線形代数の整理帳

tomixy

2025 年 5 月 29 日

目次

第 1 章

ベクトル

ベクトルと次元

いくつかの情報の組を並べて書いたものをベクトルという

また、ベクトルに並んだ情報の個数を次元という

ref: 図解でわかる線型代数 p16〜19

n 次の数ベクトル空間

ref: 行列と行列式の基礎 p6〜8

ベクトルの集合が張る空間 k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ を与えたとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$$

によって表し、これを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が張る空間という

第 2 章

線形写像と行列の演算

行列の導入

長方形に並んだ数の集まりを

ref: 行列と行列式の基礎 1.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

などと書き、行列と呼ぶ

横の数字の並びを行、縦の数字の並びを列と呼ぶ

A は m 個の行と n 個の列をもつ行列である

第 i 行、第 j 列にある数字を a_{ij} と表し、これを (i, j) 成分と呼ぶ

行が m 個、列が n 個の行列は、m 行 n 列の行列、あるいは $m \times n$ 型の行列であるという

$n \times n$ 型の場合、行列は正方形なので n 次正方行列と呼ぶ

A の成分から第 j 列だけを取り出して $\mathbb{R}^m$ のベクトルとしたものが

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq n)$$

であり、これを A の j 番目の列ベクトルという

A は、これらを横に並べたものという意味で

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

と書くことができる

行列とベクトルの積 $m \times n$ 型の行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ との積を

$$A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

により定める

ここで、v_i は $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である

$A\boldsymbol{v}$ を考えるとき、ほとんどの場合は、A が 1 つ与えられていて $\boldsymbol{v}$ がいろいろ動くという意識が強い

それは、行列 A のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る

$$\text{入力ベクトル } \boldsymbol{v} \longrightarrow \text{ 出力ベクトル } A\boldsymbol{v}$$

という装置、すなわち写像だとみなすことである

行列のスカラー倍 A を行列、c をスカラーとするとき、A のすべての成分を c 倍して得られる行列を cA とする

行列とベクトルの積の性質　A, B を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$、$c \in \mathbb{R}$ とするとき、次が成り立つ

i. $A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}$

ii. $A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v}$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p24（命題 1.4.3）]

線形写像の定義

ref: 行列と行列式の基礎 2

線形写像と線形性　写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは、次の 2 つの条件が成立することである

i. $f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$ がすべての $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ

ii. $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ がすべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ

これらの性質を写像 f の線形性という

また、$m = n$ のとき、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の線形変換と呼ぶ

線形変換は空間 $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への写像なので、$\mathbb{R}^n$ 内において「ベクトルが変化している」（あるいは f が空間 $\mathbb{R}^n$ に作用している）ニュアンスと

みることができる

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、i より、

$$f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

なので、

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

> ⚓ **零ベクトルの像**　零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される

$m = n = 1$ のときは、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ は、通常の意味の関数である

このとき、i の性質から、

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1)$$

が成り立つので、$a = f(1) \in \mathbb{R}$ とおくと、

$$f(x) = ax$$

と書ける

> ⚓ **比例関数**　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ は、a を比例定数とする比例関数である

線形写像の表現行列

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、各基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ の f による像を

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

と書くとする

これらを横に並べることによって、m 行 n 列の行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$

この行列 A を f の表現行列という

特に、$\mathbb{R}^n$ の線形変換の表現行列は n 次正方行列である

$\mathbb{R}^n$ の一般のベクトル $\boldsymbol{v}$ を、基本ベクトルの線型結合として

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{e}_j$$

と書く

このとき、f の線形性より、

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} v_j f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{a}_j$$

となる

このベクトルの第 i 成分は

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n$$

と書ける

これは $A\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である

したがって、この記法を踏まえて、次のような表記ができる

線形写像とその表現行列の関係

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

比例関数が比例定数 a だけで決まるのと同じように、線形写像は表現行列 A が与えられれば決まる

零写像と零行列　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ と定めたものは明らかに線形写像であり、これを零写像と呼ぶ

その表現行列はすべての成分が 0 である行列である

この行列を零行列と呼び、O で表す

$m \times n$ 型であることを明示するために $O_{m,n}$ と書くこともある

また、n 次正方行列の場合は、O_n と書く

恒等写像と単位行列　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ と定めたものは明らかに線形写像である

