第 10 章

線形空間の基底と次元

抽象化された線形空間

線形代数の理論は、線型独立性や線形写像を基礎にしている。

これらは線形結合、すなわちベクトルの和とスカラー倍を用いて定義された。
任意のベクトルは線形結合で表され、線形写像は線形結合を保つ写像として定義される。

そこで、和とスカラー倍が定義された集合なら、線形写像の理論を適用できるのではないか？という発想が生まれる。
あえて抽象的に議論することで、多項式、関数、数列なども、線形代数の枠組みで扱うことができるようになる。

線形空間の公理

和とスカラー倍が定義された一般の集合を、線形空間（`linear space`）として定義する。

そして、その集合の元をベクトル（`vector`）と呼ぶ。
和とスカラー倍が定義されていれば、数ベクトルと同様に、線形結合によりその元を表すことができるからだ。
この意味で、線形空間はベクトル空間（`vector space`）と呼ばれることもある。

def 10.1 - 線形空間の公理

集合 V が K 線型空間（あるいは K 上の線形空間）であるとは、V に加法と、K の元によるスカラー倍が定義されていて、次の条件が満たされていることである。

i. 交換法則：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$
ii. 結合法則：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$、$k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$
iii. 分配法則：$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$、$(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$
iv. $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$（1 は体 K の乗法に関する単位元）
v. 零元の存在：$\boldsymbol{o}$ と書かれる特別な元が存在し、任意の $\boldsymbol{a}\in V$ に対して $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{a}$
vi. 和に関する逆元の存在：任意の $\boldsymbol{a}\in V$ に対して $-\boldsymbol{a}$ と書かれる特別な元が存在し、$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{o}$

線形空間は必ず零元を含むことから、線形空間は空集合（`empty set`）ではないことに注意しよう。

部分空間

$m>n$ の場合、$m\times n$ 型行列 A は、写し先の空間をカバーしきれない写像を表していた。（手がかりが多すぎる場合 [第 5 章]）
つまり、写った結果が空間の一部、部分空間になるということである。

そこで、線型空間 V の部分集合であって、それ自体もまた線形空間になるような集合について考える。これは、原点を含む直線や平面などを一般化した概念である。

def - 部分空間

V を線形空間とする。W が V の部分空間（`subspace`）であるとは、W が V の部分集合であり、次の条件を満たすことをいう。

i. 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ に対して、$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$

ii. 任意の $\boldsymbol{u} \in W$、任意のスカラー c に対して、$c\boldsymbol{u} \in W$

iii. V の零元 $\boldsymbol{o}$ は W の元

条件 (i) を満たすことを、W は加法で**閉じている**（closed）という。

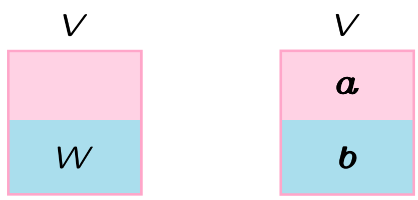
条件 (ii) を満たすことを、W はスカラー倍で**閉じている**という。

また、空集合は条件 (i)、(ii) は満たすが、条件 (iii) を満たさない。
def 10.1「線形空間の公理」には零元の存在が含まれているため、空集合は線型空間ではない。
空集合を排除するために、条件 (iii) が必須となる。

入れものの空間 V のことはあまり意識せずに、集合 W とそのベクトル演算に着目して、ある V の線形部分空間のことを単に**線形空間**と呼ぶこともある。

部分空間の図示

部分空間を視覚的に表すには、箱を使うと便利である。



- 左図：V の部分空間が W である
- 右図：$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ が、$\boldsymbol{b} \in W$ であり $\boldsymbol{a} \notin W$ である

