1)}(x_0)}}^{\text{定数の微分は }0} \\ &= f^{(n)}(x_0) \cdot 0 + n \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

というように、右辺の項がすべて消えて、0 になってしまう。

$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ を成り立たせるには、右辺に項が足りないということになる。

n 階微分して $x = x_0$ を代入しても 0 にならず、$f^{(n)}(x_0)$ として生き残るような項を、元の近似式の右辺に追加する必要がある。

近似式の続きを予想する

具体的にどんな項を加えていけばよいかは、式の規則性から予想していくことにする。

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

という式を、次のように読み替えてみよう。

$$f(x) \simeq \underbrace{f^{(0)}(x_0)(x - x_0)^0}_{0\text{ 次の項}} + \underbrace{f^{(1)}(x_0)(x - x_0)^1}_{1\text{ 次の項}}$$

$f(x_0)$ は 0 階微分（微分を 1 回もしていない、そのままの関数）と考えて、$f^{(0)}(x_0)$ と書いた。

また、0 乗は必ず 1 になるので、$f(x_0)$ の後ろには $(x - x_0)^0 = 1$ が隠れていると考えることができる。

このように書き換えた式をみると、なんとなく次のような続きを予想できる。

$$f(x) \stackrel{?}{=} \underbrace{f^{(0)}(x_0)(x - x_0)^0}_{0\text{ 次の項}} + \underbrace{f^{(1)}(x_0)(x - x_0)^1}_{1\text{ 次の項}} + \underbrace{f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3}_{3\text{ 次の項}} + \cdots$$

この式が正しいかどうかはわからないが、この式をベースに調整を加えていくアプローチを試してみよう。

2次の項を加えた近似式

まず2次の項だけ加えた状態で、$f(x)$ の2階微分を考えてみる。

$$f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2$$

このとき、元の近似式は2階微分すると0になってしまうので、元の近似式にあった0次の項と1次の項は2階微分によって消えてしまうことになる。

よって、$f(x)$ の2階微分は、2次の項だけの微分として考えればよい。

定数なので外に出せる

$$\begin{aligned}
f''(x) &\stackrel{?}{=} \frac{d^2}{dx^2}\left(f''(x_0)\,(x - x_0)^2 \right) \\
&= f''(x_0) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(x - x_0)^2 \\
&= f''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\left\{ \frac{d}{dx}(x - x_0)^2 \right\} \\
&= f''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\,(2(x - x_0)) \\
&= f''(x_0) \cdot 2\frac{d}{dx}(x - x_0) \\
&= f''(x_0) \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 2f''(x_0)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}X^n = nX^{n-1}$$

$x = x_0$ を代入すると、

$$f''(x_0) = 2f''(x_0)$$

という、微妙に惜しい結果が得られる。

この結果から、2次の項に $\dfrac{1}{2}$ をかけておけば、$f''(x_0) = f''(x_0)$ が成り立たせることができるとわかる。

つまり、近似式は次のように修正すればよい。

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}_{2\text{ 次の項}} + \cdots$$

3 次の項を加えた近似式

3 階微分した場合、先ほど追加した 2 次の項も消えてしまうので、さらに 3 次の項を加える必要がある。

$$\begin{aligned} f'''(x) &\stackrel{?}{=} \frac{d^3}{dx^3}\left(f'''(x_0)(x - x_0)^3\right) \\ &= f'''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left((x - x_0)^3\right)\right)\right) \\ &= f'''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(3(x - x_0)^2\right)\right) \\ &= f'''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}(3 \cdot 2(x - x_0)) \\ &= f'''(x_0) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

先ほどと同じように考えて、3 次の項に $\frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{3!}$ をかけておけば、$f'''(x_0) = f'''(x_0)$ が成り立たせることができる。

これで、近似式は次のようになる。

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3}_{3\text{ 次の項}} + \cdots$$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$ なので、2 次の項の係数も階乗で書き直している。

0 次の項と 1 次の項についても、$0! = 1$、$1! = 1$ を使って書き換えれば、次のような規則的な式になっていることがわかる。

$$f(x) \simeq \underbrace{\frac{1}{0!} f^{(0)}(x_0)(x - x_0)^0}_{0\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{1!} f^{(1)}(x_0)(x - x_0)^1}_{1\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{3!} f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3}_{3\text{ 次の項}} + \cdots$$

これで、n 次の項まで加えていった一般形が想像つくようになったのではないだろうか。

無限に項を加えた近似式：テイラー展開

同じような考え方で、n 次の項まで加えた近似式を作ることができる。

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$n \to \infty$ とした場合のこの近似式には、テイラー展開という名前がつけられている。

テイラー展開

関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で何回でも微分可能であるとき、関数 $f(x)$ が x_0 の付近で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

と表せるなら、この式を関数 $f(x)$ の $x = x_0$ 周りにおける テイラー展開 という。

特に、$x_0 = 0$ の場合のテイラー展開には、マクローリン展開という別な名前がつけられている。

マクローリン展開

関数 $f(x)$ が $x = 0$ で何回でも微分可能であるとき、関数 $f(x)$ が 0 の付近で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

と表せるなら、この式を関数 $f(x)$ の マクローリン展開 という。

2.3 1 変数関数の積分

積分とは、「部分を積み重ねる」演算である。

微小部分を調べる微分と、微小部分を積み重ねる積分は、互いに逆の操作になっている。

2.3.1 区分求積法：面積の再定義

長方形の面積は、なぜ「縦 × 横」で求められるのだろうか？

そこには、長方形の横幅分の長さを持つ線分を、長方形の高さに達するまで積み重ねるという発想がある。

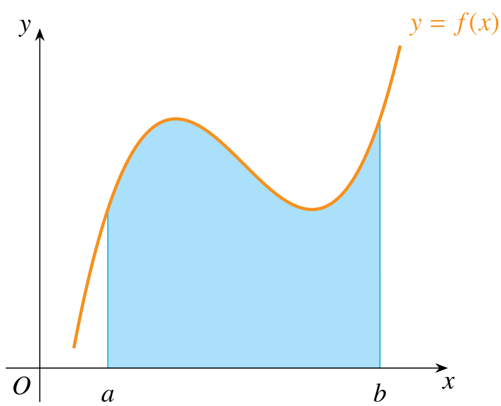
面積の計算を「線を積み重ねる」という発想で捉えると、あらゆる形状の面積を考えることができる。

長方形では、積み重ねる線の長さは一定だが、他の形状では、積み重ねる線の長さが変化する。

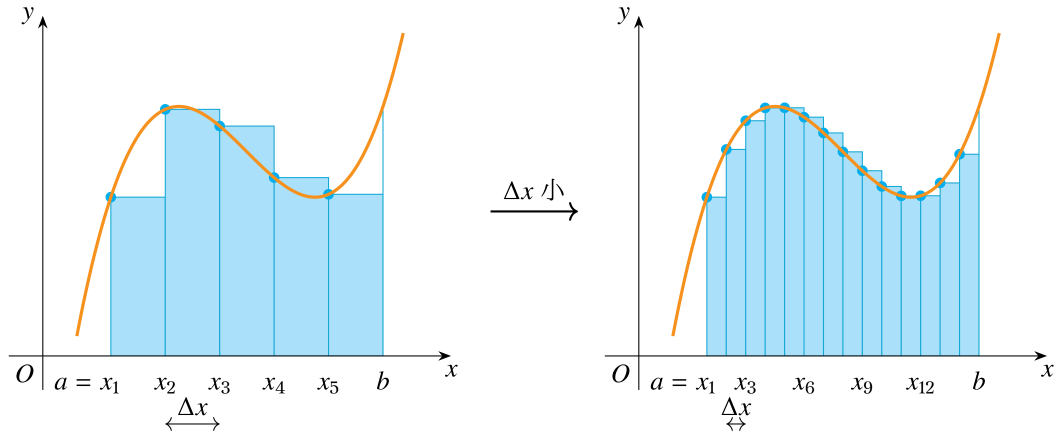
積み重ねるべき線の長さを、関数で表すことができたら…

* * *

関数 $y = f(x)$ が与えられたとき、高さ $f(x)$ の線分を a から b までの区間で積み重ねることで、x 軸とグラフに挟まれた部分の面積を求めることを考える。



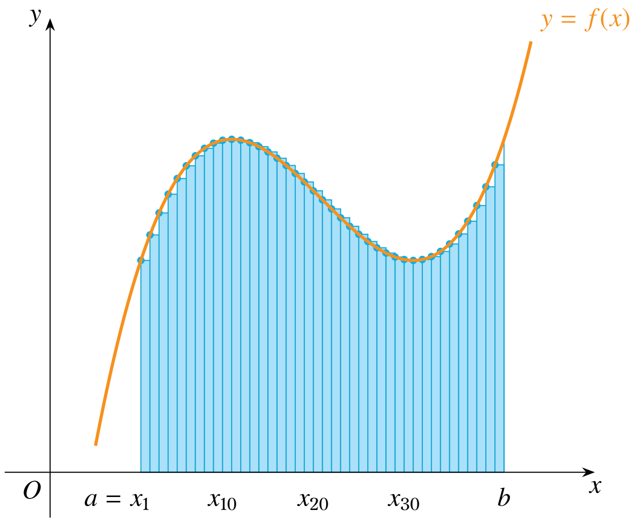
この考え方は、面積を求めたい部分を長方形に分割し、長方形の幅を限りなく 0 に近づけるという操作で表現できる。



$a \leq x \leq b$ の区間を n 等分して、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする。
分割された各長方形は、幅が Δx で、高さが $f(x)$ であるので、各長方形の面積は次のように表せる。

$$\Delta S = f(x) \cdot \Delta x$$

どんどん Δx を小さくしていくと、細かい長方形分割で、面積を求めたい図形を近似できる。



つまり、求めたい面積は、分割した長方形の面積をすべて足し合わせることで近似できる。

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$\Delta x \to 0$ の果てでは、幅を持たなくなった長方形は線分とみなせるので、もはや近似ですらなくなるだろう。

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

このような考え方は、区分求積法と呼ばれる。

2.3.2 定積分：面積を求める積分

ここで、区間 $a \leq x \leq b$ における関数 $y = f(x)$ と x 軸の間の面積 S を求める式を、次のように表記する。

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\sum$ は離散的な和を表す記号であり、例えば $\sum\limits_{i=0}^{n}$ であれば、i を 1 ずつ増やして n に達するまで足し合わせることを意味する。

一方、ここで新たに導入した $\int$ は連続的な和を表す記号であり、微小変化を繰り返しながら足し合わせることを意味する。

$\sum$ は間隔を取って足し合わせるのに対し、$\int$ は間隔を限りなく小さくして足し合わせる。

足し合わせる間隔を限りなく小さくするという操作は、極限を取る操作に相当するので、$\sum$ の極限を取ったもの $\lim \sum$ をまとめて $\int$ という記号で表記したと捉えることができる。

さらに、$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ とした果ての Δx は、微小変化を意味する dx と書き換えられている。

