転置行列と随伴行列

複素正方行列 A の転置行列において、各成分をその共役複素数に置き換えた行列を随伴行列という

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p275

随伴行列　複素正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し、$\overline{a_{ji}}$ を (i, j) 成分にもつ行列 ${}^t\overline{A}$ を A の随伴行列といい、A^* と表す

実数 x の複素共役は $\overline{x} = x$ であるので、A が実行列のときは、

$$A^* = {}^tA$$

すなわち、

> 実行列の世界では、随伴行列は転置行列

にすぎない

転置行列と複素共役の性質から、次の性質が成り立つ

積に対するエルミート共役の順序反転性　複素行列 A B の積 AB が定義できるとき、

$$(AB)^* = B^*A^*$$

証明

[Todo 1:]

対称行列とエルミート行列

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p275～276

エルミート行列 複素正方行列 A が次を満たすとき、A をエルミート行列という

$$A^* = A$$

A が実正方行列のときは、

$$A \text{ がエルミート行列} \iff {}^tA = A$$

となり、このような A は対称行列、あるいは実対称行列と呼ばれる

直交行列とユニタリ行列

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p275～276

ユニタリ行列 複素正方行列 A が次を満たすとき、A をユニタリ行列という

$$A^* = A^{-1}$$

A が実正方行列のときは、

$$A \text{ がユニタリ行列} \iff {}^tA = A^{-1}$$

となり、このような A は直交行列と呼ばれる

直交行列　実正方行列 A が次を満たすとき、A を直交行列という

$$ {}^tA = A^{-1} $$

直交行列という名前の由来は、次のように考えられる

A を n 個の列ベクトルを横一列に並べたものとみなし、

$$ A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) $$

とおくと、${}^tA = A^{-1}$、すなわち ${}^tAA = E$ は、

$$ \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} $$

と表される

これは、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が、次の性質

$$ {}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij} $$

を満たすことを意味する

すなわち、直交行列 A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は、互いに直交する単位ベクトルである

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1