線形関係式

線形関係式　ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ に対する等式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

を、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形関係式という

特に、$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ として得られる線形関係式を自明な線形関係式という

これ以外の場合、つまり $c_i \neq 0$ となるような i が少なくとも 1 つあるならば、これは非自明な線形関係式である

線型独立と線形従属

線形従属なベクトルでは、その中の 1 つのベクトルが、他のベクトルの線形結合で表される

ref: 行列と行列式の基礎 p38〜40

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p31〜32

線形結合によるベクトルの表現　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in K^n$ を線型独立なベクトルとする

K^n のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次従属であるとき、

$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表される

すなわち、$c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$ を用いて次のように書ける

$$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$$

証明

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次従属であるので、少なくとも 1 つは 0 でない係数 $c, c_1, c_2, \ldots, c_m$ を用いて

$$c\boldsymbol{a} + c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ

もし $c = 0$ だとすると、$c_1, c_2, \ldots, c_m$ のいずれかが 0 でないことになり、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線型独立であることに矛盾する

よって、$c \neq 0$ である

そのため、上式を c で割ることができ、$\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = -\frac{c_1}{c}\boldsymbol{a}_1 - \frac{c_2}{c}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{c_m}{c}\boldsymbol{a}_m$$

という $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表せる ■

非自明な線形関係式の存在と線形従属　ベクトルの集まりは、それらに対する非自明な線形関係式が存在するとき、そのときに限り線形従属である

証明

ベクトルの集まりが線型独立であることは、それらに対する線形関係式はすべて自明であるというのが定義である

それを否定すると、「自明でない線形関係式が存在する」となる ■

線型独立なベクトルの線形結合は一意的である

線型結合の一意性　線型独立性は、線形結合の一意性

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = c_1'\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k'\boldsymbol{a}_k \\ \Longrightarrow c_1 = c_1', \ldots, c_k = c_k' \end{aligned}$$

と同値である

証明

線型独立性の定義式を移項することで得られる ■

この定理から、

線型独立性は、両辺の係数比較ができるという性質

であるとも理解できる

$k = 1$ の場合に、次の定理が成り立つ

単一ベクトルの線型独立性と零ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 \text{が線型独立} \iff \boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$$

証明

$\Longrightarrow$

$\boldsymbol{a}_1$ が線型独立であるとする

すると、$\boldsymbol{a}_1$ に対する線形関係式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$$

が成り立つのは、$c_1 = 0$ のときだけである

ここで、$\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0}$ と仮定すると、$c_1\mathbf{0} = \mathbf{0}$ が成り立つので、c_1 は任意の値をとることができる

これは、$\boldsymbol{a}_1$ に対する線形関係式が $c_1 = 0$ のときだけ成り立つという線型独立性の定義に反する

よって、$\boldsymbol{a}_1 \neq \mathbf{0}$ である ■

$\Longleftarrow$

$\boldsymbol{a}_1 \neq \mathbf{0}$ とする

このとき、もし $\boldsymbol{a}_1$ に対する線形関係式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 = \mathbf{0}$$

が成り立つとしたら、$\boldsymbol{a}_1 \neq \mathbf{0}$ なので、c_1 は必ず 0 でなければならない

したがって、$\boldsymbol{a}_1$ に対する線形関係式は $c_1 = 0$ のときだけ成り立つ

これは、$\boldsymbol{a}_1$ が線型独立であることを意味する ■