

画像処理・AIのための数学ノート

tomixy

February 16, 2025

Contents

1	複素数と複素関数	5
1.1	複素平面	5
1.2	複素数の絶対値	5
1.3	複素数の極形式による表現	6
1.4	偏角と主値	6
1.5	共役複素数	7
1.6	オイラーの公式	9
2	フーリエ解析	11
2.1	波の2つの捉え方	11
2.1.1	空間的に捉える波	11
2.1.2	時間的に捉える波	12
2.2	角周波数と正弦波	12
2.2.1	角周波数と振動数の関係	13
2.2.2	角周波数と周期の関係	13
2.3	偶関数と奇関数	14
2.3.1	偶関数と奇関数は異なる対称性を持つ	14
2.3.2	積に関する性質	15
2.3.3	和に関する性質	16
2.3.4	偶関数・奇関数の積分	16
2.4	フーリエ級数	17
2.4.1	そもそも級数とは	17
2.4.2	有限区間で定義された関数のフーリエ級数展開	18
2.4.3	フーリエ級数展開の周期関数への拡張	19
2.4.4	不連続点におけるフーリエ級数の値	20
2.4.5	フーリエ級数展開の意味	21
2.4.6	フーリエ級数展開のさまざまな表現式	22
3	線形システム	25
3.1	線形性	25

Chapter 1

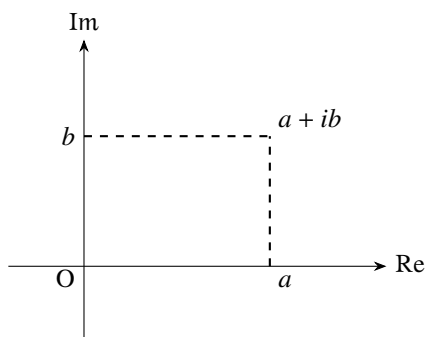
複素数と複素関数

1.1 複素平面

複素数は、実部（Real Part）と虚部（Imaginary Part）という2つの数から成る。

そのため、実部を横軸に、虚部を縦軸にとった平面を考え、1つの複素数をこの平面上の1点として表すことができる。

複素平面 実部を横軸、虚部を縦軸にとった平面を複素平面と呼ぶ。



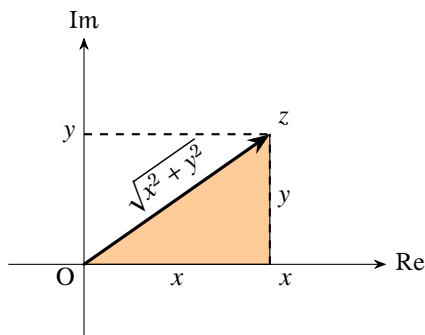
1.2 複素数の絶対値

複素数の絶対値

複素平面において、原点から複素数 z までの距離を複素数 z の絶対値と定義する。

この距離は三平方の定理から求められ、 $|z|$ と表す。

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

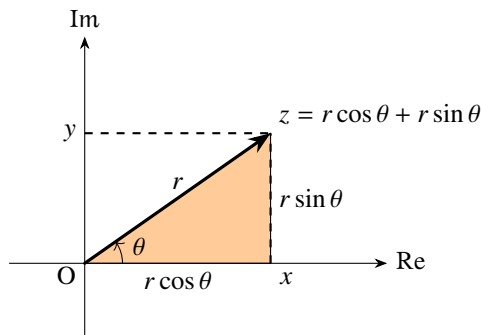


1.3 複素数の極形式による表現

極形式

複素数 z は、絶対値 r と偏角 θ を用いて次のように表すことができる。

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$



1.4 偏角と主値

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ に、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を代入して整理した関係式から、偏角を改めて定義する。

偏角

複素数 z を極形式で表現すると、

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{という関係が成り立つ。}$$

この関係を満たす θ を偏角と呼び、次のように表す。

$$\arg z := \theta$$

ここで、 θ を整数回 2π シフトさせても（何周回っても）、複素数 z の値は変わらない。

つまり、1つの複素数に対して偏角の値は複数考えられるので、次のような主値を定義する。

偏角の主値

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ 、もしくは $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲にある偏角を偏角の主値と呼び、次のように表す。

