

読書ノート：「無限と連続」の数学

tomixy

2025 年 3 月 19 日

目次

微分係数と微分、導関数	1
リミット（lim）をやめてしまおう？ . . .	1
微分の数式を日本語に翻訳すると？ . . .	2
微分という名詞と微分するという動詞 . . .	2
微分と導関数との関係	3
微分と関数の変化の様子との関係	3
平均値の定理、テイラーの定理を見直す	3
平均値の定理を見直す	3
平均値の定理のもとになるロルの定理 . .	4
テイラーの定理を理解する	5
テイラーの定理の内容	6
関数とは、そもそも何か？	6
微分可能な関数のマクローリン展開 . . .	6

微分係数と微分、導関数

リミット（lim）をやめてしまおう？
微分係数の定義の式でリミットをとってしまう

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

もちろんこの式は正しくない
左辺は h を変化させると変化するが、右辺は h に
無関係な定数

しかし、 h が非常に小さい数（0 に近い数）のとき、
右辺はほとんど左辺に等しくなるという意味で

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \sim f'(a)$$

と書けばよい

これがリミットの直感的な、あるいは実用的な意
味に他ならないわずかな違いは（それがいくらで
も小さくとれるなら）無視してもいい、これが微
分積分学の実用的な部分では大きな役割を果たす

しかし、ほぼ等しいというのはやはり少し気にな
るので、わずかな違いを表す記号 ε を使って書い
てみる

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a) + \varepsilon$$

ε は右辺と左辺の違い（差）を表す数で、この数は
 h を小さくすればいくらでも小さくなる

もう少し正確には、「 h を 0 に近づければ、 ε も 0
に近づく」あるいは「 $h \rightarrow 0$ なら、 $\varepsilon \rightarrow 0$ 」となる

このリミットをとってしまっ、差 ε を使って表
した微分係数の式には大きな利点がある
それは分母を払うことができるということ

リミットのついた分数式はリミットが邪魔をして
分母を払うことができないが、この式ではその制
限がなくなった

そこでこの式の分母を払ってみる

$$f(a + h) - f(a) = (f'(a) + \varepsilon)h$$

あるいは

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon h$$

* * *

微分の数式を日本語に翻訳すると？

h は x が a から変化した量で、これを x の変化量という

同様に、 $f(a + h) - f(a)$ は x が a から h だけ変化したときの y の変化した量で、これを y の変化量（ y の増分）という

この変化量という言葉を使えば、先ほどの数式は次のように翻訳できる

関数が微分できるとき、 y の変化量は

- x の変化量 h に正比例する部分
- 誤差の部分

に分けられる

正比例部分の比例定数は微分係数で、誤差の部分は x の変化量 h を小さくすればいくらかでも小さくできる

もう少しかみ砕いてしまうと、

微分できる関数とは、 x の変化量がほんのわずかなときは、 y の変化量が x の変化量 h に正比例すると見なせる関数である
わずかな違いは無視する！

ということになる

これは微分できることの意味に他ならない

正比例関数は関数の中でも最も簡単なもので、それは比例定数を決めれば決まってしまう

したがって、すべての関数を局所的に正比例関数と見なせれば、変化の分析はとても見通しがよいものになる

そのために、関数全体ではなく、ごく一部分だけを取り出して考えてみよう、これが微分の出発点である

* * *

微分という名詞と微分するという動詞

微分ができる関数の $x = a$ 近くでの正比例部分、すなわち $f'(a)h$ だけを取り出した関数（正比例関数）を、元の関数 $y = f(x)$ の $x = a$ での微分（名詞）という

これは x の変化量 h を変数とし、比例定数を $f'(a)$ とする正比例関数である

この微分という名前の新しい正比例関数を、新しい変数記号 dx, dy を使って次のように表す

$$dy = f'(a)dx$$

ここで、変数記号 dx は x の変化量 h と同じもので、 dx を x の微分、 dy を y の微分という

これは単なる変数記号で、新しい記号を使うのは元の変数 x, y と区別するため

点 $(a, f(a))$ を原点とし、新しい変数記号による座標軸 dx, dy を設定したとき、関数の各点 $(a, f(a))$ に付随して現れる正比例関数を（名詞で）微分と呼んでいる

一方、関数の導関数を求めることは、関数を（動詞で）微分するという

* * *

微分と導関数との関係

微分という名の新しい正比例関数はその変数を dx, dy と書くことにしたため、 $x = a$ での微分を a ではなく x について書いても変数を混同することはない

