

Chapter 1

ε - δ 論法と極限

ここまでのこの本では、極限というものを厳密に定義していなかった。また、微分と積分において、イメージで導出できることを最重視し、厳密な議論を避けた箇所が多くある。

厳密には、極限は ε - δ 論法によって定義され、微分積分の基礎理論は極限の議論に基づいている。
 ε - δ 論法に踏み込んでいない私たちは、極限というものを語る言葉をまだ持ち合わせていない。

1.1 実数の集合

厳密な理論を展開する上で、知っておくべき言葉の定義を行う。

1.1.1 区間

2つの実数の間の範囲は、区間と呼ばれる。

区間
実数全体の集合 \mathbb{R} の部分集合のうち、 $a < b$ である実数 a と b の間にあるすべての実数の集合を **区間** という。

区間は、端点を含むかどうかによって、開区間、閉区間、半開区間に分類される。

開区間

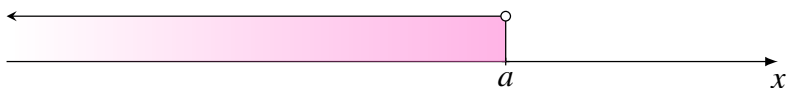
端点を含まない区間を開区間という。

開区間 $a \leq x \leq b$ となる実数 x の集合を 開区間 といい、 (a, b) と表す。

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



閉区間

端点を含まない区間を閉区間という。

閉区間 $a < x < b$ となる実数 x の集合を 閉区間 といい、 $[a, b]$ と表す。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$



$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



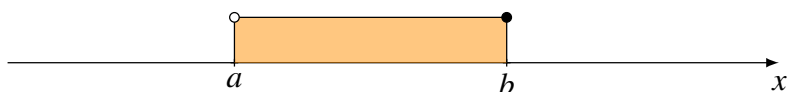
半開区間

一方の端点を含み、他方の端点を含まない区間を半開区間という。

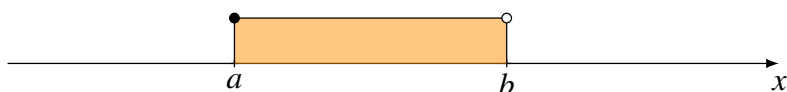
半開区間 次のような集合を 半開区間 という。

- $a \leq x < b$ となる実数 x の集合を、 $[a, b)$ と表す。
- $a < x \leq b$ となる実数 x の集合を、 $(a, b]$ と表す。

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



1.2 数列の極限

微分を定義するには関数の極限を考えるが、関数の極限の諸性質は、数列の極限から導かれる。まずは、 $\varepsilon - \delta$ 論法（数列の場合は $\varepsilon - N$ 論法とも呼ばれる）によって数列の極限を定義し、その性質をひとつひとつ確かめていこう。

1.2.1 ε で「一致」をどう表現するか

「限りなく近づく」という表現では、「限りなく」の部分に無限という概念が含まれてしまう。有限の値 ε を使って、無限を表現しようとするのが $\varepsilon - \delta$ 論法である。

