不変部分空間

V 上の線形変換 f について、「変換 f で写しても変わらない」という性質を考える

ref: 行列と行列式の基礎 p114
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p238〜239

f 不変　f を線形空間 V の線形変換とする
V の部分空間 W に対して、

$$f(W) \subset W$$

すなわち、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in W$$

が成り立つとき、W は f 不変な部分空間であるという

また、$V = \mathbb{R}^n$ で、f が正方行列 A によって定まっているときは、f 不変な部分空間 W を A 不変な部分空間ともいう

写像の制限と不変部分空間

ref: 行列と行列式の基礎 p114
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p240〜242、p363〜364

不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現　V を n 次元線形空間とし、線形変換 $f: V \to V$ を考える
このとき、V のある部分空間 W が f 不変ならば、V の適当な基底について、f は

$$\begin{pmatrix} * & * \\ O & * \end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} * & O \\ * & * \end{pmatrix}$$

という形の行列で表すことができる

証明

$\dim(W) = r$ とし、W の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を延長して V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をとる

このとき、表現行列の構成法より、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

とおける

ここで、W は f 不変であることは、$1 \leq j \leq r$ の範囲では $f(\boldsymbol{v}_j) \in W$ であることを意味する

W の元 $f(\boldsymbol{v}_j)$ は、W の基底だけを用いて表現できるので、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

すなわち、もともとの $f(\boldsymbol{v}_j)$ の式において、

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \quad (1 \leq j \leq r)$$

となっている

$\boldsymbol{v}_i$ は基底なので線型独立であり、したがって、

$$a_{ij} = 0 \quad (1 \leq j \leq r,\ r+1 \leq i \leq n)$$

が成り立つ

この条件より、f の表現行列 (a_{ij}) は、

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad r \quad & \quad n-r \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \quad * \quad & \quad * \quad \\ \hline O & * \end{array}\right) & \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} \end{array}$$

というような形になる

また、V の基底として、順序を変えた $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を取ることもできる

この場合は、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

とおくと、$r+1 \leq j \leq n$ の範囲（V の基底の後半部分）で

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

となるので、すなわち、

$$a_{ij} = 0 \quad (r+1 \leq j \leq n,\ 1 \leq i \leq r)$$

よって、f の表現行列 (a_{ij}) は、

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{n-r}{\longleftrightarrow} & \overset{r}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} * & O \\ \hline * & * \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow n-r \\ \updownarrow r \end{array} \end{array}$$

という形になる

以上より、2 通りの f の表現行列の形が得られた ■

V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ ととった場合、$f(\boldsymbol{v}_j) \in W$ は

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

だけで表現できた

この $1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq r$ の部分は、f の表現行列

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{n-r}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{array} \end{array}$$

の、A_{11} の部分に対応する

つまり、この行列 A_{11} は、$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ で張られる V の部分空間 W から W への線形写像 f' を、基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ について表現する行列になっている

f' は、f の定義域を W に制限したものになっているが、W の元に限定して考える限り、実質的には f と区別がないものである
この意味で、写像 f' を、写像 f の W への制限と呼び、$f|_W$ と表記する

写像の制限　写像 $f\colon X \to Y$ において、X のある部分集合 S が与えられたとき、定義域を S に限定したものを f の S に対する制限といい、

$$f|_S\colon S \to Y$$

と表す

同様に、V の基底を $\boldsymbol{v}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ ととった場合、$f(\boldsymbol{v}_j) \in W$ は

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

だけで表現できた
この $r+1 \leq i \leq n,\ r+1 \leq j \leq n$ の部分は、f の表現行列

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{n-r}{\longleftrightarrow} & \overset{r}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & O \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow n-r \\ \updownarrow r \end{array} \end{array}$$

の、A_{22} の部分に対応する

つまり、この場合は、A_{22} が変換 f の W への制限 $f|_W$ を表現する行列になっている

不変部分空間への直和分解

不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現の証明では、W の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ を延長したものを V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ とした

ref: 行列と行列式の基礎 p114

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p242〜245

このとき、

$$W' = \langle \boldsymbol{v}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

