Chapter 1

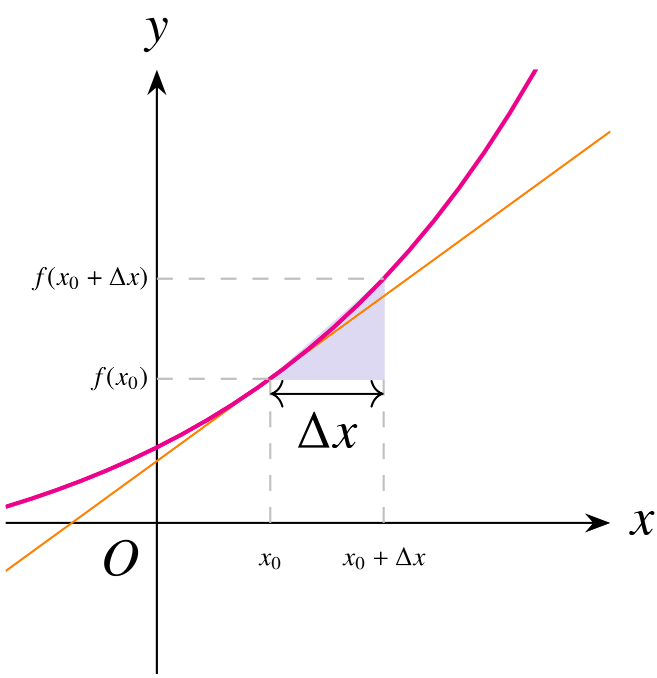
微分と積分

1.1　1 変数関数の微分

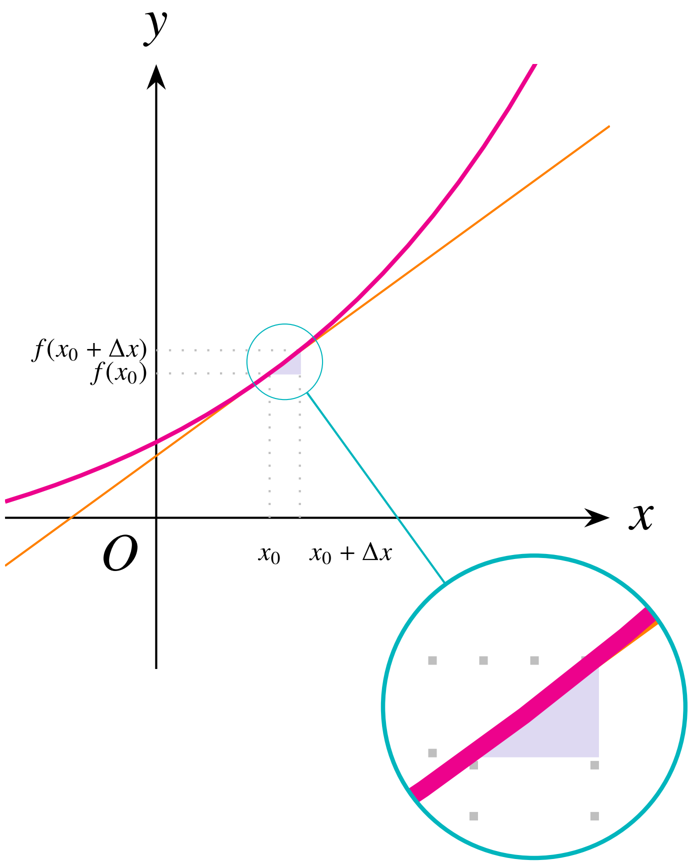
微分とは、複雑な問題も「拡大して見たら簡単に見える（かもしれない）」という発想で、わずかな変化に着目して入力と出力の関係（関数）を調べる手法といえる。

1.1.1　接線：拡大したら直線に近似できる

関数 $y = f(x)$ について、引数の値を $x = x_0$ からわずかに増加させて、$x = x_0 + \Delta x$ にした場合の出力の変化を考える。



このとき、増分の幅 Δx を狭くしていく（Δx の値を小さくしていく）と、$x = x_0$ 付近において、関数 $y = f(x)$ のグラフは直線にほとんど重なるようになる。



このように、関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

$$f(x) \simeq a(x - x_0) + b$$

という直線に近似することができる。

ここで、$f(x_0)$ の値を考えると、

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a(x_0 - x_0) + b \\ &= a \cdot 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$

であるから、実は $b = f(x_0)$ である。

一方、a はこの直線の傾きを表す。

そもそも、傾きとは、x が増加したとき、y がどれだけ急に（速く）増加するかを表す量である。

関数のグラフを見ると、急激に上下する箇所もあれば、なだらかに変化する箇所もある。

つまり、ある点でグラフにぴったりと沿う直線（接線）を見つけたとしても、その傾きは場所によって異なる。

そこで、「傾きは位置 x の関数」とみなして、次のように表現しよう。

$$a = f'(x)$$

これで、先ほどの直線の式を完成させることができる。

関数の各点の接線

関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

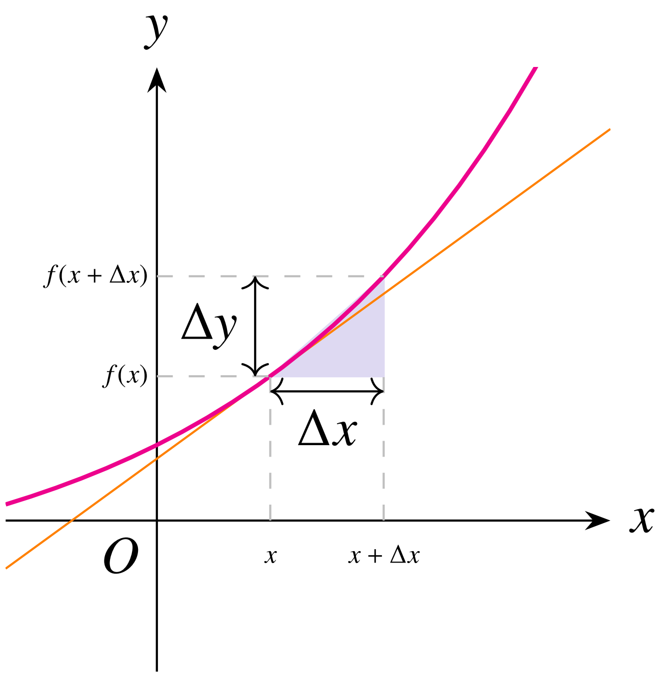
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

