# 第 1 章

# 行列式

# 二元連立一次方程式の解の判別式

連立方程式を解く方法の一つとして、方程式の両辺を足したり引いたりして、文字を消去することで解を求める加減法という手法がある。

次のx,yに関する連立一次方程式を、加減法で解く過程を追いかけてみよう。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases}$$

# y を消去して x を求める

y を消去するには、次のようにすればよい。

$$1$$
 つ目の式  $\times$   $b_2$   $-$  2 つ目の式  $\times$   $b_1$ 

こうすることで、x のみに関する方程式が得られる。

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = p_1b_2 - p_2b_1$$

ここで、x の係数  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$  であれば、

$$x = \frac{p_1 b_2 - p_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

として、解を求められる。

逆に、 $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$  であれば、解を一意に求めることはできない。

この意味で、 $a_1b_2-a_2b_1$  はこの連立方程式の解の<mark>判別式</mark>のような役割を持っているといえる。この重要な量を一旦  $\Delta_2$  とおくことにしよう。

$$\Delta_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

### x を消去して y を求める

x を消去するには、次のようにすればよい。

$$1$$
 つ目の式  $\times$   $a_2$   $2$  つ目の式  $\times$   $a_1$ 

こうすることで、y のみに関する方程式が得られる。

$$(a_2b_1 - a_1b_2)y = p_2a_1 - p_1a_2$$

ここでも、y の係数  $a_2b_1-a_1b_2$  の値によって、解を求められるかどうかが変わってくる。 この y の係数は、先ほど導入した  $\Delta_2$  を用いると、次のように表せる。

$$a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\Delta_2$$

### x を消去して y を求める(式を入れ替えた場合)

x を消去する前に、あえて式の順番を入れ替えた場合を考えてみよう。

$$\begin{cases} a_2x + b_2y = p_2 \\ a_1x + b_1y = p_1 \end{cases}$$

すると、x を消去するには、

$$1$$
 つ目の式  $\times a_1 - 2$  つ目の式  $\times a_2$ 

とすればよいことになる。

これより得られる y についての方程式は、次のようになる。

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = p_1a_2 - p_2a_1$$

この場合、y の係数は、

$$a_1b_2-a_2b_1=\Delta_2$$

となり、今度はマイナスの符号がつかない $\Delta_2$ そのものになっている。

どうやら、

式の順番を入れ替えたら、判別式  $\Delta_2$  の符号が反転する



ようだ。(このことは後の議論への伏線として、頭の片隅に置いておこう。)



# 係数行列と二次行列式

先ほどの連立一次方程式を、行列を使って表すと次のようになる。

$$\begin{pmatrix}
a_1 & b_1 \\
a_2 & b_2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x \\
y
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
p_1 \\
p_2
\end{pmatrix}$$
係数行列  $\Delta$ 

すると、この連立一次方程式の解の判別式として導入した、

$$\Delta_2 = a_1b_2 - a_2b_1$$

という量は、係数行列 A の成分だけで決まるものだとわかる。

そこで、この  $\Delta_2$  を 2 次正方行列 A の行列式と呼ぶことにし、次のように表す。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

ightharpoonup 二次正方行列の行列式 2次正方行列  $A=(a_{ij})$  に対して、A の行列式  $\det(A)$  を次のように定義する。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

### 加減法の操作と二次行列式の覚え方

そもそも △2 は、次の連立一次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = p_1 \\ a_2x + b_2y = p_2 \end{cases}$$

において、

$$1$$
 つ目の式  $\times$   $b_2$   $2$  つ目の式  $\times$   $b_1$ 

という操作を行うことで現れたものだった。

この加減法の操作をイメージして、2次正方行列の行列式は「係数を交差させるようにかけて引く」と覚えるとよい。

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

係数を交差させるようにかけて引く



# 三元連立一次方程式の解の判別式

今度は、3 つの変数 x, y, z に関する連立一次方程式を加減法で解くことで、2 変数の場合と同様に解の判別式と呼べるものを求めてみよう。

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = p_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = p_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = p_3 \end{cases}$$

なお、その過程ではおびただしい式展開が登場するが、途中式を完璧に追う必要はない。 重要なのは、何をしようとしてどんな結果が現れるかということである。

### $x \rightarrow y$ の順に消去して z を求める

まず、1 つ目の式と 2 つ目の式を用いて、x を消去する。

2 つ目の式 
$$\times a_1 - 1$$
 つ目の式  $\times a_2$ 

とすることで、y, z に関する方程式が 1 本得られる。

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y + (a_1c_2 - a_2c_1)z = a_1p_2 - a_2p_1$$

$$\left( egin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 \ a_2 & b_2 & c_2 \ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} 
ight) \quad \left( egin{array}{cccc} a_1 & b_1 & c_1 \ a_2 & b_2 & c_2 \ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} 
ight)$$

2 変数 y, z に関する方程式が 1 本だけでは解を求めることはできないので、y, z に関する方程式をもう 1 本作りたい。

そこで、今度は2つ目の式と3つ目の式を用いて、xを消去する。

3 つ目の式 
$$\times a_2 - 2$$
 つ目の式  $\times a_3$ 

とすることで、y,z に関する別な方程式が得られる。

$$(a_2b_3 - a_3b_2)y + (a_2c_3 - a_3c_2)z = a_3p_2 - a_2p_3$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

