読書ノート：地力をつける微分積分

tomixy

2025 年 3 月 9 日

微分と積分は何を捉えているか

微分は、「微小な変化でどのような変動が起こるか」を分析する数学の手法

数学では、極限という概念を用いて「無限小レベルの変化」として厳密に微分を定義する

＊　＊　＊

現実の事象を解明しようとすると、その事象に関わる要因は 1 つではなく、複数の要因が絡み合っていることが多い

複数の要因が絡み合っている状況を数量的に表すのが多変数関数

＊　＊　＊

変数が 2 個以上あると、「変数を少し動かす」といってもいろいろな動かし方がある

その動かし方を精密に扱うのが偏微分

＊　＊　＊

積分は「そこにある量を算出する道具」

「そこにある量」を小分けして合算して求める考え方（区分求積法）が積分論の主軸

本書の内容

数学では、相対的に無視できるものを切り捨てるという操作を論理的に積み重ねて、無限という概念に向き合う

＊　＊　＊

近似をしたつもりなのに大きな誤差が生じているとすると、その兆候はどこかに現れているはず

局所近似の誤差の兆候は高階の微分に現れる

これを逆に突き詰めるとテイラー展開という概念に到達する

大きな数を感覚的に捉える方法

分子も分母も無限大に近づく中で、分母に比べて分子を無視できるという等式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}=0$$

分子を 1 辺 n の正方形の面積（2 次元）、分母を 1 辺 n の立方体の体積（3 次元）とみなせば、「次数が高くなると巨大な数が現れやすい」という性質の 1 つの姿と思うこともできる

収束や発散の速さ

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ という数列があったときに、その初めの N 個の和を次のように表す

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

2 個や 3 個の和なら $a_1 + a_2$ や $a_1 + a_2 + a_3$ と書けるが、たとえば N が 10^{16} というようなときには、

すべての項を書き出せないため、このように記法を決めておく

＊　＊　＊

等比級数 A_N の収束の速さを考える

$$A_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^N}$$

この和に $\frac{1}{2^N}$ を足すと、1 になる

たとえば、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

なので、N 個の総和は、

$$1 - \frac{1}{2^N}$$

$\frac{1}{2^N}$ がどれくらい小さいかがわかれば、A_N の和が 1 にどれくらい近いかがわかる

では、$N = 10^{16}$ のとき、$\frac{1}{2^N}$ はどれくらいの大きさか？

まず、$N = 10$ の場合を考えると、

$$2^{10} = 1024 \fallingdotseq 1000$$

より、

$$\frac{1}{2^{10}} \fallingdotseq 0.001$$
$$1 - \frac{1}{2^{10}} \fallingdotseq 0.999$$

というふうに、小数点以下に 9 が 3 つ連続して並ぶ

$N = 10^2$ のときは、

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = (1024)^{10} \fallingdotseq (1000)^{10} = 10^{30}$$

から、9 がおよそ 30 個並ぶ（$1024 > 1000$ なので、「少なくとも」30 個並ぶ）

$N = 10^{16}$ のときは、

$$2^{10^{16}} = (2^{10})^{10^{15}} \fallingdotseq 10^{30 \times 10^{15}}$$

から、$3 \times 10^{15} = 3000$ 兆以上の 9 が並ぶ

このように、N を大きくしていくと、2^N はきわめて 1 に近い数になる

$N \to \infty$ としたときに、等比級数 A_N は 1 に収束する

誤差評価

測定や推定で何らかの値を得たとき、誤差は次のように定義される

$$\text{誤差} = \left| \text{測定値 or 推定値} - \text{真の値} \right|$$

誤差が論理的に小さいと言えれば、その測定値や推定値は一定の安心感を持って近似値として使うことができる

誤差がある数 ε より小さくなるという不等式

$$\left| \text{測定値 or 推定値} - \text{真の値} \right| < \varepsilon$$

を誤差評価という

N が 10^{16} のとき、右辺は小数点以下に少なくとも 3×10^{15} 個の 0 が並ぶ

$$|A_N - 1| < 0.00 \ldots 0 \ldots$$

この不等式は、$N = 10^{16}$ のときの A_N が、極限値である 1 をどの程度の精度で近似しているかを表す誤差評価と考えることもでき、この誤差評価は、相対的な収束の速さを数値的に表すものでもある（右辺の小数点以下に並ぶ 0 の数で速さがわかる）

関数の全体を見る

$y = x^4$ と $y = x^2$ の差異を考えてみる

x が大きい場合の例として、たとえば $x = 10$ のと

きは、

$$y = x^4 = 10^4 = 10000$$
$$y = x^2 = 10^2 = 100$$

x をもっと大きくすると、x^2 も x^4 も大きな数になるが、この 2 つだけを比較すると、x^4 の方がはるかに大きいので x^2 は相対的に無視できそうだといえる

x が 0 に近い場合の例として、たとえば $x = 0.1$ のときは、

$$y = x^4 = 0.1^4 = 0.0001$$
$$y = x^2 = 0.1^2 = 0.01$$

$x = 0$ の近くでグラフを書くと、$y = x^4$ の方は x 軸すれすれになる
このように、x が 0 に近いときは x^2 も x^4 も小さな数だが、この 2 つだけを比較すると、x^2 の方が相対的に大きいので x^4 は無視できるくらい小さそうだといえる

3 つ以上のものを比較するときも、**圧倒的に大きいものが 1 つだけあれば残りを無視しよう**という考え方ができる
微分や積分における極限にも、この考え方が用いられる

* * *

厳密な論理体系である数学では、どういう基準で何を無視するかというルールを明確に決めてから議論を積み重ねることになる
その一方で、論理的な証明を導く際には、**効くものと無視できるものを区別する**という直観が役立つ

二項係数の 4 つの側面

パスカルの三角形を帰納的に定義する

- 1 段目（最上段）は 1 とする
- n 段目に n 個の数を定めたとして、$n+1$ 段目は線で繋がっているすぐ上の数を足し合わせて定めることにする

このとき、次の 4 つの数が一致する

1. $(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-k}b^k$ の係数
2. パスカルの三角形の $n+1$ 段目、左から $k+1$ 番目の数
3. パスカルの三角形で $n+1$ 段目、左から $k+1$ 番目の地点から最上段に登る最短経路の個数
4. ${}_nC_k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

* * *

1 と 4 の一致　次のように $(a+b)^n$ を n 個の積を並べたものとして表すことで示す

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)}_{n}$$

この展開式において、たとえば $a^{n-k}b^k$ という項がどこから生じるかを考える

右辺を展開するとき、$a+b$ のそれぞれの項で a か b の 2 通りの選択肢があるため、展開すると全部で 2^n 通りの単項式の和になる
展開したときに $a^{n-k}b^k$ という項に寄与するのは、n 個の $(a+b)$ の中から b を k 個選ぶ場合の数なので、${}_nC_k$ 通りある

こうして、${}_nC_k$ 通りの $a^{n-k}b^k$ が現れることから、$a^{n-k}b^k$ の係数は ${}_nC_k$ となる

＊　＊　＊

2と3の一致　ある地点から最上段に行くには、その地点の左上か右上に移動するしかない

そのため、この地点から最上段に登る最短経路の個数は、そのすぐ左上の地点を経由して最上段に登る最短経路の個数と、そのすぐ右上の地点を経由して最上段に登る最短経路の個数の和になる（和の法則）

