# 第5章

# 線形写像の像と核

### 線形写像と逆問題

 $m{y} = Am{x}$  という形の式は、 $m{x}$  と  $m{y}$  の次元が同じならば、連立一次方程式として捉えることができた

$$egin{pmatrix} y_1 \ dots \ y_n \end{pmatrix} = egin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \ dots & \ddots & dots \ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} egin{pmatrix} x_1 \ dots \ x_n \end{pmatrix}$$

そして、このような形の連立方程式を解くことは、「 $m{y}$  から  $m{x}$  を推定する」という逆問題を解くことに相当する

- 一方、 $\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{x}$  という式は、線形写像を表す式とみることもできる
- 一般に、線形写像  $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  の表現行列 A は  $m \times n$  行列であり、 $\mathbf{y}$  は m 次元ベクトル、 $\mathbf{x}$  は n 次元ベクトルである

ここでは、 $oldsymbol{x}$  と  $oldsymbol{y}$  の次元が異なる場合の、 $\lceil oldsymbol{y}$  から  $oldsymbol{x}$  を推定する」という逆問題を考えてみることにする

### 手がかりが足りない場合

手がかりとなる情報を **y** とし、知りたい情報を **x** とする

まずは、 $m{y}$  の方が  $m{x}$  より次元が小さい、すなわち  $m{m}$  <  $m{n}$  の場合を考えるこのとき、表現行列  $m{A}$  は横長の行列となる

$$egin{pmatrix} egin{pmatrix} y_1 \ dots \ y_m \end{pmatrix} = egin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \ dots & \ddots & dots & dots \ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} egin{pmatrix} x_1 \ dots \ dots \ x_n \end{pmatrix}$$

m < n の場合は、「知りたい量が n 個もあるのに、手がかりはたった m 個しかない」という状況になっている

見方を変えると、*A* を作用させたことによって「情報の一部が欠落してしまった」ともい える

#### m < n の場合の線形写像の写し方

m < n のとき、A は、元より次元の低い空間に写す線形写像を表す そのため、 $\mathbf{x}$  はこの線形写像によって「潰される」ことになる

「潰される」とはどのようなことかというと、空間を張る **x** それぞれの居場所を、写す先では全員分用意することができないので、

複数の $\boldsymbol{x}$ を同じ $\boldsymbol{y}$ に写すしかない

ということである

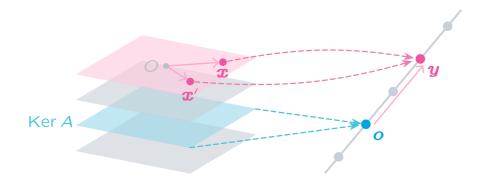
複数の $\boldsymbol{x}$ が同じ $\boldsymbol{y}$ に写ってしまうと、結果 $\boldsymbol{y}$ から元の $\boldsymbol{x}$ を特定することはできなくなる (つまり、情報が失われている)



## 線形写像の核

次の図は、 $1 \times 3$  行列 A による線形写像を表している

同じ平面上の点がすべて同じ点に写されることで、平面の集まりである立体(3次元)が、点の集まりである直線(1次元)へと「潰されている」ことがわかる



このとき、 $A \mathbf{x} = \mathbf{o}$  に写ってくるような  $\mathbf{x}$  の集合を、 $\mathbf{A}$  の核あるいは $\mathbf{h}$ ーネルといい、 $\operatorname{Ker} \mathbf{A}$  と表す

### Ker A の次元

上の図では、零ベクトル o (写り先の 1 次元空間の原点) に潰されている青い平面が Ker A に相当する

平面なので、この Ker A は 2 次元である

もしも m < n でない場合、つまり潰れない写像の場合は、 $A \mathbf{x} = \mathbf{o}$  に写る  $\mathbf{x}$  は零ベクトル  $\mathbf{o}$  だけなので、 $\operatorname{Ker} A$  は 0 次元となる

