第 1 章

行列の階数と解の性質

拡大係数行列と連立方程式の同値変形

A を m 行 n 列の行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とするとき、線形方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

は、n 個の文字 $x_1, \ldots, x_n$ に関する m 本の連立方程式である。

$\boldsymbol{x}$ は未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を成分とするベクトルである。

このとき、A は方程式の係数行列と呼ばれ、A の右端に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を追加して得られる m 行 $(n+1)$ 列の行列

$$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$$

を拡大係数行列という。

掃き出し法による連立一次方程式の解法では、拡大係数行列 $\tilde{A}$ のうち、係数行列 A の部分を既約行階段形に変形することで、解を読み取ることを目指した。

$$\tilde{A}の変形後 = \begin{array}{c} \begin{matrix} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & \phantom{b_{r+1}} \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_m \end{array}\right) \\ \underset{n}{\longleftrightarrow} \end{array}$$

途中の行基本変形を表現する基本行列を順に $P_1, P_2, \ldots, P_k$ として、

$$P = P_k \cdots P_2 P_1$$

とおくと、行基本変形を施した後の行列は、

$$P\tilde{A} = P(A \mid \boldsymbol{b}) = (PA \mid P\boldsymbol{b})$$

すなわち、

$$PA = \begin{array}{c} \begin{matrix} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underset{n}{\longleftrightarrow} \end{array}, \quad P\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

と表せる。

つまり、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longrightarrow PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$

であり、基本行列の積 P は正則であるから、両辺に左から P^{-1} をかけることで $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に戻せるので、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$

よって、与えられた連立方程式は、係数部分を既約行階段形に変形した形の連立方程式と同値である。

行基本変形によって得られる方程式の解は、
元の方程式の解と同じ

これが、掃き出し法による連立一次方程式の解法の根拠となる。
変形後の拡大係数行列から、解を読み取ればよい。

連立方程式の解のパターン

方程式を解くということは、次のような問題に答えることである。

A. **解の存在**：解は存在するか？
B. **解の一意性**：解が存在する場合、それはただ 1 つの解か？
C. **解の自由度**：解が複数存在する場合、どれくらい多く存在するのか？
D. **解のパラメータ表示**：解全体の集合をいかにしてわかりやすく表示できるか？

連立方程式において、解が 1 つに定まらない場合を不定、そもそも解が存在しない場合を不能と呼ぶ。
不定の場合は、問題 C と問題 D に答えることが方程式を「解く」ことになる。

不能かどうかを判断するのが問題 A、不定かどうかを判断するのが問題 B だが、これらは次のように変形された拡大係数行列から判断することができる。

$$\tilde{A}\text{の変形後} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_m \end{array}\right) \\ \underset{\text{n}}{\longleftrightarrow} \end{array}$$

このような係数拡大行列において、方程式の解が存在するのは、

$$b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$$

の場合に限る。

つまり、

$$\tilde{A}\text{の変形後} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underset{\text{n}}{\longleftrightarrow} \end{array}$$

というような形に変形された場合、$0 = 0$ という常に成り立つ等式の本数だけ解の不定性（解が定まらない変数）が残るが、解は存在する。

仮に $b_{r+1}, \ldots, b_m$ のうち、1 つでも 0 でないものがある場合、解は存在しない。

たとえば、

$$
\tilde{A}\text{の変形後} =
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc}
j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & & \\
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right) \\
\underset{n}{\longleftrightarrow}
\end{array}
$$

という形が得られた場合は、$0 = -1$ という常に成り立たない等式が含まれているので、連立されたすべての方程式を満たす解は存在しないことになる。

一般解のパラメータ表示

解が 1 つに定まらない場合は、解の全体像を知ることが方程式を「解く」ことになる。

無数個の解が存在する場合、解の集合が直線を成していたり、もっと高い次元の図形になっていることがある。

主変数と自由変数

係数行列 A の n 個の列が、n 個の変数に対応していることを思い出そう。

主変数と自由変数　行列 A を行基本変形により行階段形にしたとき、主成分がある列に対応する変数を**主変数**と呼び、それ以外の変数を**自由変数**と呼ぶ。

たとえば、次のような既約行階段形に変形した拡大係数行列を考える。

$$\tilde{A}_\circ = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & & 3 & 4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underset{5}{\longleftrightarrow} \end{array}$$

変数を使って方程式の形に直すと、

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

主成分がある列は $1, 3, 4$ 列なので、主変数は x_1, x_3, x_4 である。

それ以外の x_2, x_5 は自由変数となる。

自由変数とパラメータ

先ほどの方程式

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - x_5 = -3 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad + 2x_5 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

において、自由変数を含む項を左辺に移行すれば、

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_5 - 3 \\ x_3 = \qquad - 2x_5 + 1 \\ x_4 = \qquad - x_5 + 2 \end{cases}$$

