

0.1 数列の極限

微分を定義するには関数の極限を考えるが、関数の極限の諸性質は、数列の極限から導かれる。  
まずは、 $\varepsilon - \delta$  論法（数列の場合は  $\varepsilon - N$  論法とも呼ばれる）によって数列の極限を定義し、その性質をひとつひとつ確かめていこう。

0.1.1  $\varepsilon$  で「一致」をどう表現するか

「限りなく近づく」という表現では、「限りなく」の部分に無限という概念が含まれてしまう。  
有限の値  $\varepsilon$  を使って、無限を表現しようとするのが  $\varepsilon - \delta$  論法である。

\* \* \*

$\varepsilon - \delta$  論法で極限を定義する前に、有限値  $\varepsilon$  を使った議論の例を見てみよう。

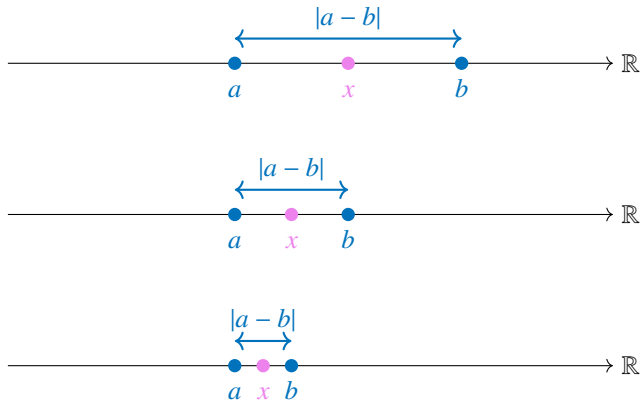
有限値  $\varepsilon$  の不等式による一致の表現

$a, b$  を実数とすると、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して、次のことがいえる。

$|a - b| < \varepsilon \implies a = b$

実数は連続である（数直線には穴がない）ため、 $a$  と  $b$  が異なる実数であれば、 $a$  と  $b$  の間には無数の実数が存在する。

つまり、 $a$  と  $b$  が異なる限り、その間の距離  $|a - b|$  は絶対に 0 にはならない。



$|a-b|$  が 0 にならないということは、ここでも実数の連続性によって、 $|a-b|$  より小さい実数が存在してしまう。

たとえば、 $a$  と  $b$  の間の中点  $x = \frac{|a-b|}{2}$  は、 $|a-b|$  よりも小さい。



$a$  と  $b$  の間の中点というと  $\frac{a-b}{2}$  だが、正の数  $\varepsilon$  と比較するため、絶対値をつけて  $\frac{|a-b|}{2}$  としている。

$|a-b|$  より小さい実数が存在してしまうと、「任意の」 $\varepsilon > 0$  に対して、 $|a-b| < \varepsilon$  を成り立たせることができない。

$\varepsilon$  はなんでもよいのだから、 $|a-b|$  より小さい実数を  $\varepsilon$  として選ぶこともできてしまう。

しかし、 $|a-b|$  より小さい実数を  $\varepsilon$  としたら、 $|a-b| < \varepsilon$  は満たされない。

$|a-b|$  が 0 でないという状況下では、あらゆる実数  $\varepsilon$  より  $|a-b|$  を小さくすることは不可能である。したがって、 $|a-b| < \varepsilon$  を常に成り立たせるなら、 $|a-b| = 0$ 、すなわち  $a = b$  となる。

\* \* \*

ここまでの考察から直観を取り除いて、この定理の数学的な証明をまとめておこう。

#### Proof: 有限値 $\varepsilon$ の不等式による一致の表現

$a \neq b$  と仮定する。

$\varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2}$  とおくと、絶対値  $|a-b|$  が正の数であることから、 $\varepsilon_0$  も正の数となる。

