第 1 章

双対空間

内積から線形汎関数へ

横ベクトル（$1 \times n$ 型行列）を縦ベクトル（$n \times 1$ 型行列）にかけると、1×1 のスカラー値が得られる。

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

上の式は、数ベクトル空間の内積そのものである。

$$\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{v} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

さて、「観測装置としての内積」の章で述べたように、

> 内積 $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle$ は、観測装置 $\langle \boldsymbol{a} |$ によるベクトル $| \boldsymbol{v} \rangle$ の測定結果

という捉え方もできる。

ここで、観測装置である横ベクトル $\langle \boldsymbol{a} |$ を、縦ベクトル $| \boldsymbol{v} \rangle$ から内積を返す関数 $\phi_{\boldsymbol{a}}$ とみることにしよう。

$$\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

$\phi_{\boldsymbol{a}}$ は、縦ベクトル $\boldsymbol{v}$ を入力とし、スカラー値 $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle$ を返す、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への写像である。

さらに、内積の双線形性から、$\phi_{\boldsymbol{a}}$ は線形写像であることがわかる。

$$\begin{aligned}\phi_{\boldsymbol{a}}(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) &= (\boldsymbol{a}, c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) \\ &= c_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1) + c_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_2) \\ &= c_1\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}_1) + c_2\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}_2)\end{aligned}$$

この関数 $\phi_{\boldsymbol{a}}$ は、線形汎関数と呼ばれる写像の一例である。

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数　$\mathbb{R}^n$ 上の関数 $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が線形写像であるとき、ϕ を $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数あるいは線形形式という。

線形汎関数のベクトル表示

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数は、すべて内積から定めることができる。

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の内積による表現　$\mathbb{R}^n$ 上の任意の線形汎関数 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し、ある $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ がただ一つ存在して、次を満たす。

$$\psi = \phi_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} | \cdot \rangle$$

証明

$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ とする。

このとき、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ は、次のように表される。

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

これに $\boldsymbol{\psi}$ を作用させると、線形汎関数 $\boldsymbol{\psi}$ は線形性をもつので、

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{v}) &= \psi(v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= v_1\psi(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + v_n\psi(\boldsymbol{e}_n) \\ &= \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1 \\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで、

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$$

とおけば、次が成り立つ。

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle = \phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v})$$

$\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルなので、

$$\psi = \phi_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} | \cdot \rangle$$

となるような $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ の存在が示された。

さらに、次式を振り返ると、$\boldsymbol{\psi}$ が決まれば $\boldsymbol{a}$ が一意に定まることがわかる。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$$

よって、$\boldsymbol{\psi}$ に対して $\boldsymbol{a}$ はただ一つ存在する。 ■

上の定理の証明で現れた次の式は、2 通りの読み方ができる。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\psi}$ が決まれば、$\psi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \psi(\boldsymbol{e}_n)$ の値が決まるので、$\boldsymbol{a}$ がただ一つ定まる。

逆に、基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ に対する $\boldsymbol{\psi}$ の値が決まれば $\boldsymbol{\psi}$ の形が決まるので、上の式のように $\boldsymbol{a}$ を定めれば、$\boldsymbol{a}$ に対応して $\boldsymbol{\psi}$ の形がただ一つに定まることになる。

まとめると、

- すべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ は線形汎関数 $\boldsymbol{\psi}$ をひとつ定める
- すべての線形汎関数 $\boldsymbol{\psi}$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ をひとつ定める

$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{\psi}$ への対応は一対一であり、$\boldsymbol{\psi}$ から $\boldsymbol{a}$ への対応も一対一である。

すなわち、$\mathbb{R}^n$ のベクトルと $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の間には、全単射が存在する。

全単射な対応は、本来同じものに「異なる表現を与えている」と捉えることができる。

縦ベクトルと横ベクトルによる線形汎関数の表現

次の式も、先ほどの定理の証明で現れたものである。

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

この式もまた、2 通りの読み方ができる。

$\boldsymbol{a}$ を横ベクトルとみるなら、

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{v}$$

この見方では、線形汎関数は横ベクトル $\boldsymbol{a}$ との「行列としての積」である。

線形汎関数を行列の積として定義すれば、「横」ベクトル $\boldsymbol{a}$ が線形汎関数の表現行列に相当すると捉えられる。

一方、$\boldsymbol{a}$ を縦ベクトルとみるなら、

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}^\top} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$$

