

線形代数 2. 線形写像と行列の演算

tomixy

2025 年 5 月 26 日

目次

行列の導入	2
線形写像の定義	4
線形写像の表現行列	5
\mathbb{R}^2 の線形変換の例	8
行列の積	8
行列の和とスカラー倍	10
行列の積の結合法則	11
行列の区分け	13
行列と複素数	14
対角行列	15
トレース	16



行列の導入

長方形に並んだ数の集まりを

ref: 行列と行列式の基礎 1.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

など書き、**行列**と呼ぶ

横の数字の並びを**行**、縦の数字の並びを**列**と呼ぶ

A は m 個の行と n 個の列をもつ行列である

第 i 行、第 j 列にある数字を a_{ij} と表し、これを (i, j) **成分**と呼ぶ

行が m 個、列が n 個の行列は、 **m 行 n 列の行列**、あるいは **$m \times n$ 型の行列**であるという

$n \times n$ 型の場合、行列は正方形なので n 次**正方行列**と呼ぶ



A の成分から第 j 列だけを取り出して \mathbb{R}^m のベクトルとしたものが

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$


であり、これを A の j 番目の**列ベクトル**という

A は、これらを横に並べたものという意味で

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

と書くことができる



 行列とベクトルの積 $m \times n$ 型の行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ と $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ との積を

$$A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n$$

により定める

ここで、 v_i は \mathbf{v} の第 i 成分である


$A\mathbf{v}$ を考えるとき、ほとんどの場合は、 A が 1 つ与えられていて \mathbf{v} がいろいろ動くという意識が強い


それは、行列 A のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る

入力ベクトル $\mathbf{v} \rightarrow$ 出力ベクトル $A\mathbf{v}$

という装置、すなわち写像だとみなすことである



 行列のスカラー倍 A を行列、 c をスカラーとすると、 A のすべての成分を c 倍して得られる行列を cA とする

 行列とベクトルの積の性質 A, B を $m \times n$ 型行列、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 、 $c \in \mathbb{R}$ とするとき、次が成り立つ

i. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

ii. $A(c\mathbf{v}) = cA\mathbf{v}$


 証明



[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p24 (命題 1.4.3)]



線形写像の定義

 線形写像と線形性 写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは、次の 2 つの条件が成立することである

- i. $f(c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v})$ がすべての $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ
- ii. $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ がすべての $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ

これらの性質を写像 f の線形性という

また、 $m = n$ のとき、線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を \mathbb{R}^n の線形変換と呼ぶ

線形変換は空間 \mathbb{R}^n からそれ自身への写像なので、 \mathbb{R}^n 内において「ベクトルが変化している」（あるいは f が空間 \mathbb{R}^n に作用している）ニュアンスとみることができる




$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、i より、

$$f(0 \cdot \mathbf{v}) = 0 \cdot f(\mathbf{v})$$

なので、

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

 零ベクトルの像 零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される



ref: 行列と行列式の
基礎 2

$m = n = 1$ のときは、線形写像 $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ は、通常の意味の関数である


このとき、 i の性質から、

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1)$$

が成り立つので、 $a = f(1) \in \mathbb{R}$ とおくと、

$$f(x) = ax$$

と書ける

 比例関数 線形写像 $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ は、 a を比例定数とする比例関数である



線形写像の表現行列

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、各基本ベクトル \mathbf{e}_j の f による像を

$$f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

と書くとする

これらを横に並べることによって、 m 行 n 列の行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

この行列 A を f の表現行列という

特に、 \mathbb{R}^n の線形変換の表現行列は n 次正方行列である

\mathbb{R}^n の一般のベクトル \boldsymbol{v} を、基本ベクトルの線型結合として

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^n v_j \boldsymbol{e}_j$$

と書く

このとき、 f の線形性より、

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^n v_j f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^n v_j \boldsymbol{a}_j$$

となる

このベクトルの第 i 成分は

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n$$

と書ける


これは $A\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である

したがって、この記法を踏まえて、次のような表記ができる

 線形写像とその表現行列の関係

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

比例関数が比例定数 a だけで決まるのと同じように、線形写像は表現行列 A が与えられれば決まる

 零写像と零行列 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ と定めたものは明らかに線形写像であり、これを **零写像** と呼ぶ

その表現行列はすべての成分が 0 である行列である

この行列を **零行列** と呼び、 \mathbf{O} で表す

$m \times n$ 型であることを明示するために $O_{m,n}$ と書くこともある
また、 n 次正方行列の場合は、 O_n と書く

 恒等写像と単位行列 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$

に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ と定めたものは明らかに線形写像である

これを **恒等写像** と呼び、 $f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ と書く

恒等写像の表現行列は、 $f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j$ ($1 \leq j \leq n$) より

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを **単位行列** と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、 n 次であることを明示したいときは E_n と書く

線形写像 f から行列 A を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることができる

 行列から線形写像を作る $m \times n$ 型行列 A に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

によって写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を定めれば、 f は線形写像である

 証明

行列とベクトルの積の性質より、 f は線形写像である


また、 f の定義から明らかに A は f の表現行列である ■

\mathbb{R}^2 の線形変換の例



[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p51 - p56]

行列の積

 線形写像の合成 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への線形写像 g と、 \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^l への線形写像 f が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g: \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^l への線形写像である

