直交基底

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p117〜118
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p181〜182

直交系と直交基底　計量空間 V の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がどの 2 つも互いに直交する、すなわち、

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が成り立つとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を直交系という

直交系が V の基底であるとき、直交基底と呼ばれる

直交系の線型独立性

直交系の線型独立性　計量空間の直交系 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は線型独立である

証明

係数 $c_1, c_2, \ldots, c_n \in K$ を用いた線形関係式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$$

を考える

このとき、$\boldsymbol{a}_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ との内積をとると、

$$(c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_j) = 0$$

内積の双線形性より、

$$c_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_j) + c_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_j) + \cdots + c_n(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_j) = 0$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$$

ここで、$\boldsymbol{a}_i$ は直交系であることから、$i \neq j$ の場合、

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$$

よって、$i \neq j$ の項はすべて 0 になり、残るのは

$$c_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j) = 0$$

ここで、直交系の定義より、$\boldsymbol{a}_j \neq \boldsymbol{0}$ なので、

$$(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j) \neq 0$$

よって、$c_j = 0$ でなければならず、これは $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ が線型独立であることを意味する ■

直交基底の線型結合の係数

直交基底を用いると、基底の線形結合が内積によって簡単に計算できる

直交基底を用いたベクトルの表現　計量空間 V の直交基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ に対して、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_i)}{(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i)} \boldsymbol{a}_i$$

と表すことができる

証明

ベクトル $\boldsymbol{v}$ が次のような線形結合

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n$$

で表されるとし、係数を求めることを目指す

このとき、$\boldsymbol{a}_j\ (j = 1, 2, \ldots, n)$ との内積をとると、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_j) &= (c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_j) \\ &= c_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_j) + c_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_j) + \cdots + c_n(\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)\end{aligned}$$

となるが、$\boldsymbol{a}_i$ は直交系であるため、$i \neq j$ のとき $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = 0$ である

よって、上の式において残るのは、$i = j$ の項だけとなり、

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_j) = c_j(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j)$$

ここで、直交系の定義より $\boldsymbol{a}_j \neq \boldsymbol{0}$ なので、$(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j) \neq 0$ である

そこで、両辺を $(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j)$ で割ることができ、

$$c_j = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_j)}{(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_j)}$$

が得られる ■

正規直交基底

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p117〜119

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p181〜182

正規直交系と正規直交基底 計量空間 V の $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が直交系であり、さらに、どのベクトルもそのノルムが 1 に等しいとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を正規直交系という

正規直交系が V の基底であるとき、正規直交基底と呼ばれる

正規直交基底の線型結合の係数

直交基底を用いたベクトルの表現は、正規直交基底の場合、さらに簡単な形になる

正規直交基底を用いたベクトルの表現　計量空間 V の正規直交基底 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{a}_i$$

と表すことができる

証明

正規直交基底の場合、

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = \|\boldsymbol{a}_i\|^2 = 1$$

であることを用いると、直交基底を用いたベクトルの表現において分母が 1 となり、この形が得られる　■

正規直交基底と内積

正規直交基底どうしの内積は、クロネッカーのデルタ記号を用いて、簡潔に表現できる

クロネッカーのデルタ　次のように定義される δ_{ij} をクロネッカーのデルタという

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

正規直交基底同士の内積　計量空間 V の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の内積に関して、次が成り立つ

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

証明

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の直交性より、$i \neq j$ のときは、

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = 0$$

また、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ はすべてノルムが 1 であることから、$i = j$ のときは、

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i) = \|\boldsymbol{e}_i\|^2 = 1$$

この場合分けとそれぞれの結果は、クロネッカーのデルタ記号の定義と一致する ■

計量空間 V の正規直交基底を用いると、内積を標準内積のように計算できる

計量空間 V の正規直交基底を $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ とし、任意のベクトル $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b} \in V$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n \\ \boldsymbol{b} &= \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

とすると、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{e}_j)$$

内積の双線形性より、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_i \boldsymbol{e}_i, \beta_j \boldsymbol{e}_j)$$

内積の共役線形性に注意して、スカラーを外に出すと、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$$

ここで、正規直交基底の内積はクロネッカーのデルタ記号を用いて表現できるので、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} \delta_{ij}$$

この式は、$i = j$ のときのみ項が残り、$\delta_{ii} = 1$ をふまえると、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}$$

となり、標準内積と一致する

このように、

> 正規直交基底を用いると、
>
> V の内積が K^n の標準内積と同様に計算できる

ことがわかる