第 1 章

連立一次方程式と階数

掃き出し法

連立一次方程式において、文字の個数や方程式の本数が増えた場合にも見通しよく計算を進めるためには、掃き出し法と呼ばれる方法がある

ref: 行列と行列式の基礎 p18〜21

掃き出し法の基本方針は、次の形を目指すことである

$$\begin{cases} \star x_1 + * x_2 + * x_3 = * \\ \qquad\quad \star x_2 + * x_3 = * \\ \qquad\qquad\qquad \star x_3 = * \end{cases}$$

- $*$ はどんな数であってもよい（同じ数でなくてもよい）
- $\star$ は 0 でない数を意味する

この形の方程式は上三角形と呼ばれ、いつでもこの形に変形できるわけではないが、1 つの理想形である

連立一次方程式の行列表記

ref: 行列と行列式の基礎 p22〜25

未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する連立方程式として

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + \;a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + \;a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を考える

a_{ij} などは与えられた定数であり、係数と呼ばれる

i 番目の式の x_j の係数を a_{ij} と書いている

ここで、係数だけを集めて行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

すると、先ほどの連立方程式は、ベクトル形で

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

と書ける

また、n 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ からベクトルを作る

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

すると、ベクトル形の方程式の左辺のベクトルを、行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の

積と考えて、$A\boldsymbol{x}$ と表記できる

こうして、もとの連立一次方程式は、行列形の方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に書き換えられる

行基本変形

連立一次方程式を行列によってとり扱うとき、1 つ 1 つの方程式は行列の行によって表されている

ref: 行列と行列式の基礎 p25

よって、行列の行に関する次のような操作（変形）を考えることは自然である

行基本変形　行列への次の 3 種類の操作を行基本変形という

i. ある行の定数倍を他の行に加える
ii. ある行に 0 でない数をかける
iii. 2 つの行を交換する

原則として上三角型を目指してこのような変形を繰り返すが、いつでも上三角型にできるわけではなく、行階段行列と呼ばれる形を作っていくのが掃き出し法と呼ばれる手法である

成分を要にして掃き出す

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p76〜81

$$A = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

まず、$(1,1)$ 成分より下の成分が 0 になるように基本変形を適用する

このことを、「$(1,1)$ 成分を要にして、1 列を掃き出す」と表現する

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \end{array}$$

以降のステップでは、第 1 行と第 1 列は変化させない

今度は、$(2,2)$ 成分を要にして掃き出す

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \end{array} \end{array}$$

行階段行列

掃き出し法では、あるステップで下の成分がすべて 0 になって、

ref: 行列と行列式の基礎 p26〜28

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p81〜84

$$\begin{pmatrix} \spadesuit & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & \spadesuit & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & \spadesuit & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のような形になるのが典型例である

0 でない成分を $\spadesuit$ で、任意の値をもつ成分を $\ast$ で表した

一般には、成分が 0 ばかりの行が下にくる

そのような行を**零行**という

零行が現れない場合もあるし、複数現れる場合もある

零行でない行に対して、一番左の 0 でない成分 $\spadesuit$ を**主成分**あるいは行に関する**要**と呼ぶ

先ほど示した形では、行の主成分は左上から斜め右下 45° 方向にまっすぐ並んでいるが、一般にはそうできるとは限らない

しかし、次のような形には必ずできる

$$\begin{pmatrix} 0 & \spadesuit & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行階段行列　次の条件を満たす行列を行階段行列という

- 零行でない行の主成分が、下の行ほど 1 つ以上右にある
- 零行がある場合は、まとめてすべて下にある

どんな行列も、行基本変形の繰り返しで行階段行列にできる

行列の階数

行階段行列に変形することで、重要な量が読み取れる

ref: 行列と行列式の基礎 p28〜29

行列の階数　行列 A を行階段行列に変形したとき、零行でない行の個数を A の階数（rank）と呼び、$\mathrm{rank}(A)$ と書く

変形の結果として得られる行階段行列は 1 通りとは限らないし、変形の途中の掃き出しの手順も 1 通りとは限らないが、

> 階数は A のみによって定まる値である

ことが後に証明できる

A が $m \times n$ 型ならば、行は m 個なので、$\mathrm{rank}(A)$ は 0 以上 m 以下の整数である

行階段行列において、零行でない行の個数は主成分の個数と一致するので、階数は行階段行列に変形したときの主成分の個数でもある

行基本行列の主成分は各列に高々 1 つなので、主成分の個数は列の個数 n を超えない

したがって、次の重要な評価が成り立つ

$$0 \leq \mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$$

簡約化された行階段行列

必要に応じて、行階段行列をさらに変形して次のような形にする

ref: 行列と行列式の基礎 p29〜30

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p82

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行の主成分はすべて 1 で、主成分のある列の主成分以外の成分はすべて 0 である