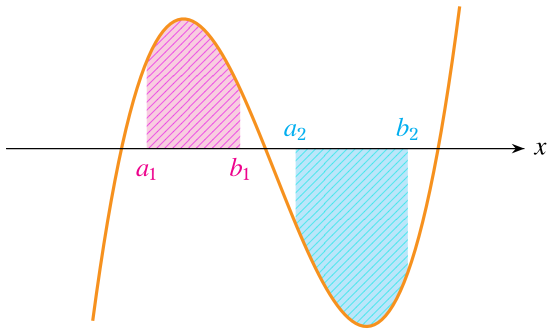
定積分

$a \leq x \leq b$ の区間内における関数 $f(x)$ のグラフと x 軸の間の領域の符号付き面積を求める演算を定積分と定義し、次のように表記する。

$$\int_a^b f(x)dx$$

このとき、$f(x)$ を被積分関数と呼ぶ。

$f(x)$ の値が負になる区間では、定積分の値も負になるため、定積分は符号付き面積を表す。



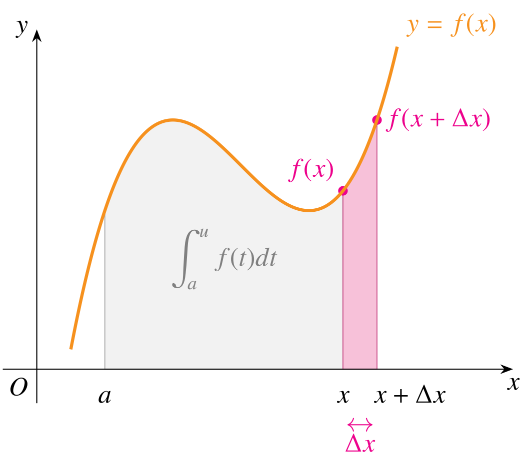
2.3.3 微小範囲の定積分から微分へ

定積分 $\int_a^b f(x)dx$ は、積分区間の取り方（a や b の値）を変えると、当然異なる計算結果になる。

ここで、下端 a は固定し、上端 b を変化させて積分区間を広げていくことを考えよう。
上端が変化することを強調するため、上端は x と表記することにする。
このとき、定積分 $\int_a^x f(t)dt$ は、上端 x の関数として捉えられる。

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$\int$ の中で使っている変数 t は、積分区間の下端から上端まで動く変数であり、どんな文字を使ってもよい。「t が下端 a から上端 x まで動く」なら違和感なく聞こえるが、「x が下端 a から上端 x まで動く」というのはややこしいので、上端 x と区別するために t を使うことにした。

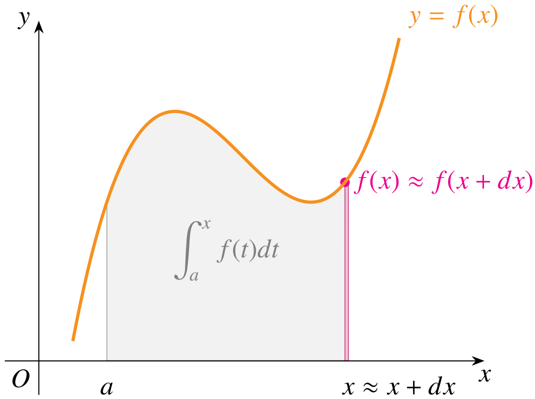


x を Δx だけ増加させたときに増える面積は、

$$S(x+\Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

となるが、ここでさらに Δx を小さくしていくと…

増えた領域は、幅 dx、高さ $f(x)$ の長方形とみなせるので、その面積は $f(x)dx$ となる。



よって、$\Delta x \to 0$ としたときには、

$$S(x+dx) - S(x) = f(x)du$$

という式が成り立ち、これは実は見慣れた微分の関係式と同じ形をしている。

$$S(x+dx) = \underbrace{S(x)}_{\text{元の関数}} + \underbrace{f(x)}_{\text{導関数}} du$$

この式は、定積分したもの $F(x)$ を x で微分すると、積分前の関数 $f(x)$ に戻るということを示している。

このような「積分したものを微分すると、元の関数に戻る」という事実は、微積分学の基本定理として知られている。

微積分学の基本定理　積分の逆の演算は微分である。

2.3.4　不定積分：原始関数を求める積分

定積分の定義は面積から始まったが、定積分という操作で「微分したら元の関数に戻る」ような関数を作ることもできた。

ここで、「微分したら元の関数に戻る」関数を次のように定義する。

原始関数

微分することで元の関数 $f(x)$ が得られる関数を、$f(x)$ の 原始関数 と呼び、$F(x)$ と表す。

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

「微分したら元の関数に戻る」関数の 1 つが、前節で調べた $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ であったが、実はこのような関数は他にも存在する。

例えば、定数を微分すると 0 になるため、$S(x)$ に任意の定数 C を加えた関数 $S(x) + C$ を作っても、その微分結果は変わらず元の関数になる。

このことは、「原始関数には定数 C 分の不定性がある」などと表現されることがある。

「微分したら元の関数に戻る」関数を求める演算、すなわち「微分の逆演算」として捉えた積分を新たに定義してみよう。

不定積分

関数 $f(x)$ から原始関数 $F(x)$ を求める演算を、$f(x)$ の 不定積分 と呼び、次のように表す。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ここで、C は 積分定数 と呼ばれる任意の定数である。

2.3.5 原始関数による定積分の表現

少し前に、定積分 $\int_a^x f(t)dt$ を上端 x の関数 $S(x)$ とみて、x を微小変化させることで、$S(u)$ が $f(u)$ の原始関数である（$S(u)$ を u で微分したら $f(u)$ になる）ことを確かめた。

REVIEW

区間 Δx での面積の増分を考え、

$$S(x+\Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$\Delta x \to 0$ とすれば、次のような微分の関係式が得られる。

$$S(x+dx) = \underbrace{\boxed{S(x)}}_{\text{元の関数}} + \underbrace{\boxed{f(x)}}_{\text{導関数}} dx$$

さらに前節では、「微分したら元に戻る」原始関数は 1 つだけではなく、任意の定数 C を用いた $F(x)+C$ も、$f(x)$ の原始関数であることを述べた。

そこで、$f(x)$ の任意の原始関数を $F(x)$ とおくことにする。

原始関数は任意の定数 C 分だけ異なるので、$f(x)$ の原始関数の 1 つである $S(x)$ は、$f(x)$ の他の原始関数 $F(x)$ を C 分ずらしたものになるはずである。

$$S(x) = F(x) + C$$

ここで、$S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ に、$x = a$ を代入すると、下端と上端が一致する領域の面積（定積分）は明らかに 0 なので、

$$S(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

なんとここから、C を求めることができる。

$S(a) = F(a) + C = 0$ より、

$$C = -F(a)$$

この C を用いて、$S(x)$ を次のように表現できる。

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

$x = b$ を代入することで、積分区間の上端を b に戻した定積分を考えると、

$$S(b) = F(b) - F(a)$$
$$S(b) = \int_a^b f(x)dx$$

という、$S(b)$ について 2 通りの表現が得られる。

> 上端を表す x という変数が現れなくなったので、$\int$ の中で使っていた変数 t はしれっと x に戻している。$\int$ の中の x は「下端 a から上端 b まで動く」という意味しか持っていないので、何の文字を使っても意味は変わらない。

得られた 2 通りの表現式を組み合わせることで、次のような関係が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

原始関数による定積分の表現

関数 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であれば、定積分は次のように計算できる。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ここで現れる $F(b) - F(a)$ という量は、次の記号で表される。

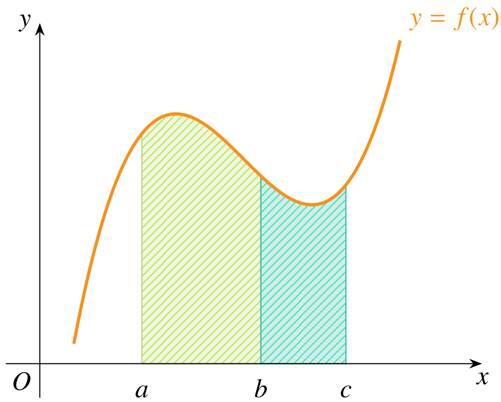
$$\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

2.3.6　定積分の性質

面積としての理解だけではうまく想像できない性質も、原始関数との関係を使うことで数式で確かめられるようになる。

積分区間の結合

2 つの定積分があり、それらの積分区間が連続していれば、1 つの定積分としてまとめて計算できる。



積分区間が連続する定積分の和

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

面積として考えれば明らかな性質だが、原始関数を使って証明することもできる。

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると、

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\
&= F(c) - F(a) \\
&= \int_a^c f(x)dx
\end{aligned}$$

として、式が成立することがわかる。

積分区間の反転

積分区間の上限と下限を入れ替わると、符号が変わる。

定積分の積分区間の反転

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

これは、積分区間が連続する定積分の和の性質における、$c = a$ の場合の式である。

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx &= \int_a^a f(x)dx \\
&= 0 \\
\int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx
\end{aligned}
$$

定積分の線形性

微分や $\sum$ 記号などと同様に、定積分も線形性を持つ。

定積分の線形性

$$
\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx
$$

この性質は、微分の線形性から導かれる。

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$、$g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすると、微分の線形性より、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\{\alpha F(x) + \beta G(x)\} &= \alpha \frac{d}{dx} F(x) + \beta \frac{d}{dx} G(x) \\
&= \alpha f(x) + \beta g(x)
\end{aligned}
$$

となるから、$\alpha f(x) + \beta g(x)$ の原始関数は $\alpha F(x) + \beta G(x)$ である。

よって、定積分を原始関数を使って書き表すと、

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx &= \alpha F(b) - \alpha F(a) + \beta G(b) - \beta G(a) \\
&= \alpha \{F(b) - F(a)\} + \beta \{G(b) - G(a)\} \\
&= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx
\end{aligned}
$$

となり、原始関数を使うことで、微分の線形性から定積分の線形性につながることがわかる。

2.3.7 不定積分の性質

原始関数は、微分によって元の関数に戻る関数だった。

そして、元の関数から原始関数を求める演算が不定積分である。

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\int"] \end{tikzcd}$$

原始関数という言葉にとらわれないように表現すると、結局は次のような関係が成り立っている。

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f'(x) \arrow[l, bend left, "\int"] \end{tikzcd}$$

不定積分と微分は逆の演算

関数を微分すると導関数になり、導関数を不定積分すると元の関数に戻る。

このような関係によって、微分が持つ性質から、不定積分の性質を導くことができる。

不定積分の線形性

微分の線形性から、不定積分の線形性も成り立つ。

REVIEW

微分の線形性

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x)$$

微分の線形性の式の両辺を不定積分すると、左辺は微分する前の関数 $\alpha F(x) + \beta G(x)$ に戻るので、

$$\begin{aligned} \int (\alpha F(x) + \beta G(x))' dx &= \int \{\alpha F'(x) + \beta G'(x)\} dx \\ \alpha F(x) + \beta G(x) &= \int \{\alpha F'(x) + \beta G'(x)\} dx \end{aligned}$$

ここで、導関数を不定積分すると元の関数に戻ることから、

$$F(x) = \int F'(x)dx$$
$$G(x) = \int G'(x)dx$$

と置き換えることができる。

これらを使って左辺を書き換えると、

$$\alpha \int F'(x)dx + \beta \int G'(x)dx = \int \{\alpha F'(x) + \beta G'(x)\}\, dx$$

$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数、$G(x)$ は $g(x)$ の原始関数であるとすると、微分したらそれぞれ元に戻るので、次のように書き表せる。

$$\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx = \int \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx$$

不定積分の線形性

$$\int \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Chapter 3

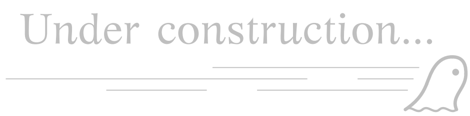
線形代数

線形代数は、高次元に立ち向かうための強力な道具となる。

どれだけ高次元に話を広げたとしても、「関係」を語る言葉の複雑さが増すことはない。
この章では、そんな状況を実現するための理論を追いかけていく。

3.1　ベクトルの定義

3.1.1　移動の表現としてのベクトル



3.1.2　ベクトルの多次元化：数ベクトル

多次元空間内の「移動」を表すには、「縦」と「横」の 2 方向だけでなく、もっと多くの数が必要になる。
また、4 次元を超えてしまうと、矢印の描き方すら想像がつかなくなってしまう。それは、方向となる軸が多すぎて、どの方向に進むかを表すのが難しくなるためだ。

