第 1 章

直交補空間と部分空間の双対性

直交補空間

内積を導入したことで、ベクトルの長さや直交性が利用できるようになった。

直交性は、ベクトルだけでなく、部分空間に対しても拡張できる。

計量空間の部分空間に直交するベクトルの集合を、直交補空間という。

直交補空間　計量空間 V の部分空間 W に対し、W の直交補空間 $W^{\perp}$ を次のように定義する。

$$W^{\perp} := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \forall \boldsymbol{w} \in W, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0\}$$

直交補空間は V の部分空間

直交補空間もまた、計量空間の部分空間になっている。

直交補空間の部分空間性　計量空間 V の部分空間 W の直交補空間 $W^{\perp}$ は、計量空間 V の部分空間である。

証明

和について

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in W^\perp$ とすると、任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して、

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = 0 + 0 = 0$$

となるので、$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in W^\perp$ である。 ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in W^\perp$ とすると、任意のスカラー $c \in K$ と任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して、

$$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c \cdot 0 = 0$$

となるので、$c\boldsymbol{a} \in W^\perp$ である。 ■

直交補空間による直和分解

「直交補空間」という名前は、「補集合」と同様に、何らかの集合を補う集合であることを想起させる。

実際、直交補空間 $W^\perp$ は、もとの集合 W を補い、V 全体を構成するような性質を持つ。

直交補空間を用いた計量空間の分解　計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$V = W + W^\perp$$

証明

$W = \{\boldsymbol{o}\}$ の場合は、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{o}$ との内積は 0 になることから、$W^\perp$ は V 全体となる。

$$W^\perp = \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{o}) = 0\} = V$$

よって、

$$V = W + W^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\} + V = V$$

が成り立つ。

以降、$W \neq \{\boldsymbol{o}\}$ とする。

W の基底 $\{\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_k\}$ を 1 つとり、これに対してグラム・シュミットの直交化法を適用して、正規直交基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k\}$ を得る。

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ をとり、次のようにおく。

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$$

$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}_i$ の内積を計算すると、

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_i) &= \left(\boldsymbol{v} - \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j)\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_i\right) \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j)(\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_i) \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j)\delta_{ij} \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

このように、任意の $i = 1, \ldots, k$ に対して、$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}_i$ の内積が 0 になることから、$\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$ である。

一方、$\boldsymbol{u}$ の定義式を $\boldsymbol{v}$ を表す式として整理すると、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$$

となるが、$\boldsymbol{w}_i$ が W の正規直交基底であることから、

$$\sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$$

の部分は、W の任意の元を表す。

よって、V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ は、W の元と $W^{\perp}$ の元 $\boldsymbol{u}$ の和として表されるので、

$$V = W + W^{\perp}$$

が成り立つ。 ■

さらに、次の定理が成り立つことで、単なる空間の和ではなく、直和として分解できることがわかる。

直交補空間との交わり　計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$$

証明

$\boldsymbol{a} \in W \cap W^{\perp}$ とすると、$\boldsymbol{a} \in W$ かつ $\boldsymbol{a} \in W^{\perp}$ である。

$\boldsymbol{a} \in W^{\perp}$ より、$\boldsymbol{a} \in W$ に対しても内積が 0 になるので、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$$

ここで、内積の性質より、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 \geq 0$$

であり、等号が成立するのは、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ のときのみである。

よって、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ である。

零ベクトルは任意のベクトルと直交し（内積が 0 になり）、また任意の部分空間に属するので、明らかに $\boldsymbol{o} \in W \cap W^{\perp}$ である。

$\boldsymbol{a}$ は $W \cap W^{\perp}$ の任意の元であり、$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o} \in W \cap W^{\perp}$ であることがわかったので、

$$W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$$

がいえる。 ■

こうして、次の両方が成り立つことから、

i. $V = W + W^{\perp}$
ii. $W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{o}\}$

計量空間 V は部分空間 W とその直交補空間 $W^{\perp}$ の直和として分解できる。

よって、直和の次元公式より、次の定理が従う。

⚓ **直交補空間と次元**　計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$$

直交補空間の性質

直交補空間の直交補空間はもとの空間

⚓ **部分空間の双直交補と元空間の一致**　計量空間 V の部分空間 W に対して、次が成り立つ。

$$(W^{\perp})^{\perp} = W$$

証明

[Todo 1:]

行空間と核空間の直交

$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする。

このとき、A の第 i 行ベクトル $\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、次の線形汎関数 ϕ_i と同一視できる。

$$\phi_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$$

この行ベクトル $\phi_i \in {}^t\mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle \subset {}^t\mathbb{R}^n$ を、A の行空間と呼び、Row A と書く。