### Ker A に平行な方向の成分

「Todo 1: book: プログラミングのための線形代数 p114]

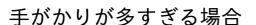
### Ker f の定義

A が線形写像 f の表現行列であるとすると、Ker f を次のように定義できる

#### ★ def - 線形写像の核

線形写像  $f: V \to W$  に対して、f による  $\{o\}$  の逆像  $f^{-1}(\{o\})$  を、線形写像 f の核や核空間、あるいはカーネルといい、 $\operatorname{Ker}(f)$  と表記する

$$\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(\{\boldsymbol{o}\}) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}\} \subset V$$



今度は、 $m{y}$  の方が  $m{x}$  より次元が大きい、すなわち m>n の場合を考えるこのとき、表現行列 A は縦長の行列となる

$$egin{pmatrix} egin{pmatrix} y_1 \ dots \ y_m \end{pmatrix} = egin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \ dots & \ddots & dots \ dots & \ddots & dots \ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} egin{pmatrix} x_1 \ dots \ x_n \end{pmatrix}$$

m>n の場合は、「知りたい量はたった n 個しかないのに、手がかりが m 個もある」という状況になっている

この場合、手がかりどうしが矛盾することもある

#### m > n の場合の線形写像の写し方

m>n のとき、A は、元より次元の高い空間に写す線形写像を表す そのため、写り先の空間すべてをカバーすることはできない

はみ出した **u** については、

そこに写ってきてくれる 変 が存在しない

ことになる

現実の応用では、ノイズがのることで、はみ出した  $m{y}$  が観測されることがある そうなると、「手がかり  $m{y}_1,\dots,m{y}_m$  すべてに符号する  $m{x}$  は存在しない」ということになっ てしまう



与えられた A に対して、 $\boldsymbol{x}$  をいろいろ動かしたときに A で写り得る  $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$  の集合を A の像といい、 $\operatorname{Im} A$  で表す

別の言い方をすると、 $\operatorname{Im} A$  は、元の空間全体を A で写した領域である  $\operatorname{Im} A$  上にない  $\boldsymbol{y}$  については、 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$  となるような  $\boldsymbol{x}$  は存在しない

### Im *f* の定義

A が線形写像 f の表現行列であるとすると、 $\operatorname{Im} f$  を次のように定義できる

#### ★ def - 線形写像の像

線形写像  $f: V \to W$  に対して、f による V の像 f(V) を、線形写像 f の像や像空間といい、 $\operatorname{Im}(f)$  と表記する

$$Im(f) = f(V) = \{ f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V \} \subset W$$



### 単射と全射

ここまで、y = Ax という関係について、次の 2 つの観点で議論してきた

- i. 同じ結果 **y** が出るような原因 **x** は唯一か
- ii. どんな結果 y にも、それが出るような原因 x が存在するか

 $m{y} = Am{x}$  を方程式と捉えると、(i) は解の一意性、(ii) は解の存在に対応する

#### 単射

- (i) は、次のようにも言い換えられる
  - i. 異なる原因  $\boldsymbol{x}$ ,  $\boldsymbol{x}'$  が、A で同じ結果に写ることがないか
- (i) の条件が成り立つとき、「線形写像 y = Ax は単射である」という

#### 全射

(ii) は、次のようにも言い換えられる

- ii. 元の空間全体(定義域)を A で写した領域 Im A が、行き先の空間全体(値域) に一 致するか
- (ii) の条件が成り立つとき、「線形写像 y = Ax は全射である」という

### 全単射

(i) と (ii) の両方が成り立つときは、「線形写像 y = Ax は全単射である」という



### 零ベクトルと単射性

零写像と射影を除けば、f によってベクトルが「つぶれない」という性質は、次のように表せる

$$\mathbf{v} \neq 0 \Longrightarrow f(\mathbf{v}) \neq \mathbf{o}$$

[ Todo 2: book: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

この条件は、実は線形写像が単射であることを意味している

対偶をとって、次のように表現できる

♣ theorem 5.1 - 零ベクトルへの写像による単射性の判定

線形写像 ƒ が単射であることと次は同値である

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{o} \Longrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{o}$$