この見方では、線形汎関数は縦ベクトル $\boldsymbol{a}$ との「内積」である。

線形汎関数を内積として定義すれば、「縦」ベクトル $\boldsymbol{a}$ が線形汎関数の表現行列に相当すると捉えられる。

このように、線形汎関数という同じものに対して、横ベクトルと縦ベクトルは「異なる表現を与えている」とも解釈できる。

横ベクトルと縦ベクトルが転置という関係で結ばれていることで、この 2 通りの見方が可能になる。

線形汎関数の空間

内積の双線形性は、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、

$$(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}) = c_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{v}) + c_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v})$$

が成り立つというものだった。

これは、$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数が満たす関係式と読み替えることができる。

$$\phi_{c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2}(\boldsymbol{v}) = c_1\phi_{\boldsymbol{a}_1}(\boldsymbol{v}) + c_2\phi_{\boldsymbol{a}_2}(\boldsymbol{v})$$

この関係式は、$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の集合に、線形空間としての構造をもたらす。

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の集合を $(\mathbb{R}^n)^*$ と書くことにしよう。
この集合 $(\mathbb{R}^n)^*$ に和とスカラー倍の演算を導入することで、$(\mathbb{R}^n)^*$ を線形空間とみなすことができる。

線形汎関数の空間の基底

$\mathbb{R}^n$ の基底を $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ とするとき、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ は、

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{u}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

という線形結合で表すことができる。
ここで、$v_1, \ldots, v_n$ は、基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の成分あるいは座標と呼ばれる。

このうち第 j 座標 v_j を取得する関数を ϕ_j と定めよう。

$$\phi_j(\boldsymbol{v}) = v_j$$

このような関数を座標関数と呼ぶことにする。

また、ϕ_j は線形であるため、$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数である。

補足：ϕ_j の線形性

任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ が基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関して次のように表せるとする。

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{n} w_j \boldsymbol{u}_j$$

このとき、ϕ_j は次のように定義される。

$$\phi_j(\boldsymbol{v}) = v_j, \quad \phi_j(\boldsymbol{w}) = w_j$$

ベクトルの和を考えると、

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} (v_i + w_i)\boldsymbol{u}_i$$

より、第 j 座標は $v_j + w_j$ となるので、

$$\phi_j(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = v_j + w_j = \phi_j(\boldsymbol{v}) + \phi_j(\boldsymbol{w})$$

ベクトルのスカラー倍を考えると、

$$\alpha \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha v_i)\boldsymbol{u}_i$$

より、第 j 座標は αv_j となるので、

$$\phi_j(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha v_j = \alpha \phi_j(\boldsymbol{v})$$

以上より、$\phi_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は線形写像であることが示された。

ϕ_j を用いると、$\boldsymbol{v}$ を表す線形結合は次のように書ける。

$$\boldsymbol{v} = \phi_1(\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \phi_n(\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}_n$$

ここで、たとえば $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}_1$ に置き換えた式を考える。

$$\boldsymbol{u}_1 = \phi_1(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \phi_n(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_n$$

この等式が成り立つには、

- $\phi_1(\boldsymbol{u}_1) = 1$
- $\phi_2(\boldsymbol{u}_1) = 0, \ldots, \phi_n(\boldsymbol{u}_1) = 0$

でなければならない。

右辺の $\boldsymbol{u}_1$ だけが残り、他の項が消えることで、$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1$ という等式が成り立つ。

同様に考えると、$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}_i$ に置き換えた式

$$\boldsymbol{u}_i = \phi_1(\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \phi_n(\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_n$$

が成り立つには、$\boldsymbol{u}_i$ だけが残り、他の項が消えなければならないので、

$$\phi_j(\boldsymbol{u}_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

と定める必要がある。

この式により、$\mathbb{R}^n$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ を選べば、それらに対応する線形汎関数 $\phi_1, \ldots, \phi_n$ が定まることがわかる。

そしてこのとき、$\phi_1, \ldots, \phi_n$ は $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底となっている。

⚓ $\mathbb{R}^n$ における基底に対応する線形汎関数の構成 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とするとき、$\phi_j \in (\mathbb{R}^n)^*$ を次のように定める。

$$\phi_j(\boldsymbol{u}_i) = \delta_{ij}$$

このような $\phi_1, \ldots, \phi_n$ は $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底をなす。

証明

$\phi_1, \ldots, \phi_n$ が線型独立であること

次のような $\phi_1, \ldots, \phi_n$ の線形関係式を考える。

$$c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n = 0$$

このとき、任意の j に対して、

$$
\begin{aligned}
(c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n)(\boldsymbol{u}_j) &= c_1\phi_1(\boldsymbol{u}_j) + \cdots + c_n\phi_n(\boldsymbol{u}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i\delta_{ij} \\
&= c_j = 0
\end{aligned}
$$

