

Topic Note: 線形写像と行列

tomixy

2025 年 5 月 24 日

目次

行列の導入	1
線形写像の定義	3
線形写像の表現行列	5
\mathbb{R}^2 の線形変換の例	8
行列の積	8

* * *

行列の導入

長方形に並んだ数の集まりを

ref: 行列と行列式の基礎 1.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

などと書き、**行列**と呼ぶ

横の数字の並びを**行**、縦の数字の並びを**列**と呼ぶ

A は m 個の行と n 個の列をもつ行列である

第 i 行、第 j 列にある数字を a_{ij} と表し、これを (i, j) **成分**と呼ぶ

行が m 個、列が n 個の行列は、 **m 行 n 列の行列**、あるいは **$m \times n$ 型の行列**であるという

$n \times n$ 型の場合、行列は正方形なので n 次**正方行列**と呼ぶ

* * *

A の成分から第 j 列だけを取り出して \mathbb{R}^m のベクトルとしたものが

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$


であり、これを A の j 番目の**列ベクトル**という

A は、これらを横に並べたものという意味で

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

と書くことができる

* * *

 行列とベクトルの積 $m \times n$ 型の行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ と $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ との**積**を

$$A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n$$

により定める

ここで、 v_i は \mathbf{v} の第 i 成分である


$A\mathbf{v}$ を考えるとき、ほとんどの場合は、 A が 1 つ与えられていて $m\mathbf{v}$ がいろいろ動くという意識が強い


それは、行列 A のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る

$$\text{入力ベクトル } \mathbf{v} \rightarrow \text{出力ベクトル } A\mathbf{v}$$

という装置、すなわち**写像**だとみなすことである

* * *

 行列のスカラー倍 A を行列、 c をスカラーとすると、 A のすべての成分を c 倍して得られる行列を cA とする

 行列とベクトルの積の性質 A, B を $m \times n$ 型行列、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 、 $c \in \mathbb{R}$ とするとき、次が成り立つ

i. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$


ii. $A(c\mathbf{v}) = cA\mathbf{v}$

 証明

1.ref: 行列と行列式の基礎 p24 (命題 1.4.3)

* * *

線形写像の定義

 線形写像と線形性 写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは、次の 2 つの条件が成立することである

i. $f(c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v})$ がすべての $c \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ

ii. $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ がすべての $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ

これらの性質を写像 f の線形性という

また、 $m = n$ のとき、線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を \mathbb{R}^n の線形変換と呼ぶ

ref: 行列と行列式の
基礎 2

線形変換は空間 \mathbb{R}^n からそれ自身への写像なので、 \mathbb{R}^n 内において「ベクトルが変化している」（あるいは f が空間 \mathbb{R}^n に作用している）ニュアンスとみることができる

* * *


$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、 i より、

$$f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

なので、

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

 **零ベクトルの像** 零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される

* * *

$m = n = 1$ のときは、線形写像 $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ は、通常の意味の関数である


このとき、 i の性質から、

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1)$$

が成り立つので、 $a = f(1) \in \mathbb{R}$ とおくと、

$$f(x) = ax$$

と書ける

 **比例関数** 線形写像 $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ は、 a を**比例定数**とする**比例関数**である

* * *

線形写像の表現行列

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、各基本ベクトル \mathbf{e}_j の f による像を

$$f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

と書くとする

これらを横に並べることによって、 m 行 n 列の行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

この行列 A を f の表現行列という

特に、 \mathbb{R}^n の線形変換の表現行列は n 次正方行列である

* * *

\mathbb{R}^n の一般のベクトル \mathbf{v} を、基本ベクトルの線型結合として

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j$$

と書く

このとき、 f の線形性より、

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n v_j f(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{a}_j$$

となる


このベクトルの第 i 成分は

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n$$

と書ける

これは $A\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である


したがって、この記法を踏まえて、次のような表記ができる

 線形写像とその表現行列の関係

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

比例関数が比例定数 a だけで決まるのと同じように、線形写像は表現行列 A が与えられれば決まる

* * *

 零写像と零行列 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ と定めたものは明らかに線形写像であり、これを **零写像** と呼ぶ

その表現行列はすべての成分が 0 である行列である

この行列を **零行列** と呼び、 O で表す

$m \times n$ 型であることを明示するために $O_{m,n}$ と書くこともある

また、 n 次正方行列の場合は、 O_n と書く

* * *

 恒等写像と単位行列 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を、すべての $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$

に対して $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ と定めたものは明らかに線形写像である

これを **恒等写像** と呼び、 $f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ と書く

恒等写像の表現行列は、 $f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j$ ($1 \leq j \leq n$) より

$$E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを **単位行列** と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、 n 次であることを明示したいときは E_n と書く

* * *

線形写像 f から行列 A を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることができる

 行列から線形写像を作る $m \times n$ 型行列 A に対して、

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} \quad (\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n)$$

によって写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を定めれば、 f は線形写像である

証明

行列とベクトルの積の性質より、 f は線形写像である

また、 f の定義から明らかに A は f の表現行列である ■


* * *

\mathbb{R}^2 の線形変換の例

2.ref: 行列と行列式の基礎 p51 - p56

* * *

行列の積

 線形写像の合成 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への線形写像 g と、 \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^l への線形写像 f が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g: \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^l への線形写像である

 証明

3.ref: 行列と行列式の基礎 p56 (問 2.2)

f と g の表現行列をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする

A は $l \times m$ 型、 B は $m \times n$ 型の行列である

このとき、 $f \circ g$ は $l \times n$ 型行列で表現される

それを C と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

B を列ベクトルに分解して $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ と書くとき、

$$(f \circ g)(\mathbf{e}_j) = f(g(\mathbf{e}_j)) = f(\mathbf{b}_j) = A\mathbf{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n)$$

となる

C の (i, j) 成分は $A\mathbf{b}_j$ の第 i 成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、 C の (i, j) 成分を計算するときは、 A の第 i 行、 B の第 j 列だけを見ればよい

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、 A と B の積と呼ぶ