* * *

$\varepsilon - \delta$ 論法で極限を定義する前に、有限値 ε を使った議論の例を見てみよう。

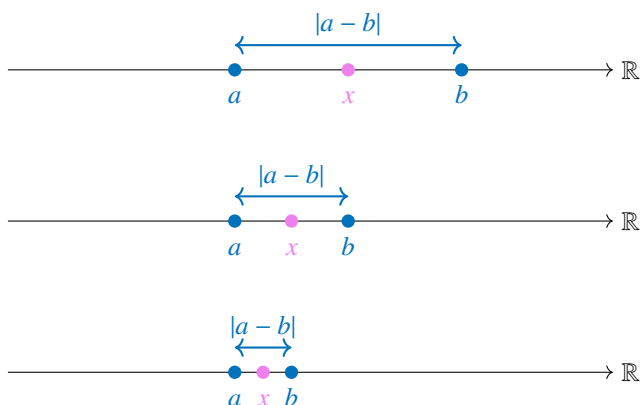
有限値 ε の不等式による一致の表現

a, b を実数とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次のことがいえる。

$$|a - b| < \varepsilon \implies a = b$$

実数は連続である（数直線には穴がない）ため、 a と b が異なる実数であれば、 a と b の間には無数の実数が存在する。

つまり、 a と b が異なる限り、その間の距離 $|a - b|$ は絶対に 0 にはならない。



$|a - b|$ が 0 にならないということは、ここでも実数の連続性によって、 $|a - b|$ より小さい実数が存在してしまう。

たとえば、 a と b の間の中点 $x = \frac{|a - b|}{2}$ は、 $|a - b|$ よりも小さい。



a と b の間の中点というと $\frac{a - b}{2}$ だが、正の数 ϵ と比較するため、絶対値をつけて $\frac{|a - b|}{2}$ としている。

$|a - b|$ より小さい実数が存在してしまうと、「任意の」 $\epsilon > 0$ に対して、 $|a - b| < \epsilon$ を成り立たせることができない。

ϵ はなんでもよいのだから、 $|a - b|$ より小さい実数を ϵ として選ぶこともできてしまう。

しかし、 $|a - b|$ より小さい実数を ϵ としたら、 $|a - b| < \epsilon$ は満たされない。

$|a - b|$ が 0 でないという状況下では、あらゆる実数 ϵ より $|a - b|$ を小さくすることは不可能である。

したがって、 $|a - b| < \epsilon$ を常に成り立たせるなら、 $|a - b| = 0$ 、すなわち $a = b$ となる。

* * *

ここまでの考察から直観を取り除いて、この定理の数学的な証明をまとめておこう。

Proof: 有限値 ε の不等式による一致の表現

$a \neq b$ と仮定する。

$\varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2}$ とおくと、絶対値 $|a-b|$ が正の数であることから、 ε_0 も正の数となる。
よって、 $|a-b| < \varepsilon_0$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} |a-b| &< \frac{|a-b|}{2} \\ 2|a-b| &< |a-b| \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{両辺} \times 2$$

$$2|a-b| - |a-b| < 0$$

$$|a-b| < 0$$

絶対値が負になることはありえないので、 $a \neq b$ の仮定のもとでは矛盾が生じる。

したがって、 $a = b$ でなければならない。 ■

なお、 $|a-b| < \varepsilon$ の右辺を定数倍し、 $|a-b| < k\varepsilon$ などとしても、この定理は成り立つ。

定理「有限値 ε の不等式による一致の表現」は、定数を k として、次のように書き換えることもできる。

$$|a-b| < k\varepsilon \implies a = b$$



この場合、証明で $\varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2k}$ とおけば、まったく同様の議論が成り立つからだ。

