

## $\mathbb{R}^n$ 上の内積とノルム

$\mathbb{R}^n$  にはベクトル演算という構造があるわけだが、**内積**という付加的な構造を定める

ref: 行列と行列式の基礎 p76

🎓  $\mathbb{R}^n$  上の内積  $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^n, \mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  に対して、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

を  $\mathbb{R}^n$  上の**内積**と呼ぶ

特に、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$$

なので、

$$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \geq 0$$


が定義できる

🎓  $\mathbb{R}^n$  上のノルム  $\mathbb{R}^n$  上のベクトル  $\mathbf{a}$  の**長さ** (**ノルム**) を次のように定義する

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$$

## $\mathbb{R}^n$ 上の内積の性質


ref: 行列と行列式の基礎 p76

  $\mathbb{R}^n$  上の内積の双線形性  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$  に対して、以下が成立する

- i.  $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$
- ii.  $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$
- iii.  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)$
- iv.  $(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

 証明

行列のかけ算と和に関する分配法則、行列のスカラー倍についての性質から従う ■

  $\mathbb{R}^n$  上の内積の対称性  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して、次が成り立つ


$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

 証明

実数同士の乗算は可換であることから、 $\mathbb{R}^n$  上の内積の定義により

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \sum_{i=1}^n v_i u_i = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

となり、明らかに成り立つ ■

  $\mathbb{R}^n$  上の内積の正値性  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  に対して、

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$$

であり、 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  のときに限り、等号が成立する

## 証明

内積の定義より、

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n u_i^2 \geq 0$$


である

ここで現れた  $u_i^2$  は、 $u_i$  が 0 のときに限り 0 になるので、 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  のときに限り、等号が成立する ■



## $\mathbb{R}^n$ 上の内積と直交

ref: 行列と行列式の基礎 p77

  $\mathbb{R}^n$  上の内積に対するコーシー・シュワルツの不等式  
 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して、次が成り立つ

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

## 証明

任意の  $t \in \mathbb{R}$  に対して、

$$\|\mathbf{u} - t\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} - t\mathbf{v}, \mathbf{u} - t\mathbf{v}) \geq 0$$

が成り立つ

ここで、内積の双線形性を用いて左辺を展開すると、

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) - 2t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + t^2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq 0 \\ \|\mathbf{u}\|^2 - 2t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + t^2\|\mathbf{v}\|^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

これは  $t$  についての 2 次式であり、判別式が 0 以下であることが

ら、次の不等式が成り立つ

$$\begin{aligned}(-2(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^2 - 4\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 &\leq 0 \\ 4(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 &\leq 4\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2\end{aligned}$$

よって、両辺を 4 で割ると

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

が得られる ■

これより、 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  が 0 でないとき、

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

なので、

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

を介して  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  のなす角を定義できる

🎓  $\mathbb{R}^n$  上のベクトルのなす角  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して、

$$\cos \theta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

により定まる  $\theta$  を  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  のなす角という

$\cos \theta = 0$  は、幾何学的には  $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  のなす角が直角であることを意味する

🎓  $\mathbb{R}^n$  上のベクトルの直交  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して、

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$$

が成り立つとき、 $\mathbf{u}$  と  $\mathbf{v}$  は直交するといい、

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

と表記する



## $\mathbb{C}^n$ 上の内積

複素数  $z = a + bi$  に対して、

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$$

という式が成り立つ

このとき、 $a - bi$  を  $z$  の共役複素数といい、 $\bar{z}$  と表記する

また、 $\sqrt{a^2 + b^2}$  は  $z$  の絶対値と呼ばれ、 $|z|$  と表記する

すなわち、冒頭の不等式は、

$$|z|^2 = z\bar{z} \geq 0$$

と書き換えられる

このことを利用して、 $\mathbb{C}^n$  上の内積は、次のように定義すると  $\mathbb{R}^n$  の場合の自然な拡張になる

  $\mathbb{C}^n$  上の内積（標準内積）  $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^n, \mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^n \in$

$\mathbb{C}^n$  に対して、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i$$

を  $\mathbb{C}^n$  上の内積と定義する

この内積は標準内積、あるいは標準エルミート内積とも呼ばれる


このように定めることで、特に、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{a}_i = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \geq 0$$

であるので、 $\mathbb{R}^n$  の場合と同様に、ベクトルのノルムを定義できる



$\mathbb{R}^n$  上の内積で成り立つ性質の多くは、 $\mathbb{C}^n$  上の内積でも成り立つが、対称性に関しては注意が必要である


  $\mathbb{C}^n$  上の内積の対称性  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  に対して、次が成り立つ

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$$

 証明

$\overline{\overline{z}} = z$  をふまえると、

$$\begin{aligned} \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} &= \overline{\sum_{i=1}^n v_i u_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{v_i u_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{v_i} \overline{u_i} \\ &= \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i} \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

となり、目的の式が示された 

複素数  $z = a + bi$  において、 $b = 0$  の場合、 $z$  は実数である  
このとき、 $a + 0i = a - 0i = a$  であるから、 $z$  が実数の場合、

$$\overline{\overline{z}} = z$$

が成り立つ

よって、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  であるなら、 $\mathbb{C}^n$  上の内積の対称性の式は

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} = (\mathbf{v}, \mathbf{u})$$


と書き換えられ、これは  $\mathbb{R}^n$  上の内積の対称性そのものである

つまり、 $\mathbb{C}^n$  上の内積の対称性は、 $\mathbb{R}^n$  上の内積の対称性も含んだ表現になっている



## 転置による内積の表現

内積は、転置を用いて表現することもできる

 転置による内積の表現

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = {}^t\mathbf{a} \cdot \overline{\mathbf{b}} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{pmatrix} \overline{b_1} \\ \overline{b_2} \\ \vdots \\ \overline{b_n} \end{pmatrix}$$