

Chapter 1

論理と集合

数学の理論は、**集合**という概念で語られる。

そして、集合を構成する条件を考えるために、**論理**が利用される。

この章で学ぶことは、これから数学の理論を語るための「言葉」として機能するものである。

1.1 命題と論理演算

数学では「曖昧さ」を取り除いた議論が重要である。

ここでは、文章（表現）の曖昧さを取り除くために、文章の意味を記号化して扱おう、というアプローチを考えていく。

1.1.1 命題：客観的視点に絞る

数学では、多くの問いを立てて、それが正しいかどうかをひとつひとつ確かめていくことになる。このとき、数学の議論の対象にできるのは、主観を含まない、「真偽を問うことができる」文章である。

たとえば、「数学は面白い」という文章は、私たちにとっては事実かもしれないが、主観を含む（もはや個人的感想に近い）主張である。

このような、人によって回答が分かれるような文章について議論するのは、また別の学問領域に任せてしまおう。

ある命題から「新たな命題を作り出す操作」を表す記号を論理演算子といい、論理演算子のような記号の組み合わせによって命題を表現したものを、論理式という。

1.1.5 命題の否定

まずは、1つの命題を作り変える操作を考えてみよう。

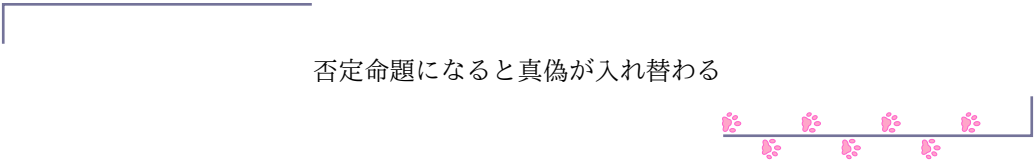
のび太くんの今回の算数テストの点数は0点だったとする。
このとき、のび太くんが「今回の算数テストは0点じゃなかった!」と主張しても、それは嘘である。

0点だったという事実を p 、0点じゃなかったという主張を q とおこう。

- p : のび太くんの算数テストの点数は0点である
- q : のび太くんの算数テストの点数は0点ではない

このとき、 q を p の否定命題と呼ぶ。

p が真実で、 q は嘘であるのだから、



ということになる。

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 命題の否定 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 命題 p に対して、「 p ではない」という命題を p の 否定命題 といい、次のように表す。 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| $\neg p$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

\neg は「not」を意味する記号で、命題の否定を表す論理演算子である。

真理値表

ここで、初めての論理演算子が登場した。

論理演算子によって新たな命題を作り出すとき、元の命題からの真偽値の変化を一覧化しておく
とわかりやすい。そのように真偽値を一覧化した表を、**真理値表**という。

この「否定の真理値表」では、次の対応関係が示されている。

否定の真理値表

- p の真偽値が1のとき、 $\neg p$ の真偽値は0である
- p の真偽値が0のとき、 $\neg p$ の真偽値は1である

| p | $\neg p$ |
|-----|----------|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

真理値表を使うと、「否定命題になると真偽が入れ替わる」ことも
瞬時に捉えられる。

1.1.6 論理積と論理和：「かつ」と「または」

2つの命題を組み合わせて、新たな命題を作り出す操作もある。

その代表例が**論理積**「かつ」と**論理和**「または」である。

日常生活での感覚

「かつ」と「または」という言葉は、日常生活でも意外と馴染みのあるものである。

命題としての厳密さを一旦忘れて、日常の感覚で考えてみよう。

1. 晴れていて風も弱ければ散歩に行こう
2. 紅茶かコーヒーをお選びください

1つめの文章では、「晴れている」かつ「風が弱い」という条件を使っている。

「晴れている」と「風が弱い」という、2つの条件を両方満たすときにしか、散歩には行きたくないのである。

2つめの文章では、「紅茶」または「コーヒー」という、2つの選択肢を提示している。

ところで、大抵の人は「紅茶」か「コーヒー」のどちらか片方だけを選ぶだろうが、数学者は両方を手に取ってしまうかもしれない。というのも、「または」という言葉は、日常生活でのニュアンスと数学での定義が若干異なるからだ。