が成り立たなければならない。

これは $\phi_1, \ldots, \phi_n$ が線型独立であることを示している。 ■

$\phi_1, \ldots, \phi_n$ が $(\mathbb{R}^n)^*$ を張ること

$\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$ を任意にとると、$\boldsymbol{u}_j$ に対する値 $\alpha_j = \psi(\boldsymbol{u}_j)$ が定まる。

このとき、α_j を係数とする $\phi_1, \ldots, \phi_n$ の線形結合を作ると、

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_n\phi_n)(\boldsymbol{u}_j) &= \alpha_1\phi_1(\boldsymbol{u}_j) + \cdots + \alpha_n\phi_n(\boldsymbol{u}_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi_i(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{ij} = \alpha_j \\
&= \psi(\boldsymbol{u}_j)
\end{aligned}
$$

ϕ_j, ψ はともに $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像であり、ϕ_j の線形結合もまた $(\mathbb{R}^n)^*$ の元なので $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像である。

よって、$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に対して同じ値をとることから、

$$
\psi = \alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_n\phi_n
$$

がいえる。

したがって、任意の $\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$ は $\phi_1, \ldots, \phi_n$ の線形結合として表すことができるため、

$$
(\mathbb{R}^n)^* = \langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle
$$

が示された。 ■

線形汎関数の空間の次元

$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ と、それに対応する $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底 $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ は、どちらも n 個のベクトルの組になっている。

> ここでいう「ベクトル」とは、「線形空間の元」という意味である。$(\mathbb{R}^n)^*$ も線形空間であるので、その元である線形汎関数も「ベクトル」と呼んでいる。

基底をなすベクトルの個数は、その空間の次元として定義されるので、次のことがいえる。

$\mathbb{R}^n$ とその線形汎関数の空間の次元の一致　$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ の次元は、$\mathbb{R}^n$ の次元と等しい。

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim(\mathbb{R}^n)^* = n$$

また、次元が等しいことから、$\mathbb{R}^n$ と $(\mathbb{R}^n)^*$ は線形同型である。
すなわち、$\mathbb{R}^n$ の元（縦ベクトル）と $(\mathbb{R}^n)^*$ の元（$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数）の間には、全単射が存在する。

基底を決めれば、縦ベクトルと線形汎関数を同一視する（同じものの「異なる表現」と捉える）ことができる。

横ベクトルと座標関数

$n \times 1$ 型行列（n 次の縦ベクトル）全体の集合は $\mathbb{R}^n$ と表された。
$1 \times n$ 型行列（n 次の横ベクトル）全体の集合を ${}^t\mathbb{R}^n$ と表すことにする。

${}^t\mathbb{R}^n$ の元は $1 \times n$ 型行列なので、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像（すなわち $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数）を表現している行列だと考えることができる。

座標関数の表現行列

基本ベクトルを転置したもの ${}^t\boldsymbol{e}_j \in {}^t\mathbb{R}^n$ を縦ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ にかけると、$\boldsymbol{v}$ の j 番目の成分が得られる。

たとえば、$n=3,\ j=2$ の場合、

$$
{}^t\boldsymbol{e}_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_2
$$

といった具合に、2 番目の成分 v_2 が得られる。

このように、ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、その j 番目の成分を返す**座標関数**を x_j と表記することにしよう。

$$
\begin{array}{cccc}
x_j \colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& \boldsymbol{v} & \longmapsto & v_j = {}^t\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{v}
\end{array}
$$

このとき、$x_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の**線形汎関数**である。

${}^t\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{v}$ を行列の積として見ると、横基本ベクトル ${}^t\boldsymbol{e}_j \in {}^t\mathbb{R}^n$ は線形汎関数 x_j の表現行列だと捉えることができる。

[Todo 1: 「基底方向への正射影」という観点についても述べる？]

横ベクトルと線形汎関数の同一視

任意の縦ベクトルは、基本ベクトル（標準基底）の線形結合として一意的に表現できる。

$$
|\boldsymbol{v}\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n
$$

同様に、任意の横ベクトルは、横基本ベクトルの線形結合として一意的に表現できる。

$$
\langle\boldsymbol{a}| = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = a_1{}^t\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n{}^t\boldsymbol{e}_n
$$

ここで、横ベクトル $\langle \boldsymbol{a}|$ は観測装置という視点に戻って、縦ベクトルを入力したら $\boldsymbol{a}$ との内積を返す線形汎関数を ϕ とおくと、

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \\ &= a_1 {}^t\boldsymbol{e}_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \cdots + a_n {}^t\boldsymbol{e}_n \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\ &= a_1 x_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + a_n x_n(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

