第 1 章

線形空間

基底と次元

部分空間のパラメータ表示を与えるために基準として固定するベクトルの集合を定式化すると、基底という概念になる

ref: 行列と行列式の基礎 p96、p99〜100
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p33〜35

基底は、座標空間の「座標軸」に相当するものであり、部分空間を生成する独立なベクトルの集合として定義される

基底　V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする
ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k\} \subset V$ は、次を満たすとき V の基底であるという

i. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k\}$ は線型独立である
ii. $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k \rangle$

線形空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k\}$ を 1 つ見つけたら、ベクトルの個数を数えて、V の次元が k であるとする

次元　V を線形空間とする

V の基底をなすベクトルの個数を V の**次元**といい、$\dim V$ と書く

また、$\dim\{\mathbf{0}\} = 0$ と定義する

基底の例：標準基底

たとえば、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり、これを $\mathbb{R}^n$ の**標準基底**という

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p35

標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は n 個のベクトルからなるため、$\mathbb{R}^n$ の次元は n である

数ベクトル空間の標準基底　数ベクトル空間 K^n において、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は K^n の基底である

証明

部分空間を生成すること

任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in K^n$ は、次のように表せる

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

したがって、K^n は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ によって生成される

■

線型独立であること

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の線形関係式

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \mathbf{0}$$

を考える

このとき、左辺は

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられるので、これが零ベクトルになるためには、

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

でなければならない

よって、$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は線型独立である ■

基底と次元を定義するにあたって、次の保証が必要になる

i. 任意の部分空間に、基底の定義を満たす有限個のベクトルが存在すること（基底の存在）
ii. 任意の部分空間に対して、基底をなすベクトルの個数が、基底の選び方によらず一定であること（次元の不変性）

基底の存在

基底の構成と存在を示すために、次の補題を用いる

ref: 行列と行列式の基礎 p98〜99
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p36〜37

⚓ **線型独立なベクトルの延長**　V を K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間とする

このとき、V の線型独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ と、V に入らないベクトル $\boldsymbol{a}$ は線型独立である

証明

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線型従属であるとする

すると、定理「線形結合によるベクトルの表現」より、$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表され、V に入り、矛盾する

よって、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は線型独立である ■

この定理は、ベクトルの集合が張る空間の記号を用いると、次のように簡潔にまとめられる

線型独立なベクトルの延長 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が線型独立であって、$\boldsymbol{v}_{k+1} \notin \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\}$ は線型独立である

K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間 V の線型独立なベクトルは、V の基底に拡張できる

基底の存在 K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間 V には基底が存在する

証明

$V \neq \{\mathbf{0}\}$ なので、V には少なくとも 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$ が存在する

定理「単一ベクトルの線型独立性と零ベクトル」より、$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は線型独立である

このとき、$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subset V$ であるが、もしも $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle = V$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は V の基底である

$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneq V$ ならば、$\boldsymbol{v}_2 \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ であるベクトルを V から選ぶことができる

補題「線型独立なベクトルの延長」より、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は線型独立である

このとき、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subset V$ であるが、もしも $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = V$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は V の基底である

$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subsetneq V$ ならば、$\boldsymbol{v}_3 \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であるベクトルを V から選ぶことができる

補題「線型独立なベクトルの延長」より、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は線型独立である

以下同様に続けると、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle = V$ となるまで、V に属するベクトルを選び続けることができる

ここで線型独立なベクトルを繰り返し選ぶ操作が無限に続かないこと（有限値 k が存在すること）は、有限従属性定理により、K^n の中には n 個を超える線型独立なベクトルの集合は存在しないことから保証される ■

基底の存在証明で行った基底の構成をさらに続けることで、次の定理が得られる

ref: 行列と行列式の基礎 p103

⚓ **基底の延長**　V を n 次元の線形空間とし、線型独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ が与えられたとする

このとき、$(n-m)$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ を追加して、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底になるようにできる

証明

基底の存在の証明において、線型独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ が得られたところからスタートし、同様の手続きを繰り返せばよい ■

次元の不変性

ref: 行列と行列式の基礎 p99

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p37〜38

次元の不変性　K^n の部分空間 V の基底をなすベクトルの個数（次元）は一定である

つまり、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ と $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l\}$ がともに V の基底ならば、$k = l$ である

証明

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であり、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l$ は線型独立であるから、有限従属性定理の抽象版より、$l \leq k$ である

