Chapter 1

ε - δ 論法による無限の記述

ここまでのこの本では、極限というものを厳密に定義していなかった。また、微分と積分において、イメージで導出できることを最重視し、厳密な議論を避けた箇所が多くある。

厳密には、極限は ε - δ 論法によって定義され、微分積分の基礎理論は極限の議論に基づいている。 ε - δ 論法に踏み込んでいない私たちは、極限というものを語る言葉をまだ持ち合わせていない。

1.1 数列の極限

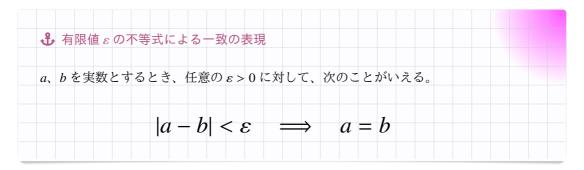
微分を定義するには関数の極限を考えるが、関数の極限の諸性質は、数列の極限から導かれる。 まずは、 $\varepsilon-\delta$ 論法(数列の場合は $\varepsilon-N$ 論法とも呼ばれる)によって数列の極限を定義し、その 性質をひとつひとつ確かめていこう。

1.1.1 ϵ で「一致」をどう表現するか

「限りなく近づく」という表現では、「限りなく」の部分に無限という概念が含まれてしまう。 有限の値 ϵ を使って、無限を表現しようとするのが ϵ - δ 論法である。

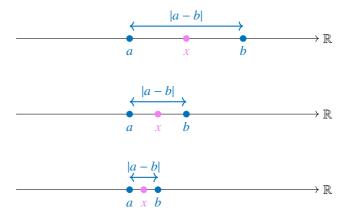
* * *

 ε - δ 論法で極限を定義する前に、有限値 ε を使った議論の例を見てみよう。



実数は連続である(数直線には穴がない)ため、aとbが異なる実数であれば、aとbの間には無 数の実数が存在する。

つまり、 $a \ge b$ が異なる限り、その間の距離 |a-b| は絶対に 0 にはならない。



|a-b| が 0 にならないということは、ここでも実数の連続性によって、|a-b| より小さい実数が存 在してしまう。

たとえば、a と b の間の中点 $x = \frac{|a-b|}{2}$ は、|a-b| よりも小さい。



a と b の間の中点というと $\frac{a-b}{2}$ だが、正の数 ε と比較するため、絶対値をつけて $\frac{|a-b|}{2}$ としている

|a-b| より小さい実数が存在してしまうと、「任意の」 $\varepsilon > 0$ に対して、 $|a-b| < \varepsilon$ を成り立たせる ことができない。

 ε はなんでもよいのだから、|a-b|より小さい実数を ε として選ぶこともできてしまう。 しかし、|a-b| より小さい実数を ε としたら、 $|a-b| < \varepsilon$ は満たされない。

|a-b| が 0 でないという状況下では、あらゆる実数 ε より |a-b| を小さくすることは不可能である。

したがって、 $|a-b| < \varepsilon$ を常に成り立たせるなら、|a-b| = 0、すなわち a = b となる。

* * *

ここまでの考察から直観を取り除いて、この定理の数学的な証明をまとめておこう。

Proof: 有限値 ε の不等式による一致の表現

 $a \neq b$ と仮定する。

 $\varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2}$ とおくと、絶対値 |a-b| が正の数であることから、 ε_0 も正の数となる。 よって、 $|a-b| < \varepsilon_0$ が成り立つので、

$$|a-b| < \frac{|a-b|}{2}$$

 $2|a-b| < |a-b|$
 $2|a-b| - |a-b| < 0$
 $|a-b| < 0$

絶対値が負になることはありえないので、 $a \neq b$ の仮定のもとでは矛盾が生じる。したがって、a = bでなければならない。

なお、 $|a-b| < \varepsilon$ の右辺を定数倍し、 $|a-b| < k\varepsilon$ などとしても、この定理は成り立つ。

定理「有限値 ε の不等式による一致の表現」は、定数をkとして、次のように書き換えることもできる。

$$|a-b| < k\varepsilon \implies a = b$$

この場合、証明で $\varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2k}$ とおけば、まったく同様の議論が成り立つからだ。