これはまさにパスカルの三角形を定義したときのルールであり、パスカルの三角形の $n+1$ 段目、左から $k+1$ 番目の数は、n 段目かつ左から k 番目の数と、n 段目かつ左から $k+1$ 番目の数の和になる

＊　＊　＊

1と2の一致　次のように書くことで見えてくる

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)^{n-1} \times (a+b) \\ &= (a+b)^{n-1} \times a + (a+b)^{n-1} \times b\end{aligned}$$

これは、$(a+b)^{n-1}$ の各項に、a と b をそれぞれかけて足し合わせる計算になっている

$(a+b)^{n-1}$ を展開すると、それぞれの項は、a を $(n-1)-k$ 回、b を k 回かけた形になる

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k \cdot a^{n-k-1} b^k$$

$(a+b)^{n-1}$ の各項に a をかけると、a の指数が 1 増えるので、a^{n-k} の項が現れる

$$\begin{aligned}(a+b)^{n-1} \times a &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k a^{n-k} b^k \\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-1}C_{k-1} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

同様に、$(a+b)^{n-1}$ の各項に b をかけると、b の指数が 1 増えるので、b^{k+1} の項が現れる

$$\begin{aligned}(a+b)^{n-1} \times b &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k a^{n-k-1} b^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_k a^{n-k} b^k + b^n\end{aligned}$$

よって、これらを足し合わせると、

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left({}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k\right) a^{n-k} b^k + b^n$$

${}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k$ の部分は、それぞれ

- ${}_{n-1}C_{k-1}$ はパスカルの三角形の n 段目、左から k 番目の数
- ${}_{n-1}C_k$ はパスカルの三角形の n 段目、左から $k+1$ 番目の数

を表すので、これらの和（$a^{n-k}b^k$ の係数）がパスカルの三角形の $n+1$ 段目、左から $k+1$ 番目の数になることがいえる

（注：段数は 1 から始まるので、$n+1$ 段目が $(a+b)^n$ の展開に対応する。同様に、左から数える番号も 1 始まりなので、$k+1$ 番目が $a^{n-k}b^k$ の係数に対応する）

＊　＊　＊

一般の展開公式　1と4の一致から、一般の展開公式は次のように書ける

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

この展開公式を二項展開という

そして、$a^{n-k}b^k$ の係数

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

は二項係数という

＊　＊　＊

二項展開において、$a = 1$ の場合を考えると、

$$(1+b)^n = 1+nb+\frac{n(n-1)}{2!}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^3+\cdots$$

ここで、二項係数はいつでも正なので、$b > 0$ ならば、上の二項展開に現れる項はすべて正となる

特に、$n \geq 2$ ならば、次の不等式が成り立つ

$$(1+b)^n > 1+nb$$

$100!$ と 10^{100} はどちらが大きいか？

$n = 100$ のとき、10^n はとても大きい数だが、$n!$ と比べたら取るに足らないことを示す（$n!$ を概算するスターリングの公式は使わずに）

＊　＊　＊

$100!$ において、10 から先をすべて 10 に置き換える

10 から 100 までの数は 91 個あるので、

$$100! > 10^{91}$$

がわかる

より精密に評価するために、10 から 99 までの 90 個の数の積を 10 個ずつまとめてみると、

$$\begin{gathered}10^{10} < 10\cdot 11\cdots 19 < 10^{20}\\ 10^{20} < 20\cdot 21\cdots 29 < 10^{30}\\ \vdots\\ 10^{90} < 90\cdot 91\cdots 99 < 10^{100}\end{gathered}$$

さらに、これを縦にかけ合わせて、

$$10^{10}\cdots 90^{10} < 10\cdots 99 < 20^{10}\cdots 100^{10}$$

左辺は、

$$\begin{aligned}10^{10}\cdots 90^{10} &= (10\cdots 90)^{10}\\ &= ((10\cdot 1)\cdot(10\cdot 2)\cdot\cdots\cdot(10\cdot 9))^{10}\\ &= \left(10^9\cdot(1\cdot 2\cdot\cdots\cdot 9)\right)^{10}\\ &= \left(10^9\cdot 9!\right)^{10}\\ &= 10^{90}\cdot(9!)^{10}\end{aligned}$$

右辺は、

$$\begin{aligned}20^{10}\cdots 100^{10} &= (20\cdots 100)^{10}\\ &= ((10\cdot 2)\cdot(10\cdot 3)\cdots(10\cdot 10))^{10}\\ &= \left(10^9\cdot(1\cdot 2\cdots 9\cdot 10)\right)^{10}\\ &= \left(10^9\cdot 9!\cdot 10\right)^{10}\\ &= \left(10^{10}\cdot 9!\right)^{10}\\ &= 10^{100}\cdot(9!)^{10}\end{aligned}$$

なので、

$$10^{90}\cdot(9!)^{10} < 10\cdots 99 < 10^{100}\cdot(9!)^{10}$$

ここで、

$$100! = 9!\cdot 10\cdots 99\cdot 100$$

と表し、後回しにしていた $9!\cdot 100$ を不等式の各項にかけると、

$$10^{90}\cdot(9!)^{10}\cdot 10^2\cdot 9! < 100! < 10^{100}\cdot(9!)^{10}\cdot 10^2\cdot 9!$$

$$10^{92}\cdot(9!)^{11} < 100! < 10^{102}\cdot(9!)^{11}$$

ところで、$9! = 362880 \fallingdotseq 3.6\times 10^5$ から、

$$3\times 10^5 < 9! < 4\times 10^5$$

と粗く評価しておき、この式の両辺を 11 乗すると、

$$3^{11}\times 10^{55} < (9!)^{11} < 4^{11}\times 10^{55}$$

ここで、次のように考えると、$10^5 < 3^{11}$ という大まかな不等式が成り立つ

$$\begin{aligned} 10^5 &= 3^5 \times \frac{10^5}{3^5} \\ &= 3^5 \times \left(\frac{10}{3}\right)^5 \\ &\fallingdotseq 3^5 \times (3.3)^5 \\ &= 3^5 \times 3^{0.3\times 5} \\ &= 3^{10} \times 3^{0.3} \\ &< 3^{11} \end{aligned}$$

また、次のように考えることで、$4^{11} < 10^7$ という大まかな不等式も成り立つ

$$\begin{aligned} 4^{11} &= 2^{22} \\ &= 2^{10} \times 2^{10} \times 2^2 \\ &= 1024^2 \times 4 \\ &= \left(1000 \times \frac{1024}{1000}\right)^2 \times 4 \\ &= \left(10^3 \times 1.024\right)^2 \times 4 \\ &= 10^6 \times 1.024^2 \times 4 \\ &< 10^6 \times 1.1^2 \times 4 \\ &< 10^7 \end{aligned}$$

これらを使うと、$(9!)^{11}$ に関する不等式の左辺と右辺は、

$$\begin{aligned} 3^{11} \times 10^{55} < (9!)^{11} < 4^{11} \times 10^{55} \\ 10^5 \times 10^{55} < (9!)^{11} < 10^7 \times 10^{55} \\ 10^{60} < (9!)^{11} < 10^{62} \end{aligned}$$