式が長くなってしまうので、ここで、

$$A_1 = a_1b_2 - a_2b_1$$
,  $B_1 = a_1c_2 - a_2c_1$ ,  $P_1 = a_1p_2 - a_2p_1$   
 $A_2 = a_2b_3 - a_3b_2$ ,  $B_2 = a_2c_3 - a_3c_2$ ,  $P_2 = a_3p_2 - a_2p_3$ 

とおいて、ここまでで得られた y,z に関する 2 本の方程式を次のように整理しよう。

$$\begin{cases} A_1y + B_1z = P_1 \\ A_2y + B_2z = P_2 \end{cases}$$

ここからさらにyを消去するには、次のようにすればよい。

2 つ目の式 
$$\times A_1 - 1$$
 つ目の式  $\times A_2$ 

こうして、2に関する方程式が得られる。

$$(A_1B_2 - A_2B_1)z = A_1P_2 - A_2P_1$$

これをzについて解けば、zを求めることができる。

左辺のzの係数を展開すると、

$$A_1B_2 - A_2B_1$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)(a_2c_3 - a_3c_2) - (a_2b_3 - a_3b_2)(a_1c_2 - a_2c_1)$$

$$= a_1b_2a_2c_3 - a_1b_2a_3c_2 - a_2b_1a_2c_3 + a_2b_1a_3c_2$$

$$- a_2b_3a_1c_2 + a_2b_3a_2c_1 + a_3b_2a_1c_2 - a_3b_2a_2c_1$$

$$= a_1a_2(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_2a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_2 \{a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)\}$$

また、右辺を展開すると、

$$A_1P_2 - A_2P_1$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)(a_3p_2 - a_2p_3) - (a_2b_3 - a_3b_2)(a_1p_2 - a_2p_1)$$

$$= a_1b_2a_3p_2 - a_1b_2a_2p_3 - a_2b_1a_3p_2 + a_2b_1a_2p_3$$

$$- a_2b_3a_1p_2 + a_2b_3a_2p_1 + a_3b_2a_1p_2 - a_3b_2a_2p_1$$

$$= a_2 \{a_1b_2p_2 - a_1b_2p_3 + b_1a_3p_2 - b_1a_2p_3 + b_3a_1p_2 - a_2b_3p_1\}$$

 $a_2 \neq 0$  ならば、両辺を  $a_2$  で割ることができる。

すると、 $z = \cdots$  の形にしたときの分母には次の式が現れる。

この式が0でなければ、zを一意に求めることができるので、これを判別式 $\Delta_3$ としよう。

$$\Delta_3 = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

### 二次行列式に帰着させた見方

この式は、次のように2次行列式を用いて表記できる。

$$\Delta_{3} = a_{1} \begin{vmatrix} b_{2} & c_{2} \\ b_{3} & c_{3} \end{vmatrix} + a_{2} \begin{vmatrix} b_{1} & c_{1} \\ b_{3} & c_{3} \end{vmatrix} + a_{3} \begin{vmatrix} b_{1} & c_{1} \\ b_{2} & c_{2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1} & b_{1} & c_{1} \\ a_{2} & b_{2} & c_{2} \\ a_{3} & b_{3} & c_{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{1} & b_{1} & c_{1} \\ a_{2} & b_{2} & c_{2} \\ a_{3} & b_{3} & c_{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_{1} & b_{1} & c_{1} \\ a_{2} & b_{2} & c_{2} \\ a_{3} & b_{3} & c_{3} \end{pmatrix}$$

このように 2 次の行列式に帰着させた見方は、余因子展開として後に学ぶ。

#### 三次行列式としての見方

また、次のように括弧を展開することもできる。

$$\Delta_3 = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3 - a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

この式  $\Delta_3$  が、3 次の行列式として定義される。



# 係数行列と三次行列式

 $\Delta_3$  もまた、連立方程式の係数行列だけで決まる量である。

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

そこで、二次の場合と同様に、次のように表記することにしよう。

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_3$$

### 三次行列式の覚え方

3 次正方行列の行列式は、プラスの項とマイナスの項が入り混じっていて、一見複雑な形を している。

$$\Delta_3 = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

この式に現れる項と符号は、次のように覚えるとよい。

#### 添字が若い順に矢印を引いて、

- 矢印が右下へ向かうなら正
- 矢印が左下へ向かうなら負

# 置換と互換

たとえば、(1, 2, 3, 4) を並び替えた列 (i, j, k, l) があるとして、

$$1 \longmapsto i$$

$$2 \longmapsto j$$

$$3 \longmapsto k$$

$$4 \longmapsto l$$

というように、番号を並び替える操作そのものを写像とみなし、置換と呼ぶ

**置換** 集合  $\{1,2,\ldots,n\}$  からそれ自身への写像  $\sigma$  が全単射であるとき、 $\sigma$  は n 次の置換であるという

たとえば、

$$\sigma(1) = 2$$
,  $\sigma(2) = 3$ ,  $\sigma(3) = 1$ 

によって 3 次の置換を定めることができる

この置換を、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

と表記する

### 置換の積

写像とみる利点の1つは、積が定義できることである

もう1つの置換

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

が与えられたとき、合成写像  $\sigma$  o  $\tau$  は、

$$1 \xrightarrow{\tau} 1 \xrightarrow{\sigma} 2$$
$$2 \xrightarrow{\tau} 3 \xrightarrow{\sigma} 1$$
$$3 \xrightarrow{\tau} 2 \xrightarrow{\sigma} 3$$

