第 1 章

双対空間

内積から線形汎関数へ

横ベクトル（$1 \times n$ 型行列）を縦ベクトル（$n \times 1$ 型行列）にかけると、1×1 のスカラー値が得られる。

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

上の式は、数ベクトル空間の内積そのものである。

$$\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{v} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

さて、「観測装置としての内積」の章で述べたように、

内積 $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle$ は、観測装置 $\langle \boldsymbol{a} |$ によるベクトル $| \boldsymbol{v} \rangle$ の測定結果

という捉え方もできる。

ここで、観測装置である横ベクトル $\langle \boldsymbol{a} |$ を、縦ベクトル $| \boldsymbol{v} \rangle$ から内積を返す関数 $\phi_{\boldsymbol{a}}$ とみることにしよう。

$$\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

$\phi_{\boldsymbol{a}}$ は、縦ベクトル $\boldsymbol{v}$ を入力とし、スカラー値 $\langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle$ を返す、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への写像である。

さらに、内積の双線形性から、$\phi_{\boldsymbol{a}}$ は線形写像であることがわかる。

$$\begin{aligned} \phi_{\boldsymbol{a}}(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) &= (\boldsymbol{a}, c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) \\ &= c_1(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_1) + c_2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}_2) \\ &= c_1\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}_1) + c_2\phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

この関数 $\phi_{\boldsymbol{a}}$ は、線形汎関数と呼ばれる写像の一例である。

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数　$\mathbb{R}^n$ 上の関数 $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が線形写像であるとき、ϕ を $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数あるいは線形形式という。

線形汎関数のベクトル表示

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数は、すべて内積から定めることができる。

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の内積による表現　$\mathbb{R}^n$ 上の任意の線形汎関数 $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し、ある $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ がただ一つ存在して、次を満たす。

$$\psi = \phi_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} | \cdot \rangle$$

証明

$\mathbb{R}^n$ の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ とする。

このとき、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ は、次のように表される。

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

これに ψ を作用させると、線形汎関数 ψ は線形性をもつので、

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{v}) &= \psi(v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= v_1\psi(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + v_n\psi(\boldsymbol{e}_n) \\ &= \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1 \\ \vdots \\ v_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで、

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$$

とおけば、次が成り立つ。

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{v} \rangle = \phi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{v})$$

$\boldsymbol{v}$ は任意のベクトルなので、

$$\psi = \phi_{\boldsymbol{a}} = \langle \boldsymbol{a} | \cdot \rangle$$

となるような $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ の存在が示された。

さらに、次式を振り返ると、ψ が決まれば $\boldsymbol{a}$ が一意に定まることがわかる。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$$

よって、ψ に対して $\boldsymbol{a}$ はただ一つ存在する。 ■

上の定理の証明で現れた次の式は、2 通りの読み方ができる。

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}\psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix}$$

ψ が決まれば、$\psi(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \psi(\boldsymbol{e}_n)$ の値が決まるので、$\boldsymbol{a}$ がただ一つ定まる。

逆に、基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ に対する ψ の値が決まれば ψ の形が決まるので、上の式のように $\boldsymbol{a}$ を定めれば、$\boldsymbol{a}$ に対応して ψ の形がただ一つに定まることになる。

まとめると、

- すべてのベクトル $\boldsymbol{a}$ は線形汎関数 ψ をひとつ定める
- すべての線形汎関数 ψ はベクトル $\boldsymbol{a}$ をひとつ定める

$\boldsymbol{a}$ から ψ への対応は一対一であり、ψ から $\boldsymbol{a}$ への対応も一対一である。

すなわち、$\mathbb{R}^n$ のベクトルと $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の間には、全単射が存在する。

全単射な対応は、本来同じものに「異なる表現を与えている」と捉えることができる。

縦ベクトルと横ベクトルによる線形汎関数の表現

次の式も、先ほどの定理の証明で現れたものである。

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

この式もまた、2 通りの読み方ができる。

$\boldsymbol{a}$ を横ベクトルとみるなら、

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{v}$$

この見方では、線形汎関数は横ベクトル $\boldsymbol{a}$ との「行列としての積」である。

線形汎関数を行列の積として定義すれば、「横」ベクトル $\boldsymbol{a}$ が線形汎関数の表現行列に相当すると捉えられる。

一方、$\boldsymbol{a}$ を縦ベクトルとみるなら、

$$\psi(\boldsymbol{v}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & \psi(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{a}^\top} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$$

この見方では、線形汎関数は縦ベクトル $\boldsymbol{a}$ との「内積」である。

線形汎関数を内積として定義すれば、「縦」ベクトル $\boldsymbol{a}$ が線形汎関数の表現行列に相当すると捉えられる。

このように、線形汎関数という同じものに対して、横ベクトルと縦ベクトルは「異なる表現を与えている」とも解釈できる。

横ベクトルと縦ベクトルが転置という関係で結ばれていることで、この 2 通りの見方が可能になる。

線形汎関数の空間

内積の双線形性は、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、

$$(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}) = c_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{v}) + c_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v})$$