これを恒等写像と呼び、$f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ と書く

恒等写像の表現行列は、$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j \quad (1 \leq j \leq n)$ より

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを単位行列と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、n 次であることを明示したいときは E_n と書く

線形写像 f から行列 A を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることができる

行列から線形写像を作る　$m \times n$ 型行列 A に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

によって写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定めれば、f は線形写像である

証明

行列とベクトルの積の性質より、f は線形写像である

また、f の定義から明らかに A は f の表現行列である　■

$\mathbb{R}^2$ の線形変換の例

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p51 - p56]

行列の積

線形写像の合成　$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 g と、$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^l$ への線形写像 f が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g \colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^l$ への線形写像である

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p56 （問 2.2）]

f と g の表現行列をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする

A は $l \times m$ 型、B は $m \times n$ 型の行列である

このとき、$f \circ g$ は $l \times n$ 型行列で表現される

それを C と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

B を列ベクトルに分解して $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ と書くとき、

$$(f \circ g)(\boldsymbol{e}_j) = f(g(\boldsymbol{e}_j)) = f(\boldsymbol{b}_j) = A\boldsymbol{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$$

となる

C の (i, j) 成分は $A\boldsymbol{b}_j$ の第 i 成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、C の (i, j) 成分を計算するときは、A の第 i 行、B の第 j 列だけを見ればよい

$$\begin{pmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{im} \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、A と B の**積**と呼ぶ

単位行列との積　A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$E_m A = A$$
$$AE_n = A$$

零行列との積　A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$O_m A = AO_n = O_{m,n}$$

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は**可換**であるという

一般には、2 つの行列は可換であるとは限らない

つまり、AB と BA は一般には異なる

[Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p58 （例 2.2.3, 2.2.4）]

行列の和とスカラー倍

$A,\ B$ がともに $m\times n$ 型行列であるとき、それぞれの (i,j) 成分を足すことで行列の和 $A+B$ を定める

⚓ **分配法則**　積が定義できるとき、

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$(B+C)A=BA+CA$$

⚓ **行列の積とスカラー倍の性質**　行列 $A,\ B$ の積 AB が定義できるとき、つまり A の列の個数と B の行の個数が同じであるとき、$c\in\mathbb{R}$ に対して

$$(cA)B=A(cB)=c(AB)$$

が成り立つ

⚓ **線形写像の和**　$f,g\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を線形写像とし、

$$h(\boldsymbol{v})=f(\boldsymbol{v})+g(\boldsymbol{v})\quad(\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n)$$

により写像 $h\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ を定めるとき、h も線形写像である

また、f,g の表現行列を A,B とするとき、h の表現行列は $A+B$ である

なお、$h=f+g$ と書き、f,g の和と呼ぶ

証明

[Todo 5: ref: 行列と行列式の基礎 p59 （問 2.5）]

スカラー行列　c をスカラーとするとき、cE の形の行列をスカラー行列という

$$cE = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

行列 A にスカラー行列をかけることは、

$$(cE)A = A(cE) = cA$$

のように、スカラー c をかけるのと同じである

行列の積の結合法則

積の結合法則　積 AB, BC がともに定義できるとき、

$$(AB)C = A(BC)$$

写像による証明

A, B, C がそれぞれ $q \times m$, $m \times n$, $n \times p$ 型行列だとする

線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、f, g, h の表現行列をそれぞれ A, B, C とする

一般的な写像の合成の性質として、

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

が成り立つから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう ■

積の計算規則による証明

AB の (i, l) 成分は、

$$(AB)_{il} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^{n} (AB)_{il} c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj}\end{aligned}$$

i, j はいま固定されているので、和には関係がない

動いているのは k, l だけ

ここで、次の書き換えができる

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} c_{lj}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}$ の右にある式は l に関する和をとる前のものなので、l は止まっていると考えてよく、単純な分配法則を使っている

また、括弧がなくても、k に関する和を先にとって、その後で l に関する和をとっていると読むことができる

このとき、和の順番は交換してもよいので、

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(BC)_{kj}\end{aligned}$$

先ほどと同様に、$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}$ の右では k は止まっていると考えている