部分空間の例：V 自身

$V \supseteq V$ であり、V は線形空間であるから、V 自身も V の部分空間といえる。

部分空間の例：零ベクトルだけからなる集合

零ベクトル $\boldsymbol{o}$ だけからなる部分集合 $\{\boldsymbol{o}\}$ も部分空間である。

theorem 10.1 – 部分空間における零ベクトルの包含

部分空間は必ず零ベクトル $\boldsymbol{o}$ を含む。

証明

V は空集合でないので、ある $\boldsymbol{v} \in V$ をとるとき、線形部分空間の定義 (ii) より

$$0 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \in V$$

よって部分空間は必ず $\boldsymbol{o}$ を含む。 ■

部分空間の例：$n-1$ 次平面

たとえば、$\mathbb{R}^3$ において座標を (x, y, z) とするとき、xy 平面は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。

def 10.2 – 座標部分空間

$\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合 I に対して、x_i $(i \in I)$ 以外の座標がすべて 0 である部分集合は $\mathbb{R}^n$ の部分集合である。

このようなものを座標部分空間といい、$\mathbb{R}^I$ と書く。

$$\mathbb{R}^I = \langle \boldsymbol{e}_i \mid i \in I \rangle$$

と表すこともできる。

部分空間の例：線形写像の像

theorem – 線形写像の像は部分空間

線形写像 $f: V \to W$ の像 $\mathrm{Im}(f)$ は W の部分空間である。

証明

和について

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}(f)$ とすると、$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}_1)$, $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{v}_2)$ とおける。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) \\ &= f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

となり、$\mathrm{Im}(f)$ は和について閉じている。 ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(f)$ と $c \in \mathbb{R}$ をとると、$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})$ とおける。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{u} &= cf(\boldsymbol{v}) \\ &= f(c\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

となり、$\mathrm{Im}(f)$ はスカラー倍について閉じている。 ■

部分空間の例：線形写像の核

theorem 10.2 – 部分空間の零ベクトルと線形写像

部分空間 V, W の間の線形写像 $f\colon V \to W$ に対して、V の零ベクトルを $\boldsymbol{o}_V$、W の零ベクトルを $\boldsymbol{o}_W$ とすると、

$$f(\boldsymbol{o}_V) = \boldsymbol{o}_W$$

証明

任意の $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$ に対して、

$$\begin{aligned} 0 \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{o}_V \\ 0 \cdot \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{o}_W \end{aligned}$$

が成り立つ。

$f(\boldsymbol{o}_V)$ は、f の線形性により、次のように変形できる。

$$f(\boldsymbol{o}_V) = f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

ここで、$f(\boldsymbol{v})$ は、f による $\boldsymbol{v} \in V$ の像であるので、W に属する。

そこで、$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{o}_V) &= 0 \cdot f(\boldsymbol{v}) \\ &= 0 \cdot \boldsymbol{w} \\ &= \boldsymbol{o}_W \end{aligned}$$

となり、目標としていた式が示された。 ■

theorem – 線形写像の核は部分空間

線形写像 $f\colon V \to W$ の核 $\mathrm{Ker}(f)$ は V の部分空間である。

証明

theorem 10.2「部分空間の零ベクトルと線形写像」の主張 $f(\boldsymbol{o}_V) = \boldsymbol{o}_W$ より、零ベクトルは核空間に属する。

$$\boldsymbol{o} \in \mathrm{Ker}(f)$$

和について

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ とすると、$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$ かつ $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ である。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) \\ &= \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

したがって、$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ である。 ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ と $c \in \mathbb{R}$ をとると、$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$ である。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} f(c\boldsymbol{u}) &= cf(\boldsymbol{u}) \\ &= c \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

したがって、$c\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ である。 ■

ベクトルが張る空間

$m \times n$ 型行列 A で写れる範囲を $\mathrm{Im}\, A$ として定義した。

$\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトルとすると、$\mathrm{Im}\, A$ は次のようなものといえる。

$\boldsymbol{x}$ をいろいろ動かしたときの、

$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ が動ける範囲が $\mathrm{Im}\, A$

ここで、A を列ベクトルを並べたもの $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ として書き、$\boldsymbol{x}$ も成分 $x_1, \ldots, x_n$ で書けば、