実際に、 $|a-b| < 2\varepsilon$ とした場合のこの定理を、後に登場する数列の極限の一意性の証明で使うことになる。

1.1.2 ε-N 論法による数列の収束

 $\varepsilon - \delta$ 論法は、数列の極限に適用する場合、 $\varepsilon - N$ 論法と呼ばれることが多い。

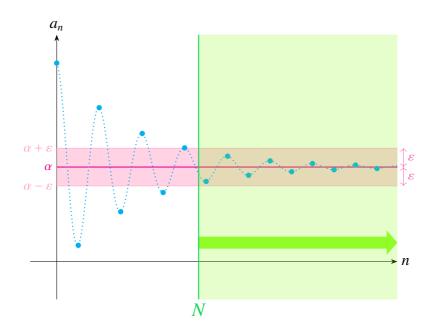
「数列が $\{a_n\}$ が α に収束する」ことの $\varepsilon-N$ 論法による表現を、まずはイメージで掴んでみよう。

* * *

まず、 α の周りに、両側それぞれ ε だけ広げた区間を考える。

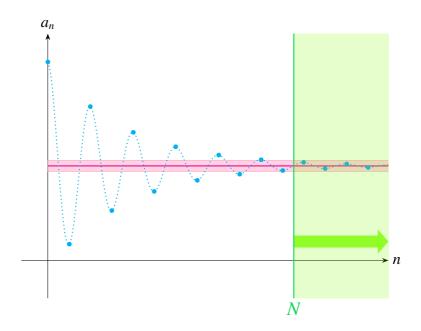
 ε は正の数ならなんでもよいとすれば、 ε を小さな数に設定し、いくらでも区間を狭めることができる。

そして、「ここから先の項はすべて区間内に収まる」といえる位置に、Nという印をつけておく。



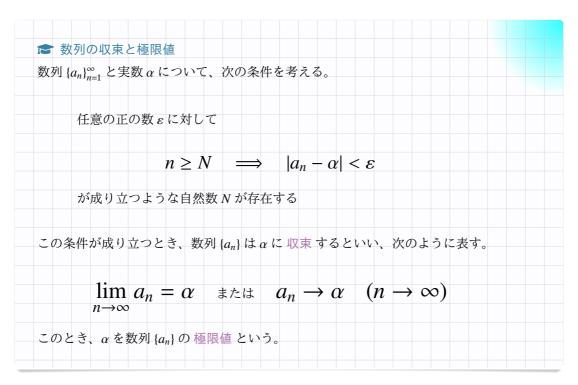
 ε を小さくしていくと、 ε による α 周辺の区間に入る項は少なくなる。 それでも、N をずらしていけば、N 以降はこの区間に収まる項だけになる。 これこそが「収束」という現象だと定義するのが、 $\varepsilon-N$ 論法の考え方である。

5



区間幅 (の半分) となる ε をどんなに小さくしても、[N 番目以降は区間内に収まる項だけになる」といえるような N を設定できるか?が肝心で、そのような N が存在するなら、数列は収束するといえる。

このことを、数学の言葉でまとめておこう。



 $\varepsilon - \delta$ 論法によるこの定義を用いることで、数列の収束に関する諸性質を証明できるようになる。

1.1.3 数列の極限の一意性

数列が最終的に複数の極限値に散らばるとしたら、それは収束と呼べるだろうか? $\varepsilon - \delta$ 論法による収束の定義は、そのような状況をきちんと除外するようになっている。

数列が複数の値に収束することはない。このことを示すのが、次の定理である。

参数列の極限の一意性
数列 {a _n } が収束するならば、その極限値はただ1つに定まる。

Proof: 数列の極限の一意性

数列 $\{a_n\}$ が α と β の 2 つの極限値を持つと仮定する。

このとき、任意の正の数 ε に対して、

 $n \ge N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$ $n \ge N_2 \implies |a_n - \beta| < \varepsilon$

が成り立つような自然数 N_1 と N_2 が存在する。

ここで、 $N=\max\{N_1,N_2\}$ とおくと、 $n\geq N$ のとき、 N_1 と N_2 の大きい方が n 以下に収まることから、 $n\geq N_1$ と $n\geq N_2$ がともに成り立つ。

