




線形写像の単射性と表現行列

線形写像 f が単射であることを、表現行列 A の性質として述べると、次のような言い換えができる

ref: 行列と行列式の基礎 p67~68

 線形写像の単射性と表現行列 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値である

- i. f は単射
- ii. $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ は自明な解しか持たない
- iii. $\text{rank}(A) = n$

証明

(i) \iff (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$


f が単射であることの言い換えは、

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \implies \mathbf{x} = \mathbf{o}$$

であり、 $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ が自明解しか持たないことは、

$$A\mathbf{x} = \mathbf{o} \implies \mathbf{x} = \mathbf{o}$$

が成り立つということである

$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ であるから、これらの 2 つの条件は同値である 

(ii) \iff (iii)

斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ に自明解しか存在しないことと

$$\text{rank}(A) = n$$

と同値であることは以前証明済み ■