第 1 章

線型独立な列ベクトルと階数

非自明解の存在と有限従属性

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の非自明解の存在に対して、次の解釈もできる。

ref: 行列と行列式の基礎 p40〜41

斉次形方程式の非自明解の存在と線形従属 $m \times n$ 型行列 A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ とするとき、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ に自明でない解がある} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属}$$

証明

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は、ベクトルの等式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$$

と同じものである。

$\Longrightarrow$

もし自明でない解があるならば、$x_1, \ldots, x_n$ のうち少なくとも 1 つは 0 ではない。

$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ が成り立つもとで、0 でない係

数が存在するということは、$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ が線形従属であることを意味する。 ■

$\Longleftarrow$

対偶を示す。

$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ が線形独立であれば、

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$$

において、すべての係数 $x_1, ..., x_n$ は 0 でなければならない。

よって、0 以外の解（非自明解）は存在しないことになる。

■

この命題の否定をとると、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ には自明解しか存在しない} \iff \boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n \text{が線形独立}$$

となる。

ここで、斉次形方程式の非自明解の存在条件より、斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ において自明解しか存在しないことは、$\text{rank}(A) = n$、すなわち解の自由度が 0 であることと同値であった。

つまり、次が成り立つことがわかる。

⚓ **列ベクトルの線型独立性と階数** $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A = (\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n)$ とおくと、

$$\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立} \iff \text{rank}(A) = n$$

有限従属性（方程式の視点）

$\text{rank}(A) = n$ が成り立つ条件をさらに言い換えてみよう。

$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ とおくと、A は $m \times n$ 型行列である。

階数のとりうる値の範囲より、

$$\operatorname{rank} A \leq \min(m, n)$$

であるから、もしも列の方が行よりも多い、つまり $n > m$ であれば、$\operatorname{rank} A \leq m < n$ となり、$\operatorname{rank} A = n$ が成り立つことはない。

よって、次の関係がいえる。

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \text{ に自明でない解がある} &\iff \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属} \\ &\iff \operatorname{rank} A \neq n \end{aligned}$$

ここで n は変数の個数、m は方程式の個数であるので、$n > m$ という状況を次のようにまとめることができる。

⚓ **斉次形方程式における有限従属性**　斉次線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ において、変数の個数が方程式の個数よりも多いときには、非自明な解が存在する。

有限従属性（ベクトルの集合における視点）

連立方程式の文脈に限定せず、より抽象的に言い換えたものが次の定理である。

⚓ **有限従属性定理**　$\mathbb{R}^m$ 内の m 個よりも多いベクトルからなる集合は線形従属である。

$n > m$ の場合、$\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ は線形従属となることを述べている。

この結論は、幾何的な直観からは自然だといえる。

たとえば、平面 $\mathbb{R}^2$ 内に 3 つ以上のベクトルがあれば、自動的に線形従属になる。

この事実は、次元の概念を議論する際の基礎となる。

列ベクトルの線型独立性と行基本変形

列ベクトルの線型独立性と階数では、列ベクトルの線型独立性を行列の階数で言い換えられることを示した。

ref: 行列と行列式の基礎 p42〜44

行列の階数は、行基本変形を施した結果である行階段形からわかるものである。
もしも行基本変形によって列ベクトルの線型独立性が変化するとしたら、階数との関係も変わってしまうのではないだろうか。

この心配が杞憂であることは、次の定理からわかる。

⚓ **行基本変形による線型独立性の不変性**　行変形は列ベクトルの線形関係を保つ。
すなわち、行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ に行の変形を施して $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ が得られたとするとき、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{o} \iff \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{o}$$

特に、

$$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \text{ が線型独立} \iff \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \text{ が線型独立}$$

証明

基本行列の積による行変形の構成より、P を基本行列の積（正則行列）とすると、$B = PA$ が成り立つ。

よって、$\boldsymbol{b}_i = P\boldsymbol{a}_i$ であり、線形関係式

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}$$

に左から P をかけることで、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \mathbf{0}$$

が得られる。

逆に、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \mathbf{0}$ が成り立つとき、P^{-1} を左からかけることで、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0}$$

が得られる。

したがって、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \mathbf{0}$$

が成り立つ。 ■

主列ベクトルと階数の再解釈

行列の階数は、行階段形に変形したときの主成分の個数でもあった。

ref: 行列と行列式の基礎 p42〜44

列ベクトルの線型独立性と階数の関係をさらに考察するために、「主成分のある列ベクトル」について考えてみよう。

主列ベクトル　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を行階段形にしたときに、主成分のある列番号を $i_1, \ldots, i_r$ とする。ここで、r は A の階数である。

このとき、$\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ を主列ベクトルという。

掃き出し法は、主列ベクトルを選び出すためのアルゴリズムといえる。

行基本変形を行っても列ベクトルの線型独立性は変わらないことを根拠に、次の議論ができる。

主列ベクトルと線型独立性　行列の主列ベクトルの集合は線型独立である。

また、主列ベクトル以外の列ベクトルは、主列ベクトルの線形結合である。

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （命題 1.6.11）]

つまり、掃き出し法は、行列の列ベクトルの中から、$\operatorname{rank} A$ 個の線型独立な列ベクトルを選び出す方法を与えていることになる。

では、$\operatorname{rank} A$ 個よりも多くの列ベクトルを選ぶとどうなるのだろうか？

列ベクトルの線形従属性と階数　行列 A の列ベクトルから $\operatorname{rank} A$ 個よりも多いベクトルを選ぶと、線形従属になる。

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （命題 1.6.12）]

以上によって、行列の階数に関する次の理解が得られる。

階数と線型独立な列ベクトルの最大個数　行列 A の階数 $\operatorname{rank} A$ は、A の列ベクトルに含まれる線型独立なベクトルの最大個数と一致する。

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （定理 1.6.13）]

これで、「行変形を繰り返して行階段形にしたときの 0 でない段の数」として導入した階数という量の、より本質的な意味がわかった。

このように線型独立な列ベクトルの最大個数として階数を見直すことで、

行変形によって定めた階数が行変形の仕方によらない

こともわかる。

行基本変形による階数の不変性　行の基本変形で行列の階数は変化しない。

転置による階数の不変性

ここまで、行列の列ベクトルと階数の関係を考察してきたが、行ベクトルと階数の関係はどうだろうか？

ref: 行列と行列式の基礎 p88

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p78〜80

正則行列による階数標準形の構成を用いて、次の重要な事実を証明することができる。

転置に関する階数の不変性　任意の行列 A に対して、

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^t A$$

証明

A の階数標準形を B とすると、$B = PAQ$ となる正則行列 P, Q をとることができる。

両辺の転置をとると、

$${}^t B = {}^t(PAQ) = {}^t Q {}^t A {}^t P$$

となり、ここで、正則行列は転置をとっても正則なので、${}^t P, {}^t Q$ も正則行列である。

よって、${}^t A$ の階数標準形は ${}^t B$ である。

B は階数標準形であり、その形から明らかに

$$\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} {}^t B$$

が成り立つので、変形前の行列 A についても

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} {}^t A$$

が成り立つ。 ■

行列 A の階数は A の線型独立な列ベクトルの最大個数であったが、この

定理から次のこともいえるようになった。

階数と線型独立な行ベクトルの最大個数　行列 A の階数 $\operatorname{rank} A$ は、A の行ベクトルに含まれる線型独立なベクトルの最大個数と一致する

この事実を連立方程式の視点で解釈すると、

係数行列 A の階数は、
独立な（本質的に意味を持つ）方程式の最大本数

を表しているといえる。

Zebra Notes

Type	Number
todo	3