が成り立つというものだった。

これは、$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数が満たす関係式と読み替えることができる。

$$\phi_{c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2}(\boldsymbol{v}) = c_1\phi_{\boldsymbol{a}_1}(\boldsymbol{v}) + c_2\phi_{\boldsymbol{a}_2}(\boldsymbol{v})$$

この関係式は、$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の集合に、線形空間としての構造をもたらす。

$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の集合を $(\mathbb{R}^n)^*$ と書くことにしよう。
この集合 $(\mathbb{R}^n)^*$ に和とスカラー倍の演算を導入することで、$(\mathbb{R}^n)^*$ を線形空間とみなすことができる。

線形汎関数の空間の基底

$\mathbb{R}^n$ の基底を $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ とするとき、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ は、

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{u}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

という線形結合で表すことができる。
ここで、$v_1, \ldots, v_n$ は、基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の成分あるいは座標と呼ばれる。

このうち第 j 座標 v_j を取得する関数を ϕ_j と定めよう。

$$\phi_j(\boldsymbol{v}) = v_j$$

このような関数を座標関数と呼ぶことにする。

また、ϕ_j は線形であるため、$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数である。

補足：ϕ_j の線形性

任意の $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$ が基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関して次のように表せるとする。

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{n} w_j \boldsymbol{u}_j$$

このとき、ϕ_j は次のように定義される。

$$\phi_j(\boldsymbol{v}) = v_j, \quad \phi_j(\boldsymbol{w}) = w_j$$

ベクトルの和を考えると、

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{n} (v_i + w_i) \boldsymbol{u}_i$$

より、第 j 座標は $v_j + w_j$ となるので、

$$\phi_j(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = v_j + w_j = \phi_j(\boldsymbol{v}) + \phi_j(\boldsymbol{w})$$

ベクトルのスカラー倍を考えると、

$$\alpha \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha v_i) \boldsymbol{u}_i$$

より、第 j 座標は αv_j となるので、

$$\phi_j(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha v_j = \alpha \phi_j(\boldsymbol{v})$$

以上より、$\phi_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は線形写像であることが示された。

ϕ_j を用いると、$\boldsymbol{v}$ を表す線形結合は次のように書ける。

$$\boldsymbol{v} = \phi_1(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \phi_n(\boldsymbol{v}) \boldsymbol{u}_n$$

ここで、たとえば $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}_1$ に置き換えた式を考える。

$$\boldsymbol{u}_1 = \phi_1(\boldsymbol{u}_1) \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \phi_n(\boldsymbol{u}_1) \boldsymbol{u}_n$$

この等式が成り立つには、

- $\phi_1(\boldsymbol{u}_1) = 1$
- $\phi_2(\boldsymbol{u}_1) = 0, \dots, \phi_n(\boldsymbol{u}_1) = 0$

でなければならない。

右辺の $\boldsymbol{u}_1$ だけが残り、他の項が消えることで、$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1$ という等式が成り立つ。

同様に考えると、$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{u}_i$ に置き換えた式

$$\boldsymbol{u}_i = \phi_1(\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \phi_n(\boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_n$$

が成り立つには、$\boldsymbol{u}_i$ だけが残り、他の項が消えなければならないので、

$$\phi_j(\boldsymbol{u}_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

と定める必要がある。

この式により、$\mathbb{R}^n$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n$ を選べば、それらに対応する線形汎関数 $\phi_1, \dots, \phi_n$ が定まることがわかる。

そしてこのとき、$\phi_1, \dots, \phi_n$ は $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底となっている。

$\mathbb{R}^n$ における基底に対応する線形汎関数の構成　$\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とするとき、$\phi_j \in (\mathbb{R}^n)^*$ を次のように定める。

$$\phi_j(\boldsymbol{u}_i) = \delta_{ij}$$

このような $\phi_1, \dots, \phi_n$ は $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底をなす。

証明

$\phi_1, \dots, \phi_n$ が線型独立であること

次のような $\phi_1, \dots, \phi_n$ の線形関係式を考える。

$$c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n = 0$$

このとき、任意の j に対して、

$$\begin{aligned}(c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n)(\boldsymbol{u}_j) &= c_1\phi_1(\boldsymbol{u}_j) + \cdots + c_n\phi_n(\boldsymbol{u}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i\delta_{ij} \\ &= c_j = 0\end{aligned}$$

が成り立たなければならない。

これは $\phi_1, \ldots, \phi_n$ が線型独立であることを示している。 ■

$\phi_1, \ldots, \phi_n$ が $(\mathbb{R}^n)^*$ を張ること

$\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$ を任意にとると、$\boldsymbol{u}_j$ に対する値 $\alpha_j = \psi(\boldsymbol{u}_j)$ が定まる。