なので、

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

である

通常、合成の記号 o を書かずに  $\sigma \tau$  と表記する

 $\alpha$  なお、 $\sigma \tau$  と  $\tau \sigma$  は一般に異なる

写像の合成の結合法則から、置換の積でも結合法則が成り立つ



$$(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$$

### 恒等置換

恒等写像

$$id: \{1, 2, \dots, n\} \longmapsto \{1, 2, \dots, n\}$$
$$id(i) = i \quad (1 \le i \le n)$$

は置換であるので、これを恒等置換と呼び、

$$e = id$$

と書く

任意の置換  $\sigma$  に対して、明らかに

$$\sigma e = e\sigma = \sigma$$

が成り立つ

また、次の性質はのちに行列式の性質を議論する際に重要になる

 $oldsymbol{\cdot}$  恒等置換の単調性による特徴づけ  $i \leq \sigma(i)$  (あるいは  $i \geq \sigma(i)$ ) を満たす置換  $\sigma$  は恒等置換しか存在しない

#### 証明

σ が恒等置換でないと仮定する

条件  $i \leq \sigma(i)$  より、「元の位置より後ろに移される」、すなわち「すべてが自分以上に移る」ことになる

たとえば、1 を 2 に、2 を 3 に、 $\ldots$ 、n-1 を n に写す置換を考える しかし、集合  $\{1,2,\ldots,n\}$  の要素は n 個しかないので、n を n+1 に写すこと はできない

そこで、n を n に写すとすると、n-1 も n も n に写ることになり、これは置換が全単射であるという定義に反する

 $i \geq \sigma(i)$  の場合も、「元の位置より前に移される」、すなわち「すべてが自分以下に移る」ことになると考えると、同様の矛盾が生じる

よって、 $\sigma$  は恒等置換でなければならない

### 逆置換

置換  $\sigma$  は、定義より全単射であるので、逆写像  $\sigma^{-1}$  が存在するこれを<mark>逆置換</mark>と呼ぶ

### 置換の集合

すべての n 次の置換からなる集合はHと呼ばれる構造を持っている これを n 次対称群と呼び、記号  $S_n$  で表す

### 互換

置換の中で最も基本的なのは、2 文字だけを交換する置換である

**国換**  $1 \le i \ne j \le n$  のとき、 $\sigma(i) = j$ ,  $\sigma(j) = i$  であって、k が i, j 以外のとき  $\sigma(k) = k$  とすることで得られる置換を

$$\sigma = (ij)$$

と書き、このような置換を互換という

たとえば、

$$(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

### 互換の逆置換

互換は (ij) と書いても (ji) と書いても同じ操作を表す i と j を交換してから j と i を交換すると元に戻るが、この (ij) と (ji) は互換としては同じなので、

互換の逆置換は自分自身

である

### 置換の一行表示

置換を表す2行の表示は、下の行だけで情報としては十分なので、たとえば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を  $\sigma=14325$  などと書いてしまうと便利である これを  $\sigma$  の一行表示と呼ぶ

# 互換と置換の積

一行表示を用いた場合、互換と置換の積はたとえば次のように書ける

 $\sigma = 14325$  とすると、

$$(12)\sigma = 24315$$
,  $\sigma(12) = 41325$ 

 $(12)\sigma$  は、 $\sigma=14325$  に互換 (12) を作用させて、24315 となる

 $\sigma$ (12) は、12345 に互換 (12) を作用させて 21345 とし、さらに置換  $\sigma$  を作用させる ことを意味する

置換  $\sigma$  は、4 と 2 を入れ替える置換なので、21345 に対して  $\sigma$  を作用させると、41325 となる

この例の結果を一般的に述べると、次のようになる

**北** 互換と置換の積  $\sigma \in S_n$  に対して、 $\tau = (ij)$  を左からかけた  $\tau \sigma$  の一行表示は、 $\sigma$  の数字 i と j を交換したものである

また、au を右からかけた  $\sigma au$  の一行表示は、 $\sigma$  の i 番目の数字と j 番目の数字を交換したものである

### 互換の積への分解

たとえば、 $\sigma = 2413$  とすると、これは、

- 1. 1234 の 3 と 4 を交換して 1243
- 2. 1243 の 1 と 2 を交換して 2143
- 3. 2143 の 2 と 3 を交換して 2413

というように、互換に分解して考えることができる 数式でまとめると、

$$\sigma = (34)(12)(23)$$

**・・ 互換の積への置換の分解** 任意の置換 σ は、いくつかの互換の積として書ける

#### 証明 証明

n に対する帰納法を用いる

n=1 のときは、互換の定義における i,j の条件を満たさず、i,j 以外の k について  $\sigma(k)=k$  とすることで得られる置換に相当するので、1 つの互換とみなせる

(n-1) 次以下の置換が互換の積で書けることを仮定する  $\sigma$  を n 次の置換とし、 $\sigma(n)$  の値を c とする

c=n すなわち  $\sigma(c)=c$  の場合、 $\sigma$  は c をまったく動かしていないため、実質的に c-1 までの数字だけを並び替えていることになる

そのため、 $\sigma$  は c-1 すなわち (n-1) 次の置換とみなせるため、帰納法の仮定より、互換の積として書ける

 $c \neq n$  の場合、 $\sigma(c)$  を d とし、d と c を交換する互換  $\tau = (cd)$  を考えるこのとき、 $\tau\sigma$  は、 $\sigma$  の数字 c と d を交換したものであるので、