そして、この結果は、$A(BC)$ の (i,j) である ■

結合法則が成り立つことが示されたので、$(AB)C$ または $A(BC)$ を表すとき、括弧を書かずに単に ABC と書いても問題ない

行列の個数が増えても同様である

また、A が正方行列の場合は、

$$\begin{aligned}A^2 &= AA \\ A^3 &= AAA\end{aligned}$$

などのように書く

行列の区分け

行列を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

のようなブロック型に区分けして計算することがよくある

ref: 行列と行列式の基礎 p64

A が $m \times n$ 型のとき、$m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2$ として、A_{ij} は $m_i \times n_j$ 型である

また、B が $n \times l$ 型で、$n = n_1 + n_2,\ l = l_1 + l_2$ と区分けして

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように A_{ij} などが行列の成分であるかのようにして（ただし積の順序は変えずに）積が計算できる

ここで、A の列の区分けと B の行の区分けの仕方が同じであることが必要である

3 つ以上のブロックに分ける場合も同様である

行列と複素数

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき、

$$aE + bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

という形の行列を**複素数**と呼ぶことにより、複素数の定義ができる

この定義では、通常は $a + bi$ と書かれるものを行列として実現している

[Todo 6: ref: 図解でわかる線型代数 p43〜49]

対角行列

対角成分　正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、a_{ii} を対角成分と呼ぶ

対角行列　対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列を対角行列と呼ぶ

$a_{ii} = c_i \quad (1 \leq i \leq n)$ である対角行列を次のように表す

$$\mathrm{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

対角行列と列ベクトルのスカラー倍　右から対角行列をかけると、各列ベクトルがスカラー倍になる

すなわち、$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とすると、

$$A \cdot \mathrm{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (c_1\boldsymbol{a}_1, c_2\boldsymbol{a}_2, \ldots, c_n\boldsymbol{a}_n)$$

が成り立つ

証明

[Todo 7: ref: 行列と行列式の基礎 p63 （問 2.8）]

トレース

ref: 行列と行列式の基礎 p64

トレース　正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、対角成分の和

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

を A のトレースと呼び、$\mathrm{tr}(A)$ と表す

トレースの性質

i. $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
ii. $\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr}(A)$
iii. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

証明

[Todo 8: ref: 行列と行列式の基礎 p64 問 2.9]

第 3 章

連立一次方程式と階数

掃き出し法

連立一次方程式において、文字の個数や方程式の本数が増えた場合にも見通しよく計算を進めるためには、掃き出し法と呼ばれる方法がある

ref: 行列と行列式の基礎 p18〜21

掃き出し法の基本方針は、次の形を目指すことである

$$\begin{cases} \star x_1 + * x_2 + * x_3 = * \\ \qquad\quad \star x_2 + * x_3 = * \\ \qquad\qquad\qquad \star x_3 = * \end{cases}$$

- $*$ はどんな数であってもよい（同じ数でなくてもよい）
- $\star$ は 0 でない数を意味する

この形の方程式は上三角形と呼ばれ、いつでもこの形に変形できるわけではないが、1 つの理想形である

連立一次方程式の行列表記

ref: 行列と行列式の基礎 p22〜25

未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する連立方程式として

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots +\ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots +\ a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を考える

a_{ij} などは与えられた定数であり、係数と呼ばれる

i 番目の式の x_j の係数を a_{ij} と書いている

ここで、係数だけを集めて行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

すると、先ほどの連立方程式は、ベクトル形で

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

と書ける

また、n 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ からベクトルを作る

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

すると、ベクトル形の方程式の左辺のベクトルを、行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の

積と考えて、$A\boldsymbol{x}$ と表記できる

こうして、もとの連立一次方程式は、行列形の方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に書き換えられる

行基本変形

連立一次方程式を行列によってとり扱うとき、1 つ 1 つの方程式は行列の行によって表されている

ref: 行列と行列式の基礎 p25

よって、行列の行に関する次のような操作（変形）を考えることは自然である

行基本変形　行列への次の 3 種類の操作を行基本変形という

i. ある行の定数倍を他の行に加える
ii. ある行に 0 でない数をかける
iii. 2 つの行を交換する

原則として上三角型を目指してこのような変形を繰り返すが、いつでも上三角型にできるわけではなく、行階段行列と呼ばれる形を作っていくのが掃き出し法と呼ばれる手法である

