微分しても変わらない不思議な関数

この式をぼんやりと眺めていると、

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

- 左辺における $\frac{d}{dx}$ という記号に呼応して、右辺では n が飛び出すというふうにも見える
- 左辺では x の n 乗だったものが、右辺では $n-1$ 乗になっている

＊　＊　＊

x^n を n の階乗で割った $\frac{x^n}{n!}$ という関数を考える

この関数を微分すると、$\frac{1}{n!}$ は微分の外に出せる

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}x^n\right) = \frac{nx^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

この式では、左辺と右辺で似た形が現れている

文字は左辺の n から右辺の $n-1$ に化けるが、形は同じ

n に具体的な数を入れて確かめてみる

- $n = 0$ のとき、$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^0}{0!}\right) = 0$
- $n = 1$ のとき、$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^1}{1!}\right) = \frac{x^0}{0!}$
- $n = 2$ のとき、$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2!}\right) = \frac{x^1}{1!}$
- $n = 3$ のとき、$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3!}\right) = \frac{x^2}{2!}$
- $n = 4$ のとき、$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4!}\right) = \frac{x^3}{3!}$
- $n = 5$ のとき、$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5!}\right) = \frac{x^4}{4!}$

微分すると斜め右下にまったく同じ形の式が現れるというパターンが続く

上のリストでは $n = 5$ で止めているが、たとえば $n = 100$ までいっても同じパターンが続く

そこで、$\frac{x^n}{n!}$ を $n = 0$ から順に全部足すことを考え、それを $f(x)$ とおく

$$f(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\frac{d}{dx}f(x) = 0 + \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

下の式は 1 個右にずれているので、途中で打ち切れば 1 個足りなくなるが、無限に足すと、上の式と下の式はぴったり一致している

したがって、

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$$

が成り立つことがわかる

つまり、**関数 $f(x)$ は微分したものが自分自身になっている！**

いま無限級数として定義した関数 $f(x)$ を何通りかの記法で表しておく

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \end{aligned}$$

後にこの関数は、**指数関数**として e^x と書くことになる

ネイピアの数

次の関数に $x = 0$ と $x = 1$ を代入してみる

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

＊　＊　＊

$x = 0$ を代入すると　最初の 1 だけが残り、

$$f(0) = 1$$

＊　＊　＊

$x=1$ を代入すると　1 を何乗しても 1 であるから、

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

この $f(1)$ の数値はどのくらいになるだろうか？

1. 第 1 項は 1
2. 第 2 項も 1
3. 第 3 項は 0.5
4. 次は前の項を 3 で割るわけだから 0.166...
5. 次はさらに 4 で割るから 0.041...
6. 次はさらにそれを 5 で割って 0.008...

ここまでの 6 項の和で 2.716... となる

加える項は急速に 0 に近づく

項が 100 個くらいまで進むと、次に加える $\frac{1}{100!}$ は小数点以下に 0 が 150 個以上並ぶくらい小さな数になる（$10^{152} < 100! < 10^{164}$ という不等式より）

このように、無限級数 $f(1)$ は収束がとても速く、

$$f(1) = 2.71828\ldots$$

という数になる

＊　＊　＊

■定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

証明のスケッチ　二項展開を用いて、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

ここで、$k=2$ 以降の各項は次のように展開する

$$\begin{aligned}\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2} &= \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}\\ &= \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{n!}{3!(n-3)!}\cdot\frac{1}{n^3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}\\ &= \frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\\ &= \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\end{aligned}$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 &+ \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &+ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots\end{aligned}$$

n が大きくなると $\frac{1}{n}$ は 0 に近づくので、$1-\frac{1}{n}$ は 1 に近づき、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

となる　□

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ の収束

n を大きくすると $n!$ は急速に大きくなるので、$x=1$ のときには無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ が収束することは納得できる

では、$x>1$ のときもこの無限級数は収束するといえるのだろうか？

＊　＊　＊

そもそも数列の各項が 0 に近づかないと、その数列の総和は収束しないため、まず次の問いを考える（以下では x を固定しておく）

■問題　n をどんどん大きくしたとき、$\dfrac{x^n}{n!}$ は 0 に近づくか？

この問いは、x^n と $n!$ の大きさを比べようという問題である

たとえば $n = 100$ とすると、実は $100!$ の方が 10^{100} よりも圧倒的に大きくなることをすでに示している

$n = 100$ に限らず、「x を止めたとき、x^n と $n!$ の比である $\dfrac{x^n}{n!}$ は、n を大きくすると分母が圧倒的に大きくなり、比は 0 に近づく」ことが同様の議論で示される