となる。

自由変数 x_2, x_5 に任意の値を代入したときの主変数 x_1, x_3, x_4 の値はすべてこの方程式の解になる。

自由変数の値は定まらないので、任意の値を取りうる文字として表すしかない。

そこで、

$$x_2 = t_1, \quad x_5 = t_2$$

とおけば、

$$
\begin{cases}
x_1 = -2t_1 + t_2 - 3 \\
 x_3 = - 2t_2 + 1 \\
 x_4 = - t_2 + 2
\end{cases}
$$

すなわち、

$$
\begin{cases}
x_1 = -2t_1 + t_2 - 3 \\
x_2 = t_1 \\
x_3 = - 2t_2 + 1 \\
x_4 = - t_2 + 2 \\
x_5 = t_2
\end{cases}
$$

と書ける。

これをベクトル形に直すことで、一般的な解のパラメータ表示が得られる。

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

各行の方程式から得られる一般解

先ほどの具体例を一般化して考えてみよう。

次のように変形された係数拡大行列のうち、係数行列部分において主成分を含む列を $j_1, j_2, \ldots, j_r$ とする。

$$
\tilde{A}\text{の変形後} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\xleftrightarrow{\qquad\qquad n \qquad\qquad}
\end{array}
$$

すると、各行の方程式は次のような形になる。

$$x_{j_i} + \sum_k \star x_k = b_i$$
$$(k > j_i, k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\})$$

ここで、x_k は j_i 列よりも右にある、$\star$ に対応する変数である。

既約行階段形では、主成分を含む列の主成分以外の要素はすべて 0 であるため、$\star$ に対応する自由変数のみが残る。
そのため、$k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ という条件によって、$\star$ だけを残すようにしている。

移項して主変数 x_{j_i} について解いた形にすると、各行から得られる解は、

$$x_{j_i} = b_i - \sum_k \star x_k$$

となる。

この式から、$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外の自由変数 x_k に勝手な数を与えるごとに、主変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ が定まることがわかる。

このような自由変数は $n - r$ 個あるので、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は、$n - r$ 個のパラメータを用いて表すことができる。

基本解と特殊解

自由変数 $\star$ をパラメータ t_i とおき、各行の方程式から得られる解を縦に並べてベクトルの形にまとめると、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}' - \sum_{i=1}^{n-r} t_i \boldsymbol{u}_i$$

という形の一般解の表示が得られる。

ここで、パラメータ t_i をかけた列ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を連立方程式の基本解という。
また、パラメータをかけていない列ベクトル $\boldsymbol{b}'$ は、変形後の拡大係数行列 $(A' \mid \boldsymbol{b}')$ の定数項部分 $\boldsymbol{b}'$ から得られるベクトルであり、これを特殊解という。

行列の階数

ここで、主成分の個数 r に名前をつけておこう。

行階段行列において、主成分とは、零行でない行の中で一番左にある 0 でない成分のことを指す。
つまり、行階段行列の主成分の個数 r は、零行でない行の数と一致する。

行列の階数　行列 A を行階段行列に変形したとき、零行でない行の個数を A の階数あるいはランクといい、$\operatorname{rank} A$ と書く。

零行でない行の個数は、既約行階段行列まで変形しなくても、行階段行列の時点で読み取れることに注意しよう。

変形の結果として得られる行階段行列は 1 通りとは限らないし、変形の途中の掃き出しの手順も 1 通りとは限らないが、

階数 $\operatorname{rank} A$ は A のみによって定まる値である

ことが後に証明できる。

階数のとりうる値の範囲

A が $m \times n$ 型ならば、行は m 個なので、$\operatorname{rank} A$ は 0 以上 m 以下の整数である。

また、階数は行階段行列に変形したときの主成分の個数でもあり、行基本行列の主成分は各列に高々 1 つなので、主成分の個数は列の個数 n を超えることはない。

したがって、次の重要な評価が成り立つ。

⚓ 行列の階数の範囲　$m \times n$ 型の行列 A の階数に対して、次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$$

解の自由度

連立方程式は、解が存在する場合、$n-r$ 個のパラメータを用いて一般解を表現できた。

パラメータの個数は、自由変数の個数でもあり、基本解の個数でもある。
パラメータの個数だけ、自由に値を決めることができる未知数が方程式に含まれているということである。

そこで、解を表すパラメータの個数を解の自由度と呼ぶ。

$$\begin{aligned}\text{解の自由度} &= \text{変数の個数} - \mathrm{rank}(A) \\ &= n - r\end{aligned}$$

解の自由度は、解全体のなす集合の大きさ、すなわち何次元の空間なのかを表している。

解の存在条件

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の存在条件について、階数を用いて議論することができる。

まず、行基本変形によって得られる方程式の解は、元の方程式の解と同じであった。

そこで、次のように変形した拡大係数行列をもとに考えると、

$$
\tilde{A}\text{の変形後} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_m
\end{array}\right) \\
\begin{array}{c} \longleftarrow \; n \; \longrightarrow \end{array}
\end{array}
$$

