近似と誤差

曲線を局所的に近似する場合、接線で近似するのが最初のステップになる

次のステップとして、接線からの乖離を正確に知りたい

たとえば道路が急カーブしているときは、直線ではなく円弧で近似する方がより正確になる

関数のグラフの各点で、その曲がり方を表す円弧の半径を求めるのには 2 階の微分を使う

実用上は、1 階微分と 2 階微分を用いると、多くの場合、局所的に十分良い近似ができるが、それでも微小な乖離は生じる

この微小な誤差は、3 階微分を使うと評価できる

これを続け、1 階微分だけではなく、2 階、3 階、... と高階の微分を用い、必要な精度を実現するためには近似をどのように行えばよいかを指し示すのがテイラー展開とその剰余項である

＊　＊　＊

誤差評価を行う際には、範囲をきちんと意識する必要がある

- 翌日の天気が予測できても、1 ヶ月先の天気予報は難しい
- 坂道の勾配を見て 100m 先の高低差は推測できても、10km 先の高低差はわからない

誤差と誤差率

測定値や何らかの概算値が真の値とどれくらい異なるかは、

$$\text{誤差} = \left|\text{測定値} - \text{真の値}\right|$$

という絶対量で表された

一方、相対的な比率として定義される、

$$\text{誤差率} = \left|\frac{\text{誤差}}{\text{真の値}}\right| = \left|\frac{\text{測定値} - \text{真の値}}{\text{真の値}}\right|$$

も大事な視点である

実用上は、分母を「測定値」に取り換えた、

$$P = \left|\frac{\text{誤差}}{\text{測定値}}\right| = \left|\frac{\text{測定値} - \text{真の値}}{\text{測定値}}\right|$$

で代用することもある

P が小さいときは誤差率として代用できることは、次のように確認できる

＊　＊　＊

■定理　$P < \dfrac{1}{101}$ ならば、誤差率は 1% 未満

＊　＊　＊

証明　$t = \dfrac{\text{真の値}}{\text{測定値}}$ とおくと、

$$\begin{aligned}\text{誤差} &= \left|\text{測定値} - \text{真の値}\right| \\ &= \left|\text{測定値} - t\ \text{測定値}\right| \\ &= |1 - t|\ \text{測定値}\end{aligned}$$

より、

$$P = \left|\frac{\text{測定値} - \text{真の値}}{\text{測定値}}\right| = |1 - t|$$

$$\text{誤差率} = \left|\frac{\text{誤差}}{\text{真の値}}\right| = \left|\frac{|1 - t|\ \text{測定値}}{\text{真の値}}\right| = \left|\frac{1 - t}{t}\right|$$

と書き表せる

$P < \dfrac{1}{101}$ ならば、

$$\begin{aligned}-P &> -\frac{1}{101} \\ 1 - P &> 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}\end{aligned}$$

であり、t について、三角不等式より、

$$1-|1-t| = 1-|t-1| \le |1+(t-1)| = t$$
$$\frac{100}{101} < 1-P \le t$$

これを用いると、

$$\begin{aligned}\text{誤差率} &= \left|\frac{1-t}{t}\right| \\ &< \left|\frac{1-\frac{100}{101}}{\frac{100}{101}}\right| = \frac{\frac{1}{101}}{\frac{100}{101}} = \frac{\frac{1}{101}\cdot 101}{\frac{100}{101}\cdot 101} \\ &= \frac{1}{100}\end{aligned}$$

として、誤差率は 1% 未満であることが示された

□

＊　＊　＊

真の値が分からなくとも、何か別の情報や論理から、誤差を「上から評価する」すなわち、「誤差が〜以下である」という形の評価式が得られることがある

弧長の近似と誤差評価

一般に、ある時点で誤差が生じると、その後の誤差が増幅して予期しない間違いが生じることがある

したがって、概算が信頼できるとするためには、誤差評価という別の論理が必要になる

誤差評価を行う際に用いるトリックが、存在定理である

中間値の定理

たとえば、今朝 7 時の気温が 22°C で、正午には 30°C に上がったとすると、午前中に 27°C になる瞬間が必ずある

これが中間値の定理である

＊　＊　＊

■定理：中間値の定理　$a \le x \le b$ で定義された連続関数 $f(x)$ を考える

$f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の実数 T を 1 つ選ぶと、$f(c) = T$ となる実数 c が a と b の間に必ず存在する

＊　＊　＊

例：時刻と気温　$f(x)$ が時刻 x における気温を表すとすると、気温は時刻が経過するとともに連続的に動くため、$f(x)$ は連続関数である

a を 7 時、b を 12 時とすると、$f(a) = 22$°C、$f(b) = 30$°C であり、$T = 27$ は $22 \le T \le 30$ を満たしている

