

第 28 章

部分空間の双対性



行空間と核空間の直交

$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする。

このとき、 A の第 i 行ベクトル $\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、横ベクトルと線形汎関数の同一視 [第 27 章] より、次の線形汎関数 ϕ_i と同一視できる。

$$\phi_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$$

この行ベクトル $\phi_i \in {}^t\mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle \subset {}^t\mathbb{R}^n$ を、 A の行空間と呼び、 $\text{Row } A$ と書く。

ここで、 x_j はベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、 j 番目の成分を返す座標関数である。そこで、

$$\begin{aligned}\phi_i(\mathbf{v}) &= a_{i1}x_1(\mathbf{v}) + \cdots + a_{in}x_n(\mathbf{v}) \\ &= a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n\end{aligned}$$

とみると、 ϕ_i は \mathbf{v} に作用して、 A の第 i 行ベクトルと \mathbf{v} の内積を返すことがわかる。

すると、 $\phi_i(\mathbf{v})$ を縦に並べたものは、 $A\mathbf{v}$ に一致する。

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(\mathbf{v}) \\ \vdots \\ \phi_m(\mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

このとき、 $A\mathbf{v} = \mathbf{o}$ となる場合は、

$$\phi_i(\mathbf{v}) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

が成り立つことになる。

すなわち、 A のすべての行ベクトルに対して、 \mathbf{v} との内積が 0 になる。

このことから、 A の行空間に属するベクトルと、 $A\mathbf{v} = \mathbf{o}$ の解空間 $\text{Ker } A$ に属するベクトル \mathbf{v} は、互いに直交することがわかる。

よって、次の関係が成り立つ。

$$\text{Ker } A = (\text{Row } A)^\perp$$

また、**theorem 23.1**「部分空間の双直交補と元空間の一致」より、 $(\text{Row } A)^\perp$ の直交補空間は $\text{Row } A$ に一致することから、両辺の直交補空間をとると、次も成り立つ。

$$(\text{Ker } A)^\perp = \text{Row } A$$

theorem 28.1 - 核空間と行空間の直交関係

A の核空間と、 A の行空間（行ベクトルが張る空間）は、直交補空間の関係にある。

$$\begin{aligned} \text{Ker } A &= (\text{Row } A)^\perp \\ (\text{Ker } A)^\perp &= \text{Row } A \end{aligned}$$

この定理は、核空間と像空間との関係として言い換えることもできる。

線形写像の像と列空間 [第 11 章] より、 A の像空間 $\text{Im } A$ は、 A の列ベクトルが張る空間（列空間）であった。

A を転置すると行と列が入れ替わるので、 A^\top の行空間は A の列空間に対応する。

よって、定理を次のように書き換えることができる。

theorem - 核空間と転置行列の像空間の直交関係

A の核空間と、 A^T の像空間は、直交補空間の関係にある。

$$\begin{aligned}\text{Ker } A &= (\text{Im } A^T)^\perp \\ (\text{Ker } A)^\perp &= \text{Im } A^T\end{aligned}$$

直交補空間から零化空間へ

さて、 $\text{Ker } A = (\text{Row } A)^\perp$ という直交補空間の関係を導くにあたって、ここでは次のような議論を行った。

1. 横ベクトルと同一視できる線形汎関数を考える
2. 線形汎関数に縦ベクトルを作用させたものを内積とみなす
3. 内積が 0 になることから直交補空間の関係を導く

つまり、ここでは内積が定められている空間（計量空間）で議論を行ったわけだが、内積を考えずに、線形汎関数の集合（双対空間）だけで議論を行うこともできる。

直交補空間の概念を内積を使わずに拡張し、一般の線形空間上で定義したものが、次に述べる零化空間である。



零化空間

V を線形空間とし、その部分空間 $W \subset V$ を考える。

V の双対空間 V^* （線形汎関数の集合）の中で、「 W の元に作用させると 0 になる」ような線形汎関数を集めた集合を零化空間 (annihilator) という。

def - 零化空間

V を n 次元の線形空間とする。 W を V の部分空間とすると、

$$W^\perp = \{\phi \in V^* \mid \forall \boldsymbol{w} \in W, \langle \phi, \boldsymbol{w} \rangle = 0\}$$

を W の零化空間という。

$\phi \in V^*$ が W のすべてのベクトル \boldsymbol{w} に対して $\phi(\boldsymbol{w}) = 0$ となるとき、その ϕ は W を「全滅させてしまう (annihilate)」という意味で、零化空間は **annihilator** と呼ばれる。

零化空間は V^* の部分空間

V^* の中から、 $\phi(\boldsymbol{w}) = 0$ を満たす元 $\phi \in V^*$ を取り出した集合が W^\perp であるので、 W^\perp は V^* の部分空間である。

theorem - 零化空間の双対空間への包含関係

V を n 次元の線形空間とし、 W を V の部分空間とする。

このとき、 W の零化空間 W^\perp は、 V の双対空間 V^* の部分空間である。

 証明

[Todo 1:]

Zebra Notes

Type	Number
todo	1