そこで、一旦「向き」の情報を取り除くことで、高次元に立ち向かえないかと考える。
移動を表す矢印は「どの方向に進むか」と「どれくらい進むか」という向きと大きさの情報を持っているが、その「どれくらい進むか」だけを取り出して並べよう。

こうして単に「数を並べたもの」もベクトルと呼ぶことにし、このように定義したベクトルを数

ベクトルという。

数を並べるとき、縦と横の 2 通りがある。それぞれ列ベクトル、行ベクトルとして定義する。

列ベクトル　数を縦に並べたものを 列ベクトル という。

$$\boldsymbol{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

行ベクトル　数を横に並べたものを 行ベクトル という。

$$\boldsymbol{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

単に「ベクトル」と言った場合は、列ベクトルを指すことが多い。

行ベクトルは、列ベクトルを横倒しにしたもの（列ベクトルの転置）と捉えることもできる。

転置による行ベクトルの表現

行ベクトルは、列ベクトル $\boldsymbol{a}$ を 転置 したものとして表現できる。

$$\boldsymbol{a}^\top = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

3.1.3　ベクトルの演算

ベクトルによって数をまとめて扱えるようにするために、ベクトルどうしの演算を定義したい。

ベクトルの和

ベクトルどうしの足し算は、同じ位置にある数どうしの足し算として定義する。

ベクトルの和　2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和を次のように定義する。

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=[a_i]+[b_i]=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$$

i 番目の数が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に存在していなければ、その位置の数どうしの足し算を考えることはできない。

そのため、ベクトルの和が定義できるのは、同じ次元を持つ（並べた数の個数が同じ）ベクトルどうしに限られる。

数ベクトルを「どれくらい進むか」を並べたものと捉えると、同じ位置にある数どうしを足し合わせるということは、同じ向きに進む量を足し合わせるということになる。

たとえば、x 軸方向に a_1、y 軸方向に a_2 進んだ場所から、さらに x 軸方向に b_1、y 軸方向に b_2 進む…というような「移動の合成」を表すのが、ベクトルの和である。

1. 図

ベクトルのスカラー倍

「どれくらい進むか」を表す数たち全員に同じ数をかけることで、向きを変えずにベクトルを「引き伸ばす」ことができる。

2. 図

ここで位置ごとにかける数を変えてしまうと、いずれかの方向に多く進むことになり、ベクトルの向きが変わってしまう。そのため、「同じ」数をかけることに意味がある。

3. 図

そこで、ベクトルの定数倍（スカラー倍）を次のように定義する。

ベクトルのスカラー倍　n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ の k 倍を次のように定義する。

$$k\boldsymbol{a} = k[a_i] = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$

3.2 ベクトルの作り方

3.2.1 一次結合

ベクトルを「引き伸ばす」スカラー倍と、「つなぎ合わせる」足し算を組み合わせることで、あるベクトルを他のベクトルを使って表すことができる。

4. 図

このように、スカラー倍と和のみを使った形を一次結合もしくは線形結合という。

3.2.2 基底

3 次元までのベクトルは、矢印によって「ある点を指し示すもの」として定義できる。
しかし、4 次元以上の世界に話を広げるため、ベクトルを単に「数を並べたもの」として再定義した。

点を指し示すためのもう一つの概念として、座標がある。
座標も結局は矢印と同様に、x 軸方向にこのくらい進み、y 軸方向にこのくらい進む、というように、「進む方向」と「進む長さ」を持つ。

単なる数の並びを、向きと大きさを持つ量として復元するための道具が、基底である。

3.3 ベクトルの測り方

Under construction...

Chapter 4

多変数関数

Under construction...

Chapter 5

複素数と複素関数

5.1　虚数の導入

5.1.1　$x^2 = -1$ の解は存在するか？

「負の数と負の数をかけたら正の数になる」というのが、中学校で初めて数学の門を叩いて真っ先に学ぶ事実である。

$$(-1) \times (-1) = 1$$

方程式の言葉で書けば、$x^2 = 1$ の解の一つは $x = -1$ となる。（もう一つの解は $x = 1$ だ。）
では、次の方程式の解は考えられるだろうか？

$$x^2 = -1$$

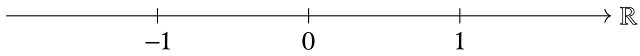
x^2 ということは、同じ数 x どうしをかけて -1 にならなければならない。
とはいえ、正の数どうしをかけても正の数になるし、負の数どうしをかけても正の数になる。

つまり、このような x は「存在しない」ということになる。
しかし、このような方程式の解が存在した方がありがたいと考えた人もいた。（私たちもこの先、その有り難さを知ることになる。）

「負の数と負の数をかけたら正の数になる」というこれまでの数の体系を壊さずに、$x^2 = -1$ が成り立つような数を新たに考えよう、という話が始まる。

5.1.2 回転で捉える数直線の拡張

これまでの数の体系である実数は、すべて数直線上に存在していた。



$x^2 = -1$ の解となる x は、少なくともこの数直線上には存在しない。

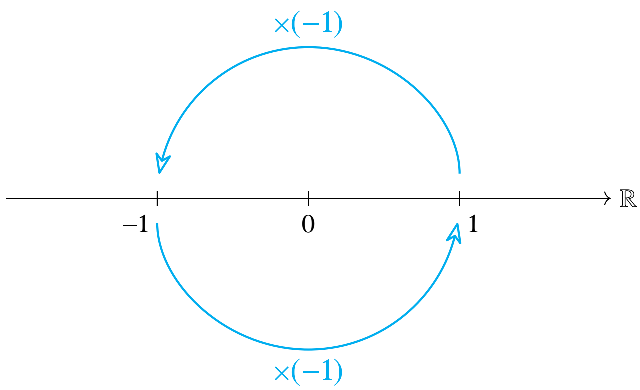
ならば、数の体系を平面に拡張して考えてみよう。

まずは、平面というスケールに飛び出して $(-1) \times (-1) = 1$ を考えてみる。

$$1 \times (-1) \times (-1) = 1$$

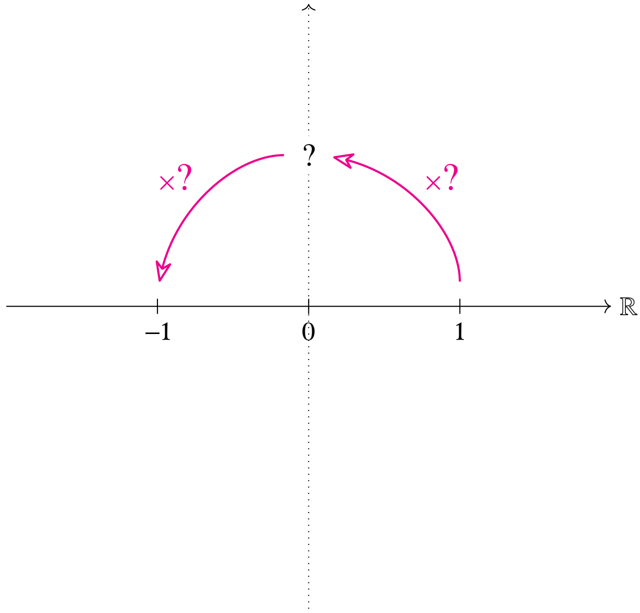
と書き直すと、「-1 を 2 回かけたら 1 に戻る」ということがいえる。

図示すると、次のようなことが起こっていると考えられないだろうか？

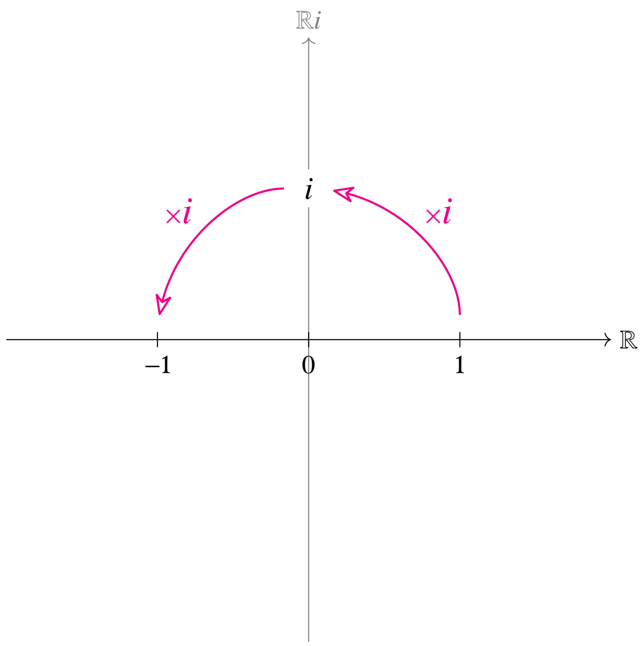


「-1 をかける」という操作を、平面上の 180 度回転と捉える。

すると、2 回かけて -1 になる数（$x^2 = -1$ の解）は、180 度回転の中間に位置する数と考えることができる。



このような方向性で拡張した数を複素数といい、? にあたる数は虚数 i と呼ぶことにする。



5.1.3 虚数の定義

前節での話を踏まえて、新たな数を次のように定義する。

虚数 方程式 $x^2 = -1$ の解の一つを **虚数** と呼び、i と表す。

これで、$x^2 = -1$ の解を、次のように記述できるようになった。

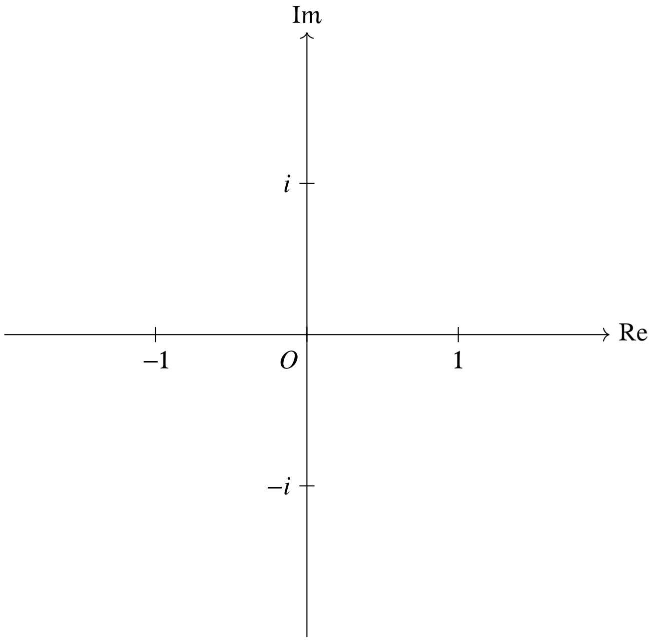
$x^2 = -1$ の解　方程式 $x^2 = -1$ の解は、$x = i$ と $x = -i$ の 2 つ存在する。

