Topic Note: 命題論理

tomixy

2025 年 5 月 21 日

目次

*　*　*

記号化

文を記号化することにより、文の長さや内容に煩わされることなく、文の構造を把握することが容易となり、「思考の節約」になる

もともとの文は忘れて、記号で表された文の間の関係を調べる分野のことを記号論理学という

記号論理学は、

- 主張（命題）を扱う命題論理学
- 「すべての〜」とか「ある〜」とかを含む文を扱う述語論理学

に分かれている

＊　＊　＊

命題論理の法則

⚓ 結合法則

$$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$$
$$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$$

結合法則は、「どこから計算しても同じ」という性質を支えるもの

＊　＊　＊

記号論理では、ある法則が成り立つとき、

> その法則の $\land$ を $\lor$ に、そして、$\lor$ を $\land$ に置き換えた法則が成り立つ

という原理があり、双対性と呼ばれている

> 双対性は、2 つのことがら・概念が、ちょうどお互いに鏡で写し合っているような対称性を持つ状況

双対性は数学のいろんな分野で登場する

＊　＊　＊

⚓ 冪等法則

$$p \wedge p \equiv p$$
$$p \vee p \equiv p$$

これらを繰り返して適用すると、

$$p \wedge \cdots \wedge p \equiv p$$
$$p \vee \cdots \vee p \equiv p$$

であることが容易にわかる

これは、AND（あるいは OR）を「何度繰り返しても同値」であることを示している

$\wedge$ をかけ算（積）と見なすと、$p \wedge \cdots \wedge$ は p の累乗である

昔は、累乗のことを「冪」と呼んだので、「冪等法則」の名称もここから来ている

＊　＊　＊

⚓ 交換法則

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$

p と q の順序が交換できることを示している

＊　＊　＊

⚓ 分配法則

$$p \land (q \lor r) \equiv (p \land q) \lor (p \land r)$$
$$p \lor (q \land r) \equiv (p \lor q) \land (p \lor r)$$

交換法則を考慮すると、分配法則は右から分配することもできる

$$p \land (q \lor r) \equiv (q \lor r) \land p$$
$$p \lor (q \land r) \equiv (q \land r) \lor p$$

*　*　*

⚓ 吸収法則

$$p \land (p \lor q) \equiv p$$
$$p \lor (p \land q) \equiv p$$

分配法則によく似ているが、分配する方と分配される方のどちらにも p が入っている

このような状況では q の影響がなくなって、命題が p と同値になるというのが吸収法則

*　*　*

⚓ ド・モルガンの法則（命題論理）

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$
$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

ド・モルガンの法則は、AND および OR の否定がどうなるかを述べたもの

命題の否定を作るときにはなくてはならない重要な公式

＊　＊　＊

これらの法則を前提にすると、真理表を使用せずに、同値変形という方法で、2 つの命題が同値であることを確かめることができる

＊　＊　＊

恒真命題と恒偽命題

同値変形をしていく場合に、真理値が一定な値をとる命題を考えると、便利であることがわかってくる

恒真命題　真理値を 1 しかとらない命題を恒真命題と呼び、I で表す

恒偽命題　真理値を 0 しかとらない命題を恒偽命題と呼び、O で表す

＊　＊　＊

恒真命題と恒偽命題の定義から、明らかに次が成り立つ

恒真命題と恒偽命題の関係

$$\neg I \equiv O$$
$$\neg O \equiv I$$

なぜなら、否定をとるというのは、真理値について 0 を 1 にし、1 を 0 にする操作だから

＊　＊　＊

恒真命題の性質

$$p \wedge I \equiv p$$
$$p \vee I \equiv I$$

恒偽命題の性質

$$p \wedge O \equiv O$$
$$p \vee O \equiv p$$

これらの性質において、

- $\wedge$ を $\vee$ に
- $\vee$ を $\wedge$ に
- I を O に
- O を I に

置き換えると、

$$\begin{aligned} p \wedge I \equiv p &\quad \leftrightarrow \quad p \vee O \equiv p \\ p \vee I \equiv I &\quad \leftrightarrow \quad p \wedge O \equiv O \end{aligned}$$

