

第 25 章

抽象線形空間



線形空間の公理

線形代数の理論は線型独立性や線形写像を基礎にしている

これらは線形結合、すなわちベクトルの和とスカラー倍を用いて定義された


任意のベクトルは線形結合で表され、線形写像は線形結合を保つ写像として定義される

そこで、和とスカラー倍が定義された一般の集合に対しても、線型空間の理論を適用できないか？と考える

和とスカラー倍が定義された一般の集合を、改めて線形空間として定義する

そして、その集合の元をベクトルと呼ぶことにする

和とスカラー倍が定義されていれば、線形結合によりその元を表すことができるからだ

 **線形空間** 集合 V の任意の元 a, b と体 K の任意の元 k に対して、 V の元

$a + b$ (和) が定まり、 V の元 ka (スカラー倍) が定まるとする

これらの演算が次の条件を満たすとき、 V を K 上の線形空間、あるいは K 線型空間と呼び、線型空間の元をベクトルと呼ぶ

i. 交換法則 : $a + b = b + a$

- ii. 結合法則 : $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ 、 $k(l\mathbf{a}) = (kl)\mathbf{a}$
- iii. 分配法則 : $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ 、 $(k + l)\mathbf{a} = k\mathbf{a} + l\mathbf{a}$
- iv. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (1 は体 K の乗法に関する単位元)
- v. 零元の存在 : $\mathbf{0}$ と書かれる特別な元が存在し、任意の $\mathbf{a} \in V$ に対して

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$
- vi. 和に関する逆元の存在 : 任意の $\mathbf{a} \in V$ に対して $-\mathbf{a}$ と書かれる特別な元が存在し、 $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$



線形写像の空間


V, W をともに有限次元 K 上の線形空間とする。

線型写像のことを**準同型** (homomorphism) と呼ぶこともある。

この英語訳から、 V から W への線形写像全体の集合を $\text{Hom}(V, W)$ と表す。

また、 $V = W$ のときは、 V の線形変換を V の**自己準同型** (endomorphism) と呼ぶこともある。この英語訳から、 V の線形変換全体の集合を $\text{End}(V)$ と表す。

このとき、 $\text{Hom}(V, W)$ に線型空間の構造（和とスカラー倍）を次のように導入する

 **線形写像の和とスカラー倍** 線形写像 $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ と $c \in K$ に対して、和とスカラー倍を次のように定義する

$$(f + g)(v) := f(v) + g(v)$$

$$(cf)(v) := c \cdot f(v)$$

これらの演算は、再び $V \rightarrow W$ の線形写像を定めることが確認できる

📌 Theorem 25.1 - 線形写像全体による線形空間

線形写像全体の集合 $\text{Hom}(V, W)$ は K 上の線形空間である

🔪 証明

加法が線形性を満たす

f, g をともに線形写像とし、任意の $v_1, v_2 \in V$ と $a, b \in K$ に対して、

$$\begin{aligned} (f + g)(av_1 + bv_2) &= f(av_1 + bv_2) + g(av_1 + bv_2) \\ &= af(v_1) + bf(v_2) + ag(v_1) + bg(v_2) \\ &= a(f(v_1) + g(v_1)) + b(f(v_2) + g(v_2)) \\ &= a(f + g)(v_1) + b(f + g)(v_2) \end{aligned}$$

よって、 $f + g$ は線形写像である ■

スカラー倍が線形性を満たす

f を線形写像とし、任意の $v_1, v_2 \in V$ と $a, b, c \in K$ に対して、

$$\begin{aligned} (cf)(av_1 + bv_2) &= cf(av_1 + bv_2) \\ &= c \cdot (f(av_1 + bv_2)) \\ &= c \cdot (f(av_1) + f(bv_2)) \\ &= c \cdot (af(v_1) + bf(v_2)) \\ &= a(cf)(v_1) + b(cf)(v_2) \end{aligned}$$

よって、 cf は線形写像である ■

線型空間の公理をすべて満たすことも、容易に確認できる ■