第 18 章

直和分解と不変部分空間

部分空間の共通部分

[Placeholder 1: 再編予定 (book: 線形代数の世界 p20~21)]

与えられた部分空間から、新しく部分空間を作ることができる

♣ theorem - 線形部分空間の共通部分は部分空間

U, W を体 K 上の V の部分空間とするとき、共通部分 $U \cap W$ は V の部分空間である



和について

 $oldsymbol{a}$, $oldsymbol{b} \in U \cap W$ とすると、共通部分の定義より、 $oldsymbol{a}$ と $oldsymbol{b}$ はどちらも U と W の両方に属していることになる

 $\neg \exists b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U \text{ } b \neg \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \text{ } cas$

U も W も部分空間なので、部分空間の定義より、

$$a + b \in U$$

 $a + b \in W$

a + b が $U \ge W$ の両方に属していることから、a + b は $U \cap W$ に属するよって、 $U \cap W$ は和について閉じている

スカラー倍について

共通部分の定義より、 \boldsymbol{a} は U と W の両方に属しているので、部分空間の定義より

$$c\mathbf{a} \in U$$

 $c\mathbf{a} \in W$

よって、ca は $U \cap W$ に属するため、 $U \cap W$ はスカラー倍について閉じている



部分空間の和

[Placeholder 2: 再編予定 (book: 線形代数の世界 p20~21)]

theorem - 線形部分空間の和は部分空間

U, W を体 K 上の V の部分空間とするとき、和空間

$$U + W := \{ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W \}$$

は V の部分空間である

証明

和について

 $a_1, a_2 ∈ U, b_1, b_2 ∈ W$ とする

UとW は部分空間なので、部分空間の定義より

$$a_1 + a_2 \in U$$
, $b_1 + b_2 \in W$

一方、和空間の定義より、 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$ はそれぞれ U+W の元である これらの元の和をとったときに、その和も U+W に属していれば、和空間は 和について閉じているといえる

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$$

 $\in U + W$

上式で、和空間は和について閉じていることが示された

スカラー倍について

UとW は部分空間なので、部分空間の定義より

$$c\mathbf{a} \in U$$
 $c\mathbf{b} \in W$

一方、和空間の定義より、 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は U+W の元である この元をスカラー倍したときに、そのスカラー倍も U+W に属していれば、 和空間はスカラー倍について閉じているといえる

$$c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$$
$$\in U + W$$

上式で、和空間はスカラー倍について閉じていることが示された

3 つ以上の部分空間の和も同様に考えて、一般に和空間は次のように定義される

★ def - 和空間

線形空間 V と、その部分空間 V_1, \ldots, V_k が与えられたときに、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k \quad (\boldsymbol{v}_i \in V_i, i = 1, \ldots, k)$$

と表されるベクトル \boldsymbol{v} 全体がなす集合を V_1, \ldots, V_k の和空間といい、

$$\sum_{i=1}^{k} V_i$$

と書く

和空間を張るベクトル

部分空間を生成するベクトルを用いて、部分空間の和を表せる

北 theorem 18.1 - 部分空間の和と生成ベクトル

 K^n の 2 つの部分空間 $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle$ と $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$ に対して、和空間 U + W は

$$U + W = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

となる

証明

和空間 U+W は

$$U + W = \{ \boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \ \boldsymbol{u} \in U, \ \boldsymbol{w} \in W \}$$

と定義される

また、 $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_k$ の張る部分空間は

$$H = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

である

これらが等しいことを示せばよい

$U + W \subseteq H$

任意の $\boldsymbol{x} \in U + W$ に対し、 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$) と書ける すなわち、

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_m \mathbf{u}_m$$
 $(a_i \in K)$
 $\mathbf{w} = b_1 \mathbf{w}_1 + \dots + b_k \mathbf{w}_k$ $(b_j \in K)$

よって、

$$oldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m a_i oldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^k b_j oldsymbol{w}_j \in H$$

$H \subseteq U + W$

任意の $\boldsymbol{x} \in H$ は

$$oldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m a_i oldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^k b_j oldsymbol{w}_j$$

と書ける

ここで

$$oldsymbol{u} = \sum_{i=1}^m a_i oldsymbol{u}_i \in U$$
 $oldsymbol{w} = \sum_{j=1}^k b_j oldsymbol{w}_j \in W$

とすれば、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in U + W$$

以上より、 $U+W\subseteq H$ と $H\subseteq U+W$ が成り立つので、U+W=H が示された

和空間の包含関係

♣ theorem - 和空間における部分空間の和集合の包含

和空間は、和集合を部分集合として包含する すなわち、U. W を V の部分空間とするとき、

 $U+W\supset U\cup W$

が成り立つ

証明

theorem 10.1「部分空間における零ベクトルの包含」より、部分空間はいずれも零ベクトルを含むので、たとえば、 $U = \{\mathbf{0}\}$ の場合、