実際に、 $|a-b| < 2\varepsilon$ とした場合のこの定理を、後に登場する数列の極限の一意性の証明で使うことになる。

1.2.2 ε - N 論法による数列の収束

ε - δ 論法は、数列の極限に適用する場合、 ε - N 論法と呼ばれることが多い。

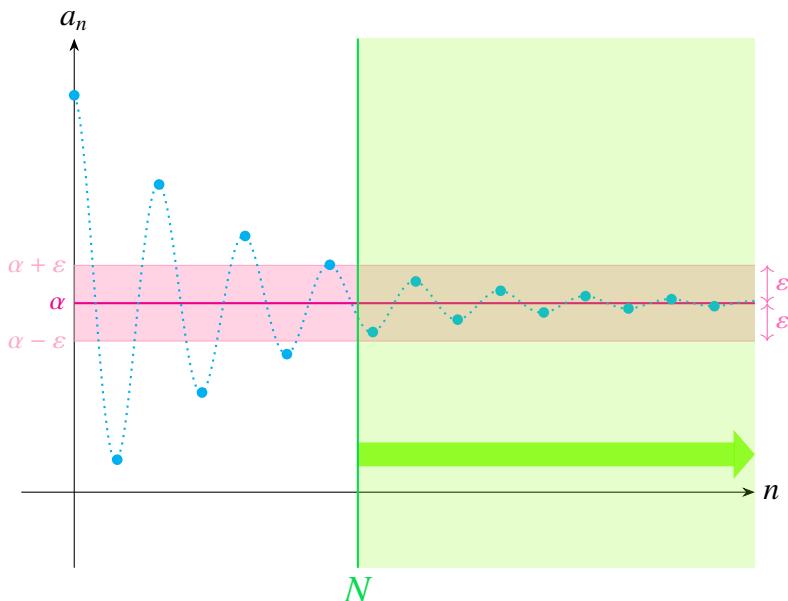
「数列が $\{a_n\}$ が α に収束する」ことの ε - N 論法による表現を、まずはイメージで掴んでみよう。

* * *

まず、 α の周りに、両側それぞれ ε だけ広げた区間を考える。

ε は正の数ならなんでもよいとすれば、 ε を小さな数に設定し、いくらでも区間を狭めることができる。

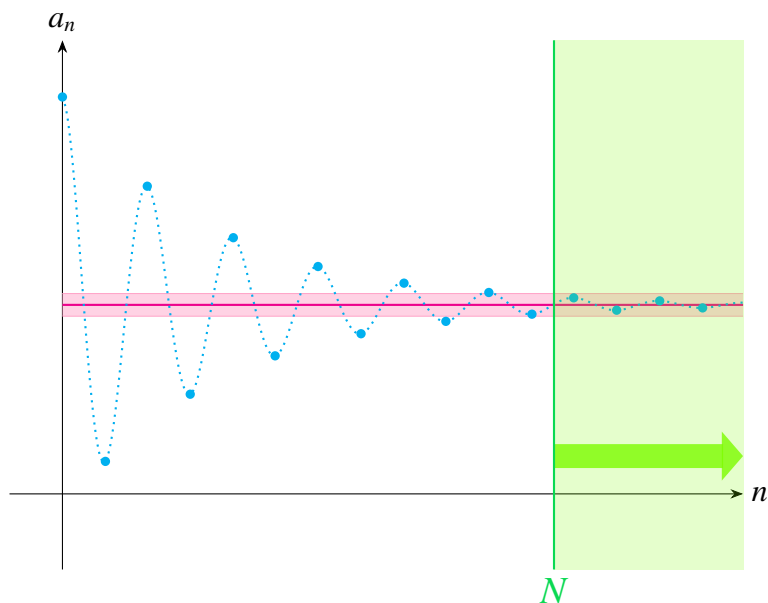
そして、「ここから先の項はすべて区間内に収まる」といえる位置に、 N という印をつけておく。



ε を小さくしていくと、 ε による α 周辺の区間に入る項は少なくなる。

それでも、 N をずらしていけば、 N 以降はこの区間に収まる項だけになる。

これこそが「収束」という現象だと定義するのが、 ε - N 論法の考え方である。



区間幅（の半分）となる ε をどんなに小さくしても、「 N 番目以降は区間内に収まる項だけになる」

といえるような N を設定できるか？が肝心で、そのような N が存在するなら、数列は収束するといえる。

このことを、数学の言葉でまとめておこう。

数列の収束と極限值

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 α について、次の条件を考える。

任意の正の数 ε に対して

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つような自然数 N が存在する

この条件が成り立つとき、数列 $\{a_n\}$ は α に収束するといい、次のように表す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \rightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

