正則行列

「線形代数における鳩の巣原理」から、次のことがいえる

ref: 行列と行列式の基礎 p71

正則の判定と階数　n 次正方行列 A に対して、

$$A \text{ が正則行列} \iff \operatorname{rank}(A) = n$$

この定理は、線形変換 f（もしくは正方行列 A）が正則かどうかについて、階数という 1 つの数値で判定できることを示している

列ベクトルの線型独立性による正則の判定　n 次正方行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

に対して、次が成り立つ

$$A \text{ が正則行列} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立}$$

証明

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ が線型独立であることは、

$$\operatorname{rank}(A) = n$$

と同値であることを以前示した

さらに、先ほど示した定理より、$\operatorname{rank}(A) = n$ は A が正則行列であることと同値である　■

逆行列の計算法と線形方程式

正則行列 A に対して、方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のただ 1 つの解は次で与えられる

ref: 行列と行列式の基礎 p72〜73

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

A^{-1} が計算できれば、行列のかけ算によって線型方程式の解が求められる

正則行列 A の逆行列を計算するために、次の定理に注目しよう

逆行列の計算法の原理　正方行列 A に対して、$AB = E$ を満たす正方行列 B があるならば、A は正則であり、B は A の逆行列である

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p72 命題 2.4.6]

上の定理の証明は、逆行列の計算法のヒントを含んでいる

A の逆行列 B を求めるには、n 個の線形方程式

$$A\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

を解けばよい

A は階数 n の n 次正方行列なので、行変形で A から E に到達することができる

$\boldsymbol{b}_i$ を求めるには、行変形により

$$(A \mid \boldsymbol{e}_i) \to \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_i)$$

とすればよい

$\boldsymbol{i}$ ごとに掃き出し法を何度も実行しないといけないのかと思いきや、一度にまとめられる

$$\begin{gathered}(A \mid E) = (A \mid \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \to \\ \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n) = (E \mid B)\end{gathered}$$

このようにすれば、行変形は 1 通りで十分である

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1