したがって、$100!$ に関する不等式の左辺と右辺は、

$$\begin{aligned} 10^{92} \times (9!)^{11} < 100! < 10^{102} \times (9!)^{11} \\ 10^{92} \times 10^{60} < 100! < 10^{102} \times 10^{62} \\ 10^{152} < 100! < 10^{164} \end{aligned}$$

これで、大まかな手計算で $100!$ の大きさを評価できた

特に、$10^{152} < 100!$ から、$100!$ が 10^{100} よりもはるかに大きいことがわかる

$\cos x$ のテイラー展開

単項式におまじないの係数をつけて足したり引いたりした関数を考える

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

この無限級数を途中で打ち切らずに、ずっと続けることを考えてみる

x を固定しておくと、n が大きいとき、分子のべき乗 x^n と分母の階乗 $n!$ では $n!$ の方が圧倒的に大きくなり、この無限級数は収束する

この無限級数をプロットしたグラフは、$|x|$ が小さいところでは $y = \cos x$ のグラフとほぼ重なり合う

原点から少し離れたところでも、多項式の項の個数を増やすとよく近似できる

このように、調べたい関数を多項式で近似し、局所的に近似の精度を上げるときは多項式の項を増やすという形で定理を形式化したものがテイラー展開である

関数の局所的な様子を見る

簡単な関数のグラフは拡大していくと急に様子が変わったりせず、むしろ、だんだん安定したものになると考えられる

局所的な部分を拡大すると安定した姿になるとき、その様子を数学的にとらえる概念が微分

ものによっては、拡大するとどんどん見え方が変

わるものもある

拡大を何度繰り返しても同じ複雑さを保つ数学的構造（フラクタル）も自然界には現れる

拡大すれば何でも簡単になるわけではないが、微分では、拡大したとき安定していく「素直」なものを主な対象とする

つまり、微分は局所を分析するのに強力な手法だが、万能ではない

微分の定義

関数は変化の法則性をとらえる数学的言語

数 x に対して数 $f(x)$ が定まるとき、$f(x)$ を変数 x の関数という

＊　＊　＊

座標 $(x, f(x))$ を xy 平面でプロットした曲線を関数 $f(x)$ のグラフという

これは、x 座標の点 x における高さが $f(x)$ となる曲線

＊　＊　＊

この曲線の局所的な様子を見るのに、変数 x を $x+h$ に動かしてみる

そうすると、関数の値は $f(x)$ から $f(x+h)$ に変わる

「素直」な関数のグラフをどんどん拡大すると、拡大部分はだんだん直線のように見えるだろう、と考えられる

h が小さいとき、斜めの曲線がほぼ一定の傾きの直線に見えるというのは、関数の値の変化量 $f(x+h)-f(x)$ が h にほぼ正比例するということ

式で表すと、x から $x+h$ の区間のグラフを直線とみなしたときの勾配

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

は、h が 0 に近づくとある 1 つの数に近づく、すなわち、収束するはずである

＊　＊　＊

■定義　h を 0 に近づけると、$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ がある数に収束するとき、$f(x)$ は x において微分可能であるという

このとき、極限値を

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

と書き、$f(x)$ の微分または微分係数（微係数）という

＊　＊　＊

定数関数の微分　「収束する」ことを「限りなく近づく」と言うこともある

日常的な言葉だと「限りなく近づく」には「その値に達していない」というニュアンスを感じるが、数学では、最初からずっと同じ値のときも「収束する」場合に含める

$f(x)$ が x の値によらないとき、$f(x)$ を定数関数という

このときは h がどんな数でも $f(x+h)-f(x)=0$ となるので、定数関数の微分は 0 である

＊　＊　＊

微分係数が定まらない例

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が収束しない状況の例として、$y=|x|$ を考える

$f(x) = |x|$ の場合、$x = 0$ で

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を計算しようとすると、

$h > 0$ のときは

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$h < 0$ のときは

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

となり、h を正から 0 に近づけるときと、負から 0 に近づけるときとで、$\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ の極限の値が異なってしまうので、微分係数 $f'(0)$ が定まらない

＊　＊　＊

■定理　$a < x < b$ で定義された、微分可能な関数 $f(x)$ が $x = c$ で最大値または最小値をとるならば、$f'(c) = 0$ である

＊　＊　＊

$f'(c)$ が最大値となる場合の証明

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

において、$f(c)$ が最大値であることから、

$$f(c) \geq f(c+h)$$
$$f(c+h) - f(c) \leq 0$$

したがって、$h > 0$ のときは、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

となり、h を正の側から 0 に近づけた極限値として $f'(c) \leq 0$ が成り立つ

一方、$h < 0$ のときは、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

となり、h を負の側から 0 に近づけた極限値として $f'(c) \geq 0$ が成り立つ

$f'(c) \leq 0$ かつ $f'(c) \geq 0$ なので、$f'(c) = 0$ が導かれた　□

＊　＊　＊

$f'(c)$ が最小値となる場合の証明　$f'(c)$ が最大値となる場合と同様に示される　□

導関数

x を止めて考えると、$f(x)$ の微分は 1 つの数

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

また別の視点として、

- x に数を与えると、何か 1 個、数が出てくる
- また別の x に対しては、別の数が出る

そう思うと、x から $\dfrac{df}{dx}(x)$ への対応は 1 つの関数を与えていると考えることができる

このように、$\dfrac{df}{dx}(x)$ を x の関数と見たとき、それを $f(x)$ の**導関数**という

＊　＊　＊

「微分」と「導関数」は視点の違いで使い分けられる言葉

- x を止めて $\dfrac{df}{dx}(x)$ という 1 個の数（微分係数）に注目するのか
- x を変数と思って $\dfrac{df}{dx}(x)$ を関数とみなす（導関数として扱う）のか

後者の立場に立って、$\dfrac{df}{dx}(x)$ を関数だと思うと、さらに微分を考えることができる

＊　＊　＊

微分できないからといってそこで終わりではない

たとえば、関数概念を拡張した超関数の理論は、極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が存在しない場合にも、より広く「微分」という概念をとらえる枠組みを与えるもの

単項式 x^n の微分

$f(x+h)=(x+h)^n$ の二項展開

$$f(x+h)=x^n+nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^n$$

を用いると、

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=(x+h)^n-x^n\\&=x^n+nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2\\&\quad+\cdots+h^n-x^n\\&=nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^{n-1}\end{aligned}$$

上の式変形で、最初の x^n は最後の $-x^n$ と相殺されている

両辺を h で割ると、

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^{n-1}}{h}$$

$$=nx^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}$$

h が 0 に近づくと、

- h に無関係な最初の項 nx^{n-1} はそのまま残る
- 次の h の項は 0 に近づく
- その後の $h^2,h^3,\cdots,h^{n-1}$ の項はさらに速く 0 に近づく

というわけで、h を 0 に近づけると nx^{n-1} に収束し、

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

が成り立つ

微分しても変わらない不思議な関数

この式をぼんやりと眺めていると、

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

- 左辺における $\dfrac{d}{dx}$ という記号に呼応して、右辺では n が飛び出すというふうにも見える
- 左辺では x の n 乗だったものが、右辺では $n-1$ 乗になっている

