置換と互換

たとえば、$(1, 2, 3, 4)$ を並び替えた列 (i, j, k, l) があるとして、

ref: 行列と行列式の基礎 p155〜158

$$
\begin{aligned}
1 &\longmapsto i \\
2 &\longmapsto j \\
3 &\longmapsto k \\
4 &\longmapsto l
\end{aligned}
$$

というように、番号を並び替える操作そのものを写像とみなし、置換と呼ぶ

置換　集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への写像 σ が全単射であるとき、σ は n 次の置換であるという

たとえば、

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1$$

によって 3 次の置換を定めることができる

この置換を、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

と表記する

置換の積

写像とみる利点の 1 つは、積が定義できることである

もう 1 つの置換

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

が与えられたとき、合成写像 $\sigma \circ \tau$ は、

$$
\begin{aligned}
1 &\xmapsto{\tau} 1 \xmapsto{\sigma} 2 \\
2 &\xmapsto{\tau} 3 \xmapsto{\sigma} 1 \\
3 &\xmapsto{\tau} 2 \xmapsto{\sigma} 3
\end{aligned}
$$

なので、

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

である

通常、合成の記号 $\circ$ を書かずに $\sigma\tau$ と表記する

なお、$\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ は一般に異なる

写像の合成の結合法則から、置換の積でも結合法則が成り立つ

⚓ 置換の積の結合法則

$$(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$$

恒等置換

恒等写像

$$\begin{gathered} \mathrm{id}\colon \{1, 2, \ldots, n\} \longmapsto \{1, 2, \ldots, n\} \\ \mathrm{id}(i) = i \quad (1 \leq i \leq n) \end{gathered}$$

は置換であるので、これを恒等置換と呼び、

$$e = \mathrm{id}$$

と書く

任意の置換 σ に対して、明らかに

$$\sigma e = e\sigma = \sigma$$

が成り立つ

また、次の性質はのちに行列式の性質を議論する際に重要になる

⚓ 恒等置換の単調性による特徴づけ　$i \leq \sigma(i)$（あるいは $i \geq \sigma(i)$）を満たす置換 σ は恒等置換しか存在しない

証明

σ が恒等置換でないと仮定する

条件 $i \leq \sigma(i)$ より、「元の位置より後ろに移される」、すなわち「すべてが自分以上に移る」ことになる

たとえば、1 を 2 に、2 を 3 に、...、$n-1$ を n に写す置換を考える

しかし、集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の要素は n 個しかないので、n を $n+1$ に写すことはできない

そこで、n を n に写すとすると、$n-1$ も n も n に写ることになり、これは置換が全単射であるという定義に反する

$i \geq \sigma(i)$ の場合も、「元の位置より前に移される」、すなわち「すべてが自分以下に移る」ことになると考えると、同様の矛盾が生じる

よって、σ は恒等置換でなければならない ■

逆置換

置換 σ は、定義より全単射であるので、逆写像 σ^{-1} が存在する

これを逆置換と呼ぶ

置換の集合

すべての n 次の置換からなる集合は群と呼ばれる構造を持っている

これを n 次対称群と呼び、記号 S_n で表す

互換

置換の中で最も基本的なのは、2 文字だけを交換する置換である

互換　$1 \leq i \neq j \leq n$ のとき、$\sigma(i) = j,\ \sigma(j) = i$ であって、k が $i,\ j$ 以外のとき $\sigma(k) = k$ とすることで得られる置換を

$$\sigma = (ij)$$

と書き、このような置換を互換という

たとえば、

$$(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

互換の逆置換

互換は (ij) と書いても (ji) と書いても同じ操作を表す

i と j を交換してから j と i を交換すると元に戻るが、この (ij) と (ji) は互換としては同じなので、

> 互換の逆置換は自分自身

である

置換の一行表示

置換を表す 2 行の表示は、下の行だけで情報としては十分なので、たとえば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を $\sigma = 14325$ などと書いてしまうと便利である

これを σ の一行表示と呼ぶ

互換と置換の積

一行表示を用いた場合、互換と置換の積はたとえば次のように書ける

$\sigma = 14325$ とすると、

$$(12)\sigma = 24315, \quad \sigma(12) = 41325$$

$(12)\sigma$ は、$\sigma = 14325$ に互換 (12) を作用させて、24315 となる

$\sigma(12)$ は、12345 に互換 (12) を作用させて 21345 とし、さらに置換 σ を作用させることを意味する

置換 σ は、4 と 2 を入れ替える置換なので、21345 に対して σ を作用させると、41325 となる

この例の結果を一般的に述べると、次のようになる

⚓ **互換と置換の積**　$\sigma \in S_n$ に対して、$\tau = (ij)$ を左からかけた $\tau\sigma$ の一行表示は、σ の数字 i と j を交換したものである

