逆行列の一意性

逆行列は、存在するとしてもただ 1 つしか存在しない。

・ 逆行列の一意性 正方行列 A に対して、A の逆行列が存在するならば、それは一意的である。

証明

A の逆行列が B_1 と B_2 の 2 つあるとする。

$$AB_1 = B_1A = E$$
 かつ $AB_2 = B_2A = E$

 $AB_2 = E$ の両辺に B_1 をかけると、

$$B_1 = B_1 A B_2 = (B_1 A) B_2 = E B_2 = B_2$$

よって、 $B_1 = B_2$ となり、逆行列は一意的である。

行列の演算と逆行列

逆行列の逆行列

「Aの取り消し」を取り消すには、A すればよい。

・・ 逆行列に対する逆行列 正則行列 A の逆行列 A^{-1} は正則であり、その逆行列は A である。

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ref: プログラミングの ための線形代数 p46

証明

A の逆行列が A^{-1} であることから、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

この式は、 A^{-1} が正則であり、その逆行列が A であることを示す式でもある。

行列の積の逆行列

「B して A したもの」を元に戻すには、まず A を取り消してから B を取り消す必要がある。

ref: プログラミングの ための線形代数 p46

・ 正則行列の積に対する逆行列 正則行列 A, B の積 AB は正則であり、その逆行列は次のようになる。

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

☎ 証明

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1}$$

= AEA^{-1}
= E

であり、同様に

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B$$

= $B^{-1}EB$
= E

であるので、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ。

転置行列の正則性

ref: 行列と行列式の基 礎 p88

・ 正則行列の転置の正則性 正則行列 A に対して、その転置行列 tA も正則である。

証明

A が正則であることから、その逆行列 A^{-1} が存在し、

$$A^{-1}A = E$$

両辺の転置をとると、右辺の単位行列は転置しても単位行列であり、 左辺には正則行列の積に対する逆行列の公式を用いて、

$$^{t}(A^{-1}A) = {}^{t}A^{t}(A^{-1}) = E$$

この等式より、 tA の逆行列は ${}^t(A^{-1})$ であることがわかる。

8

三角行列の正則性

ref: 行列と行列式の基 礎 p74

・ 上三角行列の正則性 対角成分がすべて ○ でない上三角行列は正則である。





[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p74 命題 2.4.9]

・・正則な上三角行列の逆行列 正則な上三角行列は、その逆行列も上三角行列である。





[Todo 2:]

正則な上三角行列と関連して、次の事実が成り立つ。

・ 行基本変形と対角行列 正則行列 A に対して、行のスカラー 倍以外の行基本変形を繰り返し行って対角行列にできる。





[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p75 命題 2.4.12]

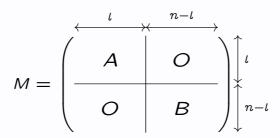
正則行列と対角行列



[Todo 4: ref: プログラミングのための線形代数 p46~47]

♪ ブロック対角行列の正則性 次のようなブロック対角行列 M

ref: 行列と行列式の基 礎 p74~75 において、対角ブロック A, B が正則であれば、M も正則である。



証明

A と B が正則であるから、逆行列 A^{-1} と B^{-1} が存在する。 それらを用いて、次のような積を考える。

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} & O \\ O & BB^{-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} E_l & O \\ O & E_{n-l} \end{pmatrix}$$
$$= E_n$$

この等式は、*M* の逆行列の存在を示している。

$$M\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = E_n$$

つまり、対角ブロックがそれぞれ正則であれば、それらの逆行列を 並べることで全体の逆行列が構成できる。

このようにして、*M* が正則であることがわかる。

Zebra Notes

Туре	Number
todo	4