単射

単射とは、

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p56〜

> 異なる元は異なる元に写る

という性質である

A の異なる元が B の異なる元に写るとき、写像 $f\colon A \to B$ は単射であるという

単射　写像 $f\colon A \to B$ に対して、f が単射であるとは、A の任意の要素 a, a' に対して

$$f(a) = f(a') \implies a = a'$$

が成り立つことをいう

この主張の対偶

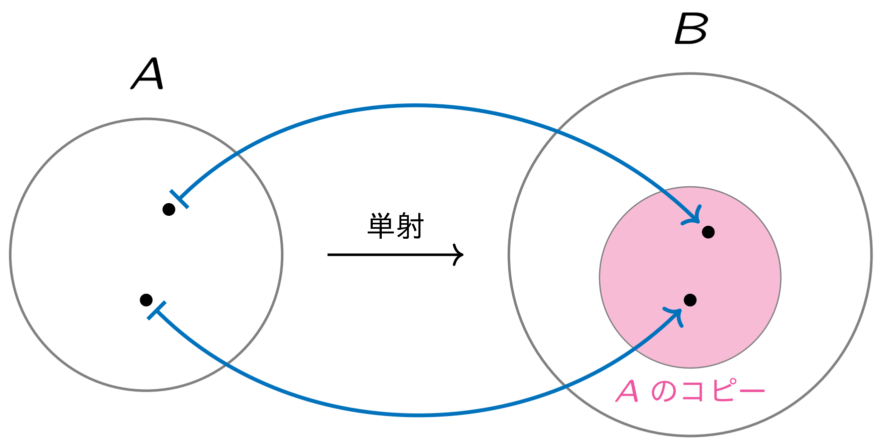
$$a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$$

を考えれば、単射であるということは、「異なる要素が f によって同じ要素に対応することはない」ということにほかならない

単射な写像は、

> 写像の定義域を値域にそっくり「コピーする」

と考えることができる



全射

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p57〜

全射とは、

> どんな b も A の元の像になる

という性質である

B の任意の元が A のある元の像となるとき、写像 $f\colon A \to B$ は全射であるという

全射　写像 $f\colon A \to B$ に対して、f が全射であるとは、

$$f(A) = B$$

すなわち

$$\forall b \in B, \exists a \in A\colon f(a) = b$$

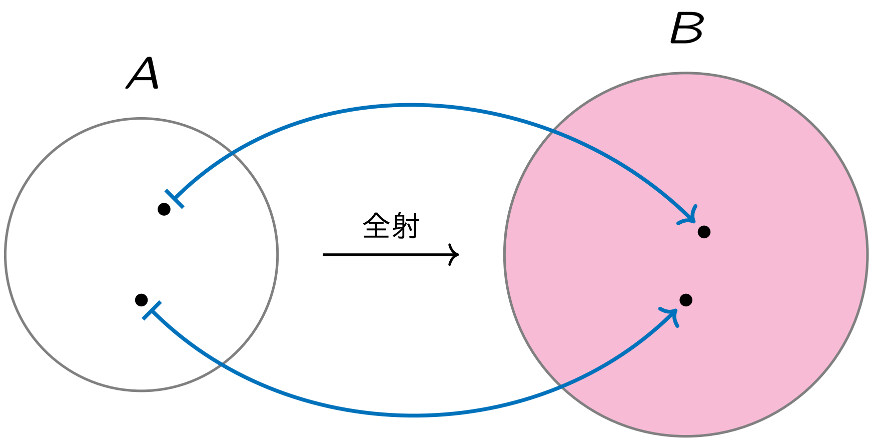
が成り立つことをいう

言い換えると、B への写像 f が全射であるとは、B の要素に「対応していないものがない」ということ

全射な写像は、

> 定義域の元の像で値域を「埋め尽くす」

と考えることができる



全単射

全単射とは、

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p57〜

> どんな B の元も、ただ 1 つの A の元の像になる

という性質である

> **全単射**　集合 A から集合 B への写像 f が単射かつ全射であるときは、全単射であるという

これは、写像 f により、集合 A の要素と集合 B の要素が「一対一に対応している」ことにほかならない

同型写像

数学では、数学的構造を保つ写像が重要であり、特に、構造を保つ全単射写像のことは同型写像と呼ぶ

逆写像

逆写像　写像 $f\colon A \to B$ が全単射であるとき、対応が一対一であるので、逆向きの対応、すなわち、B から A への対応を考えることができる
この対応により定義される写像を f の逆写像と呼び、記号で f^{-1} と書く

単射と全射の双対性

左逆写像　写像 $f\colon A \to B$ に対して、写像 $g\colon B \to A$ が存在して、

$$g \circ f = I_A$$

を満たすとき、g は f の左逆写像であるという

右逆写像　写像 $f\colon A \to B$ に対して、写像 $g\colon B \to A$ が存在して、

$$f \circ g = I_B$$

を満たすとき、g は f の右逆写像であるという

⚓ **全単射の特徴づけ** 写像 $f\colon A \to B$ に対して、次の 2 つは同値になる

1. f は全単射である
2. f の左逆写像であり、右逆写像でもある写像が存在する

「逆写像」という観点からみることにより、「単射」と「全射」は双対的な概念であることがわかる

⚓ **単射の特徴づけ** 写像 $f\colon A \to B$ に対して、次の 2 つは同値になる

1. f は単射である
2. f の左逆写像が存在する

⚓ **全射の特徴づけ** 写像 $f\colon A \to B$ に対して、次の 2 つは同値になる

1. f は全射である
2. f の右逆写像が存在する