 証明



[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p56 (問 2.2)]

f と g の表現行列をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする

A は $l \times m$ 型、 B は $m \times n$ 型の行列である

このとき、 $f \circ g$ は $l \times n$ 型行列で表現される

それを C と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

B を列ベクトルに分解して $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ と書くとき、

$$(f \circ g)(\mathbf{e}_j) = f(g(\mathbf{e}_j)) = f(\mathbf{b}_j) = A\mathbf{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n)$$

となる

C の (i, j) 成分は $A\mathbf{b}_j$ の第 i 成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、 C の (i, j) 成分を計算するときは、 A の第 i 行、 B の第 j 列だけを見ればよい


$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \cdots \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} \cdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、 A と B の積と呼ぶ

 単位行列との積 A を $m \times n$ 型とすると、次が成り立つ

$$E_m A = A$$

$$A E_n = A$$

 零行列との積 A を $m \times n$ 型とすると、次が成り立つ

$$O_m A = A O_n = O_{m,n}$$

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は可換であるという

一般には、2 つの行列は可換であるとは限らない

つまり、 AB と BA は一般には異なる




[Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p58 (例 2.2.3, 2.2.4)]




行列の和とスカラー倍

A, B がともに $m \times n$ 型行列であるとき、それぞれの (i, j) 成分を足すことで行列の和 $A + B$ を定める

 分配法則 積が定義できるとき、

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

 行列の積とスカラー倍の性質 行列 A, B の積 AB が定義できるとき、つまり A の列の個数と B の行の個数が同じであるとき、 $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

が成り立つ



 線形写像の和 $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とし、

$$h(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

により写像 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を定めるとき、 h も線形写像である


また、 f, g の表現行列を A, B とするとき、 h の表現行列は $A + B$ である

なお、 $h = f + g$ と書き、 f, g の和と呼ぶ

 証明



[Todo 5: ref: 行列と行列式の基礎 p59 (問 2.5)]

 スカラー行列 c をスカラーとすると、 cE の形の行列をスカラー行列という

$$cE = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

行列 A にスカラー行列をかけることは、

$$(cE)A = A(cE) = cA$$

のように、スカラー c をかけるのと同じである

行列の積の結合法則

 積の結合法則 積 AB, BC がともに定義できるとき、

$$(AB)C = A(BC)$$

写像による証明

A, B, C がそれぞれ $q \times m, m \times n, n \times p$ 型行列だとする
線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、 f, g, h の表現行列をそれぞれ A, B, C とする
一般的な写像の合成の性質として、

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

が成り立つから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう ■

積の計算規則による証明

AB の (i, l) 成分は、

$$(AB)_{il} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^n (AB)_{il} c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \end{aligned}$$

i, j はいま固定されているので、和には関係がない
動いているのは k, l だけ

ここで、次の書き換えができる

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} \end{aligned}$$

$\sum_{l=1}^n$ の右にある式は l に関する和をとる前のものなので、 l は止まっていると考えてよく、単純な分配法則を使っている

また、括弧がなくとも、 k に関する和を先にとって、その後で l に関する和をとっていると読むことができる

このとき、和の順番は交換してもよいので、

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ik} \left(\sum_{l=1}^n b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ik} (BC)_{kj} \end{aligned}$$

先ほどと同様に、 $\sum_{k=1}^m$ の右では k は止まっていると考えている
 そして、この結果は、 $A(BC)$ の (i, j) である ■

結合法則が成り立つことが示されたので、 $(AB)C$ または $A(BC)$ を表すとき、括弧を書かずに単に ABC と書いても問題ない
 行列の個数が増えても同様である

また、 A が正方行列の場合は、

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ A^3 &= AAA \end{aligned}$$

などのように書く



行列の区分け

行列を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ref: 行列と行列式の基礎 p64

のようなブロック型に区分けして計算することがよくある

A が $m \times n$ 型のとき、 $m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2$ として、 A_{ij} は $m_i \times n_j$ 型である

また、 B が $n \times l$ 型で、 $n = n_1 + n_2$, $l = l_1 + l_2$ と区分けして

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように A_{ij} などが行列の成分であるかのようにして（ただし積の順序は変えずに）積が計算できる

ここで、 A の列の区分けと B の行の区分けの仕方が同じであることが必要である

3 つ以上のブロックに分ける場合も同様である



行列と複素数

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき、


$$aE + bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$


という形の行列を**複素数**と呼ぶことにより、複素数の定義ができる

この定義では、通常は $a + bi$ と書かれるものを行列として実現している




対角行列

 **対角成分** 正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、 a_{ii} を**対角成分**と呼ぶ

 **対角行列** 対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列を**対角行列**と呼ぶ

$a_{ii} = c_i \quad (1 \leq i \leq n)$ である対角行列を次のように表す

$$\text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

 **対角行列と列ベクトルのスカラー倍** 右から対角行列をかけると、各列ベクトルがスカラー倍になる

すなわち、 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ とすると、

$$A \cdot \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_1 \mathbf{a}_1, c_2 \mathbf{a}_2, \dots, c_n \mathbf{a}_n)$$

が成り立つ


 証明



[Todo 6: ref: 行列と行列式の基礎 p63 (問 2.8)]




トレース

 **トレース** 正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、対角成分の和

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

を A の **トレース** と呼び、 $\text{tr}(A)$ と表す

ref: 行列と行列式の基礎
p64

 **トレースの性質**

- i. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- ii. $\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A)$
- iii. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

 **証明**



[Todo 7: ref: 行列と行列式の基礎 p64 問 2.9]

Zebra Notes

Type	Number
todo	7