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & c-1 & c & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & c-1 & \sigma(c) & \cdots & n \end{pmatrix}$$

c が n に一致しないという仮定をふまえると、

$$\tau \sigma(n) = n$$

であることが読み取れる

よって、 $au\sigma$  は実質的に (n-1) 次の置換とみなせるので、帰納法の仮定より、互換の積として書ける

$$\tau\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

ゆえに、

$$\sigma = \tau^{-1}\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

であるが、互換の逆置換は自分自身であるので、

$$\sigma = \tau \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$$

と書ける

# 置換の符号と偶奇

すべての置換は互換の積に分解できるが、その方法は一通りではない しかし、互換の積の個数の偶奇性は、置換が与えられれば定まる

このことを証明するために、置換と多項式の関係を考察する

### 置換の多項式への作用

置換  $\sigma \in S_n$  と n 変数多項式  $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$  が与えられたとき、変数  $x_i$  に $x_{\sigma(i)}$  を代入することにより、式  $\sigma f$  を

$$(\sigma f)(x_1,\ldots,x_n)=f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$$

と定める

 $oldsymbol{t}$  置換作用の結合法則  $f=f(x_1,\ldots,x_n)$  を n 変数の多項式とし、 $\sigma, au\in S_n$  とするとき、

$$(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$$

証明

式 $\tau f$ は、

$$(\tau f)(x_1,\ldots,x_n)=f(x_{\tau(1)},\ldots,x_{\tau(n)})$$

である

さらに $\sigma$ を作用させると、 $x_{ au(i)}$ は $x_{\sigma( au(i))}=x_{(\sigma au)(i)}$ に置き換わるので、

$$(\sigma(\tau f)) = f(x_{(\sigma\tau)(1)}, \dots, x_{(\sigma\tau)(n)})$$
$$= ((\sigma\tau)f)(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ

### 互換の差積への作用

次のような n 変数の多項式を差積と呼ぶ

$$(x_1-x_2) \quad (x_1-x_3) \quad \cdots \quad (x_1-x_n) \ (x_2-x_3) \quad \cdots \quad (x_2-x_n) \ \cdots \ (x_{n-1}-x_n)$$

$$\Delta_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

置換の符号を理解するために、差積を使うことができる その第一歩となるのが、次の定理である

$$\tau \Delta_n = -\Delta_n$$

#### 証明 証明

i < j として、au = (ij) とすると、各因子  $x_s - x_t \, (1 \le s < t \le n)$  の変化は次のようになる

$$x_i - x_j$$
 は  $x_j - x_i$  になる

 $x_i$ と $x_j$ を入れ替えることで、その差が逆転して符号が反転する

$$x_i - x_i = -(x_i - x_i)$$

よって、この項は -1 倍の効果をもたらす

s < i < j のとき、 $x_s - x_i$  と  $x_s - x_j$  が入れ替わる

この場合、s は i, j より前の添字である

• 互換前:  $(x_s - x_i)(x_s - x_i)$ 

● 互換後:  $(x_s - x_i)(x_s - x_i)$ 

2 つの項が交換されるだけなので、積の絶対値は変わらず、符号にも影響しない

### i < j < s のとき、 $x_i - x_s$ と $x_j - x_s$ が入れ替わる

この場合、s は i, j より後の添字である

• 互換前:  $(x_i-x_s)(x_j-x_s)$ 

• 互換後:  $(x_i - x_s)(x_i - x_s)$ 

この場合も、並び順だけが入れ替わり、符号には影響しない

### i < s < j のとき、 $x_i - x_s$ と $x_s - x_j$ は…

この場合、s は i と j の間にある添字である

• 互換前:  $(x_i-x_s)(x_s-x_j)$ 

• 互換後:  $(x_j-x_s)(x_s-x_i)$ 

互換前の積を変形してみると、

$$(x_i - x_s)(x_s - x_j) = -(x_i - x_s)(x_j - x_s)$$
  
=  $(x_s - x_i)(x_j - x_s)$   
=  $(x_j - x_s)(x_s - x_i)$ 

という形で、互換後の積が得られる

よって、この場合も積の符号は変わらない

以上をふまえると、符号が反転するのは  $x_i-x_j$  の項だけであるよって、1 回の互換 (ij) によって、差積全体は (-1) 倍される

### 置換の符号

 $oldsymbol{\$}$  置換による差積の符号変化 置換  $\sigma \in S_n$  が s 個の互換の積として書けるならば、

$$\sigma \Delta_n = (-1)^s \Delta_n$$

が成り立つ

証明

置換  $\sigma$  を s 個の互換の積  $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s$  と書いたとき、

$$\sigma \Delta_n = (\tau_1 \cdots \tau_s) \Delta_n$$

置換作用の結合法則を用いて、

$$\sigma \Delta_n = (\tau_1 \cdots \tau_{s-1})(\tau_s \Delta_n)$$

互換による差積の符号変化を繰り返し用いると、

$$\sigma \Delta_n = (\tau_1 \cdots \tau_{s-1})(-\Delta_n)$$
$$= (-1)(\tau_1 \cdots \tau_{s-1})\Delta_n$$
$$= (-1)^s \Delta_n$$

が最終的に得られる

この定理における  $\sigma \Delta_n$  は、 $\sigma$  をどのような互換の積として表すかとは無関係に、 $\sigma$  が与えられれば決まる多項式である

そして、 $(-1)^s$  という部分から、 $\sigma$  を互換の積で表したとき、その個数 s が偶数であれば符号は + に、奇数であれば符号は - になることがわかる

このようにして、次の定理が示されたことになる

**登 置換の符号の存在** 置換  $\sigma$  を互換の積として書くとき、用いられる互換の個数の偶奇は  $\sigma$  のみによって決まる

そこで、置換の符号を次のように定義する

置換の符号 置換  $\sigma \in S_n$  を互換の積  $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_i$  として書いたとき、 $\sigma$  の符号を

