解の存在条件

まず、一般の $\boldsymbol{b}$ の場合の解の存在（問題 A）について考える

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p110〜111

拡大係数行列 $\tilde{A}$ は A の右端に 1 列追加して得られるので、掃き出しの過程を考えると、$\mathrm{rank}(\tilde{A})$ は $\mathrm{rank}(A)$ と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかであることがわかる

また、方程式の拡大係数行列の行に関する基本変形は、元の連立方程式と同値な式への変形であるため、

> 基本変形によって得られる方程式の解は、元の方程式の解と同じ

となる

そこで、$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ の既約行階段形を $(P \mid \boldsymbol{q})$ とし、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の代わりに

$$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$$

を解くことを考える

まず、

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ O \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$$

とおく

ここで、P_1 は $r \times n$ 行列（$r = \mathrm{rank}(P)$）とし、$\boldsymbol{q}_1$ は r 次元列ベクトル、$\boldsymbol{q}_2$ は $m - r$ 次元列ベクトルとする

すると、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ は

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ O \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} P_1\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$$

と表せる

このとき、この方程式が解を持つには、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ でなければならない

たとえば、

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

だとしたら、

$$\begin{pmatrix} P_1\boldsymbol{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり、$0 = -1$ という矛盾が生じる時点で、この方程式は不能になる

このような $\boldsymbol{q}_2 \neq \boldsymbol{0}$ の場合、拡大係数行列の階数は、係数行列の階数 $+1$ となっている

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(P \mid \boldsymbol{q}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

一方、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ であれば、方程式は

$$P_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_1$$

となる

ここで、P_1 は $r = \mathrm{rank}(P)$ 個の行をもち、行数と階数が一致しているということは、すべての行に主成分が現れていることを意味する

主成分は最も左側にある 0 でない成分なので、係数拡大行列にするために右に 1 列追加したとしても、主成分の数は増えることがない

すなわち、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ の場合は係数行列と拡大係数行列の階数が一致する

以上の考察から、連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する条件は、

係数行列と係数拡大行列の階数が等しい

ことだとわかる

そして、その階数 r は、係数行列の行数とも一致していたため、次の 2 つの定理が得られる

⚓ 解の存在条件　A を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする
$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ とおくとき、

$$\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A) \Longleftrightarrow A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p31 （定理 1.5.1）]

⚓ 解の存在条件の系　A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$^\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する} \Longleftrightarrow \mathrm{rank}(A) = m$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p32 （定理 1.5.2, 1.5.3）]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	2