0.1 1変数関数の積分

積分とは、「部分を積み重ねる」演算である。

微小部分を調べる微分と、微小部分を積み重ねる積分は、互いに逆の操作になっている。

0.1.1 区分求積法：面積の再定義

長方形の面積は、なぜ「縦 × 横」で求められるのだろうか？

そこには、長方形の横幅分の長さを持つ線分を、長方形の高さに達するまで積み重ねるという発想がある。

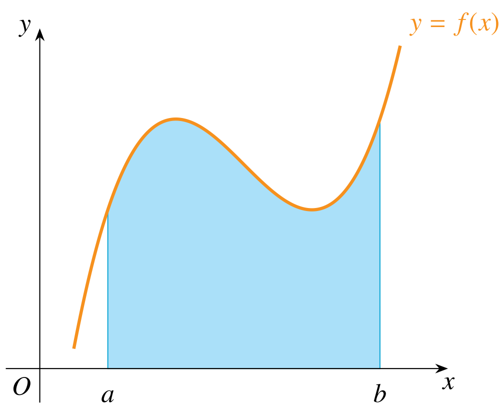
面積の計算を「線を積み重ねる」という発想で捉えると、あらゆる形状の面積を考えることができる。

長方形では、積み重ねる線の長さは一定だが、他の形状では、積み重ねる線の長さが変化する。

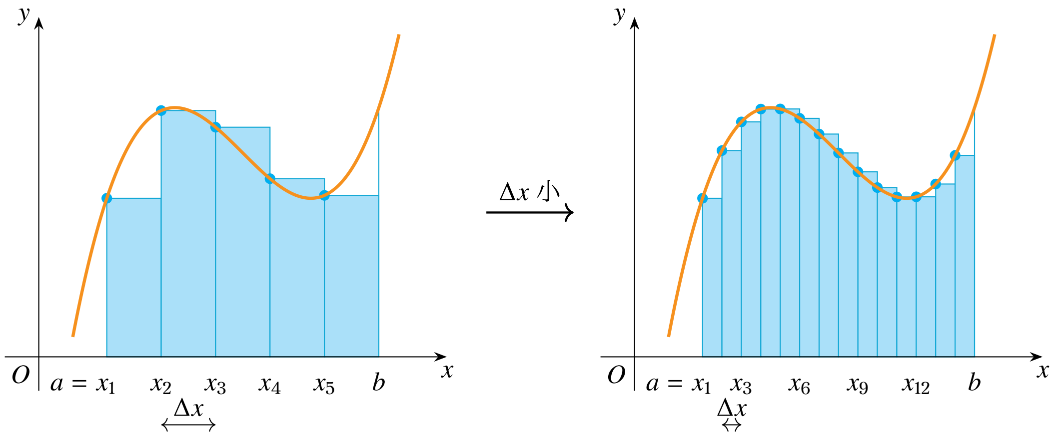
積み重ねるべき線の長さを、関数で表すことができたら…

* * *

関数 $y = f(x)$ が与えられたとき、高さ $f(x)$ の線分を a から b までの区間で積み重ねることで、x 軸とグラフに挟まれた部分の面積を求めることを考える。



この考え方は、面積を求めたい部分を長方形に分割し、長方形の幅を限りなく 0 に近づけるという操作で表現できる。

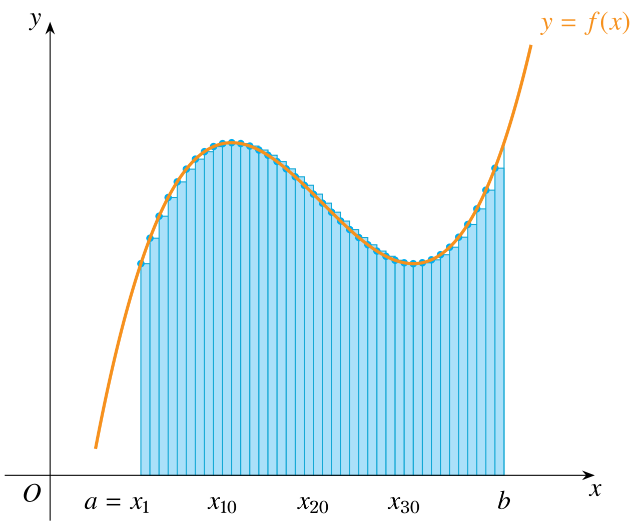


$a \leq x \leq b$ の区間を n 等分して、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする。

