

\mathbb{R}^n 上の内積とノルム

\mathbb{R}^n にはベクトル演算という構造があるわけだが、**内積**という付加的な構造を定める

ref: 行列と行列式の基礎 p76

🎓 \mathbb{R}^n 上の内積 $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^n, \mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

を \mathbb{R}^n 上の**内積**と呼ぶ

特に、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$$

なので、

$$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \geq 0$$


が定義できる

🎓 \mathbb{R}^n 上のノルム \mathbb{R}^n 上のベクトル \mathbf{a} の**長さ** (**ノルム**) を次のように定義する

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

\mathbb{R}^n 上の内積の性質


ref: 行列と行列式の基礎 p76

 \mathbb{R}^n 上の内積の双線形性 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ に対して、以下が成立する

- i. $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$
- ii. $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- iii. $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)$
- iv. $(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

 証明

行列のかけ算と和に関する分配法則、行列のスカラー倍についての性質から従う ■

 \mathbb{R}^n 上の内積の対称性 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、次が成り立つ


$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

 証明

実数同士の乗算は可換であることから、 \mathbb{R}^n 上の内積の定義により

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \sum_{i=1}^n v_i u_i = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

となり、明らかに成り立つ ■

 \mathbb{R}^n 上の内積の正値性 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$$

であり、 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ のときに限り、等号が成立する

証明

内積の定義より、

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n u_i^2 \geq 0$$


である

ここで現れた u_i^2 は、 u_i が 0 のときに限り 0 になるので、 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ のときに限り、等号が成立する ■



\mathbb{R}^n 上の内積と直交

ref: 行列と行列式の基礎 p77

 \mathbb{R}^n 上の内積に対するコーシー・シュワルツの不等式
 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、次が成り立つ

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

証明

任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v}) \geq 0$$

が成り立つ

ここで、内積の双線形性を用いて左辺を展開すると、

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) - 2t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + t^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq 0 \\ \|\mathbf{u}\|^2 - 2t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + t^2\|\mathbf{v}\|^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

これは t についての 2 次式であり、判別式が 0 以下であることが

ら、次の不等式が成り立つ

$$\begin{aligned}(-2(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2 - 4\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 &\leq 0 \\ 4(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 &\leq 4\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\end{aligned}$$

よって、両辺を 4 で割ると

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

が得られる ■

これより、 \mathbf{u}, \mathbf{v} が 0 でないとき、

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

なので、

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を介して \mathbf{u}, \mathbf{v} のなす角を定義できる

🎓 \mathbb{R}^n 上のベクトルのなす角 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

により定まる θ を \mathbf{u}, \mathbf{v} のなす角という

$\cos \theta = 0$ は、幾何学的には \mathbf{u} と \mathbf{v} のなす角が直角であることを意味する

🎓 \mathbb{R}^n 上のベクトルの直交 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

が成り立つとき、 \mathbf{u} と \mathbf{v} は直交するといい、

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

と表記する



\mathbb{C}^n 上の内積

複素数 $z = a + bi$ に対して、

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$$

という式が成り立つ

このとき、 $a - bi$ を z の共役複素数といい、 \bar{z} と表記する

また、 $\sqrt{a^2 + b^2}$ は z の絶対値と呼ばれ、 $|z|$ と表記する

すなわち、冒頭の不等式は、

$$|z|^2 = z\bar{z} \geq 0$$

と書き換えられる

このことを利用して、 \mathbb{C}^n 上の内積は、次のように定義すると \mathbb{R}^n の場合の自然な拡張になる

 \mathbb{C}^n 上の内積（標準内積） $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^n, \mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^n \in$

\mathbb{C}^n に対して、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i$$

を \mathbb{C}^n 上の内積と定義する

この内積は標準内積、あるいは標準エルミート内積とも呼ばれる


このように定めることで、特に、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \geq 0$$

であるので、 \mathbb{R}^n の場合と同様に、ベクトルのノルムを定義できる



\mathbb{R}^n 上の内積で成り立つ性質の多くは、 \mathbb{C}^n 上の内積でも成り立つが、対称性に関しては注意が必要である


 \mathbb{C}^n 上の内積の対称性 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して、次が成り立つ

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$$

 証明

$\overline{\overline{z}} = z$ をふまえると、

$$\begin{aligned} \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} &= \overline{\sum_{i=1}^n v_i \overline{u_i}} \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{v_i \overline{u_i}} \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{v_i} u_i \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i} \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

となり、目的の式が示された 

複素数 $z = a + bi$ において、 $b = 0$ の場合、 z は実数である
このとき、 $a + 0i = a - 0i = a$ であるから、 z が実数の場合、

$$\overline{\overline{z}} = z$$

が成り立つ

よって、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ であるなら、 \mathbb{C}^n 上の内積の対称性の式は

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

と書き換えられ、これは \mathbb{R}^n 上の内積の対称性そのものである

つまり、 \mathbb{C}^n 上の内積の対称性は、 \mathbb{R}^n 上の内積の対称性も含んだ表現になっている