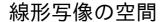
## 第 25 章

# 線形写像の空間



V. W をともに有限次元 K 上の線形空間とする。

線型写像のことを**準同型** (homomorphism) と呼ぶこともある。 この英語訳から、V から W への線形写像全体の集合を Hom(V,W) と表す。

また、V=W のときは、V の線形変換を V の自己準同型 (endomorphism) と呼ぶこと もある。この英語訳から、V の線形変換全体の集合を  $\operatorname{End}(V)$  と表す。

このとき、Hom(V, W) に線型空間の構造(和とスカラー倍)を次のように導入する。

★ def 25.1 - 線形写像の和とスカラー倍

線形写像  $f,g \in \text{Hom}(V,W)$  と  $c \in K$  に対して、和とスカラー倍を次のように定義する

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$$
$$(cf)(v) := c \cdot f(v)$$

これらの演算は、再び $V \rightarrow W$ の線形写像を定めることが確認できる。

### ♣ theorem 25.1 - 線形写像全体による線形空間

線形写像全体の集合 Hom(V,W) は K 上の線形空間である。

#### ☎ 証明

#### 加法が線形性を満たす

f, g をともに線形写像とし、任意の  $v_1, v_2 \in V$  と  $a, b \in K$  に対して、

$$(f+g)(av_1 + bv_2)$$

$$= f(av_1 + bv_2) + g(av_1 + bv_2)$$

$$= af(v_1) + bf(v_2) + ag(v_1) + bg(v_2)$$

$$= a(f(v_1) + g(v_1)) + b(f(v_2) + g(v_2))$$

$$= a(f+g)(v_1) + b(f+g)(v_2)$$

よって、f + g は線形写像である

#### スカラー倍が線形性を満たす

f を線形写像とし、任意の  $v_1, v_2 \in V$  と  $a, b, c \in K$  に対して、

$$(cf)(av_1 + bv_2) = cf(av_1 + bv_2)$$

$$= c \cdot (f(av_1 + bv_2))$$

$$= c \cdot (f(av_1) + f(bv_2))$$

$$= c \cdot (af(v_1) + bf(v_2))$$

$$= a(cf)(v_1) + b(cf)(v_2)$$

よって、cf は線形写像である

線型空間の公理をすべて満たすことも、容易に確認できる
■