基底と次元

核空間の場合を参考にして、部分空間のパラメータ表示を与えるために基準として固定するベクトルの集合を定式化すると、基底という概念になる

ref: 行列と行列式の基礎 p96、p99〜100
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p33〜35

基底は、座標空間の「座標軸」に相当するものであり、部分空間を生成する独立なベクトルの集合として定義される

> **基底**　V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする
>
> ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subset V$ は、次を満たすとき V の基底であるという
>
> i. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ は線型独立である
> ii. $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$

線形空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ を 1 つ見つけたら、ベクトルの個数を数えて、V の次元が k であるとする

> **次元**　V を線形空間とする
>
> V の基底をなすベクトルの個数を V の次元といい、$\dim V$ と書く
>
> また、$\dim\{\boldsymbol{0}\} = 0$ と定義する

基底の例：標準基底

たとえば、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり、これを $\mathbb{R}^n$ の標準基底という

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p35

標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は n 個のベクトルからなるため、$\mathbb{R}^n$ の次元は n である

数ベクトル空間の標準基底　数ベクトル空間 K^n において、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は K^n の基底である

証明

部分空間を生成すること

任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in K^n$ は、次のように表せる

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

したがって、K^n は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ によって生成される

■

線型独立であること

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の線形関係式

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

を考える

このとき、左辺は

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられるので、これが零ベクトルになるためには、

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

でなければならない

よって、$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は線型独立である　■

基底と次元を定義するにあたって、次の保証が必要になる

i. 任意の部分空間に、基底の定義を満たす有限個のベクトルが存在すること（基底の存在）
ii. 任意の部分空間に対して、基底をなすベクトルの個数が、基底の選び方によらず一定であること（次元の不変性）

基底の存在

基底の構成と存在を示すために、次の補題を用いる

ref: 行列と行列式の基礎 p98〜99
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p36〜37

⚓ 線型独立なベクトルの延長　V を K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間とする

このとき、V の線型独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m$ と、V に入らないベクトル $\boldsymbol{a}$ は線型独立である

証明

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m$ が線型従属であるとする

すると、定理「線形結合によるベクトルの表現」より、$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表され、V に入り、矛盾する

よって、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_m$ は線型独立である　■

この定理は、ベクトルの集合が張る空間の記号を用いると、次のように簡潔にまとめられる

⚓ 線型独立なベクトルの延長　$\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k\}$ が線型独立であって、$\boldsymbol{v}_{k+1} \notin \langle \boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k \rangle$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\}$

は線型独立である

K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間 V の線型独立なベクトルは、V の基底に拡張できる

⚓ **基底の存在**　K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間 V には基底が存在する

証明

$V \neq \{\mathbf{0}\}$ なので、V には少なくとも 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$ が存在する
定理「単一ベクトルの線型独立性と零ベクトル」より、$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は線型独立である

このとき、$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subset V$ であるが、もしも $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle = V$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は V の基底である

$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneq V$ ならば、$\boldsymbol{v}_2 \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ であるベクトルを V から選ぶことができる
補題「線型独立なベクトルの延長」より、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は線型独立である

このとき、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subset V$ であるが、もしも $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = V$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は V の基底である

$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subsetneq V$ ならば、$\boldsymbol{v}_3 \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であるベクトルを V から選ぶことができる
補題「線型独立なベクトルの延長」より、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は線型独立である

以下同様に続けると、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle = V$ となるまで、V に属するベクトルを選び続けることができる

ここで線型独立なベクトルを繰り返し選ぶ操作が無限に続かないこと（有限値 k が存在すること）は、有限従属性定理により、K^n の中には n 個を超える線型独立なベクトルの集合は存在しないことから保証される ■

部分空間と数ベクトル空間の同一視

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p99]

ref: 行列と行列式の基礎 p99

線形写像の核空間と基底

核空間について先ほど述べたことは、基底の言葉で言い換えると次のようになる

斉次形方程式の基本解と核空間の基底 A を $m \times n$ 型行列とし、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解とするとき、$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ は $\mathrm{Ker}(A)$ の基底である

線形写像の像空間と基底

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97]

ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	2