線形代数における鳩の巣原理

ref: 行列と行列式の基礎 p102〜103

⚓ **線形代数における鳩の巣原理の抽象版**　V, W を同じ次元の線形空間とするとき、線形写像 $f : V \to W$ に関して、次はすべて同値である

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は線形同型
iv. $\mathrm{rank}(f) = \dim V = \dim W$

証明

$\mathcal{V}, \mathcal{W}$ をそれぞれ V, W の基底として、線形写像の合成

$$g : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{V}}} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{W}}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

を考える
このとき、g は $\mathbb{R}^n$ の線形変換である

f が単射（全射）であると仮定すると、座標写像は全単射であるので、f との合成写像 g も単射（全射）となる

逆に、g が単射（全射）であると仮定した場合について考える
f は g を用いて次のように表現でき、

$$f = \Phi_{\mathcal{W}} \circ g \circ \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}$$

座標写像は全単射であるので、g との合成写像 f も単射（全射）となる

以上より、f が単射（全射）であることと、g が単射（全射）である

ことは同値である

線形変換 g に対して、線形代数における鳩の巣原理より、

$$g \text{ が単射} \iff g \text{ が全射} \iff g \text{ が全単射}$$

が成り立つが、g の単射性・全射性は f についても成り立つことがわかったので、

$$f \text{ が単射} \iff f \text{ が全射} \iff f \text{ が線形同型}$$

がいえる

最後に、階数に関する条件を示す

像空間と全射性の関係により、f が全射であることは、$\mathrm{Im}(f) = W$ と同値であるから、

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim W$$

より、

$$\mathrm{rank}(f) = \dim W = \dim V$$

が得られる ■

次元による部分空間の比較

次の事実は、数の一致で空間の一致が結論できる有用な結果である

ref: 行列と行列式の基礎 p102

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p41

⚓ **次元の一致による部分空間の一致判定**　2 つの線型空間について、$V \subset W$ ならば、

$$\dim V = \dim W \Longrightarrow V = W$$

証明

$\boldsymbol{v} \in V$ をそのまま W の元と考えることで得られる写像を $\iota \colon V \to W$ とする（包含写像）

この包含写像は、V の元 $\boldsymbol{v}$ を W の中にそのまま「埋め込む」操作を表しているため、$\iota(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ 自身である

$$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$$

特に、$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ そのものを意味する

$$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

したがって、零ベクトルへの写像による単射性の判定より、ι は単射である

また、ι が単射であることと、仮定 $\dim V = \dim W$ を合わせると、線形代数における鳩の巣原理の抽象版より、ι は全射であることがわかる

よって、全射の定義より、すべての $\boldsymbol{w} \in W$ に対して $\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v}$ が存在する
すなわち、W の元はすべて V の元であり、$V \subset W$ もふまえると、これは $V = W$ を意味する ■

次元による部分空間の比較　K^n の部分空間 V, W について、$V \subseteq W$ ならば、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立するのは、$V = W$ のときに限る

証明

$V \subseteq W$ であることから、基底の延長により、V の基底を延長して W の基底にできるので、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立する場合については、前述の次元の一致による部分空間の一致判定を参照 ■

核空間・像空間の次元

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p83〜84

⚓ 線形写像の単射性と核の次元　線形写像 $f: V \to W$ について、

$$f \text{ が単射} \iff \dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$

証明

線形写像の単射性と核の関係より、f が単射であることは次と同値である

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

次元の定義より、$\{\mathbf{0}\}$ の次元は 0 であるので、

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$

が成り立つ ■

線形写像の全射性と像の次元　線形写像 $f\colon V \to W$ について、

$$f \text{ が全射} \iff \dim \operatorname{Im}(f) = \dim W$$

証明

線形代数における鳩の巣原理の抽象版の主張そのものである ■