第1章

線形写像と行列の演算



長方形に並んだ数の集まりを

$$A = egin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \ dots & dots & \ddots & dots \ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

などと書き、行列と呼ぶ

横の数字の並びを行、縦の数字の並びを列と呼ぶ

A は m 個の行と n 個の列をもつ行列である

第i行、第j列にある数字を a_{ij} と表し、これを(i,j)成分と呼ぶ

行が m 個、列が n 個の行列は、m 行 n 列の行列、あるいは $m \times n$ 型の行列であるという

 $n \times n$ 型の場合、行列は正方形なので n 次正方行列と呼ぶ

A の成分から第 j 列だけを取り出して \mathbb{R}^m のベクトルとしたものが

$$oldsymbol{a}_j = egin{pmatrix} a_{1j} \ a_{2j} \ dots \ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq n)$$

であり、これを A の j 番目の \overline{N} 番目の \overline{N}

A は、これらを横に並べたものという意味で

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

と書くことができる



m r 行列とベクトルの積 m imes n 型の行列 $A=(m a_1,m a_2,\dots,m a_n)$ と $m v\in \mathbb R^n$ との積を

$$A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n$$

により定める

ここで、 v_i は \boldsymbol{v} の第 i 成分である

 $A {m v}$ を考えるとき、ほとんどの場合は、A が 1 つ与えられていて ${m v}$ がいろいろ動くという 意識が強い

それは、行列 A のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る

入力ベクトル
$$\boldsymbol{v} \rightarrow$$
 出力ベクトル $A\boldsymbol{v}$

という装置、すなわち写像だとみなすことである



 $oldsymbol{\iota}$ 行列とベクトルの積の性質 A, B を $m \times n$ 型行列、 $oldsymbol{u}$, $oldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ 、 $c \in \mathbb{R}$ とするとき、次が成り立つ

i.
$$A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{u}+A\boldsymbol{v}$$

ii.
$$A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v}$$



[Todo 1: book: 行列と行列式の基礎 p24 (命題 1.4.3)]



線形写像の定義

線形写像と線形性 写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像 (linear mapping) であるとは、次の条件を満たすことをいう。

- i. 任意の $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$
- ii. 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$

これらの性質を写像 f の線形性という。

また、m=n のとき、線形写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を \mathbb{R}^n の線形変換 (linear transformation) という。

線形変換は空間 \mathbb{R}^n からそれ自身への写像なので、 \mathbb{R}^n 内において「ベクトルが変化している」(あるいは f が空間 \mathbb{R}^n に作用している) ニュアンスとみることができる



 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、(i) より、

$$f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

なので、

$$f(o) = o$$

が成り立つ

♣ 零ベクトルの像 零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される



m=n=1 のときは、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ は、通常の意味の関数であるこのとき、i の性質から、

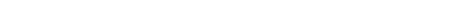
$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1)$$

が成り立つので、 $a = f(1) \in \mathbb{R}$ とおくと、

$$f(x) = ax$$

と書ける

+ 一次元線形写像と比例関数の同一性 線形写像 $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ は、a を比例定数とする比例関数である



線形写像の表現行列

 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、各基本ベクトル e_i の f による像を

$$f(oldsymbol{e}_j) = oldsymbol{a}_j = egin{pmatrix} a_{1j} \ a_{2j} \ dots \ a_{mj} \end{pmatrix}$$

と書くとする

これらを横に並べることによって、m 行 n 列の行列を作る

$$A = egin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \ dots & dots & \ddots & dots \ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (m{a}_1, m{a}_2, \dots, m{a}_n)$$

この行列 A を f の表現行列という

特に、 \mathbb{R}^n の線形変換の表現行列は n 次正方行列である



 \mathbb{R}^n の一般のベクトル \boldsymbol{v} を、基本ベクトルの線型結合として

$$oldsymbol{v} = \sum_{j=1}^n v_j oldsymbol{e}_j$$

と書く

このとき、f の線形性より、

$$f(oldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^n v_j f(oldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^n v_j oldsymbol{a}_j$$

となる

このベクトルの第 i 成分は

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n$$

と書ける

これは Av の第i 成分である

したがって、この記法を踏まえて、次のような表記ができる

→ 線形写像とその表現行列の関係

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

比例関数が比例定数 a だけで決まるのと同じように、線形写像は表現行列 A が与えられれば決まる

零写像と零行列 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ と定めたものは明らかに線形写像であり、これを零写像と呼ぶ その表現行列はすべての成分が 0 である行列である

