

第 1 章


直和分解と不変部分空間



部分空間の共通部分

与えられた部分空間から、新しく部分空間を作ることができる

ref: 図で整理！例題で
納得！線形空間入門 p22

 線形部分空間の共通部分は部分空間 V, W を \mathbb{R}^n の部分空間とすると、**共通部分** $V \cap W$ は \mathbb{R}^n の部分空間である

証明

和について

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \cap W$ とすると、共通部分の定義より、 \mathbf{a} と \mathbf{b} はどちらも V と W の両方に属していることになる
つまり、 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ かつ $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ である

V も W も部分空間なので、部分空間の定義より、

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$$

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$ が V と W の両方に属していることから、 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ は

$V \cap W$ に属する

よって、 $V \cap W$ は和について閉じている ■

スカラー倍について

$\mathbf{a} \in V \cap W$ と $c \in \mathbb{R}$ をとる

共通部分の定義より、 \mathbf{a} は V と W の両方に属しているの
で、部分空間の定義より

$$c\mathbf{a} \in V$$

$$c\mathbf{a} \in W$$

よって、 $c\mathbf{a}$ は $V \cap W$ に属するため、 $V \cap W$ はスカラー
倍について閉じている ■



部分空間の和

📌 線形部分空間の和は部分空間 V, W を \mathbb{R}^n の部分空間とす
るとき、**和空間**

$$V + W := \{\mathbf{v} + \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W\}$$

は \mathbb{R}^n の部分空間である

ref: 図で整理！例題で
納得！線形空間入門 p22
~23

🔪 証明

和について

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in V, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in W$ とする

V と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \in V, \quad \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 \in W$$

一方、和空間の定義より、 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2$ はそれぞれ $V + W$ の元である

これらの元の和をとったときに、その和も $V + W$ に属していれば、和空間は和について閉じているといえる

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1) + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2) &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) \\ &\in V + W \end{aligned}$$

上式で、和空間は和について閉じていることが示された ■

スカラー倍について

$\mathbf{a} \in V, \mathbf{b} \in W$ と $c \in \mathbb{R}$ をとる

V と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$c\mathbf{a} \in V$$

$$c\mathbf{b} \in W$$

一方、和空間の定義より、 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ は $V + W$ の元である


この元をスカラー倍したときに、そのスカラー倍も $V + W$ に属していれば、和空間はスカラー倍について閉じているといえる

$$\begin{aligned} c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= c\mathbf{a} + c\mathbf{b} \\ &\in V + W \end{aligned}$$

上式で、和空間はスカラー倍について閉じていることが示された ■



部分空間を生成するベクトルを用いて、部分空間の和を表せる

 部分空間の和と生成ベクトル K^n の 2 つの部分空間 $V = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$ と $W = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$ に対して、和空間 $V + W$ は

$$V + W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$$

となる

証明

和空間 $V + W$ は

$$V + W = \{ \mathbf{x} \in K^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \}$$

と定義される

また、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ の張る部分空間は

$$H = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$$

である

これらが等しいことを示せばよい

$$\underline{V + W \subseteq H}$$

任意の $\mathbf{x} \in V + W$ に対し、 $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ ($\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$) と書ける

すなわち、

$$\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_m \mathbf{v}_m \quad (a_i \in K)$$

$$\mathbf{w} = b_1 \mathbf{w}_1 + \dots + b_k \mathbf{w}_k \quad (b_j \in K)$$

よって、

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^k b_j \mathbf{w}_j \in H$$

$$\underline{H \subseteq V + W}$$

任意の $\boldsymbol{x} \in H$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m a_i \boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^k b_j \boldsymbol{w}_j$$

と書ける

ここで

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \sum_{i=1}^m a_i \boldsymbol{v}_i \in V, \\ \boldsymbol{w} &= \sum_{j=1}^k b_j \boldsymbol{w}_j \in W\end{aligned}$$

とすれば、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in V + W$$

以上より、 $V + W \subseteq H$ と $H \subseteq V + W$ が成り立つので、
 $V + W = H$ が示された ■



部分空間の和の次元

📌 部分空間の和の次元 K^n の部分空間 V, W に対して、次が成り立つ

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

ref: 行列と行列式の基礎 p103

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p39
~41

証明

$\dim(V) = n, \dim(W) = m$ とする

$V \cap W$ の基底 $\mathcal{V} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ をとる

これを基底の延長の定理に基づいて、 V の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}\}$$

に延長する

同様に、 \mathcal{V} を W の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}\}$$

に延長する

このとき、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}$ が $V + W$ の基底になることを示す


$V + W$ を生成すること

$\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$ とすると、それぞれ基底の線形結合で表すことができる

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \sum_{i=1}^d a_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j \mathbf{v}_j \\ \mathbf{w} &= \sum_{i=1}^d c_i \mathbf{u}_i + \sum_{k=1}^{m-d} d_k \mathbf{w}_k\end{aligned}$$

$V + W$ の任意の元は、 $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ と書けるので、

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^d (a_i + c_i) \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j \mathbf{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} d_k \mathbf{w}_k$$

となり、 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}\}$ の線形結合で表せる 

線型独立であること

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}$ が線型独立であることを示すために、次のような線形関係式を考える

$$\sum_{i=1}^d c_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} c_{d+j} \mathbf{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} c_{d+n-d+k} \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$$

ここで、 $c_i \in K$ はスカラーである

この式を V と W の基底の線型結合として考えると、 V の基底 $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j$ に関する部分と W の基底 $\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_k$ に関する部分がそれぞれ線形独立であるため、結局どの項においても $c_i = 0$ である必要がある

よって、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}$ は線型独立である ■

以上より、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}$ は $V + W$ の基底であることが示された

この基底をなすベクトルの個数（次元）について考えると、

$$\begin{aligned} \dim(V + W) &= d + (n - d) + (m - d) \\ &= n + m - d \end{aligned}$$

となる

ここで、 $d = \dim(V \cap W)$ なので、

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

と書き換えられ、目的の式が得られた ■