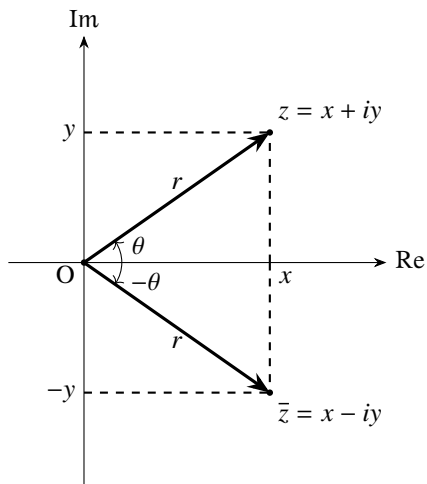
$$\operatorname{Arg} z := \theta$$

1.5 共役複素数

共役複素数

複素数 $z = x + iy$ に対して、その共役複素数 \bar{z} を次のように定義する。

$$\bar{z} := x - iy$$



共役複素数と絶対値

複素数 z とその共役複素数 \bar{z} の積は、 z の絶対値の二乗に等しい。

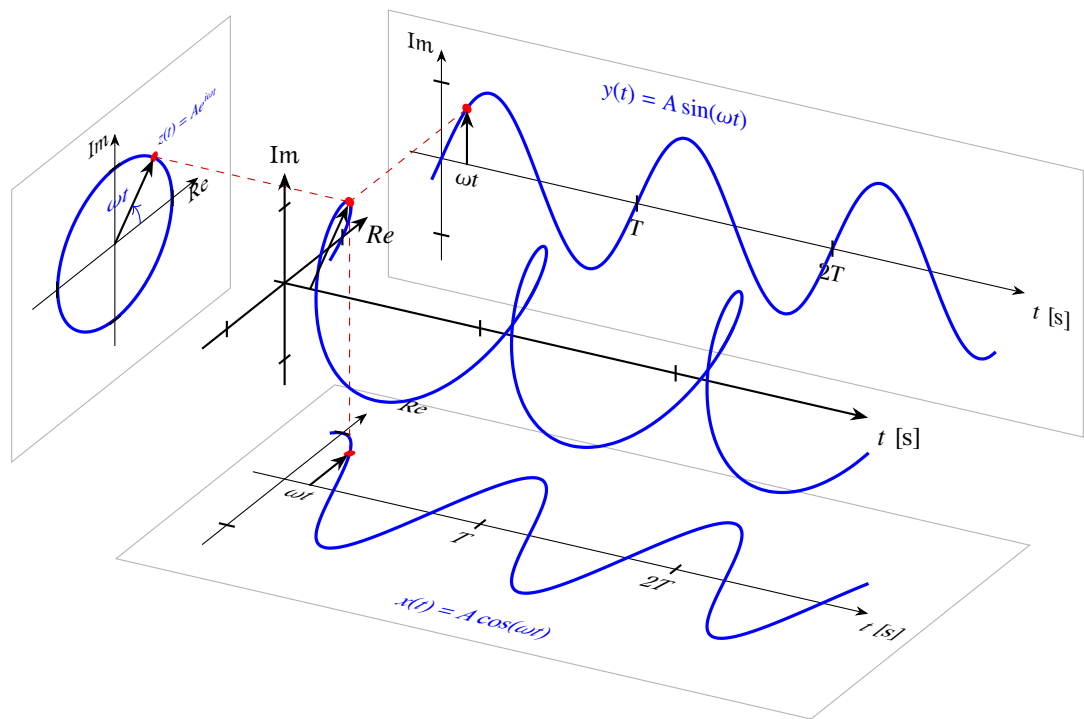
$$z\bar{z} = |z|^2$$

Proof

複素数 $z = x + iy$ とその共役複素数 $\bar{z} = x - iy$ の積を計算する。

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

1.6 オイラーの公式



Chapter 2

フーリエ解析

2.1 波の2つの捉え方

波は2つの捉え方ができる。

- 空間的に捉える波：波の形そのもの
- 時間的に捉える波：波の振動

2.1.1 空間的に捉える波

波とは、一定の間隔で同じ形が繰り返されるものである。

空間的に捉える波は、まさにその波の形そのもので、波の形を位置 x の関数として表す。

波長 波を構成する最小パターンの幅を波長と呼び、 λ で表す。

周期関数 次の式を満たす関数 $f(x)$ を、周期 λ の周期関数という。

$$f(x + \lambda) = f(x)$$

波数 2π の長さに含まれる、波の最小パターンの数を波数という。

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

2.1.2 時間的に捉える波

波を時間軸から見たとき、波を構成する最小パターンは幅ではなく時間である。

その最小パターンを周期と呼ぶ。

周期は、波を時間軸から見たときの「波長」の言い換えともいえる。

周期 波が1回振動するのにかかる時間を周期と呼び、 T で表す。

周期関数 次の式を満たす関数 $f(t)$ を、周期 T の周期関数という。

$$f(t + T) = f(t)$$

周波数（振動数）

単位時間に含まれる、波の最小パターンの数を周波数という。

$$\nu = \frac{1}{T}$$

