

# 絶対値

1

実数  $a$  について、 $a$  の絶対値を次のように定義する。

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

## 1.2 絶対値の性質

### 1.2.1 絶対値は 0 以上の数

負の数の場合は、符号を取って正の数にしたものを絶対値とすることから、絶対値が負の数になることはない。

絶対値は常に非負

実数  $a$  の絶対値  $|a|$  は、常に 0 以上の数となる。

$$|a| \geq 0$$

等号が成立するのは、 $a = 0$  の場合である。

### 1.2.2 中身の符号によらず絶対値は同じ

3 も -3 も、絶対値はともに 3 だった。つまり、

$$|3| = |-3| = 3$$

このことを一般化したのが、次の性質である。

中身の符号を変えても絶対値は不変

実数  $a$  の絶対値について、次が成り立つ。

$$|-a| = |a|$$

### 1.2.3 積の絶対値は絶対値の積

絶対値の計算と、積の計算は、どちらを先に行っても結果が同じになる。

絶対値の積の性質

実数  $a$  と  $b$  について、次の式が成り立つ。

$$|ab| = |a||b|$$

$a$  と  $b$  がともに正の数なら、

- $a$  と  $b$  は正の数なので、 $|a| = a$ 、 $|b| = b$
- $ab$  も正の数なので、 $|ab| = ab$

となり、 $|ab| = |a||b|$  が成り立つことがわかる。

では、片方が負の数の場合はどうだろうか。

$a$  か  $b$  のどちらかにマイナスの符号をつけてみると、

$$|-ab| = |-a||b|$$

$$|-ab| = |a||-b|$$

のどちらかとなるが、前の節で解説した  $|-X| = |X|$  の関係から、これらはどちらも  $|ab| = |a||b|$  に帰着する。

$a$  と  $b$  の両方が負の数の場合は、

$$|ab| = |-a||-b|$$

となるが、これも  $|-X| = |X|$  の関係を使えば、やはり  $|ab| = |a||b|$  に帰着する。

### 1.3 数直線上の2点間の距離

Under construction...



### 1.4 max関数による表現

実数  $a$  の絶対値は、「 $a$  と  $-a$  のうち大きい方を選ぶ」という考え方で表現できる。

たとえば、3 と  $-3$  の絶対値はともに 3 だが、これは 3 と  $-3$  のうち大きい方（正の数の方）を絶対値として採用した、という見方もできる。

max 関数による絶対値の表現

実数  $a$  について、 $a$  の絶対値を次のように定義することもできる。

$$|a| = \max\{a, -a\}$$

ここで登場した  $\max$  は、「複数の数の中から最大のものを選ぶ」という操作を表している。

### 1.5 三角不等式

2つの実数  $a$  と  $b$  の「絶対値の和」と「和の絶対値」の間には、次のような大小関係がある。

絶対値に関する三角不等式

任意の実数  $a$  と  $b$  について、次の不等式が成り立つ。

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

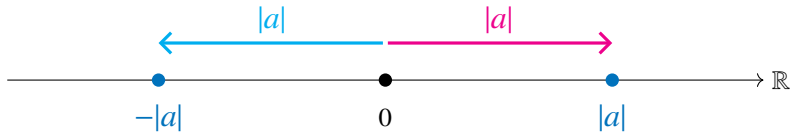


この形の不等式は、実は今後登場するベクトルの長さ（ノルム）や、複素数の絶対値に対しても成り立つ。三角不等式と呼ばれる所以は、ベクトルに関する三角不等式で明らかになる。

絶対値の定義から、この不等式の証明を考えてみよう。

$a$  の絶対値  $|a|$  は、 $a$  から符号を取り払ったものであるから、逆に絶対値  $|a|$  に  $+$  か  $-$  の符号をつけることで、元の数  $a$  に戻ることができる。

$a$  が負の数だったなら、 $-|a|$  とすれば  $a$  に戻る。正の数だったなら、 $|a|$  がそのまま  $a$  に一致する。



$a$  は原点からの距離が  $|a|$  の場所にあり、 $a$  は  $-|a|$  か  $|a|$  のどちらかに一致する。

どちらに一致するかはわからないので、次のような不等式で表しておく。

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$b$  についても、同じように考えることができる。

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

これらの不等式を使って、さらに式変形を行うことで、三角不等式を導くことができる。

#### Proof: 絶対値に関する三角不等式

絶対値の定義から、次の不等式が成り立つ。

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

両辺を足し合わせて、次の不等式を得る。

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$-(|a| + |b|) \leq a + b$  の両辺を  $-1$  倍することで、次の関係も得られる。(不等式の両辺を  $-1$  倍すると、不等号の向きが逆転することに注意)

$$|a| + |b| \geq -(a + b)$$

ここまでで得られた、 $a + b$  についての不等式をまとめると、次のようになる。

$$|a| + |b| \geq a + b$$

$$|a| + |b| \geq -(a + b)$$

一方、 $a + b$  の絶対値は、定義より次のように表せる。

$$|a + b| = \max\{a + b, -(a + b)\}$$

$a + b$  と  $-(a + b)$  のうち大きい方が  $|a + b|$  となるが、 $a + b$  と  $-(a + b)$  はどちらも  $|a| + |b|$  以下となることがすでに示されているので、

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

となり、定理は示された。 ■