



## 写像


写像は、集合の間の「対応」である

ref: ろんりと集合

関数は、数を入力すると数が出力される「装置」

関数のような「対応」という考え方の対象を「数」に限定せず、「集合の要素」に一般化したものが写像である

写像というときは、どの集合からどの集合への写像であるかをはっきりしておかなければならない

 写像 集合  $A, B$  があったとき、 $A$  のすべての要素  $a$  に対して、 $B$  のある要素  $b$  を「ただ一つ対応」させる規則  $f$  が与えられたとき、 $f$  を  $A$  から  $B$  への写像と呼び、記号で

$$f: A \rightarrow B$$

と表す

このとき、集合  $A$  を  $f$  の定義域と呼ぶ

また、次の集合を  $f$  の値域と呼ぶ


$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

「集合」と「写像」というのはそれぞれ、「対象」と「それらの間の対応」ということであり、数学において基本的な概念である



## 像と逆像

ref: 図で整理！例題で  
納得！線形空間入門 p52  
～55

 像 写像  $f$  により、 $A$  の要素  $a$  が  $B$  の要素  $b$  に対応しているとき、「 $b$  は  $a$  の  $f$  による像である」あるいは「 $f$  により  $a$  は  $b$  に写る」といい、

$$f(a) = b$$

$$f : a \mapsto b$$


$$f : A \rightarrow B; a \mapsto b$$

などと書く



$A$  の要素の像で埋まる部分集合を考える

ref: 図で整理！例題で  
納得！線形空間入門 p76  
~79


 部分集合としての像 写像  $f : A \rightarrow B$  があるとき、 $A$  の部分集合  $A'$  に対して、 $f$  による  $A'$  の元  $a$  の像  $f(a)$  からなる  $B$  の部分集合を、 $f$  による像と定義し、 $f(A')$  と表記する

$$f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\} \subset B$$

値域は、定義域  $A$  の像  $f(A)$  のことにほかならない



$B$  の要素に映るものをすべて集めた集合を考える

 逆像 写像  $f : A \rightarrow B$  があるとき、 $B$  の部分集合  $B'$  に対して、 $A$  の元  $a$  であって、その像  $f(a)$  が  $B'$  に入るような元からなる  $A$  の部分集合を  $f$  による逆像と定義し、 $f^{-1}(B')$  と表記する

$$f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\} \subset A$$

像と逆像の性質 写像  $f: A \rightarrow B$  があるとき、 $A$  の部分集合  $A_1, A_2$  と  $B$  の部分集合  $B_1, B_2$  に対して、次が成り立つ


- $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$
- $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

像と逆像の性質 写像  $f: A \rightarrow B$  があるとき、 $A$  の部分集合  $A_1, A_2$  と  $B$  の部分集合  $B_1, B_2$  に対して、次が成り立つ

- $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

## 恒等写像

「何も変えない写像」は**恒等写像**と呼ばれる

 **恒等写像** 集合  $A$  に対して、 $A$  の要素  $a$  を同じ要素  $a$  に対応させる、 $A$  から  $A$  への写像

$$A \rightarrow A; a \mapsto a$$

を  $A$  上の**恒等写像**といい、 $I_A$  や  $\text{Id}_A$ 、あるいは単に  $\text{Id}$  と書く

ref: 図で整理！例題で  
納得！線形空間入門 p55  
~56

## 合成写像

「2 つの操作を続けて行う」ことは、写像の合成として定義される

ref: 図で整理！例題で  
納得！線形空間入門 p55  
～56

 合成写像 2 つの写像

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow C$$

が与えられたとき、 $A$  の要素  $a$  に対して、 $C$  の要素  $g(f(a))$  を  
対応させる、集合  $A$  から集合  $C$  への写像のことを  $f$  と  $g$  の合成  
写像と呼び、記号で  $g \circ f$  と書く

すなわち

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

である