という傾き $f'(x)$ の直線に近似できる。

1.1.2 接線の傾きとしての導関数

傾きは位置 x の関数 $f'(x)$ としたが、この関数がどのような関数なのか、結局傾きを計算する方法がわかっていない。

直線の傾きは x と y の増加率の比として定義されているから、まずはそれぞれの増加率を数式で表現しよう。



この図から、y の増加率 Δy は次のように表せることがわかる。

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

この両辺を Δx で割ると、x の増加率 Δx と y の増加率 Δy の比率が表せる。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

図では Δx には幅があるが、この幅を限りなく 0 に近づけると、幅というより点になる。
つまり、$\Delta x \to 0$ とすれば、$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は任意の点 x での接線の傾きとなる。
「任意の点 x での傾き」も x の関数であり、この関数を導関数と呼ぶ。

導関数

関数 $f(x)$ の任意の点 x における接線の傾き（増加の速さ）を表す関数を導関数といい、次のように定義する。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1.1.3 微分とその関係式

微分 関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求める操作を微分という。

関数のグラフから離れて、微分という「計算」を考えるにあたって、先ほどの導関数の定義式よりも都合の良い表現式がある。

$x \to 0$ とした後の Δx を dx と書くことにして、$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ を取り払ってしまおう。

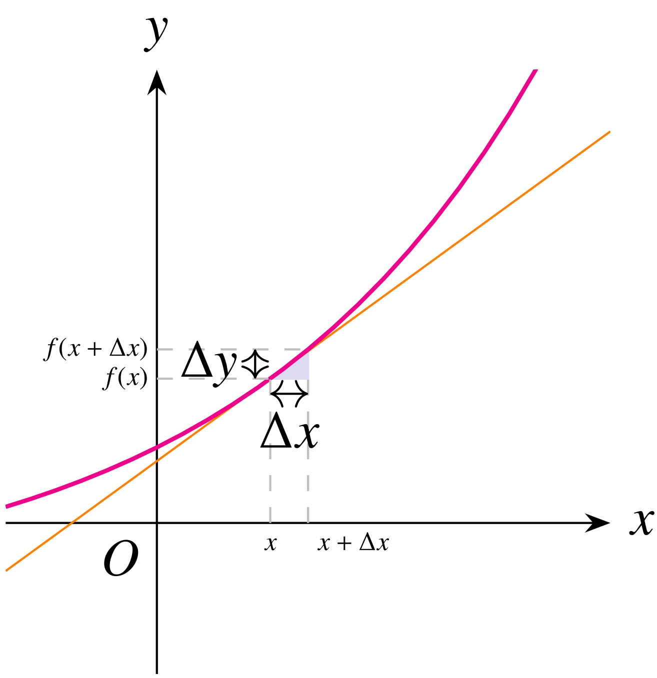
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} && \Big\downarrow \text{両辺} \times dx \\ f'(x)dx &= f(x+dx)-f(x) && \Big\downarrow f(x) \text{ を移項} \\ f'(x)dx + f(x) &= f(x+dx) \end{aligned}$$

微分の関係式

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$$

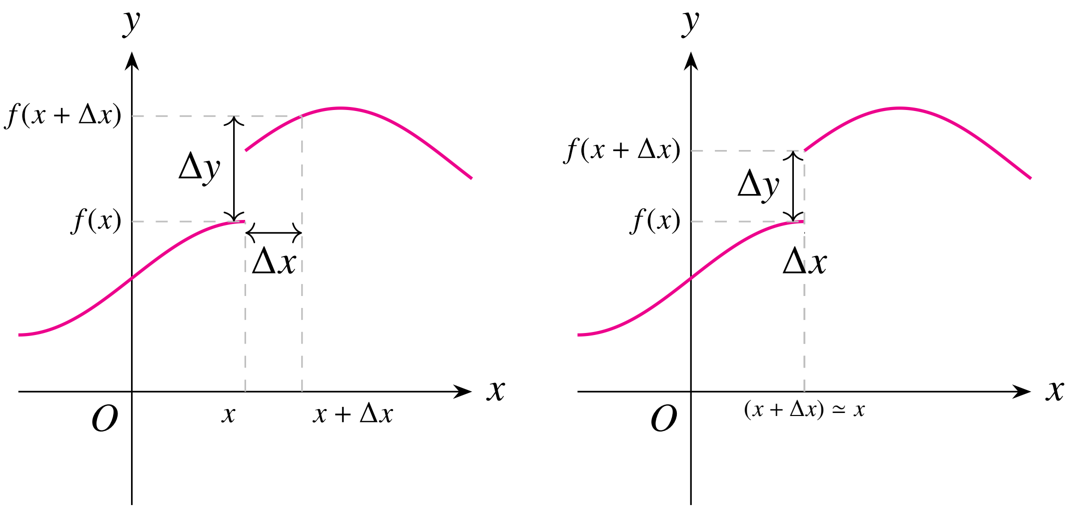
1.1.4 不連続点と微分可能性

点 x において連続な関数であれば、幅 Δx を小さくすれば、その間の変化量 Δy も小さくなるはずである。



しかし、不連続な点について考える場合は、そうはいかない。

下の図を見ると、Δx の幅を小さくしても、Δy は不連続点での関数の値の差の分までしか小さくならない。



このような不連続点においては、どんなに拡大しても、関数のグラフが直線にぴったりと重なることはない。

「拡大すれば直線に近似できる」というのが微分の考え方だが、不連続点ではこの考え方を適用できないのだ。

関数の不連続点においては、微分という計算を考えることがそもそもできない。

ある点での関数のグラフが直線に重なる（微分可能である）ためには、$\Delta x \to 0$ としたときに $\Delta y \to 0$ となる必要がある。

1.1.5 導関数のさまざまな記法

微分を考えるときは、$\Delta x \to 0$ としたときに $\Delta y \to 0$ となる前提のもとで議論する。

$\Delta x \to 0$ とした結果を dx、$\Delta y \to 0$ の結果を dy とすると、ある点 x での接線の傾きは、次のようにも表現できる。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

