## 内積：ベクトルの「近さ」を返す関数

2 つのベクトルがどれくらい似ているかを議論するために、内積という尺度を導入しよう。

内積は、2 つのベクトルを引数にとり、その「近さ」を表すスカラー値を返す関数として定義する。

具体的な定義式を知る前に、「近さ」を測る道具として、どのような性質を持っていてほしいかを整理しておこう。
具体的な定義式は、その性質を満たすように「作る」ことにする。

**内積の公理（$\mathbb{R}$ 上の線形空間）** $\mathbb{R}$ 上の線形空間 $V$ を考え、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ とする。
2 つのベクトルを引数にとり、実数を返す関数 $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ として、次の性質を満たすものを内積という。

対称性

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$$

双線形性 1. スカラー倍

$$(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

双線形性 2. 和

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$$

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$$

正定値性

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

内積が定められた線形空間を、計量線形空間、または単に計量空間という。
（計量空間の厳密な定義は後に述べる。）

まずは、ここで示した内積の持つべき性質のそれぞれの意図を考えてみよう。

### 対称性

$\boldsymbol{u}$ が $\boldsymbol{v}$ にどれくらい近いか？という視点で測っても、$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{u}$ にどれくらい近いか？という視点で測っても、得られる「近さ」は同じであってほしい、という性質。

### 双線形性

どちらかのベクトルをスカラー倍してから「近さ」を測りたいとき、元のベクトルとの近さを測っておいて、それを定数倍することでも目的の「近さ」を求められる、という性質。

また、ほかのベクトルを足してから「近さ」を測りたいとき、足し合わせたいベクトルそれぞれについて近さを測っておいて、それを合計することでも目的の「近さ」を求められる、という性質。

これらは、近さを測るという「操作」と「演算」が入れ替え可能であるという、線形性と呼ばれる性質である。
2 つの引数 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のどちらに関しても線形性があるということで、「双」がついている。

### 正定値性

ベクトルの「近さ」とは、向きがどれくらい近いか、という尺度でもある。
同じ方向なら正の数、逆の方向なら負の数をとるのが自然だと考えられる。

自分自身との「近さ」を測るとき、自分と自分は完全に同じ向きであるから、その「近さ」は正の数であるはずだ。
自分自身との「近さ」が 0 になるようなベクトルは、零ベクトル $\boldsymbol{o}$ だけである。

## 内積で表したい「関係の強さ」

内積の公理には含めないが、内積とはどんな量にしたいか？を事前に設計しておくと、後々のイメージにも役立つ。

さて、内積とは、2 つのベクトルがどれくらい同じ方向を向いているか？という尺度にしたい。
そこで、2 つのベクトルの向きに関する視点で、内積のイメージを膨らませてみる。

### 平行の度合いを内積に反映させる

2 つのベクトルが完全に平行なら、それらのベクトルは互いにスカラー倍で表すことができるので、互いに依存し合っている。

2 つのベクトルが平行に近ければ近いほど、これらは互いに似ていて「関係性の強い」ベクトルだといえる。

### 同方向・逆方向を内積の符号で表す

2 つのベクトルが完全に平行で、さらに同じ方向を向いているなら、それらのベクトルは互いに正の数のスカラー倍で表すことができる。

一方、2 つのベクトルが完全に平行で、逆の方向を向いているなら、片方のベクトルはもう片方のベクトルを負の数を使ってスカラー倍したものになる。

逆向きのベクトルどうしは、近い方向どころかむしろ「かけ離れた方向を向いている」といえる。

内積が「向きの似ている度合い」なら、「近い方向を向いている」度合いを正の数で、「かけ離れた方向を向いている」度合いを負の数で表すのが自然だろう。

## 直交するベクトルの内積はゼロとする

「同じ向きに近い」場合と「逆向きに近い」場合が切り替わるのは、2 つのベクトルどうしが垂直なときである。

ならば、内積の正と負が切り替わる境界、すなわち内積が 0 になる場合とは、2 つのベクトルが直交する場合にするのが自然といえるのではないだろうか。

実際、完全に垂直な 2 つのベクトルは、互いに全く影響を与えない方向を向いている。
2 つのベクトルが直交している場合、2 つのベクトルは互いに全く関係がないものとして、関係の強さを表す内積の値は 0 にしたい。