＊　＊　＊

無限級数の各項が 0 に近づいたとしても、「塵も積もれば山となる」（足し合わせると発散する）ことも起こり得る

では、次の問題はどうだろうか？

■問題　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ は収束するか？

実はこの無限級数は、等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ よりももっと速く収束する

証明のスケッチ

x は固定して、n に関する和を考える

整数 n が十分に大きければ、

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

これは、「無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ が等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ より速く収束する」という 1 つの表現

正確には、$8x^2 + 1$ より大きいすべての自然数 n に対して、

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

が成り立つ

このことがいえれば、$8x^2$ より大きい整数 N に対して、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ は次のように等比級数 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ より速く収束する

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|x|^n}{2^n}\\ &< \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\\ &= \frac{1}{2^N}\end{aligned}$$

上の計算のうち、$\displaystyle\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|x|^n}{2^n}$ では、次のような三角不等式を利用している

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_m| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|$$
$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|$$

そこで、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を、$n = N$ までの有限和と、$n = N + 1$ からの無限級数に分けて考える

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

このように考えると、左辺の無限級数が、右辺の有限和に収束することがわかる

不等式 $\dfrac{|x|^n}{n!} < \dfrac{1}{2^n}$ の証明

一般に $A \leq 0$ のとき、$n > 2A^2 + 1$ ならば、

$$A^n < n!$$

という不等式が成り立つことを示す

$A = 2|x|$ の場合 $(2|x|)^n < n!$ が、$\dfrac{|x|^n}{n!} < \dfrac{1}{2^n}$ となる

n が偶数（$= 2m$）の場合、$n > 2A^2$ の n を $2m$ に置き換えることで、$m > A^2$ となり、

$$\begin{aligned} n! &= (2m)! = 2m \cdot (2m-1) \cdots 2 \cdot 1 \\ &> m \cdot m \cdots m = m^m = m^{\frac{n}{2}} \\ &> \left(A^2\right)^{\frac{n}{2}} = A^n \end{aligned}$$

が成り立つ

n が奇数の場合、$n-1$ は偶数なので、偶数の場合の結果から $(n-1)! > A^{n-1}$ がいえる

さらに、$n > 2A^2 + 1 > A$ なので、

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1)! \\ &> n \cdot A^{n-1} \\ &> A \cdot A^{n-1} = A^n \end{aligned}$$

となり、いずれの場合も $A^n < n!$ が成り立つ　□

関数等式

無限級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ に $x+y$ を代入し、$f(x+y)$ を計算してみる

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \end{aligned}$$

＊　＊　＊

2 重和　何かを算出したいとき、一旦小計を取ることがある

小計を取ってから、小計を足し合わせて総計を取るのが **2 重和**

小計として何を選ぶかには自由度がある

たとえば、1 ヶ月の支出を計算するときに、

- 食費や本代などの品目ごとの小計をを取り、それを足し合わせる
- 日々の支出を計算し、それを足し合わせる

どちらの方法を選んでも、まったく同じ総額が得られる

一般の 2 重和の計算においても、何を小計として選んでも総和は同じになる

多重積分における累次積分の計算法は、2 重和 $\sum\sum$ を一般化したものになっている

＊　＊　＊

$f(x+y)$ で現れる 2 重和は、そもそも全体として何を算出しようとしているのか？

a, b という自然数（0 を含む）を固定して、$x^a y^b$ という項が $f(x+y)$ の 2 重和の中にどのように出現しているのか探す

$$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

この式において、

- $x^k y^{n-k}$ が $x^a y^b$ となるのは、$a = k, b = n-k$ の場合

- (k,n) の組は a,b によって $k=a, n=a+b$ とただ1つ定まる
- このとき $0 \le k \le n$ を満たしている（$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ より）

まとめると、$(a,b)=(k,n-k)$ すなわち $(k,n)=(a,a+b)$ という等式の下で、組 (a,b) と組 (k,n) が1対1に対応している

そのため、$x^a y^b$ は、$f(x+y)$ の2重和の中で、

$$\frac{x^a}{a!}\cdot\frac{y^b}{b!}=\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

という形で現れることがわかる

また、

- $a=0,1,2,\ldots$ かつ $b=0,1,2,\ldots$
- $n=0,1,2,\ldots$ かつ $0\le k\le n$

という数の範囲の条件も、1対1に対応している

このことから、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}$ を $\displaystyle\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}$ に書き換えることができて、

$$\begin{aligned}f(x+y)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)\\&=\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{x^a}{a!}\frac{y^b}{b!}\end{aligned}$$