よって、 $n \ge N$ のとき、 $|\alpha - \beta|$ を考えると、

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - \beta + a_n - a_n|$$

$$= |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)|$$

$$\leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta|$$

$$= |-(a_n - \alpha)| + |a_n - \beta|$$

$$= |a_n - \alpha| + |a_n - \beta|$$

$$< \varepsilon + \varepsilon$$

$$= 2\varepsilon$$

$$\therefore |\alpha - \beta| < 2\varepsilon$$

したがって、有限値 ε の不等式による一致の表現より、

$$\alpha = \beta$$

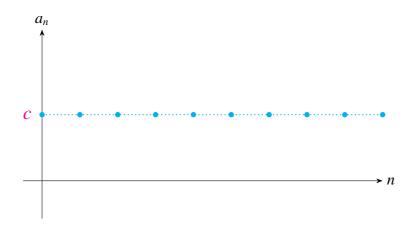
これで、数列 $\{a_n\}$ の極限値はただ1つに定まることが示された。

1.1.4 定数数列の極限

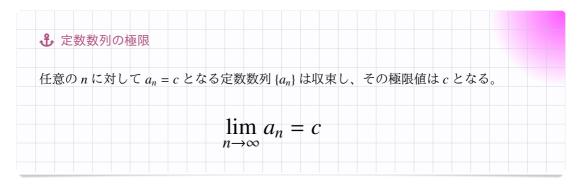
最も単純な数列の極限値を、 $\varepsilon - N$ 論法で考えてみよう。

ここでは、同じ数だけを並べた数列(定数数列)の極限を考える。

定数数列の極限を考えておくことで、のちに数列の定数倍の極限へと発展させることができる。



定数 c を並べた数列では、n を大きくしたときの a_n の値も変わらず c なのだから、極限値も当然 c となりそうである。



このような当たり前に聞こえる事実も、 $\varepsilon-N$ 論法では「当たり前」という直観を排除して議論できる。

Proof: 定数数列の極限

 ε を任意の正の数とする。

 a_n は n の値によらず c であるから、任意の n に対して次の式が成り立つ。

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

$$|a_n - c| < \varepsilon$$

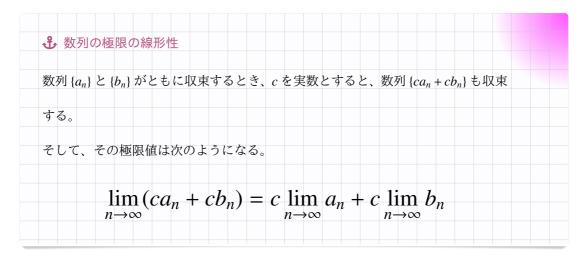
したがって、

$$n \ge N \quad \Rightarrow \quad |a_n - c| < \varepsilon$$

となるような自然数 N は存在する(というか N はなんでもよい)。 よって、 $\{a_n\}$ は収束し、その極限値は c である。

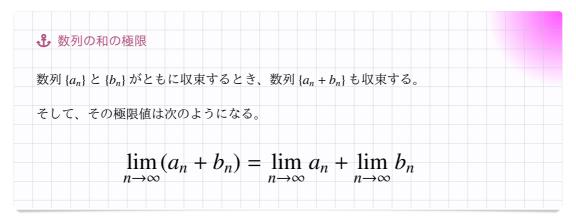
1.1.5 数列の極限の線形性

数列の極限についても、線形性が成り立つ。



この線形性の式は、数列の和の極限と、数列の定数倍の極限を組み合わせたものになっている。 それぞれ証明することで、この線形性の式が成り立つことを確認しよう。

数列の和の極限



 $\{a_n\}$ の極限値を lpha、 $\{b_n\}$ の極限値を eta とすると、最終的に次のような関係を導くことで、この定理が証明される。

$$n \ge N \implies |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

 $|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)|$ は、 a_n+b_n と $\alpha+\beta$ がどれだけ近いか、すなわち a_n+b_n と $\alpha+\beta$ の誤差を表している。そして、この誤差を ε より小さくする必要がある。

そのためには、 a_n と α の誤差を $\frac{\varepsilon}{2}$ より小さくし、 b_n と β の誤差も $\frac{\varepsilon}{2}$ より小さくできればよい。

Proof: 数列の和の極限

 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 、 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおき、 ε を任意の正の数とする。

このとき、 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \ge N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同様に、 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より、次のような自然数 N_2 が存在する。

$$n \ge N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、 $n \ge N$ のとき、 $n \ge N_1$ と $n \ge N_2$ がともに成り立つ。