このとき、 α を数列 $\{a_n\}$ の極限值という。

$\varepsilon - \delta$ 論法によるこの定義を用いることで、数列の収束に関する諸性質を証明できるようになる。

1.2.3 数列の極限の一意性

数列が最終的に複数の極限值に散らばるとしたら、それは収束と呼べるだろうか？

$\varepsilon - \delta$ 論法による収束の定義は、そのような状況をきちんと除外するようになっている。

数列が複数の値に収束することはない。このことを示すのが、次の定理である。

数列の極限の一意性

数列 $\{a_n\}$ が収束するならば、その極限值はただ1つに定まる。

Proof: 数列の極限の一意性

数列 $\{a_n\}$ が α と β の 2 つの極限值を持つと仮定する。

このとき、任意の正の数 ϵ に対して、

$$n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \epsilon$$

$$n \geq N_2 \implies |a_n - \beta| < \epsilon$$

が成り立つような自然数 N_1 と N_2 が存在する。

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、 $n \geq N$ のとき、 N_1 と N_2 の大きい方が n 以下に収まることから、 $n \geq N_1$ と $n \geq N_2$ がともに成り立つ。

よって、 $n \geq N$ のとき、 $|\alpha - \beta|$ を考えると、

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta| &= |\alpha - \beta + \underbrace{a_n - a_n}_0| \\ &= |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)| \\ &\leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| \quad \left. \begin{array}{l} \text{三角不等式} \end{array} \right\} \\ &= |-(a_n - \alpha)| + |a_n - \beta| \quad \left. \begin{array}{l} | -A | = |A| \\ n_1 \geq N \text{ と } n_2 \geq N \text{ より} \end{array} \right\} \\ &= |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| \\ &< \epsilon + \epsilon \\ &= 2\epsilon \\ \therefore |\alpha - \beta| &< 2\epsilon \end{aligned}$$

したがって、有限値 ϵ の不等式による一致の表現より、

$$\alpha = \beta$$

これで、数列 $\{a_n\}$ の極限值はただ 1 つに定まることが示された。 ■

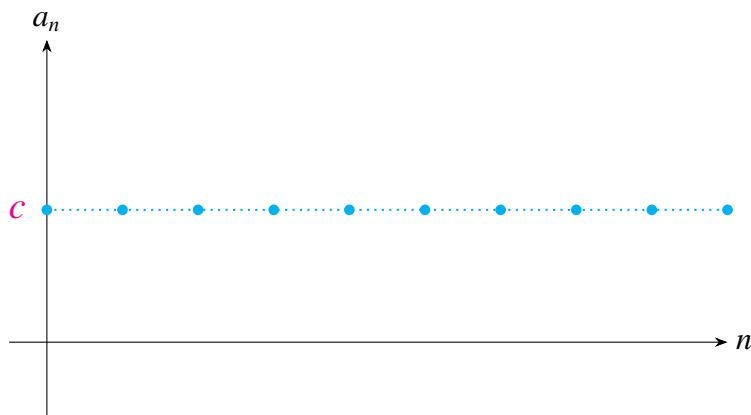
1.2.4 定数数列の極限

最も単純な数列の極限値を、 ϵ - N 論法で考えてみよう。

ここでは、同じ数だけを並べた数列（定数数列）の極限を考える。

定数数列の極限を考えておくことで、のちに数列の定数倍の極限へと発展させることができる。

定数数列 任意の n に対して $a_n = c$ となる数列 $\{a_n\}$ を定数数列という。



定数 c を並べた数列では、 n を大きくしたときの a_n の値も変わらず c なのだから、極限值も当然 c となりそうである。

定数数列の極限

任意の n に対して $a_n = c$ となる定数数列 $\{a_n\}$ は収束し、その極限值は c となる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

このような当たり前に聞こえる事実も、 $\varepsilon - N$ 論法では「当たり前」という直観を排除して議論できる。

Proof: 定数数列の極限

ε を任意の正の数とする。

a_n は n の値によらず c であるから、任意の n に対して次の式が成り立つ。

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

$$\therefore |a_n - c| < \varepsilon$$

したがって、

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - c| < \epsilon$$

となるような自然数 N は存在する（というか N はなんでもよい）。

よって、 $\{a_n\}$ は収束し、その極限值は c である。 ■

1.2.5 数列の極限の線形性

数列の極限についても、線形性が成り立つ。

数列の極限の線形性

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がともに収束するとき、 c を実数とすると、数列 $\{ca_n + cb_n\}$ も収束する。