中間値の定理は、$f(c) = 27$°C となる時刻 c が 7 時から 12 時の間に必ず存在するということを述べている

＊　＊　＊

いつかは分からないけれど、「27°C になる瞬間があったのは確かである」

このようなタイプの定理を存在定理という

7 時から正午まで、一度も温度計を見ていなくても、その間の情報が皆無ではないということになる

探し物をするときでも、「この部屋にあるかどうかすらわからない」と思って探すのと、「この部屋にあることは確実だ」と信じて探すのでは大きな差がある

どこかには確実に存在するという存在定理は、上手く使うと決定的な証拠になることがある

＊　＊　＊

例：ゴムひもの動かない点　たとえば 1 本のゴムひもを両手で持って、左右に引っ張るとする

そうすると、ゴムひもの中で、まったく動かない点が必ず存在する

左右均等に引っ張れば、真ん中の点が動かない

左右均等に引っ張らなくても、必ず動かない点がある

＊　＊　＊

このことは、中間値の定理から説明できる

ゴムひもを数直線上に置き、左端と右端の座標をそれぞれ a, b とする

ゴムひも内のある点の座標を x とすると、$a \leq x \leq b$ である

両手の間隔を広げたとき、この点の行き先の座標を $g(x)$ とすると、

- 左端は元の位置よりも左に動くので、$g(a) < a$
- 右端は元の位置よりも右に動くので、$g(b) > b$

そこで、$f(x) = g(x) - x$ とおくと、次の不等式が成り立つ

$$f(a) = g(a) - a < 0$$
$$f(b) = g(b) - b > 0$$

そうすると、中間値の定理より、$f(c) = 0$ となる c が a と b の間に存在する

$f(c) = 0$ というのは、$g(c) = c$、つまり動かした後の座標 $g(c)$ と元の座標 c が一致するということなので、c は動かない点である

こうして、手を広げたとき、ゴムひもの中で必ず動かない点があることが示された

＊　＊　＊

動かない点があることを保証する定理を不動点定理という

不動点定理は存在定理の一種であり、「どこに不動点があるのか」は明示しないが、「どこかにある」ことを保証する

経済学やゲーム理論でも、均衡した状態がどこかに存在するということが、不動点定理から説明できることがある

平均値の定理

微分を含んだ存在定理として、平均値の定理がある

＊　＊　＊

■定理：平均値の定理　$f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で定義された関数で、微分可能とする

このとき、

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となる c が a と b の間に存在する

＊　＊　＊

点 P の座標を $(a,\ f(a))$、点 Q の座標を $(b,\ f(b))$ とすると、$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ は線分 PQ の傾きである

$f'(c)$ は接線の傾きなので、平均値の定理は、線分 PQ と平行な接線が必ずある、と述べている

＊　＊　＊

例：速度の平均値　オリンピックの 100m 走で、ぴったり 10 秒で走り切った選手がいるとする

この選手の 10 秒間の平均速度は秒速 10m であり、この平均速度は線分 PQ の傾きに対応する

もちろん、この選手は 10 秒間同じスピードで走っているわけではない

加速や減速の数値はわからなくても、ぴったり秒速 10m になった瞬間がこの 10 秒の中に必ず存在することは保証する、というのが平均値の定理の意味になる

＊　＊　＊

■定理（再掲）　$f'(x) = 0$ がすべての x で成り立てば、関数 $f(x)$ は定数である

証明　$f'(x) = 0$ がすべての x で成り立てば、平均値の定理の左辺 $f'(c)$ が 0 となるので、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f(b) - f(a) = 0$$

となり、$f(a) = f(b)$ がすべての実数 a, b に対して成り立つことがわかる

したがって、$f(x)$ は定数である　□

＊　＊　＊

平均値の定理の証明

平均値の定理は、「閉区間上の連続関数が最大値・最小値をとる」ことを用いて証明できる

$$g(x) = f(x) - Ax, \quad A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

とおくと、$g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で最大値・最小値をとる

一方、A の選び方から、$g(a) = g(b)$ である

$$\begin{aligned} g(a) - g(b) &= (f(a) - Aa) - (f(b) - Ab) \\ &= f(a) - f(b) - A(b - a) \\ &= f(a) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって、$g(x)$ の最大値または最小値のうち、少なくとも一方は $a \leq x \leq b$ の両端 a, b とは異なる点 c で実現される

ここで、

■定理（再掲）　$a < x < b$ で定義された、微分可能な関数 $f(x)$ が $x = c$ で最大値または最小値を取るならば、$f'(c) = 0$ である

という定理を思い出すと、$a < c < b$ なので $g'(c) = 0$ となる

$$g'(c) = f'(c) - A = 0$$

より、$f'(c) = A$ が示された　□

＊　＊　＊

- 中間値の定理は、微分は無関係で、連続関数のとる値に関する存在定理
- 平均値の定理は、1 階の微分に関する存在定理

もう一歩踏み込んで、2 階の微分、3 階の微分、... と高階の微分に関する存在定理を考えていくと、次に述べるテイラー展開の定理になる

テイラー展開と剰余項

関数のグラフなどの曲線を局所的に近似するのにもっとも簡単なのは直線を用いること

方程式でいえば 1 次式であり、多くの場合には、これだけで局所的には十分な情報が得られる

しかし、もっと精密なことを知りたい場合もある

こういうとき、2 次式や 3 次式、あるいはもっと高次の多項式を用いると、近似の精度が上がることが期待できる

しかし、それでも何らかの誤差は出てくるものである

近似に使う高次の多項式を主要項とみなしたとき、誤差項に相当するのが剰余項である

この剰余項は存在定理の形で表されるのだが、上手に用いると、「誤差は最悪でもこの程度だ」という論理に使える

＊　＊　＊

■定理：テイラー展開と剰余項　$f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で定義され、何回でも微分できる関数とする

