線形写像の像空間と列空間

次の定理が成り立つことから、$\mathrm{Im}(A)$ を A の列空間と呼ぶこともある

ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97

線形写像の像と表現行列の列空間の一致　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の像空間 $\mathrm{Im}(f)$ は、表現行列の列ベクトルが張る空間である

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ とするとき、$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

なので、

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(f) \\ \Longleftrightarrow\ & \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t.\ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}) \\ \Longleftrightarrow\ & \exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \ s.t.\ \boldsymbol{u} = v_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n \\ \Longleftrightarrow\ & \boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle \end{aligned}$$

したがって、

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(A) = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

が成り立つ　■

上述の証明の

$$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t.\ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})$$

という変形に着目すると、この定理は次のように線型方程式の文脈で言い換えられる

線形写像の像空間と方程式の解の存在　$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A) \iff \text{方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ}$$

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ が $\mathrm{Im}(A)$ に属するかどうかを調べるためには階数による判定条件が使える

一方、後に論じるように、

> ある線形写像の核空間として像空間をとらえる

こともできる

扱う問題によってはそのような見方が有効になる

線形写像の像空間は表現行列の列ベクトルによって張られるが、列ベクトルの集合は一般には線型独立ではない

像空間の基底を得るためには、列ベクトルの部分集合を考えるのが自然である

主列ベクトルによる像空間の基底の構成　行列 A の主列ベクトルの集合は $\mathrm{Im}(A)$ の基底である

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p97 定理 3.1.10]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1