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

つまり、

数 $x_1, \ldots, x_n$ をいろいろ動かしたときの、

$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ が動ける範囲が $\mathrm{Im}\, A$

であり、この線形結合が動ける範囲を「ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の張る空間」という。

def 10.3 – ベクトルが張る空間

k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ を与えたとき、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle \quad \text{あるいは} \quad \mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$$

によって表し、これを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が**張る空間**という。

def – 生成系

$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であるとき、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の**生成系**（system of generators）という。

このとき、V は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ によって**生成される**（generated）ともいう。

ベクトルが張る空間は部分空間

theorem – ベクトルが張る空間は部分空間

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は部分空間である

証明

[Todo 1: book: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.2]

theorem – 部分空間の張る空間は部分空間

$V \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ とすると、

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \subset V$$

証明

[Todo 2: book: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.4]

ベクトルが張る空間の幾何的解釈

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の張る空間 $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ は、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で定まる平面の一般化といえる。（ここで、点は 0 次元平面、直線は 1 次元平面と考える。）

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がすべて $\boldsymbol{o}$ なら、$\boldsymbol{o}$ ただ一点が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がすべて一直線上にあれば、その直線が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がすべて平面上にあれば、その平面が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$

ベクトルが張る空間と有限従属性

theorem 10.3 - 有限従属性定理の抽象版

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ とする

$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ に含まれる k 個よりも多い個数のベクトルの集合は線形従属である

証明

[Todo 3: book: 行列と行列式の基礎 p41 （問 1.14）]

基底と次元

部分空間のパラメータ表示を与えるために基準として固定するベクトルの集合を定式化すると、基底という概念になる。

基底は、座標空間の「座標軸」に相当するものであり、部分空間を生成する独立なベクトルの集合として定義される。

def - 基底

V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする。ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subset V$ は、次を満たすとき V の基底であるという。

i. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ は線型独立である
ii. $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$

線形空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ を 1 つ見つけたら、ベクトルの個数を数えて、V の次元が k であるとする。

def 10.4 - 次元

線形空間 V の基底をなすベクトルの個数を V の次元といい、$\dim V$ と書く。

また、$\dim\{\boldsymbol{o}\} = 0$ と定義する。

基底の例：標準基底

たとえば、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり、これを $\mathbb{R}^n$ の標準基底という。

標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は n 個のベクトルからなるため、$\mathbb{R}^n$ の次元は n である。

theorem - 数ベクトル空間の標準基底

数ベクトル空間 K^n において、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は K^n の基底である。

証明

部分空間を生成すること

任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in K^n$ は、次のように表せる。

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

したがって、K^n は $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ によって生成される。 ■

線型独立であること

$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の線形関係式

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{o}$$

を考える。

このとき、左辺は

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられるので、これが零ベクトルになるためには、

$$c_1 = 0, \quad , \cdots , \quad c_n = 0$$

でなければならない。

よって、$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は線型独立である。 ■

基底と次元の定義の裏付け

このように基底と次元を定義するにあたって、次の保証が必要になる。

i. 任意の部分空間に、基底の定義を満たす有限個のベクトルが存在すること（基底の存在）
ii. 任意の部分空間に対して、基底をなすベクトルの個数が、基底の選び方によらず一定であること（次元の不変性）

基底の存在

線型独立なベクトルの延長

基底の構成と存在を示すために、次の補題を用いる。

theorem 10.4 – 線型独立なベクトルの延長

V を K^n の $\{\boldsymbol{o}\}$ でない部分空間とする。

このとき、V の線型独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ と、V に入らないベクトル $\boldsymbol{a}$ は線型独立である。

証明

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線型従属であるとする

すると、theorem 1.2「線形結合によるベクトルの表現」より、$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表され、V に入り、矛盾する