 $U + W \supset W$

同様に、

 $U+W\supset U$

よって、U+W は U または W を包含することがわかる すなわち、

 $U + W \supset U \cup W$

が成り立つ

♣ theorem - 和空間の最小包含性

U, *W* を *V* の部分空間とする

和空間 U+W は、U と W を含む部分空間のうち、最小のものである

証明

V の任意の部分空間のうち、U と W の両方を包含するもの V' を考えるこのとき、部分空間は和に閉じているため、V' は U+W も包含する

$$V' \supset U + W$$

よって、V' の任意性から、U+W は U と W を含む部分空間のうち、最小のものとなる



このように、和空間 U+W は、U や W を部分空間として含むが、U や W より真に大きい(U, W を真部分集合として含む)とは限らない

別の角度からいうと、

$$V = W_1 + W_2$$

という関係があるだけで、「V が W_1 と W_2 の和に分解された」というのは適当ではない

和空間が持つこの欠陥を補うために、和空間の概念をより精密化したものが、次に述べる 和である



直和分解

★ def 18.1 - 直和分解

線形空間 V の部分集合 W_1 , W_2 に対して、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ によって

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$$

と一意的に表されるとき、V は W_1 と W_2 の $\overline{0}$ 和である($\overline{0}$ 和に分解される)といい、

$$V = W_1 \oplus W_2$$

と書く

この定義は、次のように言い換えることができる

\$ theorem 18.2 - 直和分解の同値条件

線形空間 V の部分集合 W_1 , W_2 に対して $V=W_1 \oplus W_2$ が成り立つことと、

- i. $V = W_1 + W_2$
- ii. $W_1 \cap W_2 = \{ \mathbf{0} \}$

の両方が成り立つことは同値である

証明

(i), (ii) $\Longrightarrow V = W_1 \oplus W_2$

 $m{w}_1$, $m{w}_1' \in W_1$, $m{w}_2$, $m{w}_2' \in W_2$ とする

仮定 (i) と和空間の定義より、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1' + \boldsymbol{w}_2'$$

この等式は、移項によって次のように変形できる

$$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2$$

部分空間は和に閉じているため、左辺は W_1 に、右辺は W_2 に属するよって、このベクトルは $W_1 \cap W_2$ に属する

仮定 (ii) より、 $W_1 \cap W_2$ の元は零ベクトルであるので、

$$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$$

したがって、

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_1', \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_2'$$

となり、**v** の表現の一意性が示された

$V = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow (i), (ii)$

和空間の定義をふまえると、(i) は直和分解の定義に含まれる

(ii) を示すため、 $\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ とする

v は零ベクトルを用いて、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{v}$$

と表せるが、直和分解の定義より、**v** の表現は一意的であるので、

$$v = 0$$

を得る

よって、 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ が成り立つ

直和分解の一意性を表す条件

3 つ以上の部分空間による直和を考えるにあたって、直和分解の定義に含まれていた「一意性」を表す条件を定式化する

♣ theorem - 部分空間の和における表現の一意性

和空間 $\sum_{i=1}^k V_i$ の元 \boldsymbol{v} を、部分空間 V_1,\ldots,V_k の元 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ の和として

$$oldsymbol{v} = \sum_{i=1}^k oldsymbol{v}_i \quad (oldsymbol{v}_i \in V_i)$$

と書くとする

このとき、次の条件が成り立てば、和に使われる \boldsymbol{v}_i は \boldsymbol{v} により一意的に定まる

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = 0 \implies \boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = 0$$

証明 証明

仮に、**v** が 2 通りの和で表せるとする

$$oldsymbol{v} = \sum_{i=1}^k oldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^k oldsymbol{v}_i' \quad (oldsymbol{v}_i, oldsymbol{v}_i' \in V_i)$$

このとき、

$$\sum_{i=1}^k (oldsymbol{v}_i - oldsymbol{v}_i') = oldsymbol{0}$$

となるが、ここで $oldsymbol{v}_i - oldsymbol{v}_i'$ は V_i に属する

そこで、 $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i' \in V_i$ とおき、

$$\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_k = 0 \implies \boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_k = 0$$

という条件を満たすとすると、 $\boldsymbol{w}_i = \mathbf{0}$ より、

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_i' \quad (i = 1, \ldots, k)$$

