

# Chapter 1

# $\varepsilon$ - $\delta$ 論法と極限

ここまでのこの本では、極限というものを厳密に定義していなかった。また、微分と積分において、イメージで導出できることを最重視し、厳密な議論を避けた箇所が多くある。

厳密には、極限は  $\varepsilon$ - $\delta$  論法によって定義され、微分積分の基礎理論は極限の議論に基づいている。  
 $\varepsilon$ - $\delta$  論法に踏み込んでいない私たちは、極限というものを語る言葉をまだ持ち合わせていない。

## 1.1 実数の集合

厳密な理論を展開する上で、知っておくべき言葉の定義を行う。

### 1.1.1 区間

2つの実数の間の範囲は、区間と呼ばれる。

**区間**  
実数全体の集合  $\mathbb{R}$  の部分集合のうち、 $a < b$  である実数  $a$  と  $b$  の間にあるすべての実数の集合を **区間** という。

区間は、端点を含むかどうかによって、開区間、閉区間、半開区間に分類される。

## 開区間

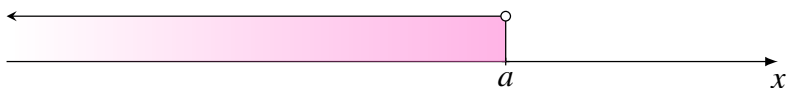
端点を含まない区間を開区間という。

**開区間**  $a \leq x \leq b$  となる実数  $x$  の集合を 開区間 といい、 $(a, b)$  と表す。

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



### 閉区間

端点を含まない区間を閉区間という。

**閉区間**  $a < x < b$  となる実数  $x$  の集合を 閉区間 といい、 $[a, b]$  と表す。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$



$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



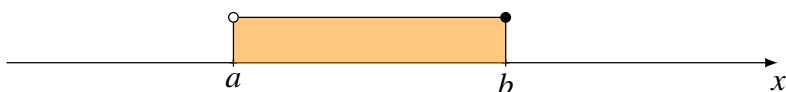
### 半開区間

一方の端点を含み、他方の端点を含まない区間を半開区間という。

半開区間 次のような集合を 半開区間 という。

- $a \leq x < b$  となる実数  $x$  の集合を、 $[a, b)$  と表す。
- $a < x \leq b$  となる実数  $x$  の集合を、 $(a, b]$  と表す。

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



## 1.2 数列の極限

微分を定義するには関数の極限を考えるが、関数の極限の諸性質は、数列の極限から導かれる。まずは、 $\varepsilon$ - $\delta$  論法（数列の場合は  $\varepsilon$ - $N$  論法とも呼ばれる）によって数列の極限を定義し、その性質をひとつひとつ確かめていこう。

### 1.2.1 $\varepsilon$ で「一致」をどう表現するか

「限りなく近づく」という表現では、「限りなく」の部分に無限という概念が含まれてしまう。有限の値  $\varepsilon$  を使って、無限を表現しようとするのが  $\varepsilon$ - $\delta$  論法である。

\* \* \*

$\varepsilon$ - $\delta$  論法で極限を定義する前に、有限値  $\varepsilon$  を使った議論の例を見てみよう。

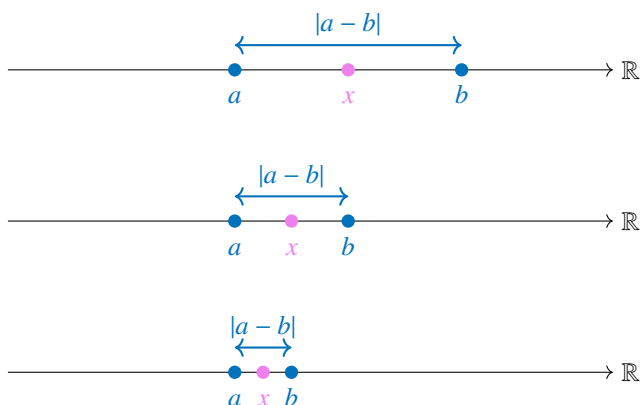
有限値  $\varepsilon$  の不等式による一致の表現

$a, b$  を実数とすると、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、次のことがいえる。

$$|a - b| < \varepsilon \implies a = b$$

実数は連続である（数直線には穴がない）ため、 $a$  と  $b$  が異なる実数であれば、 $a$  と  $b$  の間には無数の実数が存在する。

つまり、 $a$  と  $b$  が異なる限り、その間の距離  $|a - b|$  は絶対に 0 にはならない。



$|a - b|$  が 0 にならないということは、ここでも実数の連続性によって、 $|a - b|$  より小さい実数が存在してしまう。

たとえば、 $a$  と  $b$  の間の中点  $x = \frac{|a - b|}{2}$  は、 $|a - b|$  よりも小さい。



$a$  と  $b$  の間の中点というと  $\frac{a - b}{2}$  だが、正の数  $\epsilon$  と比較するため、絶対値をつけて  $\frac{|a - b|}{2}$  としている。

