確率統計の整理帳

tomixy

2025 年 7 月 2 日

目次

第 1 章

さまざまな立場の確率

古典的立場の確率

サイコロを 1 回投げると、1 から 6 のいずれかの目が出る

ref: スッキリわかる確率統計 p61～62

ここで、サイコロの目が 1 となる確率は、全体が 6 通りで、1 が出る場合は 1 通りしかないため、$\frac{1}{6}$ と考える

確率をこのように考えることを古典的立場あるいは組合せ的という

古典的立場による確率　全体で n 通りの場合があり、そのうちある事象 A が起こる場合の数が a 通りあるとき、事象 A の起こる確率を次のように定義する

$$P(A) = \frac{a}{n}$$

このように定義された確率を算術的確率あるいは先験的確率という

頻度的立場の確率

実際には、6 回サイコロを投げたときに、必ず 1 が 1 回出るわけではない

ref: スッキリわかる確率統計 p62〜63

サイコロを何回も（膨大な回数を繰り返し）投げれば、やがて 1 が出る確率は $\frac{1}{6}$ に近づいていく

一般的に述べると、n 回中 k 回だけ 1 が出た場合の割合 $\frac{k}{n}$ は、n が大きくなるにつれて一定値 $\frac{1}{6}$ に近づいていく
確率に対するこのような考え方を頻度的立場という