この接線の傾きが x の関数であることを表現したいときは、次のように書くこともある。

$$\frac{dy}{dx}(x)$$

これも一つの導関数（位置に応じた接線の傾きを表す関数）の表記法である。

この記法は、どの変数で微分しているかがわかりやすいという利点がある。

導関数のライプニッツ記法

次のような記号はいずれも、関数 $y = f(x)$ の導関数を表す。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

特に、$\frac{d}{dx}f(x)$ という記法は、$\frac{d}{dx}$ の部分を微分操作を表す演算子として捉えて、「関数 $f(x)$ に微分という操作を施した」ことを表現しているように見える。

微分演算子

関数を微分するという操作を表現する演算子を微分演算子という。

例えば、次のような記号で表される。

$$\frac{d}{dx}$$

ところで、これまで使ってきた $f'(x)$ という導関数の記法にも、名前がついている。

導関数のニュートン記法

次の記号は、関数 $y = f(x)$ の導関数を表す。

$$f'(x)$$

この記法は、「f という関数から導出された関数が f' である」ことを表現している。

導関数はあくまでも関数 f から派生したものであるから、f という文字はそのまま、加工されたことを表すために $'$ をつけたものと解釈できる。

1.1.6 微分の性質

微分の関係式を使うことで、微分に関する有用な性質を導くことができる。

REVIEW

微分の関係式

$$f(x+dx) = \overset{\text{元の関数}}{\boxed{f(x)}} + \overset{\text{導関数}}{\boxed{f'(x)}}\,dx$$

関数の一次結合の微分

$\alpha f(x) + \beta g(x)$ において、x を dx だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned}
\alpha f(x+dx) + \beta g(x+dx) &= \alpha\{f(x) + f'(x)dx\} + \beta\{g(x) + g'(x)dx\} \\
&= \overset{\text{元の関数}}{\boxed{\alpha f(x) + \beta g(x)}} + \{\overset{\text{導関数}}{\boxed{\alpha f'(x) + \beta g'(x)}}\}dx
\end{aligned}$$

微分の線形性

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

関数の積の微分

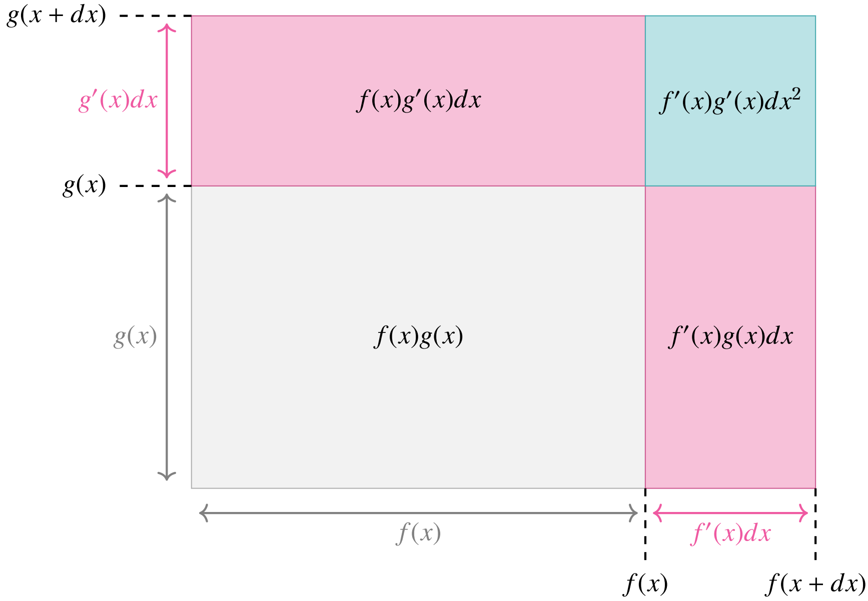
$f(x)g(x)$ において、x を dx だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned}
f(x+dx)g(x+dx) &= \{f(x) + f'(x)dx\}\{g(x) + g'(x)dx\} \\
&= f(x)g(x) + f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx + f'(x)g'(x)dx^2 \\
&= f(x)g(x) + \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx + \overset{\text{2 次以上の微小量}}{\boxed{f'(x)g'(x)dx^2}}
\end{aligned}$$

ここで、dx^2 は、dx より速く 0 に近づくので無視できる。

荒く言ってしまえば、dx でさえ微小量なのだから、dx^2 なんて存在しないも同然だと考えてよい。

このことは、次の図を見るとイメージできる。



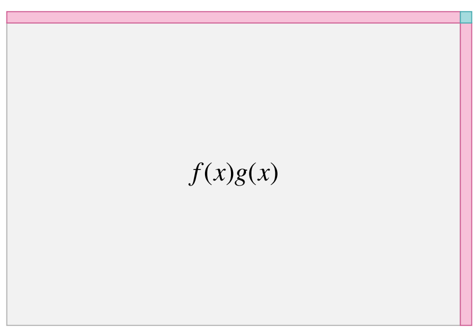
$dx \to 0$ のとき $dy \to 0$ となる場合に微分という計算を定義するのだから、dx を小さくしていくと、dy にあたる $f(x+dx)-f(x)$（これは $f'(x)dx$ と等しい）も小さくなっていく。
同様にして、$g(x+dx)-g(x)$（これは $g'(x)dx$ と等しい）も小さくなっていく。

REVIEW

微分の関係式 $f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$ より、

$$f'(x)dx = f(x+dx) - f(x)$$

dx を小さくした場合を図示すると、



2 次以上の微小量

$f'(x)g'(x)dx^2$ に相当する左上の領域は、ほとんど点になってしまうことがわかる。

このように、dx^2 の項は無視してもよいものとして、先ほどの計算式は次のようになる。

$$f(x+dx)g(x+dx) = \overbrace{f(x)g(x)}^{\text{元の関数}} + \{\overbrace{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}^{\text{導関数}}\}dx$$