$|a - b|$  より小さい実数が存在してしまうと、「任意の」 $\epsilon > 0$  に対して、 $|a - b| < \epsilon$  を成り立たせることができない。

$\epsilon$  はなんでもよいのだから、 $|a - b|$  より小さい実数を  $\epsilon$  として選ぶこともできてしまう。

しかし、 $|a - b|$  より小さい実数を  $\epsilon$  としたら、 $|a - b| < \epsilon$  は満たされない。

$|a - b|$  が 0 でないという状況下では、あらゆる実数  $\epsilon$  より  $|a - b|$  を小さくすることは不可能である。

したがって、 $|a - b| < \epsilon$  を常に成り立たせるなら、 $|a - b| = 0$ 、すなわち  $a = b$  となる。

\* \* \*

ここまでの考察から直観を取り除いて、この定理の数学的な証明をまとめておこう。

**Proof:** 有限値  $\varepsilon$  の不等式による一致の表現

$a \neq b$  と仮定する。

$\varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2}$  とおくと、絶対値  $|a-b|$  が正の数であることから、 $\varepsilon_0$  も正の数となる。  
よって、 $|a-b| < \varepsilon_0$  が成り立つので、

$$\begin{aligned} |a-b| &< \frac{|a-b|}{2} \\ 2|a-b| &< |a-b| \quad \left. \begin{array}{l} \text{両辺} \times 2 \\ \downarrow \end{array} \right\} \\ 2|a-b| - |a-b| &< 0 \\ |a-b| &< 0 \end{aligned}$$

絶対値が負になることはありえないので、 $a \neq b$  の仮定のもとでは矛盾が生じる。

したがって、 $a = b$  でなければならない。 ■

なお、 $|a-b| < \varepsilon$  の右辺を定数倍し、 $|a-b| < k\varepsilon$  などとしても、この定理は成り立つ。

定理「有限値  $\varepsilon$  の不等式による一致の表現」は、定数を  $k$  として、次のように書き換えることもできる。

$$|a-b| < k\varepsilon \implies a = b$$



この場合、証明で  $\varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2k}$  とおけば、まったく同様の議論が成り立つからだ。

実際に、 $|a-b| < 2\varepsilon$  とした場合のこの定理を、後に登場する数列の極限の一意性の証明で使うことになる。

### 1.2.2 $\varepsilon$ - $N$ 論法による数列の収束

$\varepsilon$  -  $\delta$  論法は、数列の極限に適用する場合、 $\varepsilon$  -  $N$  論法と呼ばれることが多い。

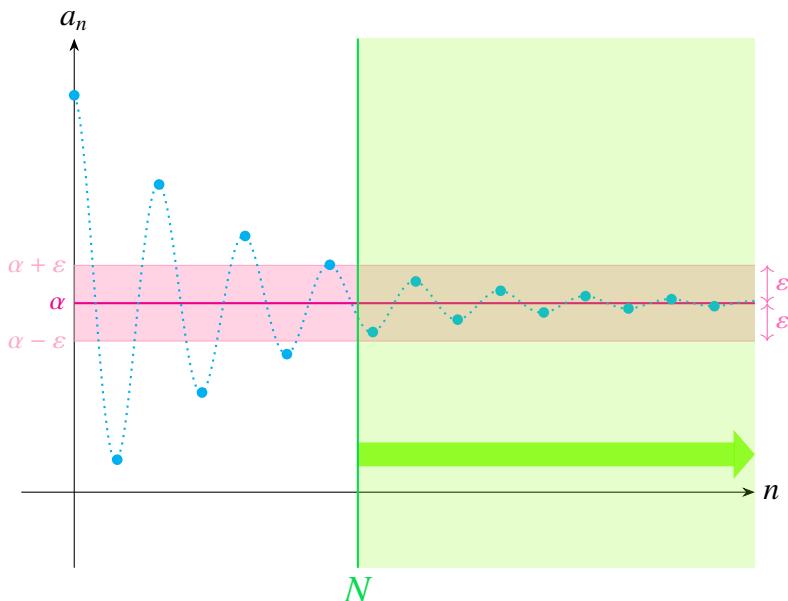
「数列が  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束する」ことの  $\varepsilon$  -  $N$  論法による表現を、まずはイメージで掴んでみよう。

