




特異値と特異ベクトル

スペクトル分解の拡張である特異値分解では、任意の行列がその**特異値**と**特異ベクトル**によって表せる

ref: 線形代数セミナー
p28~29

 特異値と特異ベクトル 零行列ではない任意の $m \times n$ 行列 A に対して、

$$A\boldsymbol{v} = \sigma\boldsymbol{u}, \quad A^{\top}\boldsymbol{u} = \sigma\boldsymbol{v}$$

となる正の数 σ を**特異値**と呼び、

- **左特異ベクトル**: m 次元ベクトル $\boldsymbol{u} (\neq 0)$
- **右特異ベクトル**: n 次元ベクトル $\boldsymbol{v} (\neq 0)$

を合わせて**特異ベクトル**と呼ぶ

特異ベクトルと固有ベクトルの関係

特異値と特異ベクトルの関係式

$$A\boldsymbol{v} = \sigma\boldsymbol{u}, \quad A^{\top}\boldsymbol{u} = \sigma\boldsymbol{v}$$

において、第 1 式の両辺に A^{\top} を左からかけると、

$$\begin{aligned} A^{\top}A\boldsymbol{v} &= \sigma A^{\top}\boldsymbol{u} \\ &= \sigma^2\boldsymbol{v} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{第 2 式を代入}$$

また、第 2 式の両辺に A を左からかけると、

$$\begin{aligned} AA^{\top}\boldsymbol{u} &= \sigma A\boldsymbol{v} \\ &= \sigma^2\boldsymbol{u} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{第 1 式を代入}$$

得られた結果をまとめると、

$$AA^{\top}\boldsymbol{u} = \sigma^2\boldsymbol{u}, \quad A^{\top}A\boldsymbol{v} = \sigma^2\boldsymbol{v}$$

ここで、 A は任意の長方形列だが、 AA^T と $A^T A$ は対称行列となる

すなわち、

- 左特異ベクトル \mathbf{u} は m 次対称行列 AA^T の固有ベクトル
- 右特異ベクトル \mathbf{v} は n 次対称行列 $A^T A$ の固有ベクトル

であり、特異値の 2 乗 σ^2 は $AA^T, A^T A$ 共通の固有値である

特異ベクトルの正規直交化

A の特異値を $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ とする

ここで、重複があってもよい

対応する r 本の左特異ベクトル $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$ と r 本の右特異ベクトル

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ は、どちらも対称行列の固有ベクトルであるから、それぞれ

を正規直交系に選ぶことができる