5.2　複素数の表現

5.2.1　複素数と複素平面

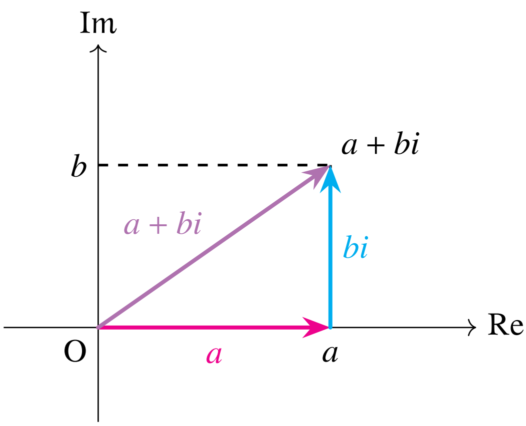
前章では、数直線上の 1 から 90 度回転したところに、虚数 i という数が存在するという考え方を導入した。

このような平面において、実数が存在する軸（お馴染みの数直線）を実軸 Re、虚数が存在する軸を虚軸 Im と呼ぶことにする。



では、実軸上にも虚軸上にもない、平面上の点に位置する数は、どう表せばよいだろうか？

平面上の点をベクトル（矢印）で表す考え方を流用して、次のように考えてみる。



a というベクトルは実軸上の単位ベクトル 1 を a 倍したもの、bi というベクトルは虚軸上の単位ベクトル i を b 倍したものと考え、平面上の任意の数はそれらのベクトルの和の形で表す。

このとき、a を実部、b を虚部と呼び、$a+bi$ の形で表した数を複素数という。

複素数

i を虚数単位、a,b を実数とし、次の形で表される数を 複素数 という。

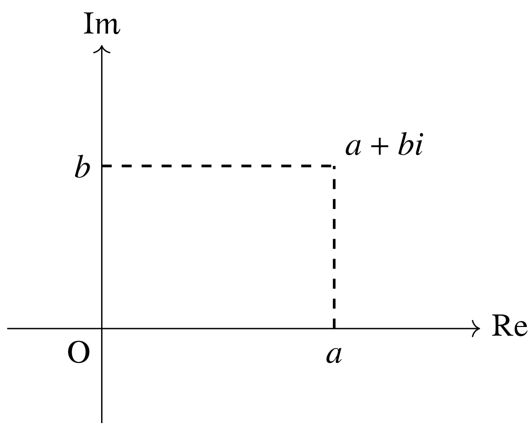
$$a+bi$$

このとき、a を 実部 、b を 虚部 と呼ぶ。

$b=0$ であるとき、複素数 $a+bi$ は実数 a となるので、複素数は実数を含む数の体系（実数の拡張）となっている。

また、数直線の拡張として考えてきた平面は、平面上の各点が複素数に対応するので、複素平面と呼ばれる。
数直線が実数の集合を表すのに対し、複素平面は複素数の集合を表す。

複素平面　複素数の実部を横軸、虚部を縦軸にとった平面を 複素平面 と呼ぶ。



複素平面において、実軸を Re、虚軸を Im と表記しているのは、複素数の実部（Real Part）と虚部（Imaginary Part）をそれぞれの軸で表しているからである。

5.2.2　複素数の絶対値と偏角

複素数を複素平面上のベクトルとして捉えることで、複素数に幾何学的な意味を持たせることができる。

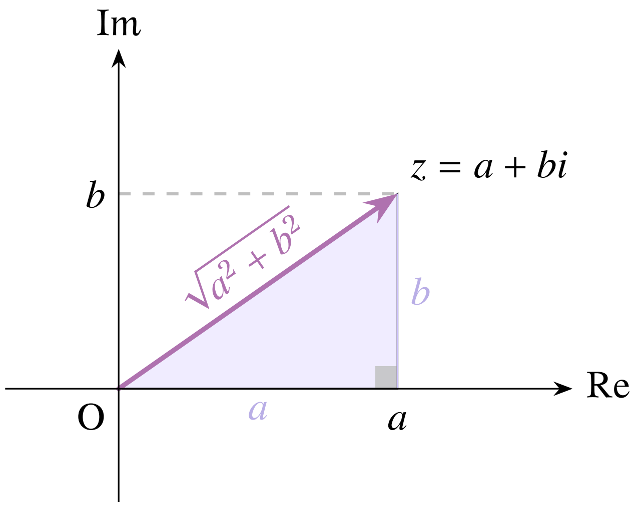
そして最終的には、-1 をかける操作が 180 度回転であることや、i をかける操作が 90 度回転であることの一般化として、複素数のかけ算に複素平面上の回転という解釈を与える。

そのための準備として、まずは複素数に関する「長さ」と「角」を定義しよう。

複素数の「長さ」

実数における絶対値は、数直線上の原点 0 からその数までの距離を表していた。

複素数の絶対値も、同じように「原点からの距離」として定義する。



複素数の絶対値

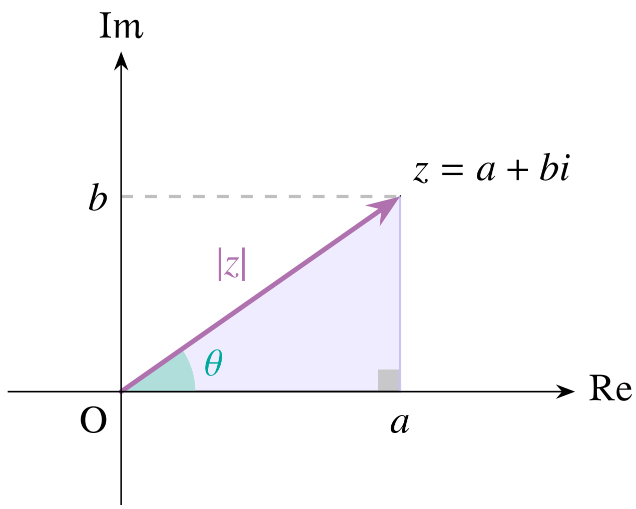
複素平面において、原点から複素数 $z = a + bi$ までの距離を複素数 z の絶対値と定義する。

この距離は三平方の定理から求められ、$|z|$ と表す。

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

複素数の「回転角」

ここで、複素数 z が 0 でなければ、原点 O から z までを結ぶベクトルと、実軸 Re の正の向きとのなす角 θ を考えることができる。



複素数の偏角

0 でない複素数 z に対して、複素平面上の原点 O から複素数 z までを結ぶベクトルと、実軸の正の向きとのなす角 θ を、複素数 z の 偏角 と呼び、次のように表す。

$$\arg z = \theta$$

ここで、θ を整数回 2π シフトさせても（何周回転させても）、同じ複素数 z の位置に戻ってくる。

つまり、1 つの複素数 z に対して偏角の値は複数考えられるので、それが困る場合には、主値と呼ばれる代表値を使うことにする。

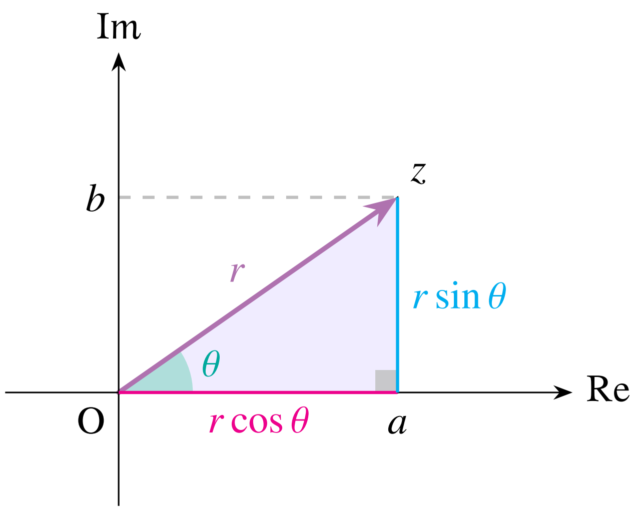
偏角の主値

複素数 z の偏角のうち、$0 \leq \theta \leq 2\pi$、もしくは $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲にある偏角を 主値 と呼び、次のように表す。

$$\operatorname{Arg} z = \theta$$

5.2.3 複素数の極形式

複素数が持つ「長さ」と「角」を定義したところで、それらを使って1つの複素数を表現できないか？ということを考える。



複素数 $z = a + bi$ の絶対値を r、偏角を θ とすると、

$$a = r\cos\theta$$

$$b = r\sin\theta$$

となり、複素数 z は絶対値と偏角を使った表示（極形式）に置き換えることができる。

極形式

複素数 z は、その絶対値 r と偏角 θ を用いて次のように表すことができる。

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

絶対値を「半径」、偏角を「回転角」とみなし、それらを使って複素数を表現できたことで、複素数と回転との関係についても調べる準備が整った。

5.3 複素数の四則演算

図形的な意味を考えながら、複素数の四則演算を定義していこう。

5.3.1 複素数の和と差

複素数の和・差は、ベクトルの和・差と同じように定義される。

複素数の和と差

複素数 $z = a + bi, w = c + di$ について、z と w の和（差）を次のように定義する。

$$z \pm w = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

つまり、実部同士・虚部同士の足し算（引き算）を行えばよい。
実部同士を足したものが実部になり、虚部同士を足したものが虚部になる。
この定義は、実部と虚部を並べたベクトルの和（差）と一致している。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm c \\ b \pm d \end{pmatrix}$$

5.3.2 複素数の積

複素数の積は、ベクトルの演算から定義をそのまま流用することはできない。（そもそも、ベクトルの積とは何か？という問題になる。）

複素数のかけ算で成り立っていてほしい性質は、-1 をかける操作が 180 度回転であることや、i をかける操作が 90 度回転であることだ。
というわけで、複素数の積は回転を表すものとして定義したい。

回転行列から定義を探る

複素数 $z = a + bi$ の実部と虚部を並べたベクトル $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ を、原点を中心に θ だけ回転させたベクトルは、2 次元の回転行列を左からかけた形で次のように表せる。

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix}$$

ここで、絶対値が 1、偏角が θ である複素数 $w = c + di$ の実部と虚部は、

$$c = \cos\theta$$
$$d = \sin\theta$$

と表せるから、これらを使って回転行列を書き直してみる。

$$\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}$$

これは、複素数 $z = a + bi$ の実部と虚部を並べたベクトルを、複素数 $w = c + di$ の実部と虚部だけを使って回転させたものと捉えられる。
つまり、z に w をかけることで z を回転させたいのなら、z と w の積を

$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

と考えればよいのではないだろうか。

複素数の積

複素数 $z = a + bi, w = c + di$ について、z と w の積を次のように定義する。

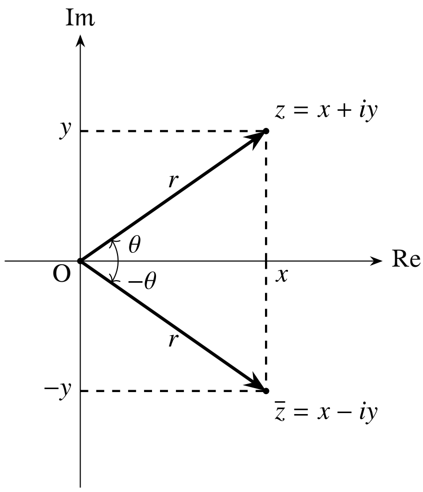
$$zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