よって、任意の線形汎関数 $\phi \in (\mathbb{R}^n)^*$ は、座標関数 $x_1, \ldots, x_n$ の線型結合として表すことができる。

$$\phi = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

また、x_i の表現行列が ${}^t\boldsymbol{e}_i$ であることを思い出すと、

$$\phi = a_1 {}^t\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n {}^t\boldsymbol{e}_n = \langle \boldsymbol{a}|$$

というように、線形汎関数 ϕ は横ベクトル $\langle \boldsymbol{a}|$ と同一視することができる。

$\{{}^t\boldsymbol{e}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{e}_n\}$ を基底としてどんな横ベクトルも表現できることは、$\{x_1, \ldots, x_n\}$ を基底としてどんな線形汎関数も表現できることに対応する。
これより、横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ と、線形汎関数の空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ は、同じ空間とみなすことができる。

縦ベクトルと横ベクトルの双対性

$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とするとき、任意の縦ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ は、

$$\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + v_n \boldsymbol{u}_n$$

という線形結合で表すことができる。

ここで、$v_1, \ldots, v_n$ は基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の座標である。

このうち、j 番目の座標 v_j を取得する関数を $\phi_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と定めると、ϕ_j は、

$$\phi_j(\boldsymbol{u}_i) = \delta_{ij}$$

を満たし、$\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ が $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底となる。

このとき、$(\mathbb{R}^n)^*$ の元（線形汎関数）を横ベクトルと同一視すると、任意の横ベクトル $\phi \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、

$$\phi = c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n$$

という線形結合で表すことができる。

ここで、$c_1, \ldots, c_n$ は基底 $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ に関する ϕ の座標である。
このうち、j 番目の座標 c_j を取得する関数を $\psi_j\colon {}^t\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と定めると、ψ_j は、

$$\psi_j(\phi_i) = \delta_{ij}$$

を満たし、$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ が $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ の基底となる。

さて、基底を変えれば座標も変わってしまうので、ψ_j はあくまでも基底が $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ のときの横ベクトルの座標を返す関数である。
さらに、ϕ_j は $\mathbb{R}^n$ の基底が $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ のときの縦ベクトルの座標を返す関数である。

つまり、ψ_j は $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に依存しているので、$\boldsymbol{u}_j \in \mathbb{R}^n$ を入力として ψ_j を定める関数 ι を考えてみる。

$$\begin{array}{cccc} \iota\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & ({}^t\mathbb{R}^n)^* \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \boldsymbol{u}_j & \longmapsto & \psi_j \end{array}$$

ι を用いると、次のように書ける。

$$\iota(\boldsymbol{u}_j) = \psi_j$$

このとき、基底に対して座標は一意的であり、基底が変わると座標が変わることから、

i. 基底 $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=1}^n$ を固定すれば、$\iota(\boldsymbol{u}_j) = \psi_j$ を満たす座標 $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ は一意に定まる
ii. 座標 $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ を固定すれば、$\iota(\boldsymbol{u}_j) = \psi_j$ を満たす基底 $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=1}^n$ は一意に定まる

という 2 通りの見方ができる。

このように、$\boldsymbol{u}_j \in \mathbb{R}^n$ と $\psi_j \in ({}^t\mathbb{R}^n)^*$ には、「互いに測り、測られる」という対称性がある。このような対称性を双対性という。

この性質を意識し、${}^t\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の双対空間という。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, leftrightarrow, "\text{同一視}"] \arrow[dr, "\text{裏返し}"'] & ({}^t\mathbb{R}^n)^* \\
& {}^t\mathbb{R}^n \arrow[u, "\text{裏返し}"']
\end{tikzcd}
$$

双対とは、「裏返しにした関係」と解釈できる。

${}^t\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の双対空間であるとは、「横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ を裏返しにしたもの $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ は、縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^n$ と同一視できる」ということである。

逆に、$\mathbb{R}^n$ は ${}^t\mathbb{R}^n$ の双対空間である。「縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^n$ を裏返しにしたもの $(\mathbb{R}^n)^*$ は、横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ と同一視できる」ということでもある。
すなわち、線形汎関数の空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ を横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ と同一視できる。

そこで、${}^t\mathbb{R}^n$ を $(\mathbb{R}^n)^*$ に書き換えると、

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, leftrightarrow, "\text{同一視}"] \arrow[dr, "\text{裏返し}"'] & ((\mathbb{R}^n)^*)^* \\
& (\mathbb{R}^n)^* \arrow[u, "\text{裏返し}"']
\end{tikzcd}
$$

という関係が見えてくる。$(\mathbb{R}^n)^*$ を $\mathbb{R}^n$ の双対空間という。
表 $\mathbb{R}^n$ の裏は $(\mathbb{R}^n)^*$ であり、裏の裏 $((\mathbb{R}^n)^*)^*$ は表 $\mathbb{R}^n$ になる。

