Chapter 1

線形代数

線形代数は、高次元に立ち向かうための強力な道具となる。

どれだけ高次元に話を広げたとしても、「関係」を語る言葉の複雑さが増すことはない。

この章では、そんな状況を実現するための理論を追いかけていく。

Contents

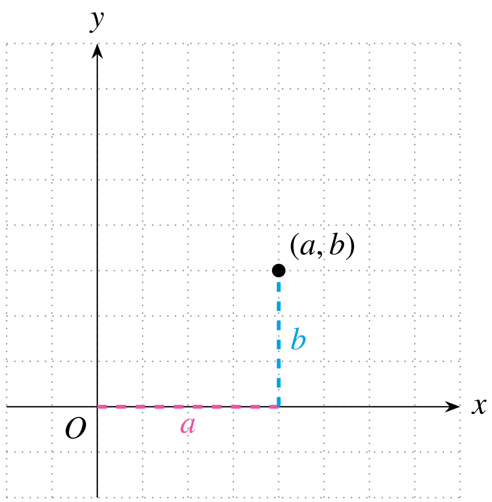
1.1 ベクトルの作り方

1.1.1 移動の表現としてのベクトル

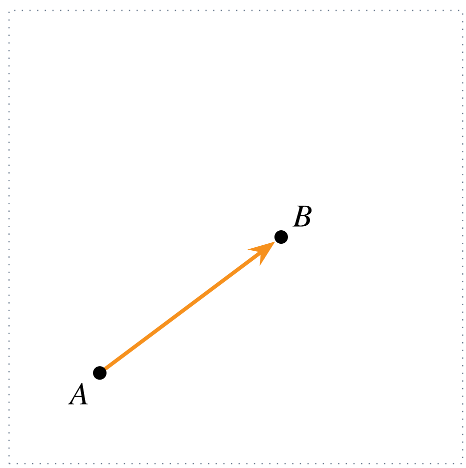
平面上のある点の位置を表すのに、よく使われるのが直交座標である。
直交座標では、x 軸と y 軸を垂直に張り、

- 原点 O からの x 軸方向の移動量（x 座標）
- 原点 O からの y 軸方向の移動量（y 座標）

という 2 つの数の組で点の位置を表す。



「位置の特定」という視点



「移動」という視点

座標とは、「x 軸方向の移動」と「y 軸方向の移動」という 2 回の移動を行った結果である。
右にどれくらい、上にどれくらい、という考え方で平面上の「位置」を特定しているわけだが、単に「移動」を表したいだけなら、点から点へ向かう矢印で一気に表すこともできる。

ある地点から別のある地点への「移動」を表す矢印をベクトルという。

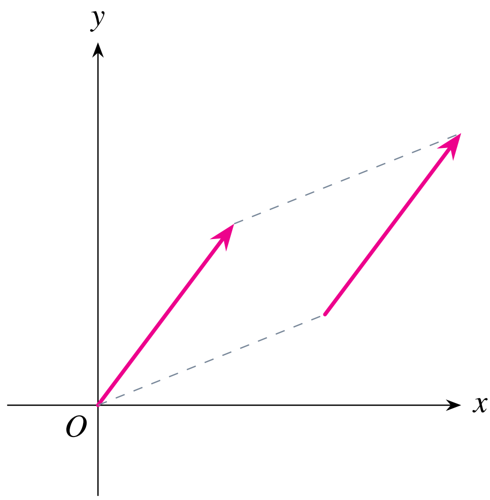
ベクトルが示す、ある地点からこのように移動すれば、この地点にたどり着く…といった「移動」の情報は、相対的な「位置関係」を表す上で役に立つ。

座標とベクトルの違い

座標は「位置」を表すものだが、ベクトルは「移動」を表すものにすぎない。

座標は「原点からの」移動量によって位置を表すが、ベクトルは始点の位置にはこだわらない。

たとえば、次の 2 つのベクトルは始点の位置は異なるが、同じ向きに同じだけ移動している矢印なので、同じベクトルとみなせる。



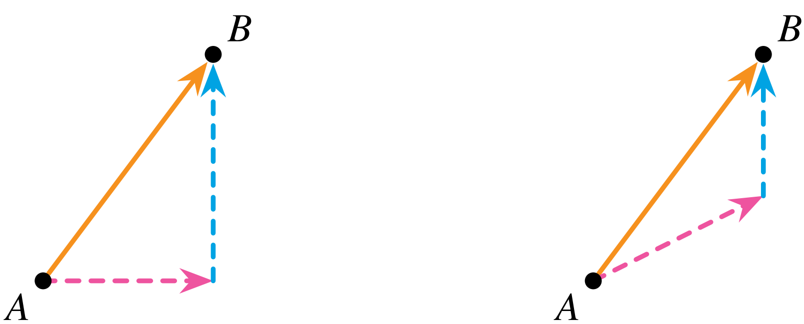
このような「同じ向きに同じだけ移動している矢印」は、平面内では平行な関係にある。

