

関数の局所的な様子を見る

簡単な関数のグラフは拡大していくと急に様子が変わったりせず、むしろ、だんだん安定したものになると考えられる

局所的な部分を拡大すると安定した姿になるとき、その様子を数学的にとらえる概念が微分

ものによっては、拡大するとどんどん見え方が変わるものもある

拡大を何度繰り返しても同じ複雑さを保つ数学的構造（フラクタル）も自然界には現れる

拡大すれば何でも簡単になるわけではないが、微分では、拡大したとき安定していく「素直」なものを主な対象とする

つまり、微分は局所を分析するのに強力な手法だが、万能ではない

微分の定義

関数は変化の法則性をとらえる数学的言語

数 x に対して数 $f(x)$ が定まるとき、 $f(x)$ を変数 x の関数という

座標 $(x, f(x))$ を xy 平面でプロットした曲線を関数 $f(x)$ のグラフという

これは、 x 座標の点 x における高さが $f(x)$ となる曲線

この曲線の局所的な様子を見るのに、変数 x を $x + h$ に動かしてみる

そうすると、関数の値は $f(x)$ から $f(x + h)$ に変わる

「素直」な関数のグラフをどんどん拡大すると、拡大部分はだんだん直線のように見えるだろう、と考えられる

h が小さいとき、斜めの曲線がほぼ一定の傾きの直線に見えるというのは、関数の値の変化量 $f(x + h) - f(x)$ が h にほぼ正比例すること

式で表すと、 x から $x + h$ の区間のグラフを直線とみなしたときの勾配

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

は、 h が 0 に近づくとある 1 つの数に近づくと、すなわち、収束するはずである

* * *

■定義 h を 0 に近づけると、 $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ がある数に収束するとき、 $f(x)$ は x において微分可能であるという

このとき、極限値を

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

と書き、 $f(x)$ の微分または微分係数（微係数）という

* * *

定数関数の微分 「収束する」ことを「限りなく近づく」と言うこともある

日常的な言葉だと「限りなく近づく」には「その値に達していない」というニュアンスを感じるが、数学では、最初からずっと同じ値のときも「収束する」場合に含める

$f(x)$ が x の値によらないとき、 $f(x)$ を定数関数という

このときは h がどんな数でも $f(x+h) - f(x) = 0$ となるので、定数関数の微分は 0 である

* * *

微分係数が定まらない例

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が収束しない状況の例として、 $y = |x|$ を考える

$f(x) = |x|$ の場合、 $x = 0$ で

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を計算しようとする、

$h > 0$ のときは

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$h < 0$ のときは

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

となり、 h を正から 0 に近づけると、負から 0 に近づけると、 $\frac{f(h) - f(0)}{h}$ の極限の値が異なってしまうので、微分係数 $f'(0)$ が定まらない

* * *

■定理 $a < x < b$ で定義された、微分可能な関数 $f(x)$ が $x = c$ で最大値または最小値をとるならば、 $f'(c) = 0$ である

* * *

$f'(c)$ が最大値となる場合の証明

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

において、 $f(c)$ が最大値であることから、

$$f(c) \geq f(c+h)$$

$$f(c+h) - f(c) \leq 0$$

したがって、 $h > 0$ のときは、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

となり、 h を正の側から 0 に近づけた極限值として $f'(c) \leq 0$ が成り立つ

一方、 $h < 0$ のときは、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

となり、 h を負の側から 0 に近づけた極限值として $f'(c) \geq 0$ が成り立つ

$f'(c) \leq 0$ かつ $f'(c) \geq 0$ なので、 $f'(c) = 0$ が導かれた □

* * *

$f'(c)$ が最小値となる場合の証明 $f'(c)$ が最大値となる場合と同様に示される □

導関数

x を止めて考えると、 $f(x)$ の微分は 1 つの数

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

また別の視点として、

- x に数を与えると、何か 1 個、数が出てくる
- また別の x に対しては、別の数が出る

そう思うと、 x から $\frac{df}{dx}(x)$ への対応は 1 つの関数を与えていると考えることができる

このように、 $\frac{df}{dx}(x)$ を x の関数と見たとき、それを $f(x)$ の導関数という

* * *

「微分」と「導関数」は視点の違いで使い分けられる言葉

- x を止めて $\frac{df}{dx}(x)$ という 1 個の数（微分係数）に注目するのか
- x を変数と思って $\frac{df}{dx}(x)$ を関数とみなす（導関数として扱う）のか

