特性多項式と特性方程式

λ が n 次正方行列 A の固有値であることは、

$$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

となるような $\boldsymbol{x} \in K^n$ が存在することである

ref: 行列と行列式の基礎 p184、p188〜191
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p258〜260

ここで、$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ を次のように変形することができる

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ A\boldsymbol{x} - \lambda E\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ (A - \lambda E)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ という条件により、$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は非自明な解を持つ必要がある

固有ベクトルの斉次形方程式による定義　固有値 λ の固有ベクトルとは、斉次形方程式

$$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の非自明な解のことである

固有値を求める上で重要となるこの定理は、行列式を使って言い換えることができる

固有値の方程式による定義　行列 A の固有値 λ は、x についての n 次方程式

$$\det(A - xE) = 0$$

の K に含まれる解である

証明

λ が A の固有値であることは、斉次形方程式 $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が非自明解を持つことと言い換えられる

そして、斉次形方程式が非自明解を持つことは、行列式が 0 になることと同値である

すなわち、

$$\det(A-\lambda E)=0$$

が成り立ち、つまり $x=\lambda$ は方程式 $\det(A-xE)=0$ の解である ■

$A=(a_{ij})$ とおいて、

$$\det(A-xE)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

を展開すると、x についての n 次式になる

特に、すべての列（あるいはすべての行）から、x を含む成分をとった場合の積は、

$$(a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$$

であるので、これを展開して現れる項を中心に考察する

n 次の項

$(a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$ の各因子から、$-x$ だけを選んでかけ合わせたものが

$$(-1)^n x^n$$

であり、これが最高次の項となる

$n-1$ 次の項

$(a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$ のうち、1 つだけ a_{ii} を選び、残りの因子からは $-x$ を選んでかけ合わせたものが

$$(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})x^{n-1}$$

である

これは、トレースの定義より、

$$(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)x^{n-1}$$

とも書き換えられる

$n-2$ 次以下の項

行列式では、各列から 1 つずつ、行に重複がないように成分を選ぶ必要がある

そして、今取り上げている行列式では x を含む成分が対角線上にあるので、$n-1$ 次の場合は、対角成分以外を選ぶことができなかった（対角成分以外から x でない数 a_{ij} を得ようとすると、同じ行もしくは列から 2 つ成分を選ぶことになってしまう）

しかし、$n-2$ 次以下の項では、x を含まない成分を 2 個以上選ぶことができるので、対角成分以外からも成分を選ぶことができる

そのため、$n-2$ 次以下の項は、上の展開式以外からも現れることになり、単純に計算はできない

定数項

定数項は、多項式において $x=0$ とおくことで得られるので、$\det(A-xE)$ に $x=0$ を代入した

$$\det(A)$$

が定数項となる

多項式の最高次の係数に $(-1)^n$ がつくのは面倒なので、$\det(A - xE)$ の代わりに、その $(-1)^n$ 倍である

$$\det(xE - A)$$

を考えることが多い

実際、$\det(xE - A)$ を展開すると、

$$\det(xE - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

となり、x の前に (-1) がつかずに済む

特性多項式　A を正方行列、x を変数として、

$$\Phi_A(x) = \det(xE - A)$$

とおく

これを特性多項式あるいは固有多項式と呼ぶ

特性多項式の構造　A を n 次正方行列とすると、特性多項式は、次のような n 次多項式である

$$\Phi_A(x) = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

特性方程式　特性多項式 $\Phi_A(x)$ の根を求める方程式

$$\Phi_A(x) = 0$$

を、特性方程式あるいは固有方程式と呼ぶ

固有値の重複度

たとえば、次の方程式

$$(x-2)^3(x-1)=0$$

の解は、$x=2$ と $x=1$ である

ここで、左辺を、

$$(x-2)(x-2)(x-2)(x-1)=0$$

とみなすと、

$$\begin{aligned} x&=2 \\ x&=2 \\ x&=2 \\ x&=1 \end{aligned}$$

というように解が重複していることがわかる

このように、「何回同じ解が現れるか？」を数えたものを重複度という

方程式の解の重複度　多項式 $f(x)$ で表される方程式 $f(x)=0$ において、$f(x)$ が $(x-\alpha)^m$ で割り切れるが、$(x-\alpha)^{m+1}$ では割り切れないような定数 α と自然数 m が存在するとき、α はこの方程式の m 重解あるいは m 重根であるといい、m を α の重複度と呼ぶ

上の定義は難しく聞こえるが、「ちょうど m 回だけ $(x-\alpha)$ がかかっている」ということの言い換えにすぎない

たとえば、

$$(x-2)^3(x-1)$$

を $(x-2)^3$ で割ると、

$$(x-1)$$

ref: 行列と行列式の基礎 p192

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p270

として割り切れるが、$(x-2)^4$ で割ると、

$$\frac{(x-2)^3(x-1)}{(x-2)^4} = \frac{x-1}{x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

というように部分分数分解できるので、余りが出ていることがわかる（多項式の割り算における**余り**とは、$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ の $r(x)$ のことである）

つまり、$f(x)$ に因数 $(x-\alpha)$ が m 個含まれている場合、$f(x)$ は $(x-\alpha)^m$ で割り切れるが、m 個以上は含まれていないので、$(x-\alpha)^{m+1}$ で割ると余りが出てしまう
これはすなわち、「ちょうど m 回だけ $(x-\alpha)$ がかかっている」ということである

ここまでの議論を応用して、固有値の**重複度**を定義する

固有値の重複度　特性多項式を因数分解して、

$$\Phi_A(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_s)^{k_s}$$

とする
ここで、$\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ は相異なるものとする
k_i は 1 以上の整数であり、これを固有値 α_i の**重複度**と呼ぶ
$\Phi_A(x)$ は n 次多項式であるから、

$$\sum_{i=1}^{s} k_i = n$$

が成り立つ