＊　＊　＊

x^n を n の階乗で割った $\dfrac{x^n}{n!}$ という関数を考える

この関数を微分すると、$\dfrac{1}{n!}$ は微分の外に出せる

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}x^n\right)=\frac{nx^{n-1}}{n!}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

この式では、左辺と右辺で似た形が現れている

文字は左辺の n から右辺の $n-1$ に化けるが、形は同じ

n に具体的な数を入れて確かめてみる

- $n=0$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^0}{0!}\right)=0$
- $n=1$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^1}{1!}\right)=\dfrac{x^0}{0!}$
- $n=2$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{2!}\right)=\dfrac{x^1}{1!}$
- $n=3$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^3}{3!}\right)=\dfrac{x^2}{2!}$
- $n=4$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4}{4!}\right)=\dfrac{x^3}{3!}$
- $n=5$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^5}{5!}\right)=\dfrac{x^4}{4!}$

微分すると斜め右下にまったく同じ形の式が現れるというパターンが続く

上のリストでは $n = 5$ で止めているが、たとえば $n = 100$ までいっても同じパターンが続く

そこで、$\frac{x^n}{n!}$ を $n = 0$ から順に全部足すことを考え、それを $f(x)$ とおく

$$f(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\frac{d}{dx}f(x) = 0 + \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

下の式は1個右にずれているので、途中で打ち切れば1個足りなくなるが、無限に足すと、上の式と下の式はぴったり一致している

したがって、

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$$

が成り立つことがわかる

つまり、関数 $f(x)$ は微分したものが自分自身になっている！

いま無限級数として定義した関数 $f(x)$ を何通りかの記法で表しておく

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \end{aligned}$$

後にこの関数は、指数関数として e^x と書くことになる

ネイピアの数

次の関数に $x = 0$ と $x = 1$ を代入してみる

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

* * *

$x = 0$ を代入すると　最初の1だけが残り、

$$f(0) = 1$$

* * *

$x = 1$ を代入すると　1を何乗しても1であるから、

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

この $f(1)$ の数値はどのくらいになるだろうか？

1. 第1項は1
2. 第2項も1
3. 第3項は0.5
4. 次は前の項を3で割るわけだから0.166...
5. 次はさらに4で割るから0.041...
6. 次はさらにそれを5で割って0.008...

ここまでの6項の和で2.716...となる

加える項は急速に0に近づく

項が100個くらいまで進むと、次に加える $\frac{1}{100!}$ は小数点以下に0が150個以上並ぶくらい小さな数になる（$10^{152} < 100! < 10^{164}$ という不等式より）

このように、無限級数 $f(1)$ は収束がとても速く、

$$f(1) = 2.71828\ldots$$

という数になる

* * *

■定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

証明のスケッチ　二項展開を用いて、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

ここで、$k=2$ 以降の各項は次のように展開する

$$\begin{aligned}\frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} &= \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{1}{n^3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} \\ &= \frac{1}{3!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \\ &= \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\end{aligned}$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) \\ +\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\end{aligned}$$

n が大きくなると $\frac{1}{n}$ は 0 に近づくので、$1-\frac{1}{n}$ は 1 に近づき、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

となる　□

無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束

n を大きくすると $n!$ は急速に大きくなるので、$x=1$ のときには無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ が収束することは納得できる

では、$x>1$ のときもこの無限級数は収束するといえるのだろうか？

＊　＊　＊

そもそも数列の各項が 0 に近づかないと、その数列の総和は収束しないため、まず次の問いを考える（以下では x を固定しておく）

■問題　n をどんどん大きくしたとき、$\frac{x^n}{n!}$ は 0 に近づくか？

この問いは、x^n と $n!$ の大きさを比べようという問題である

たとえば $n=100$ とすると、実は $100!$ の方が 10^{100} よりも圧倒的に大きくなることをすでに示している

$n=100$ に限らず、「x を止めたとき、x^n と $n!$ の比である $\frac{x^n}{n!}$ は、n を大きくすると分母が圧倒的に大きくなり、比は 0 に近づく」ことが同様の議論で示される

＊　＊　＊

無限級数の各項が 0 に近づいたとしても、「塵も積もれば山となる」（足し合わせると発散する）ことも起こり得る

では、次の問題はどうだろうか？

■問題　無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は収束するか？

実はこの無限級数は、等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ よりももっと速く収束する

証明のスケッチ

x は固定して、n に関する和を考える

整数 n が十分に大きければ、

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

これは、「無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ が等比級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ より速く収束する」という 1 つの表現

正確には、$8x^2+1$ より大きいすべての自然数 n に対して、

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

が成り立つ

このことがいえれば、$8x^2$ より大きい整数 N に対して、無限級数 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は次のように等比級数 $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ より速く収束する

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n} \\ &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^N}\end{aligned}$$

上の計算のうち、$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n}$ では、次のような三角不等式を利用している

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_m| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|$$

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

そこで、無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ を、$n=N$ までの有限和と、$n=N+1$ からの無限級数に分けて考える

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

このように考えると、左辺の無限級数が、右辺の有限和に収束することがわかる

不等式 $\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$ の証明

一般に $A \leq 0$ のとき、$n > 2A^2+1$ ならば、

$$A^n < n!$$

という不等式が成り立つことを示す

$A = 2|x|$ の場合 $(2|x|)^n < n!$ が、$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$ となる

n が偶数（$= 2m$）の場合、$n > 2A^2$ の n を $2m$ に置き換えることで、$m > A^2$ となり、

$$\begin{aligned}n! &= (2m)! = 2m \cdot (2m-1) \cdots 2 \cdot 1 \\ &> m \cdot m \cdots m = m^m = m^{\frac{n}{2}} \\ &> \left(A^2\right)^{\frac{n}{2}} = A^n\end{aligned}$$

が成り立つ

n が奇数の場合、$n-1$ は偶数なので、偶数の場合の結果から $(n-1)! > A^{n-1}$ がいえる

さらに、$n > 2A^2+1 > A$ なので、

$$\begin{aligned}n! &= n \cdot (n-1)! \\ &> n \cdot A^{n-1} \\ &> A \cdot A^{n-1} = A^n\end{aligned}$$

となり、いずれの場合も $A^n < n!$ が成り立つ　□

関数等式

無限級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ に $x+y$ を代入し、$f(x+y)$ を計算してみる

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)
\end{aligned}
$$

*　*　*

2 重和　何かを算出したいとき、一旦小計を取ることがある

小計を取ってから、小計を足し合わせて総計を取るのが **2 重和**

小計として何を選ぶかには自由度がある

たとえば、1 ヶ月の支出を計算するときに、

- 食費や本代などの品目ごとの小計をを取り、それを足し合わせる
- 日々の支出を計算し、それを足し合わせる

どちらの方法を選んでも、まったく同じ総額が得られる

一般の 2 重和の計算においても、何を小計として選んでも総和は同じになる

多重積分における累次積分の計算法は、2 重和 $\sum\sum$ を一般化したものになっている

*　*　*

$f(x+y)$ で現れる 2 重和は、そもそも全体として何を算出しようとしているのか？

a, b という自然数（0 を含む）を固定して、$x^a y^b$ という項が $f(x+y)$ の 2 重和の中にどのように出現しているのか探す

$$
f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)
$$

この式において、

- $x^k y^{n-k}$ が $x^a y^b$ となるのは、$a = k, b = n-k$ の場合
- (k, n) の組は a, b によって $k = a, n = a+b$ とただ 1 つ定まる
- このとき $0 \leq k \leq n$ を満たしている（$\sum_{k=0}^{n}$ より）

