Chapter 1

複素数と複素関数

1.1　虚数

1.1.1　$x^2 = -1$ の解は存在するか？

「負の数と負の数をかけたら正の数になる」というのが、中学校で初めて数学の門を叩いて真っ先に学ぶ事実である。

$$(-1) \times (-1) = 1$$

方程式の言葉で書けば、$x^2 = 1$ の解の一つは $x = -1$ となる。（もう一つの解は $x = 1$ だ。）
では、次の方程式の解は考えられるだろうか？

$$x^2 = -1$$

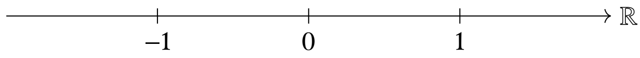
x^2 ということは、同じ数 x どうしをかけて -1 にならなければならない。
とはいえ、正の数どうしをかけても正の数になるし、負の数どうしをかけても正の数になる。

つまり、このような x は「存在しない」ということになる。
しかし、このような方程式の解が存在した方がありがたいと考えた人もいた。（私たちもこの先、その有り難さを知ることになる。）

「負の数と負の数をかけたら正の数になる」というこれまでの数の体系を壊さずに、$x^2 = -1$ が成り立つような数を新たに考えよう、という話が始まる。

1.1.2 回転で捉える数直線の拡張

これまでの数の体系である実数は、すべて数直線上に存在していた。



$x^2 = -1$ の解となる x は、少なくともこの数直線上には存在しない。

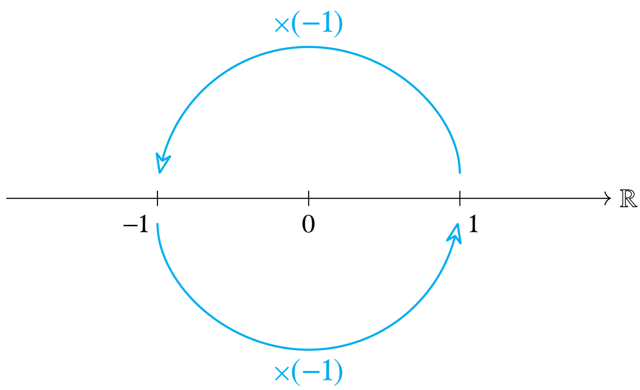
ならば、数の体系を平面に拡張して考えてみよう。

まずは、平面というスケールに飛び出して $(-1) \times (-1) = 1$ を考えてみる。

$$1 \times (-1) \times (-1) = 1$$

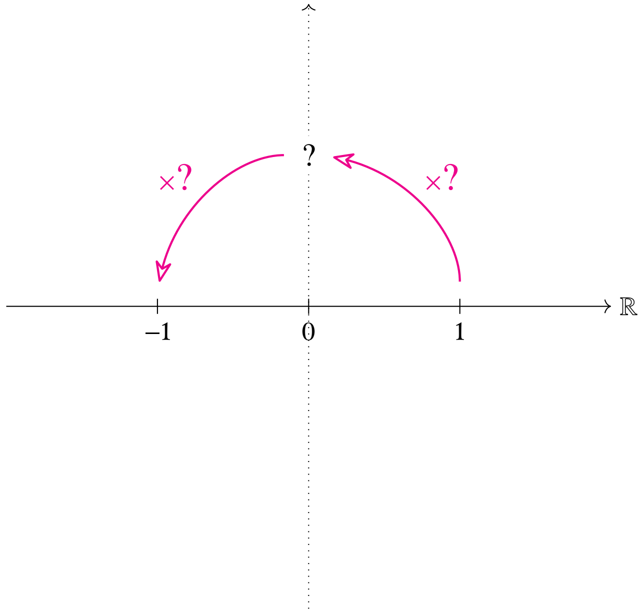
と書き直すと、「-1 を 2 回かけたら 1 に戻る」ということがいえる。

図示すると、次のようなことが起こっていると考えられないだろうか？

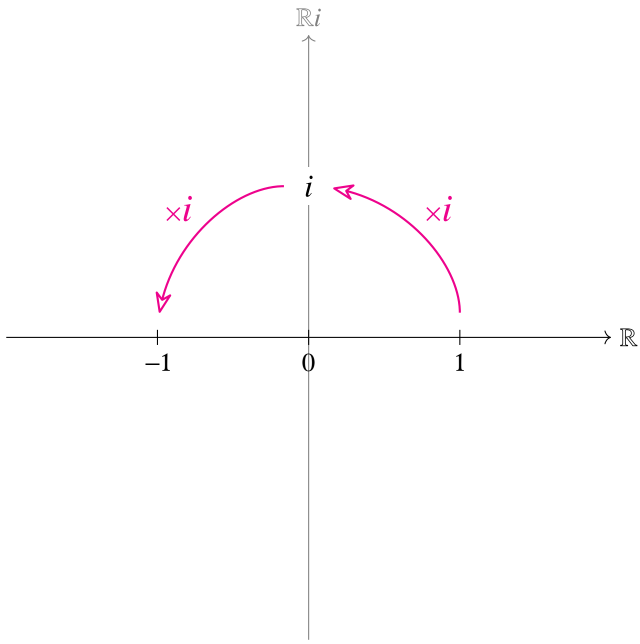


「-1 をかける」という操作を、平面上の 180 度回転と捉える。

すると、2 回かけて -1 になる数（$x^2 = -1$ の解）は、180 度回転の中間に位置する数と考えることができる。



