線形関数の集合

ref: 行列と行列式の基礎 p121〜122

${}^t\mathbb{R}^n$ 上の線形関数全体の集合を $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ と書く

$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を与えたとき、${}^t\mathbb{R}^n$ 上の線形関数 $\langle -, \boldsymbol{v} \rangle$ が得られる

（ここで、$-$ はプレースホルダーであり、ここに具体的な値を入れられることを意味する）

線形関数の空間の基底と次元の一致　$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を $\mathbb{R}^n$ の基底とするとき、$\{\langle -, \boldsymbol{v}_1 \rangle, \dots, \langle -, \boldsymbol{v}_n \rangle\}$ は $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ の基底である

よって、

$$\dim({}^t\mathbb{R}^n)^* = \dim \mathbb{R}^n = n$$

$({}^t\mathbb{R}^n)^*$ は、もとの縦ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と自然に同一視できる

線形関数の空間と縦ベクトル空間の同型性　写像 $\iota \colon \mathbb{R}^n \to ({}^t\mathbb{R}^n)^*$ を $\boldsymbol{v} \mapsto \langle -, \boldsymbol{v} \rangle$ と定めると、これは線形同型写像である

証明

$\boldsymbol{v}$ によって定まる線形関数 $l_{\boldsymbol{v}} = \langle -, \boldsymbol{v} \rangle \in ({}^t\mathbb{R}^n)^*$ を考える

このとき、写像 ι は $\boldsymbol{v} \mapsto l_{\boldsymbol{v}}$ と定義できる

写像 ι は線形

写像 $\boldsymbol{v} \mapsto l_{\boldsymbol{v}}$ は、関数を返す写像である

写した結果の関数が、和やスカラー倍と作用の順序を入れ替えても同じになることを確認する

任意の入力 $\boldsymbol{\phi}$ とすると、

$$\begin{aligned} l_{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2}(\phi) &= \langle \phi, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \rangle = \langle \phi, \boldsymbol{v}_1 \rangle + \langle \phi, \boldsymbol{v}_2 \rangle \\ &= l_{\boldsymbol{v}_1}(\phi) + l_{\boldsymbol{v}_2}(\phi) \\ l_{c\boldsymbol{v}}(\phi) &= \langle \phi, c\boldsymbol{v} \rangle = c\langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle = c l_{\boldsymbol{v}}(\phi) \end{aligned}$$

任意の入力に対して等しい結果になることは、関数そのものが等しいことを意味する

和やスカラー倍を先に計算しても作用後に計算しても、同じ関数が得られるので、写像 $\boldsymbol{\iota}$ は線形である ■

写像 ι は単射

写像 $\boldsymbol{\iota}$ が「違う入力は違う出力になる」こと、すなわち単射であることを確認する

そのためには、$\boldsymbol{\iota}$ が零でないベクトルは零でない関数に移すこと、すなわち

$$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \Longrightarrow l_{\boldsymbol{v}} \neq 0$$

を示せばよい

$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ならば、$\boldsymbol{v}$ の成分のうち少なくとも 1 つは非零である

その成分を $\boldsymbol{k}$ 番目の成分とし、横ベクトル $\boldsymbol{\phi} = {}^t\boldsymbol{e}_k$ を考える

ここで、${}^t\boldsymbol{e}_k$ は $\boldsymbol{k}$ 番目の成分が 1 で他の成分が 0 の横ベクトルである

すると、

$$l_{\boldsymbol{v}}(\phi) = \langle \phi, \boldsymbol{v} \rangle = \phi(\boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{e}_k \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_k$$

ここで、$v_k \neq 0$ なので、$l_{\boldsymbol{v}}(\phi) \neq 0$ となる

したがって、$\boldsymbol{\iota}$ は単射である ■

写像 ι は全射

$\dim({}^t\mathbb{R}^n)^* = \dim \mathbb{R}^n = n$ より、ι は全射である ■

以上より、$({}^t\mathbb{R}^n)^*$ と $\mathbb{R}^n$ は同じ次元をもち、写像 $\iota\colon \mathbb{R}^n \to ({}^t\mathbb{R}^n)^*$ が単射かつ全射であることから、線形代数の鳩の巣原理より、ι は線形同型写像である ■