まとめると、$(a, b) = (k, n-k)$ すなわち $(k, n) = (a, a+b)$ という等式の下で、組 (a, b) と組 (k, n) が 1 対 1 に対応している

そのため、$x^a y^b$ は、$f(x+y)$ の 2 重和の中で、

$$
\frac{x^a}{a!} \cdot \frac{y^b}{b!} = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}
$$

という形で現れることがわかる

また、

- $a = 0, 1, 2, \ldots$ かつ $b = 0, 1, 2, \ldots$
- $n = 0, 1, 2, \ldots$ かつ $0 \leq k \leq n$

という数の範囲の条件も、1 対 1 に対応している

このことから、$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n}$ を $\sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty}$ に書き換えることができて、

$$
\begin{aligned}
f(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\
&= \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^a}{a!} \frac{y^b}{b!}
\end{aligned}
$$

が成り立つ

このように書き換えると、2 重和の計算の順序は入れ替えてもよいことがわかる

＊　＊　＊

ここでさらに、かけ算の分配法則（有限個の場合と同様に、和がきちんと収束すれば分配法則が成り立つ）を使って書き直すと、

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{x^a}{a!}\frac{y^b}{b!} \\ &= \left(\sum_{a=0}^{\infty}\frac{x^a}{a!}\right)\left(\sum_{b=0}^{\infty}\frac{y^b}{b!}\right) \end{aligned}$$

$f(x)$ の定義式 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ より、

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

$f(x+y)$ を二項展開を使って 2 重和として書き表し、「小計の取り方を変えても、結局は同じ総和が計算できる」という 2 重和のトリックを使うと、$f(x)f(y)$ という積になった

＊　＊　＊

■定理　無限級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ は次の関数等式を満たす

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

指数関数の拡張

先ほど示した関数等式は、指数法則ともいう

＊　＊　＊

$f(x)$ が無限級数として定義されていたことは一旦忘れて、

- $x > 0$ のとき $f(x) > 0$
- $f(x+y) = f(x)f(y)$
- $f(0) = 1, \quad f(1) = e$

という性質だけを用いて何が言えるか見ていく

＊　＊　＊

■定理　m を自然数とするとき、

$$f(mx) = f(x)^m$$

が成り立つ

$m = 0$ の場合　$f(0) = 1$ より、$f(0x) = f(0) = 1$

また、$f(x)^0 = 1$ より、$f(x)^0 = f(0x)$ が成り立つ

$m = 1$ の場合　$f(x) = f(x)^1$ が成り立つ

一般の場合の証明　$m+1$ の場合を考える

$y = mx$ とおくと、$x + y = (m+1)x$ となり、関数等式が使える

よって、$f(mx) = f(x)^m$ が m で成り立つなら、

$$\begin{aligned} f((m+1)x) &= f(mx)f(x) \\ &= f(x)^m f(x) \\ &= f(x)^{m+1} \end{aligned}$$

となり、$m+1$ でも成り立つ

これで、数学的帰納法によって、すべての自然数 m に対して $f(mx) = f(x)^m$ が成り立つことが示された　□

＊　＊　＊

$x = 1$ の場合　n が自然数のとき、

$$f(n) = f(1)^n = e^n$$

x が正の有理数の場合　x を正の有理数 $x = \dfrac{n}{m}$ とする

m は自然数なので、先ほど示した $f(x)^m = f(mx)$ が成り立ち、

$$f(x)^m = f(mx) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = f(n)$$

さらに n も自然数なので、$f(n) = e^n$ となり、

$$f(x)^m = e^n$$

$f(x) > 0$ に注意して、両辺の m 乗根を取れば、

$$f(x) = e^{\frac{n}{m}} = e^x$$

となり、x が正の有理数のときも $f(x) = e^x$ が成り立つ

x が負の有理数の場合　関数等式より、

$$f(-x)f(x) = f(-x+x) = f(0) = 1$$

なので、$f(-x)$ は $f(x)$ の逆数となる

したがって、$f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ であり、$f(x) = e^x$ より、

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

x を $-x$ に置き換えても、$f(x) = e^x$ が成り立つことがわかる

*　*　*

以上の議論から、x が有理数のとき $f(x) = e^x$ となることがわかった

x が有理数以外のときに、e^x はどうやって定義すればよいだろうか？

有理数での近似による定義　1 つの考え方として、どんな実数でも有理数を使っていくらでも近似できるということを用いる

たとえば、実数 x を小数点以下 3 桁まで表示して得られる数 y は、$y = \dfrac{整数}{1000}$ と表せるので有理数であり、しかも x との誤差が 10^{-3} 未満になる

e^x の値が変数 x について連続的に動くと考えると、実数 x を有理数 $\dfrac{n}{m}$ で近似すれば、$e^{\frac{n}{m}}$ は e^x を近似できるだろう

そこで、近似をどんどん精密にしたときの極限として e^x の値を定義する

べき級数展開による定義　x が有理数とは限らない場合に指数関数 e^x を定義する別の方法として、次のべき級数展開を用いるという考え方もある

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

x が有理数でなくても、右辺の無限級数で定義した関数を e^x と表記しよう、という発想

べき乗という 1 つの観点にこだわっていると、x が複素数の場合に e の x 乗が何を意味するのかは、哲学的な問題となってしまう

無限級数であれば、x が複素数であっても意味を持つ

x が複素数の場合も含めて、無限級数で指数関数 e^x を定義しておくと、指数関数と三角関数も結びつき、さらに世界が拡がる

位置の変化で微分を感じる

「傾き」としての微分は歩いているときにも感じることができる

まっすぐな坂道があって、坂道の出発点から水平方向に x だけ進んだ地点の標高が $f(x)$ だとする

標高 $f(x)$ は x の関数だと思うことができ、坂道を真横から見ると、$y = f(x)$ のグラフとみなせる

$f(x+h) - f(x)$ は地点 x から水平に h だけ進んだときの標高の差となるので、$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ はこ