同様にして $k \leq l$ も成り立つので、$k = l$ である ■

線型独立なベクトルと次元

ref: 行列と行列式の基礎 p100

線形独立なベクトルの最大個数と空間の次元　線形空間 V 中の線型独立なベクトルの最大個数は $\dim V$ と等しい

証明

V の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ とすると、V には k 個の線型独立なベクトルが存在する

また、$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であるため、有限従属性定理の抽象版より、V 中の線型独立なベクトルの個数は k を超えることはない

つまり、k は V に含まれる線型独立なベクトルの最大個数である

■

線形空間を生成するベクトルの最小個数と次元　線形空間 V を張るベクトルの最小個数は $\dim V$ と等しい

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p100 問 3.3]

線形写像の核空間と基底

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度を d とすると、基本解 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d \in \mathrm{Ker}(A)$ が存在して、任意の $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(A)$ に対して

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_d\boldsymbol{u}_d$$

ref: 行列と行列式の基礎 p94〜95

を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$ が一意的に定まる

このことは、基底の言葉で言い換えると次のようになる

⚓ **斉次形方程式の基本解と核空間の基底**　A を $m \times n$ 型行列とし、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解とするとき、$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ は $\mathrm{Ker}(A)$ の基底である

線形写像の像空間と列空間

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ が $\mathrm{Im}(A)$ に属するかどうかを調べるためには階数による判定条件が使える

ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97

一方、後に論じるように、

> ある線形写像の核空間として像空間をとらえる

こともできる

扱う問題によってはそのような見方が有効になる

線形写像の像空間は表現行列の列ベクトルによって張られるが、列ベクトルの集合は一般には線型独立ではない

像空間の基底を得るためには、列ベクトルの部分集合を考えるのが自然である

主列ベクトルによる像空間の基底の構成　行列 A の主列ベクトルの集合は $\mathrm{Im}(A)$ の基底である

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p97 定理 3.1.10]

線形写像の階数

行列の階数のさらに本質的な意味を明らかにするのが次の結果である

ref: 行列と行列式の基礎 p100

行列の階数と像空間の次元の一致　行列の階数は像空間の次元である

すなわち、A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$$

証明

定理「主列ベクトルによる像空間の基底の構成」より、A の主列ベクトル $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ は $\mathrm{Im}(A)$ の基底を成す

よってその個数 $r = \mathrm{rank}(A)$ は $\mathrm{Im}(A)$ の次元である ■

この定理は、A の階数が行変形の仕方によらずに決まることを念押しするような定理である

列ベクトルの言葉で階数の解釈を与える定理「階数と線型独立な列ベクトルの最大個数」よりも一段と抽象性が高くなっている

より抽象性を上げて、次の定義をする

> **線形写像の階数**　線形写像に対して、像空間の次元をその階数と定める
>
> つまり、$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、f の階数を
>
> $$\mathrm{rank}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$$
>
> と定義する

次元定理

ref: 行列と行列式の基礎 p101
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p82〜83

連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の自由度は、

$$\text{解の自由度} = (\text{変数の個数}) - \mathrm{rank}(A)$$

で表された

この関係は、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$、すなわち斉次形の場合にも成り立つ

そこで、変数の個数を n とおくと、次のようにも書き換えられる

$$\mathrm{rank}(A) = n - (A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解の自由度})$$

線型方程式と階数に関するこの関係を、線形写像と次元の言葉で言い換えたい

次のような線形写像

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \Cup & & \Cup \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x} \end{array}$$

を考えると、

- 写像 f は、行列 A に対応する
- 変数の個数は、$\boldsymbol{x}$ の動く空間 $\mathbb{R}^n$ の次元 n に対応する

- $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は、写像 f で $\mathbf{0}$ になってしまうものの次元に対応する

という関係が読み取れる

ここで、写像 f で $\mathbf{0}$ になってしまう縮退するものは、写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ である

このことを用いて関係式を表現し直すと、次のようになる

$$\mathrm{rank}(f) = n - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

⚓ **線形写像の次元定理**　$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、次が成り立つ

$$\mathrm{rank}(f) = n - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

証明

A を f の表現行列とし、$\mathrm{rank}(f) = r$ とする

このとき、$\mathrm{Ker}(f)$ の次元は $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間の自由度 $n - r$ と一致するため、

