# 行列の三角化

対角化の次善の策として、三角化という方法がある

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p293〜294
ref: 行列と行列式の基礎 p195〜196
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p191〜196

**三角化定理**　$A$ を $n$ 次複素正方行列とするとき、ある正則行列 $P$ が存在して、$P^{-1}AP$ が上三角行列になる
その対角成分は重複度を含めて $A$ の固有値と一致する

証明

三角化できること

$n$ に関する帰納法を用いる

$n = 1$ のとき、$A$ は $1 \times 1$ 型行列なので、上三角行列である

$n \geq 2$ のとき、$\boldsymbol{v}_1$ を $A$ の固有ベクトルとし、その固有値を $\alpha_1$ とする
$\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を追加して、$\mathbb{C}^n$ の基底に延長する
$P_1 = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ とおくと、

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}$$

ここで、$A_1$ は $(n-1)$ 次正方行列である

帰納法の仮定より、$(n-1)$ 次の正則行列 $P_2$ を選べば、$P_2^{-1}A_1P_2$ は上三角行列になる

そこで、

$$P = P_1 \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix}$$

とおくと、$P_2$ が正則であることから、$P$ は正則である

$P$ の逆行列は、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2^{-1} \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

であるので、

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2^{-1} \end{pmatrix} P_1^{-1}AP_1 \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ \mathbf{0} & P_2^{-1}A_1P_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$P_2^{-1}A_1P_2$ は上三角行列であるから、$P^{-1}AP$ も上三角行列となる ■

## 対角成分が固有値と一致すること

一般に、三角行列の行列式は対角成分の積になる

このことから、$n$ 次上三角行列 $B = (b_{ij})$ に対して、

$$\Phi_B(x) = \det(xE - B) = (x - b_{11}) \cdots (x - b_{nn})$$

が成り立つため、$B$ の固有値は、特性方程式

$$(x - b_{11}) \cdots (x - b_{nn}) = 0$$

の解 $b_{11}, \ldots, b_{nn}$ となる

さて、$P^{-1}AP$ と $A$ は相似な行列であるので、その特性多項式は一致する

$$\Phi_A(x) = \Phi_{P^{-1}AP}(x) = \det\bigl(xE - P^{-1}AP\bigr)$$

よって、$P^{-1}AP$ が上三角行列ならば、$A = (a_{ij})$ とおくと、

$$\Phi_A(x) = (x - a_{11}) \cdots (x - a_{nn})$$

が成り立ち、$A$ の固有値は $A$ の対角成分 $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ となる ■

## ユニタリ行列による三角化

ユニタリ行列によって対角化できる行列は正規行列であった

したがって、正規行列以外の行列は、ユニタリ行列によって対角化することはできないが、ユニタリ行列によって三角化することはできる

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p294〜295

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p196

**todo** $n$ 次複素正方行列 $A$ に対して、適当なユニタリ行列 $U$ により、$U^{-1}AU$ を上三角行列（$A$ のシューア形）にすることができる

証明

[ Todo 1: ]

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

## Zebra Notes

| Type | Number |
|---|---|
| todo | 1 |