


第 1 章

線形写像の単射性と全射性



線形写像とベクトルの線型独立性

 線形写像と線形独立性 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像、
 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする
ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ の f による像

$$f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)$$

が線型独立であるとき、 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ も線型独立である

ref: 行列と行列式の基礎 p65~66

ref: 図で整理! 例題で
納得! 線形空間入門 p71
~73

証明

$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ の線形結合

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

を考える

この両辺を f で写すと、 f の線形性と零ベクトルの像 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

を使って

$$c_1 f(\mathbf{v}_1) + c_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_n f(\mathbf{v}_n) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

仮定より $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)$ は線型独立なので、 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である


よって、

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

を満たす c_1, c_2, \dots, c_n は 0 しかないので、 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ は線型独立である ■



次の定理は、平行なベクトルを線型写像で写した結果、平行でなくなったりはしないということを述べている

 線形写像と線形従属性 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする
 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ が線形従属ならば、 $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ は線形従属である

証明

$\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ が線形従属であるとは、少なくとも 1 つは 0 でないある定数 k_1, k_2, \dots, k_n が存在して

$$k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + k_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

が成り立つことを意味する


この両辺を f で写すと、線形性より

$$k_1 f(\mathbf{v}_1) + k_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + k_n f(\mathbf{v}_n) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

よって、 $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ も線形従属である ■

たとえば平行四辺形の像が線分や 1 点になったりしないことなどは、
「 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ が線型独立ならば、 $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$
も線型独立である」と表現できる

 単射な線型写像は線型独立性を保つ 線型写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が単射であるとき、 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ が線型独立ならば、 $\{f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ も線型独立である

証明

$f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)$ の線形結合

$$c_1 f(\mathbf{v}_1) + c_2 f(\mathbf{v}_2) + \dots + c_n f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

を考える

f の線形性と零ベクトルの像 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より、次のように書き換えられる

$$f(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$$

f は単射だから、上式より

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

が成り立つ

ここで、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ は線型独立なので、 $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ である

よって、 $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \dots, f(\mathbf{v}_n)$ は線型独立である ■

零写像と射影を除けば、 f によってベクトルが「つぶれない」という性質

は、次のように表せる


$$\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0} \implies f(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$$



[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

この条件は、実は線形写像が単射であることを意味している

対偶をとって、次のように表現できる

 零ベクトルへの写像による単射性の判定 線形写像 f が単射
であることと次は同値である

$$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

 証明

i. f が単射

ii. $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

(i) \implies (ii)

零ベクトルの像は零ベクトルであることから、 $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$


は、

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\mathbf{0})$$

と書き換えられる

f の単射性により、この式から、

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

がしたがう 

(ii) \implies (i)

$f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ を満たす $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ を考える

このとき、 f の線形性から、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) - f(\boldsymbol{v}_2)$$

となる

仮定 (ii) より、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$$

がいえるので、 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ が成り立つ


$f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ から $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ が導かれたことで、 f は単射であることが示された ■



線形写像の単射性と全射性

線形写像 f の単射性を表現行列 A の言葉で述べる

ref: 行列と行列式の基礎 p67~68

 線形写像の単射性と表現行列 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値

- i. f は単射
- ii. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は自明な解しか持たない
- iii. $\text{rank}(A) = n$

 証明

(i) \iff (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が単射であることの言い換えは、

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

であり、 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が自明解しか持たないことは、

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

が成り立つということである

$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であるから、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) \iff (iii)

斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ に自明解しか存在しないことと


$$\text{rank}(A) = n$$

と同値であることは以前証明済み ■

i は抽象的な概念、ii は方程式論的な言葉、iii は数値的な条件であり、これらは同値な言い換えである



単射性と対比して、全射性の理解も表現行列の言葉で整理する

 線形写像の全射性と表現行列 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値

- i. f は全射
- ii. 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して、 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解が存在する
- iii. $\text{rank}(A) = m$

 証明

(i) \iff (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が全射であることの言い換えは、

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

であり、これは

$$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ に解が存在する}$$

と同値である

よって、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) \iff (iii)

$\text{rank}(A) = m$ が、次の条件

$$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ の解が存在する}$$

ことと同値であることは、以前証明済み ■



線形写像の像と核

写像の像や逆像を、線形写像の場合に考える

ref: 図で整理！例題で
納得！線形空間入門 p79

～84

🎓 線形写像の像 線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して、 f による V の像 $f(V)$ を、線形写像 f の像といい、 $\text{Im}(f)$ と表記する

$$\text{Im}(f) = f(V) = \{f(\mathbf{v}) \in W \mid \mathbf{v} \in V\} \subset W$$

線形写像による像は、像空間とも呼ばれる

🎓 線形写像の核 線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して、 f による $\{\mathbf{0}\}$ の逆像 $f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ を、線形写像 f の核といい、 $\text{Ker}(f)$ と表記する

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \subset V$$

線形写像による核は、核空間あるいはカーネルとも呼ばれる



像空間と全射性

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ の全射性は、 \mathbb{R}^m の部分集合である像空間 $\text{Im}(f)$ と関係している

ref: 行列と行列式の基礎 p68~69

全射な写像は、定義域の元の像で値域を「埋め尽くす」

ということから、 f が全射であることは、 $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ と同値だとわかる



核空間と単射性

線形写像 f が単射であることは、次の条件と同値であった

$$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

この条件は、次のように言い換えることができる

$$\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

📌 線形写像の単射性と核の関係 f を線形写像とすると、

$$f \text{ が単射} \iff \text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

📌 証明

$\text{Ker}(f)$ の定義は

$$\text{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$$

これを踏まえて、次の 2 つが同値であることを示す

- i. $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
- ii. $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$

(i) \implies (ii)

このとき、 $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ が $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ を意味するので、 $\text{Ker}(f)$ の元は零ベクトルのみになる

よって、 $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ ■

(ii) \implies (i)

$\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ であれば、 $\text{Ker}(f)$ の元は零ベクトルのみである

よって、 $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つとき、 $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ が成り立つことになる

すなわち、 $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ ■



核空間と解空間

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、

$$\text{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\}$$

と定めると、 $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ という関係から、 $\text{Ker}(f)$ と $\text{Ker}(A)$ は同じものを指す

これは、斉次形の連立線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間そのものである

$\text{Ker}(A)$ の元は、 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解を使ってパラメータ表示できる

.....

Zebra Notes

Type	Number
todo	1