第 1 章

直和分解と不変部分空間

部分空間の共通部分

与えられた部分空間から、新しく部分空間を作ることができる

⚓ **線形部分空間の共通部分は部分空間**　U, W を体 K 上の V の部分空間とするとき、共通部分 $U \cap W$ は V の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U \cap W$ とすると、共通部分の定義より、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ はどちらも U と W の両方に属していることになる

つまり、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U$ かつ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ である

U も W も部分空間なので、部分空間の定義より、

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in U$$
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ が U と W の両方に属していることから、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は $U \cap W$ に属する

よって、$U \cap W$ は和について閉じている ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in U \cap W$ と $c \in K$ をとる

共通部分の定義より、$\boldsymbol{a}$ は U と W の両方に属しているので、部分空間の定義より

$$c\boldsymbol{a} \in U$$
$$c\boldsymbol{a} \in W$$

よって、$c\boldsymbol{a}$ は $U \cap W$ に属するため、$U \cap W$ はスカラー倍について閉じている ■

部分空間の和

線形部分空間の和は部分空間 U, W を体 K 上の V の部分空間とするとき、

和空間

$$U + W := \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}$$

は V の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in U,\ \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in W$ とする

U と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in U, \quad \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \in W$$

一方、和空間の定義より、$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2$ はそれぞれ $U + W$ の元である

これらの元の和をとったときに、その和も $U + W$ に属していれば、和空間は

和について閉じているといえる

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) &= (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) \\ &\in U + W\end{aligned}$$

上式で、和空間は和について閉じていることが示された ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in U$, $\boldsymbol{b} \in W$ と $c \in K$ をとる

U と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$c\boldsymbol{a} \in U$$
$$c\boldsymbol{b} \in W$$

一方、和空間の定義より、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は $U + W$ の元である

この元をスカラー倍したときに、そのスカラー倍も $U + W$ に属していれば、

和空間はスカラー倍について閉じているといえる

$$\begin{aligned}c(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= c\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b} \\ &\in U + W\end{aligned}$$

上式で、和空間はスカラー倍について閉じていることが示された ■

3 つ以上の部分空間の和も同様に考えて、一般に和空間は次のように定義される

和空間　線形空間 V と、その部分空間 $V_1, \ldots, V_k$ が与えられたときに、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k \quad (\boldsymbol{v}_i \in V_i, i = 1, \ldots, k)$$

と表されるベクトル $\boldsymbol{v}$ 全体がなす集合を $V_1, \ldots, V_k$ の和空間といい、

$$\sum_{i=1}^{k} V_i$$

と書く

和空間を張るベクトル

部分空間を生成するベクトルを用いて、部分空間の和を表せる

部分空間の和と生成ベクトル K^n の 2 つの部分空間 $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle$ と $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$ に対して、和空間 $U + W$ は

$$U + W = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

となる

証明

和空間 $U + W$ は

$$U + W = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{u} \in U,\ \boldsymbol{w} \in W\}$$

と定義される

また、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ の張る部分空間は

$$H = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

である

これらが等しいことを示せばよい

$U + W \subseteq H$

任意の $\boldsymbol{x} \in U + W$ に対し、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$（$\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$）と書ける

すなわち、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{u}_m && (a_i \in K) \\ \boldsymbol{w} &= b_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + b_k\boldsymbol{w}_k && (b_j \in K) \end{aligned}$$

よって、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j \in H$$

$H \subseteq U + W$

任意の $\boldsymbol{x} \in H$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j \boldsymbol{w}_j$$

と書ける

ここで

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{u}_i \in U$$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{k} b_j \boldsymbol{w}_j \in W$$

とすれば、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in U + W$$

以上より、$U + W \subseteq H$ と $H \subseteq U + W$ が成り立つので、$U + W = H$ が示された ■

和空間の包含関係

⚓ **和空間における部分空間の和集合の包含**　和空間は、和集合を部分集合として包含する

すなわち、U, W を V の部分空間とするとき、

$$U + W \supset U \cup W$$

が成り立つ

証明

部分空間はいずれも零ベクトルを含むので、たとえば、$U = \{\mathbf{0}\}$ の場合、

$$U + W \supset W$$

同様に、

$$U + W \supset U$$

よって、$U + W$ は U または W を包含することがわかる

すなわち、

$$U + W \supset U \cup W$$

が成り立つ ■

和空間の最小包含性 U, W を V の部分空間とする

和空間 $U + W$ は、U と W を含む部分空間のうち、最小のものである

証明

V の任意の部分空間のうち、U と W の両方を包含するもの V' を考える

このとき、部分空間は和に閉じているため、V' は $U + W$ も包含する

$$V' \supset U + W$$

よって、V' の任意性から、$U + W$ は U と W を含む部分空間のうち、最小のものとなる ■

このように、和空間 $U + W$ は、U や W を部分空間として含むが、U や W より真に大きい（U, W を真部分集合として含む）とは限らない

別の角度からいうと、

$$V = W_1 + W_2$$

という関係があるだけで、「V が W_1 と W_2 の和に分解された」というのは適当ではない

和空間が持つこの欠陥を補うために、和空間の概念をより精密化したものが、次に述べる直和である

直和分解

直和分解　線形空間 V の部分集合 W_1, W_2 に対して、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ によって