分割された各長方形は、幅が Δx で、高さが $f(x)$ であるので、各長方形の面積は次のように表せる。

$$\Delta S = f(x) \cdot \Delta x$$

どんどん Δx を小さくしていくと、細かい長方形分割で、面積を求めたい図形を近似できる。



つまり、求めたい面積は、分割した長方形の面積をすべて足し合わせることで近似できる。

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$\Delta x \to 0$ の果てでは、幅を持たなくなった長方形は線分とみなせるので、もはや近似ですらなくなるだろう。

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

このような考え方は、区分求積法と呼ばれる。

0.1.2 定積分：面積を求める積分

ここで、区間 $a \leq x \leq b$ における関数 $y = f(x)$ と x 軸の間の面積 S を求める式を、次のように表記する。

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\sum$ は離散的な和を表す記号であり、例えば $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}$ であれば、i を 1 ずつ増やして n に達するまで足し合わせることを意味する。
一方、ここで新たに導入した $\int$ は連続的な和を表す記号であり、微小変化を繰り返しながら足し合わせることを意味する。

$\sum$ は間隔を取って足し合わせるのに対し、$\int$ は間隔を限りなく小さくして足し合わせる。
足し合わせる間隔を限りなく小さくするという操作は、極限を取る操作に相当するので、$\sum$ の極限を取ったもの $\lim \sum$ をまとめて $\int$ という記号で表記したと捉えることができる。
さらに、$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}$ とした果ての Δx は、微小変化を意味する dx と書き換えられている。

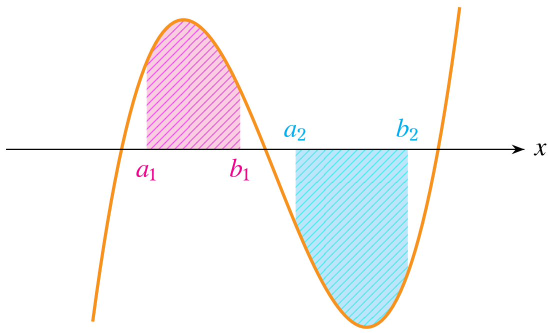
定積分

$a \leq x \leq b$ の区間内における関数 $f(x)$ のグラフと x 軸の間の領域の符号付き面積を求める演算を定積分と定義し、次のように表記する。

$$\int_a^b f(x)dx$$

このとき、$f(x)$ を被積分関数と呼ぶ。

$f(x)$ の値が負になる区間では、定積分の値も負になるため、定積分は符号付き面積を表す。



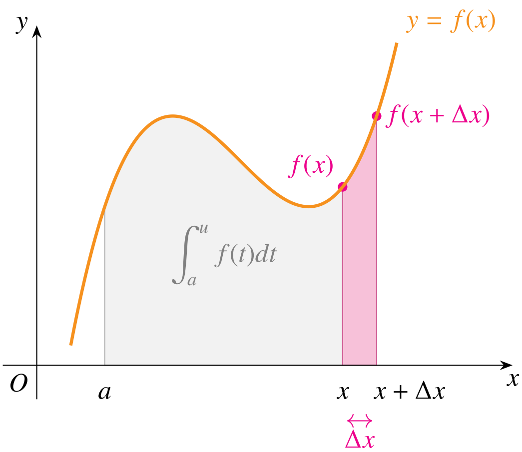
0.1.3 微小範囲の定積分から微分へ

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は、積分区間の取り方（a や b の値）を変えると、当然異なる計算結果になる。

ここで、下端 a は固定し、上端 b を変化させて積分区間を広げていくことを考えよう。
上端が変化することを強調するため、上端は x と表記することにする。
このとき、定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は、上端 x の関数として捉えられる。

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

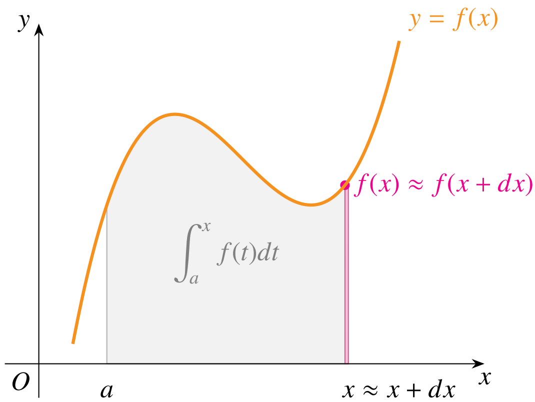
$\int$ の中で使っている変数 t は、積分区間の下端から上端まで動く変数であり、どんな文字を使ってもよい。「t が下端 a から上端 x まで動く」なら違和感なく聞こえるが、「x が下端 a から上端 x まで動く」というのはややこしいので、上端 x と区別するために t を使うことにした。