この行列を零行列と呼び、 〇 で表す

 $m \times n$ 型であることを明示するために $O_{m,n}$ と書くこともあるまた、n 次正方行列の場合は、 O_n と書く

恒等写像と単位行列 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ と定めたものは明らかに線形写像である

これを恒等写像と呼び、 $f = id_{\mathbb{R}^n}$ と書く

恒等写像の表現行列は、 $f(e_j) = e_j$ (1 $\leq j \leq n$) より

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを単位行列と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、n 次であることを明示したいときは E_n と書く

8

線形写像 f から行列 A を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることができる

 * 行列から線形写像を作る $m \times n$ 型行列 A に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

によって写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定めれば、f は線形写像である

証明

行列とベクトルの積の性質より、f は線形写像であるまた、f の定義から明らかに A は f の表現行列である



№2 の線形変換の例

「Todo 2: book: 行列と行列式の基礎 p51 - p56]



行列の積

 $f \circ g \colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$

は、 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^l への線形写像である



[Todo 3: book: 行列と行列式の基礎 p56 (問 2.2)]

f と g の表現行列をそれぞれ $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$ とするA は $l\times m$ 型、B は $m\times n$ 型の行列である

このとき、 $f \circ g$ は $l \times n$ 型行列で表現される それを C と書くことにして、その成分を計算しよう そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい B を列ベクトルに分解して $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ と書くとき、

$$(f \circ g)(\boldsymbol{e}_j) = f(g(\boldsymbol{e}_j)) = f(\boldsymbol{b}_j) = A\boldsymbol{b}_j \quad (1 \le j \le n)$$

なので、

$$C = (A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, \dots, A\boldsymbol{b}_n)$$

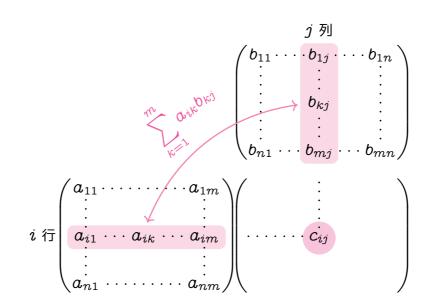
となる

 $C \circ (i,j)$ 成分は Ab_j の第 i 成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、C の (i,j) 成分を計算するときは、A の第 i 行、B の第 j 列だけを見ればよい



このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、A と B の積と呼ぶ



$$E_m A = A$$

$$AE_n = A$$

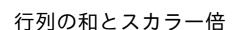
$$O_m A = AO_n = O_{m,n}$$

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は<mark>可換</mark>であるという

一般には、2つの行列は可換であるとは限らない

つまり、ABとBAは一般には異なる

「Todo 4: book: 行列と行列式の基礎 p58 (例 2.2.3, 2.2.4)]



A, B がともに $m \times n$ 型行列であるとき、それぞれの (i,j) 成分を足すことで行列の和 A+B を定める

♣ 分配法則 積が定義できるとき、

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)A = BA + CA$$

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

が成り立つ

$$h(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

により写像 $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定めるとき、h も線形写像であるまた、f,g の表現行列を A,B とするとき、h の表現行列は A+B であるなお、h=f+g と書き、f,g の和と呼ぶ

証明

[Todo 5: book: 行列と行列式の基礎 p59 (問 2.5)]

行列の積の結合法則

・ 積の結合法則 積 AB, BC がともに定義できるとき、

$$(AB)C = A(BC)$$

★ 写像による証明

A, B, C がそれぞれ $q \times m$, $m \times n$, $n \times p$ 型行列だとする線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、f, g, h の表現行列をそれぞれ A, B, C とする 一般的な写像の合成の性質として、

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

が成り立つから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう

★ 積の計算規則による証明

AB の (i, l) 成分は、

$$(AB)_{il} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl}$$

これを用いて、

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (AB)_{il} c_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj}$$

i,j はいま固定されているので、和には関係がない

動いているのは k, l だけ

ここで、次の書き換えができる

$$egin{aligned} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl}
ight) c_{lj} &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj}
ight) \ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} \end{aligned}$$