この方程式の解が存在するのは、

$$
b_{r+1} = \cdots = b_m = 0
$$

の場合のみであることをすでに考察した。

ここで、拡大係数行列 $\tilde{A}$ は A の右端に 1 列追加して得られるので、零行でない行の個数、すなわち階数を考えると、$\operatorname{rank} \tilde{A}$ は $\operatorname{rank} A$ と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかである。

$b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$ の場合、$\operatorname{rank} \tilde{A}$ と $\operatorname{rank} A$ は一致する。

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\longleftarrow \; n \; \longrightarrow
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\longleftarrow \; n \; \longrightarrow
\end{array}
$$

一方、$b_{r+1}, \ldots, b_m$ のうち、1 つでも 0 でないものがある場合は、拡大係数行列の右端の列に主成分が現れ、$\operatorname{rank} \tilde{A}$ と $\operatorname{rank} A$ は一致しない。

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\xleftrightarrow{\qquad\qquad} \\
n
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\xleftrightarrow{\qquad\qquad} \\
n
\end{array}
$$

$b_{r+1}, \ldots, b_m$ のうち、0 でないものが 2 つ以上ある場合も、さらに行基本変形を行うことで、右上の拡大係数行列と同じ形にできるので、

$$\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A + 1$$

となる。

以上の考察から、連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する条件は、

係数行列と拡大係数行列の階数が等しい

ことだといえる。

拡大係数行列と解の存在条件　A を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする

$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ とおくとき、

$$\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A) \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

証明

[Todo 1: book: 行列と行列式の基礎 p31 （定理 1.5.1）]

⚓ 解の存在条件の系　A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$^\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する} \iff \mathrm{rank}(A) = m$$

証明

[Todo 2: book: 行列と行列式の基礎 p32 （定理 1.5.2, 1.5.3）]

解の一意性

ここまでの議論から、次のことがいえる。

⚓ 解の一意性　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するとき、

$$\text{解が一意的である} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である。

証明

$\Longleftarrow$

$\mathrm{rank}(A) = n$ であれば、解の自由度は $n - n = 0$、すなわち自由変数が存在しないことになる

自由変数がなければ「各変数＝定数」という式に変形できることになるので、解は明らかに一意的である　■

$\Longrightarrow$

対偶 $\mathrm{rank}(A) \neq n \Longrightarrow$ 解が一意的 を示す

$\mathrm{rank}(A) \leq n$ であるので、$\mathrm{rank}(A) \neq n$ は $\mathrm{rank}(A) < n$ を意味する

$\mathrm{rank}(A) < n$ であれば、自由変数が 1 つ以上存在するので解は無数にある

よって、解は一意的ではない ■

解のパラメータ表示の一意性

自由変数を $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ とするとき、一般解の表示

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

の j_k 番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる

このことから、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の $n - r$ 個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる

この事実は、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^m$ が線形独立であると表現される

斉次形方程式の非自明解

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ の場合、つまり、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

の形の線形連立方程式は斉次形であるという。

斉次形の場合は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が明らかに解になっていて、これを自明解という。

したがって、斉次形の方程式では、自明解以外に解が存在するかどうかが基本的な問題となる。

斉次形方程式の非自明解の存在条件　斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ において、

$$\text{自明解しか存在しない} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である。

証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性 $\mathrm{rank}(A) = n$ は、それ以外の解がないということを意味している。 ■

斉次形方程式と一般解

一般解のパラメータ表示の章で具体例として挙げた連立一次方程式

$$(A' \mid \boldsymbol{b}') = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} 1 & & 3 & 4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array}$$

すなわち、

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - \ \ x_5 = -3 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad + 2x_5 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 + \ \ x_5 = 2 \end{cases}$$

の一般解は、次のようなパラメータ表示として得られた。

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{特殊解}} + t_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{基本解}} + t_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{基本解}}$$

この一般解を、ここでは別なアプローチで考察する。

特殊解は簡単に見つかる

自由変数 x_2, x_5 の値はなんでもよいので、これらを 0 とおいたもの

$$
\begin{cases}
x_1 & & & = -3 \\
& x_3 & & = 1 \\
& & x_4 & = 2
\end{cases}
$$

すなわち、

$$
\begin{cases}
x_1 & & & & & = -3 \\
& x_2 & & & & = 0 \\
& & x_3 & & & = 1 \\
& & & x_4 & & = 2 \\
& & & & x_5 & = 0
\end{cases}
$$