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{fig. } |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

よって、 $n \ge N$ のとき、三角不等式より、

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)|$$

$$\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

という不等式が成り立つことで、 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$ が示された。

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するということは、 $\varepsilon-N$ 論法による数列の収束の定義より、

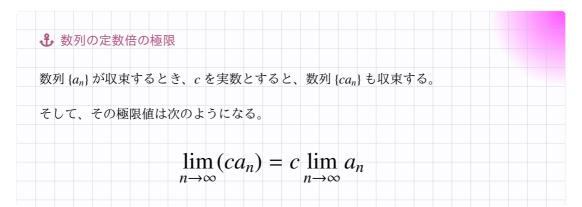
$$n \ge N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

という関係が成り立つということである。

ここでの ε は「任意の」正の数であるから、 ε の部分にどんな正の数を当てはめても、この関係が成り立つことになる。

数列の和の極限の証明では、arepsilon の部分に $\dfrac{arepsilon}{2}$ を当てはめた関係を利用している。

数列の定数倍の極限



 $\{a_n\}$ の極限値を α とすれば、 ca_n と $c\alpha$ の誤差を ε より小さくする必要がある。 あとから誤差が最大 |c| 倍されても大丈夫なように、 a_n と α の誤差は $\frac{\varepsilon}{|c|}$ より小さくできればよい。



c は正の数とは限らない。誤差は任意の正の数 ε と比較するために正の数として評価したいので、絶対値をつけている。

|c| が分母にあるので、c=0 の場合は除外して考える必要がある。 c=0 の場合は、定数数列の極限として考えることで、0 に収束することがわかる。

Proof: 数列の定数倍の極限

c = 0と $c \neq 0$ の場合に分けて証明する。

(c = 0 の場合

c=0 のとき、右辺は、

$$c \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \cdot \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

また、左辺は、定数数列の極限として考えて、

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

したがって、c=0 の場合は、 $\lim_{n\to\infty}(ca_n)=c\lim_{n\to\infty}a_n=0$ が成り立つ。

(* c ≠ 0 の場合

 $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ とおき、 ε を任意の正の数とする。

このとき、 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N が存在する。

$$n \ge N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

よって、 $n \ge N$ のとき、

$$|ca_{n} - c\alpha| = |c(a_{n} - \alpha)|$$

$$= |c||a_{n} - \alpha|$$

$$< |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|}$$

$$= \varepsilon$$

$$|AB| = |A||B|$$

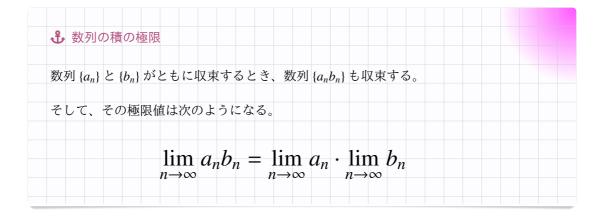
$$|a_{n} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

$$\therefore |ca_n - c\alpha| < \varepsilon$$

という不等式が成り立つことで、 $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$ がいえる。

以上より、いずれの場合も、数列 $\{ca_n\}$ は $c\alpha$ に収束することが示された。

1.1.6 数列の積の極限



 $\{a_n\}$ の極限値を α 、 $\{b_n\}$ の極限値を β とすると、最終的に次のような関係を導くことで、この定理が証明される。

$$n \ge N \implies |a_n b_n - \alpha \beta| < \varepsilon$$

 $a_n b_n$ と $\alpha \beta$ の誤差 $|a_n b_n - \alpha \beta|$ を、三角不等式で見積もっておこう。

$$|a_n b_n - \alpha \beta| = |a_n b_n - a_n \beta + a_n \beta - \alpha \beta|$$
$$= |a_n (b_n - \beta) + \beta (a_n - \alpha)|$$
$$\le |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha|$$

ここで、 $\{a_n\}$ の極限値が α 、 $\{b_n\}$ の極限値が β であることから、任意の正の数を ε' として、 $|a_n-\alpha|<\varepsilon'$ 、 $|b_n-\beta|<\varepsilon'$ という関係を使うことができる。