よって、 $|a-b| < \varepsilon_0$  が成り立つので、

$$\left. \begin{array}{l} |a-b| < \frac{|a-b|}{2} \\ 2|a-b| < |a-b| \end{array} \right\} \text{両辺} \times 2$$

$$2|a-b| - |a-b| < 0$$

$$|a-b| < 0$$


絶対値が負になることはありえないので、 $a \neq b$  の仮定のもとでは矛盾が生じる。

したがって、 $a = b$  でなければならない。 ■

なお、 $|a-b| < \varepsilon$  の右辺を定数倍し、 $|a-b| < k\varepsilon$  などとしても、この定理は成り立つ。

定理「有限値  $\varepsilon$  の不等式による一致の表現」は、定数を  $k$  として、次のように書き換えることもできる。

$$|a - b| < k\varepsilon \implies a = b$$



この場合、証明で  $\varepsilon_0 = \frac{|a - b|}{2k}$  とおけば、まったく同様の議論が成り立つからだ。

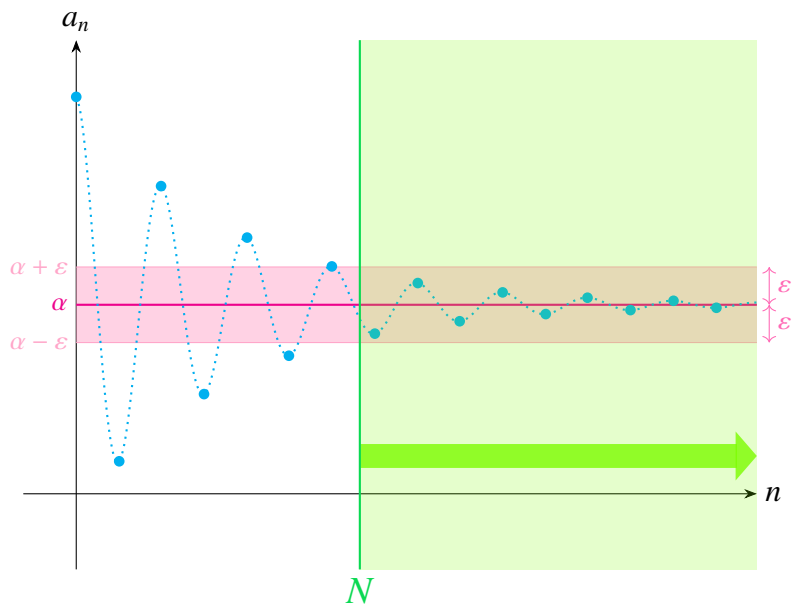
実際に、 $|a - b| < 2\varepsilon$  とした場合のこの定理を、後に登場する数列の極限の一意性の証明で使うことになる。

0.1.2  $\varepsilon - N$  論法による数列の収束

$\varepsilon - \delta$  論法は、数列の極限に適用する場合、 $\varepsilon - N$  論法と呼ばれることが多い。  
「数列が  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束する」ことの  $\varepsilon - N$  論法による表現を、まずはイメージで掴んでみよう。

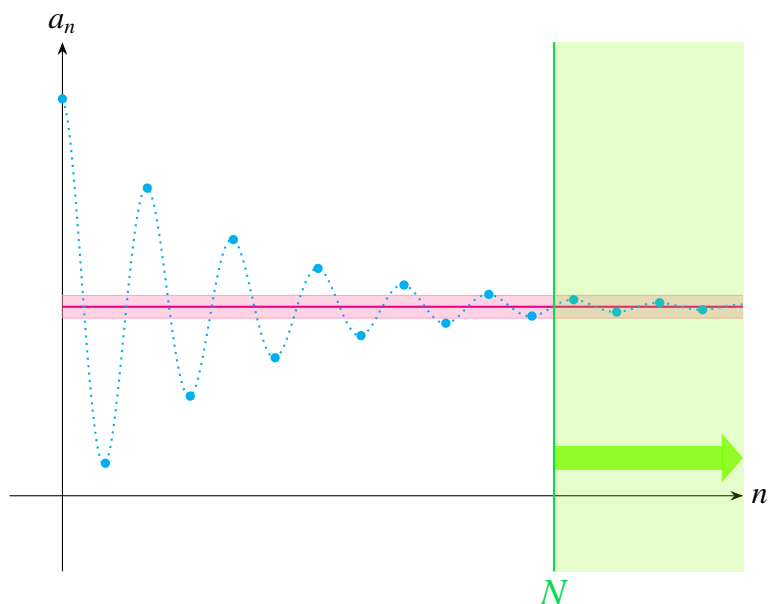
\* \* \*

まず、 $\alpha$  の周りに、両側それぞれ  $\varepsilon$  だけ広げた区間を考える。  
 $\varepsilon$  は正の数ならなんでもよいとすれば、 $\varepsilon$  を小さな数に設定し、いくらでも区間を狭めることができる。  
そして、「ここから先の項はすべて区間内に収まる」といえる位置に、 $N$  という印をつけておく。