\* \* \*

まず、 $\alpha$  の周りに、両側それぞれ  $\varepsilon$  だけ広げた区間を考える。

$\varepsilon$  は正の数ならなんでもよいとすれば、 $\varepsilon$  を小さな数に設定し、いくらでも区間を狭めることができる。

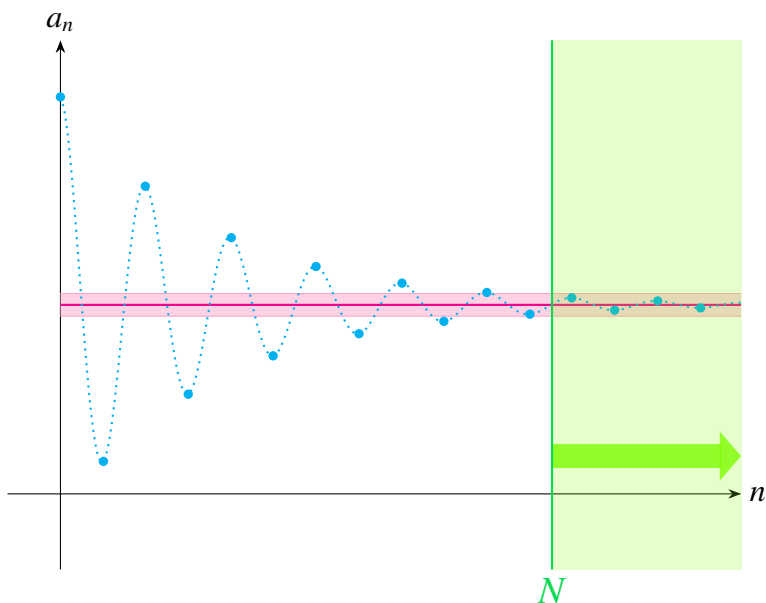
そして、「ここから先の項はすべて区間内に収まる」といえる位置に、 $N$  という印をつけておく。



$\varepsilon$  を小さくしていくと、 $\varepsilon$  による  $\alpha$  周辺の区間に入る項は少なくなる。

それでも、 $N$  をずらしていけば、 $N$  以降はこの区間に収まる項だけになる。

これこそが「収束」という現象だと定義するのが、 $\varepsilon$ - $N$  論法の考え方である。



区間幅（の半分）となる  $\varepsilon$  をどんなに小さくしても、「 $N$  番目以降は区間内に収まる項だけになる」

といえるような  $N$  を設定できるか？が肝心で、そのような  $N$  が存在するなら、数列は収束するといえる。

このことを、数学の言葉でまとめておこう。

### 数列の収束と極限值

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  と実数  $\alpha$  について、次の条件を考える。

任意の正の数  $\varepsilon$  に対して

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つような自然数  $N$  が存在する

この条件が成り立つとき、数列  $\{a_n\}$  は  $\alpha$  に収束するといい、次のように表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

このとき、 $\alpha$  を数列  $\{a_n\}$  の極限值という。

$\varepsilon - \delta$  論法によるこの定義を用いることで、数列の収束に関する諸性質を証明できるようになる。

### 1.2.3 数列の極限の一意性

数列が最終的に複数の極限值に散らばるとしたら、それは収束と呼べるだろうか？

$\varepsilon - \delta$  論法による収束の定義は、そのような状況をきちんと除外するようになっている。

数列が複数の値に収束することはない。このことを示すのが、次の定理である。

### 数列の極限の一意性

数列  $\{a_n\}$  が収束するならば、その極限值はただ1つに定まる。

**Proof:** 数列の極限の一意性

数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  と  $\beta$  の 2 つの極限值を持つと仮定する。

このとき、任意の正の数  $\epsilon$  に対して、

$$n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \epsilon$$

$$n \geq N_2 \implies |a_n - \beta| < \epsilon$$

が成り立つような自然数  $N_1$  と  $N_2$  が存在する。

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと、 $n \geq N$  のとき、 $N_1$  と  $N_2$  の大きい方が  $n$  以下に収まることから、 $n \geq N_1$  と  $n \geq N_2$  がともに成り立つ。

よって、 $n \geq N$  のとき、 $|\alpha - \beta|$  を考えると、

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= |\alpha - \beta + \underbrace{a_n - a_n}_0| \\ &= |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)| \\ &\leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| \quad \left. \begin{array}{l} \text{三角不等式} \end{array} \right\} \\ &= |-(a_n - \alpha)| + |a_n - \beta| \quad \left. \begin{array}{l} | -A | = |A| \\ n_1 \geq N \text{ と } n_2 \geq N \text{ より} \end{array} \right\} \\ &= |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| \\ &< \epsilon + \epsilon \\ &= 2\epsilon \\ \therefore |\alpha - \beta| &< 2\epsilon \end{aligned}$$

したがって、「有限値  $\epsilon$  の不等式による一致の表現」より、

$$\alpha = \beta$$

これで、数列  $\{a_n\}$  の極限值はただ 1 つに定まることが示された。 ■