Topic Note: 線形写像と行列

tomixy

2025 年 5 月 25 日

目次

行列の導入

長方形に並んだ数の集まりを

ref: 行列と行列式の基礎 1.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

などと書き、行列と呼ぶ

横の数字の並びを行、縦の数字の並びを列と呼ぶ

A は m 個の行と n 個の列をもつ行列である

第 i 行、第 j 列にある数字を a_{ij} と表し、これを (i,j) 成分と呼ぶ

行が m 個、列が n 個の行列は、m 行 n 列の行列、あるいは $m \times n$ 型の行列であるという

$n \times n$ 型の場合、行列は正方形なので n 次正方行列と呼ぶ

A の成分から第 j 列だけを取り出して $\mathbb{R}^m$ のベクトルとしたものが

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq n)$$

であり、これを A の j 番目の列ベクトルという

A は、これらを横に並べたものという意味で

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

と書くことができる

行列とベクトルの積 $m \times n$ 型の行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ との積を

$$A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

により定める

ここで、v_i は $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である

$A\boldsymbol{v}$ を考えるとき、ほとんどの場合は、A が 1 つ与えられていて $\boldsymbol{v}$ がいろいろ動くという意識が強い

それは、行列 A のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る

$$\text{入力ベクトル } \boldsymbol{v} \longrightarrow \text{出力ベクトル } A\boldsymbol{v}$$

という装置、すなわち写像だとみなすことである

行列のスカラー倍　A を行列、c をスカラーとするとき、A のすべての成分を c 倍して得られる行列を cA とする

行列とベクトルの積の性質　A, B を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$、$c \in \mathbb{R}$ とするとき、次が成り立つ

i. $A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}$
ii. $A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v}$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p24（命題 1.4.3）]

線形写像の定義

線形写像と線形性　写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは、次の 2 つの条件が成立することである

i. $f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$ がすべての $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ
ii. $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ がすべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に

ref: 行列と行列式の基礎 2

対して成り立つ

これらの性質を写像 f の線形性という

また、$m = n$ のとき、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の線形変換と呼ぶ

線形変換は空間 $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への写像なので、$\mathbb{R}^n$ 内において「ベクトルが変化している」（あるいは f が空間 $\mathbb{R}^n$ に作用している）ニュアンスとみることができる

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、i より、

$$f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

なので、

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

零ベクトルの像　零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される

$m = n = 1$ のときは、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ は、通常の意味の関数である

このとき、i の性質から、

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1)$$

が成り立つので、$a = f(1) \in \mathbb{R}$ とおくと、

$$f(x) = ax$$

と書ける

⚓ **比例関数**　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ は、a を比例定数とする比例関数である

線形写像の表現行列

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、各基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ の f による像を

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

と書くとする

これらを横に並べることによって、m 行 n 列の行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$

この行列 A を f の表現行列という

特に、$\mathbb{R}^n$ の線形変換の表現行列は n 次正方行列である

$\mathbb{R}^n$ の一般のベクトル $\boldsymbol{v}$ を、基本ベクトルの線型結合として

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{e}_j$$

と書く

このとき、f の線形性より、

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} v_j f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{a}_j$$

となる

このベクトルの第 i 成分は

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n$$

と書ける

これは $A\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である

したがって、この記法を踏まえて、次のような表記ができる

線形写像とその表現行列の関係

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

比例関数が比例定数 a だけで決まるのと同じように、線形写像は表現行列 A が与えられれば決まる

零写像と零行列　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ と定めたものは明らかに線形写像であり、これを零写像と呼ぶ

その表現行列はすべての成分が 0 である行列である

この行列を零行列と呼び、O で表す

$m \times n$ 型であることを明示するために $O_{m,n}$ と書くこともある

また、n 次正方行列の場合は、O_n と書く

恒等写像と単位行列　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ と定めたものは明らかに線形写像である

これを恒等写像と呼び、$f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ と書く

恒等写像の表現行列は、$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j \quad (1 \leq j \leq n)$ より

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを単位行列と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、n 次であることを明示したいときは E_n と書く

