




## 部分空間の共通部分

与えられた部分空間から、新しく部分空間を作ることができる

ref: 図で整理！例題で  
納得！線形空間入門 p22

 線形部分空間の共通部分は部分空間  $U, W$  を体  $K$  上の  $V$  の部分空間とすると、**共通部分**  $U \cap W$  は  $V$  の部分空間である

 証明

### 和について

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U \cap W$  とすると、共通部分の定義より、 $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  はどちらも  $U$  と  $W$  の両方に属していることになる  
つまり、 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$  かつ  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$  である

$U$  も  $W$  も部分空間なので、部分空間の定義より、

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \in W$$

$\mathbf{a} + \mathbf{b}$  が  $U$  と  $W$  の両方に属していることから、 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  は  $U \cap W$  に属する

よって、 $U \cap W$  は和について閉じている ■

### スカラー倍について

$\mathbf{a} \in U \cap W$  と  $c \in K$  をとる

共通部分の定義より、 $\mathbf{a}$  は  $U$  と  $W$  の両方に属しているの  
で、部分空間の定義より

$$c\mathbf{a} \in U$$

$$c\mathbf{a} \in W$$

よって、 $ca$  は  $U \cap W$  に属するため、 $U \cap W$  はスカラー倍について閉じている ■



## 部分空間の和

📌 線形部分空間の和は部分空間  $U, W$  を体  $K$  上の  $V$  の部分空間とすると、**和空間**

$$U + W := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$$

は  $V$  の部分空間である

ref: 図で整理！例題で  
納得！線形空間入門 p22  
~23

ref: 長岡亮介 線形代数  
入門講義 p231~232

### 🔪 証明

#### 和について

$a_1, a_2 \in U, b_1, b_2 \in W$  とする

$U$  と  $W$  は部分空間なので、部分空間の定義より

$$a_1 + a_2 \in U, \quad b_1 + b_2 \in W$$

一方、和空間の定義より、 $a_1 + b_1, a_2 + b_2$  はそれぞれ  $U + W$  の元である

これらの元の和をとったときに、その和も  $U + W$  に属していれば、和空間は和について閉じているといえる

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \\ \in U + W$$

上式で、和空間は和について閉じていることが示された ■

#### スカラー倍について

$\mathbf{a} \in U, \mathbf{b} \in W$  と  $c \in K$  をとる

$U$  と  $W$  は部分空間なので、部分空間の定義より

$$c\mathbf{a} \in U$$

$$c\mathbf{b} \in W$$

一方、和空間の定義より、 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  は  $U + W$  の元である


この元をスカラー倍したときに、そのスカラー倍も  $U + W$  に属していれば、和空間はスカラー倍について閉じているといえる

$$\begin{aligned} c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= c\mathbf{a} + c\mathbf{b} \\ &\in U + W \end{aligned}$$

上式で、和空間はスカラー倍について閉じていることが示された ■



部分空間を生成するベクトルを用いて、部分空間の和を表せる

 部分空間の和と生成ベクトル  $K^n$  の2つの部分空間  $U = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \rangle$  と  $W = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$  に対して、和空間  $U + W$  は

$$U + W = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$$

となる

 証明

和空間  $U + W$  は

$$U + W = \{ \mathbf{x} \in K^n \mid \mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W \}$$

と定義される

また、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$  の張る部分空間は

$$H = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k \rangle$$

である

これらが等しいことを示せばよい

$$\underline{U + W \subseteq H}$$

任意の  $\mathbf{x} \in U + W$  に対し、 $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$  ( $\mathbf{u} \in U$ ,  $\mathbf{w} \in W$ ) と書ける

すなわち、

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{u}_1 + \dots + a_m \mathbf{u}_m \quad (a_i \in K)$$

$$\mathbf{w} = b_1 \mathbf{w}_1 + \dots + b_k \mathbf{w}_k \quad (b_j \in K)$$

よって、

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^k b_j \mathbf{w}_j \in H$$

$$\underline{H \subseteq U + W}$$

任意の  $\mathbf{x} \in H$  は

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^k b_j \mathbf{w}_j$$

と書ける

ここで

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{u}_i \in U$$

$$\mathbf{w} = \sum_{j=1}^k b_j \mathbf{w}_j \in W$$

とすれば、

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \in U + W$$


以上より、 $U + W \subseteq H$  と  $H \subseteq U + W$  が成り立つので、  
 $U + W = H$  が示された ■



## 部分空間の和の次元

ref: 行列と行列式の基礎 p103

ref: 図で整理！例題で  
納得！線形空間入門 p39  
~41

 部分空間の和の次元  $K^n$  の部分空間  $V, W$  に対して、次が  
成り立つ

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

### 証明

$\dim(V) = n, \dim(W) = m$  とする

$V \cap W$  の基底  $\mathcal{V} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$  をとる

これを基底の延長の定理に基づいて、 $V$  の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}\}$$

に延長する

同様に、 $\mathcal{V}$  を  $W$  の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}\}$$

に延長する

このとき、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}$  が  $V + W$  の基底になることを示す

### $V + W$ を生成すること

$\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$  とすると、それぞれ基底の線形結合で表す

ことができる

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \sum_{i=1}^d a_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j \mathbf{v}_j \\ \mathbf{w} &= \sum_{i=1}^d c_i \mathbf{u}_i + \sum_{k=1}^{m-d} d_k \mathbf{w}_k\end{aligned}$$

$V + W$  の任意の元は、 $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  と書けるので、

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \sum_{i=1}^d (a_i + c_i) \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j \mathbf{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} d_k \mathbf{w}_k$$

となり、 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}\}$

の線形結合で表せる ■

### 線型独立であること

$\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}$  が線型独立

であることを示すために、次のような線形関係式を考える

$$\sum_{i=1}^d c_i \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} c_{d+j} \mathbf{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} c_{d+n-d+k} \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$$

ここで、 $c_i \in K$  はスカラーである

この式を  $V$  と  $W$  の基底の線形結合として考えると、 $V$  の基底  $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j$  に関する部分と  $W$  の基底  $\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_k$  に関する部分がそれぞれ線形独立であるため、結局どの項においても  $c_i = 0$  である必要がある

よって、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}$  は線型独立である ■

以上より、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-d}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m-d}$  は  $V + W$  の基底であることが示された

この基底をなすベクトルの個数（次元）について考えると、

$$\begin{aligned}\dim(V + W) &= d + (n - d) + (m - d) \\ &= n + m - d\end{aligned}$$

となる

ここで、 $d = \dim(V \cap W)$  なので、

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

と書き換えられ、目的の式が得られた ■