特性方程式

λ が n 次正方行列 A の固有値であることは、

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

となるような $\boldsymbol{x} \in K^n$ が存在することである

ref: 行列と行列式の基礎 p184、p188〜191
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p258〜260

ここで、$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を次のように変形することができる

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ A\boldsymbol{x} - \lambda E\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ (A - \lambda E)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ という条件により、$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は非自明な解を持つ必要がある

⚓ **固有ベクトルの斉次形方程式による定義**　固有値 λ の固有ベクトルとは、斉次形方程式

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の非自明な解のことである

固有値を求める上で重要となるこの定理は、行列式を使って言い換えることができる

⚓ **固有値の方程式による定義**　行列 A の固有値 λ は、x についての n 次方程式

$$\det(A - xE) = 0$$

の K に含まれる解である

証明

λ が A の固有値であることは、斉次形方程式 $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が非自明解を持つことと言い換えられる

そして、斉次形方程式が非自明解を持つことは、行列式が 0 になることと同値である

すなわち、

$$\det(A-\lambda E)=0$$

が成り立ち、つまり $x=\lambda$ は方程式 $\det(A-xE)=0$ の解である ■

n 次正方行列 A に対し、$\det(A-xE)$ は、x についての n 次式になる

実際、$A=(a_{ij})$ とおいて、

$$\det(A-xE)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

を展開することを考える

すべての列（あるいはすべての行）から、x を含む成分をとった場合の積が

$$\begin{aligned}(a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x) \\ =(-1)^n x^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})x^{n-1} \\ +\cdots+a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\end{aligned}$$

であり、x についての最高次は、ここに現れる $(-1)^n x^n$ である

[Todo 1: ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p259、ref: 行列と行列式の基礎 p190]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1