また、τ を右からかけた $\sigma\tau$ の一行表示は、σ の i 番目の数字と j 番目の数字を交換したものである

互換の積への分解

たとえば、$\sigma = 2413$ とすると、これは、

1. 1234 の 3 と 4 を交換して 1243
2. 1243 の 1 と 2 を交換して 2143
3. 2143 の 2 と 3 を交換して 2413

というように、互換に分解して考えることができる

数式でまとめると、

$$\sigma = (34)(12)(23)$$

⚓ **互換の積への置換の分解**　任意の置換 σ は、いくつかの互換の積として書ける

証明

n に対する帰納法を用いる

$n=1$ のときは、互換の定義における $i,\ j$ の条件を満たさず、$i,\ j$ 以外の k について $\sigma(k)=k$ とすることで得られる置換に相当するので、1 つの互換とみなせる

$(n-1)$ 次以下の置換が互換の積で書けることを仮定する
σ を n 次の置換とし、$\sigma(n)$ の値を c とする

$c=n$ すなわち $\sigma(c)=c$ の場合、σ は c をまったく動かしていないため、実質的に $c-1$ までの数字だけを並び替えていることになる
そのため、σ は $c-1$ すなわち $(n-1)$ 次の置換とみなせるため、帰納法の仮定より、互換の積として書ける

$c\neq n$ の場合、$\sigma(c)$ を d とし、d と c を交換する互換 $\tau=(cd)$ を考える
このとき、$\tau\sigma$ は、σ の数字 c と d を交換したものであるので、

$$\tau\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & c-1 & c & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & c-1 & \sigma(c) & \cdots & n\end{pmatrix}$$

c が n に一致しないという仮定をふまえると、

$$\tau\sigma(n)=n$$

であることが読み取れる
よって、$\tau\sigma$ は実質的に $(n-1)$ 次の置換とみなせるので、帰納法の仮定より、互換の積として書ける

$$\tau\sigma=\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

ゆえに、

$$\sigma=\tau^{-1}\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

であるが、互換の逆置換は自分自身であるので、

$$\sigma=\tau\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

と書ける ■

置換の符号と偶奇

すべての置換は互換の積に分解できるが、その方法は一通りではない

しかし、互換の積の個数の偶奇性は、置換が与えられれば定まる

このことを証明するために、置換と多項式の関係を考察する

ref: 行列と行列式の基礎 p177〜179、p158〜159

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p103

置換の多項式への作用

置換 $\sigma \in S_n$ と n 変数多項式 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ が与えられたとき、変数 x_i に $x_{\sigma(i)}$ を代入することにより、式 σf を

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

と定める

⚓ 置換作用の結合法則 $f = f(x_1, \dots, x_n)$ を n 変数の多項式とし、$\sigma, \tau \in S_n$ とするとき、

$$(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$$

証明

式 τf は、

$$(\tau f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)})$$

である

さらに σ を作用させると、$x_{\tau(i)}$ は $x_{\sigma(\tau(i))} = x_{(\sigma\tau)(i)}$ に置き換わるので、

$$\begin{aligned}(\sigma(\tau f)) &= f(x_{(\sigma\tau)(1)}, \ldots, x_{(\sigma\tau)(n)}) \\ &= ((\sigma\tau)f)(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

が成り立つ ■

互換の差積への作用

次のような n 変数の多項式を差積と呼ぶ

$$\begin{array}{cccc}(x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) & \cdots & (x_1 - x_n) \\ & (x_2 - x_3) & \cdots & (x_2 - x_n) \\ & & \ddots & \\ & & & (x_{n-1} - x_n)\end{array}$$

差積　次のような n 変数の多項式を差積と呼ぶ

$$\Delta_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$$

置換の符号を理解するために、差積を使うことができる

その第一歩となるのが、次の定理である

互換による差積の符号変化　τ を互換とするとき、

$$\tau \Delta_n = -\Delta_n$$

証明

$i < j$ として、$\tau = (ij)$ とすると、各因子 $x_s - x_t \, (1 \leq s < t \leq n)$ の変化は次のようになる