ここまでで得られた不等式において、 $|a_n|$ の部分も $|\alpha|$ に置き換えたいが、このときに a_n と α の誤 $\hat{\mathcal{E}}$ を考慮する必要がある。

$$|a_n| - |\alpha| \le |a_n - \alpha| < \varepsilon'$$

 $|a_n| < |\alpha| + \varepsilon'$

これを使うことで、

$$|a_n b_n - \alpha \beta| \le |a_n| |b_n - \beta| + |\beta| |a_n - \alpha|$$

$$< (|\alpha| + \varepsilon') |b_n - \beta| + |\beta| |a_n - \alpha|$$

$$= (|\alpha| + \varepsilon') \varepsilon' + |\beta| \varepsilon'$$

$$< |\alpha| \varepsilon' + {\varepsilon'}^2 + |\beta| \varepsilon'$$

$$= (|\alpha| + |\beta| + \varepsilon') \varepsilon'$$

また、 ε' は任意の正の数であるが、結局はどんどん小さな数に狭めていくものなので、最初から1 未満に設定して $0<\varepsilon'<1$ としてもよい。

$$|a_n b_n - \alpha \beta| < (|\alpha| + |\beta| + \varepsilon')\varepsilon'$$

 $< (|\alpha| + |\beta| + 1)\varepsilon'$

以上の考察を、次のような証明として落とし込む。

Proof: 数列の積の極限

 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 、 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおき、 ε を任意の正の数とする。

極限を考えるので、 $0<\varepsilon<|\alpha|+|\beta|+1$ としてもよい。 そこで、

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$

とおくと、 $0 < \varepsilon' < 1$ である。

このとき、 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \ge N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon'$$

同様に、 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より、次のような自然数 N_2 が存在する。

$$n \ge N_2 \implies |b_n - \beta| < \varepsilon'$$

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、 $n \ge N$ のとき、 $n \ge N_1$ と $n \ge N_2$ がともに成り立つ。

$$n \ge N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon' \quad \text{for} \quad |b_n - \beta| < \varepsilon'$$

よって、 $n \ge N$ のとき、三角不等式と $0 < \varepsilon' < 1$ より、

$$|a_n b_n - \alpha \beta| \le |a_n| |b_n - \beta| + |\beta| |a_n - \alpha|$$

$$< (|\alpha| + \varepsilon') \varepsilon' + |\beta| \varepsilon'$$

$$= (|\alpha| + |\beta| + \varepsilon') \varepsilon'$$

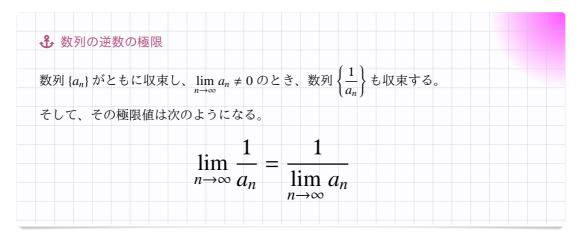
$$< (|\alpha| + |\beta| + 1) \varepsilon'$$

$$= \varepsilon$$

$$\therefore |a_n b_n - \alpha \beta| < \varepsilon$$

という不等式が成り立つことで、 $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\alpha\beta$ が示された。

1.1.7 数列の商の極限



 $\{a_n\}$ の極限値をlphaとすると、最終的に次のような関係を導くことで、上の式は証明される。

$$n \ge N \implies \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < \varepsilon$$

ここでも、 $\frac{1}{a_n}$ と $\frac{1}{\alpha}$ の誤差 $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right|$ を、三角不等式で見積もっておく。

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha - a_n}{a_n \alpha} \right|$$
$$= \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n \alpha|}$$

ここで、 $0 < \varepsilon' < \frac{|\alpha|}{2}$ とすると、

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon' < \frac{|\alpha|}{2}$$

 $\therefore |a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$

また、三角不等式より、

$$||a_n| - |\alpha|| \le |a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$$

$$-\frac{|\alpha|}{2} < |a_n| - |\alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$$

$$|\alpha| - \frac{|\alpha|}{2} < |a_n|$$

$$\frac{2|\alpha|}{2} - \frac{|\alpha|}{2} < |a_n|$$

$$\therefore \frac{|\alpha|}{2} < |a_n|$$

が成り立つことを利用して、

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n \alpha|}$$

$$< \frac{|a_n - \alpha|}{\frac{|\alpha|}{2} \cdot |\alpha|}$$

$$= \frac{2}{|\alpha|^2} |a_n - \alpha|$$

このような不等式から、次のように証明を組み立てる。

Proof: 数列の逆数の極限

 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 、 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおき、 ε を任意の正の数とする。

