確率の公理と確率空間の定義

ここでは、集合を使って確率を定義する

ref: スッキリわかる確率統計 p67〜70

事象と集合を同一視する

事象という概念を導入することにより、実験や観測による結果を集合に対応させることができた

$$\text{観測結果（事象）} \quad \longleftrightarrow \quad \text{集合}$$

いわば、確率のもととなる事柄を集合に閉じ込めたことになる

集合演算に関する閉性を持たせる

確率が定義される事象の全体 $\mathscr{A}$ を考える

このとき、確率を数学の世界に閉じ込めるため、$\mathscr{A}$ に集合の演算に関して閉じていることを要求する

具体的には、$\mathscr{A}$ に対して次の 3 つを要求する

i. 空事象 $\emptyset$ と全事象 Ω は $\mathscr{A}$ に含まれる
ii. 事象 A, B が $\mathscr{A}$ に属するとき、その和事象 $A \cup B$、積事象 $A \cap B$、また、A の余事象 A^c も $\mathscr{A}$ に属する
iii. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ が $\mathscr{A}$ に属せば、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も $\mathscr{A}$ に属する

ここで、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は、「$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ のいずれかが起こる」という事象を表している

たとえば、サイコロを投げる試行において、

- 「いつかは 1 の目が出る」という事象を A
- 「n 回目に初めて 1 の目が出る」という事象を A_n

とすると、

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

と表される

補足：σ-加法族

$\mathscr{A}$ は事象の全体、つまり、部分集合の全体なので、集合の集まりである

このような「集合の集合」を集合族という

そして、先ほどの 3 つの条件を満たす集合族 $\mathscr{A}$ を σ-加法族という

どの立場の確率でも成り立つ性質を抽出する

ある事象 A の確率 $P(A)$ が満たすべき条件を考えてみる

確率 $P(A)$ は、事象 A が起こる可能性を表すので、

- 事象が全く起こらないとき：$P(A) = 0$
- 事象が必ず起こるとき：$P(A) = 1$

と考えることができる

そこで、確率 $P(A)$ は次の範囲の値をとりうるものとする

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

しかし、この不等式だけでは、$P(A)$ が 0 や 1 になるのはどんな場合なのかを示すことはできない

「事象が必ず起こるときの確率は 1」「事象が全く起こらないときの確率は 0」という、直観的には当たり前の事実も確率の定義に含める必要がある

事象 A がいつも起こるときは、事象 A は起こりうるすべての場合を含んでいることになるので、A は全事象である
そこで、全事象を Ω とし、次の条件を定義に追加する

$$P(\Omega) = 1$$

同様に、「事象が全く起こらないときの確率は 0」という事実は、次のように表される

$$P(\emptyset) = 0$$

しかし、実はこの式は確率の定義の他の条件から導出できるので、定義には加えないことにする

最後に、「互いに排反な事象は別々に起こる」という性質も、確率の定義に含めることが重要である

A または B が起こる確率は、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

であるが、A と B が互いに排反であるときは、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

これと同様のことが、事象が増えても成り立つことを定義として要求する

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$$

確率と確率空間の定義

以上の議論から、確率を次のように定義する

公理論的立場の確率と確率空間　標本空間 Ω の部分空間を A とし、$\mathscr{A}$ を σ-加法族とする

このとき、次の 3 つの性質を満たす関数 $P(\cdot)$ を事象 A の確率、あるいは $(\Omega, \mathscr{A})$ 上の確率という

i. 任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して、$0 \leq P(A) \leq 1$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. 完全加法性：任意の互いに排反な事象 $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ に対して、$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

なお、3 つの組 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ を**確率空間**という