微分のライプニッツ則

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

1.1.7 冪関数の微分

具体的な関数の導関数も、微分の関係式をもとに考えることができる。
まずは、基本的な例として、冪関数 $y = x^n$ の微分を考えてみよう。

$y = x^2$ の微分

$y = f(x) = x^2$ において、x を dx だけ微小変化させると、y は dy だけ変化するとする。
すると、微分の関係式は $y + dy = f(x+dx) = (x+dx)^2$ となるが、これを次のように展開して考える。

$$y + dy = (x+dx)(x+dx)$$

右辺の $(x+dx)(x+dx)$ からは、

- x^2 の項が 1 つ
- xdx の項が 2 つ
- dx^2 の項が 1 つ

現れることになる。
数式で表すと、

$$\boxed{y} + dy = \boxed{x^2} + 2xdx + dx^2$$

同じ

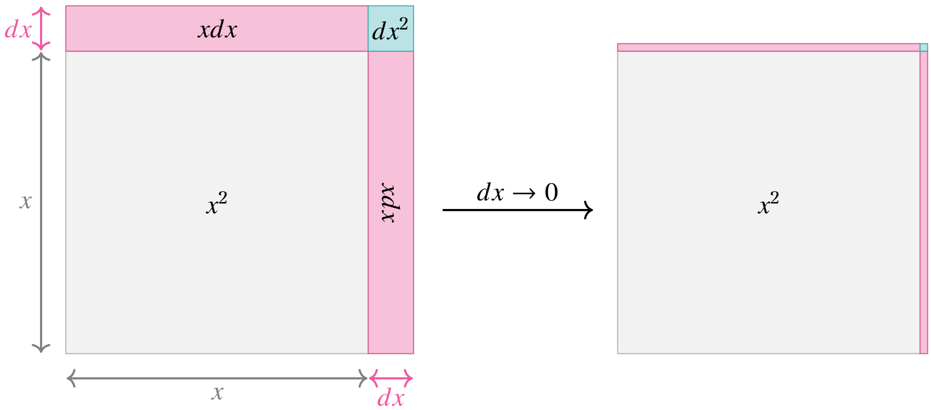
ここで $y = x^2$ なので、左辺の y と右辺の x^2 は相殺される。

$$dy = 2xdx + \boxed{dx^2}$$

高次の微小量

さらに、dx^2 の項は無視することができる。

なぜなら、dx を小さくすると、dx^2 は dx とは比べ物にならないくらい小さくなってしまうからだ。



というわけで、次のような式が得られる。

$$dy = 2xdx$$

よって、$y = x^2$ の導関数は、$y' = 2x$ となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$y = x^3$ の微分

同じように、$y = x^3$ の微分を考えてみよう。

$$y + dy = (x + dx)(x + dx)(x + dx)$$

右辺の $(x + dx)(x + dx)(x + dx)$ からは、

- x^3 の項が 1 つ
- x^2dx の項が 3 つ
- dx^3 の項が 1 つ

現れることになる。

$$\boxed{y} + dy = \boxed{x^3} + 3x^2dx + dx^3$$

同じ

ここで $y = x^3$ なので、左辺の y と右辺の x^3 は相殺される。

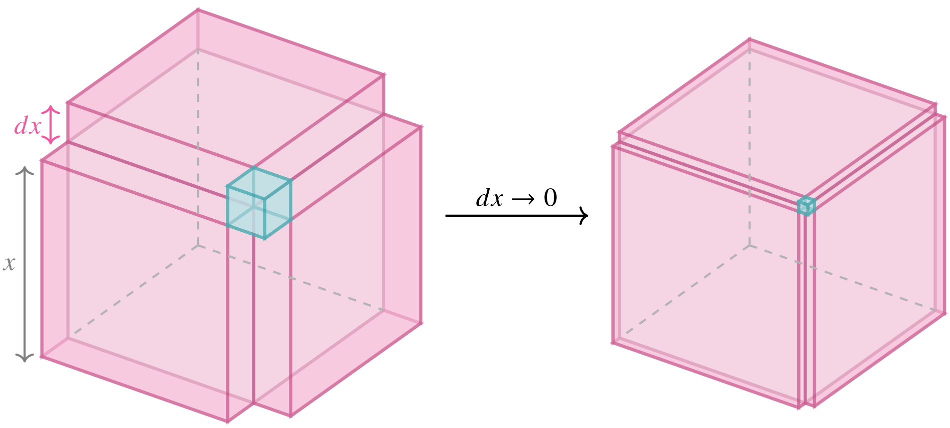
$$dy = 3x^2dx + \overset{\text{高次の微小量}}{\boxed{dx^3}}$$

さらにここでは、dx^3 の項を無視することができる。

次の図を見てみよう。

各辺 dx の立方体は、dx を小さくすると、ほぼ点にしか見えないほど小さくなる。

つまり、各辺 dx の立方体の体積 dx^3 は、考慮する必要がない。



というわけで、$y = x^3$ の導関数は、$y' = 3x^2$ となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$y = x^n$ の微分（n が自然数の場合）

n が自然数だとすると、$y = x^n$ の微分は、$y = x^2$ や $y = x^3$ の場合と同じように考えられる。

$$y + dy = \underbrace{(x + dx)(x + dx)\cdots(x + dx)}_{n\ \text{個}}$$

右辺の $(x + dx)(x + dx)\cdots(x + dx)$ を展開しようすると、次のような 3 種類のかけ算が発生する。

- x どうしのかけ算
- x と dx のかけ算

- dx どうしのかけ算

つまり、右辺からは、

- x^n の項が1つ
- $x^{n-1}dx$ の項が n 個
- dx^n の項が1つ

という項が現れることになる。
そして、x^n は左辺の y と相殺され、dx^n の項は高次の微小量として無視できる。
すると、残るのは次のような式になるだろう。

$$dy = nx^{n-1}dx$$

この式は、$y = \alpha x$ という直線の式によく似ている。
高次の dx の項 dx^n を無視し、1次の dx の項だけ残したのは、微分という計算が微小範囲における直線での近似であるからだ。
あくまでも微小範囲での直線の式であることを表すために、x, y を dx, dy として、$dy = \alpha dx$ という形の式になっていると考えればよい。

自然数の冪を持つ冪関数の導関数

n が自然数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$y = x^n$ の微分（n が整数の場合）