$\varepsilon$  を小さくしていくと、 $\varepsilon$  による  $\alpha$  周辺の区間に入る項は少なくなる。

それでも、 $N$  をずらしていけば、 $N$  以降はこの区間に収まる項だけになる。  
これこそが「収束」という現象だと定義するのが、 $\varepsilon - N$  論法の考え方である。



区間幅（の半分）となる  $\varepsilon$  をどんなに小さくしても、「 $N$  番目以降は区間内に収まる項だけになる」といえるような  $N$  を設定できるか？が肝心で、そのような  $N$  が存在するなら、数列は収束するといえる。

このことを、数学の言葉でまとめておこう。

### 数列の収束と極限值

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  と実数  $\alpha$  について、次の条件を考える。

任意の正の数  $\varepsilon$  に対して

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つような自然数  $N$  が存在する

この条件が成り立つとき、数列  $\{a_n\}$  は  $\alpha$  に収束するといひ、次のように表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

このとき、 $\alpha$  を数列  $\{a_n\}$  の 極限值 という。

$\varepsilon - \delta$  論法によるこの定義を用いることで、数列の収束に関する諸性質を証明できるようになる。

0.1.3 数列の極限の一意性

数列が最終的に複数の極限值に散らばるとしたら、それは収束と呼べるだろうか？

$\varepsilon - \delta$  論法による収束の定義は、そのような状況をきちんと除外するようになっている。

数列が複数の値に収束することはない。このことを示すのが、次の定理である。

数列の極限の一意性  
数列  $\{a_n\}$  が収束するならば、その極限值はただ1つに定まる。

Proof: 数列の極限の一意性

数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  と  $\beta$  の 2 つの極限值を持つと仮定する。

このとき、任意の正の数  $\varepsilon$  に対して、

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\implies |a_n - \alpha| < \varepsilon \\ n \geq N_2 &\implies |a_n - \beta| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つような自然数  $N_1$  と  $N_2$  が存在する。

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと、 $n \geq N$  のとき、 $N_1$  と  $N_2$  の大きい方が  $n$  以下に収まることから、 $n \geq N_1$  と  $n \geq N_2$  がともに成り立つ。

よって、 $n \geq N$  のとき、 $|\alpha - \beta|$  を考えると、

$$\begin{aligned}
 |\alpha - \beta| &= |\alpha - \beta + \underbrace{a_n - a_n}_0| \\
 &= |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)| \\
 &\leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{三角不等式} \\
 &= |-(a_n - \alpha)| + |a_n - \beta| \\
 &= |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| \quad \left. \begin{array}{l} | -A| = |A| \\ n_1 \geq N \text{ と } n_2 \geq N \text{ より} \end{array} \right\} \\
 &< \varepsilon + \varepsilon \\
 &= 2\varepsilon \\
 \therefore |\alpha - \beta| &< 2\varepsilon
 \end{aligned}$$

したがって、有限値  $\varepsilon$  の不等式による一致の表現より、

$$\alpha = \beta$$

これで、数列  $\{a_n\}$  の極限值はただ 1 つに定まることが示された。 ■

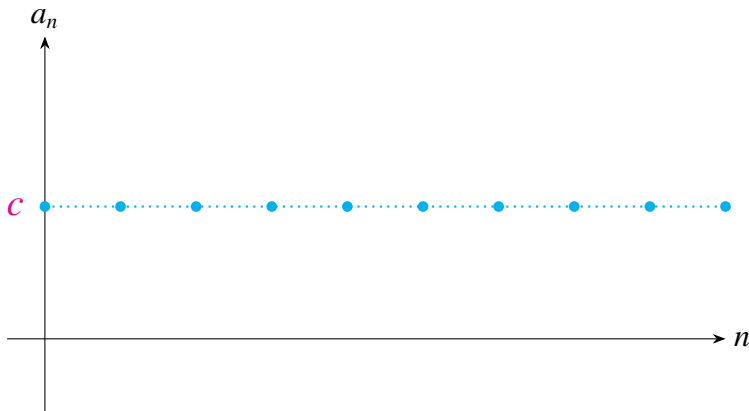
#### 0.1.4 定数数列の極限

最も単純な数列の極限值を、 $\varepsilon - N$  論法で考えてみよう。

ここでは、同じ数だけを並べた数列（定数数列）の極限を考える。

定数数列の極限を考えておくことで、のちに数列の定数倍の極限へと発展させることができる。

定数数列 任意の  $n$  に対して  $a_n = c$  となる数列  $\{a_n\}$  を定数数列という。



定数  $c$  を並べた数列では、 $n$  を大きくしたときの  $a_n$  の値も変わらず  $c$  なのだから、極限值も当然  $c$  となりそうである。