頻度的立場による確率　試行を n 回繰り返して行った場合に、ある事象 A の起こった回数を $k(n)$ とする

試行回数 n を増やしていくとき、割合 $\frac{k(n)}{n}$ が一定値 p に近づくならば、p を事象 A の起こる確率と定義する

$$P(A) = p = \lim_{n\to\infty} \frac{k(n)}{n}$$

このように定義される確率を統計的確率あるいは経験的確率という

この立場の客観性を保証するものは、多数回の試行あるいは大量データによる結果であり、理論的な根拠になっているものは大数の法則である

主観確率とベイズ統計学

確率を考えるにあたって、頻度的立場だけで十分とは言い切れない

ref: スッキリわかる確率統計 p63〜64

i. 本当にサイコロが均一な材料で作られ、完全な立方体になっているのか？

…もしそうでないなら、頻度的立場は意味がないのではないか？

ii. サイコロを投げて出る目は、投げた瞬間に決まっているのではないか？

…もしそうだとすると、サイコロを手にしたときから出る目は決まっているので、そもそも確率なんて存在しないのではないか？

iii. サイコロの目が出る確率なんて主観的なものでもよいのではないか？

…たとえば、100 回投げて 1 が 30 回出たら、その確率は $\frac{30}{100}$ としてもよいのではないか？

(iii) のような、「確率は主観的なものでよい」という立場の統計学はベイズ統計学と呼ばれている

この立場では、今までの情報、知識や経験などによって得られた確率を与え、これを主観確率という

主観確率では、全く起こっていない、あるいはほとんど起こっていない事象や実験ごとに統計的規則が変わってしまうような事象の分析も可能になる

公理論的立場の確率

化学や物理では、ある現象を考えるとき、議論がしやすいように理想状態というものを考える
それと同じように、確率も理想化された状態で考えることにする

ref: スッキリわかる確率統計 p64〜67

サイコロでいえば、そのサイコロの根拠（均一な材料か、完全な立方体なのか、etc.）を問うのではなく、最初から理想化されたサイコロを考えるようにする

そして、現実の問題と理想化された問題との間を統計的検定を使ってつなぐことにする

現実の問題 $\xleftrightarrow{\text{統計的検定}}$ 理想化された問題

確率を理想化された数学の世界で考えるために、確率をある公理を満たすものとして定義する

確率をこのように考える立場を公理論的立場という

第 2 章

確率と集合

標本空間

実験や観測を行うときに起こりうるすべての結果を集合に閉じ込める

ref: スッキリわかる確率統計 p65

標本空間　起こりうるすべての結果からなる集合を標本空間といい、Ω や U などと表す

根元事象　標本空間 Ω の元、すなわち、標本空間の中の各結果を根元事象という

事象

実験や観測の結果、実際に起こったことを事象という

ref: スッキリわかる確率統計 p65

事象　標本空間の部分空間 Ω の部分集合を事象といい、A や B などと表す

起こりうる場合の集合（標本空間）から、実際に起こったものだけを取り出したものが事象であるので、事象は標本空間の部分集合といえる

空事象と全事象

ref: スッキリわかる確率統計 p65

空事象

決して起こらないことを事象の一つとみなしたものを空事象という

空事象　空集合である事象を空事象といい、$\emptyset$ と表す

事象とは、実際に起こったことだけを取り出した集合なので、決して起こらないことは空集合となる

全事象

一方、起こりうるすべての場合が起こるとき、標本空間そのものを事象とみなすことができる

全事象　起こりうるすべての場合からなる事象を全事象という
集合としてみれば、全事象は標本空間そのものなので、標本空間と同じく Ω や U で表す

事象と集合演算

ref: スッキリわかる確率統計 p65〜67

和事象と積事象

「A または B が起こる」という事象を**和事象**という

> **和事象**　事象 A と事象 B の和集合を $A \cup B$ と表し、事象 A と事象 B の**和事象**という

一方、「A と B が同時に起こる」という事象を**積事象**という

> **積事象**　事象 A と事象 B の共通部分を $A \cap B$ と表し、事象 A と事象 B の**積事象**という

余事象

「A が起こらない」という事象を**余事象**という

> **余事象**　標本空間の中で、A が起こらないという事象を A の**余事象**といい、A^c で表す

標本空間を全体集合とすると、余事象は補集合に対応する

> 余事象との和事象・積事象
>
> $$A \cup A^c = \Omega$$
> $$A \cap A^c = \emptyset$$

余事象の余事象

$$(A^c)^c = A$$

事象の差

「A は起こるが B は起こらない」という事象は、「A と B^c が同時に起こる」事象として表せる

事象の差　次の事象を、事象 A と B の差という

$$A - B = A \cap B^c$$

排反

事象 A と事象 B が同時に起こることがないとき、A と B は互いに排反であるという

ref: スッキリわかる確率統計 p67

排反　$A \cap B = \emptyset$ であるとき、事象 A と事象 B は排反、あるいは互いに素であるという

同様に確からしい

頻度的立場の確率は、次の等確率性（同様に確からしい）を前提としている

ref: スッキリわかる確率統計 p67

同様に確からしい　標本空間に属するどの根元事象も同じ程度に起こると期待されるとき、これらの事象は同様に確からしいという

以降、特に断りがなければ「同様に確からしい」事象を扱うことにする

確率の公理と確率空間の定義

ここでは、集合を使って確率を定義する

ref: スッキリわかる確率統計 p67〜70

事象と集合を同一視する

事象という概念を導入することにより、実験や観測による結果を集合に対応させることができた

$$\text{観測結果（事象）} \quad \longleftrightarrow \quad \text{集合}$$

いわば、確率のもととなる事柄を集合に閉じ込めたことになる

集合演算に関する閉性を持たせる

確率が定義される事象の全体 $\mathscr{A}$ を考える

このとき、確率を数学の世界に閉じ込めるため、$\mathscr{A}$ に集合の演算に関して閉じていることを要求する

具体的には、$\mathscr{A}$ に対して次の 3 つを要求する

i. 空事象 $\emptyset$ と全事象 Ω は $\mathscr{A}$ に含まれる
ii. 事象 A, B が $\mathscr{A}$ に属するとき、その和事象 $A \cup B$、積事象 $A \cap B$、また、A の余事象 A^c も $\mathscr{A}$ に属する
iii. $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ が $\mathscr{A}$ に属せば、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ も $\mathscr{A}$ に属する

ここで、$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は、「$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ のいずれかが起こる」という事象を表している

たとえば、サイコロを投げる試行において、

- 「いつかは 1 の目が出る」という事象を A
- 「n 回目に初めて 1 の目が出る」という事象を A_n

とすると、

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

と表される

補足：σ-加法族

$\mathscr{A}$ は事象の全体、つまり、部分集合の全体なので、集合の集まりである

このような「集合の集合」を集合族という

そして、先ほどの 3 つの条件を満たす集合族 $\mathscr{A}$ を σ-加法族という

どの立場の確率でも成り立つ性質を抽出する

ある事象 A の確率 $P(A)$ が満たすべき条件を考えてみる

確率 $P(A)$ は、事象 A が起こる可能性を表すので、

- 事象が全く起こらないとき：$P(A) = 0$
- 事象が必ず起こるとき：$P(A) = 1$

と考えることができる

そこで、確率 $P(A)$ は次の範囲の値をとりうるものとする

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

しかし、この不等式だけでは、$P(A)$ が 0 や 1 になるのはどんな場合なのかを示すことはできない

「事象が必ず起こるときの確率は 1」「事象が全く起こらないときの確率は 0」という、直観的には当たり前の事実も確率の定義に含める必要がある

事象 A がいつも起こるときは、事象 A は起こりうるすべての場合を含んでいることになるので、A は全事象である
そこで、全事象を Ω とし、次の条件を定義に追加する

$$P(\Omega) = 1$$

同様に、「事象が全く起こらないときの確率は 0」という事実は、次のように表される

$$P(\emptyset) = 0$$

しかし、実はこの式は確率の定義の他の条件から導出できるので、定義には加えないことにする

最後に、「互いに排反な事象は別々に起こる」という性質も、確率の定義に含めることが重要である

A または B が起こる確率は、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

であるが、A と B が互いに排反であるときは、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

これと同様のことが、事象が増えても成り立つことを定義として要求する

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots$$

確率と確率空間の定義

以上の議論から、確率を次のように定義する

公理論的立場の確率と確率空間　標本空間 Ω の部分空間を A とし、$\mathscr{A}$ を σ-加法族とする

このとき、次の 3 つの性質を満たす関数 $P(\cdot)$ を事象 A の確率、あるいは $(\Omega, \mathscr{A})$ 上の確率という

i. 任意の $A \in \mathscr{A}$ に対して、$0 \leq P(A) \leq 1$

ii. $P(\Omega) = 1$

iii. 完全加法性：任意の互いに排反な事象 $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ に対して、$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

なお、3 つの組 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ を確率空間という