

Topic Note: 命題論理

tomixy

2025 年 5 月 24 日

目次

記号化	1
命題論理の法則	2
恒真命題と恒偽命題	4
矛盾法則と排中法則	6
ならば	7
必要条件と十分条件	7
三段論法	7
逆と対偶	8
2 つの同値	9

* * *

記号化

文を記号化することにより、文の長さや内容に煩わされることなく、文の構造を把握することが容易となり、「思考の節約」になる

もともとの文は忘れて、記号で表された文の間の関係を調べる分野のことを **記号論理学** という


記号論理学は、

- 主張（命題）を扱う **命題論理学**
- 「すべての～」とか「ある～」とかを含む文を扱う **述語論理学**

に分かれている

* * *

命題論理の法則

 結合法則

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

結合法則は、「どこから計算しても同じ」という性質を支えるもの

* * *

記号論理では、ある法則が成り立つとき、


その法則の \wedge を \vee に、そして、 \vee を \wedge に置き換えた法則が成り立つ

という原理があり、**双対性**と呼ばれている

双対性は、2 つのことがら・概念が、ちょうどお互いに鏡で写し合っているような対称性を持つ状況

双対性は数学のいろんな分野で登場する

* * *

 冪等法則

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

これらを繰り返して適用すると、

$$p \wedge \cdots \wedge p \equiv p$$

$$p \vee \cdots \vee p \equiv p$$


であることが容易にわかる

これは、AND（あるいは OR）を「何度繰り返しても同値」であることを示している

\wedge をかけ算（積）と見なすと、 $p \wedge \cdots \wedge p$ は p の累乗である

昔は、累乗のことを「冪」と呼んだので、「冪等法則」の名称もここから来ている

* * *


 交換法則

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

p と q の順序が交換できることを示している

* * *

 分配法則

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

交換法則を考慮すると、分配法則は右から分配することもできる

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (q \vee r) \wedge p$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (q \wedge r) \vee p$$

* * *


$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

分配法則によく似ているが、分配する方と分配される方のどちらにも p が入っている

このような状況では q の影響がなくなって、命題が p と同値になるというのが**吸収法則**

* * *

 **ド・モルガンの法則（命題論理）**

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

ド・モルガンの法則は、AND および OR の否定がどうなるかを述べたもの

命題の否定を作るときにはなくてはならない重要な公式


* * *


これらの法則を前提にすると、真理表を使用せずに、**同値変形**という方法で、2 つの命題が同値であることを確かめることができる

* * *

恒真命題と恒偽命題

同値変形をしていく場合に、真理値が一定な値をとる命題を考えると、便利であることがわかってくる

 **恒真命題** 真理値を 1 しかとらない命題を**恒真命題**と呼び、 I で表す

 **恒偽命題** 真理値を 0 しかとらない命題を**恒偽命題**と呼び、 O で表す

* * *

恒真命題と恒偽命題の定義から、明らかに次が成り立つ

恒真命題と恒偽命題の関係

$$\neg I \equiv O$$

$$\neg O \equiv I$$

なぜなら、否定をとるというのは、真理値について 0 を 1 にし、1 を 0 にする操作だから

* * *

恒真命題の性質

$$p \wedge I \equiv p$$

$$p \vee I \equiv I$$

恒偽命題の性質

$$p \wedge O \equiv O$$

$$p \vee O \equiv p$$

これらの性質において、

- \wedge を \vee に
- \vee を \wedge に
- I を O に
- O を I に

置き換えると、

$$p \wedge I \equiv p \quad \leftrightarrow \quad p \vee O \equiv p$$


$$p \vee I \equiv I \quad \leftrightarrow \quad p \wedge O \equiv O$$

という対応が得られ、恒真命題と恒偽命題が**双対的**であることがわかる

* * *


矛盾法則と排中法則

「命題とその否定命題は同時に成り立たない」というのが**矛盾法則**

 矛盾法則

$$p \wedge \neg p \equiv O$$

矛盾法則とは双対的に、**排中法則**は、「命題とその否定命題のどちらかは常に成り立つ」ということを表している

 排中法則

$$p \vee \neg p \equiv I$$


* * *

否定を含む論理式の同値変形において、矛盾法則、排中法則、恒真命題の性質、恒偽命題の性質を用いると、次のような 2 つのステップで、式をより単純な形にすることができる