#### 定数数列の極限

任意の  $n$  に対して  $a_n = c$  となる定数数列  $\{a_n\}$  は収束し、その極限值は  $c$  となる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

このような当たり前に聞こえる事実も、 $\varepsilon - N$  論法では「当たり前」という直観を排除して議論できる。

#### Proof: 定数数列の極限

$\varepsilon$  を任意の正の数とする。

$a_n$  は  $n$  の値によらず  $c$  であるから、任意の  $n$  に対して次の式が成り立つ。

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

$$\therefore |a_n - c| < \varepsilon$$

したがって、

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - c| < \varepsilon$$

となるような自然数  $N$  は存在する（というか  $N$  はなんでもよい）。

よって、 $\{a_n\}$  は収束し、その極限值は  $c$  である。 ■

### 0.1.5 数列の極限の線形性

数列の極限についても、線形性が成り立つ。

#### 数列の極限の線形性

数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  がともに収束するとき、 $c$  を実数とすると、数列  $\{ca_n + cb_n\}$  も収束する。

そして、その極限值は次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n + cb_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

この線形性の式は、数列の和の極限と、数列の定数倍の極限を組み合わせたものになっている。それぞれ証明することで、この線形性の式が成り立つことを確認しよう。

#### 数列の和の極限

#### 数列の和の極限

数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  がともに収束するとき、数列  $\{a_n + b_n\}$  も収束する。

そして、その極限值は次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$\{a_n\}$  の極限值を  $\alpha$ 、 $\{b_n\}$  の極限值を  $\beta$  とすると、最終的に次のような関係を導くことで、この定理が証明される。

$$n \geq N \implies |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)|$  は、 $a_n + b_n$  と  $\alpha + \beta$  がどれだけ近いか、すなわち  $a_n + b_n$  と  $\alpha + \beta$  の誤差を表している。そして、この誤差を  $\varepsilon$  より小さくする必要がある。

そのためには、 $a_n$  と  $\alpha$  の誤差を  $\frac{\varepsilon}{2}$  より小さくし、 $b_n$  と  $\beta$  の誤差も  $\frac{\varepsilon}{2}$  より小さくできればよい。



**Proof:** 数列の和の極限

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  とおき、 $\varepsilon$  を任意の正の数とする。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  より、次のような自然数  $N_1$  が存在する。

$$n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同様に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  より、次のような自然数  $N_2$  が存在する。

$$n \geq N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと、 $n \geq N$  のとき、 $n \geq N_1$  と  $n \geq N_2$  がともに成り立つ。

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

よって、 $n \geq N$  のとき、三角不等式より、

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

という不等式が成り立つことで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$  が示された。 ■

数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束するということは、 $\varepsilon - N$  論法による数列の収束の定義より、

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

という関係が成り立つということである。

ここでの  $\varepsilon$  は「任意の」正の数であるから、 $\varepsilon$  の部分にどんな正の数を当てはめても、この関係が成り立つことになる。

数列の和の極限の証明では、 $\varepsilon$  の部分に  $\frac{\varepsilon}{2}$  を当てはめた関係を利用している。

## 数列の定数倍の極限

## 数列の定数倍の極限

数列  $\{a_n\}$  が収束するとき、 $c$  を実数とすると、数列  $\{ca_n\}$  も収束する。

そして、その極限值は次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$\{a_n\}$  の極限値を  $\alpha$  とすれば、 $ca_n$  と  $c\alpha$  の誤差を  $\varepsilon$  より小さくする必要がある。

あとから誤差が最大  $|c|$  倍されても大丈夫なように、 $a_n$  と  $\alpha$  の誤差は  $\frac{\varepsilon}{|c|}$  より小さくできればよい。