つまり、平行移動して重なる矢印は、同じベクトルとみなすことができる。

移動の合成とベクトルの分解

ベクトルは、各方向への移動の合成として考えることもできる。

純粋に「縦」と「横」に分解した場合は直交座標の考え方によく似ているが、必ずしも直交する方向のベクトルに分解する必要はない。

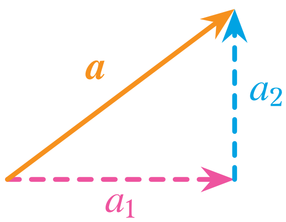


「縦」と「横」に分解　　　　他の分解も考えられる

1.1.2　高次元への対応：数ベクトル

2 次元以上の空間内の「移動」を表すには、「縦」と「横」などといった 2 方向だけでなく、もっと多くの方向への移動量を組み合わせて考える必要がある。
また、4 次元を超えてしまうと、矢印の描き方すら想像がつかなくなってしまう。それは、方向となる軸が多すぎて、どの方向に進むかを表すのが難しくなるためだ。

そこで、一旦「向き」の情報を取り除くことで、高次元に立ち向かえないかと考える。
移動を表す矢印は「どの方向に進むか」と「どれくらい進むか」という向きと大きさの情報を持っているが、その「どれくらい進むか」だけを取り出して並べよう。



$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

こうして単に「数を並べたもの」もベクトルと呼ぶことにし、このように定義したベクトルを数ベクトルという。

数を並べるとき、縦と横の 2 通りがある。それぞれ列ベクトル、行ベクトルとして定義する。

列ベクトル　数を縦に並べたものを 列ベクトル という。

$$\boldsymbol{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

行ベクトル　数を横に並べたものを 行ベクトル という。

$$\boldsymbol{a} = [a_i] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

単に「ベクトル」と言った場合は、列ベクトルを指すことが多い。

行ベクトルは、列ベクトルを横倒しにしたもの（列ベクトルの転置）と捉えることもできる。

転置による行ベクトルの表現

行ベクトルは、列ベクトル $\boldsymbol{a}$ を 転置 したものとして表現できる。

$$\boldsymbol{a}^\top = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

1.1.3 ベクトルの演算

ベクトルによって数をまとめて扱えるようにするために、ベクトルどうしの演算を定義したい。

ベクトルの和

ベクトルどうしの足し算は、同じ位置にある数どうしの足し算として定義する。

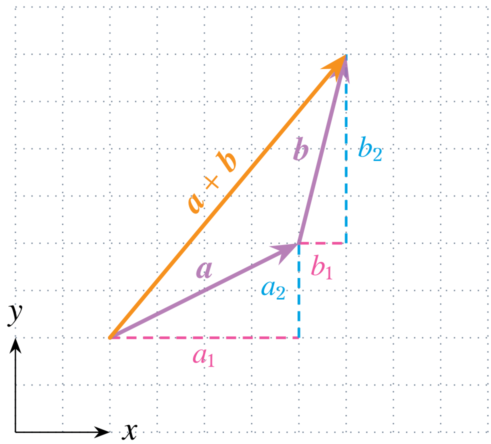
ベクトルの和　2 つの n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の和を次のように定義する。

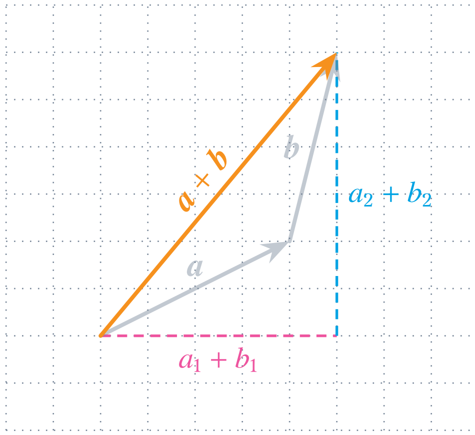
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = [a_i] + [b_i] = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

i 番目の数が $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に存在していなければ、その位置の数どうしの足し算を考えることはできない。
そのため、ベクトルの和が定義できるのは、同じ次元を持つ（並べた数の個数が同じ）ベクトルどうしに限られる。