双対空間と双対基底

ここまでの話を、一般の線形空間 V に拡張しよう。

まず、V 上の線形汎関数を次のように定義する。

> **線形汎関数**　V を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする。V から $\mathbb{R}$ への線形写像 $\phi\colon V \to \mathbb{R}^n$ を V 上の線形汎関数あるいは線形形式という。

V から $\mathbb{R}$ への線形写像、すなわち V 上の線形汎関数全体の集合を考える。

双対空間　V 上の線形汎関数全体の集合を V の双対空間といい、V^* と表す。

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{\phi\colon V \to \mathbb{R} \mid \phi\text{は線形写像}\}$$

線形空間 V が有限次元の場合は、選んでおいた V の基底に対して、双対基底（**dual basis**）という双対空間 V^* の基底を考えることができる。

双対基底の構成　V を n 次元の線形空間とし、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする。このとき、$\phi_j \in V^*$ を次のように定める。

$$\phi_j(\boldsymbol{v}_i) = \delta_{ij}$$

このような $\phi_1, \ldots, \phi_n$ は V^* の基底をなす。

この定理は $V = \mathbb{R}^n$ の場合と同様に示すことができる。

また、この定理から次が成り立つ。

双対空間の次元　n 次元線形空間 V の双対空間 V^* の次元は、V の次元と等しい。

$$\dim V = \dim V^* = n$$

これより、V と V^* は線形同型であることがいえるが、この同型は基底に依存していることに注意しよう。

一旦ここまでの話をまとめると、次のような関係が成り立っている。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, leftrightarrow, "?"] \arrow[dr, "\text{基底による同型}"'] & (V^*)^* \\ & V^* \arrow[u, "\text{基底による同型}"'] \end{tikzcd}$$

再双対空間による自然同型

線形空間 V の双対空間 V^* もまた線形空間になるので、さらにその双対空間 $(V^*)^*$ を考えることができる。

$(V^*)^*$ を V の再双対空間あるいは第 2 双対空間といい、V^{**} と書くこともできる。

実は $(V^*)^*$ と V は線形同型であり、この同型は V の基底に依存しないことが示される。

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, leftrightarrow, "\text{自然な同型}"] \arrow[dr, "\text{基底による同型}"'] & (V^*)^* \\
& V^* \arrow[u, "\text{基底による同型}"']
\end{tikzcd}$$

再双対空間への写像

線形汎関数 $\phi \in V^*$ に $\boldsymbol{v} \in V$ を入力して得られるスカラー値を次のように書くことにする。

$$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle := \phi(\boldsymbol{v})$$

$\boldsymbol{v} \in V$ を固定したとき、任意の線形汎関数（V^* の元）に $\boldsymbol{v}$ を入力したもの $\langle -, \boldsymbol{v} \rangle$ を考えることができる。

> $-$ はプレースホルダーであり、（線形汎関数なら）なんでも入れられることを意味する。具体的な線形汎関数が決まっていないときは、$-(\boldsymbol{v})$ と書くよりも、$\langle -, \boldsymbol{v} \rangle$ と書いた方がわかりやすい。

ここで、具体的な $\phi \in V^*$ を与えれば、スカラー値 $\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle$ が確定する。

$$\begin{array}{cccc}
\Phi_{\boldsymbol{v}}\colon & V^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& \phi & \longmapsto & \langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle
\end{array}$$

この写像 $\phi \mapsto \langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle$ を $\Phi_{\boldsymbol{v}}$ と書くことにしよう。

$$\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi) = \langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle = \phi(\boldsymbol{v})$$

このように定めた $\Phi_{\boldsymbol{v}}\colon V^* \to \mathbb{R}$ は線形写像であるので、$(V^*)^*$ 上の線形汎関数である。

補足：$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ の線形性

$\phi_1, \phi_2 \in V^*$、$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とする。

ϕ_1, ϕ_2 は線形写像であるので、線形写像の和とスカラー倍の定義より、

$$\begin{aligned}\Phi_{\boldsymbol{v}}(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) &= (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)(\boldsymbol{v}) \\ &= c_1\phi_1(\boldsymbol{v}) + c_2\phi_2(\boldsymbol{v}) \\ &= c_1\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_1) + c_2\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_2)\end{aligned}$$

となるので、$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ は線形写像である。

余談だが、上の式変形は次のように書くこともできる。

$$\begin{aligned}\Phi_{\boldsymbol{v}}(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) &= \langle c_1\phi_1 + c_2\phi_2, \boldsymbol{v}\rangle \\ &= c_1\langle\phi_1, \boldsymbol{v}\rangle + c_2\langle\phi_2, \boldsymbol{v}\rangle \\ &= c_1\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_1) + c_2\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_2)\end{aligned}$$