とおくと、V の基底が W, W' の基底を合わせたものになっているため、直和の基底に関する定理より、

$$V = W \oplus W'$$

となる

ここで、もし W' も f 不変であれば、右上の A_{12} も零行列になって、表現行列は

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad r & \quad n-r \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & O \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \end{array}$$

というブロック対角型になる

⚓ 不変部分空間への直和分解　線形空間 V と、V 上の線形変換 f に対し、V が f 不変な部分空間 W_1 と W_2 の直和に分解することができれば、すなわち、

i. $V = W_1 \oplus W_2$

ii. W_1, W_2 は f 不変な V の部分空間

となる W_1, W_2 が存在すれば、適当な V の基底について、f は次のような形の行列で表せる

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \dim(W_1) & \dim(W_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} * & O \\ O & * \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \dim(W_1) \\ \dim(W_2) \end{array} \end{array}$$

または

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \dim(W_2) & \dim(W_1) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} * & O \\ O & * \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \dim(W_2) \\ \dim(W_1) \end{array} \end{array}$$

証明

W_1 の基底、W_2 の基底をこの順に並べるか、その反対の順に並べて、V の基底を構成することで、不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現の証明と同様に示される ■

さらに、V をより細かい部分空間の直和に分解できる場合には、次のようになる

複数の不変部分空間への直和分解　線形空間 V と、V 上の線形変換 f について、

i. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$
ii. 各部分空間 W_i は f 不変な V の部分空間

であるならば、適当な V の基底に対し、f は次のような形の行列

で表せる

$$
\begin{pmatrix}
\boxed{*} & & & O \\
& \boxed{*} & & \\
& & \ddots & \\
O & & & \boxed{*}
\end{pmatrix}
$$

対角線上の各正方形の大きさは、各部分空間 W_i の次元に対応する

そこで、以上の議論を究極にまで押し進めると、次の定理になる

⚓ **一次元部分空間への直和分解**　n 次元部分空間 V が、n 個の f 不変の 1 次元部分空間の直和に分解できるとき、すなわち、

i. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$
ii. $W_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$ は f 不変な 1 次元部分空間

となるときは、f は次のような対角行列で表せる

$$
\begin{pmatrix}
* & & & O \\
& * & & \\
& & \ddots & \\
O & & & *
\end{pmatrix}
$$

一次元不変部分空間

W を一次元部分空間とすると、これは基底 $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ で張られる空間であるので、

$$W = \langle \boldsymbol{w} \rangle = \{\alpha \boldsymbol{w} \mid \alpha \in K\}$$

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p246〜247

この一次元部分空間 W が f 不変であるとは、定義より、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in W$$

であり、これで W の元は $\alpha\boldsymbol{w}$ とも $f(\boldsymbol{w})$ とも表せることになるので、

$$f(\boldsymbol{w}) = \alpha\boldsymbol{w} \quad (\alpha \in K)$$

がいえる

以上をふまえて、一次元部分空間への直和分解という定理をより具体的に整理してみる

$\dim(V) = n$ とすると、V 上の線形変換 f の表現行列 A を構成する式は、

$$(f(\boldsymbol{w}_1), \ldots, f(\boldsymbol{w}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)A$$

となるが、ここで、

$$(f(\boldsymbol{w}_1), \ldots, f(\boldsymbol{w}_n)) = (\alpha_1\boldsymbol{w}_1, \ldots, \alpha_n\boldsymbol{w}_n)$$

であるので、

$$(f(\boldsymbol{w}_1), \ldots, f(\boldsymbol{w}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられる

したがって、f は基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ について、次の対角行列で表される

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ここで現れたスカラー α_i やベクトル $\boldsymbol{w}_i$ と、線形写像 f との関係が、固有値・固有ベクトルと行列の対角化という話題に発展する