- 日常生活での「A または B」：A と B のどちらか一方
- 数学での「A または B」：A と B の少なくとも一方（両方でもよい）

これらの感覚を踏まえて、「かつ」と「または」を数学的に定義していこう。

数学での定義：論理積

論理積

p, q を命題とすると、「 p かつ q 」すなわち「 p と q が両方真である」という命題を論理積 という。

論理積は、論理演算子 \wedge を使って、次のように表す。

$$p \wedge q$$

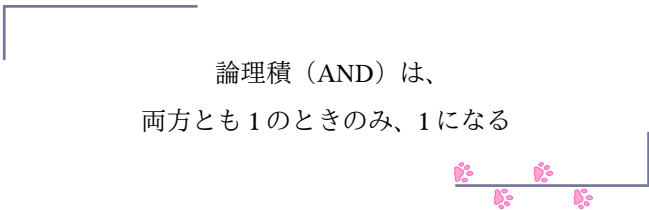
論理積は、AND 演算と呼ばれることもある。

p と q の両方が1でない限り、 $p \wedge q$ は決して1にはならない。

論理積の真理値表が言わんとしていることは、次のシンプルな事実である。

論理積の真理値表

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |



数学での定義：論理和

論理和

p, q を命題とすると、「 p または q 」すなわち「 p と q の少なくとも一方が真である」という命題を 論理和 という。

論理和は、論理演算子 \vee を使って、次のように表す。

$$p \vee q$$

論理和は、OR 演算と呼ばれることもある。

p と q のどちらかだけでも1であれば、 $p \vee q$ は1になる。

論理和の真理値表では、次の事実に着目しよう。

論理和 (OR) は、
片方だけでも 1 であれば、1 になる

論理和の真理値表

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

1.2 同値な命題と同値変形

論理演算子を組み合わせることで、元の命題と「同じ意味」の命題を作り出すこともできる。

つまり、意味を変えずに、表現を変えることができるということだ。

数の計算でうまく式変形をすれば計算が簡単になるように、命題の論理式を意味を変えないように変形することで、より簡単な議論に持ち込むことも可能になる。

「同じ意味」を表す言葉を定義した上で、「同じ意味」になる論理演算子の組み合わせのパターンをいくつか見ていこう。

1.2.1 構成命題と同値

まず、「論理演算子を使って作られた命題」に名前をつけておく。

構成命題 命題と論理演算子を組み合わせてできる命題を **構成命題** という。

「論理演算子を使って作られた命題」が、元の命題とまったく同じ真理値のパターンを持つとき、元の命題と新しい命題は**同値**であるという。

[illegible]

き、この2つの命題は同値であるといい、

$$p \equiv q$$

と表す。

同値の定義が「2つの命題 p と q 」ではなく、「2つの構成命題 p と q 」に対する記述になっていることに注意しよう。

たとえば、次の2つの命題は同じ真理値を持つ（どちらも正しい）が、まったく関係のない文章であり、とても「同じ意味」の文章とはいえないはずだ。

- 普通自動車免許は18歳以上で取得可能である
- 1年は12ヶ月である

同値とは、あくまでも論理演算子を使って加工した結果として、同じ真理値を持つ命題が得られたという状況を指す。まったく異なる命題どうしを結びつけるものではなく、論理演算子の関係（効果が同じかどうか）を示すものだと捉えておこう。

1.2.2 反射法則（二重否定）

同値な命題が得られる論理演算子の組み合わせのパターンは、法則としていくつか知られている。

その1つ目の例として、「否定を否定すると元に戻る」という法則を考えてみよう。

次の3つの文章において、1つ目の文章と3つ目の文章は、どちらも同じく「勉強した」という主張になっている。

1. 試験勉強はした
2. 試験勉強はしていない（否定）
3. 試験勉強はしていないわけじゃない（二重否定）

3つ目の文章のような、「否定の否定」を二重否定と呼び、次の法則が成り立つ。

論理式の反射法則

命題 p に対して、 p とその 二重否定 $\neg(\neg p)$ は同値となる。

$$p \iff \neg(\neg p)$$

実際に、真理値表を使って確かめてみよう。
「否定」とは 0 と 1 を反転させる操作であるから、2 回反転させると元に戻る様子が明らかである。

| p | $\neg p$ | $\neg(\neg p)$ |
|-----|----------|----------------|
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |

二重否定の真理値表

1.2.3 結合法則

- どこから計算しても同値
- 双対性

1.2.4 冪等法則

- 何回繰り返しても同値

1.2.5 交換法則

- ひっくり返しても同値

1.2.6 分配法則

- 分配しても同値

1.2.7 吸収法則

1.2.8 ド・モルガンの法則

1.2.9 同値変形

- 恒真命題と恒偽命題
- 矛盾法則と排中法則

1.3 命題と命題の関係

ここまで、命題と論理演算子を組み合わせて新たな命題を作るという考え方に触れてきた。ここからは、命題と命題の関係を考え、それを表す方法を見ていこう。

1.3.1 論理包含：「ならば」

物事には因果関係があり、それを辿ることで真相を明らかにする…
推理小説などで欠かせない描写だが、この考え方は数学の演繹（何かを前提に何かを導き出すこと）にも通じるものである。