これは、単位時間に何回振動するかを表すため、振動数とも呼ばれる。

2.2 角周波数と正弦波

角周波数 動径が単位時間内に進む角を角周波数と呼び、 ω で表す。

任意の時間における動径

時間が t だけ経過したときの動径 θ は、角周波数 ω を使って次のように表すことができる。

$$\theta = \omega t$$

$\sin \theta$ や $\cos \theta$ は、 $\theta = \omega t$ の関係を用いると、動径 θ ではなく角周波数 ω の関数とみることができる。

正弦波 $\sin \omega t$ や $\cos \omega t$ を、角周波数 ω の正弦波と呼ぶ。

2.2.1 角周波数と振動数の関係

円の1周は 2π であり、単位時間あたりに進む円周は角周波数 ω である。

(角周波数は「角」の大きさとして定義したが、弧度法のおかげで、「円周」の長さとしても捉えられる。)

ここで、単位時間あたりに進む円周 ω は、1周 2π のうちのどれくらいだろうか？

その答えは、 ω を「1周あたりの量」 2π で割ったものになる。

角周波数と円周の関係

角周波数 ω で動径が回転するとき、その動径は単位時間に

$$\frac{\omega}{2\pi}$$

だけ円を回ることになる。

ここで、三角関数は円関数とも呼ばれるように、円の1周は三角関数の1振動に対応する。

振動を円周上の回転として表す三角関数のおかげで、「どれくらい回るか？」を「どれくらい振動するか？」とみることができる。

つまり、動径が単位時間に $\frac{\omega}{2\pi}$ だけ回転することは、単位時間に $\frac{\omega}{2\pi}$ だけ振動することだ。

角周波数と振動数の関係

角周波数を ω とすると、振動数 ν は次のように表せる。

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

2.2.2 角周波数と周期の関係

ここまでで、振動数 ν は2通りの表し方ができることがわかった。

- $\nu = \frac{1}{T}$ (周波数：単位時間に含まれる、最小波の時間幅)
- $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ (振動数：単位時間に含まれる、振動の回数)

