Chapter 1

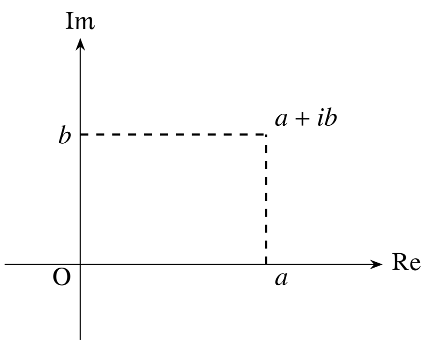
複素数と複素関数

1.1　複素平面

複素数は、実部（Real Part）と虚部（Imaginary Part）という 2 つの数から成る。

そのため、実部を横軸に、虚部を縦軸にとった平面を考え、1 つの複素数をこの平面上の 1 点として表すことができる。

複素平面　実部を横軸、虚部を縦軸にとった平面を複素平面と呼ぶ。



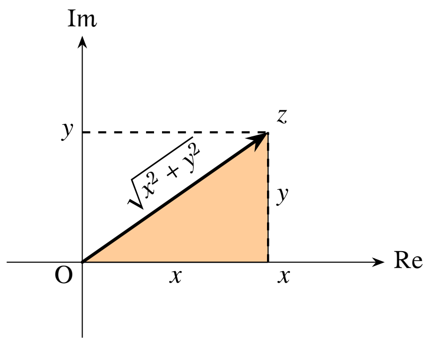
1.2　複素数の絶対値

複素数の絶対値

複素平面において、原点から複素数 z までの距離を複素数 z の絶対値と定義する。

この距離は三平方の定理から求められ、$|z|$ と表す。

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

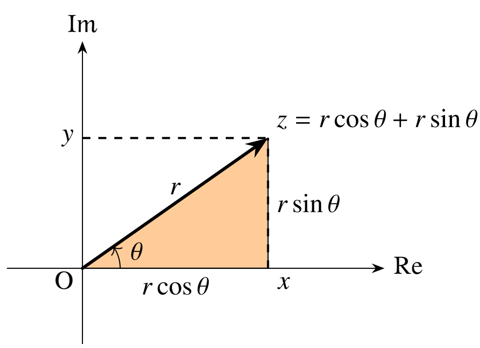


1.3 複素数の極形式による表現

極形式

複素数 z は、絶対値 r と偏角 θ を用いて次のように表すことができる。

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$



1.4 偏角と主値

$x = r\cos\theta$、$y = r\sin\theta$ に、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ を代入して整理した関係式から、偏角を改めて定義する。

偏角

複素数 z を極形式で表現すると、

$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$、$\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ という関係が成り立つ。

この関係を満たす θ を偏角と呼び、次のように表す。

$$\arg z := \theta$$

ここで、θ を整数回 2π シフトさせても（何周回っても）、複素数 z の値は変わらない。

つまり、1 つの複素数に対して偏角の値は複数考えられるので、次のような主値を定義する。

偏角の主値

$0 \leq \theta \leq 2\pi$、もしくは $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲にある偏角を偏角の主値と呼び、次のように表す。

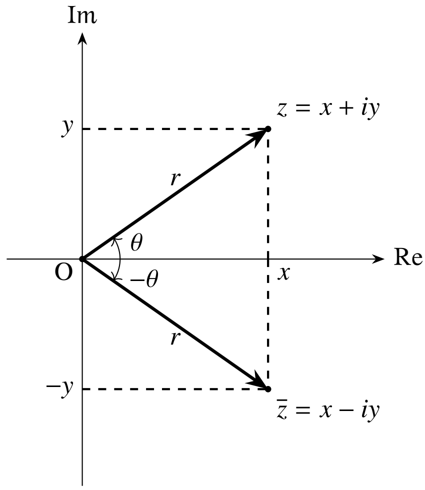
$$\operatorname{Arg} z := \theta$$

1.5 共役複素数

共役複素数

複素数 $z = x + iy$ に対して，その共役複素数 $\bar{z}$ を次のように定義する。

$$\bar{z} := x - iy$$



共役複素数と絶対値

複素数 z とその共役複素数 $\bar{z}$ の積は、z の絶対値の二乗に等しい。

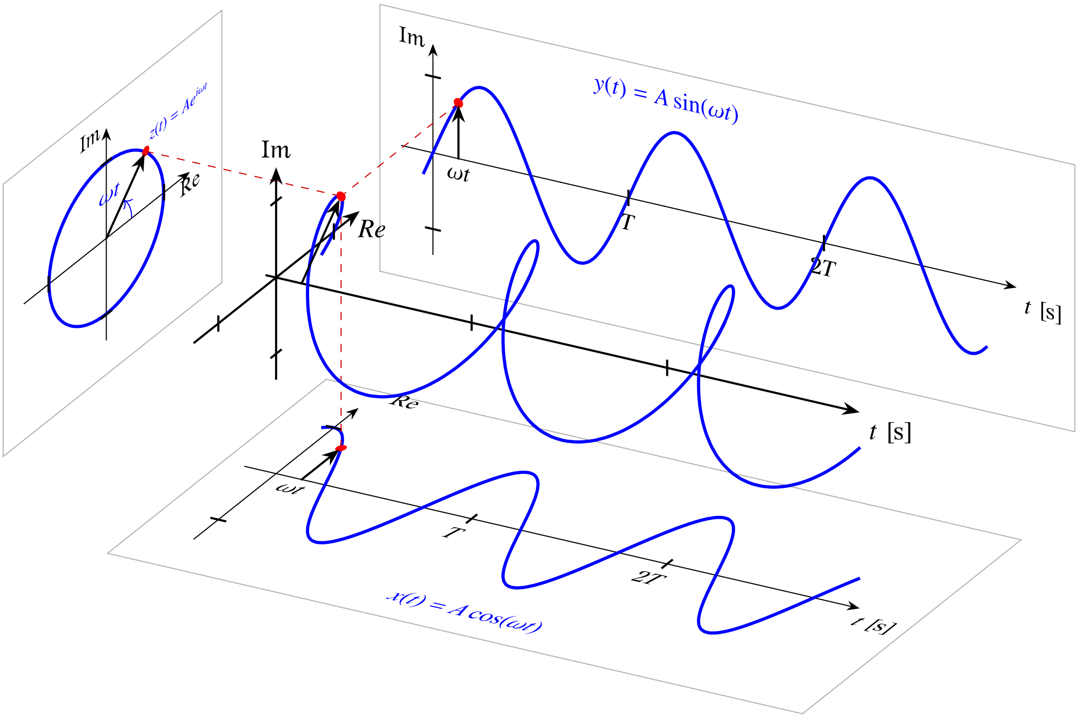
$$z\bar{z} = |z|^2$$

Proof

複素数 $z = x + iy$ とその共役複素数 $\bar{z} = x - iy$ の積を計算する。

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\ &= x^2 - ixy + ixy - i^2y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

1.6 オイラーの公式



Im
Re
$z(t) = Ae^{j\omega t}$
ωt
Im
Re
t [s]
Im
$y(t) = A\sin(\omega t)$
ωt
T
$2T$
t [s]
Re
ωt
T
$2T$
$x(t) = A\cos(\omega t)$
t [s]