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$$

と一意的に表されるとき、V は W_1 と W_2 の直和である（直和に分解される）といい、

$$V = W_1 \oplus W_2$$

と書く

この定義は、次のように言い換えることができる

直和分解の同値条件　線形空間 V の部分集合 W_1, W_2 に対して $V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つことと、

i. $V = W_1 + W_2$
ii. $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$

の両方が成り立つことは同値である

証明

(i), (ii) $\implies V = W_1 \oplus W_2$

$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1' \in W_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2' \in W_2$ とする

仮定 (i) と和空間の定義より、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1' + \boldsymbol{w}_2'$$

この等式は、移項によって次のように変形できる

$$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2$$

部分空間は和に閉じているため、左辺は W_1 に、右辺は W_2 に属する

よって、このベクトルは $W_1 \cap W_2$ に属する

仮定 (ii) より、$W_1 \cap W_2$ の元は零ベクトルであるので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

したがって、

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_1', \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_2'$$

となり、$\boldsymbol{v}$ の表現の一意性が示された ■

$V = W_1 \oplus W_2 \implies$ (i), (ii)

和空間の定義をふまえると、(i) は直和分解の定義に含まれる

(ii) を示すため、$\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ とする

$\boldsymbol{v}$ は零ベクトルを用いて、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{v}$$

と表せるが、直和分解の定義より、$\boldsymbol{v}$ の表現は一意的であるので、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

を得る

よって、$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ ■

直和分解の一意性を表す条件

3 つ以上の部分空間による直和を考えるにあたって、直和分解の定義に含まれていた「一意性」を表す条件を定式化する

部分空間の和における表現の一意性　和空間 $\sum_{i=1}^{k} V_i$ の元 $\boldsymbol{v}$ を、部分空間 $V_1, \ldots, V_k$ の元 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ の和として

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{v}_i \in V_i)$$

と書くとする

このとき、次の条件が成り立てば、和に使われる $\boldsymbol{v}_i$ は $\boldsymbol{v}$ により一意的に定まる

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

証明

仮に、$\boldsymbol{v}$ が 2 通りの和で表せるとする

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{v}'_i \quad (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_i \in V_i)$$

このとき、

$$\sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}'_i) = \boldsymbol{0}$$

となるが、ここで $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}'_i$ は V_i に属する

そこで、$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}'_i \in V_i$ とおき、

$$\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0}$$

という条件を満たすとすると、$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0}$ より、

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

が導かれる

したがって、$\boldsymbol{v}$ の和に使われる $\boldsymbol{v}_i$ は一意的に定まる　■

この一意性の条件を用いて、複数の部分空間による直和を次のように定義する

直和　線形空間 V と、その部分空間 $V_1, \ldots, V_k$ が与えられたとき、$\boldsymbol{v}_i \in V_i$, $\boldsymbol{v} \in \sum_{i=1}^{k} V_i$ に対して、

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \implies \boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

が成り立つとき、$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} V_i$ は V の**直和**であるといい、

$$\bigoplus_{i=1}^{k} V_i$$

と書く

和空間と直和の次元

和空間の次元　K^n の部分空間 V, W に対して、

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

が成り立つ

証明

$\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ とする

$V \cap W$ の基底 $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ をとる

これを基底の延長の定理に基づいて、V の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}\}$$

に延長する

同様に、$\mathcal{V}$ を W の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}\}$$

に延長する

このとき、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}$ が $V+W$ の基底になることを示す

$V+W$ を生成すること

$\boldsymbol{v} \in V,\ \boldsymbol{w} \in W$ とすると、それぞれ基底の線形結合で表すことができる

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} a_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j \boldsymbol{v}_j$$
$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{d} c_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{k=1}^{m-d} d_k \boldsymbol{w}_k$$

$V+W$ の任意の元は、$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ と書けるので、

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{d} (a_i + c_i) \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j \boldsymbol{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} d_k \boldsymbol{w}_k$$

となり、$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}\}$ の線形結合で表せる ■

線型独立であること

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}$ が線型独立であることを示すために、次のような線形関係式を考える

$$\sum_{i=1}^{d} c_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} c_{d+j} \boldsymbol{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} c_{d+n-d+k} \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0}$$