$c$  は正の数とは限らない。誤差は任意の正の数  $\varepsilon$  と比較するために正の数として評価したいので、絶対値をつけている。

$|c|$  が分母にあるので、 $c = 0$  の場合は除外して考える必要がある。

$c = 0$  の場合は、定数数列の極限として考えることで、 $0$  に収束することがわかる。

## Proof: 数列の定数倍の極限

$c = 0$  と  $c \neq 0$  の場合に分けて証明する。

★  $c = 0$  の場合

$c = 0$  のとき、右辺は、

$$c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

また、左辺は、定数数列の極限として考えて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

したがって、 $c = 0$  の場合は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  が成り立つ。

★  $c \neq 0$  の場合

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  とおき、 $\varepsilon$  を任意の正の数とする。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  より、次のような自然数  $N$  が存在する。

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

よって、 $n \geq N$  のとき、

$$\begin{aligned} |ca_n - c\alpha| &= |c(a_n - \alpha)| \\ &= |c| |a_n - \alpha| \\ &< |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} |AB| = |A||B| \\ |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|} \end{array} \right\}$$

$$\therefore |ca_n - c\alpha| < \varepsilon$$

という不等式が成り立つことで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c\alpha$  がいえる。

以上より、いずれの場合も、数列  $\{ca_n\}$  は  $c\alpha$  に収束することが示された。 ■

### 0.1.6 数列の積の極限

#### 数列の積の極限

数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  がともに収束するとき、数列  $\{a_nb_n\}$  も収束する。

そして、その極限值は次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$\{a_n\}$  の極限值を  $\alpha$ 、 $\{b_n\}$  の極限值を  $\beta$  とすると、最終的に次のような関係を導入することで、この定理が証明される。

$$n \geq N \implies |a_nb_n - \alpha\beta| < \varepsilon$$

$a_nb_n$  と  $\alpha\beta$  の誤差  $|a_nb_n - \alpha\beta|$  を、三角不等式で見積もっておこう。

$$\begin{aligned} |a_nb_n - \alpha\beta| &= |a_nb_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| \\ &= |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \\ &\leq |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \end{aligned}$$

ここで、 $\{a_n\}$  の極限値が  $\alpha$ 、 $\{b_n\}$  の極限値が  $\beta$  であることから、任意の正の数を  $\varepsilon'$  として、 $|a_n - \alpha| < \varepsilon'$ 、 $|b_n - \beta| < \varepsilon'$  という関係を使うことができる。

ここまでで得られた不等式において、 $|a_n|$  の部分も  $|\alpha|$  に置き換えたいが、このときに  $a_n$  と  $\alpha$  の誤差  $\varepsilon'$  を考慮する必要がある。

$$\begin{aligned} |a_n| - |\alpha| &\leq |a_n - \alpha| < \varepsilon' \\ |a_n| &< |\alpha| + \varepsilon' \end{aligned}$$

これを使うことで、

$$\begin{aligned} |a_nb_n - \alpha\beta| &\leq |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \\ &< (|\alpha| + \varepsilon')|b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \\ &= (|\alpha| + \varepsilon')\varepsilon' + |\beta|\varepsilon' \\ &< |\alpha|\varepsilon' + \varepsilon'^2 + |\beta|\varepsilon' \\ &= (|\alpha| + |\beta| + \varepsilon')\varepsilon' \end{aligned}$$

また、 $\varepsilon'$  は任意の正の数であるが、結局はどんどん小さな数に狭めていくものなので、最初から 1 未満に設定して  $0 < \varepsilon' < 1$  としてもよい。

$$\begin{aligned} |a_nb_n - \alpha\beta| &< (|\alpha| + |\beta| + \varepsilon')\varepsilon' \\ &< (|\alpha| + |\beta| + 1)\varepsilon' \end{aligned}$$

以上の考察を、次のような証明として落とし込む。

**Proof:** 数列の積の極限

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  とおき、 $\varepsilon$  を任意の正の数とする。

極限を考えるので、 $0 < \varepsilon < |\alpha| + |\beta| + 1$  としてもよい。

そこで、

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$

とおくと、 $0 < \varepsilon' < 1$  である。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  より、次のような自然数  $N_1$  が存在する。

$$n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon'$$

同様に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  より、次のような自然数  $N_2$  が存在する。

$$n \geq N_2 \implies |b_n - \beta| < \varepsilon'$$

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと、 $n \geq N$  のとき、 $n \geq N_1$  と  $n \geq N_2$  がともに成り立つ。

