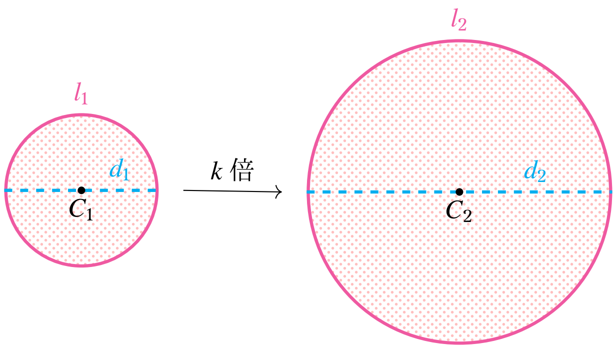
Chapter 1

基礎数学

1.1　三角関数

1.1.1　円周率

すべての円は、お互いを拡大もしくは縮小した関係にある。



円 C_2 が、円 C_1 を k 倍に拡大したものだとすると、その直径や円周も C_1 の k 倍となる。

$$d_2 = k \cdot d_1$$

$$l_2 = k \cdot l_1$$

この 2 つの式を各辺どうし割ることで、k が約分されて消え、直径と円周の比が等しくなることがわかる。

$$\frac{d_2}{l_2} = \frac{d_1}{l_1}$$

円の直径と円周の比　すべての円において、直径と円周の長さの比は一定である。

そして、この一定の比率は、円周率 π として知られている。

円周率　円の円周の長さ l と直径の長さ d の比を、円周率といい、π で表す。

$$\pi = \frac{l}{d} = 3.14\ldots$$

π の定義式を変形すると、円周の長さを求める式が得られる。

半径を r とすると、直径 $d = 2r$ であるから、

$$l = \pi \cdot d = 2\pi r$$

円周の長さ　円の円周の長さ l は、半径 r を使って次のように表される。

$$l = 2\pi r$$

1.2　指数関数

1.2.1　同じ数のかけ算の指数による表記

指数と底

同じ数 a を n 回掛けたものを a の n 乗といい，a^n と表す。

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個の }a}$$

このとき、n を指数、a を底という。

1.2.2 指数法則

指数を「かける回数」と捉えれば、いくつかの法則が当たり前に成り立つことがわかる。

「かける回数」の和

例えば、a を m 回かけてから、続けて a を n 回かける式を書いてみると、a は $m+n$ 個並ぶことになる。

$$\overbrace{a\times a\times a}^{a^3}\times\overbrace{a\times a}^{a^2}=\overbrace{a\times a\times a\times a\times a}^{a^5}$$

指数の和に関する指数法則

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

「かける回数」の差

例えば、a を m 回かけたものを、a を n 回かけたもので割ると、$m-n$ 個の a の約分が発生する。

$$\frac{\overbrace{a\times a\times a\times a\times a\times}^{a^5}}{\underbrace{a\times a}_{a^2}}=\overbrace{a\times a\times a}^{a^3}$$

指数の差に関する指数法則

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

「かける回数」の積

例えば、「a を m 回かけたもの」を n 回かける式を書いてみると、a は $m\times n$ 個並ぶことになる。

$$(a^2)^3=\underbrace{\overbrace{a\times a}^{a^2}\times\overbrace{a\times a}^{a^2}\times\overbrace{a\times a}^{a^2}}_{a^6}$$

指数の積に関する指数法則

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

1.2.3 指数の拡張と指数関数

底を固定して、指数を変化させる関数を考えたい。

指数部分に入れられる数を拡張したいが、このとき、どんな数を入れても指数法則が成り立つようにしたい。

0 の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、$m = 0$ の場合を考える。

$$a^0 \times a^n = a^{0+n}$$
$$a^0 \times a^n = a^n$$

この式が成り立つためには、a^0 は 1 である必要がある。

0 の指数

どんな数も、0 乗すると 1 になると定義する。

$$a^0 = 1$$

そもそも、指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ は、「指数の足し算が底のかけ算に対応する」ということを表している。

- 「何もしない」足し算は $+0$
- 「何もしない」かけ算は $\times 1$

なので、$a^0 = 1$ は「何もしない」という観点で足し算とかけ算を対応づけたものといえる。

負の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、正の数 n を負の数 $-n$ に置き換えたものを考える。

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

さらに、指数法則 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ も成り立っていてほしいので、

$$a^m \times a^{-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

この式は、$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ とすれば、当たり前に成り立つものとなる。

負の整数の指数

n が正の整数であるとき、$-n$ 乗を次のように定義する。

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

有理数の指数

指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ において、指数 m, n を $\dfrac{1}{2}$ に置き換えたものを考える。

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a$$

$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$ は、$(a^{\frac{1}{2}})^2$ とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$$

つまり、$a^{\frac{1}{2}}$ は、2 乗すると a になる数（a の平方根）でなければならない。

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

同様に、$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$ を考えてみると、

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = a$$

$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$ は、$(a^{\frac{1}{3}})^3$ とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$$