の地点のおおよその勾配となる

一方、$f(x)$ が微分可能ならば、h が十分に小さいとき、この値は微分 $f'(x)$ に近い値になっているだろう

つまり、坂道の勾配として、標高の「微分を感じている」ことになる

■微分を感じる例　坂道において、$f(x)$ を出発点から水平に x だけ離れた地点の標高とすると、$f'(x)$ はその地点における勾配を表す

＊　＊　＊

坂道の勾配は、位置によって異なる

x 座標が増える方向に歩いているとき、ある地点 x における勾配が $f'(x)$ というのは、次のように感じることができる

- $f'(x) > 0$：登り坂
- $f'(x) < 0$：下り坂
- $|f'(x)|$ が大きい：急勾配

時間の変化で微分を感じる

時が経つにつれて変化する量は、時刻を変数とする関数で表される

たとえば、時とともに何かものが動くときは、その位置の座標は時刻を変数とする関数で記述できる

ここでは、このような時刻を変数として位置を表す例を考える

位置の微分　数直線上で物体が動いていて、時刻 t におけるその位置をその座標 $f(t)$ で表すとする

ここで、微分の定義において、極限を取る前の

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

という値の意味に注目する

分子は時刻 t から時刻 $t+h$ の間に進んだ距離で、それをその間にかかった時間 h で割っていることから、これは時間間隔 h での平均速度を表している

したがって、時間間隔 h を 0 に近づけたときの極限、すなわち位置の微分 $f'(t)$ は、時刻 t における（瞬間）速度を表していると理解できる

■微分を感じる例　位置の微分 $f'(t)$ は、時刻 t における速度である

＊　＊　＊

位置の 2 階微分　速度は、時刻とともに変わっていく

速度の時間変化を見るために、速度 $f'(t)$ を時刻 t の関数とみなすと、これは位置 $f(t)$ の導関数である

速度 $f'(t)$ をさらに微分するということは、$f(t)$ の 2 階微分 $f''(t)$ を考えることになる

これにも名前がついていて、加速度という

加速度 $f''(t)$ は、速度の変化を表す量である

■微分を感じる例　位置の 2 階微分 $f''(t)$ は、時刻 t における加速度である

＊　＊　＊

運動の記述　運動という言葉は、物理学では「物体が時々刻々と位置を変える」という"motion"の意味で使われる

先ほどは、数直線上という 1 次元的な位置の変化を考えたが、今度は次元を上げて、平面上あるいは空間の中における「運動」を考えてみる

そのために、座標を用いて時々刻々と変わる位置を記述することにする

たとえば 2 次元の運動の場合、時刻 t における位置を位置ベクトルとして、

$$(x(t), y(t))$$

とベクトルで表す

3 次元空間の場合には、もう 1 つ z 座標を用いる

位置ベクトルの x 成分、y 成分をそれぞれ微分して得られるベクトル

$$(x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$$

を速度ベクトルという

速度ベクトルは大きさだけではなく、どちらの方向に進んでいるかという向きの情報も持っている

これに対して、速度ベクトルの大きさを速さといい、向きの情報を含む「速度」と区別した用語を使う

$$\text{速さ} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

加速度ベクトルは、速度ベクトルを微分した次のベクトルになる

$$(x''(t), y''(t)) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}(t), \frac{d^2y}{dt^2}(t)\right)$$

* * *

物理法則は、座標とは無関係に成り立っている

一方、座標系を使うことで、次元が高い場合でも、座標成分ごとに微分すれば速度ベクトルや加速度ベクトルを求めることができるため、計算上の便利さがある

経済学における微分

何かの消費量が q であるとき、そのことによって得られる満足感やありがたみ（の総量）を仮想的に数値化して効用と呼ぶ

効用は、消費量 q の関数とみなして効用関数とよび、

$$U = U(q)$$

と表記する

この考え方には、そもそも満足度を数値化できるのだろうか？という批判がある

そのため、現代の経済学では、効用の絶対的な大きさには意味がなく、「どちらが好きか」という個人の好み（選好）を描写する表現であるという考え方が使われている

p が q と同じ程度かそれ以上に好きならば、$U(p) \geq U(q)$ を満たすような関数 $U(q)$ を、この選好を描写する効用関数という

同じ選好を描写する効用関数 $U(q)$ は無数にあるが、どれを使っても結論が変わらない性質は、その選好から導かれる性質と考えることができる

たとえば、効用関数の微分

$$\frac{dU}{dq}(q) = U'(q)$$

の符号は、その選好を描写する効用関数のどれを使っても変わらない

効用関数の微分 $U'(q)$ を、経済学では限界効用とよぶ

＊　＊　＊

限界効用漸減の法則　たとえば、喉が渇いているうちは、少し水を飲めるだけでも嬉しいと感じるが、何杯も飲むとありがたみが薄れてくる

このような「最初は嬉しいが、そのうち飽きてくる」という経験的事実を限界効用漸減の法則という

この性質は、効用関数 $U(q)$ の微分（限界効用）および 2 階微分を用いて、

- ありがたいと思う：$U'(q) \geq 0$
- だんだん飽きてくる：$U''(q) \leq 0$

と表される

＊　＊　＊

「ありがたみ」の数式化　まず、水を「ありがたいと思う」を数式化してみる

たとえば、すでに q の分量だけ水を飲んだ後、追加で少量の水を h だけ飲んだとすると、

$$U(q+h) > U(q)$$

が「ありがたい」という選好を描写する不等式になる

したがって、$h > 0$ のとき、

$$\frac{U(q+h) - U(q)}{h} > 0$$

となるので、$h \to 0$ としたときの極限である $U'(q)$ は、$U'(q) \geq 0$ を満たすことになる

このようにして、「水をありがたいと思う」ことから、限界効用 $U'(q)$ の性質 $U'(q) \geq 0$ が導かれた

＊　＊　＊

「飽き」の数式化　「だんだん飽きてくる」を選好で説明するには、効用関数 $U(q)$ は p と q のどちらが好きかというだけではなく、好みをもう少し精密に描写している必要がある

その 1 つのアプローチに、「飽きてくる」ということを「他のものに目移りする」というように、他のものとの比較をするというものがある

すなわち、複数のものに対する選好を考え、それを複数の変数を持つ効用関数で描写する

ここでは 1 変数のままで、以下のように一定量を追加して消費したときの選好があると仮定して話を進める

すなわち、今までの消費量が $q < p$ のとき、同じ量 h の追加であっても、q しか飲んでいないときと比べて、すでに p というたくさんの量を飲んだ後では「ありがたみが薄れる」ということを、次の不等式で描写してみる

$$U(q+h) - U(q) > U(p+h) - U(p)$$

このような不等式を満たす効用関数 $U(q)$ は無数にあるが、どれを使っても $U''(q) \leq 0$ となる

このことを確かめるために、まず不等式の両辺を $h > 0$ で割って、h を 0 に近づけた極限を取ると、$U'(q) \geq U'(p)$ となることがわかる

次に、$s > 0$ として $p = q + s$ とおくと、$U'(q) \geq$

$U'(p)$ より、

$$U'(q) \geq U'(q+s)$$
$$U'(q+s) - U'(q) \leq 0$$

となるので、両辺を s で割って、$s \to 0$ の極限を取ると、

$$U''(q) = \lim_{s \to 0} \frac{U'(q+s) - U'(q)}{s} \leq 0$$

となる

これで、「だんだん飽きてくる」という限界効用逓減の法則から、効用関数の 2 階微分の不等式 $U''(q) \leq 0$ が導かれた

逆に「やみつきになる」場合は、限界効用逓減の法則とは正反対で、$U''(q) \geq 0$ となる

＊ ＊ ＊

このように、何かを消費したときに、「ありがたい」とか「飽きてくる」という感情を描写する効用関数はどれを使っても、その微分や 2 階微分の符号に特徴が現れることになる

■微分を感じる例 効用関数の微分（限界効用）$U'(q)$ の符号は、消費量が q の時点で追加で消費することに対する「ありがたみ」を表し、2 階微分 $U''(q)$ の符号は「飽き」や「やみつき」の傾向を表す

＊ ＊ ＊

微分の符号とグラフの形状 「最初はありがたいが、たくさんあるとだんだん飽きてくる」という効用関数をグラフに表すと、グラフは右上がりで上に凸になる

1. 限界効用が正：「ありがたみを感じる」ということでグラフは右上がり
2. 2 階微分が負：「だんだん飽きてくる（関数の増加率がだんだん減ってくる）」ということでグラフは上に凸