$x_i - x_j$ は $x_j - x_i$ になる

x_i と x_j を入れ替えることで、その差が逆転して符号が反転する

$$x_j - x_i = -(x_i - x_j)$$

よって、この項は -1 倍の効果をもたらす

$s < i < j$ のとき、$x_s - x_i$ と $x_s - x_j$ が入れ替わる

この場合、s は i, j より前の添字である

- 互換前： $(x_s - x_i)(x_s - x_j)$
- 互換後： $(x_s - x_j)(x_s - x_i)$

2 つの項が交換されるだけなので、積の絶対値は変わらず、符号にも影響しない

$i < j < s$ のとき、$x_i - x_s$ と $x_j - x_s$ が入れ替わる

この場合、s は i, j より後の添字である

- 互換前： $(x_i - x_s)(x_j - x_s)$
- 互換後： $(x_j - x_s)(x_i - x_s)$

この場合も、並び順だけが入れ替わり、符号には影響しない

$i < s < j$ のとき、$x_i - x_s$ と $x_s - x_j$ は…

この場合、s は i と j の間にある添字である

- 互換前： $(x_i - x_s)(x_s - x_j)$
- 互換後： $(x_j - x_s)(x_s - x_i)$

互換前の積を変形してみると、

$$\begin{aligned}(x_i - x_s)(x_s - x_j) &= -(x_i - x_s)(x_j - x_s) \\ &= (x_s - x_i)(x_j - x_s) \\ &= (x_j - x_s)(x_s - x_i)\end{aligned}$$

という形で、互換後の積が得られる

よって、この場合も積の符号は変わらない

以上をふまえると、符号が反転するのは $x_i - x_j$ の項だけである

よって、1 回の互換 (ij) によって、差積全体は (-1) 倍される

■

置換の符号

置換による差積の符号変化　置換 $\sigma \in S_n$ が s 個の互換の積として書けるならば、

$$\sigma\Delta_n = (-1)^s\Delta_n$$

が成り立つ

証明

置換 σ を s 個の互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s$ と書いたとき、

$$\sigma\Delta_n = (\tau_1 \cdots \tau_s)\Delta_n$$

置換作用の結合法則を用いて、

$$\sigma\Delta_n = (\tau_1 \cdots \tau_{s-1})(\tau_s\Delta_n)$$

互換による差積の符号変化を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}\sigma\Delta_n &= (\tau_1 \cdots \tau_{s-1})(-\Delta_n) \\ &= (-1)(\tau_1 \cdots \tau_{s-1})\Delta_n \\ &= (-1)^s\Delta_n\end{aligned}$$

が最終的に得られる　■

この定理における $\sigma\Delta_n$ は、σ をどのような互換の積として表すかとは無関係に、σ が与えられれば決まる多項式である

そして、$(-1)^s$ という部分から、σ を互換の積で表したとき、その個数 s が偶数であれば符号は $+$ に、奇数であれば符号は $-$ になることがわかる

このようにして、次の定理が示されたことになる

置換の符号の存在　置換 σ を互換の積として書くとき、用いられる互換の個数の偶奇は σ のみによって決まる

そこで、置換の符号を次のように定義する

置換の符号　置換 $\sigma \in S_n$ を互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_i$ として書いたとき、σ の符号を

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^i$$

と定義する

そして、互換の個数の偶奇をそのまま、置換の偶奇として定める

偶置換と奇置換　置換 $\sigma \in S_n$ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ が $+1$ であれば σ を偶置換と呼び、-1 であれば奇置換と呼ぶ

置換の性質

ref: 行列と行列式の基礎 p157、159

逆置換の符号

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

証明

置換 σ を互換の積として書くと、逆置換はその互換の順序を逆にしたものになる

すなわち、$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s$ とすると、

$$\sigma^{-1} = \tau_s^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$$

であるが、互換の逆置換は自分自身であるので、

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = (-1)^s = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

が成り立つ ■

置換の符号の乗法性

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

証明

それぞれを互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_i$、$\tau = \rho_1 \cdots \rho_j$ と書くと、

$$\sigma\tau = \tau_1 \cdots \tau_i \rho_1 \cdots \rho_j$$

である

このとき、$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^i$, $\operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^j$ なので、

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{i+j} = (-1)^i(-1)^j = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)$$

が成り立つ ■

置換群の左右作用に対する和の不変性　f を S_n 上の関数とするとき、任意の $\tau \in S_n$ に対して、次が成り立つ

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\tau\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma\tau)$$

証明

τ を固定して、σ をすべての置換（S_n の元）全体にわたって動かすとき、$\tau\sigma$ も S_n の全体を動く

言い換えると、写像 $S_n \to S_n$ を $\sigma \longmapsto \tau\sigma$ と定めると、これは全単射である

したがって、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\tau\sigma)$$

が成り立つ

同様に、写像 $S_n \to S_n$ を $\sigma \longmapsto \sigma\tau$ と定めると、これも全単射であるので、同様に、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma\tau)$$

が成り立つことがわかる　■