行階段行列

掃き出し法では、あるステップで下の成分がすべて 0 になって、

ref: 行列と行列式の基礎 p26〜28

$$
\begin{pmatrix}
\spadesuit & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

のような形になるのが典型例である

0 でない成分を $\spadesuit$ で、任意の値をもつ成分を $*$ で表した

一般には、成分が 0 ばかりの行が下にくる

そのような行を零行という

零行が現れない場合もあるし、複数現れる場合もある

零行でない行に対して、一番左の 0 でない成分 $\spadesuit$ を主成分と呼ぶ

先ほど示した形では、行の主成分は左上から斜め右下 45° 方向にまっすぐ並んでいるが、一般にはそうできるとは限らない

しかし、次のような形には必ずできる

$$\begin{pmatrix} 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行階段行列　次の条件を満たす行列を行階段行列という

- 零行でない行の主成分が、下の行ほど 1 つ以上右にある
- 零行がある場合は、まとめてすべて下にある

どんな行列も、行基本変形の繰り返しで行階段行列にできる

行列の階数

行階段行列に変形することで、重要な量が読み取れる

ref: 行列と行列式の基礎 p28～29

行列の階数　行列 A を行階段行列に変形したとき、零行でない行の個数を A の階数（rank）と呼び、$\mathrm{rank}(A)$ と書く

変形の結果として得られる行階段行列は 1 通りとは限らないし、変形の途中の掃き出しの手順も 1 通りとは限らないが、階数は A のみによって定まる値であることが後に証明できる

A が $m \times n$ 型ならば、行は m 個なので、$\mathrm{rank}(A)$ は 0 以上 m 以下

の整数である

行階段行列において、零行でない行の個数は主成分の個数と一致するので、階数は行階段行列に変形したときの主成分の個数でもある

行基本行列の主成分は各列に高々 1 つなので、主成分の個数は列の個数 n を超えない

したがって、次の重要な評価が成り立つ

$$0 \leq \mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$$

簡約化された行階段行列

必要に応じて、行階段行列をさらに変形して次のような形にする

ref: 行列と行列式の基礎 p29〜30

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行の主成分はすべて 1 で、主成分のある列の主成分以外の成分はすべて 0 である

この形を**簡約化された行階段行列**と呼ぶ

与えられた行列 A に対して、行基本変形の繰り返しで得られる行階段行列は一意的ではないが、簡約化された行階段行列は一意的であることを後に議論する

そこで、簡約化された行階段行列を $A_{\circ}$ と書くことにする

変形の過程を

$$\text{行列 } A \longrightarrow \text{行階段行列} \longrightarrow \text{簡約化された行階段行列 } A_{\circ}$$

と 2 段階にわけるのは、計算の効率以上の意味がある

行階段行列にするところまでで解決する問題（解の存在と一意性など）も

あるからである

連立一次方程式を解く

方程式を解くということは、次のような問題に答えることである

ref: 行列と行列式の基礎 p25

A. 解は存在するか？
B. 解が存在する場合、それはただ 1 つの解か？
C. 解が複数存在する場合は、どれくらい多く存在するのか？
D. 解全体の集合を以下にしてわかりやすく表示できるか？

拡大係数行列と解の存在条件

A を m 行 n 列の行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とし、線形方程式

ref: 行列と行列式の基礎 p31〜32

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を考える

これは、n 個の文字に関する m 本の連立方程式である

$\boldsymbol{x}$ は未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を成分とするベクトルである

このとき、A は方程式の係数行列と呼ばれる

A の右端に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を追加して得られる m 行 $(n+1)$ 列の行列

$$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$$

を考えて、これを拡大係数行列という

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合、つまり

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の形の線形連立方程式は**斉次形**であるという

斉次形の場合は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が明らかに解になっていて、これを**自明解**という

したがって、自明解以外に解が存在するかどうかが基本的な問題である

まず、一般の $\boldsymbol{b}$ の場合の解の存在（問題 A）について考える

$\tilde{A}$ は A の右端に 1 列追加して得られるので、掃き出しの過程を考えると、$\mathrm{rank}(\tilde{A})$ は $\mathrm{rank}(A)$ と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかであることがわかる

解の存在条件　A を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする

$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ とおくとき、

$$\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A) \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

証明

[Todo 9: ref: 行列と行列式の基礎 p31 （定理 1.5.1）]

解の存在条件の系　A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$^\forall\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する} \iff \mathrm{rank}(A) = m$$

証明

[Todo 10: ref: 行列と行列式の基礎 p32 （定理 1.5.2, 1.5.3）]

右端の列に主成分がない場合は、一般には無数個の解が存在する

解の集合が直線を成していたり、もっと高い次元の図形になっていることがある

解が 1 つに定まらない場合は、解の全体像を知ることが方程式を「解く」ことになる

一般解のパラメータ表示

係数行列 A の n 個の列が、n 個の変数に対応していることを思い出そう

ref: 行列と行列式の基礎 p33〜36

> 🎓 **主変数と自由変数**　行列 A を行基本変形により行階段形にしたとき、主成分がある列に対応する変数を主変数と呼び、それ以外の変数を自由変数と呼ぶ

解が存在する場合には、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

という形の一般解の表示（問題 D の答え）が得られる

ここで、r は行列 A の階数である

自由変数、すなわちパラメータの個数を解の自由度と呼ぶ

$$\begin{aligned}\text{解の自由度} &= (\text{変数の個数}) - \mathrm{rank}(A) \\ &= n - r\end{aligned}$$

これは、解全体の集合が何次元の空間なのかを表している（問題 C の答え）

解の一意性

ここまでの議論で、問題 B が解決している

ref: 行列と行列式の基礎 p37〜38

解の一意性　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するとき、

$$\text{解が一意的である} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

[Todo 11: ref: 行列と行列式の基礎 p37 （定理 1.5.8）]

斉次形の場合の非自明解の存在問題も解決している

斉次形の非自明解の存在条件　斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において、

$$\text{自明解しか存在しない} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性は、それ以外の解がないということである ■

自由変数を $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}$ とするとき、一般解の表示

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

の j_k 番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる

このことから、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の $n-r$ 個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる

この事実は、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^m$ が線形独立であると表現される

線型独立性

線型独立性の定義式を移項することで、次の事実が得られる

ref: 行列と行列式の基礎 p38〜40

線型結合の一意性　線型独立性は、線形結合の一意性

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = c_1'\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k'\boldsymbol{a}_k \\ \implies c_1 = c_1', \dots, c_k = c_k' \end{aligned}$$

と同値である

つまり、

> 線型独立性は、両辺の係数比較ができるという性質

であるとも理解できる

線形関係式　ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ に対する等式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

を、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形関係式という

特に、$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ として得られる線形関係式を自明な線形関係式という

これ以外の場合、つまり $c_i \neq 0$ となるような i が少なくとも 1 つあるならば、これは非自明な線形関係式である

非自明な線形関係式の存在と線形従属　ベクトルの集まりは、それらに対する非自明な線形関係式が存在するとき、そのときに限り線形従属である

証明

ベクトルの集まりが線型独立であることは、それらに対する線形関係式はすべて自明であるというのが定義である

それを否定すると、「自明でない線形関係式が存在する」となる　■

非自明解の存在と有限従属性定理

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非自明解の存在に対して、次の解釈もできる

ref: 行列と行列式の基礎 p40〜41

斉次形方程式の非自明解の存在と線形従属　$m \times n$ 型行列

A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ とするとき、

$$
\begin{aligned}
& A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ に自明でない解がある} \\
\iff \quad & \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属}
\end{aligned}
$$

証明

[Todo 12: ref: 行列と行列式の基礎 p40 （命題 1.6.4）]

斉次形方程式に自明でない解が存在することは、$\mathrm{rank}(A) \neq n$、すなわち解の自由度が 0 ではないことと同値であった

一般に、斉次形の線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度は、n を変数の個数とするとき $n - \mathrm{rank}(A)$ なので、次が成り立つ

列ベクトルの線型独立性と階数　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とおくと、

$$
\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立} \iff \mathrm{rank}(A) = n
$$

このことから、次の重要な結論が導かれる

有限従属性定理　$\mathbb{R}^m$ 内の m 個よりも多いベクトルからなる集合は線形従属である

証明

[Todo 13: ref: 行列と行列式の基礎 p41 （系 1.6.6）]