この形を簡約化された行階段行列あるいは既約行階段行列と呼ぶ

与えられた行列 A に対して、行基本変形の繰り返しで得られる行階段行列は一意的ではないが、簡約化された行階段行列は一意的であることを後に議論する

そこで、簡約化された行階段行列を $A_\circ$ と書くことにする

変形の過程を

$$\text{行列 } A \longrightarrow \text{行階段行列} \longrightarrow \text{簡約化された行階段行列 } A_\circ$$

と 2 段階にわけるのは、計算の効率以上の意味がある

行階段行列にするところまでで解決する問題（解の存在と一意性など）もあるからである

連立一次方程式を解く

方程式を解くということは、次のような問題に答えることである

ref: 行列と行列式の基礎 p25

A. 解は存在するか？
B. 解が存在する場合、それはただ 1 つの解か？
C. 解が複数存在する場合は、どれくらい多く存在するのか？
D. 解全体の集合を以下にしてわかりやすく表示できるか？

拡大係数行列

A を m 行 n 列の行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とし、線形方程式

ref: 行列と行列式の基礎 p31〜32

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を考える

これは、n 個の文字に関する m 本の連立方程式である

$\boldsymbol{x}$ は未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を成分とするベクトルである

このとき、A は方程式の**係数行列**と呼ばれる

A の右端に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を追加して得られる m 行 $(n+1)$ 列の行列

$$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$$

を考えて、これを**拡大係数行列**という

斉次形

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合、つまり

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の形の線形連立方程式は**斉次形**であるという

斉次形の場合は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が明らかに解になっていて、これを自明解という

したがって、自明解以外に解が存在するかどうかが基本的な問題である

解の存在条件

まず、一般の $\boldsymbol{b}$ の場合の解の存在（問題 A）について考える

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p110〜111

拡大係数行列 $\tilde{A}$ は A の右端に 1 列追加して得られるので、掃き出しの過程を考えると、$\mathrm{rank}(\tilde{A})$ は $\mathrm{rank}(A)$ と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかであることがわかる

また、方程式の拡大係数行列の行に関する基本変形は、元の連立方程式と同値な式への変形であるため、

> 基本変形によって得られる方程式の解は、元の方程式の解と同じ

となる

そこで、$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ の既約行階段形を $(P \mid \boldsymbol{q})$ とし、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の代わりに

$$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$$

を解くことを考える

まず、

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ O \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$$

とおく

ここで、P_1 は $r \times n$ 行列（$r = \mathrm{rank}(P)$）とし、$\boldsymbol{q}_1$ は r 次元列ベクトル、$\boldsymbol{q}_2$ は $m - r$ 次元列ベクトルとする

すると、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ は

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ O \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} P_1\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$$

と表せる

このとき、この方程式が解を持つには、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ でなければならない

たとえば、

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

だとしたら、

$$\begin{pmatrix} P_1\boldsymbol{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり、$0 = -1$ という矛盾が生じる時点で、この方程式は不能になる

このような $\boldsymbol{q}_2 \neq \mathbf{0}$ の場合、拡大係数行列の階数は、係数行列の階数 $+1$

となっている

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(P \mid \boldsymbol{q}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

一方、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ であれば、方程式は

$$P_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_1$$

となる

ここで、P_1 は $r = \mathrm{rank}(P)$ 個の行をもち、行数と階数が一致している

ということは、すべての行に主成分が現れていることを意味する

主成分は最も左側にある 0 でない成分なので、係数拡大行列にするために

右に 1 列追加したとしても、主成分の数は増えることがない

すなわち、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ の場合は係数行列と拡大係数行列の階数が一致する

以上の考察から、連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する条件は、

係数行列と係数拡大行列の階数が等しい

ことだとわかる

そして、その階数 r は、係数行列の行数とも一致していたため、次の 2 つの定理が得られる

拡大係数行列と解の存在条件　A を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする

$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ とおくとき、

$$\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A) \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p31 （定理 1.5.1）]

解の存在条件の系　A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$^\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する} \iff \mathrm{rank}(A) = m$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p32 （定理 1.5.2, 1.5.3）]

一般解のパラメータ表示

右端の列に主成分がない場合は、一般には無数個の解が存在する

ref: 行列と行列式の基礎 p33〜36

解の集合が直線を成していたり、もっと高い次元の図形になっていることがある

解が 1 つに定まらない場合は、解の全体像を知ることが方程式を「解く」ことになる

係数行列 A の n 個の列が、n 個の変数に対応していることを思い出そう

主変数と自由変数　行列 A を行基本変形により行階段形にしたとき、主成分がある列に対応する変数を主変数と呼び、それ以外の変数を自由変数と呼ぶ

たとえば、次のような既約行階段形に変形した拡大係数行列を考える

$$\tilde{A}_\circ = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & & 3 & 4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \overset{\longleftrightarrow}{5} \end{array}$$