 $\sum_{l=1}^{n}$ の右にある式は l に関する和をとる前のものなので、l は止まっていると考えてよく、単純な分配法則を使っている

また、括弧がなくても、k に関する和を先にとって、その後でl に関する和をとって いると読むことができる

このとき、和の順番は交換してもよいので、

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} c_{lj} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} a_{ik} (BC)_{kj}$$

先ほどと同様に、 $\sum_{k=1}^{m}$ の右では k は止まっていると考えている

そして、この結果は、A(BC) の (i,j) である

結合法則が成り立つことが示されたので、(AB)C または A(BC) を表すとき、括弧を書かずに単に ABC と書いても問題ない

行列の個数が増えても同様である

また、A が正方行列の場合は、

$$A^2 = AA$$
$$A^3 = AAA$$

などのように書く



行列の区分け

行列を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

のようなブロック型に区分けして計算することがよくある

A が $m \times n$ 型のとき、 $m=m_1+m_2$, $n=n_1+n_2$ として、 A_{ij} は $m_i \times n_j$ 型である

また、B が $n \times l$ 型で、 $n = n_1 + n_2$, $l = l_1 + l_2$ と区分けして

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$AB = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix}$$

のように A_{ij} などが行列の成分であるかのようにして(ただし積の順序は変えずに)積が計算できる

ここで、Aの列の区分けと Bの行の区分けの仕方が同じであることが必要である

3 つ以上のブロックに分ける場合も同様である



行列の転置

行列 $A=(a_{ij})$ に対し、その成分の行と列の位置を交換してできる行列を転置行列という

転置行列 $A=(a_{ij})$ を $m\times n$ 型行列とするとき、(i,j) 成分が a_{ji} である $n\times m$ 型行列を A の転置行列と呼び、 $^t\!A$ と表す

文字 t を左肩に書くのは、右肩に書くと t 乗に見えてしまうからである t 乗と区別しつつ、右肩に書く流儀として、 A^T と書く場合もある

ベクトルの転置

特別な場合として、n 次の数ベクトル v を $n \times 1$ 型行列とみて転置したもの tv は $1 \times n$ 型行列となる

すなわち、数ベクトルの転置は横ベクトルになる

このことを利用して、たとえば

$$egin{pmatrix} v_1 \ v_2 \ dots \ v_n \end{pmatrix}$$

を $t(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ と表記することもある

転置の性質

転置は「行と列の入れ替え」であるので、明らかに次が成り立つ

$$t(^tA) = {}^{tt}A = A$$



・ 転置と行列積の順序反転性 行列 A, B の積 AB が定義できるとき、

$$^{t}(AB) = {}^{t}\!B^{t}\!A$$



[Todo 6: book: 行列と行列式の基礎 p78 命題 2.5.3]



 $oldsymbol{\$}$ 行列の和に対する転置の分配性 $A \ B \ が同じ型の行列であるとき、$

$$^{t}(A+B) = {}^{t}A + {}^{t}B$$



[Todo 7:]



対称行列と交代行列

正方行列 A が「転置しても元と変わらない」としたら、A の成分は左上から右下にかけての対角線に関して対称 $(a_{ij}=a_{ji})$ になっている

耐力 対称行列 正方行列 A が次を満たすとき、A を対称行列という

$${}^t\!A=A$$

交代行列 正方行列 A が次を満たすとき、A を交代行列という

$${}^t\!A = -A$$



正方行列のトレース

 $rac{1}{2}$ 対角成分 正方行列 $rac{1}{2}$ に対して、 $rac{1}{2}$ を対角成分と呼ぶ

rightharpoons トレース 正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して、対角成分の和

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

を A のトレースと呼び、tr(A) と表す

- ♣ トレースの性質
 - i. tr(A + B) = tr(A) + tr(B)
 - ii. tr(cA) = c tr(A)
 - iii. tr(AB) = tr(BA)



[Todo 8: book: 行列と行列式の基礎 p64 問 2.9]



行列と複素数

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき、

$$aE + bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

という形の行列を複素数と呼ぶことにより、複素数の定義ができる この定義では、通常はa+biと書かれるものを行列として実現している

[Todo 9: book: 意味がわかる線形代数 p43~49]

.....

Zebra Notes

Туре	Number
todo	9