関数の局所的な様子を見る

簡単な関数のグラフは拡大していくと急に様子が変わったりせず、むしろ、だんだん安定したものになると考えられる

局所的な部分を拡大すると安定した姿になるとき、その様子を数学的にとらえる概念が微分

ものによっては、拡大するとどんどん見え方が変わるものもある

拡大を何度繰り返しても同じ複雑さを保つ数学的構造（フラクタル）も自然界には現れる

拡大すれば何でも簡単になるわけではないが、微分では、拡大したとき安定していく「素直」なものを主な対象とする

つまり、微分は局所を分析するのに強力な手法だが、万能ではない

微分の定義

関数は変化の法則性をとらえる数学的言語

数 x に対して数 $f(x)$ が定まるとき、$f(x)$ を変数 x の関数という

＊　＊　＊

座標 $(x, f(x))$ を xy 平面でプロットした曲線を関数 $f(x)$ のグラフという

これは、x 座標の点 x における高さが $f(x)$ となる曲線

＊　＊　＊

この曲線の局所的な様子を見るのに、変数 x を $x+h$ に動かしてみる

そうすると、関数の値は $f(x)$ から $f(x+h)$ に変わる

「素直」な関数のグラフをどんどん拡大すると、拡大部分はだんだん直線のように見えるだろう、と考えられる

h が小さいとき、斜めの曲線がほぼ一定の傾きの直線に見えるというのは、関数の値の変化量 $f(x+h) - f(x)$ が h にほぼ正比例するということ

式で表すと、x から $x+h$ の区間のグラフを直線とみなしたときの勾配

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

は、h が 0 に近づくとある 1 つの数に近づく、すなわち、収束するはずである

＊　＊　＊

■定義　h を 0 に近づけると、$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ がある数に収束するとき、$f(x)$ は x において微分可能であるという

このとき、極限値を

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と書き、$f(x)$ の微分または微分係数（微係数）という

＊　＊　＊

定数関数の微分　「収束する」ことを「限りなく近づく」と言うこともある

日常的な言葉だと「限りなく近づく」には「その値に達していない」というニュアンスを感じるが、数学では、最初からずっと同じ値のときも「収束する」場合に含める

$f(x)$ が x の値によらないとき、$f(x)$ を定数関数という

このときは h がどんな数でも $f(x+h)-f(x)=0$ となるので、定数関数の微分は 0 である

＊　＊　＊

微分係数が定まらない例

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が収束しない状況の例として、$y=|x|$ を考える

$f(x)=|x|$ の場合、$x=0$ で

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

を計算しようとすると、

$h>0$ のときは

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h}{h}=1$$

$h<0$ のときは

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{-h}{h}=-1$$

となり、h を正から 0 に近づけるときと、負から 0 に近づけるときとで、$\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ の極限の値が異なってしまうので、微分係数 $f'(0)$ が定まらない

＊　＊　＊

■定理　$a<x<b$ で定義された、微分可能な関数 $f(x)$ が $x=c$ で最大値または最小値をとるならば、$f'(c)=0$ である

＊　＊　＊

$f'(c)$ が最大値となる場合の証明

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

において、$f(c)$ が最大値であることから、

$$f(c)\geq f(c+h)$$
$$f(c+h)-f(c)\leq 0$$

したがって、$h>0$ のときは、

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$$

となり、h を正の側から 0 に近づけた極限値として $f'(c)\leq 0$ が成り立つ

一方、$h<0$ のときは、

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$

となり、h を負の側から 0 に近づけた極限値として $f'(c)\geq 0$ が成り立つ

$f'(c)\leq 0$ かつ $f'(c)\geq 0$ なので、$f'(c)=0$ が導かれた　□

＊　＊　＊

$f'(c)$ が最小値となる場合の証明　$f'(c)$ が最大値となる場合と同様に示される　□

導関数

x を止めて考えると、$f(x)$ の微分は 1 つの数

$$\frac{df}{dx}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

また別の視点として、

- x に数を与えると、何か 1 個、数が出てくる
- また別の x に対しては、別の数が出る

そう思うと、x から $\dfrac{df}{dx}(x)$ への対応は 1 つの関数を与えていると考えることができる

このように、$\dfrac{df}{dx}(x)$ を x の関数と見たとき、それを $f(x)$ の導関数という

＊　＊　＊

「微分」と「導関数」は視点の違いで使い分けられる言葉

- x を止めて $\dfrac{df}{dx}(x)$ という 1 個の数（微分係数）に注目するのか
- x を変数と思って $\dfrac{df}{dx}(x)$ を関数とみなす（導関数として扱う）のか