指数法則を使うことで、n が負の整数の場合にも拡張することができる。

まずは、$y = x^{-1}$ の微分を考えてみよう。
指数法則より、$y = x^{-1}$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \\ xy &= 1 \end{aligned} \quad \text{両辺 } \times x$$

微小変化を加えた微分の関係式を作って、次のように展開していく。

$$(x + dx)(y + dy) = 1$$

$$\boxed{xy} + xdy + ydx + \underbrace{\boxed{dydx}}_{}^{\text{高次の微小量}} = \boxed{1}$$

同じ

ここで、微小量の掛け合わせである $dydx$ は無視できるほど小さい。

また、$y = \dfrac{1}{x}$ より、$xy = 1$ なので、左辺の xy と右辺の 1 は相殺される。

すると、残った式は、

$$\begin{aligned} xdy + ydx &= 0 && ydx \text{ を移項} \\ xdy &= -ydx && \text{両辺 } \div dx \\ x\frac{dy}{dx} &= -y && \text{両辺 } \div x \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \end{aligned}$$

y が残ってしまっているので、$y = \dfrac{1}{x}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \\ &= -x^{-2} \end{aligned}$$

これは、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ において、$n = -1$ を代入したものになっている。

n が任意の負の整数の場合も、同様に考えられる。

$y = x^{-n}$ を、$x^n y = 1$ として、

$$\underbrace{(x+dx)(x+dx)\cdots(x+dx)}_{n\ 個}\times(y+dy)=1$$

高次の微小量

$$(x^n+nx^{n-1}dx+\boxed{dx^n})\times(y+dy)=1$$

高次の微小量を無視

$$(x^n+nx^{n-1}dx)\times(y+dy)=1$$

高次の微小量

$$\boxed{x^ny}+x^ndy+nx^{n-1}ydx+\boxed{nx^{n-1}dxdy}=\boxed{1}$$

同じ

相殺＆無視

$$x^ndy+nx^{n-1}ydx=0$$

移項してさらに整理すると、

$$\begin{aligned}
x^ndy&=-nx^{n-1}ydx \\
x^n\frac{dy}{dx}&=-nx^{n-1}y &&\text{両辺 }\div dx \\
\frac{dy}{dx}&=-nx^{n-1}x^{-n}y &&\text{両辺 }\times x^{-n} \\
&=-nx^{n-1}x^{-n}x^{-n} &&y=x^{-n} \\
&=-nx^{-n-1} &&\text{指数法則 } x^mx^n=x^{m+n}
\end{aligned}$$

これもやはり、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$ において、n を $-n$ に置き換えたものになっている。

つまり、自然数（正の整数）だけでなく、負の整数も許容して、次のことがいえる。

整数の冪を持つ冪関数の導関数

n が整数のとき、$y=x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}$$

$y=x^n$ の微分（n が実数の場合）

n が有理数の場合はどうだろうか。実はこれも、指数法則によって拡張することができる。

m と n はどちらも自然数として、$y=x^{\frac{m}{n}}$ の微分を考える。

まず、$y = x^{\frac{m}{n}}$ は、$y^n = x^m$ とまったく同じ式である。

$$
\begin{aligned}
y^n &= x^m \\
y &= x^{\frac{m}{n}} \qquad \text{両辺 } \frac{1}{n} \text{ 乗}
\end{aligned}
$$

というわけで、$y^n = x^m$ を微小変化させて、展開してみよう。

$$
\underbrace{(y + dy)(y + dy)\cdots(y + dy)}_{n\ \text{個}} = \underbrace{(x + dx)(x + dx)\cdots(x + dx)}_{m\ \text{個}}
$$

ここで、n と m は自然数なのだから、自然数冪のときと同じように考えて、次のような式が残ることになる。

$$
ny^{n-1}dy = mx^{m-1}dx
$$

よって、$\dfrac{dy}{dx}$ の式の y を含まない形を目指すと、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} \\
&= \frac{mx^{m-1}}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}} \qquad y = x^{\frac{m}{n}} \\
&= \frac{mx^{m-1}}{nx^{m-\frac{m}{n}}} \\
&= \frac{mx^m x^{-1}}{nx^m x^{-\frac{m}{n}}} \qquad \text{指数法則 } x^{a+b} = x^a x^b \\
&= \frac{mx^{-1}}{nx^{-\frac{m}{n}}} \qquad x^m \text{ で約分} \\
&= \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{-1}}{x^{-\frac{m}{n}}} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{-1-(-\frac{m}{n})} \qquad \text{指数法則 } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{-1+\frac{m}{n}} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}
\end{aligned}
$$

これは、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ において、n を $\dfrac{m}{n}$ に置き換えたものになっている。

つまり、整数だけでなく、有理数に対しても同様の導関数の式が成り立つ。

ここまで来ると、無理数はどうだろうか？という疑問が生まれるが、無理数への拡張は指数法則では対応できない。

無理数に対しては、極限操作によって同様の導関数の式を導くことができ、実数全体に対して同じ導関数の式が成り立つことが示される。

冪関数の導関数

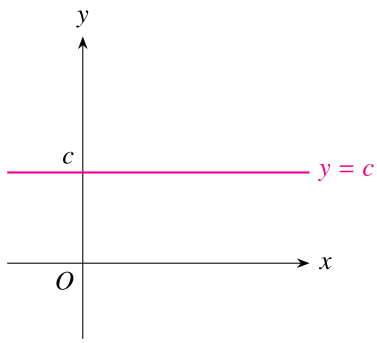
n が実数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

1.1.8 定数関数の微分

常に一定の値 c を返す定数関数 $f(x) = c$ の微分はどうなるだろうか。

関数のグラフを描いて考えてみよう。



定数関数のグラフは、x 軸に対して平行な直線であり、この直線の傾きは見るからに 0 である。

実際、導関数の定義に従って計算することで、定数関数の導関数は 0 になることを確かめられる。

REVIEW

導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

どの点 x においても $f(x)$ が c を返すということは、$f(x + \Delta x)$ も c であるため、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、定数関数 $f(x) = c$ の微分の結果は c に依存せず、常に 0 になる。

