正則行列

ref: 行列と行列式の基礎 p71

正則　線形変換 f は全単射であるとき、正則な線形変換であるという

正則行列　正方行列 A は、それが正則な線形変換を与えるとき、正則行列であるという

「線形代数における鳩の巣原理」から、次のことがいえる

正則の判定と階数　n 次正方行列 A に対して、

$$A \text{ が正則行列} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

この定理は、線形変換 f（もしくは正方行列 A）が正則かどうかについて、階数という 1 つの数値で判定できることを示している

正則の判定と線型独立性　n 次正方行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

に対して、次が成り立つ

$$A \text{ が正則行列} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立}$$

証明

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ が線型独立であることは、

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

と同値であることを以前示した

さらに、先ほど示した定理より、$\mathrm{rank}(A) = n$ は A が正則行列であることと同値である ■

逆行列

写像 f が全単射であれば、逆写像 f^{-1} が存在する

ref: 行列と行列式の基礎 p71〜72

逆写像の線形性 f を $\mathbb{R}^n$ の正則な線形変換とするとき、逆写像 f^{-1} は線形である

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p71 問 2.16]

n 次正則行列 A は、正則な線形変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と対応している

逆写像 f^{-1} が存在し、線形であるから、ある n 次正方行列 B が対応するはずである

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ であり、線形写像の合成は行列の積に対応するから、

$$AB = BA = E$$

が成り立つ

このような B を A の逆行列と呼び、A^{-1} と書く

逆行列の一意性　正方行列 A に対して、A の逆行列が存在するならば、それは一意的である

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p71 問 2.17]

逆行列の計算法と線形方程式

正則行列 A に対して、方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のただ 1 つの解は次で与えられる

ref: 行列と行列式の基礎 p72〜73

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

A^{-1} が計算できれば、行列のかけ算によって線型方程式の解が求められる

正則行列 A の逆行列を計算するために、次の定理に注目しよう

逆行列の計算法の原理　正方行列 A に対して、$AB = E$ を満たす正方行列 B があるならば、A は正則であり、B は A の逆行列である

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p72 命題 2.4.6]

上の定理の証明は、逆行列の計算法のヒントを含んでいる

A の逆行列 B を求めるには、n 個の線形方程式

$$A\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

を解けばよい

A は階数 n の n 次正方行列なので、行変形で A から E に到達することができる

$\boldsymbol{b}_i$ を求めるには、行変形により

$$(A \mid \boldsymbol{e}_i) \to \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_i)$$

とすればよい

i ごとに掃き出し法を何度も実行しないといけないのかと思いきや、一度にまとめられる

$$\begin{gathered}(A \mid E) = (A \mid \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \to \\ \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n) = (E \mid B)\end{gathered}$$

このようにすれば、行変形は 1 通りで十分である

正則行列と対角行列

ref: 行列と行列式の基礎 p74〜75

上三角行列の正則性　対角成分がすべて 0 でない上三角行列は正則である

証明

[Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p74 命題 2.4.9]

行基本変形と対角行列　正則行列 A に対して、行のスカラー倍以外の行基本変形を繰り返し行って対角行列にできる

証明

[Todo 5: ref: 行列と行列式の基礎 p75 命題 2.4.12]

Zebra Notes

Type	Number
todo	5