線形写像 f から行列 A を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることができる

行列から線形写像を作る $m \times n$ 型行列 A に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

によって写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定めれば、f は線形写像である

証明

行列とベクトルの積の性質より、f は線形写像である

また、f の定義から明らかに A は f の表現行列である ■

$\mathbb{R}^2$ の線形変換の例

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p51 - p56]

行列の積

線形写像の合成　$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 g と、$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^l$ への線形写像 f が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g \colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^l$ への線形写像である

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p56 （問 2.2）]

f と g の表現行列をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする

A は $l \times m$ 型、B は $m \times n$ 型の行列である

このとき、$f \circ g$ は $l \times n$ 型行列で表現される

それを C と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

B を列ベクトルに分解して $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ と書くとき、

$$(f \circ g)(\boldsymbol{e}_j) = f(g(\boldsymbol{e}_j)) = f(\boldsymbol{b}_j) = A\boldsymbol{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$$

となる

C の (i, j) 成分は $A\boldsymbol{b}_j$ の第 i 成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、C の (i,j) 成分を計算するときは、A の第 i 行、B の第 j 列だけを見ればよい

$$\begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、A と B の**積**と呼ぶ

単位行列との積　A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$E_m A = A$$
$$AE_n = A$$

零行列との積　A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$O_m A = AO_n = O_{m,n}$$

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は**可換**であるという

一般には、2 つの行列は可換であるとは限らない

つまり、AB と BA は一般には異なる

[Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p58 （例 2.2.3, 2.2.4）]

行列の和とスカラー倍

$A,\ B$ がともに $m \times n$ 型行列であるとき、それぞれの (i, j) 成分を足すことで行列の和 $A + B$ を定める

分配法則　積が定義できるとき、

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$

行列の積とスカラー倍の性質　行列 $A,\ B$ の積 AB が定義できるとき、つまり A の列の個数と B の行の個数が同じであるとき、$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

が成り立つ

線形写像の和　$f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とし、

$$h(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

により写像 $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定めるとき、h も線形写像である

また、f, g の表現行列を A, B とするとき、h の表現行列は $A+B$ である

なお、$h = f + g$ と書き、f, g の**和**と呼ぶ

証明

[Todo 5: ref: 行列と行列式の基礎 p59 （問 2.5）]

スカラー行列　c をスカラーとするとき、cE の形の行列をスカラー行列という

$$cE = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

行列 A にスカラー行列をかけることは、

$$(cE)A = A(cE) = cA$$

のように、スカラー c をかけるのと同じである

行列の積の結合法則

積の結合法則　積 AB, BC がともに定義できるとき、

$$(AB)C = A(BC)$$

写像による証明

A, B, C がそれぞれ $q \times m$, $m \times n$, $n \times p$ 型行列だとする

線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、$f,\ g,\ h$ の表現行列をそれぞれ $A,\ B,\ C$ とする

一般的な写像の合成の性質として、

$$(f\circ g)\circ h = f\circ (g\circ h)$$

が成り立つから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう ■

積の計算規則による証明

AB の (i,l) 成分は、

$$(AB)_{il} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^{n}(AB)_{il}c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}\end{aligned}$$

$i,\ j$ はいま固定されているので、和には関係がない

動いているのは $k,\ l$ だけ

ここで、次の書き換えができる

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} &= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}$ の右にある式は l に関する和をとる前のものなので、l は止まっていると考えてよく、単純な分配法則を使っている

また、括弧がなくても、k に関する和を先にとって、その後で l に関する和をとっていると読むことができる

このとき、和の順番は交換してもよいので、

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj} \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(BC)_{kj}
\end{aligned}$$

先ほどと同様に、$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}$ の右では k は止まっていると考えている

そして、この結果は、$A(BC)$ の (i, j) である ■

結合法則が成り立つことが示されたので、$(AB)C$ または $A(BC)$ を表すとき、括弧を書かずに単に ABC と書いても問題ない

行列の個数が増えても同様である

また、A が正方行列の場合は、

$$\begin{aligned}
A^2 &= AA \\
A^3 &= AAA
\end{aligned}$$

などのように書く

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	5