そこで、関数 $y = f(x)$ に対して、

$$dy = f'(x)dx$$

を元の関数の**微分**と呼ぶことにする

ただし、本来の意味の微分は、この x に特定の値 $x = a$ を代入した $dy = f'(a)dx$ のことをいうので注意

微分とは $x = a$ を固定して初めて本体の意味をもつもの

関数 $dy = f'(x)dx$ はある種の簡略記法だが、この記法は大変に便利で、関数の微分を求めるにはその関数の**導関数**を計算すればよい

* * *

微分と関数の変化の様子との関係

たとえば、微分 dy が 0 になって消えている場所を考えると、これは、そのような場所では x が変化しても y は変化しないということを表している
 y が変化しないということは、 y が定数であるということに他ならない

$dy = 0$ は比例定数が 0 である正比例関数

したがってそのような場所では

$$f'(a) = 0$$

となっていて、そのグラフは x 軸に平行な直線

これが**極大・極小**を求めるとき、方程式 $f'(x) = 0$ を解いた理由である

この方程式の解 $x = a$ ではたしかに

$$dy = f'(a)dx = 0 \cdot dx = 0$$

となっていて、 y の値は x が多少変化してもほとんど変化しない

グラフで表すと、 $y = \text{定数}$ のグラフは x 軸に平行な直線

これはグラフの**接線**であり、その点での微分 $dy = 0$ を表している

これが微分を使った関数の解析の典型的な方法である

微分の式 $dy = f'(x)dx$ の両辺を x の微分 dx で割ると、

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

という式になり、微分の比が導関数を与えることがわかる

この式は、導関数を**微分商**とも呼ぶことの理由の1つ

したがって、微分とはこの式の分母を払ってもよいことの根拠を与えていると考えることもできる

平均値の定理、テイラーの定理を見直す

平均値の定理を見直す

■平均値の定理 $f(x)$ が a から b までの間のどの x でも微分係数を求めることができるとき、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad (a < c < b)$$

をみたす c が少なくとも1つ存在する

この定理をなぜ「平均値の定理」というのだろ

うか？

微分できる関数 $y = f(x)$ を考える

x が a から b まで変化するとき、途中の変化の様子は考えずに出発点と終点だけで考えると、 y は $f(a)$ から $f(b)$ まで変化したことになり、その平均変化率は

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となるが、平均値の定理は a と b の間に、ちょうどこの変化率と同じだけ変化した瞬間が必ずあることを示している

平均変化率に等しい瞬間変化率があるということで、この定理を平均値の定理という

* * *

平均値の定理のもとになるロルの定理

■ロルの定理 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で微分可能とする

$f(a) = f(b) = 0$ のとき、

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

となる c が少なくとも1つ存在する

■ロルの定理を使った平均値の定理の証明

$f(x)$ が決まってしまうと、定数 a, b を与えたとき、平均変化率はある定数になる

その定数を k とする

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

分母を払って移項すると、

$$f(b) - \{f(a) + k(b - a)\} = 0$$

ここで、この式の左辺の a を x に置き換えた関数 $F(x)$ を考える

$$F(x) = f(x) - \{f(a) + k(x - a)\}$$

$F(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続かつ开区間 (a, b) で微分可能である

しかも、

$$F(b) = F(a) = 0$$

は明らかだから、ロルの定理によって、

$$F'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

となる c が少なくとも1つ存在する

ここで導関数 $F'(x)$ を計算すると、

$$F'(x) = f'(x) - \{f'(x) + k\}$$

だから、 $F'(c) = 0$ より、

$$f'(c) = k$$

すなわち、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を得る □

* * *

■定理 区間 $[a, b]$ で $f'(x) > 0$ なら、この区間で $f(x)$ は増加関数である

すなわち、この区間内で $x_1 < x_2$ なら $f(x_1) < f(x_2)$ である

$f'(x)$ は接線の傾きである、という幾何学的・直感的な理解から、その傾きが正なら増加しているのは明らかだが、平均値の定理を使うと、図に頼らずに証明することができる

■平均値の定理による証明

平均値の定理より、

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \quad (a \leq x_1 < c < x_2 \leq b)$$

となる c が存在するが、右辺は $f'(c) > 0$ 、 $x_2 - x_1 > 0$ より正である □

* * *

また、この区間で $f'(x) = 0$ なら $f(x)$ が定数関数であることも平均値の定理を使うときちんと証明することができる

* * *

テイラーの定理を理解する

■テイラーの定理 $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続、开区間 (a, b) で n 回微分可能とする
このとき、

$$\begin{aligned} f(b) = & f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 \\ & + \frac{1}{3!}f'''(a)(b-a)^3 + \cdots \\ & + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} \\ & + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c)(b-a)^n \quad (a < c < b) \end{aligned}$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する

平均値の定理の場合は両辺を $b-a$ で割ることにより、平均変化率と瞬間変化率の関係という幾何学的な意味での表現ができたが、テイラーの定理ではその形をとることができないため、分母を払った形で表すのが普通

■テイラーの定理の証明

$f(x)$ が決まってしまうと、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)^n} \left(f(b) - (f(a) + f'(a)(b-a) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \cdots \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