ここで、$c_i \in K$ はスカラーである

この式を V と W の基底の線型結合として考えると、V の基底 $\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{v}_j$ に関する部分と W の基底 $\boldsymbol{u}_i,\ \boldsymbol{w}_k$ に関する部分がそれぞれ線形独立であるため、結局どの項においても $c_i = 0$ である必要がある

よって、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}$ は線型独立である ■

以上より、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}$ は $V + W$ の基底であることが示された

この基底をなすベクトルの個数（次元）について考えると、

$$\begin{aligned} \dim(V + W) &= d + (n - d) + (m - d) \\ &= n + m - d \end{aligned}$$

となる

ここで、$d = \dim(V \cap W)$ なので、

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

と書き換えられ、目的の式が得られた ■

直和分解に対して和空間の次元定理を適用すると、次のようにまとめられる

直和の次元 W_1, W_2 が V の部分空間であるとき、

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

が成り立つ

証明

直和分解の定義より $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であるので、

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$$

よって、和空間の次元の式から、$\dim(W_1 \cap W_2)$ が消えた形になる ■

また、和空間の次元定理の証明過程を、直和分解の場合で考えることで、次の定理が得られる

直和の基底　線形空間 V が部分空間 W_1, W_2 の直和に分解されることと、V の基底が W_1, W_2 の基底を合わせたものになることは同値である

証明

直和分解の場合、$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ であるため、和空間の次元定理の証明過程において、$W_1 \cap W_2$ の基底を考える必要がなくなる

よって、和空間の次元定理の証明と同様にして、W_1 の基底と W_2 の基底を合わせたものが V の基底になることが示される　■

不変部分空間

V 上の線形変換 f について、「変換 f で写しても変わらない」という性質を考える

f 不変　f を線形空間 V の線形変換とする

V の部分空間 W に対して、

$$f(W) \subset W$$

すなわち、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in W$$

が成り立つとき、W は f 不変な部分空間であるという

また、$V = \mathbb{R}^n$ で、f が正方行列 A によって定まっているときは、f 不変な部分空間 W を A 不変な部分空間ともいう

写像の制限と不変部分空間

不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現　V を n 次元線形空間とし、線形変換 $f\colon V \to V$ を考える

このとき、V のある部分空間 W が f 不変ならば、V の適当な基底について、f は

$$\begin{pmatrix} * & * \\ O & * \end{pmatrix} \text{または} \begin{pmatrix} * & O \\ * & * \end{pmatrix}$$

という形の行列で表すことができる

証明

$\dim(W) = r$ とし、W の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ を延長して V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ をとる

このとき、表現行列の構成法より、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

とおける

ここで、W は f 不変であることは、$1 \leq j \leq r$ の範囲では $f(\boldsymbol{v}_j) \in W$ であることを意味する

W の元 $f(\boldsymbol{v}_j)$ は、W の基底だけを用いて表現できるので、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

すなわち、もともとの $f(\boldsymbol{v}_j)$ の式において、

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \quad (1 \leq j \leq r)$$

となっている

$\boldsymbol{v}_i$ は基底なので線型独立であり、したがって、

$$a_{ij} = 0 \quad (1 \leq j \leq r,\ r+1 \leq i \leq n)$$

が成り立つ

この条件より、f の表現行列 (a_{ij}) は、

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad r \quad & \quad n-r \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \quad * \quad & \quad * \quad \\ \hline \quad O \quad & \quad * \quad \end{array}\right) & \begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \end{array}$$

というような形になる

また、V の基底として、順序を変えた $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を取ることもできる

この場合は、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

とおくと、$r+1 \leq j \leq n$ の範囲（V の基底の後半部分）で

$$\sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

となるので、すなわち、

$$a_{ij} = 0 \quad (r+1 \leq j \leq n,\ 1 \leq i \leq r)$$

よって、f の表現行列 (a_{ij}) は、

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad n-r \quad & \quad r \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \quad * \quad & \quad O \quad \\ \hline \quad * \quad & \quad * \quad \end{array}\right) & \begin{array}{l} n-r \\ r \end{array} \end{array}$$

という形になる

以上より、2 通りの f の表現行列の形が得られた ■

V の基底を $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n$ ととった場合、$f(\boldsymbol{v}_j) \in W$ は

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

だけで表現できた

この $1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq r$ の部分は、f の表現行列

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad r \quad & \quad n-r \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{c} r \\ n-r \end{array} \end{array}$$

の、A_{11} の部分に対応する

つまり、この行列 A_{11} は、$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ で張られる V の部分空間 W から W への線形写像 f' を、基底 $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ について表現する行列になっている

f' は、f の定義域を W に制限したものになっているが、W の元に限定して考える限り、実質的には f と区別がないものである

この意味で、写像 f' を、写像 f の W への制限と呼び、$f|_W$ と表記する

写像の制限　写像 $f\colon X \to Y$ において、X のある部分集合 S が与えられたとき、定義域を S に限定したものを f の S に対する制限といい、

$$f|_S\colon S \to Y$$

と表す

同様に、V の基底を $\boldsymbol{v}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ ととった場合、$f(\boldsymbol{v}_j) \in W$ は