後者の立場に立って、 $\frac{df}{dx}(x)$ を関数だと思えば、さらに微分を考えることができる

* * *

微分できないからといってそこで終わりではない

たとえば、関数概念を拡張した超関数の理論は、
極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が存在しない場合にも、より広く「微分」という概念をとらえる枠組みを与えるもの

単項式 x^n の微分

$f(x+h) = (x+h)^n$ の二項展開

$$f(x+h) = x^n + nx^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

を用いると、

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= (x+h)^n - x^n \\ &= x^n + nx^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 \\ &\quad + \cdots + h^n - x^n \\ &= nx^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + h^{n-1} \end{aligned}$$

上の式変形で、最初の x^n は最後の $-x^n$ と相殺されている

両辺を h で割ると、

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{nx^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + h^{n-1}}{h} \\ &= nx^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \end{aligned}$$

h が 0 に近づくと、

- h に無関係な最初の項 nx^{n-1} はそのまま残る
- 次の h の項は 0 に近づく
- その後の h^2, h^3, \dots, h^{n-1} の項はさらに速く 0 に近づく

というわけで、 h を 0 に近づけると nx^{n-1} に収束し、

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

が成り立つ

微分しても変わらない不思議な関数

この式をぼんやりと眺めていると、

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

- 左辺における $\frac{d}{dx}$ という記号に呼応して、右辺では n が飛び出すというふうにも見える
- 左辺では x の n 乗だったものが、右辺では $n-1$ 乗になっている

* * *

x^n を n の階乗で割った $\frac{x^n}{n!}$ という関数を考える

この関数を微分すると、 $\frac{1}{n!}$ は微分の外に出せる

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^n}{n!} \right) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} x^n \right) = \frac{nx^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

この式では、左辺と右辺で似た形が現れている
文字は左辺の n から右辺の $n-1$ に化けるが、形は同じ

n に具体的な数を入れて確かめてみる

- $n=0$ のとき、 $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^0}{0!} \right) = 0$
- $n=1$ のとき、 $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^1}{1!} \right) = \frac{x^0}{0!}$

- $n = 2$ のとき、 $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2!} \right) = \frac{x^1}{1!}$
- $n = 3$ のとき、 $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3!} \right) = \frac{x^2}{2!}$
- $n = 4$ のとき、 $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^4}{4!} \right) = \frac{x^3}{3!}$
- $n = 5$ のとき、 $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^5}{5!} \right) = \frac{x^4}{4!}$

微分すると斜め右下にまったく同じ形の式が現れるというパターンが続く

上のリストでは $n = 5$ で止めているが、たとえば $n = 100$ までいっても同じパターンが続く

そこで、 $\frac{x^n}{n!}$ を $n = 0$ から順に全部足すことを考え、それを $f(x)$ とおく

$$f(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 0 + \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

下の式は 1 個右にずれているので、途中で打ち切れば 1 個足りなくなるが、無限に足すと、上の式と下の式はぴったり一致している

したがって、

$$\frac{d}{dx} f(x) = f(x)$$

が成り立つことがわかる

つまり、関数 $f(x)$ は微分したものが自分自身になっている！

いま無限級数として定義した関数 $f(x)$ を何通りかの記法で表しておく

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

後にこの関数は、**指数関数**として e^x と書くことになる

ネイピアの数

次の関数に $x = 0$ と $x = 1$ を代入してみる

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

* * *

$x = 0$ を代入すると 最初の 1 だけが残る、

$$f(0) = 1$$

* * *

$x = 1$ を代入すると 1 を何乗しても 1 であるから、

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

この $f(1)$ の数値はどのくらいになるだろうか？

1. 第 1 項は 1
2. 第 2 項も 1
3. 第 3 項は 0.5
4. 次は前の項を 3 で割るわけだから 0.166...
5. 次はさらに 4 で割るから 0.041...
6. 次はさらにそれを 5 で割って 0.008...

ここまでの 6 項の和で 2.716... となる

加える項は急速に 0 に近づく

項が 100 個くらいまで進むと、次に加える $\frac{1}{100!}$ は小数点以下に 0 が 150 個以上並ぶくらい小さな数になる ($10^{152} < 100! < 10^{164}$ という不等式より)

このように、無限級数 $f(1)$ は収束がとても速く、

$$f(1) = 2.71828\dots$$

という数になる

* * *

■定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

証明のスケッチ 二項展開を用いて、

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

ここで、 $k = 2$ 以降の各項は次のように展開する

$$\begin{aligned} \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} &= \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{1}{n^3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} \\ &= \frac{1}{3!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \\ &= \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \end{aligned}$$

n が大きくなると $\frac{1}{n}$ は 0 に近づくので、 $1 - \frac{1}{n}$ は 1 に近づき、

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

となる □