よって、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は線型独立である ■

この定理は、def 10.3「ベクトルが張る空間」の記号を用いると、次のように簡潔にまとめられる。

theorem – 線型独立なベクトルの延長

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が線型独立であって、$\boldsymbol{v}_{k+1} \notin \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\}$ は線型独立である

線型独立なベクトルの基底への拡張

K^n の $\{\boldsymbol{o}\}$ でない部分空間 V の線型独立なベクトルは、V の基底に拡張できる。

theorem 10.5 - 基底の存在

K^n の $\{\boldsymbol{o}\}$ でない部分空間 V には基底が存在する。

証明

$V \neq \{\boldsymbol{o}\}$ なので、V には少なくとも 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{o}$ が存在する。
theorem 1.3「単一ベクトルの線型独立性と零ベクトル」より、$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は線型独立である

このとき、$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subset V$ であるが、もしも $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle = V$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は V の基底である。

$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneq V$ ならば、$\boldsymbol{v}_2 \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ であるベクトルを V から選ぶことができる。
theorem 10.4「線型独立なベクトルの延長」より、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は線型独立である。

このとき、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subset V$ であるが、もしも $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = V$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は V の基底である。

$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subsetneq V$ ならば、$\boldsymbol{v}_3 \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であるベクトルを V から選ぶことができる。
theorem 10.4「線型独立なベクトルの延長」より、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は線型独立である。

以下同様に続けると、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle = V$ となるまで、V に属するベクトルを選び続けることができる。

ここで線型独立なベクトルを繰り返し選ぶ操作が無限に続かないこと（有限値 k が存在すること）は、theorem 9.2「有限従属性定理」により、K^n の中には n 個を超える線型独立なベクトルの集合は存在しないことから保証される。 ■

基底の延長

基底の存在証明で行った基底の構成をさらに続けることで、次の定理が得られる。

⚓ theorem 10.6 – 基底の延長

V を n 次元の線形空間とし、線型独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ が与えられたとする。

このとき、$(n-m)$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ を追加して、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底になるようにできる。

証明

theorem 10.5「基底の存在」の証明において、線型独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ が得られたところからスタートし、同様の手続きを繰り返せばよい。 ■

次元の不変性

⚓ theorem – 次元の不変性

K^n の部分空間 V の基底をなすベクトルの個数（次元）は一定である。

つまり、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ と $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l\}$ がともに V の基底ならば、$k = l$ である。

証明

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であり、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l$ は線型独立であるから、theorem 10.3「有限従属性定理の抽象版」より、$l \leq k$ である。

同様にして $k \leq l$ も成り立つので、$k = l$ である。 ■

線型独立なベクトルと次元

theorem – 線形独立なベクトルの最大個数と空間の次元

線形空間 V 中の線型独立なベクトルの最大個数は $\dim V$ と等しい。

証明

V の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k\}$ とすると、V には k 個の線型独立なベクトルが存在する。

また、$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であるため、theorem 10.3「有限従属性定理の抽象版」より、V 中の線型独立なベクトルの個数は k を超えることはない。

つまり、k は V に含まれる線型独立なベクトルの最大個数である。 ■

theorem – 線形空間を生成するベクトルの最小個数と次元

線形空間 V を張るベクトルの最小個数は $\dim V$ と等しい。

証明

[Todo 4: book: 行列と行列式の基礎 p100 問 3.3]

基底を写す線形写像

通常の関数では、定義域のすべての点で「対応する値をどうするか」を決めなければならない。数の対応表から点を 1 つ 1 つ打ち、最後にそれらを結ぶことで関数のグラフを描いた経験がある人も多いだろう。

一方で、線形写像は、「基底での値だけを決めれば、線形性により残りが全部決まる」という性質を持つ。線形写像を定めるには、定義域の基底がどこに行くか（基底の像）だけを指定すればよい。