この2式を組み合わせると、次のような関係が得られる。

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

角周波数と周期の関係

角周波数を ω 、周期を T とすると、次のような関係が成り立つ。

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

2.3 偶関数と奇関数

\sin 関数と \cos 関数は、どちらも正弦波と呼ばれるが、その性質は異なる。

\sin は奇関数であり、 \cos は偶関数である。

この違いが、後に議論するフーリエ級数展開においても重要な役割を果たす。

2.3.1 偶関数と奇関数は異なる対称性を持つ

偶関数

グラフが y 軸に対して対称な関数を偶関数と呼ぶ。

偶関数は、任意の x に対して次の関係が成り立つ関数として定義される。

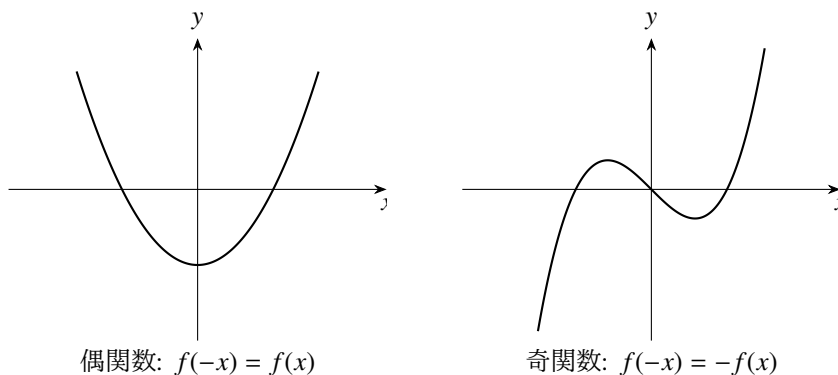
$$f(-x) = f(x)$$

奇関数

グラフが原点に対して対称な関数を奇関数と呼ぶ。

奇関数は、任意の x に対して次の関係が成り立つ関数として定義される。

$$f(-x) = -f(x)$$



1つの関数が、この両方の性質を持つことはない。
つまり、偶関数であり奇関数でもある関数は存在しない。

2.3.2 積に関する性質

偶関数と奇関数の積 偶関数と奇関数の積は、奇関数となる。

Proof

$f(x)$ を奇関数、 $g(x)$ を偶関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= -f(-x)g(-x) \\ f(-x)g(-x) &= -f(x)g(x) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{両辺 } -1 \text{ 倍して両辺入れ替え}$$

となり、引数を -1 倍すると符号が反転するため、 $f(x)g(x)$ は奇関数である。

奇関数どうしの積 奇関数と奇関数の積は、偶関数となる。

Proof

$f(x), g(x)$ を奇関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= -f(-x) \cdot \{-g(-x)\} \\ &= f(-x)g(-x) \end{aligned}$$

となり、引数を -1 倍しても符号がそのままなので、 $f(x)g(x)$ は偶関数である。

偶関数どうしの積 偶関数と偶関数の積は、偶関数となる。

Proof

$f(x), g(x)$ を偶関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(-x)g(-x) \\ f(-x)g(-x) &= f(x)g(x) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f(x)g(x) &= f(-x)g(-x) \\ f(-x)g(-x) &= f(x)g(x) \end{aligned}} \right\} \text{両辺入れ替え}$$

となり、引数を -1 倍しても符号がそのままなので、 $f(x)g(x)$ は偶関数である。

2.3.3 和に関する性質

奇関数どうしの和 奇関数と奇関数の和は、奇関数となる。

Proof

$f(x), g(x)$ を奇関数とすると、

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= -f(-x) - g(-x) \\ &= -\{f(-x) + g(-x)\} \\ f(-x) + g(-x) &= -\{f(x) + g(x)\} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f(x) + g(x) &= -f(-x) - g(-x) \\ &= -\{f(-x) + g(-x)\} \\ f(-x) + g(-x) &= -\{f(x) + g(x)\} \end{aligned}} \right\} \text{両辺 } -1 \text{ 倍して両辺入れ替え}$$

となり、引数を -1 倍すると符号が反転するため、 $f(x) + g(x)$ は奇関数である。

偶関数どうしの和 偶関数と偶関数の和は、偶関数となる。

Proof

$f(x), g(x)$ を偶関数とすると、

$$f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x)$$

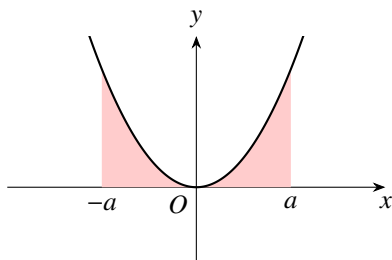
となり、引数を -1 倍しても符号がそのままなので、 $f(x) + g(x)$ は偶関数である。

2.3.4 偶関数・奇関数の積分

偶関数の積分公式

原点に関して対称な区間 $-a \leq x \leq a$ において、 $f(x)$ が偶関数なら、次の式が成り立つ。

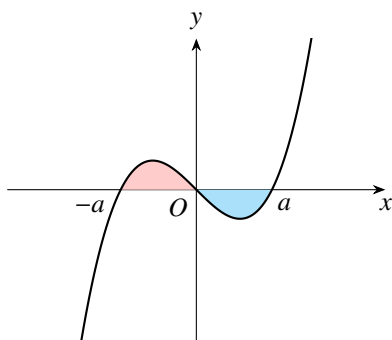
$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$



