双対基底

 \mathbb{R}^n の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ に対して、

$$\phi_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

を満たす線形写像 $\phi_i:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を考える

このとき、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を

$$oldsymbol{v} = \sum_{j=1}^n a_j oldsymbol{v}_j$$

とおくと、

$$\phi_i(oldsymbol{v}) = \phi_i\left(\sum_{j=1}^n a_joldsymbol{v}_j
ight) = \sum_{j=1}^n a_j\phi_i(oldsymbol{v}_j) = \sum_{j=1}^n a_j\delta_{ij} = a_i$$

となるから、 ϕ_i は基底 $\{oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_n\}$ に関する第 i 座標を表す関数である

任意の線形関数 $\phi \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、座標関数の線型結合として一意的に表現できるから、次が成り立つ

 $^{oldsymbol{t}}$ $^t\mathbb{R}^n$ の双対基底の存在 \mathbb{R}^n の基底 $\{oldsymbol{v}_1,\dots,oldsymbol{v}_n\}$ に対し て、 $\phi_i(oldsymbol{v}_j)=\delta_{ij}$ によって $\phi_i\in {}^t\mathbb{R}^n$ を定める このとき、任意の $\phi\in {}^t\mathbb{R}^n$ を ϕ_1,\dots,ϕ_n の線形結合

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi(oldsymbol{v}_i) \phi_i$$

として一意的に書くことができる

すなわち、 $\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ は ${}^t\mathbb{R}^n$ の基底である

ref: 行列と行列式の基

礎 p120~121

ref: テンソル代数と表

現論 p58~59

ϕ_1,\ldots,ϕ_n が線型独立

線形関係式

$$\sum_{j=1}^n c_j \phi_j = 0$$

があるとすると、

$$\left(\sum_{j=1}^n c_j \phi_j\right) (oldsymbol{v}_i) = 0$$
 ϕ の線形性 $\sum_{j=1}^n c_j \phi_j (oldsymbol{v}_i) = 0$ $\phi_j (oldsymbol{v}_i) = \delta_{ij}$ $\sum_{j=1}^n c_j \delta_{ij} = 0$

左辺の和は、 δ_{ij} の定義より、j=iの項のみ生き残って、

$$c_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が得られる

$\langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle = {}^t\mathbb{R}^n$

任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$oldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n c_i oldsymbol{v}_i$$

と書く

 $\psi \in {}^t\mathbb{R}^n$ を任意にとると、 ψ と ϕ の線形性により、

$$egin{aligned} \psi(oldsymbol{v}) &= \psi\left(\sum_{i=1}^n c_i oldsymbol{v}_i
ight) \ &= \sum_{i=1}^n c_i \psi(oldsymbol{v}_i) \ &= \sum_{i=1}^n \phi_i(oldsymbol{v}) \psi(oldsymbol{v}_i) \ &= \sum_{i=1}^n \psi(oldsymbol{v}_i) \phi_i(oldsymbol{v}) \ &= \left(\sum_{i=1}^n \psi(oldsymbol{v}_i) \phi_i
ight) oldsymbol{v}_i \end{aligned}$$

よって、

$$\psi = \sum_{i=1}^n \psi(oldsymbol{v}_i) \phi_i$$

上式で、任意の $\psi \in {}^t\mathbb{R}^n$ を ϕ_1, \ldots, ϕ_n の線形結合で書けることが示せたので、 $\langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$ は ${}^t\mathbb{R}^n$ を張ることがわかる

 \mathbb{R}^n の基底 $\{ m{v}_1, \ldots, m{v}_n \}$ に対して、上の定理で定まる $^t\mathbb{R}^n$ の基底 $\{ m{\phi}_1, \ldots, m{\phi}_n \}$ を双対基底という