このような方向性で拡張した数を複素数といい、? にあたる数は虚数 i と呼ぶことにする。



1.1.3 虚数の定義

前章での話を踏まえて、新たな数を次のように定義する。

虚数 方程式 $x^2 = -1$ の解の一つを 虚数 と呼び、i と表す。

これで、$x^2 = -1$ の解を、次のように記述できるようになった。

$x^2 = -1$ の解　方程式 $x^2 = -1$ の解は、$x = i$ と $x = -i$ の 2 つ存在する。

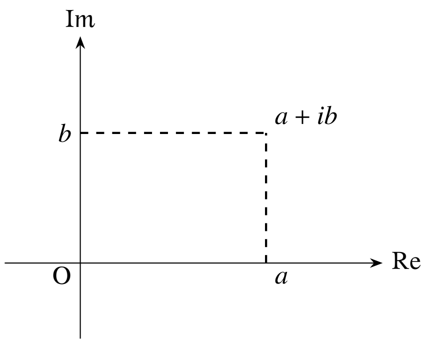
1.2 複素数と複素平面

1.2.1 複素平面

複素数は、実部（Real Part）と虚部（Imaginary Part）という 2 つの数から成る。

そのため、実部を横軸に、虚部を縦軸にとった平面を考え、1 つの複素数をこの平面上の 1 点として表すことができる。

複素平面　実部を横軸、虚部を縦軸にとった平面を複素平面と呼ぶ。



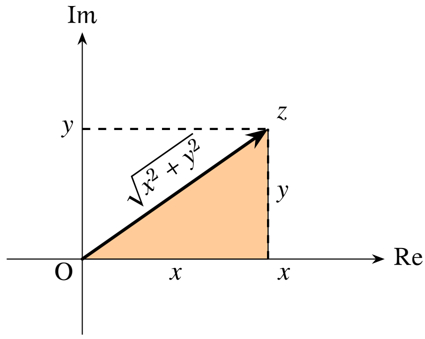
1.2.2 複素数の絶対値

複素数の絶対値

複素平面において、原点から複素数 z までの距離を複素数 z の絶対値と定義する。

この距離は三平方の定理から求められ、$|z|$ と表す。

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

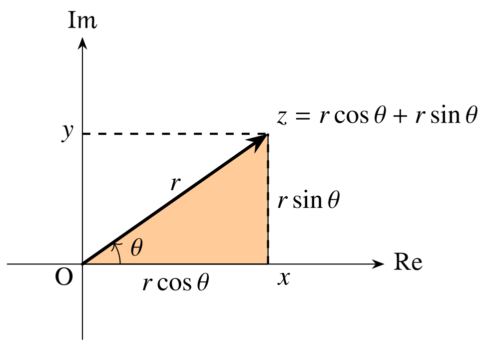


1.2.3 複素数の極形式による表現

極形式

複素数 z は、絶対値 r と偏角 θ を用いて次のように表すことができる。

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$



1.2.4 偏角と主値

$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ に、$r = \sqrt{x^2+y^2}$ を代入して整理した関係式から、偏角を改めて定義する。

偏角

複素数 z を極形式で表現すると、

$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$、$\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ という関係が成り立つ。