この見方に慣れておくと、後の議論に対して戸惑いが少なくなる。

また、$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ は $\boldsymbol{v}$ に依存しているので、各 $\boldsymbol{v} \in V$ に $\Phi_{\boldsymbol{v}} \in (V^*)^*$ を対応させる写像 ι を考えることができる。

$$\begin{array}{cccc}\iota\colon & V & \longrightarrow & (V^*)^* \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \boldsymbol{v} & \longmapsto & \Phi_{\boldsymbol{v}}\end{array}$$

このように定めた $\iota\colon V \to (V^*)^*$ は線形写像である。

補足：ι の線形性

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$、$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とすると、

$$\begin{aligned}\iota(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) &= \Phi_{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2} \\ &= \langle -, c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2\rangle \\ &= c_1\langle -, \boldsymbol{v}_1\rangle + c_2\langle -, \boldsymbol{v}_2\rangle \\ &= c_1\Phi_{\boldsymbol{v}_1} + c_2\Phi_{\boldsymbol{v}_2} \\ &= c_1\iota(\boldsymbol{v}_1) + c_2\iota(\boldsymbol{v}_2)\end{aligned}$$

となるので、ι は線形写像である。

$\iota\colon V \to (V^*)^*$ は線形写像であるので、ι が線形同型写像であることを示せば、V と $(V^*)^*$ の同型が導かれる。

そのためには、ι の全単射性を証明できればよい。

双対空間の分離性

特に ι が単射であることを示すために、次の定理を用いる。

双対空間の分離性　有限次元線形空間 V において、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ で $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ ならば、$\phi(\boldsymbol{v}) \neq 0$ となるような線形汎関数 $\phi \in V^*$ が存在する。

証明

$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ より、$\boldsymbol{v}$ は線型独立である。

よって、基底の延長により、$\boldsymbol{v}$ を含む V の基底 $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を選ぶことができる。

この基底に対応する双対基底 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \subset V^*$ を考えると、それぞれの ϕ_i は、次の性質をもつ。

$$\phi_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

このとき $\phi_1(\boldsymbol{v}) = 1$ であるので、$\phi = \phi_1$ をとれば、任意の $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ に対して $\phi(\boldsymbol{v}) = 1$ となる。 ■

再双対空間との同型

再双対空間との自然な同型　V が有限次元ならば、$\iota\colon V \to (V^*)^*$ は線形同型である。

証明

写像 ι は単射

$\iota(\boldsymbol{v})=0$ すなわち、任意の $\phi \in V^*$ に対して

$$\iota(\boldsymbol{v})(\phi)=\phi(\boldsymbol{v})=0$$

であると仮定する。

この仮定は、すべての線形汎関数が $\boldsymbol{v}$ を 0 に写すことを意味する。

ここで、$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ とすると、双対空間の分離性より、$\phi(\boldsymbol{v}) \neq 0$ となるような線形汎関数 ϕ が存在する。

これは $\iota(\boldsymbol{v})=0$ という仮定と矛盾するので、$\iota(\boldsymbol{v})=0$ のもとでは、$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$ でなければばならない。

したがって、

$$\iota(\boldsymbol{v})=0 \Longrightarrow \boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$$

となり、これは線形写像 ι が単射であることを示している。 ■

写像 ι は全射

双対空間の次元を考えると、

$$\dim(V^*)^*=\dim V^*=\dim V$$

[Note 1: 次元定理と全射性との関係を加筆したら、その記載箇所へのリンクを貼る]

ι が単射であることから $\operatorname{Ker}(\iota)=\{\boldsymbol{o}\}$ なので、線形写像の次元定理より、$\dim(V^*)^*=\dim V$ は $\iota\colon V \to (V^*)^*$ が全射であることを示している。

■

双対ペアリング

V と $(V^*)^*$ の間には、線形同型写像 $\iota \colon V \to (V^*)^*$ が存在する。
このことから、V と $(V^*)^*$ は線形同型であることがいえる。

このように、V が有限次元の場合は、V と $(V^*)^*$ を自然に（基底によらずに）同一視することができる。

ここで、再双対空間への写像を考える際に登場した次の式を再解釈してみよう。

$$\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi) = \phi(\boldsymbol{v})$$

V と $(V^*)^*$ の同型により、$\boldsymbol{v} \in V$ と $\Phi_{\boldsymbol{v}} \in (V^*)^*$ も同一視することができる。
そこで、$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ を単に $\boldsymbol{v}$ と書くことにすると、次の関係が得られる。

$$\boldsymbol{v}(\phi) = \phi(\boldsymbol{v})$$

これは、$\boldsymbol{v} \in V$ と $\phi \in V^*$ に対し、

値 $\phi(\boldsymbol{v})$ をとることは、$\boldsymbol{v}$ から見ても ϕ から見ても対等

であることを表している。

この平等さを表すために、次のような記法を使うこともある。

$$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \phi \rangle = \phi(\boldsymbol{v})$$