奇関数の積分公式

原点に関して対称な区間 $-a \leq x \leq a$ において、 $f(x)$ が奇関数なら、次の式が成り立つ。

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$



2.4 フーリエ級数

2.4.1 そもそも級数とは

級数展開

ある関数 $f(x)$ を、より基本的な関数系

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$$

を使って、次のような級数で表すことを級数展開という。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

級数展開は、近似や性質の分析に役立つ。

代表的な級数展開：マクローリン展開

$f(x)$ が無限回微分可能なとき、 $f(x)$ は多項式関数 $\{x^0, x^1, x^2, \dots\}$ を使って級数展開できる。

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

このような級数展開をマクローリン展開という。

代表的な級数展開：フーリエ級数展開

$f(x)$ が特定の条件を満たすとき、 $f(x)$ は三角関数を使って級数展開できる。

このような級数展開をフーリエ級数展開といい、これからの議論の対象となる。

2.4.2 有限区間で定義された関数のフーリエ級数展開

有限区間で定義された関数のフーリエ級数展開

$-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ (区間幅 T の有限区間) で定義された関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

2.4.3 フーリエ級数展開の周期関数への拡張

元の関数 $f(t)$ には区間の制限を設けていたが、フーリエ級数を構成する三角関数は、無限区間で定義されている。

そして、三角関数は、区間幅 T だけずらしても同じ値をとる、周期 T の周期関数である。

つまり、特定の区間内の関数 $f(t)$ の形を、無限区間内で T ずつずらしていても、それを表現するフーリエ級数の式は変わらない。

関数 $f(t)$ が、区間の制限をなくしても同じ形を繰り返すだけ（周期関数）であれば、先ほどのフーリエ級数展開がそのまま成り立つことになる。

周期関数のフーリエ級数展開

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

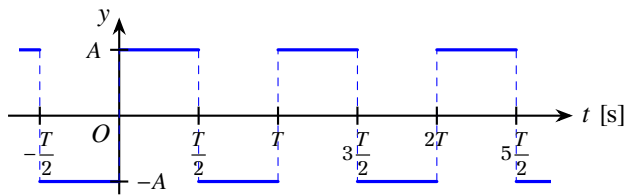
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

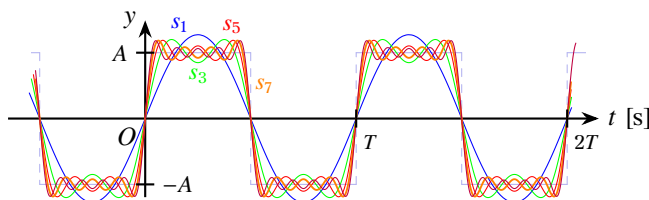
2.4.4 不連続点におけるフーリエ級数の値

次のような矩形波 $f(t)$ では、 $t = \frac{T}{n}$ が不連続な点となる。

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq t < 0) \\ 1 & (0 \leq t < \pi) \end{cases}$$



この関数をフーリエ級数展開し、 k 項までの和を求めた結果が、 s_k のような波形となる。



k が大きくなるほど、 s_k は元の矩形波 $f(t)$ に近づいていることがわかる。

ここで、元の関数の不連続点である $t = \frac{T}{n}$ において、 s_k は不連続点を通して

例えば、 $t = 0$ において、 $t = 0$ より左側では $-A$ に近い値、右側では A に近い値をとる。

- $t = 0$ に右から近づいていくと、 s_k は A に近づいていく（右極限は A ）
- $t = 0$ に左から近づいていくと、 s_k は $-A$ に近づいていく（左極限は $-A$ ）

そして、 $t = 0$ において、 s_k は A と $-A$ の間の値（原点）を通して

一般に、不連続となる t において、フーリエ級数展開の値は、その点での左右の極限値の平均値となる。

不連続点におけるフーリエ級数の収束

$f(t)$ が $t = a$ で不連続のとき、フーリエ級数の値は左極限 $f(a-0)$ と右極限 $f(a+0)$ の平均値に収束する。

$$\lim_{t \rightarrow a} s_k(t) = \frac{f(a-0) + f(a+0)}{2}$$

2.4.5 フーリエ級数展開の意味

フーリエ級数展開の式は、

- 1 の係数が a_0
- $\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ の係数が a_n
- $\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$ の係数が b_n