線形写像は基底上の値だけで完全に決まる

この事実は、次のように示される。

theorem 10.7 - 基底を写す線形写像の存在

V を線型空間とし、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする。W を線型空間とし、$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W$ を任意に与えるとき、次を満たす線形写像 $f\colon V \to W$ が一意的に存在する。

$$f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

証明

f の存在

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は、基底 $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$ により一意的に

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{v}_i \quad (a_i \in K)$$

と表すことができる。

そこで、f を次のように定める。

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{w}_i$$

このとき、もし $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n b_i \boldsymbol{v}_i$ とも表せるなら、基底による表示の一意性から $a_i = b_i$（$i = 1, \ldots, n$）である。

よって、$\sum_{i=1}^n a_i \boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^n b_i \boldsymbol{w}_i$ となり、f の定義は一意に定まる。 ■

f の線形性

$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i,\ \ \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{v}_i$ とし、c_1, c_2 をスカラーとする。

このとき、$c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n} (c_1 a_i + c_2 b_i)\boldsymbol{v}_i$ であるから、f の定義より、

$$\begin{aligned} f(c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b}) &= \sum_{i=1}^{n} (c_1 a_i + c_2 b_i)\boldsymbol{w}_i \\ &= c_1 \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{w}_i + c_2 \sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{w}_i \\ &= c_1 f(\boldsymbol{a}) + c_2 f(\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

よって f は線形である。 ■

f の一意性

$f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i$ を満たす線形写像 $g \colon V \to W$ を任意にとる。

任意の $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$ に対し、f の線形性より、

$$g(\boldsymbol{v}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i g(\boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{w}_i = f(\boldsymbol{v})$$

したがって、$g = f$ である。 ■

この定理の条件を満たすものとして、証明では線形写像 f を次のように構成した。

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{w}_i$$

この f を、V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W$ に写す線形写像とよぶ。

特に、$V = K^n$ で、V の基底として標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を選んだときは、この f を $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \in W$ が定める線形写像ともよぶ。

基底による線形写像の決定と比較

theorem 10.7「基底を写す線形写像の存在」で述べたことから、$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ を V の基底とするとき、線形写像 f に対して $f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ の値が測定できれば、f の形を一意的に決定できる。

$$f(\boldsymbol{v}) = f(v_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{u}_n)$$

$$= \underbrace{v_1}_{\text{変数}} \overbrace{f(\boldsymbol{u}_1)}^{\text{定数}} + \cdots + \underbrace{v_n}_{\text{変数}} \overbrace{f(\boldsymbol{u}_n)}^{\text{定数}}$$

上の式において、$v_1, \ldots, v_n$ は $\boldsymbol{v}$ によって決まる変数である。

$f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_n)$ の値さえ決まれば、どんな $\boldsymbol{v}$ を入れても f の値が定まる。

これが「f の形が決まる」ということである。

このことを利用すると、基底に関する線形写像の値を比較することで、複数の線形写像が等しいかどうかを判別できる。

theorem 10.8 - 基底上の値による線型写像の同一性判定

f, g をともに V から W への線型写像とする。f と g が等しいとは、V のある基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対して、次が成り立つことと同値である。

$$f(\boldsymbol{v}_i) = g(\boldsymbol{v}_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

証明

$f = g \Longrightarrow f(\boldsymbol{v}_i) = g(\boldsymbol{v}_i)$

$f = g$ ならば、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v})$ が成り立つ。

よって、基底ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ に対しても $f(\boldsymbol{v}_i) = g(\boldsymbol{v}_i)$ が成り立つ。 ■

$f(\boldsymbol{v}_i) = g(\boldsymbol{v}_i) \Longrightarrow f = g$

V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は、基底ベクトルの線形結合として表される。

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

このとき、線型写像の線形性から、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}) &= f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) \\ &= c_1 g(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_n g(\boldsymbol{v}_n) \\ &= g(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = g(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

よって、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = g(\boldsymbol{v})$ が成り立つので、$f = g$ である。 ■

Zebra Notes

Type	Number
todo	4