そして、その極限值は次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n + cb_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

この線形性の式は、数列の和の極限と、数列の定数倍の極限を組み合わせたものになっている。

それぞれ証明することで、この線形性の式が成り立つことを確認しよう。

数列の和の極限

数列の和の極限

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がともに収束するとき、数列 $\{a_n + b_n\}$ も収束する。

そして、その極限值は次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$\{a_n\}$ の極限値を α 、 $\{b_n\}$ の極限値を β とすると、最終的に次のような関係導くことで、この定理が証明される。

$$n \geq N \implies |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)|$ は、 $a_n + b_n$ と $\alpha + \beta$ がどれだけ近いかわ、すなわち $a_n + b_n$ と $\alpha + \beta$ の誤差を表している。そして、この誤差を ε より小さくする必要がある。

そのためには、 a_n と α の誤差を $\frac{\varepsilon}{2}$ より小さくし、 b_n と β の誤差も $\frac{\varepsilon}{2}$ より小さくできればよい。

Proof: 数列の和の極限

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ 、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とおき、 ε を任意の正の数とする。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \geq N_1 \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同様に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ より、次のような自然数 N_2 が存在する。

$$n \geq N_2 \implies |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで、 $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、 $n \geq N$ のとき、 $n \geq N_1$ と $n \geq N_2$ がともに成り立つ。

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

よって、 $n \geq N$ のとき、三角不等式より、

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

という不等式が成り立つことで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ が示された。 ■

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するということは、 $\varepsilon - N$ 論法による数列の収束の定義より、

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

という関係が成り立つということである。

ここでの ε は「任意の」正の数であるから、 ε の部分にどんな正の数を当てはめても、この関係が成り立つことになる。

数列の和の極限の証明では、 ε の部分に $\frac{\varepsilon}{2}$ を当てはめた関係を利用している。

数列の定数倍の極限

数列の定数倍の極限

数列 $\{a_n\}$ が収束するとき、 c を実数とすると、数列 $\{ca_n\}$ も収束する。

そして、その極限值は次のようになる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$\{a_n\}$ の極限值を α とすれば、 ca_n と $c\alpha$ の誤差を ε より小さくする必要がある。

あとから誤差が最大 $|c|$ 倍されても大丈夫なように、 a_n と α の誤差は $\frac{\varepsilon}{|c|}$ より小さくできればよい。



c は正の数とは限らない。誤差は任意の正の数 ε と比較するために正の数として評価したいので、絶対値をつけている。

$|c|$ が分母にあるので、 $c = 0$ の場合は除外して考える必要がある。

$c = 0$ の場合は、定数数列の極限として考えることで、0 に収束することがわかる。

それでは、証明を見ていこう。

Proof: 数列の定数倍の極限

$c = 0$ と $c \neq 0$ の場合に分けて証明する。



$c = 0$ の場合

$c = 0$ のとき、右辺は、

$$c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

また、左辺は、定数数列の極限として考えて、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

したがって、 $c = 0$ の場合は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ が成り立つ。

★ $c \neq 0$ の場合

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とおき、 ε を任意の正の数とする。

このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N が存在する。

$$n \geq N \implies |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

よって、 $n \geq N$ のとき、

$$\begin{aligned} |ca_n - c\alpha| &= |c(a_n - \alpha)| \\ &= |c||a_n - \alpha| \\ &< |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon \\ \therefore |ca_n - c\alpha| &< \varepsilon \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} |AB| = |A||B| \\ |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|} \end{array} \right\}$$

という不等式が成り立つことで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = c\alpha$ がいえる。

以上より、いずれの場合も、数列 $\{ca_n\}$ は $c\alpha$ に収束することが示された。 ■