定数関数の微分

常に定数 c の値をとる定数関数 $f(x) = c$ は、微分すると 0 になる。

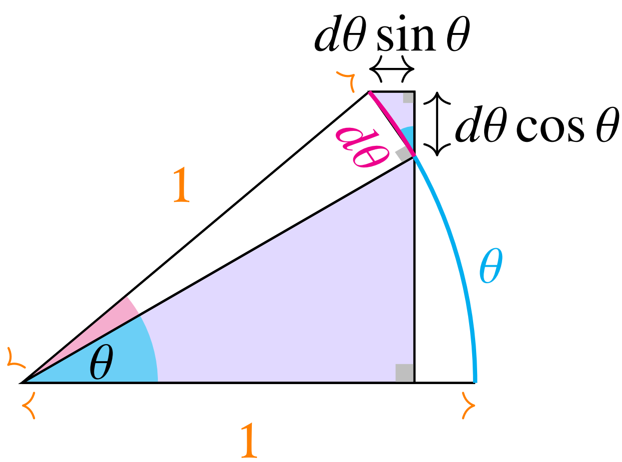
$$\frac{d}{dx}c = 0$$

1.1.9 合成関数の微分

合成関数の微分

$$(g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$$

1.1.10 三角関数の微分



1.1.11 ネイピア数

指数関数を定義した際に、「どんな数も 0 乗したら 1 になる」と定義した。

つまり、指数関数 $y = a^x$ において、$x = 0$ での関数の値は 1 である。

ここでさらに、$x = 0$ でのグラフの傾きも 1 となるような a を探し、その値をネイピア数と呼ぶことにする。

ネイピア数（自然対数の底）

指数関数 $y = a^x$ において、$x = 0$ での接線の傾きが 1 となるような底 a の値をネイピア数と呼び、e と表す。

この定義では、「$x = 0$ では関数の値も傾きも等しく 1 になる」という、$x = 0$ での振る舞いにしか言及していない。

だが、実はネイピア数を底とする指数関数は、「微分しても変わらない（すべての x において、関数の値と傾きが一致する）」という性質を持つ。

1.1.12 ネイピア数を底とする指数関数の微分

指数関数 $y = e^x$ の微分は、導関数の定義から次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
&= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}
\end{aligned}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ は x によらない定数であり、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x}$$

というように、これは $x = 0$ における傾き（導関数に $x = 0$ を代入したもの）を表している。

そもそも、ネイピア数 e の定義は「$x = 0$ での e^x の傾きが 1」というものだったので、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

となり、「e^x は微分しても変わらない」という性質が導かれる。

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

ネイピア数を底とする指数関数の微分

ネイピア数を底とする指数関数は、微分しても変わらない関数である。

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

1.2 1 変数関数の積分

積分とは、「部分を積み重ねる」演算である。

微小部分を調べる微分と、微小部分を積み重ねる積分は、互いに逆の操作になっている。

1.2.1 区分求積法：面積の再定義

長方形の面積は、なぜ「縦 × 横」で求められるのだろうか？

そこには、長方形の横幅分の長さを持つ線分を、長方形の高さに達するまで積み重ねるという発想がある。

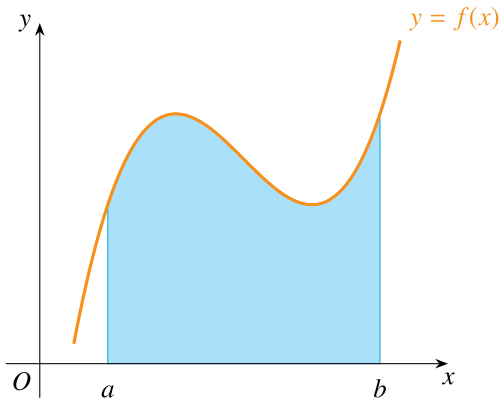
面積の計算を「線を積み重ねる」という発想で捉えると、あらゆる形状の面積を考えることができる。

長方形では、積み重ねる線の長さは一定だが、他の形状では、積み重ねる線の長さが変化する。

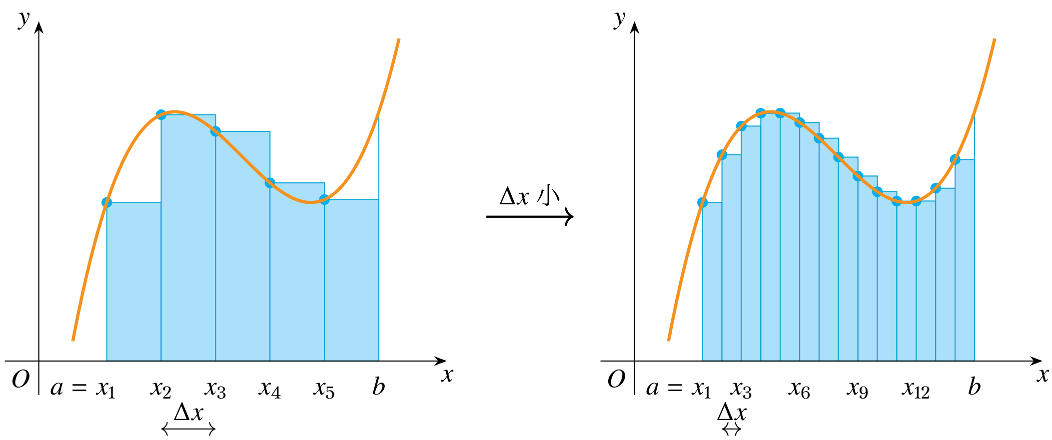
積み重ねるべき線の長さを、関数で表すことができたら…

* * *

関数 $y = f(x)$ が与えられたとき、高さ $f(x)$ の線分を a から b までの区間で積み重ねることで、x 軸とグラフに挟まれた部分の面積を求めることを考える。



