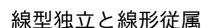
## 線形関係式

$$c_1\boldsymbol{a}_1+c_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{a}_k=\mathbf{0}$$

を、 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$  の線形関係式という

特に、 $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$  として得られる線形関係式を自明な線形関係式という

これ以外の場合、つまり  $c_i \neq 0$  となるような i が少なくとも 1 つあるならば、これは非自明な線形関係式である



線形従属なベクトルでは、その中の  $\mathbf 1$  つのベクトルが、他のベクトルの線形結合で表される

 $oldsymbol{\$}$  線形結合によるベクトルの表現  $oldsymbol{a}_1, oldsymbol{a}_2, \dots, oldsymbol{a}_m \in K^n$  を線型独立なベクトルとする

 $K^n$  のベクトル  $\boldsymbol{a}$  と  $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$  が一次従属であるとき、

 $\boldsymbol{a}$  は  $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$  の線形結合で表される

すなわち、 $c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$  を用いて次のように書ける

 $\boldsymbol{a} = c_1 \boldsymbol{a}_1 + c_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m \boldsymbol{a}_m$ 

ref: 行列と行列式の基

礎 p38~40

ref: 図で整理!例題で 納得!線形空間入門 p31

~32

## 証明

 $oldsymbol{a}$ ,  $oldsymbol{a}_1,\ldots,oldsymbol{a}_m$  が一次従属であるので、少なくとも $oldsymbol{1}$  つは $oldsymbol{0}$  でない係数 $oldsymbol{c}$ ,  $oldsymbol{c}_1$ ,  $oldsymbol{c}_2$ ,  $\ldots$ ,  $oldsymbol{c}_m$  を用いて

$$c\boldsymbol{a} + c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

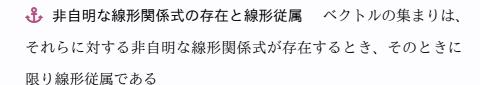
が成り立つ

もし c=0 だとすると、 $c_1,c_2,\ldots,c_m$  のいずれかが 0 でないことになり、 $oldsymbol{a}_1,oldsymbol{a}_2,\ldots,oldsymbol{a}_m$  が線型独立であることに矛盾するよって、 $c\neq 0$  である

そのため、上式をcで割ることができ、aは

$$\boldsymbol{a} = -\frac{c_1}{c}\boldsymbol{a}_1 - \frac{c_2}{c}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{c_m}{c}\boldsymbol{a}_m$$

という  $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$  の線形結合で表せる



## ≥ 証明

ベクトルの集まりが線型独立であることは、それらに対する線形関 係式はすべて自明であるというのが定義である

それを否定すると、「自明でない線形関係式が存在する」となる

♣ 線型結合の一意性 線型独立性は、線形結合の一意性

$$c_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k \boldsymbol{a}_k = c'_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + c'_k \boldsymbol{a}_k$$
  
 $\Longrightarrow c_1 = c'_1, \ldots, c_k = c'_k$ 

と同値である



線型独立性の定義式を移項することで得られる

この定理から、

線型独立性は、両辺の係数比較ができるという性質

であるとも理解できる



k = 1 の場合に、次の定理が成り立つ

→ 単一ベクトルの線型独立性と零ベクトル

$$a_1$$
が線型独立  $\iff a_1 \neq 0$ 



 $oldsymbol{a}_1$  が線型独立であるとする

すると、 $oldsymbol{a}_1$  に対する線形関係式

$$c_1 a_1 = 0$$

が成り立つのは、 $c_1=0$  のときだけである

ここで、 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$  と仮定すると、 $c_1 \mathbf{0} = \mathbf{0}$  が成り立つので、 $c_1$  は任意の値をとることができる

これは、 $oldsymbol{a}_1$  に対する線形関係式が  $c_1=0$  のときだけ成り 立つという線型独立性の定義に反する

k to  $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$   $\mathbf{0}$   $\mathbf{a}_2$ 

 $\leftarrow$ 

## $a_1 \neq 0$ とする

このとき、もし  $oldsymbol{a}_1$  に対する線形関係式

$$c_1 a_1 = 0$$

が成り立つとしたら、 $oldsymbol{a}_1 
eq oldsymbol{0}$  なので、 $oldsymbol{c}_1$  は必ず  $oldsymbol{0}$  でなければならない

したがって、 $oldsymbol{a}_1$  に対する線形関係式は  $oldsymbol{c}_1=0$  のときだけ成り立つ

これは、 $oldsymbol{a}_1$  が線型独立であることを意味する