- i. *f* が単射
- ii.  $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$
- $(i) \Longrightarrow (ii)$

零ベクトルの像は零ベクトルであることから、 $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$  は、

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{o})$$

と書き換えられる

f の単射性により、この式から、

$$v = o$$

がしたがう

### $(ii) \Longrightarrow (i)$

 $f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$  を満たす  $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$  を考えるこのとき、f の線形性から、

$$f(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1) - f(\mathbf{v}_2)$$

となる

仮定 (ii) より、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o}$$

がいえるので、 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$  が成り立つ

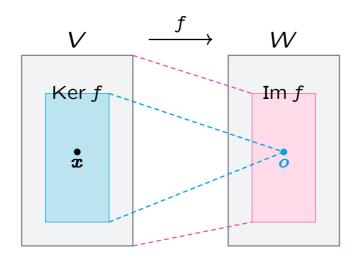
 $f(oldsymbol{v}_1)=f(oldsymbol{v}_2)$  から  $oldsymbol{v}_1=oldsymbol{v}_2$  が導かれたことで、f は単射であることが示された

# 核・像と単射・全射

先ほどの定理で、線形写像 f によって「潰れない」という条件が、単射性と同値であることが示された

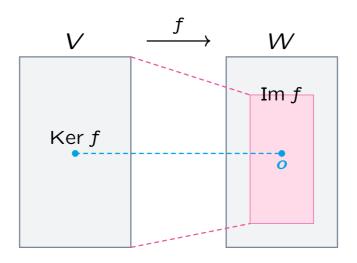
つまり、線形写像 f の核 Ker f が、f の単射性と関係しそうである

また、線形写像 f の像  $\operatorname{Im} f$  が値域と一致するかどうかが、f の全射性と関係する



### 単射となるときの核

線形写像 f が単射であるとは、「潰れない」ということなので、次のような状況である



つまり、 $\operatorname{Ker} f$  が零ベクトル o のみを含む状態であればよい

♣ theorem 5.2 - 線形写像の単射性と核の関係ƒ を線形写像とするとき、

$$f$$
 が単射  $\iff$  Ker  $f = \{o\}$ 

証明

Ker f の定義は

$$Ker f = \{ v \in V \mid f(v) = o \}$$

これを踏まえて、次の2つが同値であることを示す

i. 
$$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

ii. Ker 
$$f = \{o\}$$

### $(i) \Longrightarrow (ii)$

このとき、 $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$  が  $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$  を意味するので、 $\operatorname{Ker} f$  の元は零ベクトルのみになる

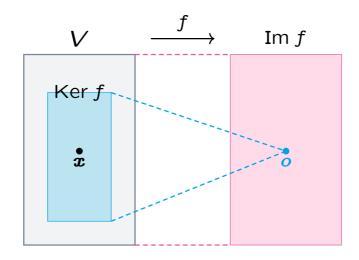
よって、
$$Ker f = \{o\}$$
 が成り立つ

$$(ii) \Longrightarrow (i)$$

 $\operatorname{Ker} f = \{o\}$  であれば、 $\operatorname{Ker} f$  の元は零ベクトルのみである よって、 $f(\boldsymbol{v}) = o$  が成り立つとき、 $\boldsymbol{v} = o$  が成り立つことになる すなわち、 $f(\boldsymbol{v}) = o \Longrightarrow \boldsymbol{v} = o$  が成り立つ

### 全射となるときの像

線形写像 f が全射であるとは、 $\operatorname{Im} f$  が行き先の空間全体を埋め尽くす状態である このような状態であれば、たしかに  $f(\boldsymbol{x})$  が  $\operatorname{Im} f$  からはみ出してしまうことはない