1. 矛盾法則や排中法則により、命題とその否定命題のペアは、恒真命題 I や恒偽命題 O に置き換えることができる
2. 恒真命題の性質や恒偽命題の性質により、恒真命題 I と恒偽命題 O は、式をより簡単にする


* * *

ならば

 ならば 命題 p, q に対して、 $\neg p \vee q$ という命題を $p \rightarrow q$ と書いて、「 p ならば q 」と読む


* * *

必要条件と十分条件

 必要条件と十分条件 命題 p, q に対して、命題 $p \rightarrow q$ が常に正しいとき、 $p \Rightarrow q$ と書き、

- p は q の必要条件である
- q は p の十分条件である

と呼ぶ

 必要十分条件 $p \Rightarrow q$ であり、 $q \Rightarrow p$ であるとき、 $p \Leftrightarrow q$ と書き、

- p は q の必要十分条件である
- q は p の必要十分条件である

と呼ぶ

* * *

三段論法

「ならば」を用いた有名な議論の方法として、**仮言三段論法**がある

これは、「 A ならば B 」という主張と「 B ならば C 」という主張から、「 A ならば C 」という主張を導くことができるというもの

* * *

逆と対偶

対偶 $\neg q \rightarrow \neg p$ と、もとの命題 $p \rightarrow q$ は同値である

$$\begin{aligned} & \neg q \rightarrow \neg p \\ \equiv & (\neg \neg q) \vee \neg p && \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{の定義} \\ \text{反射法則} \end{array} \right\} \\ \equiv & q \vee \neg p && \left. \begin{array}{l} \text{交換法則} \\ \rightarrow \text{の定義} \end{array} \right\} \\ \equiv & \neg p \vee q \\ \equiv & p \rightarrow q \end{aligned}$$

* * *

「晴れるならば、外出する」はまともな主張だが、その対偶「外出しないならば、晴れない」というのは、少し違和感を感じる

これは、「外出しない」という原因によって「晴れない」という結果が導かれるととらえてしまうから

あくまで、論理の「ならば」は、「外出しない」という事実があるときに、「晴れない」という事実があるという状態を表すもの

「～ならば～」というのは、

原因と結果という因果関係ではなく、2つの状態の間の事実関係である

とっておくとよい

* * *


$\neg p \rightarrow \neg q$ は、 $p \rightarrow q$ の裏と呼ばれることもある

- $(\neg p \rightarrow \neg q) \equiv (\neg \neg p) \vee \neg q \equiv p \vee \neg q$
- $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

であるため、裏 $\neg p \rightarrow \neg q$ と元の命題 $p \rightarrow q$ は特に関係がない

* * *


2 つの同値

 同値 2つの命題 p, q に対して、真理値がすべて等しい（真理表が一致する）ということを、 p と q は同値であると呼び、

$$p \equiv q$$

と表す

一方、同値にはもう 1 つの定義がある

 同値 命題 p と命題 q がお互いに必要十分条件であるとき、言いかえると、 $p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ であるとき、 p と q は同値であると呼び、

$$p \Leftrightarrow q$$

と表す

この 2 つの同値 \equiv と \Leftrightarrow は、実は同じ内容を表している

「 $p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ 」であるというのは、

命題 $p \rightarrow q$ および命題 $q \rightarrow p$ の真理値がすべて 1 である

ということだから、「 p と q の真理値が等しいこと」と「 $p \rightarrow q$ と $q \rightarrow p$ の真理値がどちらも 1 であること」は一致している

したがって、2 つの同値 \equiv と \Leftrightarrow は同じ内容を表していることがわかる