 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \ge N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$$

このとき、 $n \ge N_1$ ならば、三角不等式より次のような不等式が成り立つ。

$$\frac{|\alpha|}{2} < |a_n|$$

よって、 $n \ge N_1$ とすると、 $a_n \ne 0$ である。 このとき、次のような不等式も得られる。

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n \alpha|} < \frac{2}{|\alpha|^2} |a_n - \alpha|$$

一方、 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_2 も存在する。

$$n \ge N_2 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\frac{2}{|\alpha|^2}}$$

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、 $n \ge N$ のとき、 $n \ge N_1$ と $n \ge N_2$ がともに成り立つ。

よって、n > N のとき、

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < \frac{2}{|\alpha|^2} |a_n - \alpha|$$

$$< \frac{2}{|\alpha|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\frac{2}{|\alpha|^2}}$$

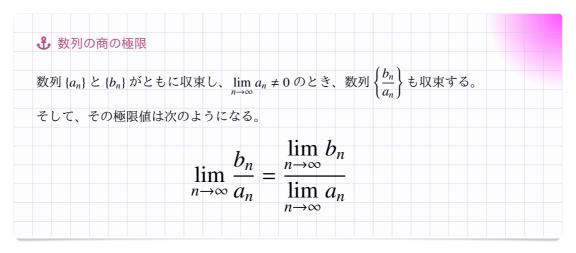
$$= \varepsilon$$

$$\therefore \quad \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < \varepsilon$$

という不等式が成り立つことで、 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\alpha}$ が示された。

今示した数列の逆数の極限と、数列の積の極限を組み合わせることで、数列の商の極限も求める ことができる。

$$\lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n} \cdot \lim_{n \to \infty} b_n$$



1.1.8 数列の極限の大小関係の保存



[Topo 1: 定理 2.5]

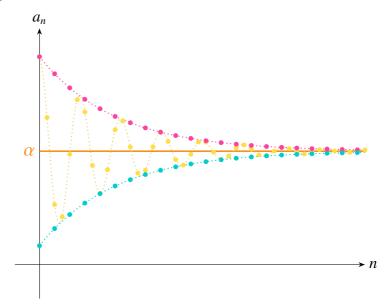
1.1.9 はさみうちの原理

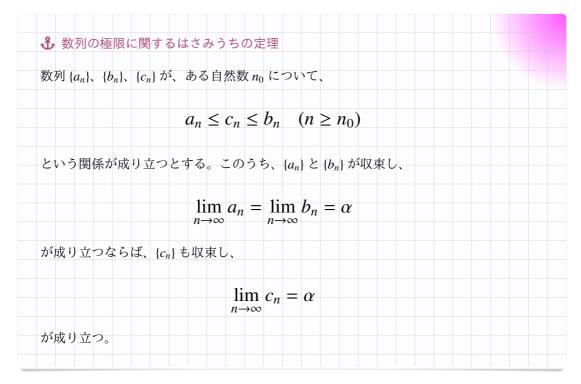
はさみうちの原理は、

ある数列が2つの数列に挟まれていて、その2つの数列の極限値が同じなら、挟まれた数列の極限値も同じになる。

という内容の定理である。

この定理により、直接極限を求めにくい数列でも、簡単な数列で挟むことで極限値を求めること が容易になる。





すべての自然数 n に対して $a_n \le c_n \le b_n$ である必要はない。

たとえば、5以上のnに対して $a_n \le c_n \le b_n$ が成り立つ場合($n_0 = 5$ の場合)にも、はさみうちの定理は適用できる。

Proof: 数列の極限に関するはさみうちの定理

 ε を任意の正の数とする。

このとき、 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \ge N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

同様に、 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より、次のような自然数 N_2 が存在する。

$$n \ge N_2 \implies |b_n - \beta| < \varepsilon$$

ここで、 $N=\max\{N_1,N_2,n_0\}$ とおくと、 $n\geq N$ のとき、 $n\geq n_0$ 、 $n\geq N_1$ 、 $n\geq N_2$ がすべて成り立つ。