この記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を、双対を表すペアリングと呼ぶ。

双対写像

[Placeholder 1: 改編予定]

線形空間の間の線形写像が与えられると、双対空間の間の線形写像を定めることができる。

線形空間 V, W の間の線形写像 $f\colon V \to W$ が与えられたとする。

W 上の線形汎関数を $\varphi \in W^*$ とすると、次のような関係になっている。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

このとき、合成写像 $\varphi \circ f\colon V \to \mathbb{R}$ を考えることができる。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi \circ f"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

線形写像の合成もまた線形写像になるので、$\varphi \circ f$ は V 上の線形汎関数である。これを $f^*(\varphi) \in V^*$ と書くことにする。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi)"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f^*(\varphi)$ は V 上の線形汎関数なので、$\boldsymbol{v} \in V$ を入力するとスカラーを返す。

合成写像の記法より、$(\varphi \circ f)(\boldsymbol{v})$ は、$\varphi(f(\boldsymbol{v}))$ とも書けるので、

$$f^*(\varphi)(\boldsymbol{v}) = \varphi(f(\boldsymbol{v})) = \langle \varphi, f(\boldsymbol{v}) \rangle$$

と整理できる。

また、f^* は W^* 上の線形汎関数 φ を入力として、V^* 上の線形汎関数 $f^*(\varphi)$ を返す線形写像である。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi)"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

f^*

補足：なぜ f^* は線形写像といえるのか

$W^* = \mathrm{Hom}(W, \mathbb{R})$ における和とスカラー倍の定義から示すことができる。

$\varphi_1, \varphi_2 \in W^*$ に対して、

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 + \varphi_2)(\boldsymbol{v}) &= (\varphi_1 + \varphi_2)(f(\boldsymbol{v})) \\ &= \varphi_1(f(\boldsymbol{v})) + \varphi_2(f(\boldsymbol{v})) \\ &= f^*(\varphi_1)(\boldsymbol{v}) + f^*(\varphi_2)(\boldsymbol{v}) \\ &= (f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2))(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

また、$c \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned} f^*(c\varphi)(\boldsymbol{v}) &= (c\varphi)(f(\boldsymbol{v})) \\ &= c \cdot \varphi(f(\boldsymbol{v})) \\ &= c \cdot f^*(\varphi)(\boldsymbol{v}) \\ &= (cf^*(\varphi))(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 + \varphi_2) &= f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2) \\ cf^*(\varphi) &= f^*(c\varphi) \end{aligned}$$

となり、写像 f^* は線形性を満たすことがわかる。 ■

このように定まる線形写像 $f^* \colon W^* \to V^*$ を、f の双対写像という。

$$\begin{array}{cccc} f^* \colon & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \varphi & \longmapsto & f^*(\varphi) \end{array}$$

双対写像　V, W を線形空間とし、$f \colon V \to W$ を線形写像とするとき、f の双対写像 $f^* \colon W^* \to V^*$ を次のように定義する。

$$f^*(\varphi) \coloneqq \varphi \circ f \quad (\varphi \in W^*)$$

双対を表すペアリングの記法を用いると、次のように整理できる。

$$f^*(\varphi)(\boldsymbol{v}) = \langle f^*(\varphi), \boldsymbol{v} \rangle = \langle \varphi, f(\boldsymbol{v}) \rangle = \varphi(f(\boldsymbol{v})) \quad (\boldsymbol{v} \in V)$$

双対写像の表現行列

[Placeholder 2: 改編予定]

線形写像の双対写像の表現行列は、元の線形写像の表現行列の転置になる。

このことから、双対写像は**転置写像**とも呼ばれる。

双対写像の行列表現　V, W を有限次元の線形空間とし、$f \colon V \to W$ を線型写像とする。また、$\dim V = n, \dim W = m$ とする。

V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$、$W$ の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を選び、これらの双対基底をそれぞれ $\phi_1, \ldots, \phi_n$、$\psi_1, \ldots, \psi_m$ とする。

このとき、$\{\boldsymbol{v}_i\}$、$\{\boldsymbol{w}_j\}$ に関する f の表現行列を A とすると、$\{\psi_j\}, \{\phi_i\}$ に関する f^* の表現行列は $A^\top$ によって与えられる。

