## 微分しても変わらない不思議な関数

この式をぼんやりと眺めていると、

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

- 左辺における $\dfrac{d}{dx}$ という記号に呼応して、右辺では $n$ が飛び出すというふうにも見える
- 左辺では $x$ の $n$ 乗だったものが、右辺では $n-1$ 乗になっている

*　*　*

$x^n$ を $n$ の階乗で割った $\dfrac{x^n}{n!}$ という関数を考える

この関数を微分すると、$\dfrac{1}{n!}$ は微分の外に出せる

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}x^n\right) = \frac{nx^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

この式では、左辺と右辺で似た形が現れている

文字は左辺の $n$ から右辺の $n-1$ に化けるが、形は同じ

$n$ に具体的な数を入れて確かめてみる

- $n=0$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^0}{0!}\right) = 0$
- $n=1$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^1}{1!}\right) = \dfrac{x^0}{0!}$
- $n=2$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{2!}\right) = \dfrac{x^1}{1!}$
- $n=3$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^3}{3!}\right) = \dfrac{x^2}{2!}$
- $n=4$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4}{4!}\right) = \dfrac{x^3}{3!}$
- $n=5$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^5}{5!}\right) = \dfrac{x^4}{4!}$

微分すると斜め右下にまったく同じ形の式が現れるというパターンが続く

上のリストでは $n=5$ で止めているが、たとえば $n=100$ までいっても同じパターンが続く

そこで、$\dfrac{x^n}{n!}$ を $n=0$ から順に全部足すことを考え、それを $f(x)$ とおく

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ \frac{d}{dx}f(x) &= 0 + \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\end{aligned}$$

下の式は 1 個右にずれているので、途中で打ち切れば 1 個足りなくなるが、無限に足すと、上の式と下の式はぴったり一致している

したがって、

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$$

が成り立つことがわかる

つまり、**関数 $f(x)$ は微分したものが自分自身になっている！**

いま無限級数として定義した関数 $f(x)$ を何通りかの記法で表しておく

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\end{aligned}$$

後にこの関数は、指数関数として $e^x$ と書くことになる

## ネイピアの数

次の関数に $x=0$ と $x=1$ を代入してみる

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

*　*　*

$x=0$ を代入すると　最初の 1 だけが残り、

$$f(0) = 1$$

＊　＊　＊

$x=1$ を代入すると　1 を何乗しても 1 であるから、

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

この $f(1)$ の数値はどのくらいになるだろうか？

1. 第 1 項は 1
2. 第 2 項も 1
3. 第 3 項は 0.5
4. 次は前の項を 3 で割るわけだから 0.166...
5. 次はさらに 4 で割るから 0.041...
6. 次はさらにそれを 5 で割って 0.008...

ここまでの 6 項の和で 2.716... となる

加える項は急速に 0 に近づく

項が 100 個くらいまで進むと、次に加える $\dfrac{1}{100!}$ は小数点以下に 0 が 150 個以上並ぶくらい小さな数になる（$10^{152} < 100! < 10^{164}$ という不等式より）

このように、無限級数 $f(1)$ は収束がとても速く、

$$f(1) = 2.71828\ldots$$

という数になる

＊　＊　＊

■定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

証明のスケッチ　二項展開を用いて、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

ここで、$k=2$ 以降の各項は次のように展開する

$$\begin{aligned}\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2} &= \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}\\ &= \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{n!}{3!(n-3)!}\cdot\frac{1}{n^3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}\\ &= \frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\\ &= \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\end{aligned}$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 &+ \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &+ \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \cdots\end{aligned}$$

$n$ が大きくなると $\dfrac{1}{n}$ は 0 に近づくので、$1-\dfrac{1}{n}$ は 1 に近づき、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

となる　□

## 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ の収束

$n$ を大きくすると $n!$ は急速に大きくなるので、$x=1$ のときには無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ が収束することは納得できる

では、$x>1$ のときもこの無限級数は収束するといえるのだろうか？

＊　＊　＊

そもそも数列の各項が 0 に近づかないと、その数列の総和は収束しないため、まず次の問いを考える（以下では $x$ を固定しておく）

■問題　$n$ をどんどん大きくしたとき、$\dfrac{x^n}{n!}$ は 0 に近づくか？

この問いは、$x^n$ と $n!$ の大きさを比べようという問題である

たとえば $n = 100$ とすると、実は $100!$ の方が $10^{100}$ よりも圧倒的に大きくなることをすでに示している

$n = 100$ に限らず、「$x$ を止めたとき、$x^n$ と $n!$ の比である $\dfrac{x^n}{n!}$ は、$n$ を大きくすると分母が圧倒的に大きくなり、比は 0 に近づく」ことが同様の議論で示される

＊　＊　＊

無限級数の各項が 0 に近づいたとしても、「塵も積もれば山となる」（足し合わせると発散する）ことも起こり得る

では、次の問題はどうだろうか？

■問題　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は収束するか？

実はこの無限級数は、等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ よりももっと速く収束する

証明のスケッチ

$x$ は固定して、$n$ に関する和を考える

整数 $n$ が十分に大きければ、

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

これは、「無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ が等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ より速く収束する」という 1 つの表現

正確には、$8x^2 + 1$ より大きいすべての自然数 $n$ に対して、

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

が成り立つ

このことがいえれば、$8x^2$ より大きい整数 $N$ に対して、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は次のように等比級数 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ より速く収束する

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n} \\ &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^N}\end{aligned}$$

上の計算のうち、$\displaystyle\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n}$ では、次のような三角不等式を利用している

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_m| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|$$
$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

そこで、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ を、$n = N$ までの有限和と、$n = N + 1$ からの無限級数に分けて考える

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

このように考えると、左辺の無限級数が、右辺の有限和に収束することがわかる

不等式 $\dfrac{|x|^n}{n!} < \dfrac{1}{2^n}$ の証明

一般に $A \leq 0$ のとき、$n > 2A^2 + 1$ ならば、

$$A^n < n!$$

という不等式が成り立つことを示す

$A = 2|x|$ の場合 $(2|x|)^n < n!$ が、$\dfrac{|x|^n}{n!} < \dfrac{1}{2^n}$ となる

$n$ が偶数（$= 2m$）の場合、$n > 2A^2$ の $n$ を $2m$ に置き換えることで、$m > A^2$ となり、

$$\begin{aligned} n! &= (2m)! = 2m \cdot (2m-1) \cdots 2 \cdot 1 \\ &> m \cdot m \cdots m = m^m = m^{\frac{n}{2}} \\ &> \left(A^2\right)^{\frac{n}{2}} = A^n \end{aligned}$$

が成り立つ

$n$ が奇数の場合、$n-1$ は偶数なので、偶数の場合の結果から $(n-1)! > A^{n-1}$ がいえる

さらに、$n > 2A^2 + 1 > A$ なので、

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1)! \\ &> n \cdot A^{n-1} \\ &> A \cdot A^{n-1} = A^n \end{aligned}$$

となり、いずれの場合も $A^n < n!$ が成り立つ　□