よって、 $n \ge N$ のとき、



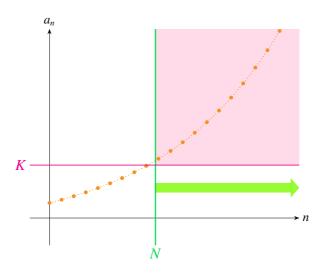
1.1.10 ε-N 論法による数列の発散

数列がどんな実数にも収束しないとき、その数列は発散するという。

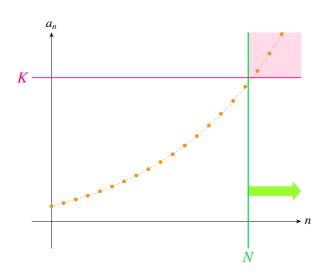
正の無限大への発散

数列の項が先に進むにつれて限りなく大きくなる場合に、その数列は正の無限大に発散するという。

「ここから先の項はすべて K より大きくなる」といえる位置に、N という印をつけるようにしよう。



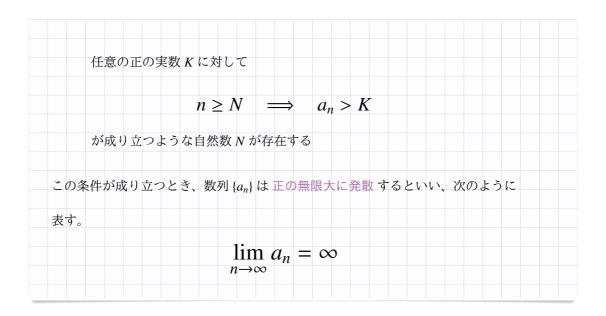
どれだけKを大きくしても、Nをずらしていけば、N以降はKを超える項だけになる。



このような状況が、正の無限大への発散である。

K をどんなに大きくしても、「N 番目以降の項は K よりも大きくなる」といえるような N を設定できるか?が肝心で、そのような N が存在するなら、数列は正の無限大に発散すると定義する。

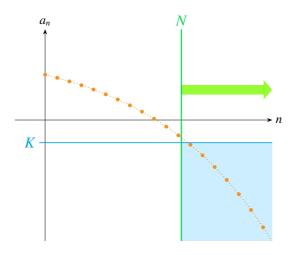




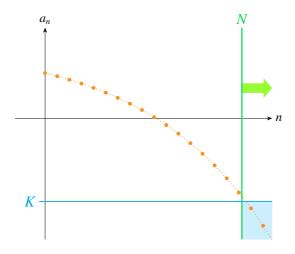
負の無限大への発散

逆に、数列の項が先に進むにつれて限りなく小さくなる場合には、その数列は<mark>負の無限大に発散</mark>するという。

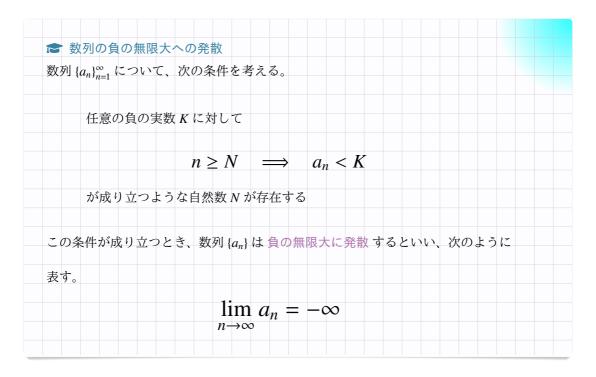
「ここから先の項はすべて K より小さくなる」といえる位置に、N という印をつけるようにする。



どれだけ K を小さくしても、N をずらしていけば、N 以降は K より小さい項だけになる。



このような状況が、負の無限大への発散である。



1.1.11 追い出しの原理

[Topo 2: 定理 2.18]



1.1.12 発散数列の和と積

[Topo 3: 定理 2.18]



1.2. 級数 23

1.1.13 数列の偶数番目と奇数番目の極限による判定



[Todo 4: 命題 2.13]

1.1.14 数列の極限と絶対値



[Topo 5: 定理 2.15]

1.1.15 逆数の数列の発散条件



[Todo 6: 定理 2.16] [Todo 7: 定理 2.17]

1.1.16 等比数列の極限



[Topo 8: 命題 3.1]

