ベクトルのなす角

コーシー・シュワルツの不等式は、絶対値の性質から、次のように書き換えられる。

$$-\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \leq (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$$

$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{o}$ でないときには、

$$-1 \leq \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} \leq 1$$

となるので、

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を介して $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ のなす角を定義できる。

ベクトルのなす角　計量空間 V 上のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して、

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

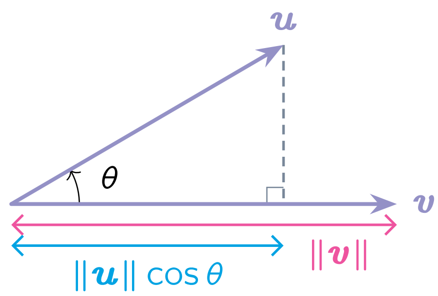
により定まる θ を $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ のなす角という。

内積が表す「関係の強さ」

ベクトルのなす角の式から、内積の幾何的な解釈を捉えることができる。

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$$

この式を、次のような図でイメージしてみよう。



この図から、内積は次のようにも解釈できる。

$\boldsymbol{u}$ の $\boldsymbol{v}$ との内積とは、$\boldsymbol{v}$ 自身の長さと、$\boldsymbol{u}$ の $\boldsymbol{v}$ 方向の長さの積である

ここで、「$\boldsymbol{u}$ の $\boldsymbol{v}$ 方向の長さ」は、後に**正射影**という量として定義する。

自分自身との内積の再解釈

$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ が平行でまったく同じ方向を向いている場合、「$\boldsymbol{u}$ の $\boldsymbol{v}$ 方向の長さ」は、$\boldsymbol{u}$ の長さそのものである。

$$\|\boldsymbol{u}\|\cos\theta = \|\boldsymbol{u}\|$$

また、このとき、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ は互いに正の数のスカラー倍で表すことができるので、

$$\|\boldsymbol{v}\| = k\|\boldsymbol{u}\| \quad (k > 0)$$

すると、内積は、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = k\|\boldsymbol{u}\|^2$$

ここで、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$ の場合は、$\boldsymbol{u}$ を特にスケーリングしなくても $\boldsymbol{v}$ に一致するので、$k = 1$ である。

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|^2$$

このように $\boldsymbol{u}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向の長さは $\boldsymbol{u}$ 自身の長さであることから、自分自身との内積は **長さ**^{2} となる。

その平方根をとれば長さが得られるということで、ベクトルのノルムの定義

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$$

を自然に解釈することができる。

平行の度合いと内積

同じ方向を向いているベクトルどうしは、平行に近ければ近いほど、これらは互いに似ていて「関係性の強い」ベクトルだといえる。

2 つのベクトルが同方向で完全に平行なとき、なす角 θ は 0 であるので、$\cos\theta$ の値は 1（$\cos\theta$ の最大値）となる。
つまり、同方向で平行に近い「似た」ベクトルほど、内積の値は最大値に近くなる。

逆方向と内積の符号

一方、2 つのベクトルが完全に平行で、逆の方向を向いているなら、片方のベクトルはもう片方のベクトルを負の数を使ってスカラー倍したものになる。

逆向きのベクトルどうしは、近い方向どころかむしろ「かけ離れた方向を向いている」といえる。
内積が「向きの似ている度合い」なら、「近い方向を向いている」度合いを正の数で、「かけ離れた方向を向いている」度合いを負の数で表すのが自然である。

実際、2 つのベクトルが逆向きで完全に平行なとき、$\cos\theta$ の値は -1（$\cos\theta$ の最小値）となる。
つまり、逆方向に近い「かけ離れた」ベクトルほど、内積の値は最小値に近くなる。

ベクトルの直交

「同じ向きに近い」場合と「逆向きに近い」場合が切り替わるのは、2 つのベクトルどうしが垂直なときである。
ならば、内積の正と負が切り替わる境界、すなわち内積が 0 になる場合とは、2 つのベクトルが直交する場合であるのが自然ではないだろうか。

別な考え方として、完全に垂直な 2 つのベクトルは、互いに全く影響を与えない方向を向いている。
2 つのベクトルが直交している場合、2 つのベクトルは互いに全く関係がないものとして、関係の強さを表す内積の値は 0 にしたい。

実際、内積の定義はこの解釈に沿うものになっている。
$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角が直角であるとき、$\cos\theta = 0$ となるので、内積も 0 になる。

幾何学的なイメージができない高次元の場合についても、内積が 0 になること、すなわち 2 つのベクトルが無関係であることを直交の定義としてしまおう。

ベクトルの直交　計量空間 V 上のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$$

が成り立つとき、$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は直交するといい、

$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$$

と表記する。