このとき、α_j を係数とする $\phi_1, \ldots, \phi_n$ の線形結合を作ると、

$$\begin{aligned}(\alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_n\phi_n)(\boldsymbol{u}_j) &= \alpha_1\phi_1(\boldsymbol{u}_j) + \cdots + \alpha_n\phi_n(\boldsymbol{u}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\phi_i(\boldsymbol{u}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{ij} = \alpha_j \\ &= \psi(\boldsymbol{u}_j)\end{aligned}$$

ϕ_j, ψ はともに $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像であり、ϕ_j の線形結合もまた $(\mathbb{R}^n)^*$ の元なので $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像である。

よって、$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に対して同じ値をとることから、

$$\psi = \alpha_1\phi_1 + \cdots + \alpha_n\phi_n$$

がいえる。

したがって、任意の $\psi \in (\mathbb{R}^n)^*$ は $\phi_1, \ldots, \phi_n$ の線形結合として表すことができるため、

$$(\mathbb{R}^n)^* = \langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$$

が示された。 ■

線形汎関数の空間の次元

$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ と、それに対応する $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底 $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ は、どちらも n 個のベクトルの組になっている。

> ここでいう「ベクトル」とは、「線形空間の元」という意味である。$(\mathbb{R}^n)^*$ も線形空間であるので、その元である線形汎関数も「ベクトル」と呼んでいる。

基底をなすベクトルの個数は、その空間の次元として定義されるので、次のことがいえる。

$\mathbb{R}^n$ とその線形汎関数の空間の次元の一致　$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数の空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ の次元は、$\mathbb{R}^n$ の次元と等しい。

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim(\mathbb{R}^n)^* = n$$

また、次元が等しいことから、$\mathbb{R}^n$ と $(\mathbb{R}^n)^*$ は線形同型である。
すなわち、$\mathbb{R}^n$ の元（縦ベクトル）と $(\mathbb{R}^n)^*$ の元（$\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数）の間には、全単射が存在する。

基底を決めれば、縦ベクトルと線形汎関数を同一視する（同じものの「異なる表現」と捉える）ことができる。

横ベクトルと座標関数

$n \times 1$ 型行列（n 次の縦ベクトル）全体の集合は $\mathbb{R}^n$ と表された。
$1 \times n$ 型行列（n 次の横ベクトル）全体の集合を ${}^t\mathbb{R}^n$ と表すことにする。

${}^t\mathbb{R}^n$ の元は $1 \times n$ 型行列なので、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への線形写像（すなわち $\mathbb{R}^n$ 上の線形汎関数）を表現している行列だと考えることができる。

座標関数の表現行列

基本ベクトルを転置したもの ${}^t\boldsymbol{e}_j \in {}^t\mathbb{R}^n$ を縦ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ にかけると、$\boldsymbol{v}$ の j 番目の成分が得られる。

たとえば、$n=3,\ j=2$ の場合、

$$
{}^t\boldsymbol{e}_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_2
$$

といった具合に、2 番目の成分 v_2 が得られる。

このように、ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、その j 番目の成分を返す**座標関数**を x_j と表記することにしよう。

$$
\begin{array}{rccc}
x_j \colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& \Cup & & \Cup \\
& \boldsymbol{v} & \longmapsto & v_j = {}^t\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{v}
\end{array}
$$

このとき、$x_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の**線形汎関数**である。

${}^t\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{v}$ を行列の積として見ると、横基本ベクトル ${}^t\boldsymbol{e}_j \in {}^t\mathbb{R}^n$ は線形汎関数 x_j の表現行列だと捉えることができる。

[Todo 1: 「基底方向への正射影」という観点についても述べる？]

横ベクトルと線形汎関数の同一視

任意の縦ベクトルは、基本ベクトル（標準基底）の線形結合として一意的に表現できる。

$$
|\boldsymbol{v}\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n
$$

同様に、任意の横ベクトルは、横基本ベクトルの線形結合として一意的に表現できる。

$$
\langle\boldsymbol{a}| = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} = a_1{}^t\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n{}^t\boldsymbol{e}_n
$$

ここで、横ベクトル $\langle \boldsymbol{a}|$ は観測装置という視点に戻って、縦ベクトルを入力したら $\boldsymbol{a}$ との内積を返す線形汎関数を ϕ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{v} &= \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \\
&= a_1 {}^t\boldsymbol{e}_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \cdots + a_n {}^t\boldsymbol{e}_n \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \\
&= a_1 x_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + a_n x_n(\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

よって、任意の線形汎関数 $\phi \in (\mathbb{R}^n)^*$ は、座標関数 $x_1, \ldots, x_n$ の線型結合として表すことができる。

$$
\phi = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n
$$

また、x_i の表現行列が ${}^t\boldsymbol{e}_i$ であることを思い出すと、

$$
\phi = a_1 {}^t\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n {}^t\boldsymbol{e}_n = \langle \boldsymbol{a}|
$$

というように、線形汎関数 ϕ は横ベクトル $\langle \boldsymbol{a}|$ と同一視することができる。

$\{{}^t\boldsymbol{e}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{e}_n\}$ を基底としてどんな横ベクトルも表現できることは、$\{x_1, \ldots, x_n\}$ を基底としてどんな線形汎関数も表現できることに対応する。
これより、横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ と、線形汎関数の空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ は、同じ空間とみなすことができる。

