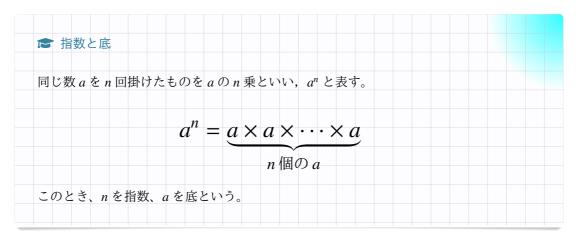
# Chapter 1

# 指数関数と対数関数

# 1.1 指数関数

## 1.1.1 同じ数のかけ算の指数による表記



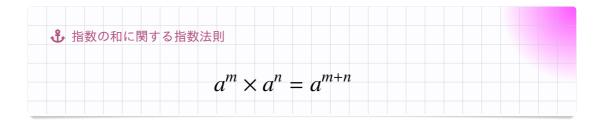
## 1.1.2 指数法則

指数を「かける回数」と捉えれば、いくつかの法則が当たり前に成り立つことがわかる。

#### 「かける回数」の和

例えば、a  $\epsilon$  m 回かけてから、続けて a  $\epsilon$  n 回かける式を書いてみると、a は m+n 個並ぶことになる。

$$\overbrace{a \times a \times a}^{a^3} \times \overbrace{a \times a}^{a^2} = \overbrace{a \times a \times a \times a \times a}^{a^5}$$



#### 「かける回数」の差

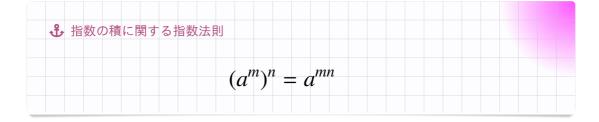
例えば、 $a \in m$ 回かけたものを、 $a \in n$ 回かけたもので割ると、m - n個のaの約分が発生する。

$$oldsymbol{3}$$
 指数の差に関する指数法則  $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$ 

#### 「かける回数」の積

例えば、[aem回かけたもの]emundedであると、<math>[aemunded]emundedであると、aemundedであるとである。

$$(a^2)^3 = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}_{a^6} \times \underbrace{a^2 \times a \times a \times a \times a}_{a^6}$$



## 1.1.3 指数の拡張と指数関数

底を固定して、指数を変化させる関数を考えたい。

指数部分に入れられる数を拡張したいが、このとき、どんな数を入れても指数法則が成り立つよ うにしたい。 1.1. 指数関数 3

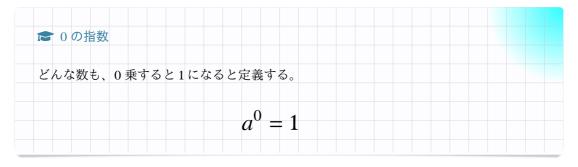
### 0の指数

指数法則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  において、m = 0 の場合を考える。

$$a^0 \times a^n = a^{0+n}$$

$$a^0 \times a^n = a^n$$

この式が成り立つためには、 $a^0$  は1である必要がある。



そもそも、指数法則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  は、「指数の足し算が底のかけ算に対応する」ということを表している。

- 「何もしない」足し算は+0
- 「何もしない」かけ算は ×1

なので、 $a^0 = 1$ は「何もしない」という観点で足し算とかけ算を対応づけたものといえる。

#### 負の指数

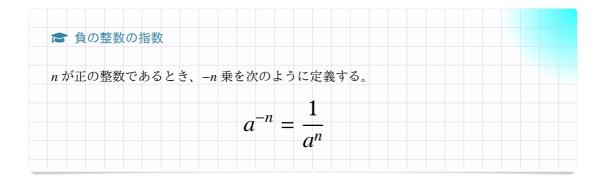
指数法則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  において、正の数 n を負の数 -n に置き換えたものを考える。

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

さらに、指数法則  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  も成り立っていてほしいので、

$$a^m \times a^{-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

この式は、 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$  とすれば、当たり前に成り立つものとなる。