x を Δx だけ増加させたときに増える面積は、

$$S(x+\Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

となるが、ここでさらに Δx を小さくしていくと…
増えた領域は、幅 dx、高さ $f(x)$ の長方形とみなせるので、その面積は $f(x)dx$ となる。



よって、$\Delta x \to 0$ としたときには、

$$S(x+dx) - S(x) = f(x)du$$

という式が成り立ち、これは実は見慣れた微分の関係式と同じ形をしている。

$$S(x+dx) = \overset{\text{元の関数}}{\boxed{S(x)}} + \overset{\text{導関数}}{\boxed{f(x)}}\, du$$

この式は、定積分したもの $F(x)$ を x で微分すると、積分前の関数 $f(x)$ に戻るということを示している。
このような「積分したものを微分すると、元の関数に戻る」という事実は、微積分学の基本定理として知られている。

微積分学の基本定理　積分の逆の演算は微分である。

0.1.4 不定積分：原始関数を求める積分

定積分の定義は面積から始まったが、定積分という操作で「微分したら元の関数に戻る」ような関数を作ることもできた。

ここで、「微分したら元の関数に戻る」関数を次のように定義する。

原始関数

微分することで元の関数 $f(x)$ が得られる関数を、$f(x)$ の 原始関数 と呼び、$F(x)$ と表す。

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

「微分したら元の関数に戻る」関数の 1 つが、前節で調べた $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ であったが、実はこのような関数は他にも存在する。

例えば、定数を微分すると 0 になるため、$S(x)$ に任意の定数 C を加えた関数 $S(x) + C$ を作っても、その微分結果は変わらず元の関数になる。

このことは、「原始関数には定数 C 分の不定性がある」などと表現されることがある。

「微分したら元の関数に戻る」関数を求める演算、すなわち「微分の逆演算」として捉えた積分を新たに定義してみよう。

不定積分

関数 $f(x)$ から原始関数 $F(x)$ を求める演算を、$f(x)$ の 不定積分 と呼び、次のように表す。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ここで、C は 積分定数 と呼ばれる任意の定数である。

0.1.5　原始関数による定積分の表現

少し前に、定積分 $\int_a^x f(t)dt$ を上端 x の関数 $S(x)$ とみて、x を微小変化させることで、$S(u)$ が $f(u)$ の原始関数である（$S(u)$ を u で微分したら $f(u)$ になる）ことを確かめた。

REVIEW

区間 Δx での面積の増分を考え、

$$S(x+\Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$\Delta x \to 0$ とすれば、次のような微分の関係式が得られる。

$$S(x+dx) = \overset{\text{元の関数}}{\boxed{S(x)}} + \overset{\text{導関数}}{\boxed{f(x)}}\,dx$$

さらに前節では、「微分したら元に戻る」原始関数は 1 つだけではなく、任意の定数 C を用いた $F(x)+C$ も、$f(x)$ の原始関数であることを述べた。

そこで、$f(x)$ の任意の原始関数を $F(x)$ とおくことにする。

原始関数は任意の定数 C 分だけ異なるので、$f(x)$ の原始関数の 1 つである $S(x)$ は、$f(x)$ の他の原始関数 $F(x)$ を C 分ずらしたものになるはずである。

$$S(x) = F(x) + C$$

ここで、$S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ に、$x = a$ を代入すると、下端と上端が一致する領域の面積（定積分）は明らかに 0 なので、

$$S(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

なんとここから、C を求めることができる。

$S(a) = F(a) + C = 0$ より、

$$C = -F(a)$$

この C を用いて、$S(x)$ を次のように表現できる。

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

$x = b$ を代入することで、積分区間の上端を b に戻した定積分を考えると、

$$S(b) = F(b) - F(a)$$
$$S(b) = \int_a^b f(x)dx$$

という、$S(b)$ について 2 通りの表現が得られる。

> 上端を表す x という変数が現れなくなったので、$\int$ の中で使っていた変数 t はしれっと x に戻している。$\int$ の中の x は「下端 a から上端 b まで動く」という意味しか持っていないので、何の文字を使っても意味は変わらない。

得られた 2 通りの表現式を組み合わせることで、次のような関係が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

