線形写像の像

写像の像を、線形写像の場合に考える

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p79〜84

線形写像 f の像は、$\boldsymbol{v} \in V$ に対して、$f(\boldsymbol{v})$ の値が取りうる集合である

🎓 線形写像の像　線形写像 $f: V \to W$ に対して、f による V の像 $f(V)$ を、線形写像 f の像や像空間といい、$\mathrm{Im}(f)$ と表記する

$$\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\} \subset W$$

線形写像の像は、

> 写像によって何が出力されるか

を表す

線形写像の核

線形写像 f の核は、$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ となるベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ 全体の集合として定義される

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p79〜84

🎓 線形写像の核　線形写像 $f: V \to W$ に対して、f による $\{\boldsymbol{0}\}$ の逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{0}\})$ を、線形写像 f の核や核空間、あるいはカーネルといい、$\mathrm{Ker}(f)$ と表記する

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{\boldsymbol{0}\}) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\} \subset V$$

線形写像の核は、

どのような成分が写像によって失われるか

を表す

像空間と全射性

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の全射性は、$\mathbb{R}^m$ の部分集合である像空間 $\mathrm{Im}(f)$ と関係している

ref: 行列と行列式の基礎 p68〜69

全射な写像は、定義域の元の像で値域を「埋め尽くす」

ということから、f が全射であることは、$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ と同値だとわかる

核空間と単射性

線形写像 f が単射であることは、次の条件と同値であった

$$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

この条件は、次のように言い換えることができる

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

線形写像の単射性と核の関係　f を線形写像とするとき、

$$f \text{ が単射} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

証明

$\mathrm{Ker}(f)$ の定義は

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$$

これを踏まえて、次の 2 つが同値であることを示す

i. $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

ii. $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

このとき、$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ が $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ を意味するので、$\mathrm{Ker}(f)$ の元は零ベクトルのみになる

よって、$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ ■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ であれば、$\mathrm{Ker}(f)$ の元は零ベクトルのみである

よって、$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ が成り立つとき、$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ が成り立つことになる

すなわち、$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ が成り立つ ■

核空間と解空間

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\}$$

と定めると、$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ という関係から、$\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Ker}(A)$ は同じものを指す

これは、斉次形の連立線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間そのものである

$\mathrm{Ker}(A)$ の元は、$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解を使ってパラメータ表示できる