変数を使って方程式の形に直すと、

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & - & x_5 & = & -3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & 0x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \end{array} \right.$$

主成分がある列は $1, 3, 4$ 列なので、主変数は x_1, x_3, x_4 である

それ以外の x_2, x_5 は自由変数となる

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - \ x_5 = -3 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad + 2x_5 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 + \ x_5 = 2 \end{cases}$$

において、自由変数を含む項を左辺に移行すれば、

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 2x_2 + x_5 \\ x_3 = 1 - 2x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

となる

自由変数の値を自由に選んで、主変数の値をこの等式によって定めれば、方程式の解になる

そこで、

$$x_2 = t_1, \quad x_5 = t_2$$

とおけば、

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 2t_1 + t_2 \\ x_3 = 1 - 2t_2 \\ x_4 = 2 - t_2 \end{cases}$$

すなわち、

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 2t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 1 - 2t_2 \\ x_4 = 2 - t_2 \\ x_5 = t_2 \end{cases}$$

と書ける

これをベクトル形に直すことで、一般的な解のパラメータ表示を得られる

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

一般化するために、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ を次のように表して考える

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p300〜301

$$(P \mid \boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & q_1 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{p}_r & q_r \\ \boldsymbol{0} & q_{r+1} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & q_m \end{pmatrix}$$

ここで、$\boldsymbol{p}_1 \neq \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{p}_r \neq \boldsymbol{0}$ であるとする

このとき、解を持つための条件は、

$$q_{r+1} = q_{r+2} = \cdots = q_m = 0$$

であった

さて、P において、主成分を含む列を $j_1, j_2, \ldots, j_r \quad (r = \mathrm{rank}(P))$

とする

$$(P \mid \boldsymbol{q}) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & q_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & q_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \longleftarrow \text{n} \longrightarrow \end{array}$$

すると、主変数 x_{j_i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$ は、次のように表される

$$x_{j_i} + \sum_k \star x_k = q_i \quad (k > j_i \text{かつ } k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\})$$

$$\therefore x_{j_i} = q_i - \sum_k \star x_k$$

ここで、x_k は j_i よりも右にある $\star$ に対応する変数である

既約行階段行列では、j_i 列の主成分以外の要素はすべて 0 であるため、$\star$ に対応する自由変数のみが残る（これが $k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ とした意味である）

つまり、$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外の自由変数 x_k に勝手な数を与えるごとに、主変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ は定まる

このような自由変数は $n - r$ 個あるので、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ の解は、$n - r$ 個のパラメータを用いて表せる

まとめると、解が存在する場合には、r を行列 A の階数として

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + \sum_{i=1}^{n-r} t_i \boldsymbol{u}_i$$

という形の一般解の表示（問題 D の答え）が得られる

ここで、パラメータ t_i をかけた列ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を連立方程式の基本解と呼ぶ

また、パラメータをかけていない列ベクトル $\boldsymbol{q}$ は、連立方程式の定数項から決まる解であり、これを特殊解と呼ぶ

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p103

解の自由度

連立一次方程式の一般解は、基本解の線形結合と特殊解の和で表された

そして、基本解の線形結合は、基本解の個数の分だけパラメータを用いて表された

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p113〜114

パラメータの個数は、自由変数の個数でもあり、基本解の個数でもある

このとき、パラメータの個数は、解を表す自由度と考えられる

そこで、解を表すパラメータの個数を解の自由度と呼ぶ

$$\begin{aligned}\text{解の自由度} &= (\text{変数の個数}) - \mathrm{rank}(A) \\ &= n - r\end{aligned}$$

解の自由度は、解全体のなす集合の大きさ、すなわち何次元の空間なのかを表している（問題 C の答え）

解の一意性

ここまでの議論で、問題 B が解決している

ref: 行列と行列式の基礎 p37〜38

解の一意性　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するとき、

$$\text{解が一意的である} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

$\Longleftarrow$

$\mathrm{rank}(A) = n$ であれば、解の自由度は $n - n = 0$、すなわち自由変数が存在しないことになる

自由変数がなければ「各変数＝定数」という式に変形できることになるので、解は明らかに一意的である ■

$\Longrightarrow$

対偶 $\mathrm{rank}(A) \neq n \Longrightarrow$ 解が一意的 を示す

$\mathrm{rank}(A) \leq n$ であるので、$\mathrm{rank}(A) \neq n$ は $\mathrm{rank}(A) < n$ を意味する