原始関数による定積分の表現

関数 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であれば、定積分は次のように計算できる。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ここで現れる $F(b) - F(a)$ という量は、次の記号で表される。

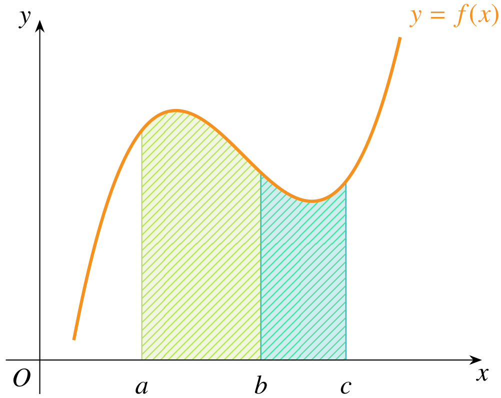
$$\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

0.1.6　定積分の性質

面積としての理解だけではうまく想像できない性質も、原始関数との関係を使うことで数式で確かめられるようになる。

積分区間の結合

2 つの定積分があり、それらの積分区間が連続していれば、1 つの定積分としてまとめて計算できる。



積分区間が連続する定積分の和

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

面積として考えれば明らかな性質だが、原始関数を使って証明することもできる。

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると、

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ &= F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(x)dx\end{aligned}$$

として、式が成立することがわかる。

積分区間の反転

積分区間の上限と下限を入れ替わると、符号が変わる。

定積分の積分区間の反転

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

これは、積分区間が連続する定積分の和の性質における、$c = a$ の場合の式である。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx &= \int_a^a f(x)dx \\ &= 0 \\ \int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx\end{aligned}$$

定積分の線形性

微分や $\sum$ 記号などと同様に、定積分も線形性を持つ。

定積分の線形性

$$\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

この性質は、微分の線形性から導かれる。

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$、$g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすると、微分の線形性より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{\alpha F(x) + \beta G(x)\} &= \alpha \frac{d}{dx}F(x) + \beta \frac{d}{dx}G(x) \\ &= \alpha f(x) + \beta g(x)\end{aligned}$$

となるから、$\alpha f(x) + \beta g(x)$ の原始関数は $\alpha F(x) + \beta G(x)$ である。

よって、定積分を原始関数を使って書き表すと、

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx &= \alpha F(b) - \alpha F(a) + \beta G(b) - \beta G(a) \\
&= \alpha \{F(b) - F(a)\} + \beta \{G(b) - G(a)\} \\
&= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx
\end{aligned}
$$

となり、原始関数を使うことで、微分の線形性から定積分の線形性につながることがわかる。

0.1.7 不定積分の性質

原始関数は、微分によって元の関数に戻る関数だった。

そして、元の関数から原始関数を求める演算が不定積分である。

$$
\begin{tikzcd}
F(x) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\int"]
\end{tikzcd}
$$

原始関数という言葉にとらわれないように表現すると、結局は次のような関係が成り立っている。

$$
\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f'(x) \arrow[l, bend left, "\int"]
\end{tikzcd}
$$

不定積分と微分は逆の演算

関数を微分すると導関数になり、導関数を不定積分すると元の関数に戻る。

このような関係によって、微分が持つ性質から、不定積分の性質を導くことができる。

不定積分の線形性

微分の線形性から、不定積分の線形性も成り立つ。

REVIEW

微分の線形性

$$(\alpha F(x)+\beta G(x))' = \alpha F'(x)+\beta G'(x)$$

微分の線形性の式の両辺を不定積分すると、左辺は微分する前の関数 $\alpha F(x)+\beta G(x)$ に戻るので、

$$\int(\alpha F(x)+\beta G(x))'dx = \int\{\alpha F'(x)+\beta G'(x)\}\,dx$$
$$\alpha F(x)+\beta G(x) = \int\{\alpha F'(x)+\beta G'(x)\}\,dx$$

ここで、導関数を不定積分すると元の関数に戻ることから、

$$F(x) = \int F'(x)dx$$
$$G(x) = \int G'(x)dx$$

と置き換えることができる。
これらを使って左辺を書き換えると、

$$\alpha\int F'(x)dx+\beta\int G'(x)dx = \int\{\alpha F'(x)+\beta G'(x)\}\,dx$$

$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数、$G(x)$ は $g(x)$ の原始関数であるとすると、微分したらそれぞれ元に戻るので、次のように書き表せる。

$$\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx = \int\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}\,dx$$

不定積分の線形性

$$\int\{\alpha f(x)+\beta g(x)\}\,dx = \alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$$