射影行列の冪等性と対称性

「一度射影した点をもう一度射影しても変化しない」という性質は、次のような数式として表現できる

ref: 線形代数セミナー p7

射影行列の冪等性　射影行列 $P_{\mathcal{U}}$ は**冪等**である

$$P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$$

証明

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{U}}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top \right) \left(\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{u}_j^\top \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{u}_j^\top \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{u}_i (\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_j) \boldsymbol{u}_j^\top \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} \delta_{ij} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_j^\top
\end{aligned}$$

ここで、δ_{ij} を含むことから、$i = j$ の場合のみ項が残り、

$$P_{\mathcal{U}}^2 = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top = P_{\mathcal{U}}$$

が得られる ■

この $P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$ という式は、一般の（必ずしも直交射影でない）射影の定義として用いられる

次の性質は、射影が直交射影であることを示すものである

射影行列の対称性　射影行列 $P_{\mathcal{U}}$ は、対称行列である

$$P_{\mathcal{U}}^\top = P_{\mathcal{U}}$$

証明

$$P_{\mathcal{U}}^\top = \left(\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top \right)^\top$$

和の転置は転置の和であることを用いて、

$$P_{\mathcal{U}}^\top = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top)^\top$$

また、積の転置は転置の積だが、積の順序が入れ替わることに注意して、

$$P_{\mathcal{U}}^\top = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{u}_i^\top)^\top \boldsymbol{u}_i^\top$$

転置の転置をとると元に戻るので、

$$P_{\mathcal{U}}^\top = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top = P_{\mathcal{U}}$$

が得られる　■

射影行列は冪等かつ対称であるが、その逆も成り立つ

対称性と冪等性による射影行列の特徴づけ　対称かつ冪等な行列は、ある部分空間への射影行列となる

証明

n 次対称行列 P は、n 個の実数の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つ

これらに属する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ とすると、$\boldsymbol{u}_i$ は互いに直交する

固有値と固有ベクトルの関係から、

$$P\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$$

両辺に左から P をかけると、

$$P^2\boldsymbol{u}_i = \lambda_i P\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \cdot \lambda_i \boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$$
$$\therefore \quad P^2\boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$$

ここで、P は冪等なので、$P^2 = P$ が成り立つ

$$P^2\boldsymbol{u}_i = P\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$$

これを用いると、

$$\lambda_i \boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$$

固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ は零ベクトルではないので、

$$\lambda_i = \lambda_i^2$$

よって、

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 - \lambda_i &= 0 \\ \lambda_i(\lambda_i - 1) &= 0 \\ \lambda_i &= 0, 1 \end{aligned}$$

すなわち、固有値は 0 か 1 のいずれかである

そこで、

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \cdots = \lambda_r &= 1 \\ \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n &= 0 \end{aligned}$$

とおくと、

$$P\boldsymbol{u}_i = \begin{cases} \boldsymbol{u}_i & (i = 1, \ldots, r) \\ 0 & (i = r+1, \ldots, n) \end{cases}$$

よって、P は $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ の張る部分空間への射影行列である

■