解が無限個ある場合

掃き出し法によって、係数行列を単位行列に変形できない場合もある

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p101

- 解が一意に定まらない場合（解が無限個ある場合）
- 解が存在しない場合

まずは、解が一意に定まらない場合を見てみよう

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \qquad \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ 2x + y = 2 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

$(1,1)$ 成分を要にして第 1 列を掃き出す：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \qquad \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ 3y + 6z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$(2,2)$ 成分を 1 にする：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \tfrac{1}{3}R_2 \qquad \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

$(2,2)$ 成分を要にして第 2 列を掃き出す：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_2 \end{array} \qquad \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

1 を対角成分として持つ列の対角成分以外を 0 にする：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{cases} x - z = 1 \\ y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

この連立方程式は、実質的に 2 本の方程式しか持たないことがわかる

$$\begin{cases} x \qquad - \quad z = 1 \\ \\ \qquad y + 2z = 0 \end{cases}$$

x, y について解くと、

$$\begin{cases} x \qquad = z + 1 \\ \\ \qquad y = -2z \end{cases}$$

となるので、z に任意の数 $z = \alpha$ を与えて解が得られる

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 1 \\ -2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解が存在しない場合

次のような連立一次方程式を考える

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p104

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \qquad \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ \\ 2x + y \qquad = 1 \\ \\ x \qquad - \quad z = 1 \end{cases}$$

$(1, 1)$ 成分を要にして第 1 列を掃き出す：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \qquad \begin{cases} x - \quad y - 3z = 1 \\ \\ \qquad 3y + 6z = -1 \\ \\ \qquad y + 2z = 0 \end{cases}$$

$(2, 2)$ 成分を 1 にするため、第 2 行と第 3 行を入れ替える：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_3 \\ R_2 \end{array} \qquad \begin{cases} x - \quad y - 3z = 1 \\ \\ \qquad y + 2z = 0 \\ \\ \qquad 3y + 6z = -1 \end{cases}$$

$(2, 2)$ 成分を要にして第 2 列を掃き出す：

$$
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & -3 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right) R_3 - 3R_2
\qquad
\begin{cases}
x - y - 3z & = 1 \\
y + 2z & = 0 \\
0 & = -1
\end{cases}
$$

$0 = -1$ という式が現れたので、この連立方程式には解が存在しない

掃き出し法の段階ごとに得られる形

ここまで見てきた、掃き出し法による連立方程式の解法をまとめると、大まかには次のような手順を踏むことになる

1. 左の列から順に、対角成分を 1 にする
2. 対角成分が 1 となっている列の対角成分以外を 0 にする

手順 1 で得られる形を行階段行列と呼び、手順 2 で得られる形を既約行階段行列と呼ぶ

ただし、$0 = -1$ が現れたときのように、手順 1（行階段行列への変形）だけで解が存在するかはわかってしまう

解の存在以外にも、行階段行列に変形することで読み取れることが多くある