$\mathrm{rank}(A) < n$ であれば、自由変数が 1 つ以上存在するので解は無数にある

よって、解は一意的ではない ■

斉次形の場合の非自明解の存在問題も解決している

斉次形の非自明解の存在条件　斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において、

$$\text{自明解しか存在しない} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性 $\mathrm{rank}(A) = n$ は、それ以外の解がないということを意味している ■

解のパラメータ表示の一意性

自由変数を $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ とするとき、一般解の表示

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

の j_k 番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる

このことから、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の $n-r$ 個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる

この事実は、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^m$ が線形独立であると表現される

非自明解の存在と有限従属性定理

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非自明解の存在に対して、次の解釈もできる

ref: 行列と行列式の基礎 p40〜41

斉次形方程式の非自明解の存在と線形従属　$m \times n$ 型行列 A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ とするとき、

$$\begin{aligned} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ に自明でない解がある} \\ \Longleftrightarrow \quad & \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属} \end{aligned}$$

証明

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は、ベクトルの等式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

と同じものである

$\Longrightarrow$

もし自明でない解があるならば、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ のうち少なくとも 1 つは 0 ではない

$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ が成り立つもとで、0 でない係数が存在するということは、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属であることを意味する ■

$\Longleftarrow$

対偶を示す

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立であれば、

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

において、すべての係数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は 0 でなければならない

よって、0 以外の解（非自明解）は存在しないことになる ■

斉次形方程式に自明でない解が存在することは、$\mathrm{rank}(A) \neq n$、すなわち解の自由度が 0 ではないことと同値であった

一般に、斉次形の線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度は、n を変数の個数とするとき $n - \mathrm{rank}(A)$ なので、次が成り立つ

⚓ 列ベクトルの線型独立性と階数　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とおくと、

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

このことから、次の重要な結論が導かれる

⚓ 有限従属性定理　$\mathbb{R}^m$ 内の m 個よりも多いベクトルからなる集合は線形従属である

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p41 （系 1.6.6）]

この結論は、幾何的な直観からは自然だといえる

平面 $\mathbb{R}^2$ 内の 3 つ以上のベクトルがあれば、自動的に線形従属になる

この事実は、次元の概念を議論する際の基礎になる

同じことを線型方程式の文脈に言い換えると、次のようになる

有限従属性定理の線型方程式版　斉次線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において、変数の個数が方程式の個数よりも多いときには、非自明な解が存在する

また、次のようにも言い換えられる

有限従属性定理の抽象版　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ とする $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ に含まれる k 個よりも多い個数のベクトルの集合は線形従属である

証明

[Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p41 （問 1.14）]

行列の階数と線型独立性

次の事実は、行変形のもっとも重要な性質である

ref: 行列と行列式の基礎 p42〜44

行変形はベクトルの線形関係を保つ　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ に行の変形を施して $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ が得られたとする

このとき、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \iff \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$$

特に、

$$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \text{ が線型独立} \iff \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \text{ が線型独立}$$

証明

[Todo 5: ref: 行列と行列式の基礎 p42 （命題 1.6.8）]

主列ベクトル　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を行階段形にしたときに、主成分のある列番号を $i_1, i_2, \ldots, i_r$ とする

ここで、r は A の階数である

このとき、$\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ を主列ベクトルという

主列ベクトルと線型独立性　行列の主列ベクトルの集合は線型独立である

また、主列ベクトル以外の列ベクトルは、主列ベクトルの線形結合である

証明

[Todo 6: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （命題 1.6.11）]

掃き出し法は、行列の列ベクトルの中から、$\mathrm{rank}(A)$ 個の線型独立な列ベクトルを選び出す方法を与えていることになる

列ベクトルの線形従属性と階数　行列 A の列ベクトルから $\mathrm{rank}(A)$ 個よりも多いベクトルを選ぶと、線形従属になる

証明

[Todo 7: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （命題 1.6.12）]

以上によって、行列の階数に関する次の理解が得られたことになる

階数と線型独立な列ベクトルの最大個数　行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ は、A の列ベクトルに含まれる線型独立なベクトルの最大個数と一致する

証明

[Todo 8: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （定理 1.6.13）]

「行変形を繰り返して行階段形にしたときの 0 でない段の数」として導入した階数という量の、より本質的な意味がわかったことになる

特に、

> 行変形によって定めた階数が行変形の仕方によらない

という事実がこの定理からしたがう

2 つの行列の階数の和　A, B を同じ型の行列とするとき、

$$\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$$

証明

[Todo 9: ref: 行列と行列式の基礎 p44 問 1.15]

. . . .

Zebra Notes

Type	**Number**
todo	9