非自明解の存在と有限従属性定理

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の非自明解の存在に対して、次の解釈もできる。

ref: 行列と行列式の基礎 p40〜41

斉次形方程式の非自明解の存在と線形従属 $m \times n$ 型行列 A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ とするとき、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ に自明でない解がある} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属}$$

証明

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は、ベクトルの等式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$$

と同じものである。

$\Longrightarrow$

もし自明でない解があるならば、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ のうち少なくとも 1 つは 0 ではない。

$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ が成り立つもとで、0 でない係数が存在するということは、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属であることを意味する。 ■

$\Longleftarrow$

対偶を示す。

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立であれば、

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$$

において、すべての係数 $x_1, \ldots, x_n$ は 0 でなければならない。

よって、0 以外の解（非自明解）は存在しないことになる。

■

斉次形方程式に自明でない解が存在することは、$\mathrm{rank}(A) \neq n$、すなわち解の自由度が 0 ではないことと同値であった。

一般に、斉次形の線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解の自由度は、n を変数の個数とするとき $n - \mathrm{rank}(A)$ なので、次が成り立つ。

列ベクトルの線型独立性と階数　$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とおくと、

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

このことから、次の重要な結論が導かれる。

有限従属性定理　$\mathbb{R}^m$ 内の m 個よりも多いベクトルからなる集合は線形従属である。

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p41 （系 1.6.6）]

この結論は、幾何的な直観からは自然だといえる。
たとえば、平面 $\mathbb{R}^2$ 内の 3 つ以上のベクトルがあれば、自動的に線形従属になる。

この事実は、次元の概念を議論する際の基礎になる。

また、同じことを線型方程式の文脈に言い換えると、次のようになる。

> **有限従属性定理の線型方程式版**　斉次線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ において、変数の個数が方程式の個数よりも多いときには、非自明な解が存在する。

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1