縦ベクトルと横ベクトルの双対性

$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とするとき、任意の縦ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ は、

$$
\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + v_n \boldsymbol{u}_n
$$

という線形結合で表すことができる。

ここで、$v_1, \ldots, v_n$ は基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の座標である。

このうち、j 番目の座標 v_j を取得する関数を $\phi_j \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と定めると、ϕ_j は、

$$\phi_j(\boldsymbol{u}_i) = \delta_{ij}$$

を満たし、$\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ が $(\mathbb{R}^n)^*$ の基底となる。

このとき、$(\mathbb{R}^n)^*$ の元（線形汎関数）を横ベクトルと同一視すると、任意の横ベクトル $\phi \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、

$$\phi = c_1\phi_1 + \cdots + c_n\phi_n$$

という線形結合で表すことができる。

ここで、$c_1, \ldots, c_n$ は基底 $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ に関する ϕ の座標である。
このうち、j 番目の座標 c_j を取得する関数を $\psi_j \colon {}^t\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ と定めると、ψ_j は、

$$\psi_j(\phi_i) = \delta_{ij}$$

を満たし、$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ が $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ の基底となる。

さて、基底を変えれば座標も変わってしまうので、ψ_j はあくまでも基底が $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ のときの横ベクトルの座標を返す関数である。
さらに、ϕ_j は $\mathbb{R}^n$ の基底が $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ のときの縦ベクトルの座標を返す関数である。

つまり、ψ_j は $\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に依存しているので、$\boldsymbol{u}_j \in \mathbb{R}^n$ を入力として ψ_j を定める関数 ι を考えてみる。

$$\begin{array}{cccc} \iota \colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & ({}^t\mathbb{R}^n)^* \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \boldsymbol{u}_j & \longmapsto & \psi_j \end{array}$$

ι を用いると、次のように書ける。

$$\iota(\boldsymbol{u}_j) = \psi_j$$

このとき、基底に対して座標は一意的であり、基底が変わると座標が変わることから、

i. 基底 $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=1}^n$ を固定すれば、$\iota(\boldsymbol{u}_j) = \psi_j$ を満たす座標 $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ は一意に定まる
ii. 座標 $\{\psi_j\}_{j=1}^n$ を固定すれば、$\iota(\boldsymbol{u}_j) = \psi_j$ を満たす基底 $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=1}^n$ は一意に定まる

という 2 通りの見方ができる。

このように、$\boldsymbol{u}_j \in \mathbb{R}^n$ と $\psi_j \in ({}^t\mathbb{R}^n)^*$ には、「互いに測り、測られる」という対称性がある。このような対称性を双対性という。

この性質を意識し、${}^t\mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の双対空間という。

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, leftrightarrow, "\text{同一視}"] \arrow[dr, "\text{裏返し}"'] & ({}^t\mathbb{R}^n)^* \\
 & {}^t\mathbb{R}^n \arrow[u, "\text{裏返し}"']
\end{tikzcd}
$$

双対とは、「裏返しにした関係」と解釈できる。

${}^t\mathbb{R}^n$ が $\mathbb{R}^n$ の双対空間であるとは、「横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ を裏返しにしたもの $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ は、縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^n$ と同一視できる」ということである。

逆に、$\mathbb{R}^n$ は ${}^t\mathbb{R}^n$ の双対空間である。「縦ベクトルの空間 $\mathbb{R}^n$ を裏返しにしたもの $(\mathbb{R}^n)^*$ は、横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ と同一視できる」ということでもある。
すなわち、線形汎関数の空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ を横ベクトルの空間 ${}^t\mathbb{R}^n$ と同一視できる。

そこで、${}^t\mathbb{R}^n$ を $(\mathbb{R}^n)^*$ に書き換えると、

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, leftrightarrow, "\text{同一視}"] \arrow[dr, "\text{裏返し}"'] & ((\mathbb{R}^n)^*)^* \\
 & (\mathbb{R}^n)^* \arrow[u, "\text{裏返し}"']
\end{tikzcd}
$$

という関係が見えてくる。$(\mathbb{R}^n)^*$ を $\mathbb{R}^n$ の双対空間という。
表 $\mathbb{R}^n$ の裏は $(\mathbb{R}^n)^*$ であり、裏の裏 $((\mathbb{R}^n)^*)^*$ は表 $\mathbb{R}^n$ になる。

双対空間と双対基底

ここまでの話を、一般の線形空間 V に拡張しよう。

まず、V 上の線形汎関数を次のように定義する。

> **線形汎関数**　V を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする。V から $\mathbb{R}$ への線形写像 $\phi\colon V \to \mathbb{R}^n$ を V 上の線形汎関数あるいは線形形式という。

