




転置行列と随伴行列

複素正方行列 A の転置行列において、各成分をその共役複素数に置き換えた行列を**随伴行列**という

ref: 長岡亮介 線形代数
入門講義 p275

 **随伴行列** 複素正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し、 $\overline{a_{ji}}$ を (i, j) 成分にもつ行列 ${}^t\overline{A}$ を A の**随伴行列**といい、 A^* と表す

実数 x の複素共役は $\overline{x} = x$ であるので、 A が実行列のときは、

$$A^* = {}^tA$$


すなわち、

実行列の世界では、随伴行列は転置行列

にすぎない



転置を二回行くと元に戻ることと同様に、次が成り立つ

 **随伴行列の自己反転性** 複素正方行列 A に対し、随伴行列を二回とると元に戻る

$$(A^*)^* = A$$

 証明

随伴行列の定義より、

$$(A^*)^* = {}^t\overline{A^*} = {}^t\overline{{}^t\overline{A}}$$

$A = (a_{ij})$ とすると、 A の各成分を共役複素数にした行列は、

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

これを転置すると、

$${}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$$

さらに、もう一度各成分の複素共役をとると、

$$\overline{{}^t\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji})$$


したがって、

$$(A^*)^* = \overline{{}^t\overline{A}} = (a_{ij}) = A$$

が成り立つ ■



転置行列と複素共役の性質から、次の性質が成り立つ

 積に対するエルミート共役の順序反転性 複素行列 A, B の積 AB が定義できるとき、

$$(AB)^* = B^*A^*$$


 証明



[Todo 1:]



随伴行列と標準内積は、次のような関係で結ばれる

 随伴公式 複素行列 A と計量空間上のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

 証明

転置を用いて内積を表すと、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\overline{\boldsymbol{v}}$$

転置と行列積の順序反転性より、 ${}^t(A\boldsymbol{u}) = {}^t\boldsymbol{u}{}^tA$ なので、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ({}^t\boldsymbol{u}{}^tA)\overline{\boldsymbol{v}}$$

行列の積の結合法則を用いて、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}({}^tA\overline{\boldsymbol{v}})$$

ここで、 $\overline{{}^tA}$ は、 $A = (a_{ij})$ とすると、

1. $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$
2. ${}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$
3. $\overline{{}^tA} = (\overline{a_{ji}}) = (a_{ji}) = {}^tA$

となり、 tA と一致する

これを用いて書き換えると、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}(\overline{{}^tA\overline{\boldsymbol{v}}})$$

複素共役の積の性質 $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ を用いて、


$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}{}^t\overline{A\boldsymbol{v}}$$

この時点で、右辺を内積として書き直すと、 $A\boldsymbol{v}$ の複素共役がなくなることに注意して、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, {}^tA\boldsymbol{v})$$

随伴行列の定義 $A^* = {}^t\overline{A}$ より、


$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

となり、目的の等式が得られた 



対称行列とエルミート行列

ref: 長岡亮介 線形代数
入門講義 p275~276

 エルミート行列 複素正方形行列 A が次を満たすとき、 A を **エルミート行列** という

$$A^* = A$$

A が実正方形行列のときは、


$$A \text{ がエルミート行列} \iff {}^t A = A$$

となり、このような A は対称行列、あるいは**実対称行列**と呼ばれる



直交行列とユニタリ行列

ref: 長岡亮介 線形代数
入門講義 p275~276


 ユニタリ行列 複素正方形行列 A が次を満たすとき、 A を **ユニタリ行列** という

$$A^* = A^{-1}$$

A が実正方形行列のときは、

$$A \text{ がユニタリ行列} \iff {}^t A = A^{-1}$$

となり、このような A は**直交行列**と呼ばれる

 直交行列 実正方行列 A が次を満たすとき、 A を直交行列という

$${}^tA = A^{-1}$$

直交行列という名前の由来は、次のように考えられる

A を n 個の列ベクトルを横一列に並べたものとみなし、

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

とおくと、 ${}^tA = A^{-1}$ 、すなわち ${}^tAA = E$ は、

$$\begin{pmatrix} {}^t\mathbf{a}_1 \\ {}^t\mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\mathbf{a}_n \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

と表される

これは、ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ が、次の性質

$${}^t\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$$

を満たすことを意味する

すなわち、直交行列 A の列ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は、互いに直交する単位ベクトルである

.....

Zebra Notes

Type	Number
todo	1