線形写像の空間

V, W をともに有限次元 K 上の線形空間とする

ref: ベクトル空間からはじめる抽象代数入門 p159〜160、p163

V から W への線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}(V, W)$ と書く

特に、V の線形変換全体の集合は $\mathrm{End}(V)$ と書く

このとき、$\mathrm{Hom}(V, W)$ に線型空間の構造（和とスカラー倍）を次のように導入する

線形写像の和とスカラー倍　線形写像 $f, g \in \mathrm{Hom}(V, W)$ と $c \in K$ に対して、和とスカラー倍を次のように定義する

$$(f + g)(v) \coloneqq f(v) + g(v)$$
$$(cf)(v) \coloneqq c \cdot f(v)$$

これらの演算は、再び $V \to W$ の線形写像を定めることが確認できる

線形写像全体による線形空間　線形写像全体の集合 $\mathrm{Hom}(V, W)$ は K 上の線形空間である

証明

加法が線形性を満たす

f, g をともに線形写像とし、任意の $v_1, v_2 \in V$ と $a, b \in$

K に対して、

$$
\begin{aligned}
&(f+g)(av_1+bv_2) \\
&= f(av_1+bv_2)+g(av_1+bv_2) \\
&= af(v_1)+bf(v_2)+ag(v_1)+bg(v_2) \\
&= a(f(v_1)+g(v_1))+b(f(v_2)+g(v_2)) \\
&= a(f+g)(v_1)+b(f+g)(v_2)
\end{aligned}
$$

よって、$f+g$ は線形写像である ■

スカラー倍が線形性を満たす

f を線形写像とし、任意の $v_1, v_2 \in V$ と $a, b, c \in K$ に対して、

$$
\begin{aligned}
(cf)(av_1+bv_2) &= cf(av_1+bv_2) \\
&= c\cdot(f(av_1+bv_2)) \\
&= c\cdot(f(av_1)+f(bv_2)) \\
&= c\cdot(af(v_1)+bf(v_2)) \\
&= a(cf)(v_1)+b(cf)(v_2)
\end{aligned}
$$

よって、cf は線形写像である ■

線型空間の公理をすべて満たすことも、容易に確認できる ■