1.1.17 項の比による収束判定



[Topo 9: 定理 3.8]

1.1.18 発散数列の増加速度の比較



[Topo 10: 例題 3.9]

1.2 級数



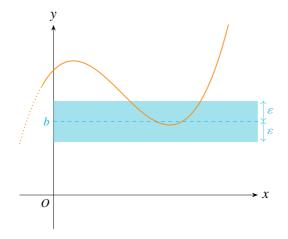
1.3 関数の極限

1.3.1 ε-δ論法による関数の極限

 ε がどんなに小さい正の数であっても、x と a の誤差を δ 以内に収めることで f(x) と b の誤差が ε 以内に収まるとき、関数 f(x) は点 a で b に収束するという。

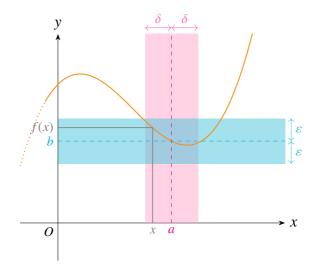
* * *

まず、y = b の周りに、両側それぞれ ε だけ広げた区間を考える。(この区間を青い帯と呼ぶことにする。)



x = a の周りには、両側それぞれ δ だけ広げた区間を考える。(この区間をピンクの帯と呼ぶことにする。)

このとき、「このxであれば、f(x)が青い帯に収まる」というxを探して、そのxをピンクの帯で包むように δ を設定する。

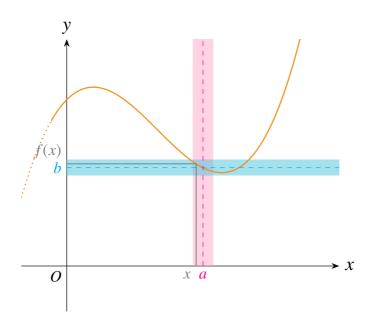


 ε は正の数ならなんでもよいとすれば、 ε を小さな数に設定し、いくらでも青い帯を狭めることができる。

しかしこのとき、xをピンクの帯に収まるようにしなければならない。

ピンクの帯の中心はaなので、xをピンクの帯に収めようとすると、xはaに近づいていくことになる。

1.3. 関数の極限 25

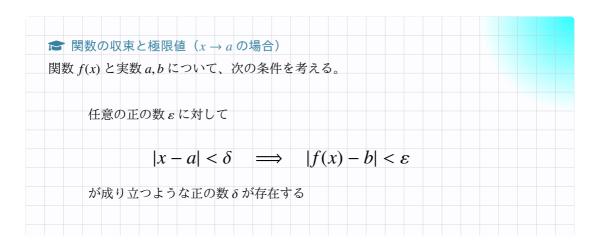


青い帯の幅 ε がどんなに小さくても、ピンクの帯の幅 δ を小さくしていけば、x と f(x) をそれぞれ帯の中に収めることができる。

このように、x を a に近い範囲に閉じ込めれば、f(x) も b に近い範囲に閉じ込められるという状況を、点 a での関数の収束と定義する。

青い帯の幅 ε がどんなに小さくても、「このx であれば、f(x) が青い帯に収まる」というx がピンクの帯からはみ出ないように δ を小さくしていけるなら、自動的にx も f(x) もそれぞれ帯の中に収まる。

つまり、 δ に課された制約が肝心で、「この x であれば、f(x) が青い帯に収まる」という x を包めるような δ の存在が、収束を保証することになる。



この条件が成り立つとき、関数 f(x) は点 a で b に 収束 するといい、次のように表す。 $\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{または} \quad f(x) \to b \quad (x \to a)$ このとき、b を数列 f(x) の 極限値という。

[Topo 11: 定義 1.1]



1.3.2 関数の極限と数列の極限の関係

[Topo 12: 定理 1.7]



1.3.3 関数の極限の性質

[Topo 13: 定理 1.8]

[Topo 14: 定理 1.9]



1.3.4 はさみうち法

[Topo 15: 定理 1.10]



1.3.5 合成関数の極限

[Topo 16: 定理 1.11]



1.3.6 右極限と左極限

[Topo 17: 定義 1.15]

[Topo 18: 定義 1.16]

[Topo 19: 定理 1.19]



1.4. 関数の連続性 27

1.4 関数の連続性

Under	construction

.....

Zebra Notes

Type	Number
todo	19