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Ker}(f) &= n - r \\ &= n - \mathrm{rank}(f) \\ \therefore \quad \mathrm{rank}(f) &= n - \dim \mathrm{Ker}(f)\end{aligned}$$

となり、定理が成り立つ ■

線形同型

線形同型は、部分空間が「同じ」であることを述べた概念である

ref: 行列と行列式の基礎 p101

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p91〜92

線形同型写像　V, W を線形空間とし、線形写像 $f : V \to W$ が全単射であるとき、f は**線形同型写像**あるいは単に**線形同型**であるという

このとき、同型を表す記号 $\cong$ を用いて、

$$f : V \xrightarrow{\cong} W$$

と書くこともある

部分空間の線形同型　V と W の間に線形同型写像が存在するとき、V と W は**線形同型**であるといい、

$$V \cong W$$

と書く

線形同型の性質

ここでは、線形同型写像の恒等写像、逆写像、合成写像との関係を述べる

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p93〜94

線形同型と恒等写像

恒等写像の線形同型性　恒等写像は線形同型写像である

証明

恒等写像は明らかに全単射であり、線形写像でもあるため、線形同型写像である　■

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

部分空間の自己同型性　部分空間 V は V 自身と線形同型である

すなわち、
$$V \cong V$$

線形同型と逆写像

線形同型写像の逆写像　線形同型写像の逆写像は線形同型写像である

証明

[Todo 3: ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p93〜94]

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

線形同型性の対称性　部分空間 V が部分空間 W と線形同型なら、W は V と線形同型である

すなわち、
$$V \cong W \Longrightarrow W \cong V$$

線形同型と合成写像

線形同型写像の合成　線形同型写像の合成は線形同型写像である

証明

[Todo 4: ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94]

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

線形同型性の推移性　部分空間 V が部分空間 W と線形同型で、W が部分空間 U と線形同型ならば、V は U と線形同型である

すなわち、

$$V \cong W \land W \cong U \Longrightarrow V \cong U$$

ここまでで登場した、部分空間の線形同型に関する性質をまとめると、

線形同型の同値関係としての性質

i. $V \cong V$
ii. $V \cong W \Longrightarrow W \cong V$
iii. $V \cong W \land W \cong U \Longrightarrow V \cong U$

となり、これらは、

同型 $\cong$ が等号 $=$ と同じ性質をもつ

ことを意味している

線形同型写像と基底

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94

線形同型写像による基底の保存　線形同型写像 f によって、部分空間の基底は基底に写る

証明

単射な線型写像は線型独立性を保つことから、f の単射性により、基底の線型独立性が保たれる

また、f の全射性により、基底の生成性も保たれる

よって、f によって基底は基底に写る　■

座標写像

ref: 行列と行列式の基礎 p101

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94～95

座標写像　V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする

このとき、K^n から V への線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}}\colon K^n \to V$ を

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{x} \in (x_i)_{i=1}^{n} \in K^n)$$

を $\mathcal{V}$ で定まる**座標写像**と呼ぶ

このように定めた線形写像が**座標写像**と呼ばれる背景は、この座標写像が線形同型であることを示し、それがどんな意味を持つのかを考えることでわかる

線形空間の基底によって定まる線形同型写像 V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする

このとき、K^n から V への線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}}\colon K^n \to V$ を

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{x} \in (x_i)_{i=1}^{n} \in K^n)$$

と定めると、これは線形同型写像である

証明

線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ が全単射であることを示す

単射であること

基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の線型独立性は、

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

で表される線形結合が、$x_i = 0$ を満たすことを意味する

$\Phi_{\mathcal{V}}$ の定義をふまえると、この条件は、

$$\mathrm{Ker}(\Phi_{\mathcal{V}}) = \{\boldsymbol{0}\}$$

と書ける

よって、線形写像の単射性と核の関係より、$\Phi_{\mathcal{V}}$ は単射である ■

全射であること

基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V を生成することは、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u} \in V &\iff \boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle \\
&\iff \exists (x_i)_{i=1}^n \in K^n \ \ s.t. \ \ \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i \\
&\iff \exists \boldsymbol{x} \in K^n \ \ s.t. \ \ \Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u} \\
&\iff \boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(\Phi_{\mathcal{V}})
\end{aligned}$$

