一般解のパラメータ表示

右端の列に主成分がない場合は、一般には無数個の解が存在する

ref: 行列と行列式の基礎 p33〜36

解の集合が直線を成していたり、もっと高い次元の図形になっていることがある

解が 1 つに定まらない場合は、解の全体像を知ることが方程式を「解く」ことになる

係数行列 A の n 個の列が、n 個の変数に対応していることを思い出そう

主変数と自由変数 行列 A を行基本変形により行階段形にしたとき、主成分がある列に対応する変数を主変数と呼び、それ以外の変数を自由変数と呼ぶ

たとえば、次のような既約行階段形に変形した拡大係数行列を考える

$$\tilde{A}_\circ = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & & 3 & 4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\hspace{8em}}_{5} \end{array}$$

変数を使って方程式の形に直すと、

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

主成分がある列は $1, 3, 4$ 列なので、主変数は x_1, x_3, x_4 である

それ以外の x_2, x_5 は自由変数となる

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - \quad x_5 = -3 \\
\qquad\qquad x_3 \qquad + 2x_5 = 1 \\
\qquad\qquad\qquad x_4 + \quad x_5 = 2
\end{cases}
$$

において、自由変数を含む項を左辺に移行すれば、

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad = -3 - 2x_2 + x_5 \\
\qquad x_3 \qquad = 1 - 2x_5 \\
\qquad\qquad x_4 = 2 - x_5
\end{cases}
$$

となる

自由変数の値を自由に選んで、主変数の値をこの等式によって定めれば、方程式の解になる

そこで、

$$
x_2 = t_1, \quad x_5 = t_2
$$

とおけば、

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad = -3 - 2t_1 + t_2 \\
\qquad x_3 \qquad = 1 - 2t_2 \\
\qquad\qquad x_4 = 2 - t_2
\end{cases}
$$

すなわち、

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad = -3 - 2t_1 + t_2 \\
\qquad x_2 \qquad\qquad\qquad = t_1 \\
\qquad\qquad x_3 \qquad\qquad = 1 - 2t_2 \\
\qquad\qquad\qquad x_4 \qquad = 2 - t_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x_5 = t_2
\end{cases}
$$

と書ける

これをベクトル形に直すことで、一般的な解のパラメータ表示を得られる

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

一般化するために、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ を次のように表して考える

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p300〜301

$$
(P \mid \boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & q_1 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{p}_r & q_r \\ \mathbf{0} & q_{r+1} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & q_m \end{pmatrix}
$$

ここで、$\boldsymbol{p}_1 \neq \mathbf{0}, \ldots, \boldsymbol{p}_r \neq \mathbf{0}$ であるとする

このとき、解を持つための条件は、

$$
q_{r+1} = q_{r+2} = \cdots = q_m = 0
$$

であった

さて、P において、主成分を含む列を $j_1, j_2, \ldots, j_r \quad (r = \mathrm{rank}(P))$

とする

$$
(P \mid \boldsymbol{q}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & q_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & q_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underset{n}{\longleftrightarrow} \end{array}
$$

すると、主変数 $x_{j_i}\,(i = 1, 2, \ldots, r)$ は、次のように表される

$$x_{j_i} + \sum_k \star x_k = q_i \quad (k > j_i \text{かつ } k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\})$$

$$\therefore x_{j_i} = q_i - \sum_k \star x_k$$

ここで、x_k は j_i よりも右にある $\star$ に対応する変数である

既約行階段行列では、j_i 列の主成分以外の要素はすべて 0 であるため、$\star$ に対応する自由変数のみが残る（これが $k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ とした意味である）

つまり、$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外の自由変数 x_k に勝手な数を与えるごとに、主変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ は定まる

このような自由変数は $n - r$ 個あるので、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ の解は、$n - r$ 個のパラメータを用いて表せる

まとめると、解が存在する場合には、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + \sum_{i=1}^{n-r} t_i \boldsymbol{u}_i$$

という形の一般解の表示（問題 D の答え）が得られる

ここで、r は行列 A の階数である

解の自由度

自由変数、すなわちパラメータの個数を解の自由度と呼ぶ

$$\begin{aligned} \text{解の自由度} &= (\text{変数の個数}) - \mathrm{rank}(A) \\ &= n - r \end{aligned}$$

これは、解全体の集合が何次元の空間なのかを表している（問題 C の答え）