この結論は、幾何的な直観からは自然だといえる

平面 $\mathbb{R}^2$ 内の 3 つ以上のベクトルがあれば、自動的に線形従属になる

この事実は、次元の概念を議論する際の基礎になる

同じことを線型方程式の文脈に言い換えると、次のようになる

有限従属性定理の線型方程式版　斉次線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において、変数の個数が方程式の個数よりも多いときには、非自明な解が存在する

また、次のようにも言い換えられる

有限従属性定理の抽象版　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ とする

$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ に含まれる k 個よりも多い個数のベクトルの集合は線形従属である

証明

[Todo 14: ref: 行列と行列式の基礎 p41 （問 1.14）]

行列の階数と線型独立性

次の事実は、行変形のもっとも重要な性質である

ref: 行列と行列式の基礎 p42〜44

行変形はベクトルの線形関係を保つ　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ に行の変形を施して $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ が得られたとする

このとき、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \iff \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$$

特に、

$$\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n\} \text{ が線型独立} \iff \{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n\} \text{ が線型独立}$$

証明

[Todo 15: ref: 行列と行列式の基礎 p42 （命題 1.6.8）]

主列ベクトル　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ を行階段形にしたときに、主成分のある列番号を $\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \dots, \boldsymbol{i}_r$ とする

ここで、$\boldsymbol{r}$ は A の階数である

このとき、$\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ を**主列ベクトル**という

主列ベクトルと線型独立性　行列の主列ベクトルの集合は線型独立である

また、主列ベクトル以外の列ベクトルは、主列ベクトルの線形結合である

証明

[Todo 16: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （命題 1.6.11）]

掃き出し法は、行列の列ベクトルの中から、$\mathrm{rank}(A)$ 個の線型独立な列ベクトルを選び出す方法を与えていることになる

列ベクトルの線形従属性と階数　行列 A の列ベクトルから $\mathrm{rank}(A)$ 個よりも多いベクトルを選ぶと、線形従属になる

証明

[Todo 17: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （命題 1.6.12）]

以上によって、行列の階数に関する次の理解が得られたことになる

階数と線型独立な列ベクトル　行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ は、A の列ベクトルに含まれる線型独立なベクトルの最大個数と一致する

証明

[Todo 18: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （定理 1.6.13）]

「行変形を繰り返して行階段形にしたときの 0 でない段の数」として導入した階数という量の、より本質的な意味がわかったことになる

特に、

行変形によって定めた階数が行変形の仕方によらない

という事実がこの定理からしたがう

2 つの行列の階数の和　$A,\ B$ を同じ型の行列とするとき、

$$\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$$

証明

[Todo 19: ref: 行列と行列式の基礎 p44 問 1.15]

第 4 章

線形写像の単射性と全射性

線形写像とベクトルの線型独立性

ref: 行列と行列式の基礎 p65〜66

⚓ 線形写像とベクトルの線形独立性　$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする

i. $\{f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ が線型独立ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は線型独立
ii. $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線形従属ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ は線形従属

証明

[Todo 20: ref: 行列と行列式の基礎 p65 問 2.11]

ii は、平行なベクトルを線型写像で写した結果、平行でなくなったりはしないということを述べている

線型写像とベクトルの線型独立性　線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して、次の 2 つは同値になる

i. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ならば、$f(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$
ii. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線型独立ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線型独立

証明

[Todo 21: ref: 行列と行列式の基礎 p66 命題 2.3.2]

i は、零写像と射影を除けば、f によってベクトルが「つぶれない」という性質を表している

[Todo 22: ref: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

ii は、たとえば平行四辺形の像が線分や 1 点になったりしないことなどを意味している

線形写像の単射性　線形写像 f が単射であることと次は同値である

$$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

証明

[Todo 23: ref: 行列と行列式の基礎 p66 命題 2.3.3]

線形写像の単射性と全射性

線形写像 f の単射性を表現行列 A の言葉で述べる

ref: 行列と行列式の基礎 p67〜68

線形写像の単射性と表現行列 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値

i. f は単射
ii. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は自明な解しか持たない
iii. $\operatorname{rank}(A) = n$