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^i$$

と定義する

そして、互換の個数の偶奇をそのまま、置換の偶奇として定める

偶置換と奇置換 置換  $\sigma \in S_n$  の符号  $\operatorname{sgn}(\sigma)$  が +1 であれば  $\sigma$  を偶置換と呼び、-1 であれば奇置換と呼ぶ



# 置換の性質

🔒 逆置換の符号

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})=\mathrm{sgn}(\sigma)$$

証明

置換  $\sigma$  を互換の積として書くと、逆置換はその互換の順序を逆にしたものになる すなわち、 $\sigma= au_1\cdots au_s$  とすると、

$$\sigma^{-1} = \tau_s^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$$

であるが、互換の逆置換は自分自身であるので、

$$sgn(\sigma^{-1}) = (-1)^s = sgn(\sigma)$$

が成り立つ



### → 置換の符号の乗法性

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

### 証明

それぞれを互換の積  $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_i$ 、 $\tau = \rho_1 \cdots \rho_j$  と書くと、

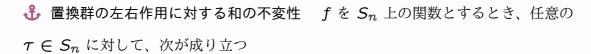
$$\sigma \tau = \tau_1 \cdots \tau_i \rho_1 \cdots \rho_i$$

である

このとき、 $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^i$ ,  $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^j$  なので、

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{i+j} = (-1)^i(-1)^j = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

が成り立つ ■



$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\tau \sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma \tau)$$

#### 証明 証明

au を固定して、 $\sigma$  をすべての置換( $S_n$  の元)全体にわたって動かすとき、 $au\sigma$  も  $S_n$  の全体を動く

言い換えると、写像  $S_n o S_n$  を  $\sigma \longmapsto au\sigma$  と定めると、これは全単射であるしたがって、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\tau \sigma)$$

が成り立つ

同様に、写像  $S_n o S_n$  を  $\sigma \longmapsto \sigma \tau$  と定めると、これも全単射であるので、同様に、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma \tau)$$

が成り立つことがわかる



# 行列式の定義

ある正方行列の行列式は、

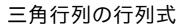
- 1. 各列から 1 つずつ、行に重複がないように成分を選ぶ
- 2. それらをかけ合わせる
- 3. 符号をつけて足す

という手順で定まる値である

 $rac{1}{2}$  行列式  $rac{1}{2}$  次正方行列  $rac{1}{2}$   $rac{1}{2}$  に対して、

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

で定められる値を A の行列式と呼び、|A| あるいは  $\det(A)$  と表記する



**三角行列**の場合、各列から 1 つずつ、0 でない成分を重複なく選び出す方法は、対角成分を すべて選ぶしかない

♣ 三角行列の行列式 三角行列の行列式は、対角成分の積である

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$
 $\begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \end{vmatrix}$ 

### 証明

行列式において、

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}=0$$

となる項は、和をとったときに消えてしまうしたがって、

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)}\neq 0$$

すなわち

$$a_{1,\sigma(1)} \neq 0, \ldots, a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

となるような選び方を考える

### 上三角行列の場合

上三角行列の定義より、i>j ならば  $a_{ij}=0$  である

 $a_{ij} \neq 0$  とするには、 $i \leq j$  でなければならないので、 $a_{i,\sigma(i)}$  においては、

$$i \leq \sigma(i)$$

である必要がある

そして、この条件を満たす置換は、恒等置換しか存在しないので、

$$\sigma(i) = i$$

より、 $a_{ii}$  の積によって行列式の値が構成される

また、恒等置換は 0 (偶数) 回の互換で構成されるので、各項の符号は正とな

る

#### 下三角行列の場合

下三角行列の定義より、i < j ならば  $a_{ij} = 0$  である  $a_{ij} \neq 0$  とするには、 $i \geq j$  でなければならないので、 $a_{i,\sigma(i)}$  においては、

$$i \geq \sigma(i)$$

である必要がある

そして、この条件を満たす置換も、恒等置換しか存在しないので、上三角行列 の場合と同様の結果が得られる ■



対角行列は、上三角行列でもあり下三角行列でもあるので、上の定理の特別な場合として次 が成り立つ

🕹 対角行列の行列式 対角行列の行列式は、対角成分の積である

特に、対角成分がすべて 1 の場合が単位行列である

→ 単位行列の行列式 単位行列の行列式は1である

$$|E| = 1$$



# 行列式の基本性質

次の性質により、以後議論する行列式の性質が列に対して成り立つなら、行に対しても成り 立つといえるようになる

→ 行列式の対称性

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

#### 証明

行列式の定義より、行列  $^tA$  の行列式は、行列 A の行列式に現れる  $a_{i,\sigma(i)}$  の添字を入れ替えたもの  $a_{\sigma(i),i}$  の積和になる

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

一方、 $j=\sigma(i)$  とおくと、 $i=\sigma^{-1}(j)$  となるので、添字の変数を変換して

$$\prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} = \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

よって、 $\det(^tA)$  の各項は、

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

となるが、これは  $\det(A)$  の定義式の  $\sigma^{-1}$  に対応する項と同じである

ここで、 $\rho = \sigma^{-1}$  とおくと、 $\sigma = \rho^{-1}$  であり、逆置換の符号から  $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) = \operatorname{sgn}(\rho)$  であるから、

$$\det({}^tA) = \sum_{
ho \in S_n} \operatorname{sgn}(
ho) \prod_{j=1}^n a_{j,
ho(j)} = \det(A)$$

