次元定理

連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の自由度は、

ref: 行列と行列式の基礎 p101
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p82〜83

$$\text{解の自由度} = (\text{変数の個数}) - \mathrm{rank}(A)$$

で表された

この関係は、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$、すなわち斉次形の場合にも成り立つ

そこで、変数の個数を n とおくと、次のようにも書き換えられる

$$\mathrm{rank}(A) = n - (A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解の自由度})$$

線型方程式と階数に関するこの関係を、線形写像と次元の言葉で言い換えたい

次のような線形写像

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \Psi & & \Psi \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x} \end{array}$$

を考えると、

- 写像 f は、行列 A に対応する
- 変数の個数は、$\boldsymbol{x}$ の動く空間 $\mathbb{R}^n$ の次元 n に対応する
- $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度は、写像 f で $\boldsymbol{0}$ になってしまうものの次元に対応する

という関係が読み取れる

ここで、写像 f で $\boldsymbol{0}$ になってしまう縮退するものは、写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ である

このことを用いて関係式を表現し直すと、次のようになる

$$\mathrm{rank}(f) = n - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

線形写像の次元定理　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、次が成り立つ

$$\operatorname{rank}(f) = n - \dim \operatorname{Ker}(f)$$

証明

A を f の表現行列とし、$\operatorname{rank}(f) = r$ とする

このとき、$\operatorname{Ker}(f)$ の次元は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の自由度 $n - r$ と一致するため、

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(f) &= n - r \\ &= n - \operatorname{rank}(f) \\ \therefore \quad \operatorname{rank}(f) &= n - \dim \operatorname{Ker}(f) \end{aligned}$$

となり、定理が成り立つ　■