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon' \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < \varepsilon'$$

よって、 $n \geq N$  のとき、三角不等式と  $0 < \varepsilon' < 1$  より、

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha \beta| &\leq |a_n| |b_n - \beta| + |\beta| |a_n - \alpha| \\ &< (|\alpha| + \varepsilon') \varepsilon' + |\beta| \varepsilon' \\ &= (|\alpha| + |\beta| + \varepsilon') \varepsilon' \\ &< (|\alpha| + |\beta| + 1) \varepsilon' \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore |a_n b_n - \alpha \beta| < \varepsilon$$

という不等式が成り立つことで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \alpha \beta$  が示された。 ■

### 0.1.7 数列の商の極限

#### 数列の逆数の極限

数列  $\{a_n\}$  がともに収束し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  のとき、数列  $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$  も収束する。

そして、その極限值は次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

$\{a_n\}$  の極限値を  $\alpha$  とすると、最終的に次のような関係を導くことで、上の式は証明される。

$$n \geq N \implies \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| < \varepsilon$$

ここでも、 $\frac{1}{a_n}$  と  $\frac{1}{\alpha}$  の誤差  $\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right|$  を、三角不等式で見積もっておく。

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| &= \left| \frac{\alpha - a_n}{a_n \alpha} \right| \\ &= \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n \alpha|} \end{aligned}$$

ここで、 $0 < \varepsilon' < \frac{|\alpha|}{2}$  とすると、

$$\begin{aligned} |a_n - \alpha| &< \varepsilon' < \frac{|\alpha|}{2} \\ \therefore |a_n - \alpha| &< \frac{|\alpha|}{2} \end{aligned}$$

また、三角不等式より、

$$\begin{aligned} ||a_n| - |\alpha|| &\leq |a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2} \\ -\frac{|\alpha|}{2} &< |a_n| - |\alpha| < \frac{|\alpha|}{2} \\ |\alpha| - \frac{|\alpha|}{2} &< |a_n| \\ \frac{2|\alpha|}{2} - \frac{|\alpha|}{2} &< |a_n| \\ \therefore \frac{|\alpha|}{2} &< |a_n| \end{aligned}$$

が成り立つことを利用して、

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| &< \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n \alpha|} \\ &< \frac{|a_n - \alpha|}{\frac{|\alpha|}{2} \cdot |\alpha|} \\ &= \frac{2}{|\alpha|^2} |a_n - \alpha| \end{aligned}$$

このような不等式から、次のように証明を組み立てる。

#### Proof: 数列の逆数の極限

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  とおき、 $\varepsilon$  を任意の正の数とする。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  より、次のような自然数  $N_1$  が存在する。

$$n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$$

このとき、 $n \geq N_1$  ならば、三角不等式より次のような不等式が成り立つ。

$$\frac{|\alpha|}{2} < |a_n|$$

よって、 $n \geq N_1$  とすると、 $a_n \neq 0$  である。

このとき、次のような不等式も得られる。

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| &< \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n \alpha|} \\ &< \frac{2}{|\alpha|^2} |a_n - \alpha| \end{aligned}$$

一方、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  より、次のような自然数  $N_2$  も存在する。

$$n \geq N_2 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\frac{2}{|\alpha|^2}}$$

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2\}$  とおくと、 $n \geq N$  のとき、 $n \geq N_1$  と  $n \geq N_2$  がともに成り立つ。

よって、 $n \geq N$  のとき、

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| &< \frac{2}{|\alpha|^2} |a_n - \alpha| \\ &< \frac{2}{|\alpha|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \\ \therefore \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

という不等式が成り立つことで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$  が示された。 ■

今示した数列の逆数の極限と、数列の積の極限を組み合わせることで、数列の商の極限も求めることができる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

#### 数列の商の極限

数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  がともに収束し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  のとき、数列  $\left\{ \frac{b_n}{a_n} \right\}$  も収束する。