が成り立つ

このように書き換えると、2重和の計算の順序は入れ替えてもよいことがわかる

＊　＊　＊

ここでさらに、かけ算の分配法則（有限個の場合と同様に、和がきちんと収束すれば分配法則が成り立つ）を使って書き直すと、

$$\begin{aligned}f(x+y)&=\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{x^a}{a!}\frac{y^b}{b!}\\&=\left(\sum_{a=0}^{\infty}\frac{x^a}{a!}\right)\left(\sum_{b=0}^{\infty}\frac{y^b}{b!}\right)\end{aligned}$$

$f(x)$ の定義式 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ より、

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

$f(x+y)$ を二項展開を使って2重和として書き表し、「小計の取り方を変えても、結局は同じ総和が計算できる」という2重和のトリックを使うと、$f(x)f(y)$ という積になった

＊　＊　＊

■定理　無限級数 $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ は次の関数等式を満たす

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

指数関数の拡張

先ほど示した関数等式は、指数法則ともいう

＊　＊　＊

$f(x)$ が無限級数として定義されていたことは一旦忘れて、

- $x>0$ のとき $f(x)>0$
- $f(x+y)=f(x)f(y)$
- $f(0)=1,\quad f(1)=e$

という性質だけを用いて何が言えるか見ていく

＊　＊　＊

■定理　m を自然数とするとき、

$$f(mx)=f(x)^m$$

が成り立つ

$m=0$ の場合　$f(0)=1$ より、$f(0x)=f(0)=1$

また、$f(x)^0=1$ より、$f(x)^0=f(0x)$ が成り立つ

$m=1$ の場合　$f(x)=f(x)^1$ が成り立つ

一般の場合の証明　$m+1$ の場合を考える

$y=mx$ とおくと、$x+y=(m+1)x$ となり、関数等式が使える

よって、$f(mx)=f(x)^m$ が m で成り立つなら、

$$\begin{aligned} f((m+1)x) &= f(mx)f(x) \\ &= f(x)^m f(x) \\ &= f(x)^{m+1} \end{aligned}$$

となり、$m+1$ でも成り立つ

これで、数学的帰納法によって、すべての自然数 m に対して $f(mx)=f(x)^m$ が成り立つことが示された　□

＊　＊　＊

$x=1$ の場合　n が自然数のとき、

$$f(n)=f(1)^n=e^n$$

x が正の有理数の場合　x を正の有理数 $x=\dfrac{n}{m}$ とする

m は自然数なので、先ほど示した $f(x)^m=f(mx)$ が成り立ち、

$$f(x)^m=f(mx)=f\left(m\cdot\frac{n}{m}\right)=f(n)$$

さらに n も自然数なので、$f(n)=e^n$ となり、

$$f(x)^m=e^n$$

$f(x)>0$ に注意して、両辺の m 乗根を取れば、

$$f(x)=e^{\frac{n}{m}}=e^x$$

となり、x が正の有理数のときも $f(x)=e^x$ が成り立つ

x が負の有理数の場合　関数等式より、

$$f(-x)f(x)=f(-x+x)=f(0)=1$$

なので、$f(-x)$ は $f(x)$ の逆数となる

したがって、$f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ であり、$f(x)=e^x$ より、

$$f(-x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{e^x}=e^{-x}$$

x を $-x$ に置き換えても、$f(x)=e^x$ が成り立つことがわかる

＊　＊　＊

以上の議論から、x が有理数のとき $f(x)=e^x$ となることがわかった

x が有理数以外のときに、e^x はどうやって定義すればよいだろうか？

有理数での近似による定義　1 つの考え方として、どんな実数でも有理数を使っていくらでも近似できるということを用いる

たとえば、実数 x を小数点以下 3 桁まで表示して得られる数 y は、$y=\dfrac{整数}{1000}$ と表せるので有理数であり、しかも x との誤差が 10^{-3} 未満になる

e^x の値が変数 x について連続的に動くと考えると、実数 x を有理数 $\dfrac{n}{m}$ で近似すれば、$e^{\frac{n}{m}}$ は e^x を近似できるだろう

そこで、近似をどんどん精密にしたときの極限として e^x の値を定義する

べき級数展開による定義　x が有理数とは限らない場合に指数関数 e^x を定義する別の方法として、

次のべき級数展開を用いるという考え方もある

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

x が有理数でなくても、右辺の無限級数で定義した関数を e^x と表記しよう、という発想

べき乗という 1 つの観点にこだわっていると、x が複素数の場合に e の x 乗が何を意味するのかは、哲学的な問題となってしまう
無限級数であれば、x が複素数であっても意味を持つ

x が複素数の場合も含めて、無限級数で指数関数 e^x を定義しておくと、指数関数と三角関数も結びつき、さらに世界が拡がる