第 5 章

線形写像の像と核

線形写像と逆問題

$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ という形の式は、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の次元が同じならば、連立一次方程式として捉えることができた

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

そして、このような形の連立方程式を解くことは、「$\boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{x}$ を推定する」という逆問題を解くことに相当する

一方、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ という式は、線形写像を表す式とみることもできる
一般に、線形写像 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の表現行列 A は $m \times n$ 行列であり、$\boldsymbol{y}$ は m 次元ベクトル、$\boldsymbol{x}$ は n 次元ベクトルである

ここでは、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の次元が異なる場合の、「$\boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{x}$ を推定する」という逆問題を考えてみることにする

手がかりが足りない場合

手がかりとなる情報を $\boldsymbol{y}$ とし、知りたい情報を $\boldsymbol{x}$ とする

まずは、$\boldsymbol{y}$ の方が $\boldsymbol{x}$ より次元が小さい、すなわち $m < n$ の場合を考える

このとき、表現行列 A は横長の行列となる

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$m < n$ の場合は、「知りたい量が n 個もあるのに、手がかりはたった m 個しかない」という状況になっている

見方を変えると、A を作用させたことによって「情報の一部が欠落してしまった」ともいえる

$m < n$ の場合の線形写像の写し方

$m < n$ のとき、A は、元より次元の低い空間に写す線形写像を表す

そのため、$\boldsymbol{x}$ はこの線形写像によって「潰される」ことになる

「潰される」とはどのようなことかというと、空間を張る $\boldsymbol{x}$ それぞれの居場所を、写す先では全員分用意することができないので、

> 複数の $\boldsymbol{x}$ を同じ $\boldsymbol{y}$ に写すしかない

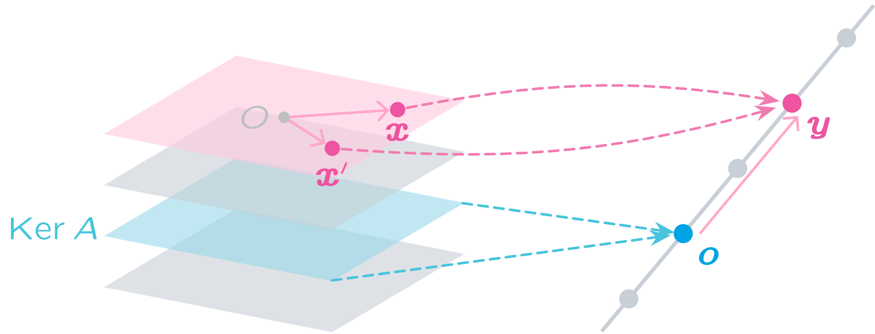
ということである

複数の $\boldsymbol{x}$ が同じ $\boldsymbol{y}$ に写ってしまうと、結果 $\boldsymbol{y}$ から元の $\boldsymbol{x}$ を特定することはできなくなる（つまり、情報が失われている）

線形写像の核

次の図は、1×3 行列 A による線形写像を表している

同じ平面上の点がすべて同じ点に写されることで、平面の集まりである立体（3 次元）が、点の集まりである直線（1 次元）へと「潰されている」ことがわかる



このとき、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ に写ってくるような $\boldsymbol{x}$ の集合を、A の核あるいはカーネルといい、Ker A と表す

Ker A の次元

上の図では、零ベクトル $\boldsymbol{o}$（写り先の 1 次元空間の原点）に潰されている青い平面が Ker A に相当する
平面なので、この Ker A は 2 次元である

もしも $m < n$ でない場合、つまり潰れない写像の場合は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ に写る $\boldsymbol{x}$ は零ベクトル $\boldsymbol{o}$ だけなので、Ker A は 0 次元となる

Ker A に平行な方向の成分

[Todo 1: book: プログラミングのための線形代数 p114]