この考え方は、面積を求めたい部分を長方形に分割し、長方形の幅を限りなく 0 に近づけるという操作で表現できる。

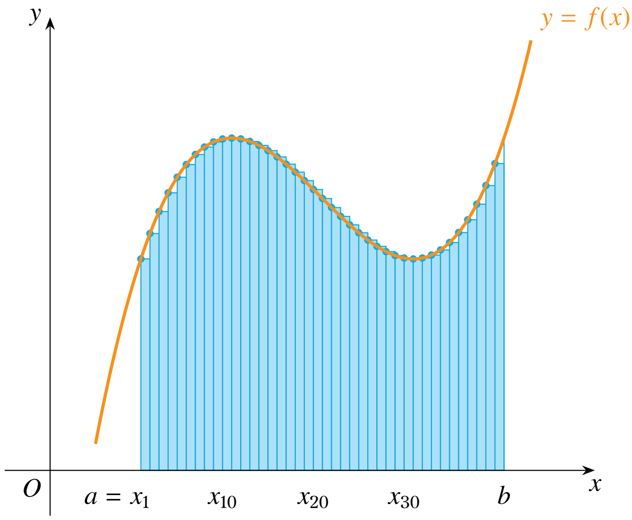


$a \leq x \leq b$ の区間を n 等分して、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする。

分割された各長方形は、幅が Δx で、高さが $f(x)$ であるので、各長方形の面積は次のように表せる。

$$\Delta S = f(x) \cdot \Delta x$$

どんどん Δx を小さくしていくと、細かい長方形分割で、面積を求めたい図形を近似できる。



つまり、求めたい面積は、分割した長方形の面積をすべて足し合わせることで近似できる。

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

$\Delta x \to 0$ の果てでは、幅を持たなくなった長方形は線分とみなせるので、もはや近似ですらなくなるだろう。

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

このような考え方は、区分求積法と呼ばれる。

1.2.2 定積分：面積を求める積分

ここで、区間 $a \leq x \leq b$ における関数 $y = f(x)$ と x 軸の間の面積 S を求める式を、次のように表記する。

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\sum$ は離散的な和を表す記号であり、例えば $\sum_{i=0}^{n}$ であれば、i を 1 ずつ増やして n に達するまで足し合わせることを意味する。
一方、ここで新たに導入した $\int$ は連続的な和を表す記号であり、微小変化を繰り返しながら足し合わせることを意味する。

$\sum$ は間隔を取って足し合わせるのに対し、$\int$ は間隔を限りなく小さくして足し合わせる。

足し合わせる間隔を限りなく小さくするという操作は、極限を取る操作に相当するので、$\sum$ の極限を取ったもの $\lim\sum$ をまとめて $\int$ という記号で表記したと捉えることができる。
さらに、$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}$ とした果ての Δx は、微小変化を意味する dx と書き換えられている。

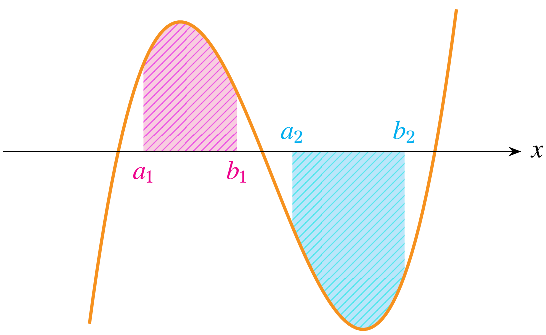
定積分

$a \leq x \leq b$ の区間内における関数 $f(x)$ のグラフと x 軸の間の領域の符号付き面積を求める演算を定積分と定義し、次のように表記する。

$$\int_a^b f(x)dx$$

このとき、$f(x)$ を被積分関数と呼ぶ。

$f(x)$ の値が負になる区間では、定積分の値も負になるため、定積分は符号付き面積を表す。



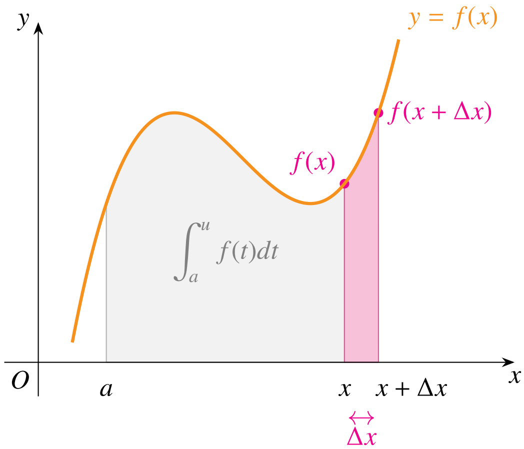
1.2.3 微小範囲の定積分から微分へ

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は、積分区間の取り方（a や b の値）を変えると、当然異なる計算結果になる。

ここで、下端 a は固定し、上端 b を変化させて積分区間を広げていくことを考えよう。
上端が変化することを強調するため、上端は x と表記することにする。
このとき、定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ は、上端 x の関数として捉えられる。

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

> $\int$ の中で使っている変数 t は、積分区間の下端から上端まで動く変数であり、どんな文字を使ってもよい。「t が下端 a から上端 x まで動く」なら違和感なく聞こえるが、「x が下端 a から上端 x まで動く」というのはややこしいので、上端 x と区別するために t を使うことにした。

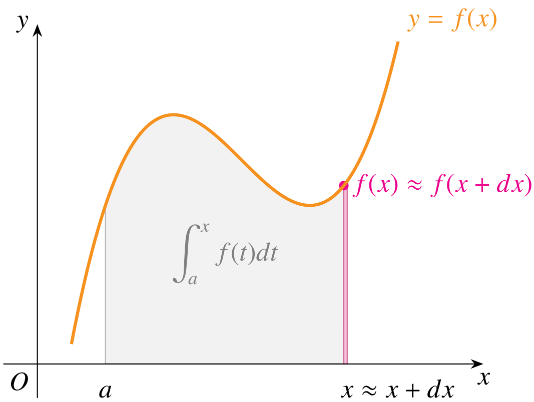


x を Δx だけ増加させたときに増える面積は、

$$S(x+\Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

となるが、ここでさらに Δx を小さくしていくと…

増えた領域は、幅 dx、高さ $f(x)$ の長方形とみなせるので、その面積は $f(x)dx$ となる。



よって、$\Delta x \to 0$ としたときには、

$$S(x+dx) - S(x) = f(x)du$$

という式が成り立ち、これは実は見慣れた微分の関係式と同じ形をしている。

$$\overset{\text{元の関数}}{} \quad \overset{\text{導関数}}{}$$
$$S(x+dx) = \boxed{S(x)} + \boxed{f(x)}\, du$$

