行列の転置

行列 $A = (a_{ij})$ に対し、その成分の行と列の位置を交換してできる行列を転置行列という

ref: 行列と行列式の基礎 p78

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p30

> 転置行列　$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 型行列とするとき、(i, j) 成分が a_{ji} である $n \times m$ 型行列を A の転置行列と呼び、${}^tA$ と表す

文字 t を左肩に書くのは、右肩に書くと t 乗に見えてしまうからである

t 乗と区別しつつ、右肩に書く流儀として、A^T と書く場合もある

ベクトルの転置

特別な場合として、n 次の数ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $n \times 1$ 型行列とみて転置したもの ${}^t\boldsymbol{v}$ は $1 \times n$ 型行列となる

すなわち、数ベクトルの転置は横ベクトルになる

このことを利用して、たとえば

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

を ${}^t(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ と表記することもある

転置の性質

転置は「行と列の入れ替え」であるので、明らかに次が成り立つ

転置操作の反復不変性　${}^tA$ に対して、転置をもう一度して得られる行列は A と一致する

$$ {}^t({}^tA) = {}^{tt}A = A $$

転置と行列積の順序反転性　行列 A, B の積 AB が定義できるとき、

$$ {}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA $$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p78 命題 2.5.3]

行列の和に対する転置の分配性　A と B が同じ型の行列であるとき、

$$ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB $$

証明

[Todo 2:]

対称行列と交代行列

正方行列 A が「転置しても元と変わらない」としたら、A の成分は左上から右下にかけての対角線に関して対称（$a_{ij} = a_{ji}$）になっている

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p30

対称行列　正方行列 A が次を満たすとき、A を対称行列という

$$^{t}A = A$$

交代行列　正方行列 A が次を満たすとき、A を交代行列という

$$^{t}A = -A$$

対称行列の性質

任意の行列の積で構成される対称行列　A を任意の実行列（長方行列）とするとき、$A^\top A$ および $AA^\top$ は対称行列である

証明

積の転置をとると順序が入れ替わることに注意して、

$$(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A$$

よって、$A^\top A$ は対称行列である

同様に、

$$(AA^\top)^\top = (A^\top)^\top A^\top = AA^\top$$

よって、$AA^\top$ も対称行列である　■

Zebra Notes

Type	Number
todo	2