Ker f の定義

A が線形写像 f の表現行列であるとすると、Ker f を次のように定義できる

線形写像の核　線形写像 $f\colon V \to W$ に対して、f による $\{\boldsymbol{o}\}$ の逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{o}\})$ を、線形写像 f の核や核空間、あるいはカーネルといい、$\mathrm{Ker}(f)$ と表記する

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{\boldsymbol{o}\}) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}\} \subset V$$

手がかりが多すぎる場合

今度は、$\boldsymbol{y}$ の方が $\boldsymbol{x}$ より次元が大きい、すなわち $m > n$ の場合を考える

このとき、表現行列 A は縦長の行列となる

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$m > n$ の場合は、「知りたい量はたった n 個しかないのに、手がかりが m 個もある」という状況になっている

この場合、手がかりどうしが矛盾することもある

$m > n$ の場合の線形写像の写し方

$m > n$ のとき、A は、元より次元の高い空間に写す線形写像を表す

そのため、写り先の空間すべてをカバーすることはできない

はみ出した $\boldsymbol{y}$ については、

> そこに写ってきてくれる $\boldsymbol{x}$ が存在しない

ことになる

現実の応用では、ノイズがのることで、はみ出した $\boldsymbol{y}$ が観測されることがある

そうなると、「手がかり $y_1, \ldots, y_m$ すべてに符号する $\boldsymbol{x}$ は存在しない」ということになってしまう

線形写像の像

与えられた A に対して、$\boldsymbol{x}$ をいろいろ動かしたときに A で写り得る $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の集合を A の**像**といい、$\mathrm{Im}\, A$ で表す

別の言い方をすると、$\mathrm{Im}\, A$ は、元の空間全体を A で写した領域である

$\mathrm{Im}\, A$ 上にない $\boldsymbol{y}$ については、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ となるような $\boldsymbol{x}$ は存在しない

$\mathrm{Im}\, f$ の定義

A が線形写像 f の表現行列であるとすると、$\mathrm{Im}\, f$ を次のように定義できる

線形写像の像　線形写像 $f \colon V \to W$ に対して、f による V の像 $f(V)$ を、線形写像 f の像や像空間といい、$\mathrm{Im}(f)$ と表記する

$$\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\} \subset W$$

単射と全射

ここまで、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ という関係について、次の 2 つの観点で議論してきた

i. 同じ結果 $\boldsymbol{y}$ が出るような原因 $\boldsymbol{x}$ は唯一か
ii. どんな結果 $\boldsymbol{y}$ にも、それが出るような原因 $\boldsymbol{x}$ が存在するか

$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ を方程式と捉えると、(i) は解の一意性、(ii) は解の存在に対応する

単射

(i) は、次のようにも言い換えられる

i. 異なる原因 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ が、A で同じ結果に写ることがないか

(i) の条件が成り立つとき、「線形写像 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は単射である」という

全射

(ii) は、次のようにも言い換えられる

ii. 元の空間全体（定義域）を A で写した領域 $\mathrm{Im}\, A$ が、行き先の空間全体（値域）に一致するか

(ii) の条件が成り立つとき、「線形写像 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は全射である」という

全単射

(i) と (ii) の両方が成り立つときは、「線形写像 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は全単射である」という

零ベクトルと単射性

零写像と射影を除けば、f によってベクトルが「つぶれない」という性質は、次のように表せる

$$\boldsymbol{v} \neq 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{o}$$

[Todo 2: book: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

この条件は、実は線形写像が単射であることを意味している

対偶をとって、次のように表現できる

Theorem 5.1 – 零ベクトルへの写像による単射性の判定

線形写像 f が単射であることと次は同値である

$$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

証明

i. f が単射
ii. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

零ベクトルの像は零ベクトルであることから、$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ は、

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{o})$$

と書き換えられる

f の単射性により、この式から、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

がしたがう ■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ を満たす $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ を考える

このとき、f の線形性から、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) - f(\boldsymbol{v}_2)$$

