正規直交基底と表現行列

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像は、ある $m \times n$ 型行列 A によって表現される

ref: 線形代数セミナー p1〜3

これを定める基本的な方法は、

1. 定義域 $\mathbb{R}^n$ に一つの正規直交基底（互いに直交する単位ベクトル）$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を定める
2. それぞれが写像されるべき m 次元ベクトル（像）$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を指定する

という手順であり、このとき、行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{u}_1^\top + \cdots + \boldsymbol{a}_n \boldsymbol{u}_n^\top$$

と書くことができる（$\top$ は転置を表す）

実際、両辺に $\boldsymbol{u}_i$ をかけると、

$$A\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j \boldsymbol{u}_j^\top \boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_j \delta_{ij} = \boldsymbol{a}_i$$

より、

$$A\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が成り立つことがわかる

特に、$\mathbb{R}^n$ の正規直交基底として標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を選ぶと、行列

A は次のように表せる

$$
\begin{aligned}
A &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{e}_i^\top \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{1n} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_{11} & \cdots & \boldsymbol{a}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_{m1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{mn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

すなわち、表現行列 A は、

> 像 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を列として順に並べた行列 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$

となる