

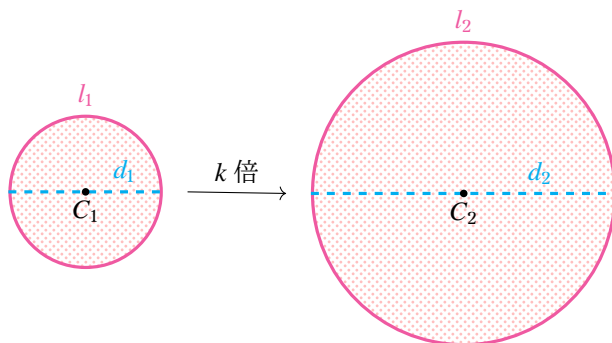
# Chapter 1

## 基礎数学

### 1.1 三角関数

#### 1.1.1 円周率

すべての円は、お互いを拡大もしくは縮小した関係にある。



円  $C_2$  が、円  $C_1$  を  $k$  倍に拡大したものだとする、その直径や円周も  $C_1$  の  $k$  倍となる。

$$d_2 = k \cdot d_1$$

$$l_2 = k \cdot l_1$$

この2つの式を各辺どうし割ることで、 $k$  が約分されて消え、直径と円周の比が等しくなることがわかる。

$$\frac{d_2}{l_2} = \frac{d_1}{l_1}$$

**円の直径と円周の比** すべての円において、直径と円周の長さの比は一定である。

そして、この一定の比率は、円周率  $\pi$  として知られている。

**円周率** 円の円周の長さ  $l$  と直径の長さ  $d$  の比を、円周率といい、 $\pi$  で表す。

$$\pi = \frac{l}{d} = 3.14 \dots$$

$\pi$  の定義式を変形すると、円周の長さを求める式が得られる。

半径を  $r$  とすると、直径  $d = 2r$  であるから、

$$l = \pi \cdot d = 2\pi r$$

**円周の長さ** 円の円周の長さ  $l$  は、半径  $r$  を使って次のように表される。

$$l = 2\pi r$$

## 1.2 指数関数

### 1.2.1 同じ数のかけ算の指数による表記

**指数と底**

同じ数  $a$  を  $n$  回掛けたものを  $a$  の  $n$  乗といい、 $a^n$  と表す。

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ 個の } a}$$

このとき、 $n$  を指数、 $a$  を底という。

### 1.2.2 指数法則

指数を「かける回数」と捉えれば、いくつかの法則が当たり前に成り立つことがわかる。

#### 「かける回数」の和

例えば、 $a$  を  $m$  回かけてから、続けて  $a$  を  $n$  回かける式を書いてみると、 $a$  は  $m+n$  個並ぶことになる。

$$\overbrace{a \times a \times a}^{a^3} \times \overbrace{a \times a}^{a^2} = \overbrace{a \times a \times a \times a \times a}^{a^5}$$

指数の和に関する指数法則

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

#### 「かける回数」の差

例えば、 $a$  を  $m$  回かけたものを、 $a$  を  $n$  回かけたもので割ると、 $m-n$  個の  $a$  の約分が発生する。

$$\frac{\overbrace{a \times a \times a \times a \times a}^{a^5}}{\underbrace{a \times a}_{a^2}} = \overbrace{a \times a \times a}^{a^3}$$

指数の差に関する指数法則

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

#### 「かける回数」の積

例えば、「 $a$  を  $m$  回かけたもの」を  $n$  回かける式を書いてみると、 $a$  は  $m \times n$  個並ぶことになる。

$$(a^2)^3 = \underbrace{\overbrace{a \times a}^{a^2} \times \overbrace{a \times a}^{a^2} \times \overbrace{a \times a}^{a^2}}_{a^6}$$

指数の積に関する指数法則

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

### 1.2.3 指数の拡張と指数関数

底を固定して、指数を変化させる関数を考えたい。

指数部分に入れられる数を拡張したいが、このとき、どんな数を入れても指数法則が成り立つようにしたい。

#### 0 の指数

指数法則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  において、 $m = 0$  の場合を考える。

$$a^0 \times a^n = a^{0+n}$$

$$a^0 \times a^n = a^n$$

この式が成り立つためには、 $a^0$  は 1 である必要がある。

0 の指数

どんな数も、0 乗すると 1 になると定義する。

$$a^0 = 1$$

そもそも、指数法則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  は、「指数の足し算が底のかけ算に対応する」ということを表している。

- 「何もしない」 足し算は +0
- 「何もしない」 かけ算は  $\times 1$

なので、 $a^0 = 1$  は「何もしない」という観点で足し算とかけ算を対応づけたものといえる。

## 負の指数

指数法則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  において、正の数  $n$  を負の数  $-n$  に置き換えたものを考える。

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

さらに、指数法則  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  も成り立っていてほしいので、

$$a^m \times a^{-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

この式は、 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  とすれば、当たり前になり立つものとなる。

## 負の整数の指数

$n$  が正の整数であるとき、 $-n$  乗を次のように定義する。

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

## 有理数の指数

指数法則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  において、指数  $m, n$  を  $\frac{1}{2}$  に置き換えたものを考える。

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a$$

$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$  は、 $(a^{\frac{1}{2}})^2$  とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$$

つまり、 $a^{\frac{1}{2}}$  は、2 乗すると  $a$  になる数 ( $a$  の平方根) でなければならない。

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

同様に、 $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$  を考えてみると、

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a$$

$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$  は、 $(a^{\frac{1}{3}})^3$  とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$$

つまり、 $a^{\frac{1}{3}}$  は、3 乗すると  $a$  になる数 ( $a$  の 3 乗根) でなければならない。

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

このようにして、 $a^{\frac{1}{n}}$  は、 $n$  乗すると  $a$  になる数 ( $a$  の  $n$  乗根) として定義すればよい。