そして、その極限值は次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}$$

### 0.1.8 数列の極限の大小関係の保存

#### 1. 定理 2.5

### 0.1.9 はさみうちの原理

はさみうちの原理は、

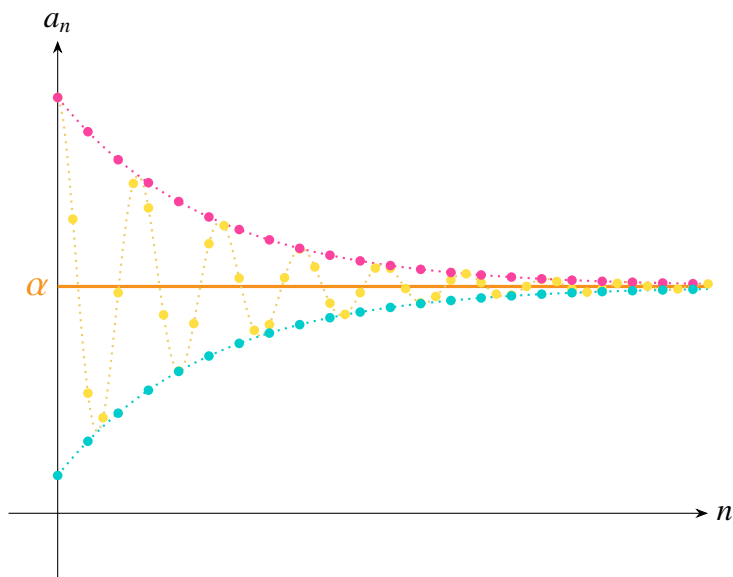
ある数列が2つの数列に挟まれていて、その2つの数列の極限值が同じなら、挟まれた数列の極限值も同じになる。





という内容の定理である。

この定理により、直接極限を求めにくい数列でも、簡単な数列で挟むことで極限値を求めることが容易になる。



数列の極限に関するはさみうちの定理

数列  $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$  が、ある自然数  $n_0$  について、

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n \geq n_0)$$

という関係が成り立つとする。このうち、 $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  が収束し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$$

が成り立つならば、 $\{c_n\}$  も収束し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \alpha$$

が成り立つ。

すべての自然数  $n$  に対して  $a_n \leq c_n \leq b_n$  である必要はない。

たとえば、5 以上の  $n$  に対して  $a_n \leq c_n \leq b_n$  が成り立つ場合 ( $n_0 = 5$  の場合) にも、はさみうちの定理は適用できる。

**Proof:** 数列の極限に関するはさみうちの定理

$\varepsilon$  を任意の正の数とする。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$  より、次のような自然数  $N_1$  が存在する。

$$n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

同様に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$  より、次のような自然数  $N_2$  が存在する。

$$n \geq N_2 \implies |b_n - \beta| < \varepsilon$$

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2, n_0\}$  とおくと、 $n \geq N$  のとき、 $n \geq n_0$ 、 $n \geq N_1$ 、 $n \geq N_2$  がすべて成り立つ。

よって、 $n \geq N$  のとき、

Under construction...



