写像の整理帳

tomixy

2025 年 5 月 27 日

目次

写像

写像は、集合の間の「対応」である

ref: ろんりと集合

関数は、数を入力すると数が出力される「装置」

関数のような「対応」という考え方の対象を「数」に限定せず、「集合の要素」に一般化したものが写像である

写像というときは、どの集合からどの集合への写像であるかをはっきりしておかなければならない

写像　集合 A, B があったとき、A のすべての要素 a に対して、B のある要素 b を「ただ一つ対応」させる規則 f が与えられたとき、f を A から B への写像と呼び、記号で

$$f: A \to B$$

と表す

このとき、集合 A を f の定義域と呼ぶ

また、次の集合を f の値域と呼ぶ

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

「集合」と「写像」というのはそれぞれ、「対象」と「それらの間の対応」ということであり、数学において基本的な概念である

像と逆像

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p52〜55

像　写像 f により、A の要素 a が B の要素 b に対応しているとき、「b は a の f による像である」あるいは「f により a は b に写る」といい、

$$f(a) = b$$
$$f : a \mapsto b$$
$$f : A \to B; a \mapsto b$$

などと書く

集合の言葉で述べると、次のようにも定義できる

像と逆像　写像 $f\colon A \to B$ があるとき、A の部分集合 A' に対して、

$$f(A') = \{f(a) \mid a \in A'\}$$

とおき、$f(A')$ を A' の f による像と呼ぶ

また、B の部分集合 B' に対して、

$$f^{-1}(B') = \{a \mid f(a) \in B'\}$$

とおき、$f^{-1}(B')$ を B' の f による逆像と呼ぶ

値域は、定義域 A の像 $f(A)$ のことにほかならない

像と逆像の性質　写像 $f\colon A \to B$ があるとき、A の部分集合 A_1, A_2 と B の部分集合 B_1, B_2 に対して、次が成り立つ

- $A_1 \subset A_2 \implies f(A_1) \subset f(A_2)$
- $B_1 \subset B_2 \implies f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

像と逆像の性質　写像 $f\colon A \to B$ があるとき、A の部分集合 A_1, A_2 と B の部分集合 B_1, B_2 に対して、次が成り立つ

- $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

恒等写像

「何も変えない写像」は恒等写像と呼ばれる

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p55〜56

恒等写像　集合 A に対して、A の要素 a を同じ要素 a に対応させる、A から A への写像

$$A \to A; a \mapsto a$$

を A 上の恒等写像といい、I_A や Id_A、あるいは単に Id と書く

合成写像

「2 つの操作を続けて行う」ことは、写像の合成として定義される

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p55〜56

合成写像　2 つの写像

$$f\colon A \to B$$
$$g\colon B \to C$$

が与えられたとき、A の要素 a に対して、C の要素 $g(f(a))$ を対応させる、集合 A から集合 C への写像のことを f と g の合成写像と呼び、記号で $g \circ f$ と書く

すなわち

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

である

単射

単射　写像 $f\colon A \to B$ に対して、f が単射であるとは、A の任意の要素 a, a' に対して

$$f(a) = f(a') \implies a = a'$$

が成り立つことをいう

この主張の対偶

$$a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$$

を考えれば、単射であるということは、「異なる要素が f によって同じ要素に対応することはない」ということにほかならない

全射

全射　写像 $f\colon A \to B$ に対して、f が全射であるとは、

$$f(A) = B$$

すなわち

$$\forall b \in B, \exists a \in A\colon f(a) = b$$

が成り立つことをいう

言い換えると、B への写像 f が全射であるとは、B の要素に「対応していないものがない」ということ

全単射

全単射　集合 A から集合 B への写像 f が単射かつ全射であるときは、全単射であるという

これは、写像 f により、集合 A の要素と集合 B の要素が「一対一に対応している」ことにほかならない

数学では、数学的構造を保つ写像が重要であり、特に、構造を保つ全単射写像のことは同型写像と呼ぶ

逆写像

逆写像　写像 $f\colon A \to B$ が全単射であるとき、対応が一対一であるので、逆向きの対応、すなわち、B から A への対応を考えることができる

この対応により定義される写像を f の逆写像と呼び、記号で f^{-1} と書く

単射と全射の双対性

左逆写像　写像 $f\colon A \to B$ に対して、写像 $g\colon B \to A$ が存在して、

$$g \circ f = I_A$$

を満たすとき、g は f の左逆写像であるという

右逆写像　写像 $f\colon A \to B$ に対して、写像 $g\colon B \to A$ が存在して、

$$f \circ g = I_B$$

を満たすとき、g は f の右逆写像であるという

全単射の特徴づけ　写像 $f\colon A \to B$ に対して、次の 2 つは同値になる

1. f は全単射である

2. f の左逆写像であり、右逆写像でもある写像が存在する

「逆写像」という観点からみることにより、「単射」と「全射」は双対的な概念であることがわかる

単射の特徴づけ　写像 $f\colon A \to B$ に対して、次の 2 つは同値になる

1. f は単射である
2. f の左逆写像が存在する

全射の特徴づけ　写像 $f\colon A \to B$ に対して、次の 2 つは同値になる

1. f は全射である
2. f の右逆写像が存在する

関数

関数　写像 $f\colon A \to B$ に対して、集合 B が数の集合のとき、写像 f を関数と呼ぶ

関数 $y = f(x)$ は、

- 「関数」としてみれば、「x を入力すると y が出力される」

- 「写像」としてみれば、「x に対して y を対応させる」

関数の単射と全射

関数が単射であるとは、「同じ値を取るものがない」ということ

たとえば、単調増加関数と単調減少関数は単射

連続関数 $f(x)$ が単射であるのは、グラフに山や谷がないとき

関数が全射であるとは、関数 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ への写像と見なしたとき、y 軸上に対応する x がない点がないということ