自然数 n を 1 つ選ぶと、このとき、

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + f'(a)(b-a) \\ &\quad + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \end{aligned}$$

となる c が a と b の間に存在する

＊　＊　＊

この定理も存在定理の 1 つである

最後の項の分子は $f^{(n+1)}(c)$ となっており、c という実数はここだけに現れている

a も b も最初に与えられた数なので、最後の項以外は計算できる

ところが、最後の項に現れる c は、a と b の間に「存在する」としか言っていないので、実際の値はわからない

この最後の項を剰余項という

＊　＊　＊

平均値の定理との関係　$n = 0$ の場合、この定理は平均値の定理そのものである

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \frac{f'(c)}{1!}(b-a) \\ &= f(a) + f'(c)(b-a) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

＊　＊　＊

剰余項の用途　テイラー展開の剰余項は、誤差評価する手法として用いることができる

＊　＊　＊

主要項の用途　テイラー展開の主要項は、局所的に近似の精度を上げたいときに使うことができる

このとき、テイラー展開の主要項を何項目まで使えばよいか（定理の n をどう選べばよいか）を考慮することになる

＊　＊　＊

■命題（平均値の定理の一般化）　$h(x)$ は $a \leq x \leq b$ で定義され、何回でも微分できる関数とし、

$$h(a) = h(b) = 0, \quad h^{(k)}(a) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

を満たすとする

このとき、$h^{(n+1)}(c) = 0$ となる c が a と b の間に存在する

＊　＊　＊

$n = 0$ の場合　平均値の定理にほかならない

n が一般の場合の証明　繰り返して平均値の定理を使って示すことができる

まず、$h(a) = h(b) = 0$ なので、$h(x)$ に平均値の定理を適用すると、$h'(c_1) = 0$ となる $c_1\,(a < c_1 < b)$ が存在することがわかる

次に、$h'(a) = h'(c') = 0$ なので、$h'(x)$ に平均値の定理を用いると、$h''(c_2) = 0$ となる $c_2\,(a < c_2 < c_1)$ が存在することがわかる

これを繰り返し、最後は n 階微分 $h^{(n)}(x)$ に平均値の定理を用いると、$h^{(n+1)}(c) = 0$ となる $c_{n+1}\,(a < c_{n+1} < c_n)$ が存在する

$c = c_{n+1}$ とおくと、確かに $a < c < b$ であり、命題が示された　□

＊　＊　＊

テイラー展開と剰余項の定理の証明

A を x によらない定数とし、

$$h(x) = f(x) - \sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l - \frac{A(x-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}$$

とおく

ここで、

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^l = \begin{cases} l(l-1)\cdots(l-k+1)(x-a)^{l-k} & (l > k) \\ l! & (l = k) \\ 0 & (l < k) \end{cases}$$

これを用いて、

$$\frac{f^{(l)}(a)}{l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^l = \begin{cases} \dfrac{f^{(l)}(a)}{(l-k)!}(x-a)^{l-k} & (l > k) \\ f^{(k)}(a) & (l = k) \\ 0 & (l < k) \end{cases}$$

$x = a$ を代入すると、

$$\frac{f^{(l)}(a)}{l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^l = \begin{cases} 0 & (l > k) \\ f^{(k)}(a) & (l = k) \\ 0 & (l < k) \end{cases}$$

最後の項についても同様に、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{A(x-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} &= \frac{A}{(b-a)^{n+1}}\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^{n+1} \\ &= \frac{A(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}(x-a)^n \end{aligned}$$

$x = a$ を代入すると、

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{A(x-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} = 0$$

よって、A が何であっても、

$$h^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - f^{(k)}(a) + 0 = 0 \quad (0 \le k \le n)$$

となり、$h^{(k)}(a) = 0 \quad (0 \le k \le n)$ が成り立つ

そこで $h(b) = 0$ となるように、A を

$$A = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$$

と定める

このような A で $h(b) = 0$ となることは、次のように確かめられる

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \frac{A(b-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} \\ &= f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - A \\ &= 0 \end{aligned}$$

ここで、先ほどの命題を適用すると、$h^{(n+1)}(c) = 0$ となる c が a と b の間に存在する

一方、

$$h^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{A(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}$$

なので、$h^{(n+1)}(c) = 0$ より、

$$f^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - \frac{A(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} = 0$$
$$\therefore \quad \frac{A(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} = f^{(n+1)}(c)$$

A について解くと、

$$A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

これで、A についての 2 通りの表現が得られた

ので、

$$f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$
$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

となり、テイラー展開と剰余項の定理が示された

□