5.4 共役複素数

共役複素数

複素数 $z = x + iy$ に対して，その共役複素数 $\bar{z}$ を次のように定義する。

$$\bar{z} := x - iy$$



共役複素数と絶対値

複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ の積は、z の絶対値の二乗に等しい。

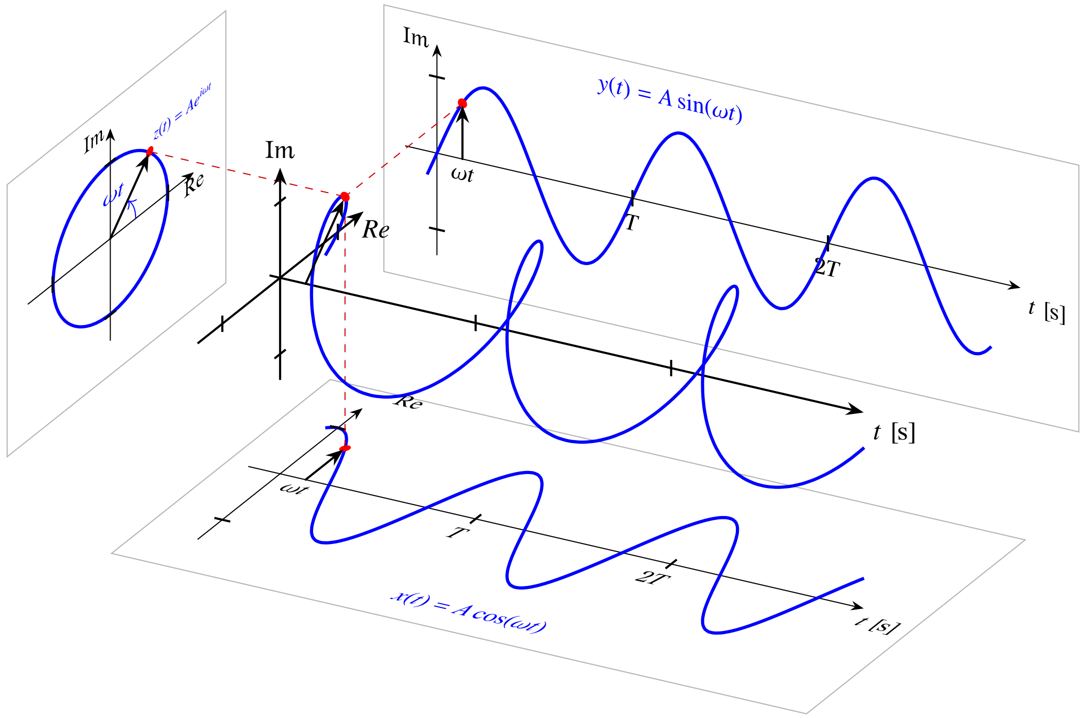
$$z\bar{z} = |z|^2$$

Proof: 共役複素数と絶対値

複素数 $z = x + iy$ とその共役複素数 $\bar{z} = x - iy$ の積を計算する。

$$
\begin{aligned}
z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\
&= x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 \\
&= x^2 + y^2 \\
&= |z|^2
\end{aligned}
$$

5.5 オイラーの公式



Im
Re
$z(t) = Ae^{j\omega t}$
ωt
Im
Re
Re
t [s]
Im
$y(t) = A\sin(\omega t)$
ωt
T
$2T$
t [s]
ωt
T
$2T$
t [s]
$x(t) = A\cos(\omega t)$

Chapter 6

フーリエ解析

6.1　波の 2 つの捉え方

波は 2 つの捉え方ができる。

- 空間的に捉える波：波の形そのもの
- 時間的に捉える波：波の振動

6.1.1　空間的に捉える波

波とは、一定の間隔で同じ形が繰り返されるものである。

空間的に捉える波は、まさにその波の形そのもので、波の形を位置 x の関数として表す。

波長　波を構成する最小パターンの幅を波長と呼び、λ で表す。

周期関数　次の式を満たす関数 $f(x)$ を、周期 λ の周期関数という。

$$f(x+\lambda) = f(x)$$

波数　2π の長さに含まれる、波の最小パターンの数を波数という。

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

6.1.2　時間的に捉える波

波を時間軸から見たとき、波を構成する最小パターンは幅ではなく時間である。

その最小パターンを周期と呼ぶ。

周期は、波を時間軸から見たときの「波長」の言い換えともいえる。

周期　波が 1 回振動するのにかかる時間を周期と呼び、T で表す。

周期関数　次の式を満たす関数 $f(t)$ を、周期 T の周期関数という。

$$f(t+T) = f(t)$$

周波数（振動数）

単位時間に含まれる、波の最小パターンの数を周波数という。

$$\nu = \frac{1}{T}$$

これは、単位時間に何回振動するかを表すため、振動数とも呼ばれる。

6.2 角周波数と正弦波

角周波数　動径が単位時間内に進む角を角周波数と呼び、ω で表す。

任意の時間における動径

時間が t だけ経過したときの動径 θ は、角周波数 ω を使って次のように表すことができる。

$$\theta = \omega t$$

$\sin\theta$ や $\cos\theta$ は、$\theta = \omega t$ の関係を用いると、動径 θ ではなく角周波数 ω の関数とみることができる。

正弦波　$\sin\omega t$ や $\cos\omega t$ を、角周波数 ω の正弦波と呼ぶ。

6.2.1 角周波数と振動数の関係

円の 1 周は 2π であり、単位時間あたりに進む円周は角周波数 ω である。

（角周波数は「角」の大きさとして定義したが、弧度法のおかげで、「円周」の長さとしても捉えられる。）

ここで、単位時間あたりに進む円周 ω は、1 周 2π のうちのどれくらいだろうか？

その答えは、ω を「1 周あたりの量」2π で割ったものになる。

角周波数と円周の関係

角周波数 ω で動径が回転するとき、その動径は単位時間に

$$\frac{\omega}{2\pi}$$

だけ円を回ることになる。

ここで、三角関数は円関数とも呼ばれるように、円の 1 周は三角関数の 1 振動に対応する。

振動を円周上の回転として表す三角関数のおかげで、「どれくらい回るか？」を「どれくらい振動するか？」とみることができる。

つまり、動径が単位時間に $\frac{\omega}{2\pi}$ だけ回転するということは、単位時間に $\frac{\omega}{2\pi}$ だけ振動するということだ。

角周波数と振動数の関係

角周波数を ω とすると、振動数 ν は次のように表せる。

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

6.2.2 角周波数と周期の関係

ここまでで、振動数 ν は 2 通りの表し方ができることがわかった。

- $\nu = \frac{1}{T}$（周波数：単位時間に含まれる、最小波の時間幅）
- $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$（振動数：単位時間に含まれる、振動の回数）

この 2 式を組み合わせて、次のような関係が得られる。

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

角周波数と周期の関係

角周波数を ω、周期を T とすると、次のような関係が成り立つ。

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

6.3 偶関数と奇関数

sin 関数と cos 関数は、どちらも正弦波と呼ばれるが、その性質は異なる。

sin は奇関数であり、cos は偶関数である。

この違いが、後に議論するフーリエ級数展開においても重要な役割を果たす。

6.3.1 偶関数と奇関数は異なる対称性を持つ

偶関数

グラフが y 軸に対して対称な関数を偶関数と呼ぶ。

偶関数は、任意の x に対して次の関係が成り立つ関数として定義される。

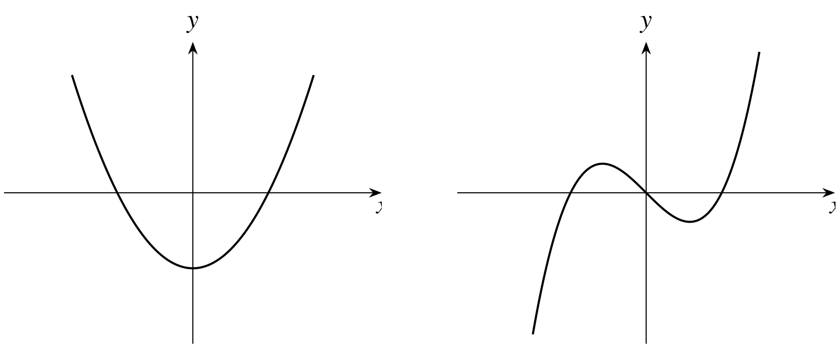
$$f(-x) = f(x)$$

奇関数

グラフが原点に対して対称な関数を奇関数と呼ぶ。

奇関数は、任意の x に対して次の関係が成り立つ関数として定義される。

$$f(-x) = -f(x)$$



偶関数: $f(-x) = f(x)$　　奇関数: $f(-x) = -f(x)$

1 つの関数が、この両方の性質を持つことはない。

つまり、偶関数であり奇関数でもある関数は存在しない。

6.3.2 積に関する性質

偶関数と奇関数の積 偶関数と奇関数の積は、奇関数となる。

Proof: 偶関数と奇関数の積

$f(x)$ を奇関数、$g(x)$ を偶関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= -f(-x)g(-x) \\ f(-x)g(-x) &= -f(x)g(x) \end{aligned} \quad \text{両辺 } -1 \text{ 倍して両辺入れ替え}$$

となり、引数を -1 倍すると符号が反転するため、$f(x)g(x)$ は奇関数である。

奇関数どうしの積 奇関数と奇関数の積は、偶関数となる。

Proof: 奇関数どうしの積

$f(x), g(x)$ を奇関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= -f(-x)\cdot\{-g(-x)\} \\ &= f(-x)g(-x) \end{aligned}$$

となり、引数を -1 倍しても符号がそのままなので、$f(x)g(x)$ は偶関数である。

偶関数どうしの積 偶関数と偶関数の積は、偶関数となる。

Proof: 偶関数どうしの積

$f(x), g(x)$ を偶関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(-x)g(-x) \\ f(-x)g(-x) &= f(x)g(x) \end{aligned} \quad \text{両辺入れ替え}$$

となり、引数を −1 倍しても符号がそのままなので、$f(x)g(x)$ は偶関数である。

6.3.3 和に関する性質

奇関数どうしの和 奇関数と奇関数の和は、奇関数となる。

Proof: 奇関数どうしの和

$f(x), g(x)$ を奇関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= -f(-x) - g(-x) \\ &= -\{f(-x) + g(-x)\} \\ f(-x) + g(x) &= -\{f(x) + g(x)\} \end{aligned}$$

両辺 −1 倍して両辺入れ替え

となり、引数を −1 倍すると符号が反転するため、$f(x) + g(x)$ は奇関数である。

偶関数どうしの和 偶関数と偶関数の和は、偶関数となる。

Proof: 偶関数どうしの和

$f(x), g(x)$ を偶関数とすると、

$$f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)$$

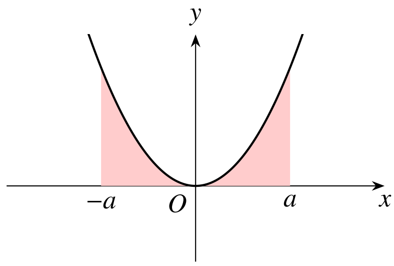
となり、引数を −1 倍しても符号がそのままなので、$f(x) + g(x)$ は偶関数である。

6.3.4 偶関数・奇関数の積分

偶関数の積分公式

原点に関して対称な区間 $-a \leq x \leq a$ において、$f(x)$ が偶関数なら、次の式が成り立つ。

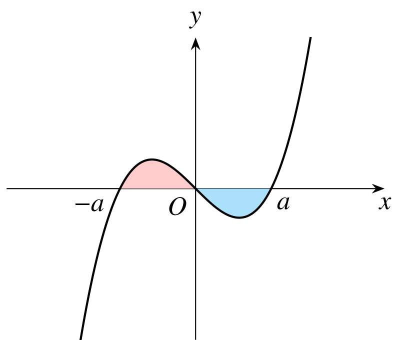
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$



