第 1 章

部分空間の基底と次元

線形部分空間

$m > n$ の場合、$m \times n$ 型行列 A は、写し先の空間をカバーしきれない写像を表していた。
つまり、写った結果が空間の一部、部分空間になるということである。

ref: 行列と行列式の基礎 p93〜94、p99

そこで、$\mathbb{R}^n$ の部分集合であって、ベクトル演算で閉じた集合について考える。これは、原点を含む直線や平面などを一般化した概念である。

線形部分空間　$\mathbb{R}^n$ のベクトルからなる空集合でない集合 V は、次が成り立つとき線形部分空間あるいは簡単に部分空間であるという。

i. すべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ が成り立つ
ii. すべての $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \in V$ に対して $c\boldsymbol{u} \in V$ が成り立つ

入れものの空間 $\mathbb{R}^n$ のことはあまり意識せずに、集合 V とそのベクトル演算に着目して、ある $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間のことを単に線形空間と呼ぶこともある。

$\mathbb{R}^n$ 自身も部分空間

たとえば、$\mathbb{R}^n$ 自身は明らかに $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

零ベクトルだけからなる部分集合も部分空間

零ベクトル $\boldsymbol{o}$ だけからなる部分集合 $\{\boldsymbol{o}\}$ も部分空間である。

⚓ **部分空間における零ベクトルの包含**　部分空間は必ず零ベクトル $\boldsymbol{o}$ を含む。

証明

V は空集合でないので、ある $\boldsymbol{v} \in V$ をとるとき、線形部分空間の定義 (ii) より

$$0 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \in V$$

よって部分空間は必ず $\boldsymbol{o}$ を含む。 ■

線形写像の像は部分空間

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p82

⚓ **線形写像の像は部分空間**　線形写像 $f\colon V \to W$ の像 $\mathrm{Im}(f)$ は W の部分空間である。

証明

和について

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}(f)$ とすると、$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}_1)$, $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{v}_2)$ とおける。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} &= f(\boldsymbol{v}_1)+f(\boldsymbol{v}_2) \\ &= f(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

となり、$\mathrm{Im}(f)$ は和について閉じている。 ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(f)$ と $c \in \mathbb{R}$ をとると、$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})$ とおける。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{u} &= cf(\boldsymbol{v}) \\ &= f(c\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

となり、$\mathrm{Im}(f)$ はスカラー倍について閉じている。 ■

線形写像の核は部分空間

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p71 ～72

⚓ **部分空間の零ベクトルと線形写像**　部分空間 V, W の間の線形写像 $f: V \to W$ に対して、V の零ベクトルを $\boldsymbol{o}_V$、W の零ベクトルを $\boldsymbol{o}_W$ とすると、

$$f(\boldsymbol{o}_V) = \boldsymbol{o}_W$$

証明

任意の $\boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W$ に対して、

$$\begin{aligned} 0 \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{o}_V \\ 0 \cdot \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{o}_W \end{aligned}$$

が成り立つ。

$f(\boldsymbol{o}_V)$ は、f の線形性により、次のように変形できる。

$$f(\boldsymbol{o}_V) = f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

ここで、$f(\boldsymbol{v})$ は、f による $\boldsymbol{v} \in V$ の像であるので、W に属する。

そこで、$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{o}_V) &= 0 \cdot f(\boldsymbol{v}) \\ &= 0 \cdot \boldsymbol{w} \\ &= \boldsymbol{o}_W \end{aligned}$$

となり、目標としていた式が示された。 ■

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p82

⚓ **線形写像の核は部分空間** 線形写像 $f : V \rightarrow W$ の核 $\mathrm{Ker}(f)$ は V の部分空間である。

証明

前述の定理の主張 $f(\boldsymbol{o}_V) = \boldsymbol{o}_W$ より、零ベクトルは核空間に属する。

$$\boldsymbol{o} \in \mathrm{Ker}(f)$$

和について

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ とすると、$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$ かつ $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ である。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) \\ &= \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

したがって、$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ である。 ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ と $c \in \mathbb{R}$ をとると、$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$ である。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} f(c\boldsymbol{u}) &= cf(\boldsymbol{u}) \\ &= c \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

したがって、$c\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ である。 ■

ベクトルが張る空間

$m \times n$ 型行列 A で写れる範囲を $\mathrm{Im}\, A$ として定義した。

$\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトルとすると、$\mathrm{Im}\, A$ は次のようなものといえる。

ref: 行列と行列式の基礎 p6〜8、ref: プログラミングのための線形代数 p135

$\boldsymbol{x}$ をいろいろ動かしたときの、

$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ が動ける範囲が $\mathrm{Im}\, A$

ここで、A を列ベクトルを並べたもの $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ として書き、

$\boldsymbol{x}$ も成分 $x_1, \ldots, x_n$ で書けば、

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

つまり、

数 $x_1, \ldots, x_n$ をいろいろ動かしたときの、

$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ が動ける範囲が $\mathrm{Im}\, A$

であり、この線形結合が動ける範囲を「ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の**張る空間**」という。

ベクトルが張る空間　k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ を与えたとき、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$$

あるいは

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$$

によって表し、これを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が**張る空間**という。

ベクトルが張る空間は部分空間

ベクトルが張る空間は部分空間　$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は部分空間である

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.2]

部分空間の張る空間は部分空間　$V \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ とすると、

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \subset V$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.4]

ベクトルが張る空間の幾何的解釈

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の張る空間 $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ は、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で定まる平面の一般化といえる。（ここで、点は 0 次元平面、直線は 1 次元平面と考える。）

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がすべて $\boldsymbol{o}$ なら、$\boldsymbol{o}$ ただ一点が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がすべて一直線上にあれば、その直線が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がすべて平面上にあれば、その平面が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$

たとえば $\mathbb{R}^3$ において座標を (x, y, z) とするとき、xy 平面は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。

座標部分空間　$\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合 I に対して、$x_i\ (i \in I)$ 以外の座標がすべて 0 である部分集合は $\mathbb{R}^n$ の部分集合である。

このようなものを座標部分空間といい、$\mathbb{R}^I$ と書く。

$$\mathbb{R}^I = \langle \boldsymbol{e}_i \mid i \in I \rangle$$

と表すこともできる。

線形写像の像と列空間

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の張る空間の記号を用いると、ベクトルの張る空間と $\operatorname{Im} A$ に関する考察は次のようにまとめられる。

ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97、ref: プログラミングのための線形代数 p135

$$\operatorname{Im} A = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

つまり、A の列ベクトルが張る空間が $\operatorname{Im} A$ である。

このことから、$\operatorname{Im} A$ を A の列空間と呼ぶこともある。

⚓ 線形写像の像と表現行列の列空間の一致　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の像 $\operatorname{Im} f$ は、f の表現行列の列ベクトルが張る空間である。

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とするとき、$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

なので、

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u} \in \operatorname{Im} f \\ \iff & \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t.\ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}) \\ \iff & \exists v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \ s.t.\ \boldsymbol{u} = v_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n \\ \iff & \boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle \end{aligned}$$

したがって、

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

が成り立つ。 ■

上述の証明の

$$\boldsymbol{u} \in \operatorname{Im} f \iff \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t.\ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})$$

という変形に着目すると、この定理は次のように線型方程式の文脈で言い換えられる。

⚓ 線形写像の像空間と方程式の解の存在　$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} A \iff \text{方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ}$$

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	2