

確率統計の整理帳

tomixy

2025 年 7 月 2 日

目次

第 1 章	さまざまな立場の確率	2
	古典的立場の確率	2
	頻度的立場の確率	3
	主観確率とベイズ統計学	3
	公理的立場の確率	4
第 2 章	確率と集合	6
	標本空間	6
	事象	6
	空事象と全事象	7
	事象と集合演算	8
	排反	9
	同様に確からしい	9

第 1 章

さまざまな立場の確率




古典的立場の確率

サイコロを 1 回投げると、1 から 6 のいずれかの目が出る

ref: スッキリわかる確率統計 p61~62

ここで、サイコロの目が 1 となる確率は、全体が 6 通りで、1 が出る場合は 1 通りしかないため、 $\frac{1}{6}$ と考える

確率をこのように考えることを **古典的立場** あるいは **組合せ的** という

 古典的立場による確率 全体で n 通りの場合があり、そのうちある事象 A が起こる場合の数が a 通りあるとき、事象 A の起こる **確率** を次のように定義する

$$P(A) = \frac{a}{n}$$

このように定義された確率を **算術的確率** あるいは **先験的確率** という



頻度的立場の確率


実際には、6 回サイコロを投げたときに、必ず 1 が 1 回出るわけではない

ref: スッキリわかる確率統計 p62~63

サイコロを何回も（膨大な回数を繰り返し）投げれば、やがて 1 が出る確率は $\frac{1}{6}$ に近づいていく

一般的に述べると、 n 回中 k 回だけ 1 が出た場合の割合 $\frac{k}{n}$ は、 n が大きくなるにつれて一定値 $\frac{1}{6}$ に近づいていく

確率に対するこのような考え方を**頻度的立場**という

 **頻度的立場による確率** 試行を n 回繰り返して行った場合に、ある事象 A の起こった回数を $k(n)$ とする

試行回数 n を増やしていくとき、割合 $\frac{k(n)}{n}$ が一定値 p に近づくなれば、 p を事象 A の起こる**確率**と定義する

$$P(A) = p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n}$$

このように定義される確率を**統計的確率**あるいは**経験的確率**という

この立場の客観性を保証するものは、多数回の試行あるいは大量データによる結果であり、理論的な根拠になっているものは**大数の法則**である



主観確率とベイズ統計学

確率を考えるにあたって、頻度的立場だけで十分とは言い切れない

ref: スッキリわかる確率統計 p63~64

- i. 本当にサイコロが均一な材料で作られ、完全な立方体になっているのか？

…もしそうでないなら、頻度的立場は意味がないのではないかな？

ii. サイコロを投げて出る目は、投げた瞬間に決まっているのではないかな？

…もしそうだとすると、サイコロを手にしたときから出る目は決まっているので、そもそも確率なんて存在しないのではないかな？

iii. サイコロの目が出る確率なんて主観的なものでもよいのではないかな？

…たとえば、100 回投げて 1 が 30 回出たら、その確率は $\frac{30}{100}$ としてもよいのではないかな？



(iii) のような、「確率は主観的なものでよい」という立場の統計学は **ベイズ統計学** と呼ばれている

この立場では、今までの情報、知識や経験などによって得られた確率を与え、これを **主観確率** という

主観確率では、全く起こっていない、あるいはほとんど起こっていない事象や実験ごとに統計的規則が変わってしまうような事象の分析も可能になる



公理論的立場の確率

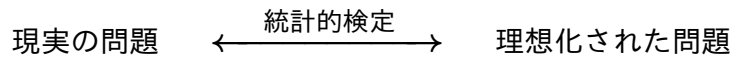
化学や物理では、ある現象を考えると、議論がしやすいように **理想状態** というものを考える

それと同じように、確率も理想化された状態で考えることにする

サイコロでいえば、そのサイコロの根拠（均一な材料か、完全な立方体なのか、etc.）を問うのではなく、最初から理想化されたサイコロを考えるようにする

ref: スッキリわかる確率統計 p64～67

そして、現実の問題と理想化された問題との間を統計的検定を使ってつなぐことにする



確率を理想化された数学の世界で考えるために、確率をある公理を満たすものとして定義する

確率をこのように考える立場を公理的立場という

第 2 章


確率と集合




標本空間

実験や観測を行うときに起こりうるすべての結果を集合に閉じ込める

ref: スッキリわかる確率統計 p65

 標本空間 起こりうるすべての結果からなる集合を**標本空間**といい、 Ω や \mathcal{U} などと表す

 根元事象 標本空間 Ω の元、すなわち、標本空間の中の各結果を**根元事象**という



事象

実験や観測の結果、実際に起こったことを**事象**という

ref: スッキリわかる確率統計 p65

 **事象** 標本空間の部分空間 Ω の部分集合を**事象**といい、 A や B などと表す

起こりうる場合の集合（標本空間）から、実際に起こったものだけを取り出したものが事象であるので、事象は標本空間の部分集合といえる




空事象と全事象

空事象

ref: スッキリわかる確率統計 p65


決して起こらないことを事象の一つとみなしたものを**空事象**という

 **空事象** 空集合である事象を**空事象**といい、 \emptyset と表す

事象とは、実際に起こったことだけを取り出した集合なので、決して起こらないことは空集合となる

全事象

一方、起こりうるすべての場合が起こるとき、標本空間そのものを事象とみなすことができる

 **全事象** 起こりうるすべての場合からなる事象を**全事象**という

集合としてみれば、全事象は標本空間そのものなので、標本空間と同じく Ω や U で表す




事象と集合演算


ref: スッキリわかる確
率統計 p65~67

和事象と積事象

「 A または B が起こる」という事象を**和事象**という


 **和事象** 事象 A と事象 B の和集合を $A \cup B$ と表し、事象 A と事象 B の**和事象**という

一方、「 A と B が同時に起こる」という事象を**積事象**という

 **積事象** 事象 A と事象 B の共通部分を $A \cap B$ と表し、事象 A と事象 B の**積事象**という

余事象

「 A が起こらない」という事象を**余事象**という


 **余事象** 標本空間の中で、 A が起こらないという事象を A の**余事象**といい、 A^c で表す

標本空間を全体集合とすると、余事象は補集合に対応する

 **余事象との和事象・積事象**

$$A \cup A^c = \Omega$$

$$A \cap A^c = \emptyset$$

 余事象の余事象

$$(A^c)^c = A$$

事象の差

「 A は起こるが B は起こらない」という事象は、「 A と B^c が同時に起こる」事象として表せる

 事象の差 次の事象を、事象 A と B の差という


$$A - B = A \cap B^c$$



排反

事象 A と事象 B が同時に起こることがないとき、 A と B は互いに排反であるという

ref: スッキリわかる確率統計 p67


 排反 $A \cap B = \emptyset$ であるとき、事象 A と事象 B は排反、あるいは互いに素であるという



同様に確からしい

頻度的立場の確率は、次の等確率性（同様に確からしい）を前提としている

ref: スッキリわかる確率統計 p67

 同様に確からしい 標本空間に属するどの根元事象も同じ程度に起こると期待されるとき、これらの事象は同様に確からしいという

以降、特に断りがなければ「同様に確からしい」事象を扱うことにする