




ユニタリ行列と直交行列


 ユニタリ行列 複素正方行列 A が次を満たすとき、 A を **ユニタリ行列** という

$$A^* = A^{-1}$$

ref: 長岡亮介 線形代数
入門講義 p275~276、
p279~282
ref: 行列と行列式の基
礎 p204

ユニタリ行列と内積

2つのベクトルそれぞれにユニタリ行列を左からかけても、それらの内積は変わらない

 ユニタリ行列の特徴づけとしての内積不変性 n 次複素行列 A がユニタリ行列であることと、任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

が成り立つことは同値である

 証明

ユニタリ行列ならば内積を保つ

随伴公式より、

$$(A\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, A^*A\mathbf{v})$$

ここで、 A がユニタリ行列であることは、

$$A^*A = E$$

と言い換えられるので、これを用いると、

$$(A\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

が成り立つ ■

内積を保つならばユニタリ行列

転置を用いて内積を表すと、

$$\begin{aligned}(A\mathbf{u}, A\mathbf{v}) &= {}^t(A\mathbf{u})(\overline{A\mathbf{v}}) \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= {}^t\mathbf{u}\overline{\mathbf{v}}\end{aligned}$$

これらが一致するというのが仮定なので、

$${}^t(A\mathbf{u})(\overline{A\mathbf{v}}) = {}^t\mathbf{u}\overline{\mathbf{v}}$$

この関係を用いて、行列 ${}^tA\overline{A}$ の (i, j) 成分を考えると、

$$\begin{aligned}{}^t(A\mathbf{e}_i)(\overline{A\mathbf{e}_j}) &= {}^t\mathbf{e}_i\overline{\mathbf{e}_j} \\ &= \delta_{ij}\end{aligned}$$

となり、これはすなわち、

$${}^tA\overline{A} = E$$

よって、両辺の複素共役をとることで、

$$A^*A = E$$


を得る

したがって、 A はユニタリ行列である ■

この定理において、 $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ の場合を考えると、ユニタリ行列とノルムに関する性質が導かれる

ユニタリ行列とノルム

ユニタリ行列を左からかけても、ベクトルのノルムは変わらない

 ユニタリ行列の特徴づけとしてのノルム不変性 n 次複素行列 A がユニタリ行列であることと、任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことは同値である

証明

A がユニタリ行列であることと、任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことは同値であった

ここで、 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ とすると、

$$(A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことになり、ノルムの定義より、

$$\|A\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{v}\|^2$$

すなわち、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|$$


がしたがう 

ユニタリ行列と直交性

A が実正方行列のときは、

$$A \text{ がユニタリ行列} \iff {}^tA = A^{-1}$$

となり、このような A は直交行列と呼ばれる

 直交行列 実正方行列 A が次を満たすとき、 A を直交行列という

$${}^tA = A^{-1}$$

直交行列という名前の由来は、次のように考えられる

A を n 個の列ベクトルを横一列に並べたものとみなし、

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

とおくと、 ${}^tA = A^{-1}$ 、すなわち ${}^tAA = E$ は、

$$\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}_n \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

と表される


これは、ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ が、次の性質

$${}^t\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$$

を満たすことを意味する

すなわち、直交行列 A の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は、互いに直交する単位ベクトルである

この事実は、複素行列に対しても成立する

 ユニタリ行列の列ベクトルの直交正規性 複素正方行列 A を $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ と列ベクトル分解するとき、

$$A \text{ がユニタリ行列} \iff (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$$

すなわち、ユニタリ行列の列ベクトルは、互いに直交する単位ベクトルである

証明

A がユニタリ行列であることは、任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$(A\mathbf{u}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

が成り立つことと同値であった

ここで、 $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i, \mathbf{v} = \mathbf{e}_j$ とすると、

$$(A\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

が成り立つことになる

左辺の $A\mathbf{e}_i$ について考えると、

$$\begin{aligned} A\mathbf{e}_i &= (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_i, \dots, \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \\ &= \mathbf{a}_i \end{aligned}$$

$A\mathbf{e}_j$ についても同様なので、

$$\begin{aligned} (A\mathbf{e}_i, A\mathbf{e}_j) &= (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \\ \therefore (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) &= \delta_{ij} \end{aligned}$$

となり、 A がユニタリ行列であることは、 $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$ へと同値変形できる 