も方程式の解となる。

この解は、パラメータ表示された解 $\boldsymbol{x}$ の特殊解に一致しており、さらに、変形後の拡大係数行列 $(A' \mid \boldsymbol{b}')$ の定数項部分 $\boldsymbol{b}'$ からも直接読み取れることがわかる。

$$
\boldsymbol{x}_0 = \overset{\text{特殊解}}{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc|c} 1 & & 3 & 4 & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{array}\right)
\end{array}
$$

解のパラメータ表示の再解釈

基本解と特殊解の章でも述べたように、特殊解を $\boldsymbol{x}_0$、基本解を $\boldsymbol{u}_i$ とすると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は次のように表せる。

$$
\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}
$$

ここで、実は、

$$
A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}, \quad A\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{o}, \quad \ldots \quad , A\boldsymbol{u}_{n-r} = \boldsymbol{o}
$$

が成り立っている。

このことは次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} &= A(\boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}) \\ &= A\boldsymbol{x}_0 + t_1 A\boldsymbol{u}_1 + \cdots + t_{n-r}A\boldsymbol{u}_{n-r} \\ &= \boldsymbol{b} + t_1\boldsymbol{o} + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{o} \\ &= \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

つまり、基本解 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ は、もとの方程式において $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ とした斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解である。

1 つの解 $\boldsymbol{x}_0$ が見つかったら、あとは斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の一般解を求めればよい

この方法で、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のすべての解が見つかることになる。

斉次形方程式の特殊解は自明解

特殊解を $\boldsymbol{x}_0$ とすると、次の関係が成り立っていた。

$$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$$

ここで、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ とした場合を考えると、

$$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{o}$$

となるので、斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の特殊解 $\boldsymbol{x}_0$ は、自明解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ である。

つまり、斉次形方程式の一般解は、特殊解を除いた次のような形になる。

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

斉次形方程式の一般解を求めるということは、基本解を求めることに他ならない。

斉次形方程式の基本解も簡単に見つかる

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の基本解は、既約行階段形にした係数行列 $A_\circ$ の形を見てすぐに書き下せる。

たとえば、係数行列 A が次のように変形されたとする。

$$A_\circ = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & & 3 & 4 & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

自由変数 x_2, x_5, x_6 をパラメータとして t_1, t_2, t_3 とおくと、基本解 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ を用いて、一般解 $\boldsymbol{x}$ は次のように表せる。

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + t_3\boldsymbol{u}_3$$

ここで、$x_2 = t_1, x_5 = t_2, x_6 = t_3$ であるということは、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ が次のような形になっているはずである。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} \star \\ 1 \\ \star \\ \star \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ \star \\ \star \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ \star \\ \star \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この形であれば、各行を見ると、$x_2 = t_1, x_5 = t_2, x_6 = t_3$ が成り立つことがわかる。

$\star$ の部分については、変形後の係数行列から次のように読み取ればよい。

$$A_\circ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -7 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

このように係数行列から読み取った数の符号を変えたものを $\star$ の位置に並べるだけで解が得られる根拠は、次のように方程式 $A_\circ\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の形に直すとわかる。

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + 3x_5 \qquad - 5 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad + 7x_5 + 6x_6 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 - 4x_5 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

基本解 x_1, x_3, x_4 は、自由変数をパラメータに置き換えた上で移項することで求まるので、

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -2t_1 - 3t_2 + 5t_3 \\ \qquad x_3 \qquad = \qquad - 7t_2 + 6t_3 \\ \qquad\qquad x_4 = \qquad 4t_2 \end{cases}$$

この移項によって、変形後の係数行列に並んでいた数値から符号を変えたものが解として使われることになる。

斉次形方程式の一般解

先ほどの手順は、まず自由変数の位置をもとに単位ベクトルを考え、そこから主変数を構成する値を引いたものとして一般解を構成したと整理できる。

つまり、先ほど求めた一般解のパラメータ表示を

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + t_3\boldsymbol{u}_3$$

とおくと、各基本解 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ は、次のように見ることもできる。

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ここで、たとえば $\boldsymbol{u}_2$ は、さらに次のように展開できる。

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \boldsymbol{e}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \boldsymbol{e}_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \boldsymbol{e}_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

このことを一般化しておこう。

主変数の番号を $i_1, \ldots, i_r$、自由変数の番号を $j_1, \ldots, j_{n-r}$ とする。

$$
A_\circ = \begin{array}{c}
\begin{matrix} \ i_1 & \ j_1 & \ i_2 & \cdots & i_r & j_{n-r} \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
1 & b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 & b_{1,n-r} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{2,n-r} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,n-r} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$A_\circ$ の第 j_k 列を $(b_{ik})_{i=1}^{m}$ とするとき、基本解 $\boldsymbol{u}_k$ は、

$$
\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{e}_{j_k} - \sum_{l=1}^{r} b_{lk} \boldsymbol{e}_{i_l} \quad (k = 1, \ldots, n-r)
$$

と表すことができる。

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	2