V から $\mathbb{R}$ への線形写像、すなわち V 上の線形汎関数全体の集合を考える。

双対空間　V 上の線形汎関数全体の集合を V の双対空間といい、V^* と表す。

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = \{\phi \colon V \to \mathbb{R} \mid \phi\text{は線形写像}\}$$

線形空間 V が有限次元の場合は、選んでおいた V の基底に対して、双対基底（`dual basis`）という双対空間 V^* の基底を考えることができる。

双対基底の構成　V を n 次元の線形空間とし、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする。このとき、$\phi_j \in V^*$ を次のように定める。

$$\phi_j(\boldsymbol{v}_i) = \delta_{ij}$$

このような $\phi_1, \ldots, \phi_n$ は V^* の基底をなす。

この定理は $V = \mathbb{R}^n$ の場合と同様に示すことができる。

また、この定理から次が成り立つ。

双対空間の次元　n 次元線形空間 V の双対空間 V^* の次元は、V の次元と等しい。

$$\dim V = \dim V^* = n$$

これより、V と V^* は線形同型であることがいえるが、この同型は基底に依存していることに注意しよう。

一旦ここまでの話をまとめると、次のような関係が成り立っている。

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, leftrightarrow, "?"] \arrow[dr, "\text{基底による同型}"'] & (V^*)^* \\
& V^* \arrow[u, "\text{基底による同型}"']
\end{tikzcd}$$

再双対空間による自然同型

線形空間 V の双対空間 V^* もまた線形空間になるので、さらにその双対空間 $(V^*)^*$ を考えることができる。

$(V^*)^*$ を V の**再双対空間**あるいは**第 2 双対空間**といい、V^{**} と書くこともできる。

実は $(V^*)^*$ と V は線形同型であり、この同型は V の基底に依存しないことが示される。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, leftrightarrow, "\text{自然な同型}"] \arrow[dr, "\text{基底による同型}"'] & (V^*)^* \\ & V^* \arrow[u, "\text{基底による同型}"'] \end{tikzcd}$$

再双対空間への写像

線形汎関数 $\phi \in V^*$ に $\boldsymbol{v} \in V$ を入力して得られるスカラー値を次のように書くことにする。

$$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle := \phi(\boldsymbol{v})$$

$\boldsymbol{v} \in V$ を固定したとき、任意の線形汎関数（V^* の元）に $\boldsymbol{v}$ を入力したもの $\langle -, \boldsymbol{v} \rangle$ を考えることができる。

> $-$ はプレースホルダーであり、（線形汎関数なら）なんでも入れられることを意味する。具体的な線形汎関数が決まっていないときは、$-(\boldsymbol{v})$ と書くよりも、$\langle -, \boldsymbol{v} \rangle$ と書いた方がわかりやすい。

ここで、具体的な $\phi \in V^*$ を与えれば、スカラー値 $\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle$ が確定する。

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{\boldsymbol{v}}\colon & V^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \cup & & \cup \\ & \phi & \longmapsto & \langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle \end{array}$$

この写像 $\phi \mapsto \langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle$ を $\Phi_{\boldsymbol{v}}$ と書くことにしよう。

$$\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi) = \langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle = \phi(\boldsymbol{v})$$

このように定めた $\Phi_{\boldsymbol{v}}\colon V^* \to \mathbb{R}$ は線形写像であるので、$(V^*)^*$ 上の線形汎関数である。

補足：$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ の線形性

$\phi_1, \phi_2 \in V^*$、$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とする。

ϕ_1, ϕ_2 は線形写像であるので、線形写像の和とスカラー倍の定義より、

$$\begin{aligned} \Phi_{\boldsymbol{v}}(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) &= (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)(\boldsymbol{v}) \\ &= c_1\phi_1(\boldsymbol{v}) + c_2\phi_2(\boldsymbol{v}) \\ &= c_1\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_1) + c_2\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_2) \end{aligned}$$

となるので、$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ は線形写像である。

余談だが、上の式変形は次のように書くこともできる。

$$\begin{aligned} \Phi_{\boldsymbol{v}}(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) &= \langle c_1\phi_1 + c_2\phi_2, \boldsymbol{v}\rangle \\ &= c_1\langle \phi_1, \boldsymbol{v}\rangle + c_2\langle \phi_2, \boldsymbol{v}\rangle \\ &= c_1\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_1) + c_2\Phi_{\boldsymbol{v}}(\phi_2) \end{aligned}$$

この見方に慣れておくと、後の議論に対して戸惑いが少なくなる。

また、$\Phi_{\boldsymbol{v}}$ は $\boldsymbol{v}$ に依存しているので、各 $\boldsymbol{v} \in V$ に $\Phi_{\boldsymbol{v}} \in (V^*)^*$ を対応させる写像 ι を考えることができる。

$$\begin{array}{cccc} \iota\colon & V & \longrightarrow & (V^*)^* \\ & \Psi & & \Psi \\ & \boldsymbol{v} & \longmapsto & \Phi_{\boldsymbol{v}} \end{array}$$

