次元定理

ref: 行列と行列式の基礎 p101

線形写像の次元定理 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、次が成り立つ

$$\mathrm{rank}(f) = n - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

証明

A を f の表現行列とし、$\mathrm{rank}(f) = r$ とする

このとき、$\mathrm{Ker}(f)$ の次元は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の自由度 $n - r$ と一致するため、

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}(f) &= n - r \\ &= n - \mathrm{rank}(f) \\ \therefore \quad \mathrm{rank}(f) &= n - \dim \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

となり、定理が成り立つ ■