#### 有理数の指数

指数法則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  において、指数 m,n を  $\frac{1}{2}$  に置き換えたものを考える。

$$a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a$$

 $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}$  は、 $(a^{\frac{1}{2}})^2$  とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{2}})^2 = a$$

つまり、 $a^{\frac{1}{2}}$ は、2乗するとaになる数(aの平方根)でなければならない。

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

同様に、 $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$  を考えてみると、

$$a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = a$$

 $a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{3}}$  は、 $(a^{\frac{1}{3}})^3$  とも書けるので、

$$(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$$

つまり、 $a^{\frac{1}{3}}$ は、3乗するとaになる数(aの3乗根)でなければならない。

$$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

このようにして、 $a^{\frac{1}{n}}$  は、n乗するとaになる数(aのn乗根)として定義すればよい。

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

1.1. 指数関数

5

さて、分子が1ではない場合はどうだろうか?  $(a^m)^n = a^{mn} \ \text{において}, \ m \ \epsilon \frac{m}{n} \ \text{に置き換えたものを考えると},$ 

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$$

となるので、 $a^{\frac{m}{n}}$  は、n 乗したら  $a^{m}$  になる数として定義すればよい。

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

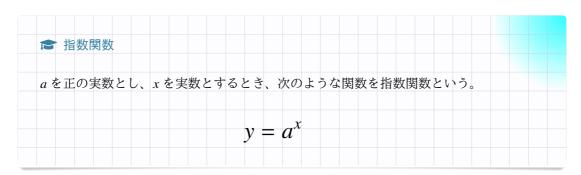
★ 有理数の指数	
m,n が整数で、n が正の整数であると	こき、 $\frac{m}{n}$ 乗を次のように定義する。
$a^{rac{m}{n}}$	$=\sqrt[n]{a^m}$

## 実数への拡張

有理数は無数にあるので、指数 x を有理数まで許容した関数  $y = a^x$  のグラフを書くと、十分に繋がった線になる。

指数が無理数の場合は、まるでグラフ上の点と点の間を埋めるように、有理数の列で近似してい くことで定義できる。

これで、xを実数とし、関数  $y = a^x$  を定義できる。



## 1.1.4 指数関数の底の変換

用途に応じて、使いやすい指数関数の底は異なる。

e: 微分積分学、複素数、確率論など

- 2:情報理論、コンピュータサイエンスなど
- 10:対数表、音声、振動、音響など

よって、これらの底を互いに変換したい場面もある。

指数の底を変えることは、指数の定数倍で実現できる。

例えば、底が4の指数関数 $4^x$ を、底が2の指数関数に変換したいとすると、

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$$

のように、指数部分を2倍することで、底を4から2へと変換できる。

当たり前だが、この変換は、 $4=2^2$ という関係のおかげで成り立っている。

「4は2の何乗か?」がすぐにわかるから、4から2への底の変換が簡単にできたのだ。

より一般に、 $a^x$  と  $b^X$  において、 $a = b^c$  という関係があるとする。

つまり、aはbのc乗だとわかっているなら、

$$a^x = (b^c)^x = b^{cx}$$

のように、底をaからbへと変換できる。

<b>北</b> 指	数関数の	底の変	奐							
指数を	定数倍。	けること	は、底	を変える	ことと	1同じ	操作に	なる。		
$a = b^c$	という関	目係があ	るなら、	次の変	換が原	<b></b> とり立	つ。			
				$a^{x}$	= 1	$\mathbf{c}^{CX}$				
				Ci						

ここで重要なのは、指数関数の底を変換するには、「a は b の何乗か?」がわかっている必要があるということだ。

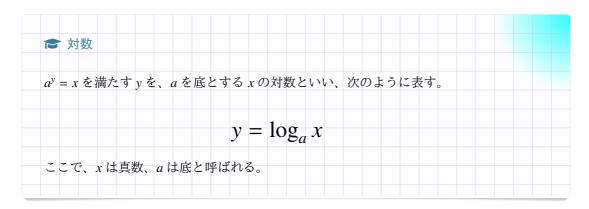
次章では、 $a = b^c$  となるような c を表す道具として、対数を導入する。

