第1章

抽象線形空間

線形空間の公理

線形代数の理論は線型独立性や線形写像を基礎にしている これらは線形結合、すなわちベクトルの和とスカラー倍を用いて定義された

任意のベクトルは線形結合で表され、線形写像は線形結合を保つ写像として定義される

そこで、和とスカラー倍が定義された一般の集合に対しても、線型空間の理論を適用できな いか?と考える

和とスカラー倍が定義された一般の集合を、改めて<mark>線形空間</mark>として定義する そして、その集合の元を<mark>ベクトル</mark>と呼ぶことにする

和とスカラー倍が定義されていれば、線形結合によりその元を表すことができるからだ

縁形空間 集合 V の任意の元 \boldsymbol{a} , \boldsymbol{b} と体 K の任意の元 k に対して、V の元 \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} (和) が定まり、V の元 $k\boldsymbol{a}$ (スカラー倍) が定まるとする これらの演算が次の条件を満たすとき、V を K 上の線形空間、あるいは K 線型空間と呼び、線型空間の元をベクトルと呼ぶ

i. 交換法則: a + b = b + a

- ii. 結合法則: $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}), k(l\boldsymbol{a}) = (kl)\boldsymbol{a}$
- iii. 分配法則: $k(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a} + k\boldsymbol{b}$ 、 $(k+l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a} + l\boldsymbol{a}$
- iv. $1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ (1 は体 K の乗法に関する単位元)
- v. 零元の存在: $\mathbf{0}$ と書かれる特別な元が存在し、任意の $\mathbf{a} \in V$ に対して $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$
- vi. 和に関する逆元の存在:任意の $m{a} \in V$ に対して $-m{a}$ と書かれる特別な元が存在し、 $m{a} + (-m{a}) = (-m{a}) + m{a} = m{0}$

線形写像の空間

V.W をともに有限次元 K 上の線形空間とする

V から W への線形写像全体の集合を $\operatorname{Hom}(V,W)$ と書く特に、V の線形変換全体の集合は $\operatorname{End}(V)$ と書く

このとき、Hom(V, W) に線型空間の構造(和とスカラー倍)を次のように導入する

縁形写像の和とスカラー倍 線形写像 $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ と $c \in K$ に対して、和とスカラー倍を次のように定義する

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$$
$$(cf)(v) := c \cdot f(v)$$

これらの演算は、再び $V \rightarrow W$ の線形写像を定めることが確認できる

 線形写像全体による線形空間 線形写像全体の集合 Hom(V,W) は K 上の線形空間である

証明 証明

加法が線形性を満たす

f, g をともに線形写像とし、任意の $v_1, v_2 \in V$ と $a, b \in K$ に対して、

$$(f+g)(av_1 + bv_2)$$

$$= f(av_1 + bv_2) + g(av_1 + bv_2)$$

$$= af(v_1) + bf(v_2) + ag(v_1) + bg(v_2)$$

$$= a(f(v_1) + g(v_1)) + b(f(v_2) + g(v_2))$$

$$= a(f+g)(v_1) + b(f+g)(v_2)$$

よって、f + g は線形写像である

スカラー倍が線形性を満たす

f を線形写像とし、任意の $v_1, v_2 \in V$ と $a, b, c \in K$ に対して、

$$(cf)(av_1 + bv_2) = cf(av_1 + bv_2)$$

$$= c \cdot (f(av_1 + bv_2))$$

$$= c \cdot (f(av_1) + f(bv_2))$$

$$= c \cdot (af(v_1) + bf(v_2))$$

$$= a(cf)(v_1) + b(cf)(v_2)$$

よって、cf は線形写像である

線型空間の公理をすべて満たすことも、容易に確認できる