奇関数の積分公式

原点に関して対称な区間 $-a \leq x \leq a$ において、$f(x)$ が奇関数なら、次の式が成り立つ。

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$



6.4 直交関数系としての三角関数

sin は奇関数であり、cos は偶関数であることから導かれる、sin と cos の重要な性質がある。

6.4.1 関数の内積と直交関数系

ベクトルの内積は、次のように定義されていた。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

ここで、離散的な和 $\sum$ を、連続的な足し合わせ $\int$ に置き換えることで、この内積の定義を関数に拡張する。

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

このように拡張して定義された関数の内積は、ベクトルの内積と同様の性質を持つことが知られている。

関数の内積

2 つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積を以下のように定義する。

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

ベクトルの内積では、「2 つのベクトルが直交しているとき、その内積は 0 になる」という性質があった。内積が 0 というのは、「互いに共通な成分を一切持たない」ということであり、図形的には 2 つのベクトルのなす角が直角であることを意味していた。

関数の内積においても、「異なる関数どうしの内積が 0 であれば、2 つの関数は直交している」と表現しよう。

関数の直交性

関数が 直交 しているとは、自身以外との内積が 0 であることをいう。

そして、互いに直交する関数の集合は、直交関数系と呼ばれる。

直交関数系

関数の集合 $\{f_n(x)\}$ が直交関数系であるとは、任意の $n \neq m$ に対して

$$\int_a^b f_n(x) f_m(x) dx = 0$$

が成り立つことをいう。

直交関数系は、基底としての役割も果たす。

直交しているベクトルを基底ベクトルとして使うことで、基底ベクトルの一次結合で他のベクトルを表現できるのと同じように、直交関数系を使うことで、関数を「直交基底関数の一次結合」として表現できる。

6.5　フーリエ級数

6.5.1　そもそも級数とは

級数展開

ある関数 $f(x)$ を、より基本的な関数系

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$$

を使って、次のような級数で表すことを級数展開という。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

級数展開は、近似や性質の分析に役立つ。

代表的な級数展開：マクローリン展開

$f(x)$ が無限回微分可能なとき、$f(x)$ は多項式関数 $\{x^0, x^1, x^2, \dots\}$ を使って級数展開できる。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

このような級数展開をマクローリン展開という。

代表的な級数展開：フーリエ級数展開

$f(x)$ が特定の条件を満たすとき、$f(x)$ は三角関数を使って級数展開できる。

このような級数展開をフーリエ級数展開といい、これからの議論の対象となる。

6.5.2 有限区間で定義された関数のフーリエ級数展開

有限区間で定義された関数のフーリエ級数展開

$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$（区間幅 T の有限区間）で定義された関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

6.5.3 フーリエ級数展開の周期関数への拡張

元の関数 $f(t)$ には区間の制限を設けていたが、フーリエ級数を構成する三角関数は、無限区間で定義されている。

そして、三角関数は、区間幅 T だけずらしても同じ値をとる、周期 T の周期関数である。

つまり、特定の区間内の関数 $f(t)$ の形を、無限区間内で T ずつずらしていっても、それを表現するフーリエ級数の式は変わらない。

関数 $f(t)$ が、区間の制限をなくしても同じ形を繰り返すだけ（周期関数）であれば、先ほどのフーリエ級数展開がそのまま成り立つことになる。

周期関数のフーリエ級数展開

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$

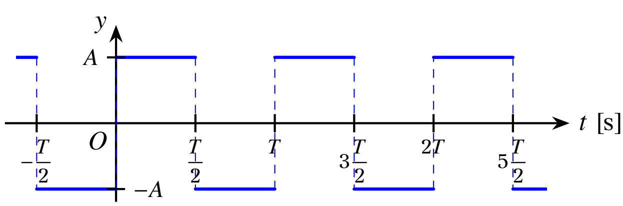
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

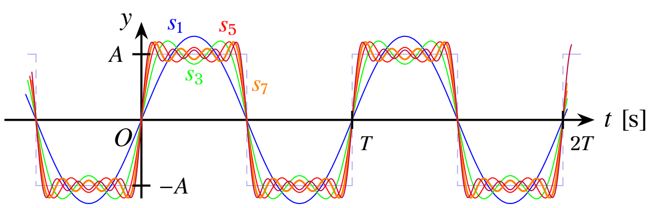
6.5.4 不連続点におけるフーリエ級数の値

次のような矩形波 $f(t)$ では、$t = \dfrac{T}{n}$ が不連続な点となる。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$$



この関数をフーリエ級数展開し、k 項までの和を求めた結果が、s_k のような波形となる。



k が大きくなるほど、s_k は元の矩形波 $f(t)$ に近づいていることがわかる。
ここで、元の関数の不連続点である $t = \frac{T}{n}$ において、s_k は不連続点を通過している。
例えば、$t = 0$ において、$t = 0$ より左側では $-A$ に近い値、右側では A に近い値をとる。

- $t = 0$ に右から近づいていくと、s_k は A に近づいていく（右極限は A）
- $t = 0$ に左から近づいていくと、s_k は $-A$ に近づいていく（左極限は $-A$）

そして、$t = 0$ において、s_k は A と $-A$ の間の値（原点）を通過している。
一般に、不連続となる t において、フーリエ級数展開の値は、その点での左右の極限値の平均値となる。

不連続点におけるフーリエ級数の収束

$f(t)$ が $t = a$ で不連続のとき、フーリエ級数の値は左極限 $f(a-0)$ と右極限 $f(a+0)$ の平均値に収束する。

$$\lim_{t \to a} s_k(t) = \frac{f(a-0) + f(a+0)}{2}$$

6.5.5 フーリエ級数展開の意味

フーリエ級数展開の式は、

- 1 の係数が a_0
- $\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ の係数が a_n
- $\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ の係数が b_n

となっていた。
フーリエ級数展開は、次の基本関数系を使った級数展開といえる。

$$\left\{1, \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right\}$$

ここで、

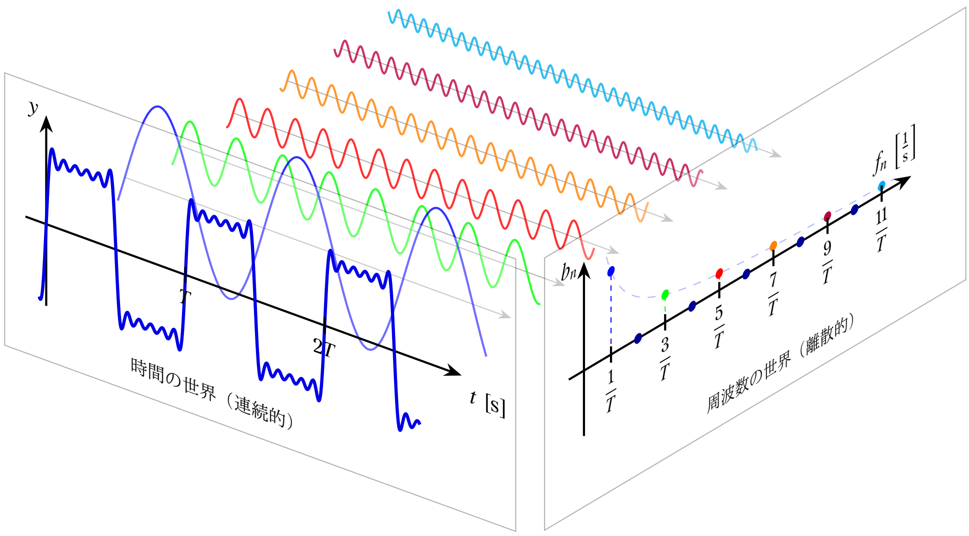
REVIEW

$\sin \omega t$ や $\cos \omega t$ は、角周波数 ω の正弦波と呼ばれる

ことを思い出すと、フーリエ級数展開を構成する基本関数系は、角周波数 $\omega_n = \dfrac{2\pi n}{T}$ の正弦波である。

（1 は $\cos \dfrac{2\pi nt}{T}$ における、$n = 0$ の場合だと考えることができる。）

つまり、フーリエ級数展開は、関数 $f(t)$ を角周波数 ω_n の正弦波に分解することである。



関数 $f(t)$ がどのような周波数成分で構成されているか？を解き明かすのがフーリエ級数展開で、フーリエ係数は時間領域から周波数領域へのマッピングの役割を果たしている。

6.5.6 フーリエ級数展開のさまざまな表現式

フーリエ級数展開の式は、文献によって異なるいくつかの形で表現される。

定数項をまとめた表現

定数項 a_0 を、a_n の $n = 0$ の場合として考えることができる。

その場合、フーリエ級数展開は次のように表される。

フーリエ級数展開（フーリエ係数を整理した表現）

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_n, b_n は次のようになる。

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

角周波数を使った表現

角周波数 $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ を使って、フーリエ級数展開の式を書き換えることもできる。

フーリエ級数展開（角周波数を使った表現）

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、角周波数 ω_0 を用いて、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_0 nt + b_n \sin \omega_0 nt)$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\omega_0 ntdt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\omega_0 ntdt$$

区間を 0 始まりにずらした表現

有限区間 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ で定義された関数のフーリエ級数展開を考えてきたが、その有限区間は区間幅が T であればなんでもよい。

特に、$0 \leq t \leq T$ で定義された関数のフーリエ級数展開を考えることも多い。

区間を変えても、周期関数への拡張は同様の議論により成り立ち、次のことがいえる。

フーリエ級数展開（積分区間を 0 始まりにした表現）

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

このフーリエ係数の式は、区間 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ の場合の式を平行移動＋置換積分することで示される。

6.5.7 奇関数のフーリエ級数（フーリエ正弦級数）

$f(t)$ が奇関数の場合、それを表現するフーリエ級数には、奇関数しか入らない。

奇関数と奇関数の和が奇関数になることから、そう予想できる。

偶関数 cos の項が消え、奇関数 sin の項だけが残ることを確かめるため、各フーリエ係数を計算してみよう。

定数項 a_0

原点に対して対称な範囲での奇関数の積分は 0 になるから、

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{奇}}{f(t)}\, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

cos の項の係数 a_n

$\int$ の中身を見ると、奇関数と偶関数の積は奇関数になるので、積分結果は 0 になる。

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{奇}}{\overset{\text{奇}}{f(t)}\ \overset{\text{偶}}{\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}}\, dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

sin の項の係数 b_n

$\int$ の中身を見ると、奇関数と奇関数の積は偶関数になるので、

REVIEW

偶関数の積分公式

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

を使って計算する。

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{偶}}{\boxed{\overset{\text{奇}}{\boxed{f(t)}}\ \overset{\text{奇}}{\boxed{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}}}}\, dt \\
&= \frac{2}{T}\cdot 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\
&= \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt
\end{aligned}
$$

まとめ：フーリエ正弦級数

以上より、a_0、a_n は 0 になるため、奇関数のフーリエ級数は、sin の項だけで表現される。

奇関数のフーリエ級数は、フーリエ正弦級数と呼ばれる。

フーリエ正弦級数

周期 T の周期関数 $f(t)$ が奇関数であり、

$$f(t) = \overset{\text{フーリエ正弦級数}}{\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 b_n は次のようになる。

$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

6.5.8 偶関数のフーリエ級数（フーリエ余弦級数）

$f(t)$ が偶関数の場合、それを表現するフーリエ級数には、偶関数しか入らない。

偶関数と偶関数の和が偶関数になることから、そう予想できる。

奇関数 sin の項が消え、偶関数 cos の項だけが残ることを確かめるため、各フーリエ係数を計算してみよう。

定数項 a_0

偶関数の積分公式を使って計算する。

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{偶}}{\boxed{f(t)}}\, dt \\
&= \frac{1}{T}\cdot 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt \\
&= \frac{2}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)dt
\end{aligned}
$$

cos の項の係数 a_n

$\int$ の中身を見ると、偶関数と偶関数の積は偶関数になるので、偶関数の積分公式を使って計算する。

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{偶}}{\boxed{\overset{\text{偶}}{\boxed{f(t)}}\ \overset{\text{偶}}{\boxed{\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}}}}\, dt \\
&= \frac{2}{T}\cdot 2\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt \\
&= \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt
\end{aligned}
$$

sin の項の係数 b_n

$\int$ の中身を見ると、偶関数と奇関数の積は奇関数になるので、積分結果は 0 になる。

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \overset{\text{奇}}{\boxed{\overset{\text{偶}}{\boxed{f(t)}}\ \overset{\text{奇}}{\boxed{\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}}}}\, dt \\
&= 0
\end{aligned}
$$

