


# 第 1 章

## 対角行列と三角行列


### 対角行列とスカラー行列

 対角行列 対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列を対角行列と呼ぶ

$a_{ii} = c_i \quad (1 \leq i \leq n)$  である対角行列を次のように表す

$$\text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

対角行列の特別な場合として、すべての対角成分が同じ値である行列はスカラー行列と呼ばれる

 スカラー行列  $c$  をスカラーとすると、 $cE$  の形の行列をスカラー行列と

いう

$$cE = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$



## 対角行列とスカラー倍

行列  $A$  にスカラー行列をかけることは、

$$(cE)A = A(cE) = cA$$

のように、スカラー  $c$  をかけるのと同じである

発展して、対角行列の場合には次のことがいえる

 対角行列と列ベクトルのスカラー倍 右から対角行列をかけると、各列ベクトルがスカラー倍になる

すなわち、 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  とすると、

$$A \cdot \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_1 \mathbf{a}_1, c_2 \mathbf{a}_2, \dots, c_n \mathbf{a}_n)$$

が成り立つ


 証明

[ Todo 1: book: 行列と行列式の基礎 p63 (問 2.8) ]



## ブロック対角行列

対角行列の概念は、行列の各成分が数ではなく行列の場合にも拡張できる

 **ブロック対角行列** 対角線上のブロックがすべて正方行列で、それ以外のブロックが零行列であるものを **ブロック対角行列** という

$$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_k \end{pmatrix}$$

ここで、対角成分に対応する行列  $A_1, A_2, \dots, A_k$  を **対角ブロック** という

## 対角行列の嬉しさ：入出力の視点

ベクトルと行列を使うことで、入力  $\mathbf{x}$  と出力  $\mathbf{y}$  の関係を多次元の場合でも簡潔に表すことができる

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

### 一般の行列による入出力

たとえば  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  をともに 3 次元ベクトルとすると、 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

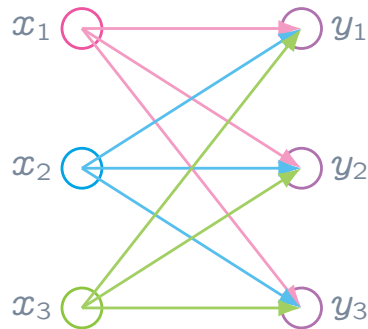
ここで、たとえば 2 行目に注目すると、

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

となり、 $y_2$  の計算に  $\mathbf{x}$  のすべての成分  $x_1, x_2, x_3$  が使われていることがわかる

各行に対応する出力  $y_i$  は、入力  $\mathbf{x}$  のすべての成分に依存している

この依存関係を、次のようなダイアグラムで表すことにする



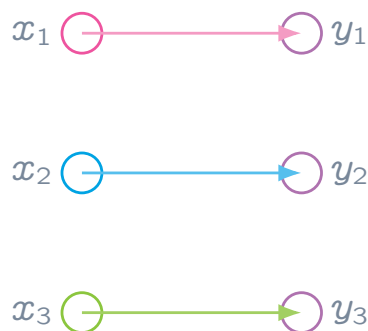
## 対角行列による入出力

$A$  が対角行列の場合、 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  は次のような形になる

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{22}x_2 \\ a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

ベクトルの各行に注目すると、各出力  $y_i$  は、入力  $\mathbf{x}$  の対応する成分  $x_i$  のみに依存していることがわかる



このように、 $A$  が対角行列の場合、 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  は独立な  $n$  本のサブシステム

$$y_1 = a_{11}x_1$$

$$\vdots$$

$$y_n = a_{nn}x_n$$

に分割されている

つまり、対角行列を使って関係を表現できれば、

見た目は  $n$  次元問題でも、実質は 1 次元問題が  $n$  本あるだけ

という状況になり、問題を大きく単純化できる

## ブロック対角行列による入出力

ブロック対角行列は、

各ブロックごとに独立に変換される

という形の写像を表している

たとえば、

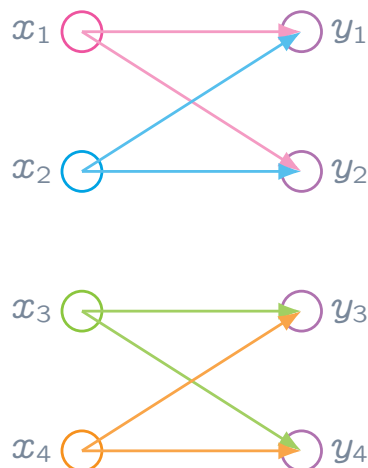
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

というブロック対角行列は、次のように分けて考えることができる

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

ダイアグラムで表すと、2 つの独立なサブシステムに分解されている様子が見える



## 対角行列の嬉しさ：冪乗の計算

$A$  が対角行列の場合、 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$  は、行ごとのサブシステムとして各行を独立に計算できた


$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 \\ &\vdots \\ y_n &= a_{nn}x_n \end{aligned}$$

このように各行に分けて「1次元問題が  $n$  本あるだけ」と考えると、対角行列どうしの積や冪乗も、簡単に計算できることがわかる

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix}$$

## 三角行列

 上三角行列の積　上三角行列どうしの積は上三角行列となる

 証明

[ Todo 2: ]

## Zebra Notes

Type	Number
todo	2