Chapter 1

実数の連続性

ε - δ 論法によって微分積分の理論を再定義しても、その議論は実数の連続性に依存している。

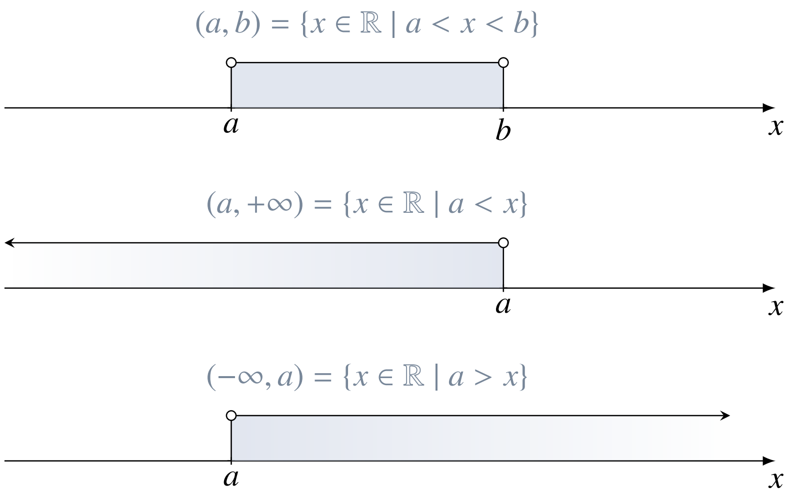
この章では、「実数は連続である」、平たく言えば「数直線には穴がない」という表現を観察する。

Contents

1.1 区間の限界を表す

区間の最大値や最小値は、その区間の中で最大もしくは最小となる数を指す。
閉区間の場合は、区間の端点が最大値・最小値となるが、開区間では端点を含まないため、「区間の中で」最大（もしくは最小）といえる数は存在しないことになる。

しかし、「最大値（最小値）がない＝区間は限りなく続く」というわけではない。
もしそうだとしたら、次の 3 つの開区間が区別できないことになる。



そこで、最大値・最小値とは別に、区間に限界があることを表す概念を導入する。

1.1.1 上界と下界

区間内の数がとりうる値に「限界が有る」ことを、有界という概念で表す。

上界、上に有界

ある区間に属するどの数も、ある数 M 以下であるとき、この区間は上に有界であるといい、この M を上界という。

上界　M が区間 X の 上界 であるとは、

任意の $x \in X$ に対して $x \leq M$ が成り立つ

ことをいう。このような上界 M が存在するとき、X は 上に有界 であるという。

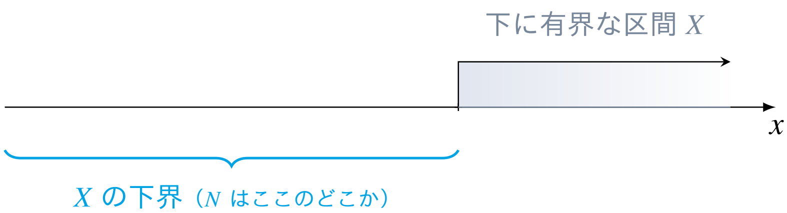
下界、下に有界

ある区間に属するどの数も、ある数 N 以上であるとき、この区間は下に有界であるといい、この N を下界という。

下界　N が区間 X の 下界 であるとは、

任意の $x \in X$ に対して $x \geq N$ が成り立つ

ことをいう。このような下界 N が存在するとき、X は 下に有界 であるという。



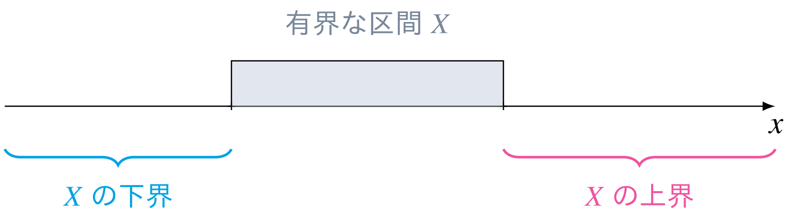
有界

ある区間が上にも下にも有界であるとき、この区間は有界であるという。

有界　区間 X が 有界 であるとは、

X が上に有界かつ下に有界である

ことをいう。



1.1.2　上限と下限

1.1.3　上限定理

1. 公理 3.1

1.2 数列の極限再訪

1.2.1 アルキメデスの公理

2. 命題 3.2

1.2.2 収束列の有界性

3. 定理 2.11

1.2.3 単調数列

4. 定義 5.1

1.2.4 有界な単調数列の収束性

5. 定理 5.4

1.3 区間縮小法

6. 定理 5.11

1.4 収束する部分列

1.4.1 部分列

7. 定義 6.5

1.4.2 収束する数列の部分列の極限

8. 定理 6.7

1.4.3 ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理

9. 定理 6.8

1.5 コーシー列と実数の完備性

1.5.1 コーシー列

10. 定義 6.9

1.5.2 実数の完備性

11. 定理 6.11

1.6　上限定理再訪

12. 定理 6.12