という言い換えにより、

$$V = \mathrm{Im}(\Phi_{\mathcal{V}})$$

を意味する

よって、像空間と全射性の関係により、$\Phi_{\mathcal{V}}$ は全射である

■

この定理を部分空間の線形同型に関して言い換えると、次のような主張になる

⚓ **有限次元部分空間と数ベクトル空間の線形同型性**　任意の部分空間は次元の等しい数ベクトル空間と線形同型である

つまり、

> 和とスカラー倍だけに着目すれば、
>
> どんな部分空間も数ベクトル空間と「同じ」

ということを意味する

この同型により、部分空間に座標を与えることができる

そしてその座標によって、ベクトルの成分表示が得られる

線形代数における鳩の巣原理

ref: 行列と行列式の基礎 p102〜103

線形代数における鳩の巣原理の抽象版　V, W を同じ次元の線形空間とするとき、線形写像 $f: V \to W$ に関して、次はすべて同値である

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は線形同型
iv. $\mathrm{rank}(f) = \dim V = \dim W$

証明

$\mathcal{V}, \mathcal{W}$ をそれぞれ V, W の基底として、線形写像の合成

$$g: \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{V}}} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{W}}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

を考える

このとき、g は $\mathbb{R}^n$ の線形変換である

f が単射（全射）であると仮定すると、座標写像は全単射であるので、f との合成写像 g も単射（全射）となる

逆に、g が単射（全射）であると仮定した場合について考える

f は g を用いて次のように表現でき、

$$f = \Phi_{\mathcal{W}} \circ g \circ \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}$$

座標写像は全単射であるので、g との合成写像 f も単射（全射）となる

以上より、f が単射（全射）であることと、g が単射（全射）であることは同値である

線形変換 g に対して、線形代数における鳩の巣原理より、

$$g \text{ が単射} \iff g \text{ が全射} \iff g \text{ が全単射}$$

が成り立つが、g の単射性・全射性は f についても成り立つことがわかったので、

$$f \text{ が単射} \iff f \text{ が全射} \iff f \text{ が線形同型}$$

がいえる

最後に、階数に関する条件を示す

像空間と全射性の関係により、f が全射であることは、$\mathrm{Im}(f) = W$ と同値であるから、

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim W$$

より、

$$\mathrm{rank}(f) = \dim W = \dim V$$

が得られる ■

次元による部分空間の比較

次の事実は、数の一致で空間の一致が結論できる有用な結果である

ref: 行列と行列式の基礎 p102

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p41

⚓ **次元の一致による部分空間の一致判定**　2 つの線型空間について、$V \subset W$ ならば、

$$\dim V = \dim W \Longrightarrow V = W$$

証明

$\boldsymbol{v} \in V$ をそのまま W の元と考えることで得られる写像を $\iota\colon V \to W$ とする（包含写像）

この包含写像は、V の元 $\boldsymbol{v}$ を W の中にそのまま「埋め込む」操作を表しているため、$\iota(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ 自身である

$$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$$

特に、$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ そのものを意味する

$$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

したがって、零ベクトルへの写像による単射性の判定より、ι は単射である

また、ι が単射であることと、仮定 $\dim V = \dim W$ を合わせると、線形代数における鳩の巣原理の抽象版より、ι は全射であることがわかる

よって、全射の定義より、すべての $\boldsymbol{w} \in W$ に対して $\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v}$ が存在する
すなわち、W の元はすべて V の元であり、$V \subset W$ もふまえると、これは $V = W$ を意味する ■

次元による部分空間の比較　K^n の部分空間 V, W について、$V \subseteq W$ ならば、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立するのは、$V = W$ のときに限る

証明

$V \subseteq W$ であることから、基底の延長により、V の基底を延長して W の基底にできるので、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立する場合については、前述の次元の一致による部分空間の一致判定を参照 ■

核空間・像空間の次元

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p83 ～84

線形写像の単射性と核の次元　線形写像 $f: V \to W$ について、

$$f \text{ が単射} \iff \dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$

証明

線形写像の単射性と核の関係より、f が単射であることは次と同値である

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

次元の定義より、$\{\mathbf{0}\}$ の次元は 0 であるので、

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$

が成り立つ ■

線形写像の全射性と像の次元　線形写像 $f\colon V \to W$ について、

$$f \text{ が全射} \iff \dim \operatorname{Im}(f) = \dim W$$

証明

線形代数における鳩の巣原理の抽象版の主張そのものである ■

Zebra Notes

Type	Number
todo	4