が導かれる

したがって、 $oldsymbol{v}$ の和に使われる $oldsymbol{v}_i$ は一意的に定まる

この一意性の条件を用いて、複数の部分空間による直和を次のように定義する

☎ def - 直和

線形空間 V と、その部分空間 V_1, \ldots, V_k が与えられたとき、 $\boldsymbol{v}_i \in V_i, \boldsymbol{v} \in \sum_{i=1}^k V_i$ に対して、

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$$

が成り立つとき、 $\sum_{i=1}^{k} V_i$ は V の**直和**であるといい、

$$\bigoplus_{i=1}^{k} V_i$$

と書く



和空間と直和の次元

♪ theorem - 和空間の次元

 K^n の部分空間 V, W に対して、

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

が成り立つ

証明

 $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ とする

$$V \cap W$$
 の基底 $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ をとる

これを theorem 10.6 「基底の延長」に基づいて、V の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}\}$$

に延長する

同様に、 $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ を \boldsymbol{W} の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}\}$$

に延長する

このとき、 $oldsymbol{u_1},\ldots,oldsymbol{u_d},oldsymbol{v_1},\ldots,oldsymbol{v_{n-d}},oldsymbol{w_1},\ldots,oldsymbol{w_{m-d}}$ がV+W の基底になることを示す

V+W を生成すること

 $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W$ とすると、それぞれ基底の線形結合で表すことができる

$$egin{aligned} oldsymbol{v} &= \sum_{i=1}^d a_i oldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j oldsymbol{v}_j \ oldsymbol{w} &= \sum_{i=1}^d c_i oldsymbol{u}_i + \sum_{k=1}^{m-d} d_k oldsymbol{w}_k \end{aligned}$$

V + W の任意の元は、v + w と書けるので、

$$oldsymbol{v} + oldsymbol{w} = \sum_{i=1}^d (a_i + c_i) oldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j oldsymbol{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} d_k oldsymbol{w}_k$$

となり、 $\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}\}$ の線形結合で表せる

線型独立であること

 $oldsymbol{u}_1,\ldots,oldsymbol{u}_d,oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_{m-d}$ が線型独立であることを示すために、次のような線形関係式を考える

$$\sum_{i=1}^d c_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} c_{d+j} \boldsymbol{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} c_{d+n-d+k} \boldsymbol{w}_k = \mathbf{0}$$

ここで、 $c_i \in K$ はスカラーである

この式をVとWの基底の線型結合として考えると、Vの基底 \mathbf{u}_i , \mathbf{v}_j に関する部分とWの基底 \mathbf{u}_i , \mathbf{w}_k に関する部分がそれぞれ線形独立であるため、結局どの項においても $\mathbf{c}_i=0$ である必要がある

よって、 $oldsymbol{u}_1,\ldots,oldsymbol{u}_d,oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_{n-d},oldsymbol{w}_1,\ldots,oldsymbol{w}_{m-d}$ は線型独立である

以上より、 $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}$ はV+W の基底であることが示された

この基底をなすベクトルの個数(次元)について考えると、

$$\dim(V + W) = d + (n - d) + (m - d)$$
$$= n + m - d$$

となる

CCC, $d = dim(V \cap W)$ CCC,

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

と書き換えられ、目的の式が得られた



直和分解に対して和空間の次元定理を適用すると、次のようにまとめられる

♣ theorem 18.3 - 直和の次元

 W_1 , W_2 が V の部分空間であるとき、

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

が成り立つ

▲ 証明

直和分解の定義より $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ であるので、

$$\dim(W_1\cap W_2)=0$$

よって、和空間の次元の式から、 $\dim(W_1 \cap W_2)$ が消えた形になる



また、和空間の次元定理の証明過程を、直和分解の場合で考えることで、次の定理が得られる

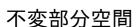
♣ theorem 18.4 - 直和の基底

線形空間 V が部分空間 W_1 , W_2 の直和に分解されることと、V の基底が W_1 , W_2 の基底を合わせたものになることは同値である

証明 証明

直和分解の場合、 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であるため、和空間の次元定理の証明過程において、 $W_1 \cap W_2$ の基底を考える必要がなくなる