このように定めた $\iota\colon V \to (V^*)^*$ は線形写像である。

補足：ι の線形性

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$、$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とすると、

$$\begin{aligned} \iota(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) &= \Phi_{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2} \\ &= \langle -, c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2\rangle \\ &= c_1\langle -, \boldsymbol{v}_1\rangle + c_2\langle -, \boldsymbol{v}_2\rangle \\ &= c_1\Phi_{\boldsymbol{v}_1} + c_2\Phi_{\boldsymbol{v}_2} \\ &= c_1\iota(\boldsymbol{v}_1) + c_2\iota(\boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

となるので、ι は線形写像である。

$\iota\colon V \to (V^*)^*$ は線形写像であるので、ι が線形同型写像であることを示せば、V と $(V^*)^*$ の同型が導かれる。

そのためには、ι の全単射性を証明できればよい。

双対空間の分離性

特に ι が単射であることを示すために、次の定理を用いる。

⚓ **双対空間の分離性**　有限次元線形空間 V において、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ で $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ ならば、$\phi(\boldsymbol{v}) \neq 0$ となるような線形汎関数 $\phi \in V^*$ が存在する。

証明

$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ より、$\boldsymbol{v}$ は線型独立である。
よって、基底の延長により、$\boldsymbol{v}$ を含む V の基底 $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を選ぶことができる。

この基底に対応する双対基底 $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \subset V^*$ を考えると、それぞれの ϕ_i は、次の性質をもつ。

$$\phi_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

このとき $\phi_1(\boldsymbol{v}) = 1$ であるので、$\phi = \phi_1$ をとれば、任意の $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ に対して $\phi(\boldsymbol{v}) = 1$ となる。 ■

再双対空間との同型

⚓ **再双対空間との自然な同型**　V が有限次元ならば、$\iota\colon V \to (V^*)^*$ は線形同型である。

証明

写像 ι は単射

$\iota(\boldsymbol{v}) = 0$ すなわち、任意の $\phi \in V^*$ に対して

$$\iota(\boldsymbol{v})(\phi) = \phi(\boldsymbol{v}) = 0$$

であると仮定する。

この仮定は、すべての線形汎関数が $\boldsymbol{v}$ を 0 に写すことを意味する。

ここで、$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ とすると、双対空間の分離性より、$\phi(\boldsymbol{v}) \neq 0$ となるような線形汎関数 ϕ が存在する。

これは $\iota(\boldsymbol{v}) = 0$ という仮定と矛盾するので、$\iota(\boldsymbol{v}) = 0$ のもとでは、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ でなければならない。

したがって、

$$\iota(\boldsymbol{v}) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

となり、これは線形写像 ι が単射であることを示している。 ■

写像 ι は全射

双対空間の次元を考えると、

$$\dim(V^*)^* = \dim V^* = \dim V$$

[Note 1: 次元定理と全射性との関係を加筆したら、その記載箇所へのリンクを貼る]

ι が単射であることから $\mathrm{Ker}(\iota) = \{\boldsymbol{o}\}$ なので、線形写像の次元定理より、$\dim(V^*)^* = \dim V$ は $\iota \colon V \to (V^*)^*$ が全射であることを示している。

■

ペアリングの記号

[Placeholder 1: 改編予定]

$\phi \in V^*$ と $\boldsymbol{v} \in V$ に対して、線形関数 ϕ に $\boldsymbol{v}$ を入力して得られる値を次のように書くことがある。

$$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle := \phi(\boldsymbol{v})$$

この記法をペアリングと呼ぶことにする。

例：行列の積を表すペアリング

$V = \mathbb{R}^n$ の場合、その双対空間は $V^* = {}^t\mathbb{R}^n$ である。

$\phi \in {}^t\mathbb{R}^n$ を横ベクトル、$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を縦ベクトルとみれば、$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle$ は行列としての積 $\phi \cdot \boldsymbol{v}$ と一致している。

双対性

[Placeholder 2: 改編予定]

V と $(V^*)^*$ の間には、線形同型写像 $\iota \colon V \to (V^*)^*$ が存在する。
このことから、V と $(V^*)^*$ は線形同型であることがいえる。

このように、V が有限次元の場合は、V と $(V^*)^*$ は自然に同一視することができるので、

双対空間 V^* の双対空間 $(V^*)^*$ は V 自身である

ということになる。

たとえるなら、V と V^* は表と裏のような関係になっていて、裏の裏 $(V^*)^*$ は表 V である。このような関係を双対と呼ぶ。

ペアリングの記号が表す双対

V を V^* の双対と考えても、V^* を V の双対と考えてもよい。
ペアリングの記号は、この平等さを表す記法ともいえる。

$\phi \in V^*$ を与えたとき、それに V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ を入力したもの $\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle$ を考えることができる。

$$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle = \phi(\boldsymbol{v})$$

