多変数微積分の整理帳

tomixy

2025 年 7 月 15 日

目次

第 **1** 章　多変数関数 **2**

複数の変数 2

二変数関数のグラフ 2

曲面と山の形状 3

第 **2** 章　偏微分 **5**

一つずつ考えるアプローチ 5

ある変数に関する偏微分係数 5

ある変数に関する偏導関数 6

偏微分の記号 6

第 1 章

多変数関数

複数の変数

ものごとは通常、単一の要因だけではなく、複数の要因が絡みあっている。
さまざまな要因が関係する現象を数量的に分析するためには、1 つの変数だけでなく、複数の変数を含む関数を使う。

このようにいくつもの変数があって、それによって値が定まるような関数を**多変数関数**という。

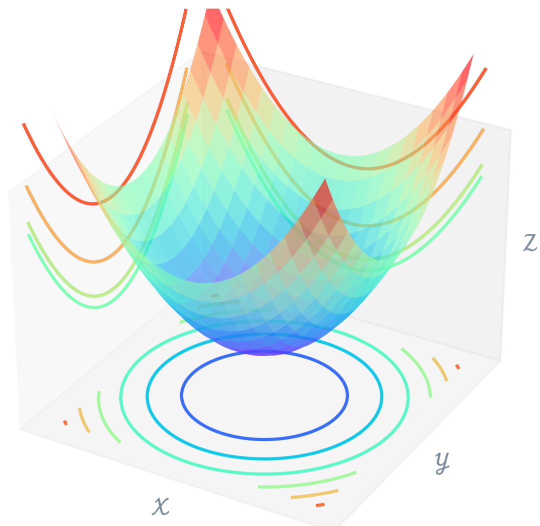
二変数関数のグラフ

2 変数関数 $f(x, y)$ が与えられたとき、変数 x, y を自由に動かして点 $(x, y, f(x, y))$ を xyz 空間でプロットして得られる曲面を $z = f(x, y)$ の**グラフ**という。

$f(x, y)$ が地点 (x, y) の標高の場合は、この $z = f(x, y)$ のグラフが表す曲面はこの野山の地表にほかならない。

- 2 変数関数 $f(x, y)$ をグラフで可視化すると、野山の形状になる
- 野山の形状から標高を考えると、2 変数関数 $f(x, y)$ になる

$z = x^2 + y^2$ のグラフ



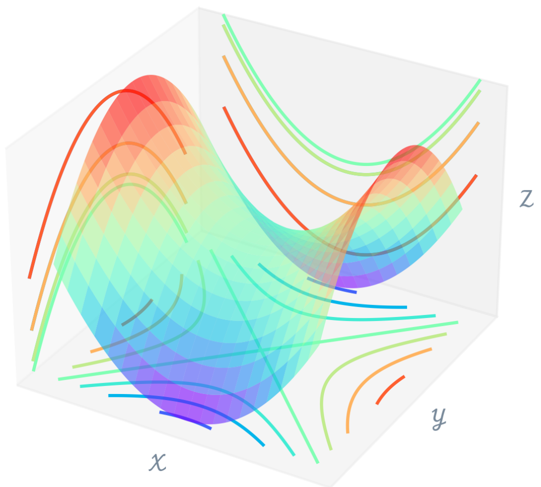
- xy 平面（$z = 0$） 円 $x^2 + y^2 = 0$
- xz 平面（$y = 0$） 下に凸の放物線 $z = x^2$
- yz 平面（$x = 0$） 下に凸の放物線 $z = y^2$

「曲面を見る」堅実な方法は、**断面図（切り口）**を順に見ることである。

1. $y = 0$ とすると、断面が xz 平面内の放物線 $z = x^2$ になる
2. $y = 1$ とすると、$z = x^2 + 1$ となり、これは $z = x^2$ のグラフを 1 だけ高くした放物線
3. $y = 2$ とすると、$z = x^2 + 4$ となり、放物線がさらに高くなる

こうして、$y =$ **定数** とした断面図をつなぎ合わせることで曲面の姿をつかむことができる。

$z = x^2 - y^2$ のグラフ

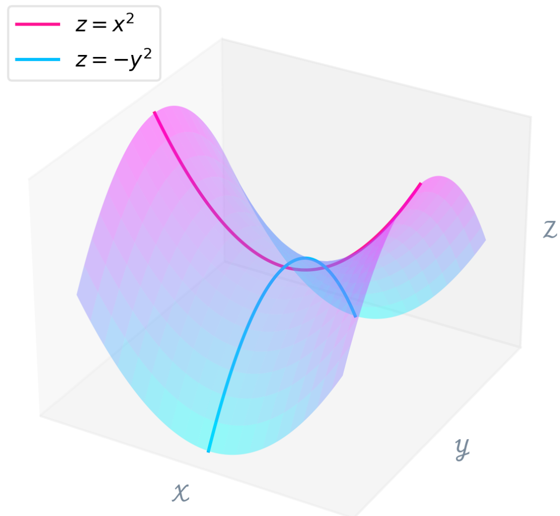


- xy 平面（$z = 0$） 双曲線 $x^2 - y^2 = 0$
- xz 平面（$y = 0$） 下に凸の放物線 $z = x^2$
- yz 平面（$x = 0$） 上に凸の放物線 $z = -y^2$