は定数 a, b を決めると決まってしまう定数である
この定数を k とおき、分母を払うと、

$$\begin{aligned} & f(b) - (f(a) + f'(a)(b-a) \\ & \quad + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \cdots \\ & \quad + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}) = k(b-a)^n \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} & f(b) - (f(a) + f'(a)(b-a) \\ & \quad + \frac{1}{2!}f''(a)(b-a)^2 + \cdots \\ & \quad + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} - k(b-a)^n) = 0 \end{aligned}$$

となる

ここで、左辺の a を x に置き換えた関数を $F(x)$ とする

すなわち、

$$\begin{aligned} F(x) = & f(x) - (f(a) + f'(a)(x-a) \\ & \quad + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \cdots \\ & \quad + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} - k(x-a)^n) \end{aligned}$$

とする

$f(x)$ は n 回微分可能、もちろん $(b-a)^r$ は何回でも微分可能だから、 $F(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続かつ开区間 (a, b) で微分可能である

かつ、 $F(b) = F(a) = 0$ は明らかだから、ロルの定理によって、

$$F'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する

$F'(x)$ を計算すると、

$$\begin{aligned} F'(x) = & -(f'(x) \\ & + f''(x)(b-x) - f'(x) \\ & + \frac{1}{2!} f'''(x)(b-x)^2 - f''(x)(b-x) \\ & + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} \\ & - \frac{1}{(n-2)!} f^{(n-2)}(x)(b-x)^{n-2} \\ & - nk(b-x)^{n-1}) \end{aligned}$$

したがって、括弧の中は順に消えていき、

$$F'(x) = - \left(\frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} - nk(b-x)^{n-1} \right)$$

となる

よって、 $F'(c) = 0$ より、

$$\frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(c)(b-c)^{n-1} - nk(b-c)^{n-1} = 0$$

となるが、 $b-c \neq 0$ より、

$$k = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)$$

となり、これを $f(b) - (...) = 0$ の式に代入して求める結果を得る □

テイラーの定理の内容

関数とは、そもそも何か？

関数が x を y に変換する機能だとすれば、ブラックボックス（仕掛けの见えない変換装置）ではなく誰でも使いやすい形でボックスの中身、つまり仕掛けが提示されたほうがずっと理解しやすいだろうし、関数の機能の解析も容易になる
そこで、数学ではそれら関数の機能を「数式」で表現してきた

たとえば、3 次の多項式で表される関数

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 1$$

が与えられたとき、この対応規則はきっちりと明示されている

別の言葉で言えば、「 x を加工し y にする手続きが示されている」といってもよい

* * *

微分可能な関数のマクローリン展開

しかし、指数関数・対数関数・三角関数のように、「多項式」で表せない関数もある

$\sin 2$ の値はいくつですか？といわれても、入力 2 をどう加工して出力するのかは明確ではない
私たちは三角関数を $y = \sin x$ と書くことによって、その正体をつかんだような気になっているが、実はこれは単にラベルを貼ったにすぎないので、三角関数は相変わらずブラックボックスのままである

私たちが具体的にその値を計算できる関数の代表が多項式（関数）

三角関数や対数関数は式で表されているような気がするが、実はそれは関数にラベルを貼っただけと考えるべきで、具体的に計算可能な関数とは多項式だと思ったほうがよい

実はテイラーの定理は、このブラックボックスの仕組みをはっきりさせる 1 つの方法を与えている

■マクローリンの定理 何回でも微分できる関数について、

$$\begin{aligned} f(x) = & f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ & + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)x^{n-1} + R_n \end{aligned}$$

が成り立つ

ただし、

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) x^n$$

である

この定理はただ単にテイラーの定理で $a = 0, b = x$ とおいたものに他ならないが、大変おもしろい定理である

この式は最後の R_n を除いて、 x の多項式の形をしている

関数が決まればその r 回目の導関数の 0 での値は定数として決まってしまうから、確かに R_n は多項式

とくに、 n をどんどん大きくしていくとき、最後の項（これを **剰余項** という）が $R_n \rightarrow 0$ を満たすときは、この項をとってしまい、 $f(x)$ を

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

と無限級数の形で書いて、これを $f(x)$ の **マクローリン展開** という

少し荒っぽくいえば、何回でも微分できる関数は無限次元の多項式で表すことができるということ

例として、 $f(x) = \sin x$ をマクローリン展開してみる

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

を使って導関数の $x = 0$ における値を計算していけば、 $\sin 0 = 0, \cos 0 = 1$ などより、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

となる（剰余項は 0 に収束することは知られている）

テイラーの定理（マクローリン展開）を使うことにより、ブラックボックスであった $\sin x$ という関数の仕掛けを多項式で表すことができた

この仕掛けを使えば、 $\sin 2$ の値を必要な精度で計算することができる