この関係を満たす θ を偏角と呼び、次のように表す。

$$\arg z := \theta$$

ここで、θ を整数回 2π シフトさせても（何周回っても）、複素数 z の値は変わらない。

つまり、1 つの複素数に対して偏角の値は複数考えられるので、次のような主値を定義する。

偏角の主値

$0 \leq \theta \leq 2\pi$、もしくは $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲にある偏角を偏角の主値と呼び、次のように表す。

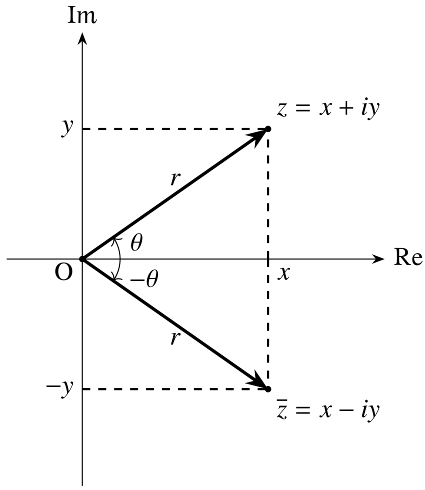
$$\operatorname{Arg} z := \theta$$

1.2.5 共役複素数

共役複素数

複素数 $z = x + iy$ に対して，その共役複素数 $\bar{z}$ を次のように定義する。

$$\bar{z} := x - iy$$



共役複素数と絶対値

複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ の積は、z の絶対値の二乗に等しい。

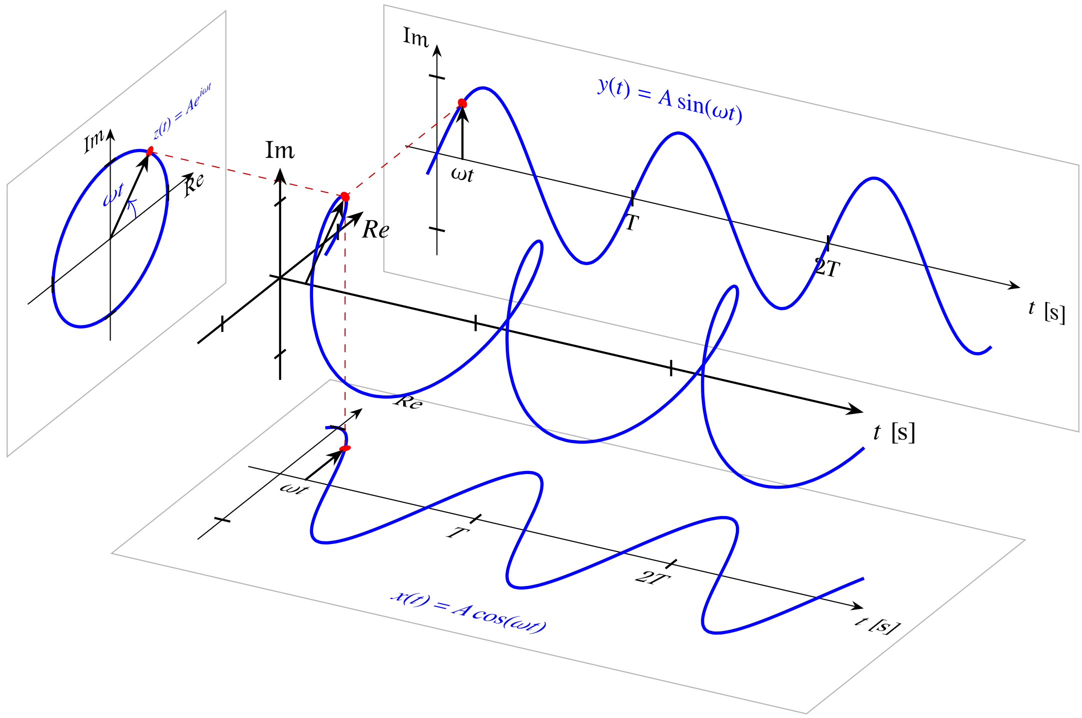
$$z\bar{z} = |z|^2$$

Proof

複素数 $z = x + iy$ とその共役複素数 $\bar{z} = x - iy$ の積を計算する。

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

1.3 オイラーの公式


Im
Re
$z(t) = Ae^{j\omega t}$
ωt
Im
Re
t [s]
Im
$y(t) = A\sin(\omega t)$
ωt
T
$2T$
t [s]
Re
ωt
T
$2T$
$x(t) = A\cos(\omega t)$
t [s]