「A が成り立っていれば、必ず B も成り立つ」といった関係を、数学では「ならば」という言葉で結んで表現する。

論理包含

p, q を命題とすると、 p ならば q すなわち p が真であれば q も真であるという命題を 論理包含 という。

論理包含は、論理演算子 \Rightarrow を使って、次のように表す。

$$p \Rightarrow q$$

論理「包含」という名前については、次のように解釈してみよう。

たとえば、

Ms.Fukasawa は日本人である \Rightarrow Ms.Fukasawa は人間である

という文章の場合、「日本人である」が十分条件で、「人間である」が必要条件となる。

- 「日本人である」というだけで、明言しなくても十分「人間である」と言える
- 「人間である」ことは、「日本人である」ことの前提として必要である

$p \Rightarrow q$ の1つの理解として、「 p であることは、 q であることに含まれている」という包含関係のイメージを持っておくと、このような「必要」と「十分」という言葉のニュアンスを感じ取ることができる。

1.3.3 論理包含の真理値表

論理包含「ならば」の真理値表は、次のようになる。

論理包含の真理値表

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

表の各行はそれぞれ、次のような対応を表している。

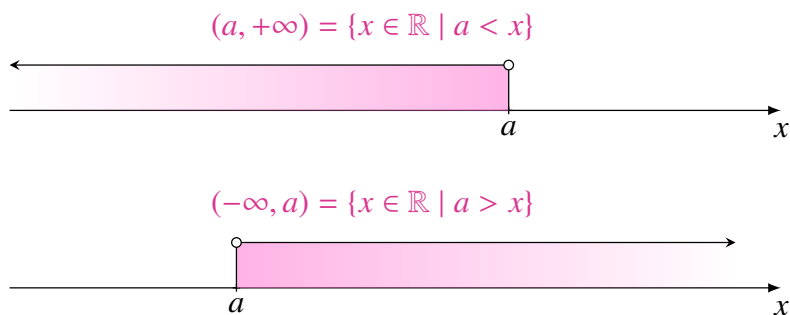
1. p が成り立てば q も成り立つ : $p \Rightarrow q$ は真
2. p が成り立っていても q が成り立たない : $p \Rightarrow q$ は偽
3. p が成り立たないとき、 q が成り立つかどうかは関係ない : $p \Rightarrow q$ は真
4. p が成り立たないとき、 q が成り立つかどうかは関係ない : $p \Rightarrow q$ は真

不可解に思えるのは、3～4 行目かもしれない。

p が偽のときは、 q の真偽に関わらず、 $p \Rightarrow q$ は真となる。

なぜなら、「 p ならば…」という文章は、そもそも「 p が成り立つとき」にしか言及していないため、それ以外の場合に何が起ころうと嘘をついたことにはならないからだ。

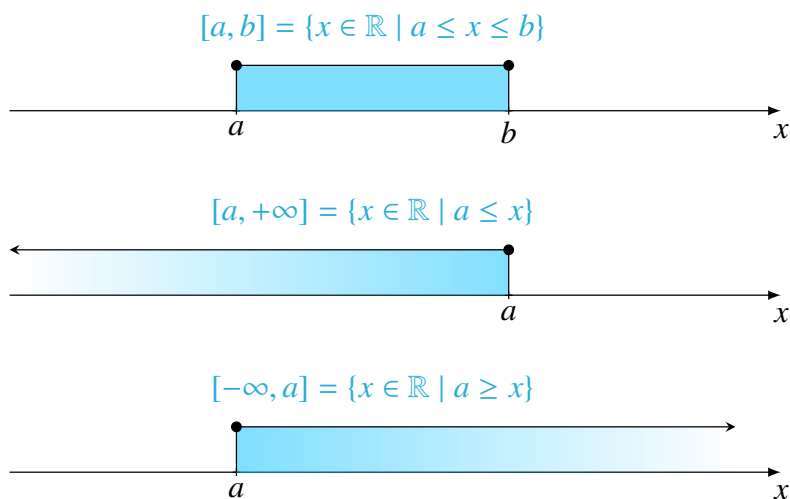
たとえば、「雨が降れば傘をさす」という文章は、雨が降った場合にしか言及していない。



閉区間

端点を含まない区間を閉区間という。

閉区間 $a < x < b$ となる実数 x の集合を 閉区間 といい、 $[a, b]$ と表す。



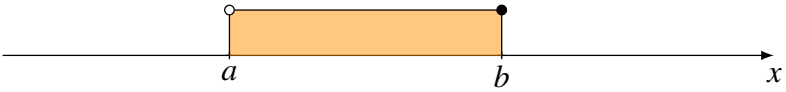
半開区間

一方の端点を含み、他方の端点を含まない区間を半開区間という。

半開区間 次のような集合を 半開区間 という。

- $a \leq x < b$ となる実数 x の集合を、 $[a, b)$ と表す。
- $a < x \leq b$ となる実数 x の集合を、 $(a, b]$ と表す。

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$



$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

