$\mathbb{R}^n$ 上の内積

内積の公理と、正規直交基底の内積をもとに、$\mathbb{R}^n$ 上の内積を作ることができる。

まず、任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ を、正規直交基底の一次結合として表そう。

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{e}_i$$

$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{e}_j$$

これらの内積を、双線形性を使って展開していく。

まず、和に関する双線形性より、「足してから内積を計算」と「内積を計算してから足す」は同じ結果になるので、シグマ記号 $\sum$ を内積の外に出すことができる。
また、スカラー倍に関する双線形性より、定数 a_i, b_j も内積の外に出すことができる。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{n} b_j\boldsymbol{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)\end{aligned}$$

正規直交基底の内積 $(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ はクロネッカーのデルタ δ_{ij} で表せるので、次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \delta_{ij}\end{aligned}$$

ここで、δ_{ij} は $i \neq j$ のとき 0 になるので、$i = j$ の項しか残らない。

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \delta_{ii}
\end{aligned}
$$

δ_{ii} は常に 1 なので、最終的に次のような式が得られる。

$$
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i
$$

$\mathbb{R}^n$ 上の内積　$\boldsymbol{a} = (a_i)_{i=1}^n$, $\boldsymbol{b} = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$
(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i
$$

を $\mathbb{R}^n$ 上の内積と呼ぶ。

数ベクトルの同じ位置にある数どうしをかけ算して、それらを足し合わせる、という形になっている。

$\mathbb{R}^n$ 上の内積の性質

逆に、このように定義した $\mathbb{R}^n$ 上の内積が、内積の公理を満たしていることを確認してみよう。

ref: 行列と行列式の基礎 p76

$\mathbb{R}^n$ 上の内積の双線形性　$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ に対して、以下が成立する

i. $(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$
ii. $(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
iii. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2)$
iv. $(\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

証明

行列のかけ算と和に関する分配法則、行列のスカラー倍についての性質から従う　■

$\mathbb{R}^n$ 上の内積の対称性　$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、次が成り立つ

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

証明

実数同士の乗算は可換であることから、$\mathbb{R}^n$ 上の内積の定義により

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

となり、明らかに成り立つ　■

$\mathbb{R}^n$ 上の内積の正値性　$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$$

であり、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ のときに限り、等号が成立する

証明

内積の定義より、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \geq 0$$

である

ここで現れた u_i^2 は、u_i が 0 のときに限り 0 になるので、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ のときに限り、等号が成立する　■