となる

仮定 (ii) より、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o}$$

がいえるので、$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ が成り立つ

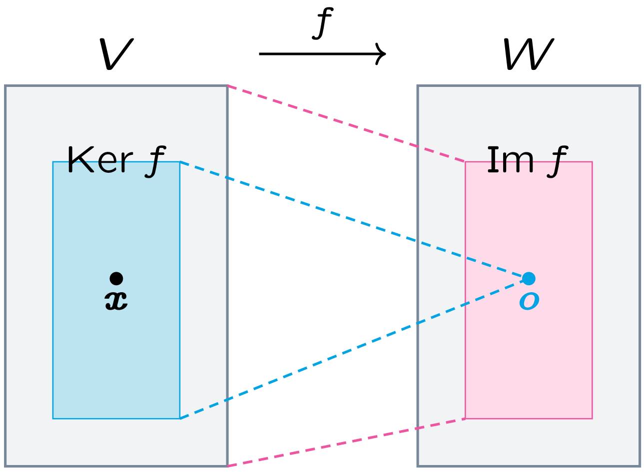
$f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ から $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ が導かれたことで、f は単射であることが示された ■

核・像と単射・全射

先ほどの定理で、線形写像 f によって「潰れない」という条件が、単射性と同値であることが示された

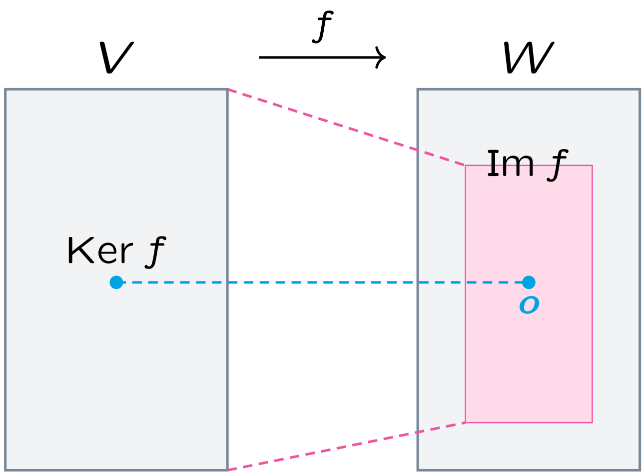
つまり、線形写像 f の核 $\mathrm{Ker}\, f$ が、f の単射性と関係しそうである

また、線形写像 f の像 $\mathrm{Im}\, f$ が値域と一致するかどうかが、f の全射性と関係する



単射となるときの核

線形写像 f が単射であるとは、「潰れない」ということなので、次のような状況である



つまり、$\mathrm{Ker}\, f$ が零ベクトル $\boldsymbol{o}$ のみを含む状態であればよい

⚓ Theorem 5.2 – 線形写像の単射性と核の関係

f を線形写像とするとき、

$$f\ \text{が単射} \iff \mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$$

証明

Ker f の定義は

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}\}$$

これを踏まえて、次の 2 つが同値であることを示す

i. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$

ii. $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

このとき、$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ が $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ を意味するので、Ker f の元は零ベクトルのみになる

よって、$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$ が成り立つ ■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$ であれば、Ker f の元は零ベクトルのみである

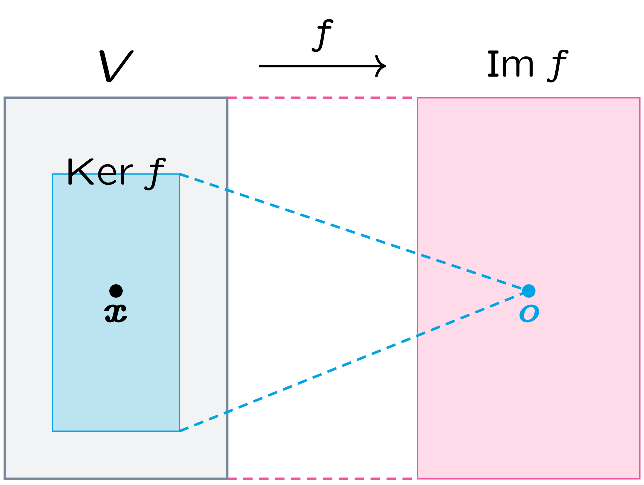
よって、$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ が成り立つとき、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ が成り立つことになる

