対角行列の嬉しさ：入出力の視点

ベクトルと行列を使うことで、入力 $\boldsymbol{x}$ と出力 $\boldsymbol{y}$ の関係を多次元の場合でも簡潔に表すことができる

ref: プログラミングのための線形代数 p42、p51

$$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$$

一般の行列による入出力

たとえば $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ をともに 3 次元ベクトルとすると、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は、

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

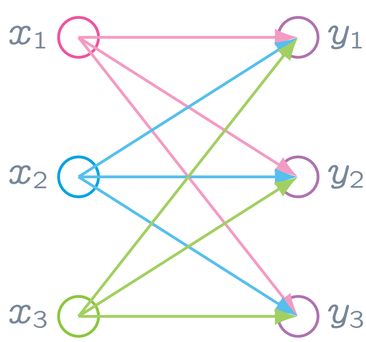
ここで、たとえば 2 行目に注目すると、

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

となり、y_2 の計算に $\boldsymbol{x}$ のすべての成分 x_1, x_2, x_3 が使われていることがわかる

> 各行に対応する出力 y_i は、入力 $\boldsymbol{x}$ のすべての成分に依存している

この依存関係を、次のようなダイアグラムで表すことにする

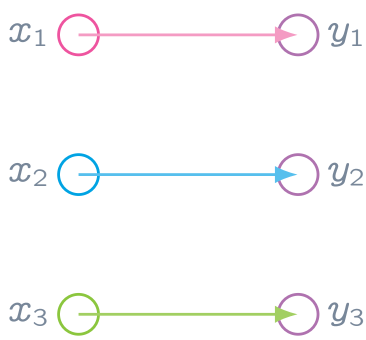


対角行列による入出力

A が対角行列の場合、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は次のような形になる

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ a_{33}x_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ベクトルの各行に注目すると、各出力 y_i は、入力 $\boldsymbol{x}$ の対応する成分 x_i のみに依存していることがわかる



このように、A が対角行列の場合、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は独立な n 本のサブシステム

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 \\ &\vdots \\ y_n &= a_{nn}x_n \end{aligned}$$

に分割されている

つまり、対角行列を使って関係を表現できれば、

> 見た目は n 次元問題でも、実質は 1 次元問題が n 本あるだけ

という状況になり、問題を大きく単純化できる

ブロック対角行列による入出力

ブロック対角行列は、

各ブロックごとに独立に変換される

という形の写像を表している

たとえば、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

というブロック対角行列は、次のように分けて考えることができる

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

ダイアグラムで表すと、2 つの独立なサブシステムに分解されている様子が見える