よって、和空間の次元定理の証明と同様にして、 W_1 の基底と W_2 の基底を合わせた ものが V の基底になることが示される



V 上の線形変換 f について、「変換 f で写しても変わらない」という性質を考える

★ def - f 不変

f を線形空間 V の線形変換とする

V の部分空間 **W** に対して、

$$f(W) \subset W$$

すなわち、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in W$$

が成り立つとき、W は f 不変な部分空間であるという

また、 $V=\mathbb{R}^n$ で、f が正方行列 A によって定まっているときは、f 不変な部分空間 W を A 不変な部分空間ともいう

写像の制限と不変部分空間

♣ theorem 18.5 - 不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現

V を n 次元線形空間とし、線形変換 $f: V \rightarrow V$ を考える

このとき、V のある部分空間 W が f 不変ならば、V の適当な基底について、f は

$$\begin{pmatrix} * & * \\ O & * \end{pmatrix} * btd \begin{pmatrix} * & O \\ * & * \end{pmatrix}$$

という形の行列で表すことができる

証明 証明

 $\dim(W) = r$ とし、W の基底 $oldsymbol{v}_1, \ldots, oldsymbol{v}_r$ を延長して V の基底 $oldsymbol{v}_1, \ldots, oldsymbol{v}_r, oldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, oldsymbol{v}_n$ をとる

このとき、表現行列の構成[第13章]より、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} \boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^n a_{ij} \boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

とおける

ここで、W は f 不変であることは、 $1 \leq j \leq r$ の範囲では $f(oldsymbol{v}_j) \in W$ であることを意味する

W の元 $f(\boldsymbol{v}_j)$ は、W の基底だけを用いて表現できるので、

$$f(oldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} oldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

すなわち、もともとの $f(\boldsymbol{v}_i)$ の式において、

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \quad (1 \le j \le r)$$

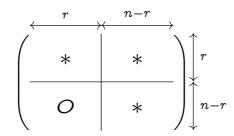
となっている

 v_i は基底なので線型独立であり、したがって、

$$a_{ij} = 0$$
 $(1 \le j \le r, r + 1 \le i \le n)$

が成り立つ

この条件より、f の表現行列 (a_{ij}) は、



というような形になる

また、V の基底として、順序を変えた $oldsymbol{v}_{r+1},\ldots,oldsymbol{v}_n,oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_r$ を取ることもできる

この場合は、

$$f(oldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} oldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^n a_{ij} oldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

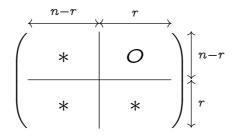
とおくと、 $r+1 \leq j \leq n$ の範囲 (V の基底の後半部分) で

$$\sum_{i=1}^r a_{ij} \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$$

となるので、すなわち、

$$a_{ij} = 0$$
 $(r + 1 \le j \le n, 1 \le i \le r)$

よって、f の表現行列 (a_{ij}) は、



という形になる

以上より、2 通りの f の表現行列の形が得られた

V の基底を $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r,\boldsymbol{v}_{r+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n$ ととった場合、 $f(\boldsymbol{v}_j)\in W$ は

$$f(oldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} oldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

だけで表現できた

この $1 \le i \le r$, $1 \le j \le r$ の部分は、f の表現行列

の、 A_{11} の部分に対応する

つまり、この行列 A_{11} は、 $m{v}_1,\ldots,m{v}_r$ で張られる V の部分空間 W から W への線形写像 f' を、基底 $m{v}_1,\ldots,m{v}_r$ について表現する行列になっている

f' は、f の定義域を W に制限したものになっているが、W の元に限定して考える限り、 実質的には f と区別がないものである

この意味で、写像 f' を、写像 f の W への制限と呼び、 $f|_W$ と表記する

► def - 写像の制限

写像 $f\colon X\to Y$ において、X のある部分集合 S が与えられたとき、定義域を S に限定したものを f の S に対する制限といい、

$$f|_{S}: S \to Y$$

と表す

同様に、V の基底を $\boldsymbol{v}_{r+1},\ldots,\boldsymbol{v}_{n},\boldsymbol{v}_{1},\ldots,\boldsymbol{v}_{r}$ ととった場合、 $f(\boldsymbol{v}_{i})\in W$ は

$$\sum_{i=r+1}^n a_{ij} oldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

だけで表現できた

この r+1 < i < n, r+1 < j < n の部分は、f の表現行列

$$A=(a_{ij})=egin{pmatrix} \stackrel{n-r}{\longleftrightarrow} & \stackrel{r}{\longleftrightarrow} & \stackrel{r}{\longleftrightarrow$$

の、*A*22 の部分に対応する

つまり、この場合は、 A_{22} が変換 f の W への制限 $f|_W$ を表現する行列になっている



不変部分空間への直和分解

theorem 18.5「不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現」の証明では、Wの基底 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$ を延長したものを V の基底 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$ を延長したものを V の基底 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$ としたこのとき、

$$W' = \langle \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

とおくと、V の基底が W, W' の基底を合わせたものになっているため、 $theorem\ 18.4$ 「直和の基底」より、

$$V = W \oplus W'$$

となる

ここで、もしW'もf不変であれば、右上の A_{12} も零行列になって、表現行列は

$$A = (a_{ij}) = \left(egin{array}{c|c} & r & & n-r \\ \hline A_{11} & O & \\ \hline & O & A_{22} \end{array} \right) \uparrow r$$

