線形変換の表現行列

V を n 次元の線形空間とし、f を V の線形変換、すなわち V から V 自身への線形写像とする

ref: 行列と行列式の基礎 p106〜107

V の基底 $\mathcal{V}$ を選ぶとき、次の可換図式によって n 次正方行列 A が定められる

$$\begin{CD} V @>{f}>> V \\ @A{\Phi_{\mathcal{V}}}AA @AA{\Phi_{\mathcal{V}}}A \\ \mathbb{R}^n @>{A\cdot}>> \mathbb{R}^n \end{CD}$$

写像の定義される空間と、写す先の空間が同じなので、どちらに対しても同じ基底を用いることができる

もちろん、考える問題によっては別な基底を用いても構わないが、線形変換に対しては 1 つの基底を用いるのが自然である

数ベクトル空間の基底変換行列

$V = \mathbb{R}^n$ とし、標準基底 $\mathcal{E}$ によって行列 A で表現される線形変換を f とする

ref: 行列と行列式の基礎 p108〜109
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p225

別な基底 $\mathcal{V}$ によって f を表現する行列を B とするとき、B をどうやって計算すればよいかを考える

B を定める原理は、表現行列の構成で議論したように、

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)B$$

ここで、$\boldsymbol{v}_i$ や $f(\boldsymbol{v}_i)$ は $\mathbb{R}^n$ の元なので、$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$ や $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ は n 次の正方行列であるとみなせる

そこで、

$$P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$

とおくとき、次に示すように P は正則行列である

基底変換行列の正則性　基底の変換行列は正則行列である

証明

P の列ベクトルは基底であるため、線形独立である

列ベクトルの線型独立性による正則の判定で示したように、正則行列であることは、列ベクトルが線形独立であることと同値である ■

また、B を決める式

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)B$$

の左辺は、次のように書ける

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) &= (A\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n) \\ &= A(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \\ &= AP\end{aligned}$$

よって、B を決める式は、

$$AP = PB$$

となり、P は正則である（逆行列が存在する）ので、両辺に左から P^{-1} をかけて、

$$B = P^{-1}AP$$

が得られる

行列 P は、標準基底 $\mathcal{E}$ から基底 $\mathcal{V}$ への基底変換行列と呼ばれる

行列の相似　正方行列 A, B に対して、正則行列 P が存在して、

$$B = P^{-1}AP$$

が成り立つとき、A と B は相似であるという

A と B が相似であるとき、A と B は 1 つの線形変換 f を異なる基底によって表現して得られた行列であるという関係にある

線形空間の基底変換行列

V を線形空間とし、V の基底 $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を別な基底 $\mathcal{V}' = \{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ に取り替えることを考える

ref: 行列と行列式の基礎 p110〜111

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p215〜219

このとき、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底であることから、V の元である $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ は、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の線形結合で表される

そこで、

$$\boldsymbol{v}'_i = p_{1i}\boldsymbol{v}_1 + p_{2i}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + p_{ni}\boldsymbol{v}_n$$

すなわち、

$$(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)(p_{ij})$$

とおく

このとき、写像 $f\colon V \to V$ を

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_1) & = & \boldsymbol{v}'_1 \\ f(\boldsymbol{v}_2) & = & \boldsymbol{v}'_2 \\ \vdots & & \vdots \\ f(\boldsymbol{v}_n) & = & \boldsymbol{v}'_n \end{cases}$$

を満たすものとして定義する

これはすなわち、基底 $\mathcal{V}$ を構成するそれぞれのベクトルを、基底 $\mathcal{V}'$ を構成するベクトルに順に写す線形変換であり、

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n)$$

を満たすものである

すると、行列 $P = (p_{ij})$ を定める式は、

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)P$$

と書ける

よって、P は基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ を表す線形写像 f の表現行列である

この意味で、P を基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の基底変換行列と呼ぶ

線形空間の基底変換行列　V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$, $\mathcal{V}' = \{\boldsymbol{v}'_i\}_{i=1}^n$ を V の基底とするとき、基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列 P は、

$$(\boldsymbol{v}'_1, \dots, \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n)P$$

により定まる

この行列 P は、座標写像を介して考えると、次の可換図式で定まるものである

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[dd, "P\cdot"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] & \\
& V \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{V}}"] &
\end{tikzcd}$$

つまり、P は、

$$\Phi_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{V}'} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

の標準基底に関する表現行列である

一方、この行列 P はベクトルの成分表示の変換に用いることもできる

座標ベクトルの変換則　基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P とし、ベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ の $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ に関する座標ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ とするとき、

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$$

が成り立つ

証明

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の 2 種類の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ に関する成分

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

を考えると、$\boldsymbol{a}$ の 2 通りの表現

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \\ &= (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= x'_1\boldsymbol{v}'_1 + x'_2\boldsymbol{v}'_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{v}'_n \\ &= (\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる

どちらも $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ との積の形、すなわち $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合として表されている

ここで、基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線型独立性から、その線形結合は一意的であるので、係数比較ができて、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ ■

基底の変換による表現行列の変化

$f\colon V \to W$ を線形写像とする

ref: 行列と行列式の基礎 p112〜113

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p215、p223〜224

$$V \xrightarrow{f} W$$

V の基底 $\mathcal{V}$ と W の基底 $\mathcal{W}$ に関する f の表現行列を A とする

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "A\cdot"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{W}}"'] \end{tikzcd}$$

また、V の基底 $\mathcal{V}'$ と W の基底 $\mathcal{W}'$ に基底を変えるとき、f の表現行列を B とする

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "B\cdot"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{W}'}"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P、$\mathcal{W} \rightharpoonup \mathcal{W}'$ の変換行列を Q とするとき、次の可換図式で整理できる

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "B\cdot"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] \arrow[dd, "P\cdot"'] & & & \mathbb{R}^m \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{W}'}"] \arrow[dd, "Q\cdot"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[rrr, "A\cdot"] & & & \mathbb{R}^m \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{W}}"']
\end{tikzcd}
$$

ここで、行列 A によって表現される写像を F_A、他の行列についても同様に表すと、

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "F_B"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] \arrow[dd, "F_P"'] & & & \mathbb{R}^m \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{W}'}"] \arrow[dd, "F_Q"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[rrr, "F_A"] & & & \mathbb{R}^m \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{W}}"']
\end{tikzcd}
$$

このとき、左上の $\mathbb{R}^n$ から右下の $\mathbb{R}^m$ への写像は、

$$F_A \circ F_P, \quad F_Q \circ F_B$$

という 2 通りの表現ができる

すなわち、

$$F_A \circ F_P = F_Q \circ F_B$$

合成写像は行列の積に対応するので、

$$AP = QB$$

ここで、Q は $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ の標準基底に関する表現行列であるから、正則行列である

そこで、左から Q^{-1} をかけて、

$$B = Q^{-1}AP$$

が得られる

⚓ **表現行列の変換法則**　線形写像 $f\colon V \to W$ の基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する表現行列を A とし、同じ線形写像 f の別な基底 $\mathcal{V}', \mathcal{W}'$ に関する表現行列を B とするとき、基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P、$\mathcal{W} \rightharpoonup \mathcal{W}'$ の変換行列を Q とすると、

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