証明

[Todo 24: ref: 行列と行列式の基礎 p67 命題 2.3.4]

i は抽象的な概念、ii は方程式論的な言葉、iii は数値的な条件であり、これらは言い換えただけで同値であると述べている。

単射性と対比して、全射性の理解も表現行列の言葉で整理する

線形写像の全射性と表現行列 線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値

i. f は全射
ii. 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解が存在する
iii. $\operatorname{rank}(A) = m$

証明

[Todo 25: ref: 行列と行列式の基礎 p68 命題 2.3.6]

像空間と核空間

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の全射性は、$\mathbb{R}^m$ の部分集合である像空間 $\mathrm{Im}(f)$ と関係している

ref: 行列と行列式の基礎 p68〜69

f が全射であることは、$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ と同値である

一方、f の単射性と関連して、$\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$$

を考え、これを f の核空間あるいはカーネルと呼ぶ

線形写像の単射性は、次のようにも言い換えられる

線形写像の単射性　線形写像 f が単射であることと次は同値である

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$$

核空間 $\mathrm{Ker}(f)$ は、実はすでに馴染みのある概念である

核空間と表現行列　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を

A とするとき、

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\}$$

と定めると、

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(A)$$

これは、斉次形の連立線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間そのものである

$\mathrm{Ker}(A)$ の元は、$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解を使ってパラメータ表示できる

第 5 章

正則な線形変換と逆行列

線形変換の全単射性

$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像 f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換と呼ぶのだった

ref: 行列と行列式の基礎 p70

一般の線形写像と対比して、線形変換の大きな特徴は次が成り立つことである

線形代数における鳩の巣原理 f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換とし、A を f の表現行列とするとき、次はすべて同値である

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は全単射
iv. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

[Todo 26: ref: 行列と行列式の基礎 p70 定理 2.4.1]

単射と全射は、一般には一方から他方が導かれるわけではない 2 つの性質

だが、$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像（線形変換）の場合は同値になる

上の定理は、いわば線形代数版「鳩の巣原理」である

> 有限集合 $X = \{1, 2, ..., n\}$ からそれ自身への写像 f に対して、単射と全射は同値である

この事実は鳩の巣原理と呼ばれる

鳩の巣原理は、歴史的には部屋割り論法とも呼ばれ、

> n 個のものを m 個の箱に入れるとき、$n > m$ であれば、少なくとも 1 個の箱には 1 個より多いものが中にある

ことを指す

ここで鳩の巣原理と呼んだのはこの命題そのものではないが、その変種と考えてよい

正則行列

ref: 行列と行列式の基礎 p71

正則　線形変換 f は全単射であるとき、正則な線形変換であるという

正則行列　正方行列 A は、それが正則な線形変換を与えるとき、正則行列であるという

「線形代数における鳩の巣原理」から、次のことがいえる

正則の判定と階数　n 次正方行列 A に対して、次は同値である

i. A が正則行列
ii. $\mathrm{rank}(A) = n$

上の定理は、線形変換 f（もしくは正方行列 A）が正則かどうかについて、階数という 1 つの数値で判定できることを示している

正則の判定と線型独立性　n 次正方行列 A に対して、次は同値である

i. $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ が正則
ii. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線型独立

証明

[Todo 27: ref: 行列と行列式の基礎 p71 命題 2.4.4]

逆行列

写像 f が全単射であれば、逆写像 f^{-1} が存在する

ref: 行列と行列式の基礎 p71〜72

逆写像の線形性　f を $\mathbb{R}^n$ の正則な線形変換とするとき、逆写像 f^{-1} は線形である

証明

[Todo 28: ref: 行列と行列式の基礎 p71 問 2.16]

n 次正則行列 A は、正則な線形変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と対応している

逆写像 f^{-1} が存在し、線形であるから、ある n 次正方行列 B が対応するはずである

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ であり、線形写像の合成は行列の積に対応するから、

$$AB = BA = E$$

が成り立つ

このような B を A の逆行列と呼び、A^{-1} と書く

逆行列の一意性　正方行列 A に対して、A の逆行列が存在するならば、それは一意的である

証明

[Todo 29: ref: 行列と行列式の基礎 p71 問 2.17]

