Topic Note: 述語論理

tomixy

2025 年 5 月 24 日

目次

＊ ＊ ＊

命題関数

これまで、たとえば「1234567891 は素数である」というような命題を扱ってきた

ref: ろんりと集合

ここで、たとえば x が自然数全体を動くとき、「x は素数である」という形の主張を命題関数と呼ぶ

＊ ＊ ＊

文字が一つ確定すると命題が一つ定まるというシステムを関数と捉えて命題関数という

ref: 大学数学 ほんとうに必要なのは「集合」

命題関数　文章中に変数を含み、その変数を定めるごとに命題になる文章を命題関数という

*　*　*

命題は記号 p で表されたのに対し、命題関数は $p(x)$ と書く

ref: ろんりと集合

命題関数 $p(x)$ は、x の値に応じて主張が変わり、真理値が変化していく

命題関数 $p(x)$ の x は、変数と呼ばれる

命題関数 $p(x)$ の変数は、実数や自然数のような数以外に、直線とか地図のような数学的対象や一般的概念をとる

*　*　*

命題関数が正しいかどうかは、あらゆる変数をすべて入れていき、その都度作られる命題がすべて正しい場合と定義される

ref: 大学数学 ほんとうに必要なのは「集合」

命題関数が正しいとは　命題関数が正しいとは、含まれる変数を定めるごとに決まる命題が全て正しいということ

*　*　*

すべての〜

命題関数 $p(x)$ に対して、「すべての x について $p(x)$ である」という命題を

ref: ろんりと集合

$$\forall x p(x)$$

と表す

「すべての〜について○○である」は、

- 「すべての〜は○○である」
- 「任意の〜について○○である」
- 「任意の〜は○○である」

と表すこともある

＊　＊　＊

∀ と自由変数が命題関数にくっついた形は全称命題と呼ばれる

ref: 大学数学 ほんとうに必要なのは「集合」

全称命題　$P(x)$ を命題関数とする。このとき、

$$^{\forall}x,\, P(x)$$

という形の命題を全称命題と呼び、「すべての x に対して $P(x)$ が成り立つ」という命題を表す

＊　＊　＊

「すべての x に対して hogehoge である」という文章は、次のように記号化される

ref: 大学数学 ほんとうに必要なのは「集合」

$$^{\forall}x,\ \text{hogehoge}$$

, が「対して」を表すと考えればよい

「A に対して B」という言い方をした場合、B は「A によって変わりうるもの」というニュアンスがある

B は A をとった後にとるもの、この前後関係を示す言葉が「対して」という言葉

＊　＊　＊

∀ という記号は、「all（すべての〜）」や「any（任意の〜）」の頭文字の A を逆さにしたものに由来する

ref: ろんりと集合

この記号は全称記号と呼ばれる

記号列として捉えて $\forall x$ と書く流儀と、添字として捉えて $^{\forall}x$ と書く流儀がある

ref: 大学数学 ほんとうに必要なのは「集合」

＊　＊　＊

変数 x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「すべての x について $p(x)$ である」というのは、

ref: ろんりと集合

> $p(a_1)$ であり、かつ、$p(a_2)$ であり、かつ、$\cdots$、かつ、$p(a_n)$ である

ということに他ならない

言い換えると、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \land p(a_2) \land \cdots \land p(a_n)$$

ということになる

＊　＊　＊

ある〜

命題関数 $p(x)$ に対して、「ある x について $p(x)$ である」という命題を

$$\exists x p(x)$$

と表す

「ある〜について○○である」は、

- 「ある〜は○○である」
- 「ある〜が存在して○○である」
- 「○○であるような〜が存在する」

と表すこともある

∃ という記号は、「exists（存在する）」の頭文字の E を逆さにしたものに由来する

＊　＊　＊

変数 x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「ある x について $p(x)$ である」というのは、

> $p(a_1)$ であるか、あるいは、$p(a_2)$ であるか、あるいは、$\cdots$、あるいは、$p(a_n)$ である

ということに他ならない

言い換えると、

$$\exists x p(x) = p(a_1) \lor p(a_2) \lor \cdots \lor p(a_n)$$

ということになる

*　*　*

「すべての〜」と「ある〜」

「すべての〜」と「ある〜」の 2 つの概念の間には双対性がある

$$\begin{aligned} \forall x p(x) &= p(a_1) \land p(a_2) \land \cdots \land p(a_n) \\ \exists x p(x) &= p(a_1) \lor p(a_2) \lor \cdots \lor p(a_n) \end{aligned}$$

という式を比較してみると、「すべての〜（∀）」と「ある〜（∃）」は、AND（∧）と OR（∨）の双対性を反映していることがわかる

*　*　*

∀ と ∃ を含んだ式の同値変形

⚓ ∀ と ∃ の性質

$$\begin{aligned} \forall x(p(x) \land q(x)) &\equiv \forall x p(x) \land \forall x q(x) \\ \exists x(p(x) \lor q(x)) &\equiv \exists x p(x) \lor \exists x q(x) \end{aligned}$$

これらはそれぞれ、

- 「すべての〜」（$\forall x$）と AND（∧）
- 「ある〜」（$\exists x$）と OR（∨）

が対応していると思って眺めるとよい

*　*　*

∀ と ∃ の否定

「すべての〜」（∀）と「ある〜」（∃）を含む命題の否定は、次のド・モルガンの法則で与えられる

⚓ ド・モルガンの法則（述語論理）

$$\neg\forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$$
$$\neg\exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$$

$\neg\forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$ より、

「すべての～について…である」の否定は、「ある～について…でない」

$\neg\exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$ より、

「ある～について…である」の否定は、「すべての～について…でない」

要するに、否定をとると、「すべての～」は「ある～」になり、「ある～」は「すべての～」になる

＊　＊　＊

述語論理のド・モルガンの法則は、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっている

x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ というように、有限個の値しかとらない場合、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$$
$$\exists x p(x) = p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)$$

であり、

$$\forall x \neg p(x) = \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(a_n)$$
$$\exists x \neg p(x) = \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \cdots \vee \neg p(a_n)$$

であるので、述語論理のド・モルガンの法則は、それぞれ次のように書き換えられる

$$\neg(p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)) \equiv \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \cdots \vee \neg p(a_n)$$
$$\neg(p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)) \equiv \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(a_n)$$

これらはそれぞれ、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっていることは一目瞭然