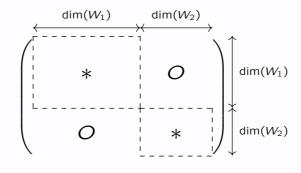
というブロック対角型になる

♣ theorem - 不変部分空間への直和分解

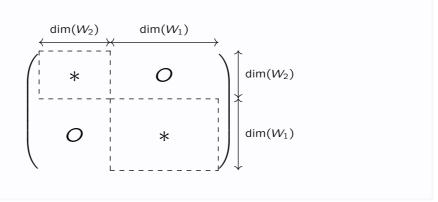
線形空間 V と、V 上の線形変換 f に対し、V が f 不変な部分空間 W_1 と W_2 の 直和に分解することができれば、すなわち、

- i. $V = W_1 \oplus W_2$
- ii. W_1 , W_2 は f 不変な V の部分空間

となる W_1 , W_2 が存在すれば、適当な V の基底について、f は次のような形の行列で表せる



または



証明

 W_1 の基底、 W_2 の基底をこの順に並べるか、その反対の順に並べて、V の基底を構成することで、theorem 18.5「不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現」の証明と同様に示される

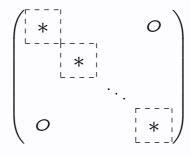
さらに、 $oldsymbol{V}$ をより細かい部分空間の直和に分解できる場合には、次のようになる

♣ theorem - 複数の不変部分空間への直和分解

線形空間 V と、V 上の線形変換 f について、

- i. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$
- ii. 各部分空間 W_i は f 不変な V の部分空間

であるならば、適当な V の基底に対し、f は次のような形の行列で表せる



対角線上の各正方形の大きさは、各部分空間 W_i の次元に対応する

そこで、以上の議論を究極にまで押し進めると、次の定理になる

♣ theorem 18.6 - 一次元部分空間への直和分解

n 次元部分空間 V が、n 個の f 不変の 1 次元部分空間の直和に分解できるとき、 すなわち、

- i. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$
- ii. W_i ($i=1,2,\ldots,n$) は f 不変な 1 次元部分空間

となるときは、f は次のような対角行列で表せる

$$\left(\begin{array}{ccc} * & & O \\ & * & \\ & & \ddots & \\ O & & * \end{array}\right)$$

一次元不変部分空間

W を一次元部分空間とすると、これは基底 $w \neq 0$ で張られる空間であるので、

$$W = \langle \boldsymbol{w} \rangle = \{ \alpha \boldsymbol{w} \mid \alpha \in K \}$$

この一次元部分空間 W が f 不変であるとは、定義より、

$$\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{W} \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in \mathcal{W}$$

であり、これで W の元は $\alpha \boldsymbol{w}$ とも $f(\boldsymbol{w})$ とも表せることになるので、

$$f(\boldsymbol{w}) = \alpha \boldsymbol{w} \quad (\alpha \in K)$$

がいえる

以上をふまえて、**theorem 18.6**「一次元部分空間への直和分解」という定理をより具体的に整理してみる

 $\dim(V)=n$ とすると、表現行列の構成 [第 13 章] より、V 上の線形変換 f の表現行列 A を構成する式は、

$$(f(\boldsymbol{w}_1),\ldots,f(\boldsymbol{w}_n))=(\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_n)A$$

となるが、ここで、

$$(f(\boldsymbol{w}_1),\ldots,f(\boldsymbol{w}_n))=(\alpha_1\boldsymbol{w}_1,\ldots,\alpha_n\boldsymbol{w}_n)$$

であるので、

$$(f(\boldsymbol{w}_1),\ldots,f(\boldsymbol{w}_n))=(\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_n)egin{pmatrix} lpha_1 & 0 & \cdots & 0 \ 0 & lpha_2 & \cdots & 0 \ dots & dots & \ddots & dots \ 0 & 0 & \cdots & lpha_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられる

したがって、f は基底 $oldsymbol{w}_1,\dots,oldsymbol{w}_n$ について、次の<mark>対角行列</mark>で表される

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ここで現れたスカラー α_i やベクトル \boldsymbol{w}_i と、線形写像 f との関係が、固有値・固有ベクトルと行列の対角化という話題に発展する

......

Zebra Notes

Туре	Number
placeholder	2