となっていた。

フーリエ級数展開は、次の基本関数系を使った級数展開といえる。

$$\left\{1, \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right\}$$

ここで、

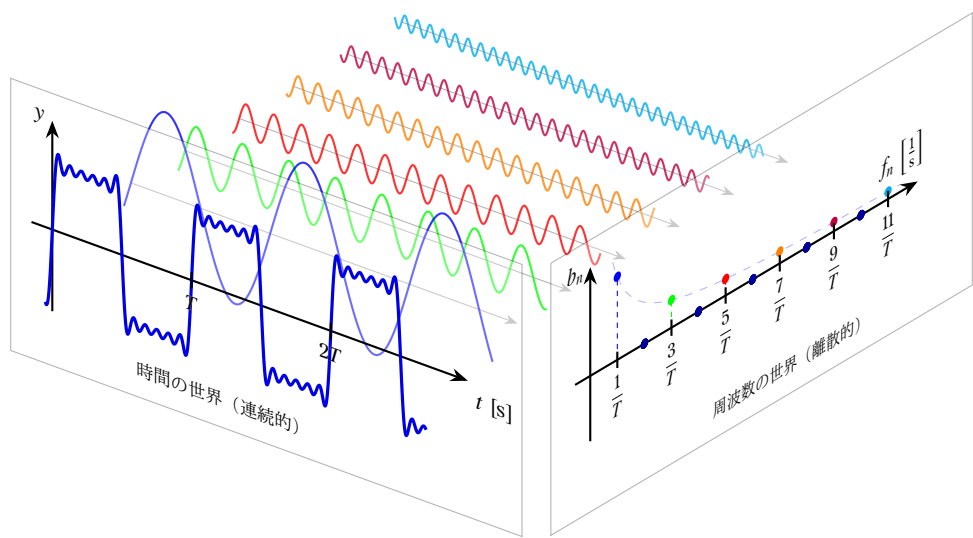
REVIEW

$\sin \omega t$ や $\cos \omega t$ は、角周波数 ω の正弦波と呼ばれる

ことを思い出すと、フーリエ級数展開を構成する基本関数系は、角周波数 $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$ の正弦波である。

(1 は $\cos \frac{2\pi nt}{T}$ における、 $n = 0$ の場合だと考えることができる。)

つまり、フーリエ級数展開は、関数 $f(t)$ を角周波数 ω_n の正弦波に分解することである。



関数 $f(t)$ がどのような周波数成分で構成されているか？を解き明かすのがフーリエ級数展開で、フーリエ係数は時間領域から周波数領域へのマッピングの役割を果たしている。

2.4.6 フーリエ級数展開のさまざまな表現式

フーリエ級数展開の式は、文献によって異なるいくつかの形で表現される。

定数項をまとめた表現

定数項 a_0 を、 a_n の $n = 0$ の場合として考えることができる。

その場合、フーリエ級数展開は次のように表される。

フーリエ級数展開（フーリエ係数を整理した表現）

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_n, b_n は次のようになる。

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

角周波数を使った表現

角周波数 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ を使って、フーリエ級数展開の式を書き換えることもできる。

フーリエ級数展開（角周波数を使った表現）

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、角周波数 ω_0 を用いて、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_0 n t + b_n \sin \omega_0 n t)$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos \omega_0 n t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin \omega_0 n t dt$$

区間を 0 始まりにずらした表現

有限区間 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ で定義された関数のフーリエ級数展開を考えてきたが、その有限区間は区間幅が T であればなんでもよい。

特に、 $0 \leq t \leq T$ で定義された関数のフーリエ級数展開を考えることも多い。

区間を変えても、周期関数への拡張は同様の議論により成り立ち、次のことがいえる。

フーリエ級数展開（積分区間を 0 始まりにした表現）

周期 T の周期関数 $f(t)$ について、

フーリエ級数展開

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \right\}$$

が成り立つとしたら、フーリエ係数 a_0, a_n, b_n は次のようになる。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

このフーリエ係数の式は、区間 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ の場合の式を平行移動＋置換積分することで示される。

Chapter 3

線形システム

3.1 線形性

線形性の1つの解釈 システムにおいて、次のような性質を線形性という。

1. 倍の刺激があれば、倍の反応が生まれる
2. 2つの刺激があれば、それぞれが独立して反応する