逆行列の計算法と線形方程式

正則行列 A に対して、方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のただ 1 つの解は次で与えられる

ref: 行列と行列式の基礎 p72〜73

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

A^{-1} が計算できれば、行列のかけ算によって線型方程式の解が求められる

正則行列 A の逆行列を計算するために、次の定理に注目しよう

逆行列の計算法の原理　正方行列 A に対して、$AB = E$ を満たす正方行列 B があるならば、A は正則であり、B は A の逆行列である

証明

[Todo 30: ref: 行列と行列式の基礎 p72 命題 2.4.6]

上の定理の証明は、逆行列の計算法のヒントを含んでいる

A の逆行列 B を求めるには、n 個の線形方程式

$$A\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

を解けばよい

A は階数 n の n 次正方行列なので、行変形で A から E に到達することができる

$\boldsymbol{b}_i$ を求めるには、行変形により

$$(A \mid \boldsymbol{e}_i) \to \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_i)$$

とすればよい

i ごとに掃き出し法を何度も実行しないといけないのかと思いきや、一度にまとめられる

$$\begin{gathered}(A \mid E) = (A \mid \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \to \\ \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n) = (E \mid B)\end{gathered}$$

このようにすれば、行変形は 1 通りで十分である

正則行列と対角行列

ref: 行列と行列式の基礎 p74〜75

上三角行列の正則性　対角成分がすべて 0 でない上三角行列は正則である

証明

[Todo 31: ref: 行列と行列式の基礎 p74 命題 2.4.9]

行基本変形と対角行列　正則行列 A に対して、行のスカラー倍以外の行基本変形を繰り返し行って対角行列にできる

証明

[Todo 32: ref: 行列と行列式の基礎 p75 命題 2.4.12]

第 6 章

線形空間

線形部分空間の定義

$\mathbb{R}^n$ の部分集合であって、ベクトル演算で閉じた集合について考える

原点を含み直線や平面などを一般化した概念である

ref: 行列と行列式の基礎 p93〜94

線形部分空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトルからなる空集合でない集合 V は、次が成り立つとき**線形部分空間**あるいは簡単に**部分空間**であるという

i. すべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ が成り立つ
ii. すべての $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \in V$ に対して $c\boldsymbol{u} \in V$ が成り立つ

線形部分空間の例：$\mathbb{R}^n$ 自身

たとえば、$\mathbb{R}^n$ 自身は明らかに $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

線形部分空間の例：零ベクトルだけからなる部分集合

零ベクトル $\mathbf{0}$ だけからなる部分集合 $\{\mathbf{0}\}$ も部分空間である

V は空集合でないので、ある $\boldsymbol{v} \in V$ をとるとき、線形部分空間の定義 ii より

$$0 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \in V$$

よって部分空間は必ず $\boldsymbol{0}$ を含む

線形部分空間の例：ベクトルが張る空間

ベクトルが張る空間は線形部分空間 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は部分空間である

証明

[Todo 33: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.2]

たとえば $\mathbb{R}^3$ において座標を (x, y, z) とするとき、xy 平面は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である

座標部分空間 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合 I に対して、$x_i \ (i \in I)$ 以外の座標がすべて 0 である部分集合は $\mathbb{R}^n$ の部分集合である

このようなものを座標部分空間といい、$\mathbb{R}^I$ と書く

$$\mathbb{R}^I = \langle \boldsymbol{e}_i \mid i \in I \rangle$$

と表すこともできる

部分空間の張る空間は部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ とすると、

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \subset V$$

証明

[Todo 34: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.4]

線形部分空間の例：交わり

線形部分空間の和空間は部分空間 V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき、交わり $V \cap W$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

線形部分空間の例：和空間

線形部分空間の和空間は部分空間 V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき、和空間

$$V + W := \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

線形写像の核空間

ref: 行列と行列式の基礎 p94〜95

線形写像の核空間は部分空間 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、核空間 $\mathrm{Ker}(f)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

証明

[Todo 35: ref: 行列と行列式の基礎 p69 問 2.15]

すでに学んだように、斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度を d とすると、基本解 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d \in \mathrm{Ker}(A)$ が存在して、任意の $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(A)$ に対して

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_d\boldsymbol{u}_d$$

を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$ が一意的に定まる

第 7 章

内積と直交変換

[Todo 36: ref: 行列と行列式の基礎 2.5]

Zebra Notes

Type	Number
todo	36