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

さて、分子が 1 ではない場合はどうだろうか？

$(a^m)^n = a^{mn}$  において、 $m$  を  $\frac{m}{n}$  に置き換えたものを考えると、

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$$

となるので、 $a^{\frac{m}{n}}$  は、 $n$  乗したら  $a^m$  になる数として定義すればよい。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

### 有理数の指数

$m, n$  が整数で、 $n$  が正の整数であるとき、 $\frac{m}{n}$  乗を次のように定義する。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

### 実数への拡張

有理数は無数にあるので、指数  $x$  を有理数まで許容した関数  $y = a^x$  のグラフを書くと、十分に繋がった線になる。

指数が無理数の場合は、まるでグラフ上の点と点の間を埋めるように、有理数の列で近似していくことで定義できる。

これで、 $x$  を実数とし、関数  $y = a^x$  を定義できる。

指数関数

$a$  を正の実数とし、 $x$  を実数とするとき、次のような関数を指数関数という。

$$y = a^x$$

1.2.4 指数関数の底の変換

用途に応じて、使いやすい指数関数の底は異なる。

- $e$  : 微分積分学、複素数、確率論など
- $2$  : 情報理論、コンピュータサイエンスなど
- $10$  : 対数表、音声、振動、音響など

よって、これらの底を互いに変換したい場面もある。

指数の底を変えることは、指数の定数倍で実現できる。

例えば、底が  $4$  の指数関数  $4^x$  を、底が  $2$  の指数関数に変換したいとすると、

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$$

のように、指数部分を  $2$  倍することで、底を  $4$  から  $2$  へと変換できる。

当たり前だが、この変換は、 $4 = 2^2$  という関係のおかげで成り立っている。

「 $4$  は  $2$  の何乗か？」がすぐにわかるから、 $4$  から  $2$  への底の変換が簡単にできたのだ。

より一般に、 $a^x$  と  $b^x$  において、 $a = b^c$  という関係があるとする。

つまり、 $a$  は  $b$  の  $c$  乗だとわかっているなら、

$$a^x = (b^c)^x = b^{cx}$$

のように、底を  $a$  から  $b$  へと変換できる。

指数関数の底の変換

指数を定数倍することは、底を変えることと同じ操作になる。

$a = b^c$  という関係があるなら、次の変換が成り立つ。

$$a^x = b^{cx}$$

ここで重要なのは、指数関数の底を変換するには、「 $a$  は  $b$  の何乗か？」がわかっている必要があるということだ。

次章では、 $a = b^c$  となるような  $c$  を表す道具として、対数を導入する。

## 1.3 対数関数

### 1.3.1 対数：指数部分を関数で表す

指数関数は、「 $a$  を  $x$  乗したら  $y$  になる」という関係を表現するものだった。

ここで、逆に「 $y$  は  $a$  の何乗か？」という関係を表現するものとして、対数関数を定義する。

これは、 $y$  から  $x$  を導き出す関数であるから、指数関数  $y = a^x$  の逆関数といえる。

対数

$a^y = x$  を満たす  $y$  を、 $a$  を底とする  $x$  の対数といい、次のように表す。

$$y = \log_a x$$

ここで、 $x$  は真数、 $a$  は底と呼ばれる。

対数関数は指数関数の逆関数

対数関数  $y = \log_a x$  は、指数関数  $x = a^y$  の逆関数である。

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

対数は、指数関数の指数部分を表す。

$a^y = x$  の  $y$  に、 $y = \log_a x$  を代入することで、次のような式にまとめることもできる。



指数部分は対数で書き換えられる

$$a^{\log_a x} = x$$

### 1.3.2 対数の性質

指数法則を対数に翻訳することで、対数の性質を導くことができる。

真数のかけ算は  $\log$  の足し算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$  として、指数法則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  を考える。

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a^m \times a^n \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、 $m + n = \log_a(x_1 x_2)$  がいえる。

また、 $x_1 = a^m$  より  $m = \log_a x_1$ 、 $x_2 = a^n$  より  $n = \log_a x_2$  と表せるから、

$$m + n = \log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 x_2)$$

積の対数は対数の和

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

真数の割り算は  $\log$  の引き算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$  として、指数法則  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  を考える。

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \frac{a^m}{a^n} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、 $m - n = \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$  がいえる。

また、 $x_1 = a^m$  より  $m = \log_a x_1$ 、 $x_2 = a^n$  より  $n = \log_a x_2$  と表せるから、

$$m - n = \log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \left( \frac{x_1}{x_2} \right)$$

商の対数は対数の差

$$\log_a \left( \frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

真数の冪乗は log の指数倍

$x = a^m$  として、指数法則  $(a^m)^n = a^{mn}$  を考える。

$$\begin{aligned} x^n &= (a^m)^n \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、 $mn = \log_a x^n$  がいえる。

また、 $x = a^m$  より  $m = \log_a x$  と表せるから、

$$mn = n \log_a x \log_a x^n$$

冪の対数は対数の指数倍

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

### 1.3.3 常用対数と桁数

常用対数 底を 10 にした対数関数を、常用対数と呼ぶ。

$$\log_{10} x$$

### 1.3.4 指数関数の底の変換：対数を用いた表現

指数関数の底  $a$  から  $b$  に変換するには、「 $a$  は  $b$  の何乗か？」がわかっている必要があった。

#### REVIEW

$a = b^c$  という関係があるなら、

$$a^x = b^{cx}$$

今では、 $a = b^c$  となるような  $c$  を、対数で表すことができる。

$$b^c = a \iff c = \log_b a$$

指数関数の底の変換公式

$$a^x = b^{(\log_b a)x}$$