よって、
$$\det(^tA) = \det(A)$$
 が示された

$$\det(m{a}_1,\ldots,m{a}_i,\ldots,m{a}_j,\ldots,m{a}_n)$$

$$= -\det(m{a}_1,\ldots,m{a}_j,\ldots,m{a}_i,\ldots,m{a}_n)$$

$$(1 \leq i < j \leq n)$$

#### 証明

元々の行列 A の行列式の各項が、

$$f(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

であるのに対し、第i列とj列を入れ替えた行列の行列式の各項は、

$$\operatorname{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1),1}\cdots a_{\sigma(i),j}\cdots a_{\sigma(j),i}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

となる

ここで、i を j に、j を i に写す互換  $\sigma_0=(ij)$  を考え、 $\tau=\sigma\sigma_0$  とおくと、 $\sigma(j)=\tau(i), \, \sigma(i)=\tau(j)$  となるので、

$$f(\tau) = \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1),1} \cdots a_{\tau(i),i} \cdots a_{\tau(j),j} \cdots a_{\tau(n),n}$$

このとき、置換群の左右作用に対する和の不変性より、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma \sigma_0) = \sum_{\tau \in S_n} f(\tau)$$

すなわち、 $\sigma$  全体の総和は $\tau$  全体の総和に一致する

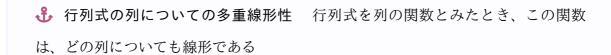
さらに、置換の符号の乗法性より、

$$sgn(\tau) = sgn(\sigma) sgn(\sigma_0) = -sgn(\sigma)$$

であるから、

$$f(\sigma) = -f(\tau)$$

よって、列の交換後、行列式全体が (-1) 倍される



$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v},\ldots,\boldsymbol{a}_n)$$

$$=\alpha\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{u},\ldots,\boldsymbol{a}_n)$$

$$+\beta\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{v},\ldots,\boldsymbol{a}_n)$$

### 証明

 $\sigma \in S_n$  に対応する各項について、

$$a_{\sigma(1),1}\cdots(\alpha u_{\sigma(i)}+\beta v_{\sigma(i)})\cdots a_{\sigma(n),n}$$

 $C = a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$  とし、 $A = \alpha u_{\sigma(i)}$ , $B = \beta v_{\sigma(i)}$  とおくと、

$$C(A + B) = CA + CB = \alpha Cu_{\sigma(i)} + \beta Cv_{\sigma(i)}$$

のように展開できる

よって、

$$egin{aligned} lpha(a_{\sigma(1),1}\cdots u_{\sigma(i)}\cdots a_{\sigma(n),n}) \ &+eta(a_{\sigma(1),1}\cdots v_{\sigma(i)}\cdots a_{\sigma(n),n}) \end{aligned}$$

を用いれば、行列式の定義に基づいて定理が成り立つことがわかる

#### 行列式の対称性より、次の定理も得られる

♣ 行列式の行についての多重線形性と交代性 行列式は行に関しても多重線形性と交代性をもつ

以降、列に対して成り立つ性質は行に対しても成り立つとし、列の場合のみを記載する



# 行列式の値が零になる条件

 $oldsymbol{\$}$ 列の重複による行列式の零化  $A=(oldsymbol{a}_1,\ldots,oldsymbol{a}_n)$  の n 個の列の中に、まったく同じものがあれば、

$$det(A) = 0$$

となる



行列  $\boldsymbol{A}$  の列ベクトルに、共通のベクトル  $\boldsymbol{u}$  が含まれているとする

$$A = (\ldots, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}, \ldots)$$

この2つの **u** の列を入れ替えると、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}, \ldots) = -\det(\ldots, \boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}, \ldots)$$

ところが、入れ替えの前後で行列そのものは変化していない(まったく同じ列を入れ替えても行列は同じ)ので、行列式の値も変わらないはずであるすなわち、

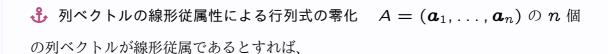
$$\det A = - \det A$$

が成り立つ

ここで、両辺に det(A) を足すと、

$$2 \det A = 0$$

より、 $\det A = 0$  が成り立つ



$$det(A) = 0$$

となる

#### 証明

列ベクトルのうち  $1 \odot \mathbf{a}_i$  が、残りのいくつかの線型結合で表されるとすると、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots) = \det\left(\ldots, \sum_{j=1}^k c_j \boldsymbol{a}_j, \ldots\right)$$

行列式の多重線形性より、

$$\det\left(\ldots,\sum_{j=1}^k c_j \boldsymbol{a}_j,\ldots\right) = \sum_{j=1}^k c_j \det(\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots)$$

ここで、 $oldsymbol{a}_i$  は  $oldsymbol{a}_i$  以外のいずれかの列ベクトルであるため、右辺の行列式では列ベクトルの重複が生じている

よって、行列式の値は 0 になる ■

この定理の対偶をとることにより、次の定理が得られる

非零行列式による列ベクトルの線形独立性  $A=(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$  の行列式の値が 0 でないならば、A の n 個の列ベクトル  $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$  は線形独立である