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

だけで表現できた

この $r+1 \leq i \leq n,\ r+1 \leq j \leq n$ の部分は、f の表現行列

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} n-r & r \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & O \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ n-r \\ r \end{array}$$

の、A_{22} の部分に対応する

つまり、この場合は、A_{22} が変換 f の W への制限 $f|_W$ を表現する行列になっている

不変部分空間への直和分解

不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現の証明では、W の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ を延長したものを V の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とした

このとき、

$$W' = \langle \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

とおくと、V の基底が W, W' の基底を合わせたものになっているため、直和の基底に関する定理より、

$$V = W \oplus W'$$

となる

ここで、もし W' も f 不変であれば、右上の A_{12} も零行列になって、表現行列は

$$A = (a_{ij}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & O \\ \hline O & A_{22} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ r \\ n-r \end{array}$$

というブロック対角型になる

不変部分空間への直和分解　線形空間 V と、V 上の線形変換 f に対し、V が f 不変な部分空間 W_1 と W_2 の直和に分解することができれば、すなわち、

i. $V = W_1 \oplus W_2$

ii. W_1, W_2 は f 不変な V の部分空間

となる W_1, W_2 が存在すれば、適当な V の基底について、f は次のような形の行列で表せる

$$\begin{array}{ccc} \dim(W_1) & \dim(W_2) & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} * & O \\ O & * \end{pmatrix}} & \begin{array}{c}\dim(W_1)\\ \dim(W_2)\end{array} \end{array}$$

または

$$\begin{array}{ccc} \dim(W_2) & \dim(W_1) & \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} * & O \\ O & * \end{pmatrix}} & \begin{array}{c}\dim(W_2)\\ \dim(W_1)\end{array} \end{array}$$

証明

W_1 の基底、W_2 の基底をこの順に並べるか、その反対の順に並べて、V の基底を構成することで、不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現の証明と同様に示される ■

さらに、V をより細かい部分空間の直和に分解できる場合には、次のようになる

複数の不変部分空間への直和分解　線形空間 V と、V 上の線形変換 f について、

i. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$
ii. 各部分空間 W_i は f 不変な V の部分空間

であるならば、適当な V の基底に対し、f は次のような形の行列で表せる

$$\begin{pmatrix} \boxed{*} & & & O \\ & \boxed{*} & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boxed{*} \end{pmatrix}$$

対角線上の各正方形の大きさは、各部分空間 W_i の次元に対応する

そこで、以上の議論を究極にまで押し進めると、次の定理になる

⚓ **一次元部分空間への直和分解**　n 次元部分空間 V が、n 個の f 不変の 1 次元部分空間の直和に分解できるとき、すなわち、

i. $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$
ii. $W_i \; (i = 1, 2, \ldots, n)$ は f 不変な 1 次元部分空間

となるときは、f は次のような対角行列で表せる

$$\begin{pmatrix} * & & & O \\ & * & & \\ & & \ddots & \\ O & & & * \end{pmatrix}$$

一次元不変部分空間

W を一次元部分空間とすると、これは基底 $\boldsymbol{w} \neq \mathbf{0}$ で張られる空間であるので、

$$W = \langle \boldsymbol{w} \rangle = \{ \alpha \boldsymbol{w} \mid \alpha \in K \}$$

この一次元部分空間 W が f 不変であるとは、定義より、

$$\forall \boldsymbol{w} \in W \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in W$$

であり、これで W の元は $\alpha \boldsymbol{w}$ とも $f(\boldsymbol{w})$ とも表せることになるので、

$$f(\boldsymbol{w}) = \alpha \boldsymbol{w} \quad (\alpha \in K)$$

がいえる

以上をふまえて、一次元部分空間への直和分解という定理をより具体的に整理してみる

$\dim(V) = n$ とすると、V 上の線形変換 f の表現行列 A を構成する式は、

$$(f(\boldsymbol{w}_1), \ldots, f(\boldsymbol{w}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n)A$$

となるが、ここで、

$$(f(\boldsymbol{w}_1), \ldots, f(\boldsymbol{w}_n)) = (\alpha_1 \boldsymbol{w}_1, \ldots, \alpha_n \boldsymbol{w}_n)$$

であるので、

$$(f(\boldsymbol{w}_1), \ldots, f(\boldsymbol{w}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられる

したがって、f は基底 $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ について、次の対角行列で表される

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ここで現れたスカラー α_i やベクトル $\boldsymbol{w}_i$ と、線形写像 f との関係が、固有値・固有ベクトルと行列の対角化という話題に発展する