この式は、定積分したもの $F(x)$ を x で微分すると、積分前の関数 $f(x)$ に戻るということを示している。

このような「積分したものを微分すると、元の関数に戻る」という事実は、微積分学の基本定理として知られている。

微積分学の基本定理　積分の逆の演算は微分である。

1.2.4　不定積分：原始関数を求める積分

定積分の定義は面積から始まったが、定積分という操作で「微分したら元の関数に戻る」ような関数を作ることもできた。

ここで、「微分したら元の関数に戻る」関数を次のように定義する。

原始関数

微分することで元の関数 $f(x)$ が得られる関数を、$f(x)$ の 原始関数 と呼び、$F(x)$ と表す。

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

「微分したら元の関数に戻る」関数の 1 つが、前節で調べた $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ であったが、実はこのような関数は他にも存在する。

例えば、定数を微分すると 0 になるため、$S(x)$ に任意の定数 C を加えた関数 $S(x) + C$ を作っても、その微分結果は変わらず元の関数になる。

このことは、「原始関数には定数 C 分の不定性がある」などと表現されることがある。

「微分したら元の関数に戻る」関数を求める演算、すなわち「微分の逆演算」として捉えた積分を新たに定義してみよう。

不定積分

関数 $f(x)$ から原始関数 $F(x)$ を求める演算を、$f(x)$ の 不定積分 と呼び、次のように表す。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ここで、C は 積分定数 と呼ばれる任意の定数である。

1.2.5 原始関数による定積分の表現

少し前に、定積分 $\int_a^x f(t)dt$ を上端 x の関数 $S(x)$ とみて、x を微小変化させることで、$S(u)$ が $f(u)$ の原始関数である（$S(u)$ を u で微分したら $f(u)$ になる）ことを確かめた。

REVIEW

区間 Δx での面積の増分を考え、

$$S(x+\Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$\Delta x \to 0$ とすれば、次のような微分の関係式が得られる。

$$S(x+dx) = \underbrace{S(x)}_{\text{元の関数}} + \underbrace{f(x)}_{\text{導関数}} dx$$

さらに前節では、「微分したら元に戻る」原始関数は 1 つだけではなく、任意の定数 C を用いた $F(x)+C$ も、$f(x)$ の原始関数であることを述べた。

そこで、$f(x)$ の任意の原始関数を $F(x)$ とおくことにする。

原始関数は任意の定数 C 分だけ異なるので、$f(x)$ の原始関数の 1 つである $S(x)$ は、$f(x)$ の他の原始関数 $F(x)$ を C 分ずらしたものになるはずである。

$$S(x) = F(x) + C$$

ここで、$S(x) = \int_a^x f(t)dt$ に、$x = a$ を代入すると、下端と上端が一致する領域の面積（定積分）は明らかに 0 なので、

$$S(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

なんとここから、C を求めることができる。

$S(a) = F(a) + C = 0$ より、

$$C = -F(a)$$

この C を用いて、$S(x)$ を次のように表現できる。

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

$x = b$ を代入することで、積分区間の上端を b に戻した定積分を考えると、

$$S(b) = F(b) - F(a)$$
$$S(b) = \int_a^b f(x)dx$$

という、$S(b)$ について 2 通りの表現が得られる。

> 上端を表す x という変数が現れなくなったので、$\int$ の中で使っていた変数 t はしれっと x に戻している。$\int$ の中の x は「下端 a から上端 b まで動く」という意味しか持っていないので、何の文字を使っても意味は変わらない。

得られた 2 通りの表現式を組み合わせることで、次のような関係が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

原始関数による定積分の表現

関数 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であれば、定積分は次のように計算できる。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ここで現れる $F(b) - F(a)$ という量は、次の記号で表される。

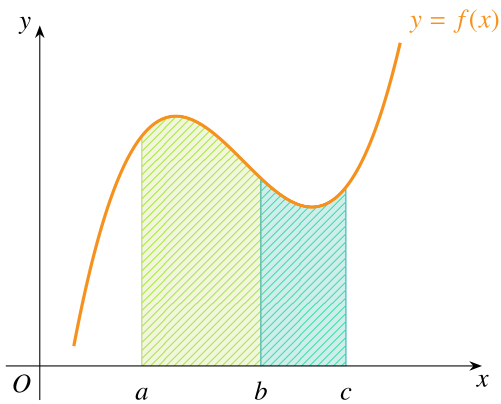
$$\Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

1.2.6 定積分の性質

面積としての理解だけではうまく想像できない性質も、原始関数との関係を使うことで数式で確かめられるようになる。

積分区間の結合

2 つの定積分があり、それらの積分区間が連続していれば、1 つの定積分としてまとめて計算できる。



積分区間が連続する定積分の和

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

面積として考えれば明らかな性質だが、原始関数を使って証明することもできる。

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\
&= F(c) - F(a) \\
&= \int_a^c f(x)dx
\end{aligned}
$$

として、式が成立することがわかる。

積分区間の反転

積分区間の上限と下限を入れ替わると、符号が変わる。

定積分の積分区間の反転

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

これは、積分区間が連続する定積分の和の性質における、$c = a$ の場合の式である。

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx \\
&= 0 \\
\int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx
\end{aligned}
$$

定積分の線形性

微分や $\sum$ 記号などと同様に、定積分も線形性を持つ。

定積分の線形性

$$\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}\, dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

この性質は、微分の線形性から導かれる。

$f(x)$ の原始関数を $F(x)$、$g(x)$ の原始関数を $G(x)$ とすると、微分の線形性より、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left\{\alpha F(x)+\beta G(x)\right\} &= \alpha\frac{d}{dx}F(x)+\beta\frac{d}{dx}G(x) \\
&= \alpha f(x)+\beta g(x)
\end{aligned}
$$

となるから、$\alpha f(x)+\beta g(x)$ の原始関数は $\alpha F(x)+\beta G(x)$ である。

よって、定積分を原始関数を使って書き表すと、

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \left\{\alpha f(x)+\beta g(x)\right\} dx &= \alpha F(b)-\alpha F(a)+\beta G(b)-\beta G(a) \\
&= \alpha\left\{F(b)-F(a)\right\}+\beta\left\{G(b)-G(a)\right\} \\
&= \alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx
\end{aligned}
$$

となり、原始関数を使うことで、微分の線形性から定積分の線形性につながることがわかる。