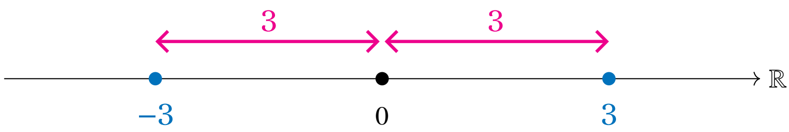
0.1 絶対値

0.1.1 数直線上の原点からの距離

実数 a の絶対値は、数直線上の原点 0 から a までの距離として定義される。

3 と -3 を例に考えると、どちらも絶対値は 3 となる。



-3 の絶対値が 3 であるように、負の数の絶対値は元の数から符号を取ったもの（元の数を -1 倍したもの）となる。

まとめると、

- 正の数の絶対値は元の数そのまま（0 の絶対値もそのまま 0）
- 負の数の絶対値は元の数の -1 倍

というように、絶対値は場合分けして定義される。

絶対値

実数 a について、a の 絶対値 を次のように定義する。

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

0.1.2 絶対値の性質

絶対値は 0 以上の数

負の数の場合は、符号を取って正の数にしたものを絶対値とすることから、絶対値が負の数になることはない。

絶対値は常に非負

実数 a の絶対値 $|a|$ は、常に 0 以上の数となる。

$$|a| \geq 0$$

等号が成立するのは、$a = 0$ の場合である。

中身の符号によらず絶対値は同じ

3 も −3 も、絶対値はともに 3 だった。つまり、

$$|3| = |-3| = 3$$

このことを一般化したのが、次の性質である。

中身の符号を変えても絶対値は不変

実数 a の絶対値について、次が成り立つ。

$$|-a| = |a|$$

積の絶対値は絶対値の積

絶対値の計算と、積の計算は、どちらを先に行っても結果が同じになる。

絶対値の積の性質

実数 a と b について、次の式が成り立つ。

$$|ab| = |a||b|$$

a と b がともに正の数なら、

- a と b は正の数なので、$|a| = a$、$|b| = b$
- ab も正の数なので、$|ab| = ab$

となり、$|ab| = |a||b|$ が成り立つことがわかる。

では、片方が負の数の場合はどうだろうか。
a か b のどちらかにマイナスの符号をつけてみると、

$$|-ab| = |-a||b|$$

$$|-ab| = |a||-b|$$

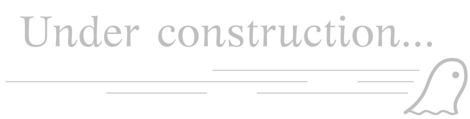
のどちらかとなるが、前の節で解説した $|-X| = |X|$ の関係から、これらはどちらも $|ab| = |a||b|$ に帰着する。

a と b の両方が負の数の場合は、

$$|ab| = |-a||-b|$$

となるが、これも $|-X| = |X|$ の関係を使えば、やはり $|ab| = |a||b|$ に帰着する。

0.1.3 数直線上の 2 点間の距離



0.1.4 max 関数による表現

実数 a の絶対値は、「a と $-a$ のうち大きい方を選ぶ」という考え方でも表現できる。
たとえば、3 と -3 の絶対値はともに 3 だが、これは 3 と -3 のうち大きい方（正の数の方）を絶対値として採用した、という見方もできる。

max 関数による絶対値の表現

実数 a について、a の 絶対値 を次のように定義することもできる。

$$|a| = \max\{a, -a\}$$

ここで登場した max は、「複数の数の中から最大のものを選ぶ」という操作を表している。

0.1.5　三角不等式

2 つの実数 a と b の「絶対値の和」と「和の絶対値」の間には、次のような大小関係がある。

絶対値に関する三角不等式

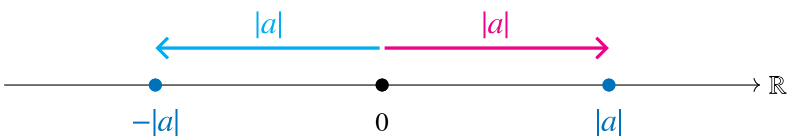
任意の実数 a と b について、次の不等式が成り立つ。

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

この形の不等式は、実は今後登場するベクトルの長さ（ノルム）や、複素数の絶対値に対しても成り立つ。三角不等式と呼ばれる所以は、ベクトルに関する三角不等式で明らかになる。

絶対値の定義から、この不等式の証明を考えてみよう。

a の絶対値 $|a|$ は、a から符号を取り払ったものであるから、逆に絶対値 $|a|$ に $+$ か $-$ の符号をつけることで、元の数 a に戻すことができる。
a が負の数だったなら、$-|a|$ とすれば a に戻る。正の数だったなら、$|a|$ がそのまま a に一致する。



a は原点からの距離が $|a|$ の場所にあり、a は $-|a|$ か $|a|$ のどちらかに一致する。
どちらに一致するかはわからないので、次のような不等式で表しておく。

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

b についても、同じように考えることができる。

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

これらの不等式を使って、さらに式変形を行うことで、三角不等式を導くことができる。

Proof: 絶対値に関する三角不等式

絶対値の定義から、次の不等式が成り立つ。

$$-|a| \le a \le |a|$$
$$-|b| \le b \le |b|$$

両辺を足し合わせて、次の不等式を得る。

$$-(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b|$$

$-(|a| + |b|) \le a + b$ の両辺を -1 倍することで、次の関係も得られる。（不等式の両辺を -1 倍すると、不等号の向きが逆転することに注意）

$$|a| + |b| \ge -(a + b)$$

ここまでで得られた、$a + b$ についての不等式をまとめると、次のようになる。

$$|a| + |b| \ge a + b$$
$$|a| + |b| \ge -(a + b)$$

一方、$a + b$ の絶対値は、定義より次のように表せる。

$$|a + b| = \max\{a + b, -(a + b)\}$$

$a + b$ と $-(a + b)$ のうち大きい方が $|a + b|$ となるが、$a + b$ と $-(a + b)$ はどちらも $|a| + |b|$ 以下となることがすでに示されているので、

$$|a + b| \le |a| + |b|$$

となり、定理は示された。 ■