手がかりが多すぎる場合

今度は、$\boldsymbol{y}$ の方が $\boldsymbol{x}$ より次元が大きい、すなわち $m > n$ の場合を考える

このとき、表現行列 A は縦長の行列となる

ref: プログラミングのための線形代数 p114〜115

$$
\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
$$

$m > n$ の場合は、「知りたい量はたった n 個しかないのに、手がかりが m 個もある」という状況になっている

この場合、手がかりどうしが矛盾することもある

$m > n$ の場合の線形写像の写し方

$m > n$ のとき、A は、元より次元の高い空間に写す線形写像を表す

そのため、写り先の空間すべてをカバーすることはできない

はみ出した $\boldsymbol{y}$ については、

> そこに写ってきてくれる $\boldsymbol{x}$ が存在しない

ことになる

現実の応用では、ノイズがのることで、はみ出した $\boldsymbol{y}$ が観測されることがある

そうなると、「手がかり $y_1, \ldots, y_m$ すべてに符号する $\boldsymbol{x}$ は存在しない」ということになってしまう

線形写像の像

与えられた A に対して、$\boldsymbol{x}$ をいろいろ動かしたときに A で写り得る $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ の集合を A の像といい、$\mathrm{Im}\, A$ で表す

ref: プログラミングのための線形代数 p115
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p79〜84

別の言い方をすると、$\mathrm{Im}\, A$ は、元の空間全体を A で写した領域である

$\mathrm{Im}\, A$ 上にない $\boldsymbol{y}$ については、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ となるような $\boldsymbol{x}$ は存在しない

$\mathrm{Im}\, f$ の定義

A が線形写像 f の表現行列であるとすると、$\mathrm{Im}\, f$ を次のように定義できる

線形写像の像　線形写像 $f\colon V \to W$ に対して、f による V の像 $f(V)$ を、線形写像 f の像や像空間といい、$\mathrm{Im}(f)$ と表記する

$$\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\} \subset W$$