証明

$f \colon V \to W$ に対して、その双対写像 $f^* \colon W^* \to V^*$ は次で定義される。

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi \circ f"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

$$
f^*(\psi) = \psi \circ f \quad (\psi \in W^*)
$$

$f^*(\psi)$ は V 上の線形汎関数なので、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ を入力するとスカラーを返す。

合成写像の記法より、$(\psi \circ f)(\boldsymbol{v})$ は、$\psi(f(\boldsymbol{v}))$ とも書けるので、

$$
f^*(\psi)(\boldsymbol{v}) = \psi(f(\boldsymbol{v}))
$$

が成り立つ。

一方、f の表現行列 A は次のように構成される。

$$f(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{w}_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

したがって、任意の i に対し、

$$\psi_k(f(\boldsymbol{v}_i)) = \psi_k\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{w}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\psi_k(\boldsymbol{w}_j)$$

ここで、$\{\psi_k\}$ は $\{\boldsymbol{w}_j\}$ の双対基底なので、$\psi_k(\boldsymbol{w}_j) = \delta_{kj}$ より、

$$\psi_k(f(\boldsymbol{v}_i)) = a_{ki}$$

また、$f^*(\psi_k) \in V^*$ は V 上の線形汎関数なので、V の双対基底 $\{\phi_i\}$ の線形結合として表せる。

$$f^*(\psi_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\phi_i$$

この係数 b_{ik} を並べた行列を B とすると、B は f^* の表現行列である。

このとき、

$$f^*(\psi_k)(\boldsymbol{v}_i) = \psi_k(f(\boldsymbol{v}_i)) = a_{ki}$$

であり、一方、

$$f^*(\psi_k)(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\phi_j(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{jk}\delta_{ij} = b_{ki}$$

でもあるから、$b_{ki} = a_{ki}$ が成り立つ。すなわち、

$$B = A^\top$$

である。 ■

例：縦ベクトルと横ベクトルによる線形写像

[Todo 2: まとめ直す]

A を $m \times n$ 型行列とする

縦ベクトルに A を左からかけることによって定まる線形写像を次のように表す

$$f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\ (\boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v})$$

これと対照的に、横ベクトルに右から A をかけることによって定まる次の線形写像を**転置写像**と呼ぶ

$$f_A^*\colon {}^t\mathbb{R}^m \to {}^t\mathbb{R}^n\ (\phi \mapsto \phi A)$$

横ベクトル $\phi A \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、次の合成写像の表現行列である

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$$

⚓ 転置写像と自然なペアリング　A を $m \times n$ 型行列とし、$\phi \in {}^t\mathbb{R}^m,\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\langle f_A^*(\phi), \boldsymbol{v}\rangle = \langle \phi, f_A(\boldsymbol{v})\rangle$$

証明

$$\begin{aligned}\langle f_A^*(\phi), \boldsymbol{v}\rangle &= (\phi A)(\boldsymbol{v}) \\ &= \phi(A\boldsymbol{v}) \\ &= \phi(f_A(v)) \\ &= \langle \phi, f_A(\boldsymbol{v})\rangle\end{aligned}$$

より、目的の等式が得られる　■

⚓ 転置写像と座標関数　A を $m \times n$ 型行列とし、$y_1, \ldots, y_m \in {}^t\mathbb{R}^m$ を ${}^t\mathbb{R}^m$ 上の座標関数とするとき、

$$f_A^*(y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

証明

行ベクトルとしての観点から見ると、$y_i = {}^t\boldsymbol{e}_i$ として、

$$f_A^*(y_i) = f_A^*({}^t\boldsymbol{e}_i) = {}^t\boldsymbol{e}_i A = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

これは双対基底 $x_j = {}^t\boldsymbol{e}_j$ を用いて、

$$\begin{aligned} f_A^*(y_i) &= \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^t\boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \end{aligned}$$

とも書ける ■

転置写像の表現行列　A を $m \times n$ 型行列とするとき、基底 $\{y_1, \ldots y_m\}$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ に関する f_A^* の表現行列は ${}^tA$ である

証明

[Todo 3: よくわからない]

表現行列は、基底 $\{y_i\}$ の各元が、写像を通してどのような線形結合で $\{x_j\}$ に写されるかを記述したものである

すなわち、写像 f_A^* の表現行列を求めることは、

$$f_A^*(y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

において、係数 a_{ij} を行列に並べることである

ここで、$f_A^* \colon {}^t\mathbb{R}^m \to {}^t\mathbb{R}^n$ において、

- 定義域の基底は $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset {}^t\mathbb{R}^m$

- 値域の基底は $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset {}^t\mathbb{R}^n$

先ほど示した等式

$$f_A^*(y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

より、表現行列の第 i 列が、$f_A^*(y_i)$ の係数ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

を転置して縦ベクトルにしたものになる

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	3
note	1
placeholder	2