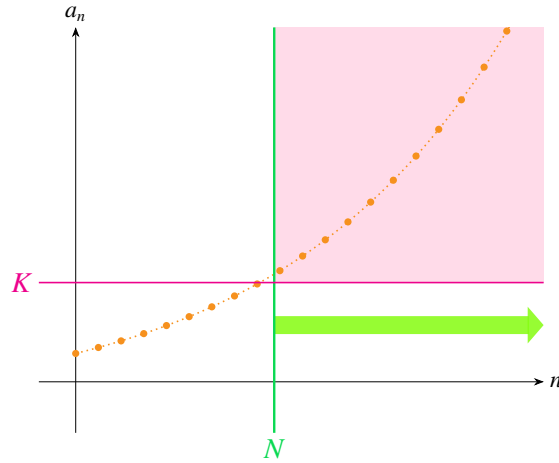
### 0.1.10 $\varepsilon$ - N 論法による数列の発散

数列がどんな実数にも収束しないとき、その数列は**発散**するという。

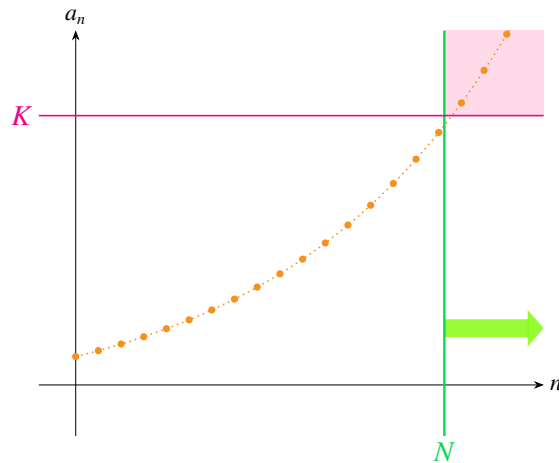
#### 正の無限大への発散

数列の項が先に進むにつれて限りなく大きくなる場合に、その数列は**正の無限大に発散**するという。

「ここから先の項はすべて  $K$  より大きくなる」といえる位置に、 $N$  という印をつけるようにしよう。



どれだけ  $K$  を大きくしても、 $N$  をずらしていけば、 $N$  以降は  $K$  を超える項だけになる。



このような状況が、正の無限大への発散である。

$K$  をどんなに大きくしても、「 $N$  番目以降の項は  $K$  よりも大きくなる」といえるような  $N$  を設定できるか？が肝心で、そのような  $N$  が存在するなら、数列は正の無限大に発散すると定義する。

数列の正の無限大への発散

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  について、次の条件を考える。

任意の正の実数  $K$  に対して

$$n \geq N \implies a_n > K$$

が成り立つような自然数  $N$  が存在する

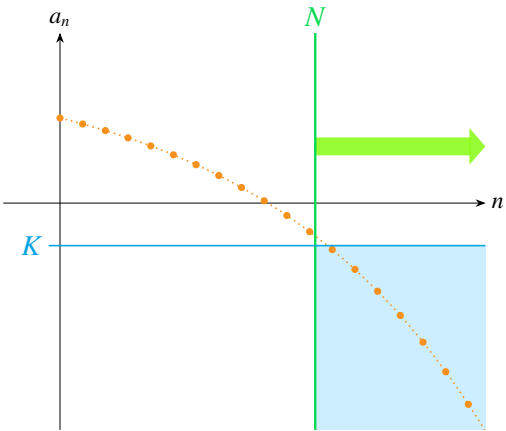
この条件が成り立つとき、数列  $\{a_n\}$  は 正の無限大に発散 するといひ、次のように表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

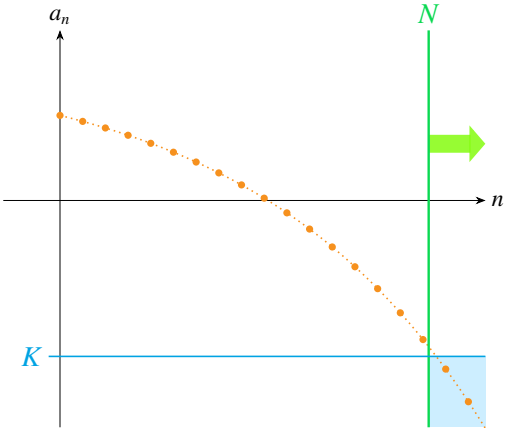
負の無限大への発散

逆に、数列の項が先に進むにつれて限りなく小さくなる場合には、その数列は **負の無限大に発散** するという。

「ここから先の項はすべて  $K$  より小さくなる」といえる位置に、 $N$  という印をつけるようにする。



どれだけ  $K$  を小さくしても、 $N$  をずらしていけば、 $N$  以降は  $K$  より小さい項だけになる。



このような状況が、負の無限大への発散である。

数列の負の無限大への発散

数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  について、次の条件を考える。

任意の負の実数  $K$  に対して

$$n \geq N \implies a_n < K$$

が成り立つような自然数  $N$  が存在する

この条件が成り立つとき、数列  $\{a_n\}$  は 負の無限大に発散 するといい、次のように表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

0.1.11 追い出しの原理

2. 定理 2.18

0.1.12 発散数列の和と積

3. 定理 2.18

### 0.1.13 数列の偶数番目と奇数番目の極限による判定

4. 命題 2.13

### 0.1.14 数列の極限と絶対値

5. 定理 2.15

### 0.1.15 逆数の数列の発散条件

6. 定理 2.16 7. 定理 2.17

### 0.1.16 等比数列の極限

8. 命題 3.1

### 0.1.17 項の比による収束判定

9. 定理 3.8

### 0.1.18 発散数列の増加速度の比較

10. 例題 3.9