後者の立場に立って、$\dfrac{df}{dx}(x)$ を関数だと思うと、さらに微分を考えることができる

＊　＊　＊

微分できないからといってそこで終わりではない

たとえば、関数概念を拡張した超関数の理論は、極限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

が存在しない場合にも、より広く「微分」という概念をとらえる枠組みを与えるもの

単項式 x^n の微分

$f(x+h)=(x+h)^n$ の二項展開

$$f(x+h)=x^n+nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^n$$

を用いると、

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)&=(x+h)^n-x^n\\&=x^n+nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2\\&\qquad+\cdots+h^n-x^n\\&=nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^{n-1}\end{aligned}$$

上の式変形で、最初の x^n は最後の $-x^n$ と相殺されている

両辺を h で割ると、

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{nx^{n-1}h+{}_nC_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^{n-1}}{h}\\&=nx^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\end{aligned}$$

h が 0 に近づくと、

- h に無関係な最初の項 nx^{n-1} はそのまま残る
- 次の h の項は 0 に近づく
- その後の $h^2,h^3,\cdots,h^{n-1}$ の項はさらに速く 0 に近づく

というわけで、h を 0 に近づけると nx^{n-1} に収束し、

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

が成り立つ

微分しても変わらない不思議な関数

この式をぼんやりと眺めていると、

$$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$$

- 左辺における $\dfrac{d}{dx}$ という記号に呼応して、右辺では n が飛び出すというふうにも見える
- 左辺では x の n 乗だったものが、右辺では $n-1$ 乗になっている

＊　＊　＊

x^n を n の階乗で割った $\dfrac{x^n}{n!}$ という関数を考える

この関数を微分すると、$\dfrac{1}{n!}$ は微分の外に出せる

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right)=\frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}x^n\right)=\frac{nx^{n-1}}{n!}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

この式では、左辺と右辺で似た形が現れている

文字は左辺の n から右辺の $n-1$ に化けるが、形は同じ

n に具体的な数を入れて確かめてみる

- $n=0$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^0}{0!}\right)=0$
- $n=1$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^1}{1!}\right)=\dfrac{x^0}{0!}$

- $n=2$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{2!}\right)=\dfrac{x^1}{1!}$
- $n=3$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^3}{3!}\right)=\dfrac{x^2}{2!}$
- $n=4$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4}{4!}\right)=\dfrac{x^3}{3!}$
- $n=5$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^5}{5!}\right)=\dfrac{x^4}{4!}$

微分すると斜め右下にまったく同じ形の式が現れるというパターンが続く

上のリストでは $n=5$ で止めているが、たとえば $n=100$ までいっても同じパターンが続く

そこで、$\dfrac{x^n}{n!}$ を $n=0$ から順に全部足すことを考え、それを $f(x)$ とおく

$$f(x)=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$
$$\frac{d}{dx}f(x)=0+\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$$

下の式は1個右にずれているので、途中で打ち切れば1個足りなくなるが、無限に足すと、上の式と下の式はぴったり一致している

したがって、
$$\frac{d}{dx}f(x)=f(x)$$

が成り立つことがわかる

つまり、関数 $f(x)$ は微分したものが自分自身になっている！

いま無限級数として定義した関数 $f(x)$ を何通りかの記法で表しておく

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\ &=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\\ &=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots \end{aligned}$$

後にこの関数は、指数関数として e^x と書くことになる

ネイピアの数

次の関数に $x=0$ と $x=1$ を代入してみる

$$f(x)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

* * *

$x=0$ を代入すると　最初の1だけが残り、

$$f(0)=1$$

* * *

$x=1$ を代入すると　1を何乗しても1であるから、

$$f(1)=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

この $f(1)$ の数値はどのくらいになるだろうか？

1. 第1項は1
2. 第2項も1
3. 第3項は0.5
4. 次は前の項を3で割るわけだから $0.166\ldots$
5. 次はさらに4で割るから $0.041\ldots$
6. 次はさらにそれを5で割って $0.008\ldots$

