関数の局所的な様子を見る

簡単な関数のグラフは拡大していくと急に様子が変わったりせず、むしろ、だんだん安定したものになると考えられる

局所的な部分を拡大すると安定した姿になるとき、その様子を数学的にとらえる概念が微分

ものによっては、拡大するとどんどん見え方が変わるものもある

拡大を何度繰り返しても同じ複雑さを保つ数学的構造（フラクタル）も自然界には現れる

拡大すれば何でも簡単になるわけではないが、微分では、拡大したとき安定していく「素直」なものを主な対象とする

つまり、微分は局所を分析するのに強力な手法だが、万能ではない

微分の定義

関数は変化の法則性をとらえる数学的言語

数 x に対して数 $f(x)$ が定まるとき、$f(x)$ を変数 x の関数という

＊　＊　＊

座標 $(x, f(x))$ を xy 平面でプロットした曲線を関数 $f(x)$ のグラフという

これは、x 座標の点 x における高さが $f(x)$ となる曲線

＊　＊　＊

この曲線の局所的な様子を見るのに、変数 x を $x+h$ に動かしてみる

そうすると、関数の値は $f(x)$ から $f(x+h)$ に変わる

「素直」な関数のグラフをどんどん拡大すると、拡大部分はだんだん直線のように見えるだろう、と考えられる

h が小さいとき、斜めの曲線がほぼ一定の傾きの直線に見えるというのは、関数の値の変化量 $f(x+h)-f(x)$ が h にほぼ正比例するということ

式で表すと、x から $x+h$ の区間のグラフを直線とみなしたときの勾配

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

は、h が 0 に近づくとある 1 つの数に近づく、すなわち、収束するはずである

＊　＊　＊

■定義　h を 0 に近づけると、$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ がある数に収束するとき、$f(x)$ は x において微分可能であるという

このとき、極限値を

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

と書き、$f(x)$ の微分または微分係数（微係数）という

＊　＊　＊

定数関数の微分　「収束する」ことを「限りなく近づく」と言うこともある

日常的な言葉だと「限りなく近づく」には「その値に達していない」というニュアンスを感じるが、数学では、最初からずっと同じ値のときも「収束する」場合に含める

$f(x)$ が x の値によらないとき、$f(x)$ を定数関数という

このときは h がどんな数でも $f(x+h)-f(x)=0$ となるので、定数関数の微分は 0 である

＊　＊　＊

微分係数が定まらない例

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が収束しない状況の例として、$y=|x|$ を考える

$f(x)=|x|$ の場合、$x=0$ で

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を計算しようとすると、

$h>0$ のときは

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h}{h}=1$$

$h<0$ のときは

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

となり、h を正から 0 に近づけるときと、負から 0 に近づけるときとで、$\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ の極限の値が異なってしまうので、微分係数 $f'(0)$ が定まらない

＊　＊　＊

■定理　$a<x<b$ で定義された、微分可能な関数 $f(x)$ が $x=c$ で最大値または最小値をとるならば、$f'(c)=0$ である

＊　＊　＊

$f'(c)$ が最大値となる場合の証明

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

において、$f(c)$ が最大値であることから、

$$f(c)\geq f(c+h)$$
$$f(c+h)-f(c)\leq 0$$

したがって、$h>0$ のときは、

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$$

となり、h を正の側から 0 に近づけた極限値として $f'(c)\leq 0$ が成り立つ

一方、$h<0$ のときは、

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$

となり、h を負の側から 0 に近づけた極限値として $f'(c)\geq 0$ が成り立つ

$f'(c)\leq 0$ かつ $f'(c)\geq 0$ なので、$f'(c)=0$ が導かれた　□

＊　＊　＊

$f'(c)$ が最小値となる場合の証明　$f'(c)$ が最大値となる場合と同様に示される　□

導関数

x を止めて考えると、$f(x)$ の微分は 1 つの数

$$\frac{df}{dx}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

また別の視点として、

- x に数を与えると、何か 1 個、数が出てくる
- また別の x に対しては、別の数が出る

そう思うと、x から $\dfrac{df}{dx}(x)$ への対応は 1 つの関数を与えていると考えることができる

このように、$\dfrac{df}{dx}(x)$ を x の関数と見たとき、それを $f(x)$ の導関数という

＊　＊　＊

「微分」と「導関数」は視点の違いで使い分けられる言葉

- x を止めて $\dfrac{df}{dx}(x)$ という 1 個の数（微分係数）に注目するのか
- x を変数と思って $\dfrac{df}{dx}(x)$ を関数とみなす（導関数として扱う）のか

後者の立場に立って、$\dfrac{df}{dx}(x)$ を関数だと思うと、さらに微分を考えることができる

* * *

微分できないからといってそこで終わりではない

たとえば、関数概念を拡張した超関数の理論は、

極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が存在しない場合にも、より広く「微分」という概念をとらえる枠組みを与えるもの

単項式 x^n の微分

$f(x+h)=(x+h)^n$ の二項展開

$$f(x+h)=x^n+nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^n$$

を用いると、

$$\begin{aligned}
&f(x+h)-f(x)\\
&=(x+h)^n-x^n\\
&=x^n+nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^n-x^n\\
&=nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^{n-1}
\end{aligned}$$

上の式変形で、最初の x^n は最後の $-x^n$ と相殺されている

両辺を h で割ると、

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^{n-1}}{h}\\
&=nx^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}
\end{aligned}$$

h が 0 に近づくと、

- h に無関係な最初の項 nx^{n-1} はそのまま残る
- 次の h の項は 0 に近づく
- その後の $h^2,h^3,\cdots,h^{n-1}$ の項はさらに速く 0 に近づく

というわけで、h を 0 に近づけると nx^{n-1} に収束し、

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

が成り立つ