逆に $\boldsymbol{v} \in V$ を与えたとき、$\iota(\boldsymbol{v})$ に V^* の任意の元 ϕ を入力したもの $\langle \boldsymbol{v}, \phi \rangle$ を考えることもできる。

$$\langle \boldsymbol{v}, \phi \rangle = \iota(\boldsymbol{v})(\phi)$$

どちらから考えても、具体的な $\boldsymbol{v}$ と ϕ を与えたときに得られるスカラーは同じである。

$$\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \phi \rangle = \phi(\boldsymbol{v}) = \iota(\boldsymbol{v})(\phi)$$

また、V^* の双対空間 $(V^*)^*$ は V と同一視できるのだから、V の基底 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ の双対基底を $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ とするとき、$\{\phi_i\}_{i=1}^n$ の双対基底は $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ と同一視できる。

$$\langle \phi_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \langle \boldsymbol{v}_j, \phi_i \rangle = \delta_{ij}$$

双対写像

線形空間の間の線形写像が与えられると、双対空間の間の線形写像を定めることができる。

線形空間 V, W の間の線形写像 $f \colon V \to W$ が与えられたとする。
W 上の線形汎関数を $\varphi \in W^*$ とすると、次のような関係になっている。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

このとき、合成写像 $\varphi \circ f\colon V \to \mathbb{R}$ を考えることができる。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\varphi \circ f"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

線形写像の合成もまた線形写像になるので、$\varphi \circ f$ は V 上の線形汎関数である。これを $f^*(\varphi) \in V^*$ と書くことにする。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi)"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$f^*(\varphi)$ は V 上の線形汎関数なので、$\boldsymbol{v} \in V$ を入力するとスカラーを返す。

合成写像の記法より、$(\varphi \circ f)(\boldsymbol{v})$ は、$\varphi(f(\boldsymbol{v}))$ とも書けるので、

$$f^*(\varphi)(\boldsymbol{v}) = \varphi(f(\boldsymbol{v})) = \langle \varphi, f(\boldsymbol{v}) \rangle$$

と整理できる。

また、f^* は W^* 上の線形汎関数 φ を入力として、V^* 上の線形汎関数 $f^*(\varphi)$ を返す線形写像である。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi)"'] & W \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

補足：なぜ f^* は線形写像といえるのか

$W^* = \mathrm{Hom}(W, \mathbb{R})$ における和とスカラー倍の定義から示すことができる。

$\varphi_1, \varphi_2 \in W^*$ に対して、

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 + \varphi_2)(\boldsymbol{v}) &= (\varphi_1 + \varphi_2)(f(\boldsymbol{v})) \\ &= \varphi_1(f(\boldsymbol{v})) + \varphi_2(f(\boldsymbol{v})) \\ &= f^*(\varphi_1)(\boldsymbol{v}) + f^*(\varphi_2)(\boldsymbol{v}) \\ &= (f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2))(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

また、$c \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned} f^*(c\varphi)(\boldsymbol{v}) &= (c\varphi)(f(\boldsymbol{v})) \\ &= c \cdot \varphi(f(\boldsymbol{v})) \\ &= c \cdot f^*(\varphi)(\boldsymbol{v}) \\ &= (cf^*(\varphi))(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned} f^*(\varphi_1 + \varphi_2) &= f^*(\varphi_1) + f^*(\varphi_2) \\ cf^*(\varphi) &= f^*(c\varphi) \end{aligned}$$

となり、写像 f^* は線形性を満たすことがわかる。 ■

このように定まる線形写像 $f^* \colon W^* \to V^*$ を、f の双対写像という。

$$\begin{array}{cccc} f^* \colon & W^* & \longrightarrow & V^* \\ & \Psi & & \Psi \\ & \varphi & \longmapsto & f^*(\varphi) \end{array}$$

双対写像　V, W を線形空間とし、$f \colon V \to W$ を線形写像とするとき、f の双対写像 $f^* \colon W^* \to V^*$ を次のように定義する。

$$f^*(\varphi) := \varphi \circ f \quad (\varphi \in W^*)$$

双対を表すペアリングの記法を用いると、次のように整理できる。

$$f^*(\varphi)(\boldsymbol{v}) = \langle f^*(\varphi), \boldsymbol{v} \rangle = \langle \varphi, f(\boldsymbol{v}) \rangle = \varphi(f(\boldsymbol{v})) \quad (\boldsymbol{v} \in V)$$

双対写像の表現行列

線形写像の双対写像の表現行列は、元の線形写像の表現行列の転置になる。

このことから、双対写像は転置写像とも呼ばれる。

⚓ **双対写像の行列表現**　V, W を有限次元の線形空間とし、$f\colon V \to W$ を線型写像とする。また、$\dim V = n, \dim W = m$ とする。

V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$、$W$ の基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を選び、これらの双対基底をそれぞれ $\phi_1, \ldots, \phi_n$、$\psi_1, \ldots, \psi_m$ とする。

このとき、$\{\boldsymbol{v}_i\}$、$\{\boldsymbol{w}_j\}$ に関する f の表現行列を A とすると、$\{\psi_j\}, \{\phi_i\}$ に関する f^* の表現行列は $A^\top$ によって与えられる。