微分がつねに 0 ならば定数である

標語的に言えば、無限小レベルで変化がなければ、大域的に変化がないということ

＊ ＊ ＊

■定理 実数全体で定義された関数 $f(x)$ について、すべての x で $f'(x) = 0$ ならば、その関数 $f(x)$ は定数である

＊ ＊ ＊

この定理は、平均値の定理という一種の「不動点定理」から導かれる

- どの時刻でも速度が 0 ならば、実は動いていない（位置が一定）
- 限界効用が 0 ならば、そもそもこの人はそのことに無関心（効用関数 $U(q)$ が消費量 q によらずに一定）

具体例に当てはめると当たり前に思えるが、よく見ると局所的な性質から大域的な性質を導いていることがわかる

＊ ＊ ＊

■定理 実数全体で定義された関数 $g(x)$ について、すべての x で $g'(x) = a$ ならば、$g(x) = ax + g(0)$ である

＊ ＊ ＊

証明 この定理は、前述の定理から導かれる

新たな関数として $f(x) = g(x) - ax$ とおいてみると、

$$f'(x) = g'(x) - a = a - a = 0$$

となるので、$f(x)$ は定数である

特に、$f(x) = f(0)$ がすべての x に対して成り立つ

$f(x) = g(x) - ax$ だったことを思い出すと、$f(0) = g(0)$ となるので、

$$g(x) - ax = f(0) = g(0)$$
$$\therefore \quad g(x) = ax + g(0)$$

が示される □

＊　＊　＊

ここで取り上げた 2 つの定理は、もっとも簡単な微分方程式を解いたとみなすこともできる

合成関数の微分

$x = g(t)$ を $f(x)$ に代入すると、t を変数とする関数 $f(g(t))$ が得られる

この関数 $f(g(t))$ を、関数 $f(x)$ と関数 $g(t)$ の合成関数という

＊　＊　＊

■定理：合成関数の微分（連鎖律）

関数 $f(x)$ と関数 $g(t)$ の合成関数 $f(g(t))$ を $F(t)$ と書くと、

$$F'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

が成り立つ

＊　＊　＊

代入してから微分 $\neq$ 微分してから代入であることに注意

- $F'(t)$：代入してから微分（$x = g(t)$ を $f(x)$ に代入した関数 $f(g(t))$ を微分）
- $f'(g(t))$：微分してから代入（$f(x)$ を微分した $f'(x)$ に $x = g(t)$ を代入）

後者に $g'(t)$ をかけて初めて前者と一致する、というのが合成関数の微分公式の趣旨

＊　＊　＊

連鎖率の感覚　勾配が一定の坂道を登っている状況を考える

- 水平方向の速度は、「単位時間あたりにどれだけ進むか」を表している
- 坂道の勾配は、「単位距離進むごとにどれだけ登るか」を表している

よって、上下方向の速度「単位時間あたりにどれだけ登るか」を求めるには、水平方向の速度と勾配をかければよい

$$\text{上下方向の速度} = \text{水平方向の速度} \times \text{勾配}$$

この計算式を、微分を用いて表現する

水平方向に座標 x をとり、その標高を $f(x)$ とする

そうすると、微分 $f'(x)$ はこの地点での坂道の勾配となる

一方、ある人が時刻 t に、x 座標では $x = g(t)$ の地点にいるとすると、微分 $g'(t)$ はその人の水平方向の速度となる

このとき、合成関数 $F(t) = f(g(t))$ は時刻 t にこの人がいる地点の標高となり、その微分 $F'(t)$ は、時刻 t における上下方向の速度を表すことになる

よって、上下方向の速度を求める式は、

$$F'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

これは、合成関数の微分の公式になっている

積の微分（ライプニッツの法則）

2 つの関数が与えられたとすると、それらを足せば 1 つの関数になり、またそれらをかけても別の関数が得られる

2 つの関数をかけたとき、その微分がどうなるか？

＊　＊　＊

■定理：積の微分（ライプニッツの法則）

2 つの関数 $f(t)$, $g(t)$ の積 $f(t)g(t)$ の微分は、

$$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

である

＊　＊　＊

ライプニッツの法則の可視化

時刻 t のときに高さ $g(t)$、底辺の長さ $f(t)$ の長方形を考える

この長方形の面積は $f(t)g(t)$ である

時々刻々と $f(t)$ も $g(t)$ も変わる、それに応じて長方形の形も変わり、面積 $f(t)g(t)$ が変化する

ライプニッツの法則の左辺 $(f(t)g(t))'$ は、この面積の変化率を表している

まず、微分の定義に戻って、積 $f(t)g(t)$ の微分を書き下すと、

$$(f(t)g(t))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t)}{h}$$

右辺の分子は、時刻 $t+h$ での長方形の面積と、時刻 t での長方形の面積の差になっている

時刻 t から $t+h$ になったとき、高さも底辺の長さも増加する

このとき、長方形の面積の変化を、次の 3 つの部分に分けて考える

- 高さの変化による面積の増加（縦長の帯）
- 底辺の長さの変化による面積の増加（横長の帯）
- 高さと底辺の長さの変化による面積の増加（小さな四角形）

＊　＊　＊

高さの変化によって増えた部分

縦長の帯は、幅 h、高さ $g(t+h) - g(t)$ の縦長の長方形になっている

h が 0 に近づくと、$\dfrac{g(t+h) - g(t)}{h}$ は $g(t)$ の微分 $g'(t)$ に近づくことから、h が 0 に近ければ、

$$g(t+h) - g(t) \approx hg'(t)$$

となるので、縦長の帯の高さは $hg'(t)$ で近似できる

よって、

$$\text{縦長の帯の面積} \approx f(t) \cdot hg'(t) = hf(t)g'(t)$$

＊　＊　＊

底辺の長さの変化によって増えた部分

横長の帯は、幅 h、高さ $f(t+h) - f(t)$ の横長の長方形になっている

先ほどと同様に高さの近似を考えて、

$$\text{横長の帯の面積} \approx g(t) \cdot hf'(t) = hf(t)g'(t)$$

＊　＊　＊

高さと底辺の長さの変化によって増えた部分

小さな四角形は、幅 $f(t+h)-f(t)$、高さ $g(t+h)-g(t)$ の長方形になっている

幅と高さについて、これまでと同様に近似を考えると、

$$\begin{aligned}\text{小さな四角形の面積} &\approx (hf'(t)) \times (hg'(t)) \\ &= h^2 f'(t)g'(t)\end{aligned}$$

h が小さいとき、縦長の帯と横長の帯は、縦か横のいずれかだけが小さくなるが、小さな四角形は縦も横も小さい

この違いを反映して、右辺には h^2 という、h よりもはるかに小さい係数が現れている

この項は、h を 0 に近づける極限の計算の中では実は寄与しない

＊　＊　＊

まとめると、長方形の面積の変化は、縦長の帯の面積と横長の帯の面積と小さな四角形の面積の和になるので、

$$\begin{aligned}&f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t) \\ &\quad = hf(t)g'(t) + hf(t)g'(t) + h^2 f'(t)g'(t) \\ &\qquad = h\left(f(t)g'(t) + f'(t)g(t) + hf'(t)g'(t)\right)\end{aligned}$$