まとめ：フーリエ余弦級数

以上より、b_n は 0 になるため、偶関数のフーリエ級数は、cos の項だけで表現される。

偶関数のフーリエ級数は、フーリエ余弦級数と呼ばれる。

フーリエ余弦級数

周期 T の周期関数 $f(t)$ が偶関数であり、

$$f(t) = a_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)}_{\text{フーリエ余弦級数}}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt$$
$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

Chapter 7

線形システム

7.1　システムの線形性

線形性の 1 つの解釈　システムにおいて、次のような性質を 線形性 という。

1. 倍の刺激があれば、倍の反応が生まれる
2. 2 つの刺激があれば、それぞれが独立して反応する

Appendix A

ε-δ 論法と極限

ここまでのこの本では、極限というものを厳密に定義していなかった。また、微分と積分において、イメージで導出できることを最重視し、厳密な議論を避けた箇所が多くある。

厳密には、極限は ε-δ 論法によって定義され、微分積分の基礎理論は極限の議論に基づいている。ε-δ 論法に踏み込んでいない私たちは、極限というものを語る言葉をまだ持ち合わせていない。

A.1　実数の集合

厳密な理論を展開する上で、知っておくべき言葉の定義を行う。

A.1.1　区間

2 つの実数の間の範囲は、区間と呼ばれる。

区間

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合のうち、$a < b$ である実数 a と b の間にあるすべての実数の集合を 区間 という。

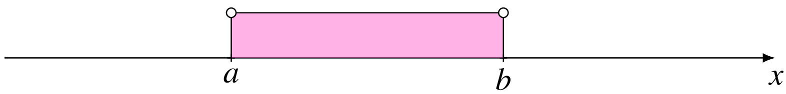
区間は、端点を含むかどうかによって、開区間、閉区間、半開区間に分類される。

開区間

端点を含まない区間を開区間という。

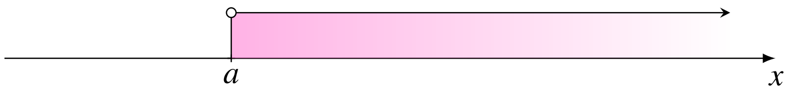
開区間　$a \leq x \leq b$ となる実数 x の集合を 開区間 といい、(a,b) と表す。

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\}$$



閉区間

端点を含まない区間を閉区間という。

閉区間　$a < x < b$ となる実数 x の集合を 閉区間 といい、$[a,b]$ と表す。

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a,+\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$[-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}$$

半開区間

一方の端点を含み、他方の端点を含まない区間を半開区間という。

半開区間　次のような集合を 半開区間 という。

- $a \leq x < b$ となる実数 x の集合を、$[a, b)$ と表す。
- $a < x \leq b$ となる実数 x の集合を、$(a, b]$ と表す。

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

A.2 数列の極限

微分を定義するには関数の極限を考えるが、関数の極限の諸性質は、数列の極限から導かれる。まずは、$\varepsilon - \delta$ 論法（数列の場合は $\varepsilon - N$ 論法とも呼ばれる）によって数列の極限を定義し、その性質をひとつひとつ確かめていこう。

A.2.1 ε で「一致」をどう表現するか

「限りなく近づく」という表現では、「限りなく」の部分に無限という概念が含まれてしまう。
有限の値 ε を使って、無限を表現しようとするのが ε - δ 論法である。

* * *

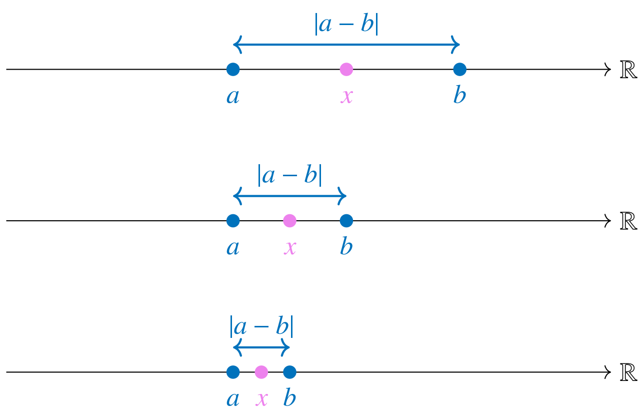
ε - δ 論法で極限を定義する前に、有限値 ε を使った議論の例を見てみよう。

有限値 ε の不等式による一致の表現

a、b を実数とするとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次のことがいえる。

$$|a - b| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

実数は連続である（数直線には穴がない）ため、a と b が異なる実数であれば、a と b の間には無数の実数が存在する。
つまり、a と b が異なる限り、その間の距離 $|a - b|$ は絶対に 0 にはならない。



$|a-b|$ が 0 にならないということは、ここでも実数の連続性によって、$|a-b|$ より小さい実数が存在してしまう。
たとえば、a と b の間の中点 $x = \dfrac{|a-b|}{2}$ は、$|a-b|$ よりも小さい。

> a と b の間の中点というと $\dfrac{a-b}{2}$ だが、正の数 ε と比較するため、絶対値をつけて $\dfrac{|a-b|}{2}$ としている。

$|a-b|$ より小さい実数が存在してしまうと、「任意の」$\varepsilon > 0$ に対して、$|a-b| < \varepsilon$ を成り立たせることができない。
ε はなんでもよいのだから、$|a-b|$ より小さい実数を ε として選ぶこともできてしまう。
しかし、$|a-b|$ より小さい実数を ε としたら、$|a-b| < \varepsilon$ は満たされない。

$|a-b|$ が 0 でないという状況下では、あらゆる実数 ε より $|a-b|$ を小さくすることは不可能である。
したがって、$|a-b| < \varepsilon$ を常に成り立たせるなら、$|a-b| = 0$、すなわち $a = b$ となる。

* * *

ここまでの考察から直観を取り除いて、この定理の数学的な証明をまとめておこう。

Proof: 有限値 ε の不等式による一致の表現

$a \neq b$ と仮定する。

$\varepsilon_0 = \dfrac{|a-b|}{2}$ とおくと、絶対値 $|a-b|$ が正の数であることから、ε_0 も正の数となる。
よって、$|a-b| < \varepsilon_0$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} |a-b| &< \frac{|a-b|}{2} \qquad \text{両辺} \times 2 \\ 2|a-b| &< |a-b| \\ 2|a-b| - |a-b| &< 0 \\ |a-b| &< 0 \end{aligned}$$

絶対値が負になることはありえないので、$a \neq b$ の仮定のもとでは矛盾が生じる。
したがって、$a = b$ でなければならない。 ■

なお、$|a-b| < \varepsilon$ の右辺を定数倍し、$|a-b| < k\varepsilon$ などとしても、この定理は成り立つ。

定理「有限値 ε の不等式による一致の表現」は、定数を k として、次のように書き換えることもできる。

$$|a-b| < k\varepsilon \implies a = b$$

この場合、証明で $\varepsilon_0 = \dfrac{|a-b|}{2k}$ とおけば、まったく同様の議論が成り立つからだ。

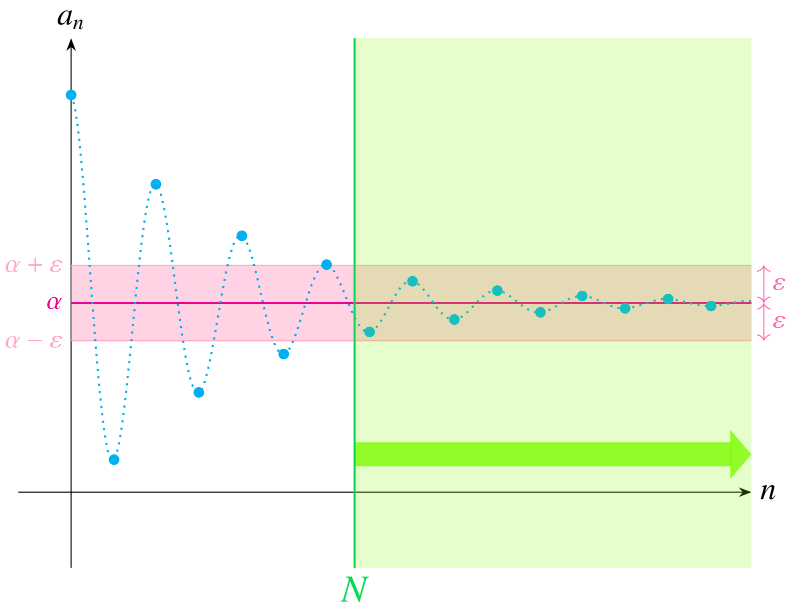
実際に、$|a-b| < 2\varepsilon$ とした場合のこの定理を、後に登場する数列の極限の一意性の証明で使うことになる。

A.2.2 ε - N 論法による数列の収束

$\varepsilon-\delta$ 論法は、数列の極限に適用する場合、$\varepsilon-N$ 論法と呼ばれることが多い。
「数列が $\{a_n\}$ が α に収束する」ことの $\varepsilon-N$ 論法による表現を、まずはイメージで掴んでみよう。

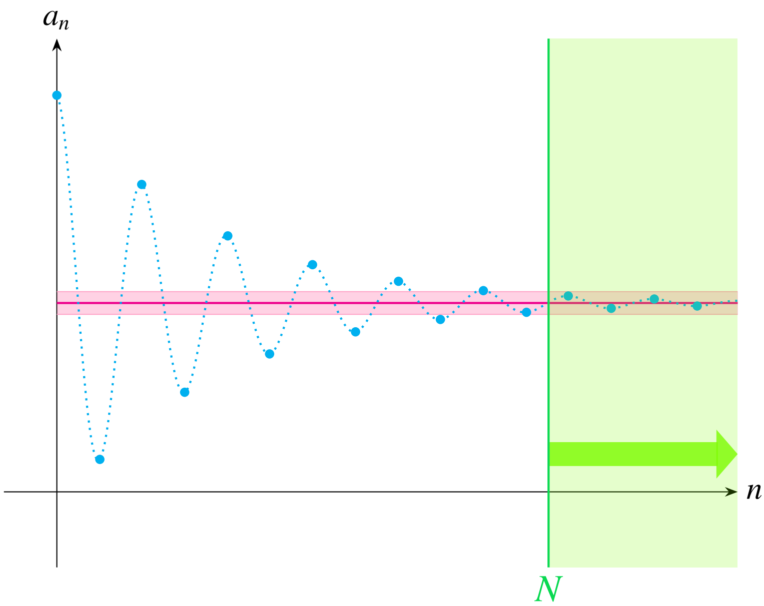
* * *

まず、α の周りに、両側それぞれ ε だけ広げた区間を考える。
ε は正の数ならなんでもよいとすれば、ε を小さな数に設定し、いくらでも区間を狭めることができる。
そして、「ここから先の項はすべて区間内に収まる」といえる位置に、N という印をつけておく。



ε を小さくしていくと、ε による α 周辺の区間に入る項は少なくなる。

それでも、N をずらしていけば、N 以降はこの区間に収まる項だけになる。
これこそが「収束」という現象だと定義するのが、$\varepsilon - N$ 論法の考え方である。