# 基本変形と行列式

行列式の性質から、行列の列や行に関する基本変形と行列式の関係が見えてくる

### ・ 基本変形と行列式の関係

- i. 列(行)を交換すると行列式の符号が交換される
- ii. 列(行)を定数倍すると、行列式の値も定数倍される
- iii. 列(行)に他の列(行)の定数倍を加えても行列式の値は変化しない
- (i) は行列式の交代性、(ii) は多重線形性であり、(iii) は次の定理によって示される
  - $oldsymbol{\$}$ 列の掃き出しに関する不変性 i 
    eq j のとき、 $\det(\dots, oldsymbol{a}_i + coldsymbol{a}_j, \dots, oldsymbol{a}_j \dots) = \det(\dots, oldsymbol{a}_i, \dots, oldsymbol{a}_j \dots)$

#### 証明 証明

行列式の多重線形性より、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots)$$

$$= \det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) + c \det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots)$$

ここで、同じ列ベクトル  $\mathbf{a}_j$  が 2 つ含まれている行列式の値は 0 になるので、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) = \det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots)$$

だけが残る



n 個の与えられた n 次実ベクトル  $oldsymbol{a}_1,\ldots,oldsymbol{a}_n$  に対して、ある実数が定まるとき、これを $F(oldsymbol{a}_1,\ldots,oldsymbol{a}_n)$  と表すことにする

\* \* 多重線形性と交代性による行列式の特徴づけ 写像  $F: \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$  が多重線形性と交代性を満たすならば、

$$F(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=F(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$$

証明

多重線形性により、

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned} F(oldsymbol{a}_1,\ldots,oldsymbol{a}_n) &= F\left(\sum_{i=1}^n a_{i_11}oldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\sum_{i=1}^n a_{i_nn}oldsymbol{e}_{i_n}
ight) \ &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_11}\cdots a_{i_nn}F(oldsymbol{e}_{i_1},\ldots,oldsymbol{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

和において、各  $i_k$   $(1 \le k \le n)$  は行番号なのでそれぞれ 1 から n まで動く

ここで、交代性から導かれる定理より、 $(i_1,\ldots,i_n)$  に同じ添字が 2 つ以上ある場合には  $F(oldsymbol{e}_{i_1},\ldots,oldsymbol{e}_{i_n})=0$  である

したがって、この和は  $(i_1,\ldots,i_n)$  がすべて異なる場合、すなわち  $(i_1,\ldots,i_n)$  が $(1,\ldots,n)$  の置換である場合にのみ寄与する

よって、 $(i_1,\ldots,i_n)$  にわたる和は、実際には n 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

にわたる和であるとみなせる

この対応により、 $(i_1, \ldots, i_n)$ と  $\sigma \in S_n$  を同一視すると、

$$F(\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_n})=F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$$

さらに、 $(e_{\sigma(1)},\ldots,e_{\sigma(n)})$  を $(e_1,\ldots,e_n)$  に並び替えることを考える すなわち、 $\sigma$  の逆置換  $\sigma^{-1}$  を考えることになる

交代性によって、1 回の互換につき (-1) 倍されるが、全体の符号は互換の回数によって定まるので、 $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma)$  となる

$$F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)F(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$$

以上より、

$$F(\boldsymbol{a}_{1}, \dots, \boldsymbol{a}_{n})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{n}} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \dots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_{n}} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \operatorname{sgn}(\sigma) F(\boldsymbol{e}_{1}, \dots, \boldsymbol{e}_{n})$$

$$= \left(\sum_{\sigma \in S_{n}} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}\right) F(\boldsymbol{e}_{1}, \dots, \boldsymbol{e}_{n})$$

$$= \det(\boldsymbol{a}_{1}, \dots, \boldsymbol{a}_{n}) F(\boldsymbol{e}_{1}, \dots, \boldsymbol{e}_{n})$$

となり、目的の等式が示された

CCC,  $F(e_1, \ldots, e_n) = 1$  CDA

$$F(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$$

と表せることになる

この  $F(e_1, \ldots, e_n) = 1$  を正規化の条件といい、行列式は

- i. 双線形性
- ii. 交代性
- iii. 正規化の条件

によって特徴づけられる

すなわち、行列式は、この3つの条件を満たすような

n 個の列ベクトル  $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$  で定まる関数

として定義することもできる



# 行列式の幾何学的意味

[ Todo 1: ]



# 行列の積と行列式

行列式の特徴づけから導ける性質として、次が重要である

♣ 行列式の乗法性 A, B を同じ型の行列とするとき、

$$det(AB) = det(A) det(B)$$

証明

B の列ベクトルを  $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$  とし、次の関数

$$F(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)=\det(A\boldsymbol{b}_1,\ldots,A\boldsymbol{b}_n)$$

を考える

ここで、 $\det$  は列ベクトルに対して交代性をもつため、この関数 F も交代性をもつまた、 $\det$  の多重線形性に加え、A による作用は線形写像であるから、F も多重線形性を満たす

よって、多重線形性と交代性による行列式の特徴づけより、

$$F(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)=F(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\det(B)$$

一方、F の引数を単位ベクトル  $e_1, \ldots, e_n$  にしたもの

$$F(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)=\det(A\boldsymbol{e}_1,\ldots,A\boldsymbol{e}_n)$$

を考えると、

$$F(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) = \det(A\boldsymbol{e}_1, \dots, A\boldsymbol{e}_n)$$
  
=  $\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$   
=  $\det(A)$ 

よって、

$$F(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)=\det(A)\det(B)$$

ここで、 $F(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)$  の定義を思い出すと、

$$\det(A\boldsymbol{b}_1,\ldots,A\boldsymbol{b}_n)=\det(A)\det(B)$$

左辺の行列  $(Ab_1, \ldots, Ab_n)$  は、行列 B の各列ベクトルに対して A を左から作用 させたものであり、行列 AB を意味している

