射影行列

任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は、 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ 、 $\boldsymbol{u}^{\perp} \in \mathcal{U}^{\perp}$ を用いて

ref: 線形代数セミナー p5~7

$$oldsymbol{x} = oldsymbol{u} + oldsymbol{u}^{\perp}$$

と一意的に分解できる(直和分解)

ここで、 \boldsymbol{x} の $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ への射影を表すのは、 \boldsymbol{u} である

つまり、 \boldsymbol{U} への射影とは \boldsymbol{x} のうち、 \boldsymbol{U} に含まれる成分 \boldsymbol{u} だけを取り出す操作といえる

そこで、部分空間 ひへ射影する写像を 兄ょとすると、

$$P_{\mathcal{U}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$$

このとき、 \boldsymbol{x} がもともと \boldsymbol{U} の元である場合は、 $\boldsymbol{u}^{\perp} = \boldsymbol{0}$ の場合と考えて、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + 0 = \boldsymbol{u}$$

つまり、射影しても変わらない

$$P_{\mathcal{U}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U})$$

一方、 \boldsymbol{x} が \boldsymbol{U} の直交補空間 \boldsymbol{U}^{\perp} の元の場合は、 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ の場合と考えて、

$$P_{\mathcal{U}}oldsymbol{x} = oldsymbol{u} = oldsymbol{0} \quad (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp})$$

まとめると、

$$P_{\mathcal{U}}oldsymbol{x} = egin{cases} oldsymbol{x} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \ oldsymbol{0} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp}) \end{cases}$$

同様に、直交補空間 U^{\perp} へ射影する写像を $P_{U^{\perp}}$ とすると、

$$P_{\mathcal{U}^{\perp}}oldsymbol{x} = egin{cases} oldsymbol{0} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \ oldsymbol{x} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp}) \end{cases}$$

 \mathbb{R}^n が U と U^{\perp} の直和に分解されることから、 \mathbb{R}^n の基底は U の基底と U^{\perp} の基底を合わせたものになる

そこで、部分空間 $\mathcal U$ の正規直交基底 $\{m u_1,\dots,m u_r\}$ を選ぶと、これを $\mathbb R^n$ の正規直交基底 $\{m u_1,\dots,m u_r,m u_{r+1},\dots,m u_n\}$ に拡張できる ここで、 $\{m u_{r+1},\dots,m u_n\}$ は $\mathcal U^\perp$ の正規直交基底になる

このとき、

$$P_{\mathcal{U}}oldsymbol{x} = egin{cases} oldsymbol{x} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \ oldsymbol{0} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{oldsymbol{oldsymbol{\perp}}}) \end{cases}$$

という式は、 $P_{\mathcal{U}}$ が \mathbb{R}^n の正規直交基底

$$\{ {m u}_1, \ldots, {m u}_r, {m u}_{r+1}, \ldots, {m u}_n \}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する

$$\{u_1, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0\}$$

同様に、

$$P_{\mathcal{U}^{\perp}}oldsymbol{x} = egin{cases} oldsymbol{0} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \ oldsymbol{x} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp}) \end{cases}$$

という式は、 $P_{\mathcal{U}^{\perp}}$ が \mathbb{R}^n の正規直交基底

$$\{{\bm u}_1,\ldots,{\bm u}_r,{\bm u}_{r+1},\ldots,{\bm u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する

$$\{\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0},\,\mathbf{u}_{r+1},\ldots,\,\mathbf{u}_n\}$$

ゆえに、正規直交基底による表現行列の展開より、 $P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^{\perp}}$ は次のように表現できる

$$egin{aligned} egin{aligned} eta_{\mathcal{U}} &= oldsymbol{u}_1 oldsymbol{u}_1^ op + \cdots + oldsymbol{u}_r oldsymbol{u}_r^ op \ eta_{\mathcal{U}^\perp} &= oldsymbol{u}_{r+1} oldsymbol{u}_{r+1}^ op + \cdots + oldsymbol{u}_n oldsymbol{u}_n^ op \end{aligned}$$

 $P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^{\perp}}$ をそれぞれ、部分空間 \mathcal{U} 、およびその直交補空間 \mathcal{U}^{\perp} への射影行列と呼ぶ