不変部分空間

V 上の線形変換 f について、「変換 f で写しても変わらない」という性質を考える

ref: 行列と行列式の基礎 p114
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p238〜239

f 不変　f を線形空間 V の線形変換とする

V の部分空間 W に対して、

$$f(W) \subset W$$

すなわち、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in W$$

が成り立つとき、W は f 不変な部分空間であるという

また、$V = \mathbb{R}^n$ で、f が正方行列 A によって定まっているときは、f 不変な部分空間 W を A 不変な部分空間ともいう

写像の制限と不変部分空間

ref: 行列と行列式の基礎 p114
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p240〜242、p363〜364

写像の制限　写像 $f: X \to Y$ において、X のある部分集合 S が与えられたとき、定義域を S に限定したものを f の S に対する制限といい、

$$f|_S : S \to Y$$

と表す

不変部分空間による線形変換のブロック構造表現　V を n 次元線形空間とし、線形変換 $f\colon V \to V$ を考える

このとき、V のある部分空間 W が f 不変ならば、V の適当な基底について、f は

$$\begin{pmatrix} * & * \\ O & * \end{pmatrix} \text{または} \begin{pmatrix} * & O \\ * & * \end{pmatrix}$$

という形の行列で表すことができる

証明

$\dim(W) = r$ とし、W の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を延長して V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をとる

このとき、表現行列の構成法より、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

とおける

ここで、W は f 不変であることは、$1 \leq j \leq r$ の範囲では $f(\boldsymbol{v}_j) \in W$ であることを意味する

W の元 $f(\boldsymbol{v}_j)$ は、W の基底だけを用いて表現できるので、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

すなわち、もともとの $f(\boldsymbol{v}_j)$ の式において、

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \quad (1 \leq j \leq r)$$

となっている

$\boldsymbol{v}_i$ は基底なので線型独立であり、したがって、

$$a_{ij} = 0 \quad (1 \leq j \leq r,\ r+1 \leq i \leq n)$$

が成り立つ

この条件より、f の表現行列 (a_{ij}) は、

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad r \quad & \quad n-r \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \quad * \quad & \quad * \quad \\ \hline \quad O \quad & \quad * \quad \end{array}\right) & \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} \end{array}$$

というような形になる

また、V の基底として、順序を変えた $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を取ることもできる

この場合は、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

とおくと、$r+1 \leq j \leq n$ の範囲（V の基底の後半部分）で

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

となるので、すなわち、

$$a_{ij} = 0 \quad (r+1 \leq j \leq n,\ 1 \leq i \leq r)$$

よって、f の表現行列 (a_{ij}) は、

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad n-r \quad & \quad r \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \quad * \quad & \quad O \quad \\ \hline \quad * \quad & \quad * \quad \end{array}\right) & \begin{array}{c} n-r \\ r \end{array} \end{array}$$

という形になる

以上より、2 通りの f の表現行列の形が得られた ■