すなわち、$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ が成り立つ ■

全射となるときの像

線形写像 f が全射であるとは、Im f が行き先の空間全体を埋め尽くす状態である

このような状態であれば、たしかに $f(\boldsymbol{x})$ が Im f からはみ出してしまうことはない



この状況を式で表すと、線形写像 $f\colon V \to W$ が全射であるとは、

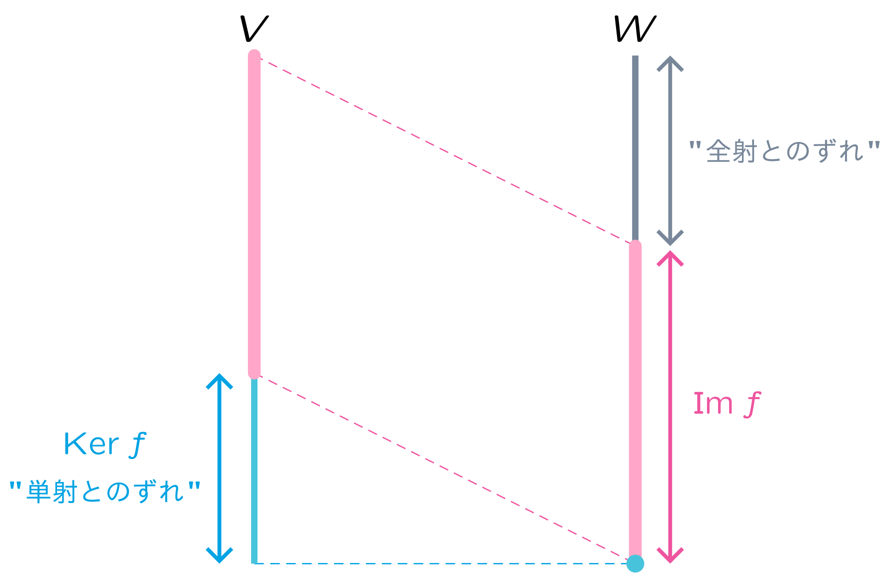
$$\mathrm{Im}\, f = W$$

という条件と同値である

単射・全射との離れ具合

$\mathrm{Ker}\, f$ が零ベクトルの集合に一致するなら f は単射であり、$\mathrm{Im}\, f$ が写り先全体に一致するなら f は全射である

このことから、$\mathrm{Ker}\, f$ と $\mathrm{Im}\, f$ は、それぞれ単射・全射と「どれくらいかけ離れているか」を測る尺度とも捉えられる



線形写像の像と線型独立性

Theorem – 線形写像と線形独立性

$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の f による像

$$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$$

が線型独立であるとき、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ も線型独立である

証明

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

を考える

この両辺を f で写すと、f の線形性と零ベクトルの像 $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ を使って

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

仮定より $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は線型独立なので、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である

よって、

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_n$ は 0 しかないので、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は線型独立である

■

次の定理は、平行なベクトルを線型写像で写した結果、平行でなくなったりはしないということを述べている

Theorem – 線形写像と線形従属性

$f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線形従属ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ は線形従属である

証明

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線形従属であるとは、少なくとも 1 つは 0 でないある定数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ が存在して

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

が成り立つことを意味する

この両辺を f で写すと、線形性より

$$k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ

よって、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線形従属である ■

たとえば平行四辺形の像が線分や 1 点になったりしないことなどは、「$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線型独立ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線型独立である」と表現できる

Theorem 5.3 – 単射な線型写像は線型独立性を保つ

線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が単射であるとき、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線型独立ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線型独立である

証明

$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ の線形結合

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$$

を考える

f の線形性と零ベクトルの像 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ より、次のように書き換えられる

$$f(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$$

f は単射だから、上式より

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

が成り立つ

ここで、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線型独立なので、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である

よって、$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は線型独立である ■

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	2