直交補空間

内積を導入すると、ベクトルの長さや直交性が利用できるようになる

直交性は、ベクトルだけでなく、部分空間に対しても拡張できる

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p136〜140

計量空間の部分空間に直交するベクトルの集合を、直交補空間と呼ぶ

直交補空間　計量空間 V の部分空間 W に対し、W の直交補空間 $W^\perp$ を次のように定義する

$$W^\perp := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \forall \boldsymbol{w} \in W, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0\}$$

直交補空間もまた、計量空間の部分空間になっている

直交補空間の部分空間性　計量空間 V の部分空間 W の直交補空間 $W^\perp$ は、計量空間 V の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in W^\perp$ とすると、任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して、

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = 0 + 0 = 0$$

となるので、$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in W^\perp$ である　■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in W^\perp$ とすると、任意のスカラー $c \in K$ と任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して、

$$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c \cdot 0 = 0$$

となるので、$c\boldsymbol{a} \in W^{\perp}$ である　■