第 1 章

線形写像の像と核

線形写像とベクトルの線型独立性

ref: 行列と行列式の基礎 p65〜66
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p71〜73

線形写像と線形独立性　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の f による像

$$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$$

が線型独立であるとき、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ も線型独立である

証明

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

を考える

この両辺を f で写すと、f の線形性と零ベクトルの像 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

を使って

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

仮定より $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は線型独立なので、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である

よって、

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_n$ は 0 しかないので、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は線型独立である ■

次の定理は、平行なベクトルを線型写像で写した結果、平行でなくなったりはしないということを述べている

線形写像と線形従属性 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線形従属ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ は線形従属である

証明

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線形従属であるとは、少なくとも 1 つは 0 でないある定数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ が存在して

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

が成り立つことを意味する

この両辺を f で写すと、線形性より

$$k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

よって、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線形従属である ■

たとえば平行四辺形の像が線分や 1 点になったりしないことなどは、「$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線型独立ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線型独立である」と表現できる

単射な線型写像は線型独立性を保つ　線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が単射であるとき、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線型独立ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線型独立である

証明

$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ の線形結合

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$$

を考える

f の線形性と零ベクトルの像 $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ より、次のように書き換えられる

$$f(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{0})$$

f は単射だから、上式より

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ

ここで、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線型独立なので、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である

よって、$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は線型独立である　■

零写像と射影を除けば、f によってベクトルが「つぶれない」という性質

は、次のように表せる

$$\boldsymbol{v} \neq 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$$

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

この条件は、実は線形写像が単射であることを意味している

対偶をとって、次のように表現できる

零ベクトルへの写像による単射性の判定　線形写像 f が単射であることと次は同値である

$$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

証明

i. f が単射

ii. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

零ベクトルの像は零ベクトルであることから、$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ は、

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{0})$$

と書き換えられる

f の単射性により、この式から、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

がしたがう ■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ を満たす $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ を考える

このとき、f の線形性から、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) - f(\boldsymbol{v}_2)$$

となる

仮定 (ii) より、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$$

がいえるので、$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ が成り立つ

$f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ から $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ が導かれたことで、f は単射であることが示された ■

線形写像の単射性と全射性

線形写像 f の単射性を表現行列 A の言葉で述べる

ref: 行列と行列式の基礎 p67〜68

線形写像の単射性と表現行列　線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値

i. f は単射
ii. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は自明な解しか持たない
iii. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が単射であることの言い換えは、

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

であり、$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が自明解しか持たないことは、

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

が成り立つということである

$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であるから、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\iff$ (iii)

斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に自明解しか存在しないことと

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

と同値であることは以前証明済み ■

i は抽象的な概念、ii は方程式論的な言葉、iii は数値的な条件であり、これらは同値な言い換えである

単射性と対比して、全射性の理解も表現行列の言葉で整理する

線形写像の全射性と表現行列 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値

i. f は全射
ii. 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解が存在する
iii. $\mathrm{rank}(A) = m$

証明

(i) $\iff$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が全射であることの言い換えは、

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

であり、これは

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

と同値である

よって、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

$\mathrm{rank}(A) = m$ が、次の条件

$$^\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する}$$

ことと同値であることは、以前証明済み ■

像空間と全射性

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の全射性は、$\mathbb{R}^m$ の部分集合である像空間 $\mathrm{Im}(f)$ と関係している

ref: 行列と行列式の基礎 p68〜69

全射な写像は、定義域の元の像で値域を「埋め尽くす」

ということから、f が全射であることは、$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ と同値だとわかる

核空間と単射性

線形写像 f が単射であることは、次の条件と同値であった

$$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

この条件は、次のように言い換えることができる

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$$

線形写像の単射性と核の関係　f を線形写像とするとき、

$$f \text{ が単射} \iff \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

証明

$\mathrm{Ker}(f)$ の定義は

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$$

これを踏まえて、次の 2 つが同値であることを示す

i. $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
ii. $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

このとき、$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ が $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ を意味するので、$\mathrm{Ker}(f)$ の元は零ベクトルのみになる

よって、$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ　■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ であれば、$\mathrm{Ker}(f)$ の元は零ベクトルのみである

よって、$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つとき、$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ が成り立つことになる

すなわち、$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ　■

核空間と解空間

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$$

と定めると、$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ という関係から、$\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Ker}(A)$ は同じものを指す

これは、斉次形の連立線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間そのものである

$\mathrm{Ker}(A)$ の元は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を使ってパラメータ表示できる

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1