区間幅（の半分）となる ε をどんなに小さくしても、「N 番目以降は区間内に収まる項だけになる」といえるような N を設定できるか？が肝心で、そのような N が存在するなら、数列は収束するといえる。
このことを、数学の言葉でまとめておこう。

数列の収束と極限値

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 α について、次の条件を考える。

任意の正の数 ε に対して

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つような自然数 N が存在する

この条件が成り立つとき、数列 $\{a_n\}$ は α に **収束** するといい、次のように表す。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

このとき、α を数列 $\{a_n\}$ の 極限値 という。

$\varepsilon-\delta$ 論法によるこの定義を用いることで、数列の収束に関する諸性質を証明できるようになる。

A.2.3 数列の極限の一意性

数列が最終的に複数の極限値に散らばるとしたら、それは収束と呼べるだろうか？
$\varepsilon-\delta$ 論法による収束の定義は、そのような状況をきちんと除外するようになっている。

数列が複数の値に収束することはない。このことを示すのが、次の定理である。

数列の極限の一意性
数列 $\{a_n\}$ が収束するならば、その極限値はただ 1 つに定まる。

Proof: 数列の極限の一意性

数列 $\{a_n\}$ が α と β の 2 つの極限値を持つと仮定する。

このとき、任意の正の数 ε に対して、

$$\begin{aligned} n \geq N_1 \quad &\Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon \\ n \geq N_2 \quad &\Longrightarrow \quad |a_n - \beta| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つような自然数 N_1 と N_2 が存在する。

ここで、$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \geq N$ のとき、N_1 と N_2 の大きい方が n 以下に収まることから、$n \geq N_1$ と $n \geq N_2$ がともに成り立つ。

よって、$n \geq N$ のとき、$|\alpha - \beta|$ を考えると、

$$
\begin{aligned}
|\alpha - \beta| &= |\alpha - \beta + \underbrace{a_n - a_n}_{0}| \\
&= |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)| && \text{三角不等式} \\
&\leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| \\
&= |-(a_n - \alpha)| + |a_n - \beta| && |-A| = |A| \\
&= |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| && n_1 \geq N \text{ と } n_2 \geq N \text{ より} \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon \\
\therefore \quad |\alpha - \beta| &< 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

したがって、有限値 ε の不等式による一致の表現より、

$$\alpha = \beta$$

これで、数列 $\{a_n\}$ の極限値はただ 1 つに定まることが示された。 ■

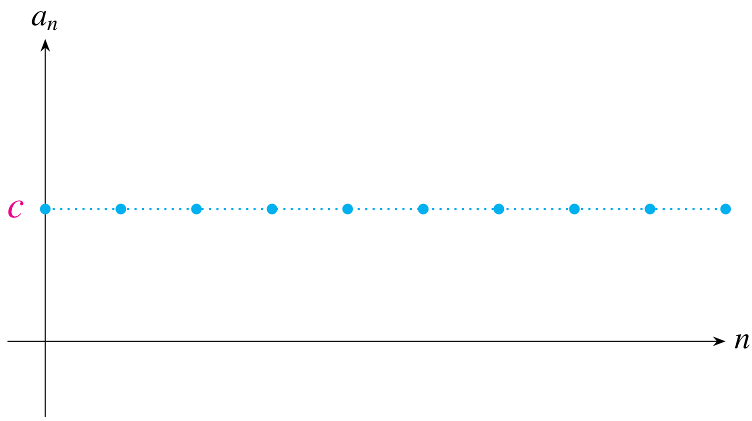
A.2.4 定数数列の極限

最も単純な数列の極限値を、$\varepsilon - N$ 論法で考えてみよう。

ここでは、同じ数だけを並べた数列（定数数列）の極限を考える。

定数数列の極限を考えておくことで、のちに数列の定数倍の極限へと発展させることができる。

定数数列 任意の n に対して $a_n = c$ となる数列 $\{a_n\}$ を定数数列という。



定数 c を並べた数列では、n を大きくしたときの a_n の値も変わらず c なのだから、極限値も当然 c となりそうである。

定数数列の極限

任意の n に対して $a_n = c$ となる定数数列 $\{a_n\}$ は収束し、その極限値は c となる。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c$$

このような当たり前に聞こえる事実も、$\varepsilon - N$ 論法では「当たり前」という直観を排除して議論できる。

Proof: 定数数列の極限

ε を任意の正の数とする。
a_n は n の値によらず c であるから、任意の n に対して次の式が成り立つ。

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$
$$\therefore \quad |a_n - c| < \varepsilon$$

したがって、

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - c| < \varepsilon$$

となるような自然数 N は存在する（というか N はなんでもよい)。
よって、$\{a_n\}$ は収束し、その極限値は c である。 ■

A.2.5 数列の極限の線形性

数列の極限についても、線形性が成り立つ。

数列の極限の線形性

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がともに収束するとき、c を実数とすると、数列 $\{ca_n + cb_n\}$ も収束する。

そして、その極限値は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n + cb_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n + c\lim_{n\to\infty} b_n$$

この線形性の式は、数列の和の極限と、数列の定数倍の極限を組み合わせたものになっている。
それぞれ証明することで、この線形性の式が成り立つことを確認しよう。

数列の和の極限

数列の和の極限

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がともに収束するとき、数列 $\{a_n + b_n\}$ も収束する。

そして、その極限値は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$\{a_n\}$ の極限値を α、$\{b_n\}$ の極限値を β とすると、最終的に次のような関係を導くことで、この定理が証明される。

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)|$ は、$a_n + b_n$ と $\alpha + \beta$ がどれだけ近いか、すなわち $a_n + b_n$ と $\alpha + \beta$ の誤差を表している。そして、この誤差を ε より小さくする必要がある。
そのためには、a_n と α の誤差を $\dfrac{\varepsilon}{2}$ より小さくし、b_n と β の誤差も $\dfrac{\varepsilon}{2}$ より小さくできればよい。

Proof: 数列の和の極限

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおき、ε を任意の正の数とする。

このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同様に、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より、次のような自然数 N_2 が存在する。

$$n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで、$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \geq N$ のとき、$n \geq N_1$ と $n \geq N_2$ がともに成り立つ。

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

よって、$n \geq N$ のとき、三角不等式より、

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \\ \therefore \quad |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

という不等式が成り立つことで、$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ が示された。 ■

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するということは、$\varepsilon - N$ 論法による数列の収束の定義より、

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

という関係が成り立つということである。

ここでの ε は「任意の」正の数であるから、ε の部分にどんな正の数を当てはめても、この関係が成り立つことになる。

数列の和の極限の証明では、ε の部分に $\frac{\varepsilon}{2}$ を当てはめた関係を利用している。

数列の定数倍の極限

数列の定数倍の極限

数列 $\{a_n\}$ が収束するとき、c を実数とすると、数列 $\{ca_n\}$ も収束する。

そして、その極限値は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty}a_n$$

$\{a_n\}$ の極限値を α とすれば、ca_n と $c\alpha$ の誤差を ε より小さくする必要がある。
あとから誤差が最大 $|c|$ 倍されても大丈夫なように、a_n と α の誤差は $\dfrac{\varepsilon}{|c|}$ より小さくできればよい。

> c は正の数とは限らない。誤差は任意の正の数 ε と比較するために正の数として評価したいので、絶対値をつけている。

$|c|$ が分母にあるので、$c=0$ の場合は除外して考える必要がある。
$c=0$ の場合は、定数数列の極限として考えることで、0 に収束することがわかる。

それでは、証明を見ていこう。

Proof: 数列の定数倍の極限

$c=0$ と $c\neq 0$ の場合に分けて証明する。

$c=0$ の場合

$c=0$ のとき、右辺は、

$$c\lim_{n\to\infty}a_n = 0\cdot\lim_{n\to\infty}a_n = 0$$

また、左辺は、定数数列の極限として考えて、

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = \lim_{n\to\infty}0 = 0$$

したがって、$c=0$ の場合は、$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty}a_n = 0$ が成り立つ。

$c\neq 0$ の場合

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおき、ε を任意の正の数とする。

このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N が存在する。

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

よって、$n \geq N$ のとき、

$$\begin{aligned} |ca_n - c\alpha| &= |c(a_n - \alpha)| \\ & \qquad\qquad |AB| = |A||B| \\ &= |c||a_n - \alpha| \\ & \qquad\qquad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &< |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore \quad |ca_n - c\alpha| < \varepsilon$$

という不等式が成り立つことで、$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$ がいえる。

以上より、いずれの場合も、数列 $\{ca_n\}$ は $c\alpha$ に収束することが示された。 ■

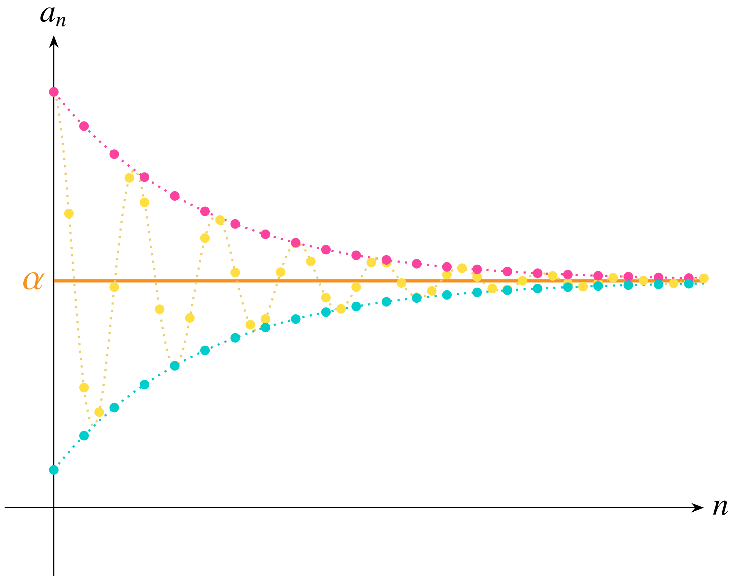
A.2.6 はさみうちの定理

はさみうちの定理（はさみうちの原理）は、

> ある数列が 2 つの数列に挟まれていて、その 2 つの数列の極限値が同じなら、挟まれた数列の極限値も同じになる。

という内容の定理である。

この定理により、直接極限を求めにくい数列でも、簡単な数列で挟むことで極限値を求めることが容易になる。



数列の極限に関するはさみうちの定理

数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ が、ある自然数 n_0 について、

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n \geq n_0)$$

という関係が成り立つとする。このうち、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束し、

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = \alpha$$

が成り立つならば、$\{c_n\}$ も収束し、

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \alpha$$

が成り立つ。

すべての自然数 n に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ である必要はない。

たとえば、5 以上の n に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ が成り立つ場合（$n_0 = 5$ の場合）にも、はさみうちの定理は適用できる。

Proof: 数列の極限に関するはさみうちの定理

ε を任意の正の数とする。

このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

同様に、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より、次のような自然数 N_2 が存在する。

$$n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad |b_n - \beta| < \varepsilon$$

ここで、$N = \max\{N_1, N_2, n_0\}$ とおくと、$n \geq N$ のとき、$n \geq n_0$、$n \geq N_1$、$n \geq N_2$ がすべて成り立つ。
よって、$n \geq N$ のとき、

Under construction...

Appendix B

実数の連続性

ε - δ 論法によって微分積分の理論を再定義しても、その議論は実数の連続性に依存している。さらに厳密な議論を追究したいのなら、「実数は連続である」、平たく言えば数直線は穴のない線である、ということを数学の言葉で表現する必要がある。