数ベクトルを「どれくらい進むか」を並べたものと捉えると、同じ位置にある数どうしを足し合わせるということは、同じ向きに進む量を足し合わせるということになる。

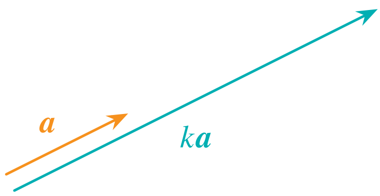
たとえば、x 軸方向に a_1、y 軸方向に a_2 進んだ場所から、さらに x 軸方向に b_1、y 軸方向に b_2 進む…というような「移動の合成」を表すのが、ベクトルの和である。



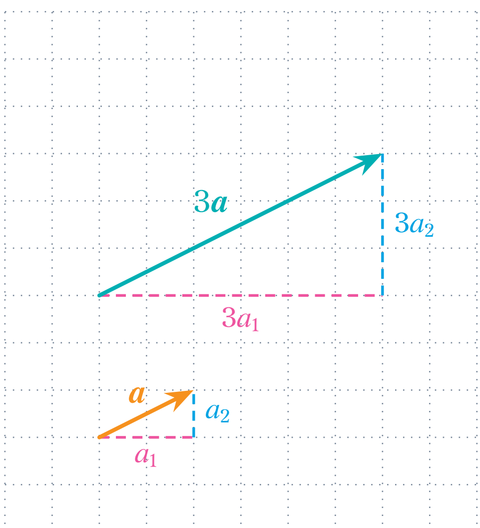


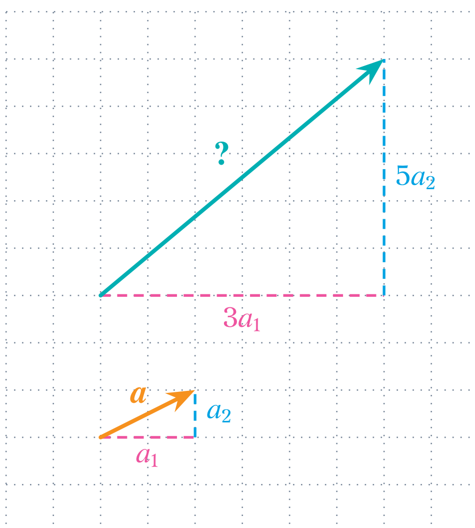
ベクトルのスカラー倍

「どれくらい進むか」を表す数たち全員に同じ数をかけることで、向きを変えずにベクトルを「引き伸ばす」ことができる。



ここで向きごとにかける数を変えてしまうと、いずれかの方向に多く進むことになり、ベクトルの向きが変わってしまう。そのため、「同じ」数をかけることに意味がある。





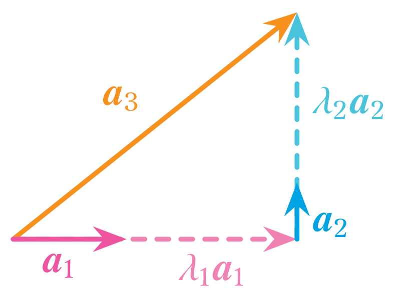
そこで、ベクトルの定数倍（スカラー倍）を次のように定義する。

ベクトルのスカラー倍　n 次元ベクトル $\boldsymbol{a}$ の k 倍を次のように定義する。

$$k\boldsymbol{a} = k[a_i] = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{bmatrix}$$

1.1.4　一次結合

ベクトルを「引き伸ばす」スカラー倍と、「つなぎ合わせる」足し算を組み合わせることで、あるベクトルを他のベクトルを使って表すことができる。



$$\boldsymbol{a}_3 = \lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2$$

このように、スカラー倍と和のみを使った形を一次結合もしくは線形結合という。

1.1.5　基底

3 次元までのベクトルは、矢印によって「ある点を指し示すもの」として定義できる。
しかし、4 次元以上の世界に話を広げるため、ベクトルを単に「数を並べたもの」として再定義した。

点を指し示すためのもう一つの概念として、座標がある。
座標も結局は矢印と同様に、x 軸方向にこのくらい進み、y 軸方向にこのくらい進む、というように、「進む方向」と「進む長さ」を持つ。

単なる数の並びを、向きと大きさを持つ量として復元するための道具が、基底である。

1.2 ベクトルの測り方

Under construction...