証明

$f\colon V \to W$ に対して、その双対写像 $f^*\colon W^* \to V^*$ は次で定義される。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi \circ f"'] & W \arrow[d, "\psi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$f^*(\psi) = \psi \circ f \quad (\psi \in W^*)$$

$f^*(\psi)$ は V 上の線形汎関数なので、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ を入力するとスカラーを返す。合成写像の記法より、$(\psi \circ f)(\boldsymbol{v})$ は、$\psi(f(\boldsymbol{v}))$ とも書けるので、

$$f^*(\psi)(\boldsymbol{v}) = \psi(f(\boldsymbol{v}))$$

が成り立つ。

一方、f の表現行列 A は次のように構成される。

$$f(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{w}_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

したがって、任意の i に対し、

$$\psi_k(f(\boldsymbol{v}_i)) = \psi_k\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji}\boldsymbol{w}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\psi_k(\boldsymbol{w}_j)$$

ここで、$\{\psi_k\}$ は $\{\boldsymbol{w}_j\}$ の双対基底なので、$\psi_k(\boldsymbol{w}_j) = \delta_{kj}$ より、

$$\psi_k(f(\boldsymbol{v}_i)) = a_{ki}$$

また、$f^*(\psi_k) \in V^*$ は V 上の線形汎関数なので、V の双対基底 $\{\phi_i\}$ の線形結合として表せる。

$$f^*(\psi_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\phi_i$$

この係数 b_{ik} を並べた行列を B とすると、B は f^* の表現行列である。

このとき、

$$f^*(\psi_k)(\boldsymbol{v}_i) = \psi_k(f(\boldsymbol{v}_i)) = a_{ki}$$

であり、一方、

$$f^*(\psi_k)(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\phi_j(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}\delta_{ij} = b_{ki}$$

でもあるから、$b_{ki} = a_{ki}$ が成り立つ。すなわち、

$$B = A^\top$$

である。 ■

例：縦ベクトルと横ベクトルによる線形写像

[Todo 2: まとめ直す]

A を $m \times n$ 型行列とする

縦ベクトルに A を左からかけることによって定まる線形写像を次のように表す

$$f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \; (\boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v})$$

これと対照的に、横ベクトルに右から A をかけることによって定まる次の線形写像を転置写像と呼ぶ

$$f_A^* \colon {}^t\mathbb{R}^m \to {}^t\mathbb{R}^n \; (\phi \mapsto \phi A)$$

横ベクトル $\phi A \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、次の合成写像の表現行列である

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$$

⚓ 転置写像と自然なペアリング　A を $m \times n$ 型行列とし、$\phi \in {}^t\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\langle f_A^*(\phi), \boldsymbol{v} \rangle = \langle \phi, f_A(\boldsymbol{v}) \rangle$$

証明

$$\begin{aligned} \langle f_A^*(\phi), \boldsymbol{v} \rangle &= (\phi A)(\boldsymbol{v}) \\ &= \phi(A\boldsymbol{v}) \\ &= \phi(f_A(v)) \\ &= \langle \phi, f_A(\boldsymbol{v}) \rangle \end{aligned}$$

より、目的の等式が得られる ■

⚓ 転置写像と座標関数　A を $m \times n$ 型行列とし、$y_1, \ldots, y_m \in {}^t\mathbb{R}^m$ を ${}^t\mathbb{R}^m$ 上の座標関数とするとき、

$$f_A^*(y_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

証明

行ベクトルとしての観点から見ると、$y_i = {}^t\boldsymbol{e}_i$ として、

$$f_A^*(y_i) = f_A^*({}^t\boldsymbol{e}_i) = {}^t\boldsymbol{e}_i A = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

これは双対基底 $x_j = {}^t\boldsymbol{e}_j$ を用いて、

$$\begin{aligned} f_A^*(y_i) &= \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} {}^t\boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \end{aligned}$$

とも書ける ■

⚓ 転置写像の表現行列　A を $m \times n$ 型行列とするとき、基底 $\{y_1, \dots y_m\}$, $\{x_1, \dots, x_n\}$ に関する f_A^* の表現行列は ${}^tA$ である

証明

[Todo 3: よくわからない]

表現行列は、基底 $\{y_i\}$ の各元が、写像を通してどのような線形結合で $\{x_j\}$ に写されるかを記述したものである

すなわち、写像 f_A^* の表現行列を求めることは、

$$f_A^*(y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

において、係数 a_{ij} を行列に並べることである

ここで、$f_A^* \colon {}^t\mathbb{R}^m \to {}^t\mathbb{R}^n$ において、

- 定義域の基底は $\{y_1, \dots, y_m\} \subset {}^t\mathbb{R}^m$
- 値域の基底は $\{x_1, \dots, x_n\} \subset {}^t\mathbb{R}^n$

先ほど示した等式

$$f_A^*(y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

より、表現行列の第 i 列が、$f_A^*(y_i)$ の係数ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

を転置して縦ベクトルにしたものになる

Zebra Notes

Type	Number
todo	3
note	1
placeholder	2