

Chapter 1

線形代数

線形代数は、高次元に立ち向かうための強力な道具となる。

どれだけ高次元に話を広げたとしても、「関係」を語る言葉の複雑さが増すことはない。
この章では、そんな状況を実現するための理論を追いかけていく。

1.1 ベクトルの定義

1.1.1 移動の表現としてのベクトル

Under construction...



1.1.2 ベクトルの多次元化：数ベクトル

多次元空間内の「移動」を表すには、「縦」と「横」の2方向だけでなく、もっと多くの数が必要になる。

また、4次元を超えてしまうと、矢印の描き方すら想像がつかなくなってしまう。それは、方向となる軸が多すぎて、どの方向に進むかを表すのが難しくなるためだ。

そこで、一旦「向き」の情報を取り除くことで、高次元に立ち向かえないかと考える。

移動を表す矢印は「どの方向に進むか」と「どれくらい進むか」という向きと大きさの情報を持っているが、その「どれくらい進むか」だけを取り出して並べよう。

こうして単に「数を並べたもの」もベクトルと呼ぶことにし、このように定義したベクトルを **数**

ベクトルという。

数を並べるとき、縦と横の2通りがある。それぞれ**列ベクトル**、**行ベクトル**として定義する。

列ベクトル 数を縦に並べたものを列ベクトルという。

$$\boldsymbol{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

行ベクトル 数を横に並べたものを行ベクトルという。

$$\boldsymbol{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

単に「ベクトル」と言った場合は、列ベクトルを指すことが多い。

行ベクトルは、列ベクトルを横倒しにしたもの（列ベクトルの**転置**）と捉えることもできる。

転置による行ベクトルの表現

行ベクトルは、列ベクトル \boldsymbol{a} を転置したものとして表現できる。

$$\boldsymbol{a}^{\top} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

1.1.3 ベクトルの演算

ベクトルによって数をまとめて扱えるようにするために、ベクトルどうしの演算を定義したい。

ベクトルの和

ベクトルどうしの足し算は、同じ位置にある数どうしの足し算として定義する。

ベクトルの和 2つの n 次元ベクトル \mathbf{a} と \mathbf{b} の和を次のように定義する。

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_i] + [b_i] = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

i 番目の数が \mathbf{a} と \mathbf{b} の両方に存在していなければ、その位置の数どうしの足し算を考えることはできない。

そのため、ベクトルの和が定義できるのは、同じ次元を持つ（並べた数の個数が同じ）ベクトルどうしに限られる。

数ベクトルを「どれくらい進むか」を並べたものと捉えると、同じ位置にある数どうしを足し合わせるということは、同じ向きに進む量を足し合わせるということになる。

たとえば、 x 軸方向に a_1 、 y 軸方向に a_2 進んだ場所から、さらに x 軸方向に b_1 、 y 軸方向に b_2 進む…というような「移動の合成」を表すのが、ベクトルの和である。

1. 

ベクトルのスカラー倍

「どれくらい進むか」を表す数たち全員に同じ数をかけることで、向きを変えずにベクトルを「引き伸ばす」ことができる。

2. 

ここで位置ごとにかかる数を変えてしまうと、いずれかの方向に多く進むことになり、ベクトルの向きが変わってしまう。そのため、「同じ」数をかけることに意味がある。

3. 

そこで、ベクトルの定数倍（スカラー倍）を次のように定義する。

ベクトルのスカラー倍 n 次元ベクトル \mathbf{a} の k 倍を次のように定義する。

$$k\mathbf{a} = k[a_i] = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$

1.2 ベクトルの作り方

1.2.1 一次結合

ベクトルを「引き伸ばす」スカラー倍と、「つなぎ合わせる」足し算を組み合わせることで、あるベクトルを他のベクトルを使って表すことができる。

4. 図

このように、スカラー倍と和のみを使った形を **一次結合** もしくは **線形結合** という。

1.2.2 基底

3次元までのベクトルは、矢印によって「ある点を指し示すもの」として定義できる。

しかし、4次元以上の世界に話を広げるため、ベクトルを単に「数を並べたもの」として再定義した。

点を指し示すためのもう一つ概念として、座標がある。

座標も結局は矢印と同様に、 x 軸方向にこのくらい進み、 y 軸方向にこのくらい進む、というように、「進む方向」と「進む長さ」を持つ。

単なる数の並びを、向きと大きさを持つ量として復元するための道具が、基底である。

1.3 ベクトルの測り方

Under construction...