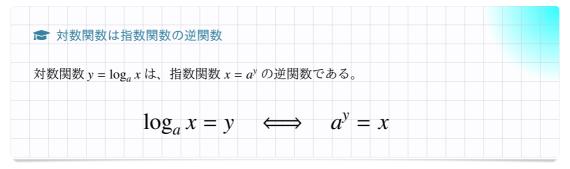
1.2. 対数関数 7

# 1.2 対数関数

### 1.2.1 対数:指数部分を関数で表す

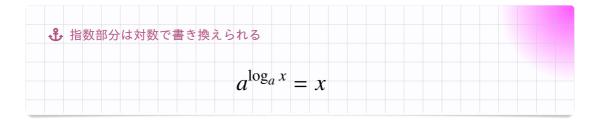
指数関数は、 $\lceil a \ e \ x \ mathred E \ matrred E \ mathred E \ matrred E \ mathred E \ matrred E \ matrre$ 





対数は、指数関数の指数部分を表す。

 $a^{y} = x$ の y に、 $y = \log_{a} x$  を代入することで、次のような式にまとめることもできる。



### 1.2.2 対数の性質

指数法則を対数に翻訳することで、対数の性質を導くことができる。

### 真数のかけ算は log の足し算

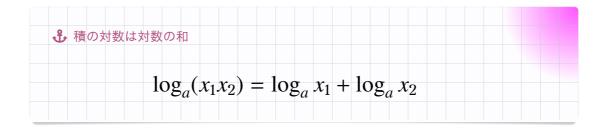
 $x_1 = a^m, x_2 = a^n$  として、指数法則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$  を考える。

$$x_1 x_2 = a^m \times a^n$$
$$= a^{m+n}$$

対数は指数部分を表すので、 $m+n = \log_a(x_1x_2)$  がいえる。

また、 $x_1 = a^m$  より  $m = \log_a x_1$ 、 $x_2 = a^n$  より  $n = \log_a x_2$  と表せるから、

$$m + n = \log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 x_2)$$



## 真数の割り算は log の引き算

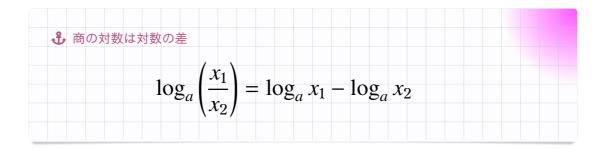
 $x_1 = a^m, x_2 = a^n$  として、指数法則  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$  を考える。

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a^m}{a^n}$$
$$= a^{m-n}$$

対数は指数部分を表すので、 $m-n=\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ がいえる。 また、 $x_1=a^m$  より  $m=\log_a x_1$ 、 $x_2=a^n$  より  $n=\log_a x_2$  と表せるから、

$$m - n = \log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

1.2. 対数関数 9



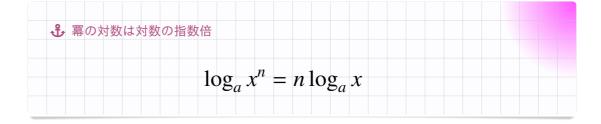
## 真数の冪乗は log の指数倍

 $x = a^m$  として、指数法則  $(a^m)^n = a^{mn}$  を考える。

$$x^n = (a^m)^n$$
$$= a^{mn}$$

対数は指数部分を表すので、 $mn = \log_a x^n$  がいえる。 また、 $x = a^m$  より  $m = \log_a x$  と表せるから、

$$mn = n \log_a x \log_a x^n$$



## 1.2.3 常用対数と桁数

Under construction...

常用対数 底を 10 にした対数関数を、常用対数と呼ぶ。
log<sub>10</sub> x

## 1.2.4 指数関数の底の変換:対数を用いた表現

指数関数の底aからbに変換するには、「aはbの何乗か?」がわかっている必要があった。

## REVIEW

 $a = b^c$  という関係があるなら、

$$a^x = b^{cx}$$

今では、 $a = b^c$  となるような c を、対数で表すことができる。

$$b^c = a \iff c = \log_b a$$

♣ 指数関数	の底の変換公式		
		$a^x = b^{(\log_b a)x}$	