よって、積の微分は、

$$\begin{aligned}&(f(t)g(t))' \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(f(t)g'(t) + f'(t)g(t) + hf'(t)g'(t)\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(f(t)g'(t) + f'(t)g'(t) + hf'(t)g'(t)\right) \\ &= f(t)g'(t) + f'(t)g(t)\end{aligned}$$

となり、ライプニッツの法則が導かれた

＊　＊　＊

このように図形を用いると、ライプニッツの法則は、

長方形の面積の変化
　　　　= 縦長の帯の寄与 + 横長の帯の寄与

という形で「目に見える」ようになる

商の微分

■定理：商の微分

$$\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{(g(t))^2}$$

＊　＊　＊

証明　左辺の $\dfrac{f(t)}{g(t)}$ を $G(t)$ とおいておく

$G(t)$ の微分 $G'(t)$ を求めるのが目標

$G(t) = \dfrac{f(t)}{g(t)}$ の分母を払うと、

$$f(t) \times G(t) = g(t)$$

この両辺を微分すると、ライプニッツの法則を使って、

$$f(t)G'(t) + f'(t)G(t) = g'(t)$$

移項して、$f(t)$ で割れば、

$$\begin{aligned}G'(t) &= \frac{g'(t) - f'(t)G(t)}{f(t)} \\ &= \frac{g'(t) - f'(t) \times \dfrac{f(t)}{g(t)}}{f(t)} \\ &= \frac{g'(t)f(t) - f'(t)g(t)}{(f(t))^2}\end{aligned}$$

となり、商の微分の公式が導かれた　□

微分方程式とは？

未知の関数を $f(x)$ とおいて、$f(x)$ が満たすべき条件を等式で書き下したものが「関数に対する方程式」

関数に対する方程式の中に、$f(x)$ の微分 $f'(x)$ や $f''(x)$ が含まれているとき、その方程式を微分方程式という

もっとも簡単な微分方程式 $f'(x) = 0$

定数関数の微分は恒等的に 0 になる

逆に、「微分 $f'(x)$ が恒等的に 0 ならば $f(x)$ は定数である」という定理も示した

この定理の仮定は、未知関数 $f(x)$ が微分方程式

$$\frac{df}{dx}(x) = 0$$

を満たしているということ

つまり、この定理は、「微分方程式 $\frac{df}{dx}(x) = 0$ の解は定数関数 $f(x) = C$ である」ことを主張している

「どの点でも勾配がなければ、実は、その道は水平だ（高さが一定だ）」というのは、実生活では当たり前に見える

数学としては、無限小レベルの条件である微分方程式から、その解の大域的な性質を記述していることになる

＊　＊　＊

以前述べた定理「すべての x で $f'(x) = a$ ならば、$f(x) = ax + f(0)$ である」も、微分方程式の言葉で記述できる

すなわち、a を定数とするとき、初期条件 $f(0) = C$ の下で、未知関数 $f(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{df}{dx}(x) = a$$

の解が

$$f(x) = ax + C$$

であるという主張になる

$f'(x) = \lambda f(x)$ という微分方程式を解く

指数関数 e^x は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ というべき級数展開を用いると導関数が自分自身になる、すなわち $(e^x)' = e^x$ が成り立つことを以前示した

その逆は成り立つだろうか？

これは「$f'(x) = f(x)$ という微分方程式を解く」問題である

＊　＊　＊

■定理　λ を定数とする

実数全体で定義された関数 $F(t)$ が

- 微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$
- 初期条件 $F(0) = A$

を満たすならば、$F(t) = Ae^{\lambda t}$ である

＊　＊　＊

解を 1 つ見つける

まず、指数関数 $e^{\lambda t}$ が微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$ を満たしていることを確かめる

$e^{\lambda t}$ を $f(x) = e^x$ と $g(t) = \lambda t$ の合成関数と見なすと、

- $f(x) = e^x$ に対しては $f'(x) = e^x$
- $g(t) = \lambda t$ に対しては $g'(t) = \lambda$

が成り立つので、合成関数の微分の公式より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}f(g(t)) \\ &= f'(g(t)) \cdot g'(t) \\ &= e^{g(t)} \cdot \lambda \\ &= e^{\lambda t} \cdot \lambda\end{aligned}$$

となり、確かに $e^{\lambda t}$ は微分方程式を満たす関数である

＊　＊　＊

すべての解を見つける

では、$e^{\lambda t}$ と異なるタイプの解は存在するだろうか？

微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$ を満たす未知の解 $F(t)$ を既知の解 $e^{\lambda t}$ と比較するため、割り算してみる

定理の結論は、

$$\frac{\text{未知の解}}{\text{既知の解}} = \frac{F(t)}{e^{\lambda t}}$$

が t によらない定数 A になるということ

そこで、割り算したものを t で微分してみる

商の微分の公式を使うと、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right) = \frac{F'(t)e^{\lambda t} - F(t)\lambda e^{\lambda t}}{(e^{\lambda t})^2}$$

ここで、$F'(t) = \lambda F(t)$ であり、$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ なので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right) = \frac{\lambda F(t)e^{\lambda t} - \lambda F(t)e^{\lambda t}}{e^{2\lambda t}}$$

この分子は、同じものどうしの引き算なので 0 になる

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right) = 0$$

t で微分すると 0 になるということは、この関数 $\dfrac{F(t)}{e^{\lambda t}}$ は定数関数である

$\dfrac{F(t)}{e^{\lambda t}}$ の値は t によらないので、特に、$t = 0$ における値とも同じになる

初期条件 $F(0) = A$ を思い出すと、

$$\frac{F(t)}{e^{\lambda t}} = \frac{F(0)}{e^{\lambda \cdot 0}} = \frac{A}{e^0} = A$$

よって、

$$F(t) = Ae^{\lambda t}$$

これで、初期条件 $F(0) = A$ を満たす微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$ の解は、$F(t) = Ae^{\lambda t}$ のみであることが示された　□

＊　＊　＊

このように、指数関数の性質である

1. 無限級数表示
2. 指数法則
3. 微分方程式

は、同じ関数の 3 つの異なる側面を表している

ここでは、微分方程式を解くことによって、3 から 1 や 2 の性質を復元できることを確かめた

＊　＊　＊

パラメータ λ の符号

微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$ のパラメータ λ は、その解の挙動に大事な役割を持つ

初期条件 $A > 0$ とすると、$F(t) = Ae^{\lambda t}$ のグラフの形状は λ の符号によって異なる

現象を記述するとき、ある量が変数 t を用いて $Ae^{\lambda t}$ という形で（近似的に）表されることがよくある

こういった場合、その量は

- $\lambda > 0$ のとき、指数的に増大する（ネズミ算式に増える）
- $\lambda < 0$ のとき、指数的に減少する

と言うことがある

＊　＊　＊

$A = \lambda = 1$ の場合と自然対数

$A = \lambda = 1$ の場合の指数関数 e^t は、t が決まれば e^t の値が定まり、そのグラフ $y = e^t$ は単調増加になっている

逆に、グラフを見ると、$y > 0$ に対して $y = e^t$ となる実数 t が 1 つ定まることがわかる
この値を y の自然対数といい、$t = \log y$ と表記する