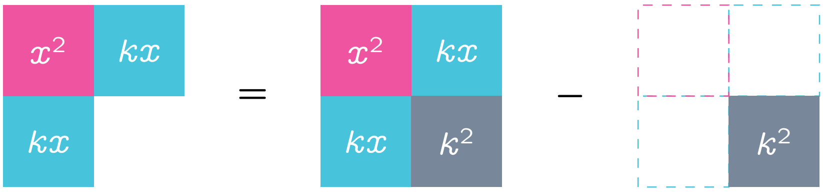
二次式の平方完成

乗法公式 $(x+k)^2 = x^2 + 2kx + k^2$ を利用した次の形を、二次式の平方完成という

$$(x+k)^2 - k^2 = x^2 - 2kx$$



斉次二次式と行列

2 つの文字 x, y の斉次二次式は、一般に次のように表される

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p254 〜256、ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p297

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (a, b, c \neq 0)$$

この式は、次のように行列の積として表すことができる

$$\begin{aligned} ax^2 + 2bxy + cy^2 &= ax^2 + byx + bxy + cy^2 \\ &= (ax+by)x + (bx+cy)y \\ &= \begin{pmatrix} ax+by & bx+cy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

ここで、A は実対称行列になっている

このような斉次二次式を一般化したものが、n 個の文字 $x_1, \ldots, x_n$ についての二次形式である

二次形式

n 個の変数 $x_1, \ldots, x_n$ の斉次二次式を二次形式という

ref: 行列と行列式の基礎 p209〜210、ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p297〜298、ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p256〜257

各項の係数を a_{ij} とすると、一般の二次形式（n 変数斉次二次式）は次のように書くことができる

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$$

ここで、各変数は可変、すなわち $x_i x_j = x_j x_i$ であるので、$i \neq j$ の場合は、$i < j$ を満たす項だけの和として書き、それを 2 倍している

あえて展開して書くと、次のようになる

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_{ii}x_{ii} + \sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j + \sum_{i<j} a_{ji}x_j x_i$$

$i < j$ においては $x_i x_j = x_j x_i$ であり、その係数についても $a_{ij} = a_{ji}$ が成り立つので、行列 $A = (a_{ij})$ は対称行列である

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ii} & (i = j) \\ a_{ij} = a_{ji} & (i < j) \end{cases}$$

このように a_{ij} を定めた上で、$\sum$ を 1 つにまとめることができる

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

二次形式の係数行列　二次形式は対称行列 $A = (a_{ij})$ に

よって、次のように表される

$$Q(\boldsymbol{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

このとき、A を二次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ の係数行列という

i が A の行番号、j が列番号であるので、x_i は横ベクトル、x_j は縦ベクトルの成分である

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ij} x_j \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

そこで、$\boldsymbol{x}$ を縦ベクトルとみるとき、二次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ とその係数行列は次のような関係にある

$$Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x} A \boldsymbol{x}$$

この関係を用いて、任意の対称行列 A から二次形式を作ることができる

$Q(\boldsymbol{x})$ から A を作り、A から $Q(\boldsymbol{x})$ を作ることができるので、n 変数の二次形式 $Q(\boldsymbol{x})$ と n 次の対称行列 A は対応し、さらにこの対応は一対一である