




行基本変形

連立一次方程式を行列によってとり扱うとき、1 つ 1 つの方程式は行列の行によって表されている

ref: 行列と行列式の基礎 p25

よって、行列の行に関する次のような操作（変形）を考えることは自然である

 行基本変形 行列への次の 3 種類の操作を行基本変形という

- i. ある行の定数倍を他の行に加える
- ii. ある行に 0 でない数をかける
- iii. 2 つの行を交換する

原則として上三角型を目指してこのような変形を繰り返すが、いつでも上三角型にできるわけではなく、**行階段行列**と呼ばれる形を作っていくのが**掃き出し法**と呼ばれる手法である



行階段行列

掃き出し法では、あるステップで下の成分がすべて 0 になって、

ref: 行列と行列式の基礎 p26~28

$$\begin{pmatrix} \spadesuit & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のような形になるのが典型例である

0 でない成分を ♠ で、任意の値をもつ成分を * で表した

一般には、成分が 0 ばかりの行が下にくる

そのような行を**零行**という


零行が現れない場合もあるし、複数現れる場合もある

零行でない行に対して、一番左の 0 でない成分 ♠ を**主成分**と呼ぶ

先ほど示した形では、行の主成分は左上から斜め右下 45° 方向にまっすぐ並んでいるが、一般にはそうできるとは限らない

しかし、次のような形には必ずできる

$$\begin{pmatrix} 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 **行階段行列** 次の条件を満たす行列を**行階段行列**という

- 零行でない行の主成分が、下の行ほど 1 つ以上右にある
- 零行がある場合は、まとめてすべて下にある


どんな行列も、行基本変形の繰り返しで行階段行列にできる



行列の階数

行階段行列に変形することで、重要な量が読み取れる

ref: 行列と行列式の基礎 p28~29

 **行列の階数** 行列 A を行階段行列に変形したとき、零行でない行の個数を A の**階数** (rank) と呼び、 $\text{rank}(A)$ と書く

変形の結果として得られる行階段行列は 1 通りとは限らないし、変形の途中の掃き出しの手順も 1 通りとは限らないが、階数は A のみによって定まる値であることが後に証明できる



A が $m \times n$ 型ならば、行は m 個なので、 $\text{rank}(A)$ は 0 以上 m 以下の整数である

行階段行列において、零行でない行の個数は主成分の個数と一致するので、階数は行階段行列に変形したときの主成分の個数でもある

行基本行列の主成分は各列に高々 1 つなので、主成分の個数は列の個数 n を超えない

したがって、次の重要な評価が成り立つ

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min(m, n)$$



簡約化された行階段行列

必要に応じて、行階段行列をさらに変形して次のような形にする

ref: 行列と行列式の基礎 p29~30

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行の主成分はすべて 1 で、主成分のある列の主成分以外の成分はすべて 0 である

この形を**簡約化された行階段行列**と呼ぶ

与えられた行列 A に対して、行基本変形の繰り返しで得られる行階段行列は一意的ではないが、簡約化された行階段行列は一意的であることを後に議論する

そこで、簡約化された行階段行列を A_0 と書くことにする



変形の過程を

行列 $A \rightarrow$ 行階段行列 \rightarrow 簡約化された行階段行列 A_0 。

と 2 段階にわけるのは、計算の効率以上の意味がある

行階段行列にするところまでで解決する問題（解の存在と一意性など）もあるからである