平均値の定理、テイラーの定理を見直す

平均値の定理を見直す

■**平均値の定理**　$f(x)$ が a から b までの間のどの x でも微分係数を求めることができるとき、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

をみたす c が少なくとも 1 つ存在する

この定理をなぜ「平均値の定理」というのだろうか？

微分できる関数 $y = f(x)$ を考える

x が a から b まで変化するとき、途中の変化の様子は考えずに出発点と終点だけで考えると、y は $f(a)$ から $f(b)$ まで変化したことになり、その平均変化率は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

となるが、平均値の定理は a と b の間に、ちょうどこの変化率と同じだけ変化した瞬間が必ずあることを示している

平均変化率に等しい瞬間変化率があるということで、この定理を平均値の定理という

＊　＊　＊

平均値の定理のもとになるロルの定理

■**ロルの定理**　関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能とする

$f(a) = f(b) = 0$ のとき、

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する

■**ロルの定理を使った平均値の定理の証明**

$f(x)$ が決まってしまえば、定数 a, b を与えたとき、平均変化率はある定数になる

その定数を k とする

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

分母を払って移項すると、

$$f(b) - \{f(a) + k(b-a)\} = 0$$

ここで、この式の左辺の a を x に置き換えた関数 $F(x)$ を考える

$$F(x) = f(x) - \{f(x) + k(x-x)\}$$

$F(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で連続かつ開区間 (a,b) で微分可能である

しかも、

$$F(b) = F(a) = 0$$

は明らかだから、ロルの定理によって、

$$F'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する

ここで導関数 $F'(x)$ を計算すると、

$$F'(x) = -f'(x) - \{f'(x) + k\}$$

だから、$F'(c) = 0$ より、

$$f'(c) = k$$

すなわち、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を得る □

＊　＊　＊

■定理　区間 $[a, b]$ で $f'(x) > 0$ なら、この区間で $f(x)$ は増加関数である

すなわち、この区間内で $x_1 < x_2$ なら $f(x_1) < f(x_2)$ である

$f'(x)$ は接線の傾きである、という幾何学的・直感的な理解から、その傾きが正なら増加しているのは明らかだが、平均値の定理を使うと、図に頼らずに証明することができる

■平均値の定理による証明

平均値の定理より、

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad (a \leq x_1 < c < x_2 \leq b)$$

となる c が存在するが、右辺は $f'(c) > 0$、$x_2 - x_1 > 0$ より正である □