つまり、$a^{\frac{1}{3}}$ は、3 乗すると a になる数（a の 3 乗根）でなければならない。

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

このようにして、$a^{\frac{1}{n}}$ は、n 乗すると a になる数（a の n 乗根）として定義すればよい。

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

さて、分子が 1 ではない場合はどうだろうか？
$(a^m)^n = a^{mn}$ において、m を $\dfrac{m}{n}$ に置き換えたものを考えると、

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m$$

となるので、$a^{\frac{m}{n}}$ は、n 乗したら a^m になる数として定義すればよい。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

有理数の指数

m, n が整数で、n が正の整数であるとき、$\dfrac{m}{n}$ 乗を次のように定義する。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

実数への拡張

有理数は無数にあるので、指数 x を有理数まで許容した関数 $y = a^x$ のグラフを書くと、十分に繋がった線になる。
指数が無理数の場合は、まるでグラフ上の点と点の間を埋めるように、有理数の列で近似していくことで定義できる。

これで、x を実数とし、関数 $y = a^x$ を定義できる。

指数関数

a を正の実数とし、x を実数とするとき、次のような関数を指数関数という。

$$y = a^x$$

1.2.4　指数関数の底の変換

用途に応じて、使いやすい指数関数の底は異なる。

- e：微分積分学、複素数、確率論など
- 2：情報理論、コンピュータサイエンスなど
- 10：対数表、音声、振動、音響など

よって、これらの底を互いに変換したい場面もある。

指数の底を変えることは、指数の定数倍で実現できる。

例えば、底が 4 の指数関数 4^x を、底が 2 の指数関数に変換したいとすると、

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$$

のように、指数部分を 2 倍することで、底を 4 から 2 へと変換できる。

当たり前だが、この変換は、$4 = 2^2$ という関係のおかげで成り立っている。

「4 は 2 の何乗か？」がすぐにわかるから、4 から 2 への底の変換が簡単にできたのだ。

より一般に、a^x と b^X において、$a = b^c$ という関係があるとする。

つまり、a は b の c 乗だとわかっているなら、

$$a^x = (b^c)^x = b^{cx}$$

のように、底を a から b へと変換できる。

指数関数の底の変換

指数を定数倍することは、底を変えることと同じ操作になる。

$a = b^c$ という関係があるなら、次の変換が成り立つ。

$$a^x = b^{cx}$$

ここで重要なのは、指数関数の底を変換するには、「a は b の何乗か？」がわかっている必要があるということだ。

次章では、$a = b^c$ となるような c を表す道具として、対数を導入する。

1.3 対数関数

1.3.1 対数：指数部分を関数で表す

指数関数は、「a を x 乗したら y になる」という関係を表現するものだった。

ここで、逆に「y は a の何乗か？」という関係を表現するものとして、対数関数を定義する。

これは、y から x を導き出す関数であるから、指数関数 $y = a^x$ の逆関数といえる。

対数

$a^y = x$ を満たす y を、a を底とする x の対数といい、次のように表す。

$$y = \log_a x$$

ここで、x は真数、a は底と呼ばれる。

対数関数は指数関数の逆関数

対数関数 $y = \log_a x$ は、指数関数 $x = a^y$ の逆関数である。

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

対数は、指数関数の指数部分を表す。

$a^y = x$ の y に、$y = \log_a x$ を代入することで、次のような式にまとめることもできる。

指数部分は対数で書き換えられる

$$a^{\log_a x} = x$$

1.3.2 対数の性質

指数法則を対数に翻訳することで、対数の性質を導くことができる。

真数のかけ算は log の足し算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$ として、指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ を考える。

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a^m \times a^n \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$m + n = \log_a(x_1 x_2)$ がいえる。
また、$x_1 = a^m$ より $m = \log_a x_1$、$x_2 = a^n$ より $n = \log_a x_2$ と表せるから、

$$m + n = \log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 x_2)$$

積の対数は対数の和

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

真数の割り算は log の引き算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$ として、指数法則 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ を考える。

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \frac{a^m}{a^n} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$m - n = \log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$ がいえる。

また、$x_1 = a^m$ より $m = \log_a x_1$、$x_2 = a^n$ より $n = \log_a x_2$ と表せるから、

$$m - n = \log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right)$$

商の対数は対数の差

$$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

真数の冪乗は log の指数倍

$x = a^m$ として、指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ を考える。

$$\begin{aligned} x^n &= (a^m)^n \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$mn = \log_a x^n$ がいえる。

また、$x = a^m$ より $m = \log_a x$ と表せるから、

$$mn = n \log_a x \log_a x^n$$

冪の対数は対数の指数倍

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

1.3.3 常用対数と桁数

常用対数　底を 10 にした対数関数を、常用対数と呼ぶ。

$$\log_{10} x$$

1.3.4 指数関数の底の変換：対数を用いた表現

指数関数の底 a から b に変換するには、「a は b の何乗か？」がわかっている必要があった。

REVIEW

$a = b^c$ という関係があるなら、

$$a^x = b^{cx}$$

今では、$a = b^c$ となるような c を、対数で表すことができる。

$$b^c = a \iff c = log_b a$$

指数関数の底の変換公式

$$a^x = b^{(log_b a)x}$$