この状況を式で表すと、線形写像  $f: V \rightarrow W$  が全射であるとは、

$$\mathrm{Im}\, f = \mathcal{W}$$

という条件と同値である。

ここでは直感的な説明からこの条件を導いたが、実際この条件は全射 (def A.4) の定義そのものである。

### ♣ theorem 5.3 - 線形写像の全射性と像の関係

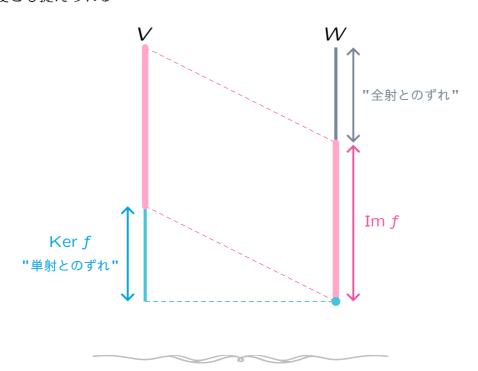
 $f: V \rightarrow W$  を線形写像とするとき、

$$f$$
 が全射  $\iff$  Im  $f = W$ 

### 単射・全射との離れ具合

 $\operatorname{Ker} f$  が零ベクトルの集合に一致するなら f は単射であり、 $\operatorname{Im} f$  が写り先全体に一致するなら f は全射である

このことから、 $\operatorname{Ker} f$  と  $\operatorname{Im} f$  は、それぞれ単射・全射と「どれくらいかけ離れているか」 を測る尺度とも捉えられる



## 線形写像の像と線型独立性

### ♣ theorem - 線形写像と線形独立性

 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  を線形写像、 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$  とするベクトル  $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$  の f による像

$$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$$

が線型独立であるとき、 $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$  も線型独立である

#### ☎ 証明

 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$  の線形結合

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0}$$

を考える

この両辺を f で写すと、f の線形性と零ベクトルの像  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  を使って

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

仮定より  $f(\boldsymbol{v}_1)$ ,  $f(\boldsymbol{v}_2)$ , . . . ,  $f(\boldsymbol{v}_n)$  は線型独立なので、 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$  である

よって、

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0}$$

を満たす  $c_1, c_2, \ldots, c_n$  は 0 しかないので、 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$  は線型独立である

8

次の定理は、平行なベクトルを線型写像で写した結果、平行でなくなったりはしないという ことを述べている

### ♣ theorem - 線形写像と線形従属性

 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  を線形写像、 $m{v}_1, m{v}_2, \ldots, m{v}_n \in \mathbb{R}^n$  とする $\{m{v}_1, \ldots, m{v}_n\}$  が線形従属ならば、 $\{f(m{v}_1), \ldots, f(m{v}_n)\}$  は線形従属である

#### 証明

 $\{oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_n\}$  が線形従属であるとは、少なくとも 1 つは 0 でないある定数  $k_1,k_2,\ldots,k_n$  が存在して

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

が成り立つことを意味する

この両辺を f で写すと、線形性より

$$k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

よって、 $\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$  も線形従属である



たとえば平行四辺形の像が線分や 1 点になったりしないことなどは、「 $\{m{v}_1, m{v}_2, \dots, m{v}_n\}$ が線型独立ならば、 $\{f(m{v}_1), f(m{v}_2), \dots, f(m{v}_n)\}$  も線型独立である」と表現できる

### ♣ theorem 5.4 - 単射な線型写像は線型独立性を保つ

線型写像  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  が単射であるとき、 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$  が線型独立ならば、 $\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$  も線型独立である

証明

 $f(\boldsymbol{v}_1)$ ,  $f(\boldsymbol{v}_2)$ , . . . ,  $f(\boldsymbol{v}_n)$  の線形結合

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}$$

を考える

f の線形性と零ベクトルの像  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  より、次のように書き換えられる

$$f(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$$

f は単射だから、上式より

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0}$$

が成り立つ

ここで、 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$  は線型独立なので、 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$  であるよって、 $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$  は線型独立である

## Zebra Notes

Type Number todo 2