下に凸の放物線（吊り下げたひも）の各点に、上に凸の放物線（針金）を順に貼り付けていくと、$z = x^2 - y^2$ のグラフが得られる。

曲面と山の形状

曲面 $z = x^2 - y^2$ の局所的な形状は、身近なところにも現れている。



上の図では、$y = 0$ としたときのグラフ $z = x^2$ を赤線で、$x = 0$ としたときのグラフ $z = -y^2$ を青線で示した。

これらのグラフは、原点 $(0, 0, 0)$ で交わっている。

この交点は、

- 山の峠に見立てて峠点
- $z = x^2$ の凹みを馬の背に見立てて鞍点（乗馬の際に鞍を置く場所）

などと呼ばれる。

山が連なっているような山脈を越えて向こう側に行きたいとすると、できるだけ登りが少ない経路を選ぶだろう。

このような往来によって踏み固められてできた道が山脈越えの道（グラフでは $x = 0$ の場合

の放物線 $z = -y^2$）である。

旅人が山脈越えの道を登っていくと、峠はその道沿いではいちばん高い地点になっている。
峠で左右を見ると、山（グラフでは $x =$ 定数の場合の放物線）が続いている。

いま登ってきた山脈越えの道と垂直に交わっている尾根道（グラフでは $y = 0$ の場合の放物線 $z = x^2$）があるかもしれない。
尾根道沿いに歩けば、峠はその前後ではいちばん低い場所になっている。

第 2 章

偏微分

一つずつ考えるアプローチ

複数の要因が絡む状況を判断する際には、すべての要因を同時に考えるのではなく、まず 1 つの要因に着目し、次に視点を変えて別の要因を考え、そして最後に、個別に考察した要因を統合して考えることがある。

偏微分のアイデアも、そのアプローチに似ている。

1 つの変数を変化させるときは、
他の変数は一定にしておく

多変数関数の偏微分では、1 つの変数に注目し、それ以外の変数をいったん固定した状態で微分する。

このように 1 つの変数に偏った微分ということで、偏微分と名付けられている。偏微分の英語訳は `partial derivative` であり、「部分的な」微分という意味である。

ある変数に関する偏微分係数

2 変数関数 $z = f(x, y)$ において、x 方向の傾きを考えてみる。
このとき、y は定数として固定する。

$$y = a_2$$

この平面 $y = a_2$ は、x 軸と z 軸に平行な平面である。
この平面で関数のグラフを切り、その切り口に現れた関数のグラフを微分することを考える。

切り口として現れるグラフは、$y = a_2$ と $z = f(x, y)$ の交線で、

$$\begin{cases} x = a_1 \\ z = f(a_1, y) \end{cases}$$

という連立方程式を解いて得られる。

この 2 式は、代入により次のような形にまとめられ、これが切り口を表している。

$$z = f(x, a_2)$$

切り口となる関数 $z = f(x, a_2)$ の $x = a_1$

での接線の傾きが、求めたい x 方向の傾きである。

この関数は x の 1 変数関数にすぎないので、x に関して普通に微分すればよい。

h を微小量とし、$x = a_1$ から少しだけ移動した点を $x = a_1 + h$ とすると、次のように接線の傾きが計算できる。

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

この式を、関数 $f(x, y)$ の (a_1, a_2) における x に関する偏微分係数という。

偏微分の場合は、通常の微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ の代わりに、$\dfrac{\partial}{\partial x}$ という記号を用いる。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

ある変数に関する偏導関数

偏微分係数は、(a_1, a_2) という値を 1 つ決めたときに、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$ という値が 1 つ決まるという式である。

2 つの値を入力としているので、見方を変えればこれも 2 変数関数である。

そこで、入力 (a_1, a_2) を変数 (x, y) に置き換えて、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

という 2 変数関数を新たに考える。これを x に関する偏導関数という。

偏微分の記号

偏導関数の記号にはさまざまな表記法があるが、どれも同じものである。

$\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$

微小量の変化の比

$f_x(x, y)$

微分の省略形 $f'(x)$ の代わり（何に関する偏微分かを下に添えた）

$\partial_x f(x, y)$

偏微分するという操作を関数に施す

$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$

関数の変数を省略した形（止めている他の変数を下に添えた）