ここで、x_j はベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、j 番目の成分を返す座標関数である。そこで、

$$\begin{aligned} \phi_i(\boldsymbol{v}) &= a_{i1}x_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + a_{in}x_n(\boldsymbol{v}) \\ &= a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n \end{aligned}$$

とみると、ϕ_i は $\boldsymbol{v}$ に作用して、A の第 i 行ベクトルと $\boldsymbol{v}$ の内積を返すことがわかる。

すると、$\phi_i(\boldsymbol{v})$ を縦に並べたものは、$A\boldsymbol{v}$ に一致する。

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(\boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ \phi_m(\boldsymbol{v}) \end{pmatrix}$$

このとき、$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ となる場合は、

$$\phi_i(\boldsymbol{v}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

が成り立つことになる。

すなわち、A のすべての行ベクトルに対して、$\boldsymbol{v}$ との内積が 0 になる。

このことから、A の行空間に属するベクトルと、$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ の解空間 Ker A に属するベクトル $\boldsymbol{v}$ は、互いに直交することがわかる。

よって、次の関係が成り立つ。

$$\mathrm{Ker}\,A = (\mathrm{Row}\,A)^\perp$$

また、$(\mathrm{Row}\,A)^\perp$ の直交補空間は Row A に一致することから、両辺の直交補空間をとると、次も成り立つ。

$$(\mathrm{Ker}\,A)^\perp = \mathrm{Row}\,A$$

⚓ **核空間と行空間の直交関係**　A の核空間と、A の行空間（行ベクトルが張る空間）は、直交補空間の関係にある。

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,A &= (\mathrm{Row}\,A)^{\perp} \\ (\mathrm{Ker}\,A)^{\perp} &= \mathrm{Row}\,A \end{aligned}$$

この定理は、核空間と像空間との関係として言い換えることもできる。

A の像空間 $\mathrm{Im}\,A$ は、A の列ベクトルが張る空間（列空間）であった。
A を転置すると行と列が入れ替わるので、$A^{\top}$ の行空間は A の列空間に対応する。

よって、定理を次のように書き換えることができる。

⚓ **核空間と転置行列の像空間の直交関係**　A の核空間と、$A^{\top}$ の像空間は、直交補空間の関係にある。

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,A &= (\mathrm{Im}\,A^{\top})^{\perp} \\ (\mathrm{Ker}\,A)^{\perp} &= \mathrm{Im}\,A^{\top} \end{aligned}$$

直交補空間から零化空間へ

さて、$\mathrm{Ker}\,A = (\mathrm{Row}\,A)^{\perp}$ という直交補空間の関係を導くにあたって、ここでは次のような議論を行った。

1. 横ベクトルと同一視できる線形汎関数を考える
2. 線形汎関数に縦ベクトルを作用させたものを内積とみなす
3. 内積が 0 になることから直交補空間の関係を導く

つまり、ここでは内積が定められている空間（計量空間）で議論を行ったわけだが、内積を考えずに、線形汎関数の集合（双対空間）だけで議論を行うこともできる。

直交補空間の概念を内積を使わずに拡張し、一般の線形空間上で定義したものが、次に述べる零化空間である。

零化空間

V を線形空間とし、その部分空間 $W \subset V$ を考える。

V の双対空間 V^*（線形汎関数の集合）の中で、「W の元に作用させると 0 になる」ような線形汎関数を集めた集合を零化空間（**annihilator**）という。

零化空間　V を n 次元の線形空間とする。W を V の部分空間とするとき、

$$W^\perp = \{\phi \in V^* \mid \forall \boldsymbol{w} \in W, \langle \phi, \boldsymbol{w} \rangle = 0\}$$

を W の零化空間という。

$\phi \in V^*$ が W のすべてのベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して $\phi(\boldsymbol{w}) = 0$ となるとき、その ϕ は W を「全滅させてしまう（**annihilate**）」という意味で、零化空間は **annihilator** と呼ばれる。

零化空間は V^* の部分空間

V^* の中から、$\phi(\boldsymbol{w}) = 0$ を満たす元 $\phi \in V^*$ を取り出した集合が $W^\perp$ であるので、$W^\perp$ は V^* の部分空間である。

零化空間の双対空間への包含関係　V を n 次元の線形空間とし、W を V の部分空間とする。

このとき、W の零化空間 $W^\perp$ は、V の双対空間 V^* の部分空間である。

証明

[Todo 2:]

Zebra Notes

Type	**Number**
todo	2