ここまでの6項の和で $2.716\ldots$ となる

加える項は急速に0に近づく

項が100個くらいまで進むと、次に加える $\dfrac{1}{100!}$ は小数点以下に0が150個以上並ぶくらい小さな数になる（$10^{152}<100!<10^{164}$ という不等式より）

このように、無限級数 $f(1)$ は収束がとても速く、

$$f(1)=2.71828\ldots$$

という数になる

＊　＊　＊

■定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

証明のスケッチ　二項展開を用いて、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

ここで、$k = 2$ 以降の各項は次のように展開する

$$\begin{aligned}\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2} &= \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}\\ &= \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{n}\\ &= \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{n!}{3!(n-3)!}\cdot\frac{1}{n^3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}\\ &= \frac{1}{3!}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\\ &= \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\end{aligned}$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\ &\qquad +\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\end{aligned}$$

n が大きくなると $\frac{1}{n}$ は 0 に近づくので、$1-\frac{1}{n}$ は 1 に近づき、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

となる　□

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ の収束

n を大きくすると $n!$ は急速に大きくなるので、$x = 1$ のときには無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ が収束することは納得できる

では、$x > 1$ のときもこの無限級数は収束するといえるのだろうか？

＊　＊　＊

そもそも数列の各項が 0 に近づかないと、その数列の総和は収束しないため、まず次の問いを考える（以下では x を固定しておく）

■問題　n をどんどん大きくしたとき、$\frac{x^n}{n!}$ は 0 に近づくか？

この問いは、x^n と $n!$ の大きさを比べようという問題である

たとえば $n = 100$ とすると、実は $100!$ の方が 10^{100} よりも圧倒的に大きくなることをすでに示している

$n = 100$ に限らず、「x を止めたとき、x^n と $n!$ の比である $\frac{x^n}{n!}$ は、n を大きくすると分母が圧倒的に大きくなり、比は 0 に近づく」ことが同様の議論で示される

＊　＊　＊

無限級数の各項が 0 に近づいたとしても、「塵も積もれば山となる」（足し合わせると発散する）ことも起こり得る

では、次の問題はどうだろうか？

■問題　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ は収束するか？

実はこの無限級数は、等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ よりももっと速く収束する

証明のスケッチ

x は固定して、n に関する和を考える

整数 n が十分に大きければ、

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

これは、「無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ が等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ より速く収束する」という 1 つの表現

正確には、$8x^2+1$ より大きいすべての自然数 n に対して、

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

が成り立つ

このことがいえれば、$8x^2$ より大きい整数 N に対して、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ は次のように等比級数 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ より速く収束する

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|x|^n}{2^n}\\ &< \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\\ &= \frac{1}{2^N}\end{aligned}$$

上の計算のうち、$\displaystyle\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{|x|^n}{2^n}$ では、次のような三角不等式を利用している

$$|a_1+a_2+\cdots+a_m| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_m|$$
$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n|$$

そこで、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ を、$n=N$ までの有限和と、$n=N+1$ からの無限級数に分けて考える

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

このように考えると、左辺の無限級数が、右辺の有限和に収束することがわかる

不等式 $\dfrac{|x|^n}{n!} < \dfrac{1}{2^n}$ の証明

一般に $A \leq 0$ のとき、$n > 2A^2+1$ ならば、

$$A^n < n!$$

という不等式が成り立つことを示す

$A = 2|x|$ の場合 $(2|x|)^n < n!$ が、$\dfrac{|x|^n}{n!} < \dfrac{1}{2^n}$ となる

n が偶数（$=2m$）の場合、$n > 2A^2$ の n を $2m$ に置き換えることで、$m > A^2$ となり、

$$\begin{aligned}n! &= (2m)! = 2m\cdot(2m-1)\cdots2\cdot1\\ &> m\cdot m\cdots m = m^m = m^{\frac{n}{2}}\\ &> \left(A^2\right)^{\frac{n}{2}} = A^n\end{aligned}$$

が成り立つ

n が奇数の場合、$n-1$ は偶数なので、偶数の場合の結果から $(n-1)! > A^{n-1}$ がいえる

さらに、$n > 2A^2 + 1 > A$ なので、

$$
\begin{aligned}
n! &= n \cdot (n-1)! \\
&> n \cdot A^{n-1} \\
&> A \cdot A^{n-1} = A^n
\end{aligned}
$$

となり、いずれの場合も $A^n < n!$ が成り立つ　□