という対応が得られ、恒真命題と恒偽命題が双対的であることがわかる

＊　＊　＊

矛盾法則と排中法則

「命題とその否定命題は同時に成り立たない」というのが矛盾法則

⚓ 矛盾法則

$$p \wedge \neg p \equiv O$$

矛盾法則とは双対的に、排中法則は、「命題とその否定命題のどちらかは常に成り立つ」ということを表している

⚓ 排中法則

$$p \vee \neg p \equiv I$$

* * *

否定を含む論理式の同値変形において、矛盾法則、排中法則、恒真命題の性質、恒偽命題の性質を用いると、次のような 2 つのステップで、式をより単純な形にすることができる

1. 矛盾法則や排中法則により、命題とその否定命題のペアは、恒真命題 I や恒偽命題 O に置き換えることができる
2. 恒真命題の性質や恒偽命題の性質により、恒真命題 I と恒偽命題 O は、式をより簡単にする

* * *

ならば

ならば　命題 p, q に対して、$\neg p \vee q$ という命題を $p \to q$ と書いて、「p ならば q」と読む

* * *

必要条件と十分条件

必要条件と十分条件　命題 p, q に対して、命題 $p \to q$ が常に正しいとき、$p \Rightarrow q$ と書き、

- p は q の必要条件である
- q は p の十分条件である

と呼ぶ

必要十分条件　$p \Rightarrow q$ であり、$q \Rightarrow p$ であるとき、$p \Leftrightarrow q$ と書き、

- p は q の必要十分条件である
- q は p の必要十分条件である

と呼ぶ

* * *

三段論法

「ならば」を用いた有名な議論の方法として、仮言三段論法がある

これは、「A ならば B」という主張と「B ならば C」という主張から、「A ならば C」という主張を導くことができるというもの

＊　＊　＊

逆と対偶

対偶 $\neg q \to \neg p$ と、もとの命題 $p \to q$ は同値である

$$
\begin{aligned}
&\neg q \to \neg p \\
\equiv\ &(\neg\neg q) \lor \neg p && \to \text{の定義} \\
\equiv\ &q \lor \neg p && \text{反射法則} \\
\equiv\ &\neg p \lor q && \text{交換法則} \\
\equiv\ &p \to q && \to \text{の定義}
\end{aligned}
$$

＊　＊　＊

「晴れるならば、外出する」はまともな主張だが、その対偶「外出しないならば、晴れない」というのは、少し違和感を感じる

これは、「外出しない」という原因によって「晴れない」という結果が導かれるととらえてしまうから

あくまで、論理の「ならば」は、「外出しない」という事実があるときに、「晴れない」という事実があるという状態を表すもの

「～ならば～」というのは、

> 原因と結果という因果関係ではなく、2 つの状態の間の事実関係である

と思っておくとよい

＊　＊　＊

$\neg p \to \neg q$ は、$p \to q$ の裏と呼ばれることもある

- $(\neg p \to \neg q) \equiv (\neg\neg p) \lor \neg q \equiv p \lor \neg q$
- $(p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$

であるため、裏 $\neg p \to \neg q$ と元の命題 $p \to q$ は特に関係がない

＊　＊　＊

2 つの同値

同値　2 つの命題 p, q に対して、真理値がすべて等しい（真理表が一致する）ということを、p と q は同値であると呼び、

$$p \equiv q$$

と表す

一方、同値にはもう 1 つの定義がある

同値　命題 p と命題 q がお互いに必要十分条件であるとき、言いかえると、$p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ であるとき、p と q は同値であると呼び、

$$p \Leftrightarrow q$$

と表す

この 2 つの同値 $\equiv$ と $\Leftrightarrow$ は、実は同じ内容を表している

「$p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$」であるというのは、

命題 $p \to q$ および命題 $q \to p$ の真理値がすべて 1 である

ということだから、「p と q の真理値が等しいこと」と「$p \to q$ と $q \to p$ の真理値がどちらも 1 であること」は一致している

したがって、2 つの同値 $\equiv$ と $\Leftrightarrow$ は同じ内容を表していることがわかる