したがって、

$$det(AB) = det(A) det(B)$$

が成り立つ



行列式の乗法性を繰り返し適用することで、次の定理が得られる

**景** 累乗行列の行列式と行列式の累乗 A, B を正方行列とするとき、任意の自然数 n について、

$$\det(A^n) = \det(A)^n$$



# 行列式と正則性

行列式は、正則性の判定にも利用できる

### 🕹 正則性と行列式の非零性

$$A$$
 が正則行列  $\iff$   $\det(A) \neq 0$ 

### 証明

 $\Longrightarrow$ 

A が正則であることから、

$$AA^{-1} = E$$

両辺の行列式をとって、

$$\det(AA^{-1}) = \det(E)$$

左辺には行列式の乗法性を適用し、右辺は単位行列の行列式の値が 1 であることから、

$$\det(A)\det\left(A^{-1}\right)=1$$

もし  $\det(A) = 0$  だと仮定すると、0 = 1 という矛盾した式になる よって、 $\det(A) \neq 0$  でなければならない

 $\leftarrow$ 

 $\det(A) \neq 0$  であることから、行列 A の列ベクトルは線型独立である そして、A の列ベクトルが線型独立であることと、A が正則であることは同値 である

この定理の派生として、行列式を次の形で使うことが多い

・ 消去法の原理 A を正方行列とするとき、

Ax = 0 に非自明解が存在する  $\iff$   $\det(A) = 0$ 

# 余因子展開

3次正方行列において、第1列を次のようにとらえる

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これをふまえて、3次行列式を、第1列に関する線形性を用いて、次のような和に分解して みる

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ここで、たとえば、

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

をどのように表せるかを考える

まず、(1,1)成分を要にして第1行の掃き出しを行えば、

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が得られる

そこで、

$$oldsymbol{u}_1=egin{pmatrix} a_{22}\ a_{32} \end{pmatrix}$$
 ,  $oldsymbol{u}_2=egin{pmatrix} a_{23}\ a_{33} \end{pmatrix}$ 

とおき、

$$F(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

とみなす

ここで、

$$F(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

であるから、結局、

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が得られる

2 項めの行列式も同様に、掃き出し法によって、

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

これを、

$$oldsymbol{u}_1 = egin{pmatrix} a_{12} \ a_{32} \end{pmatrix}$$
 ,  $oldsymbol{u}_2 = egin{pmatrix} a_{13} \ a_{33} \end{pmatrix}$ 

の関数  $F(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$  とみなす

交代性より、

$$F(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$$
$$= -\det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = -1$$

なので、

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

最後の項の行列式も同様にして、

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

と表せる

以上より、3次行列式は、次のような2次行列式の和に分解できる

$$egin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ \end{array}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

このような行列式の展開を一般化したものが、余因子展開である

全 余因子 n 次正方行列  $A=(a_{ij})$  から、第 i 行と第 j 列を取り除いて (n-1) 次の正方行列  $\Delta_{ij}$  を作り、その行列式に符号  $(-1)^{i+j}$  をかけたものを、A の (i,j) 余因子と呼び、 $\tilde{a}_{ij}$  と書く

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\Delta_{ij})$$

♣ 余因子展開 det(A) は次のように余因子展開できる

第 j 列に関する展開

$$\det(A) = \tilde{a}_{1j}a_{1j} + \tilde{a}_{2j}a_{2j} + \cdots + \tilde{a}_{nj}a_{nj}$$

第 i 行に関する展開

$$\det(A) = \tilde{a}_{i1}a_{i1} + \tilde{a}_{i2}a_{i2} + \cdots + \tilde{a}_{in}a_{in}$$

### ≥ 証明

列に関する展開だけを示せば、行の方は行列式の対称性よりしたがう

行列 A を  $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$  のように列ベクトル表示するすると、

$$\mathbf{a}_j = a_{1j}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{nj}\mathbf{e}_n$$

なので、行列式の多重線形性を用いて、

$$\det(A) = |oldsymbol{a}_1, \dots, oldsymbol{a}_j, \dots, oldsymbol{a}_n|$$

$$= \sum_{i=1}^n |oldsymbol{a}_1, \dots, oldsymbol{a}_{ij} oldsymbol{e}_i, \dots, oldsymbol{a}_n|$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ij} |oldsymbol{a}_1, \dots, oldsymbol{e}_i, \dots, oldsymbol{a}_n|$$

 $|\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_n|$  に対して、(i,j) 成分を要にして第i 行を掃き出す操作を行うと、

さらに、i 行目を 1 つ上の行と順に交換して 1 行目まで移動し、次に j 列目を 1 つ左の列と順に交換して 1 列目まで移動する

行や列の交換から生じる符号の変化は、(i-1)+(j-1) の交換を行っているので、 $(-1)^{i+j-2}=(-1)^2(-1)^{i+j}=(-1)^{i+j}$  となる

よって、次のような形が得られる

ここで現れる行列式は、第 1 行・第 1 列に移動させた第 i 行・第 j 列を取り除いた (n-1) 次正方行列の行列式である

よって、符号の部分も合わせて、余因子の定義より、次のように書ける

$$|\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_n|=\tilde{a}_{ij}$$

したがって、行列 A の行列式は、

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij}$$

と書けることが示された



# 余因子行列と逆行列の公式

[ Todo 2: ]



# クラメルの公式

[ Todo 3: ]

# Zebra Notes

Туре	Number
todo	3