

# Chapter 1

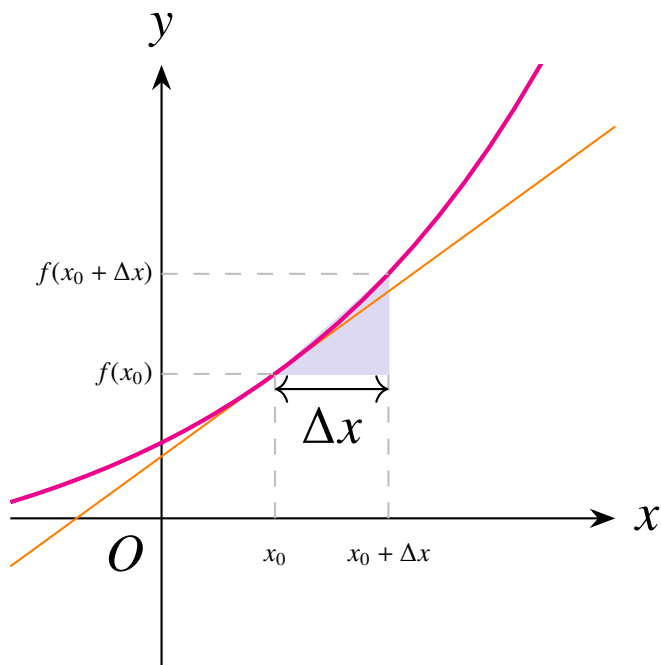
## 微分と積分

### 1.1 1 変数関数の微分

微分とは、複雑な問題も「拡大して見たら簡単に見える（かもしれない）」という発想で、わずかな変化に着目して入力と出力の関係（関数）を調べる手法といえる。

#### 1.1.1 接線：拡大したら直線に近似できる

関数  $y = f(x)$  について、引数の値を  $x = x_0$  からわずかに増加させて、 $x = x_0 + \Delta x$  にした場合の出力の変化を考える。



このとき、増分の幅  $\Delta x$  を狭くしていく ( $\Delta x$  の値を小さくしていく) と、 $x = x_0$  付近において、関数  $y = f(x)$  のグラフは直線にほとんど重なるようになる。



このように、関数  $f(x)$  は、ある点  $x_0$  の付近では、

$$f(x) \simeq a(x - x_0) + b$$

という直線に近似することができる。

ここで、 $f(x_0)$  の値を考えると、

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a(x_0 - x_0) + b \\ &= a \cdot 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$

であるから、実は  $b = f(x_0)$  である。

一方、 $a$ はこの直線の傾きを表す。

そもそも、傾きとは、 $x$ が増加したとき、 $y$ がどれだけ急に（速く）増加するかを表す量である。

関数のグラフを見ると、急激に上下する箇所もあれば、なだらかに変化する箇所もある。

つまり、ある点でグラフにぴったりと沿う直線（接線）を見つけたとしても、その傾きは場所によって異なる。

そこで、「傾きは位置  $x$  の関数」とみなして、次のように表現しよう。

$$a = f'(x)$$

これで、先ほどの直線の式を完成させることができる。

#### 関数の各点の接線

関数  $f(x)$  は、ある点  $x_0$  の付近では、

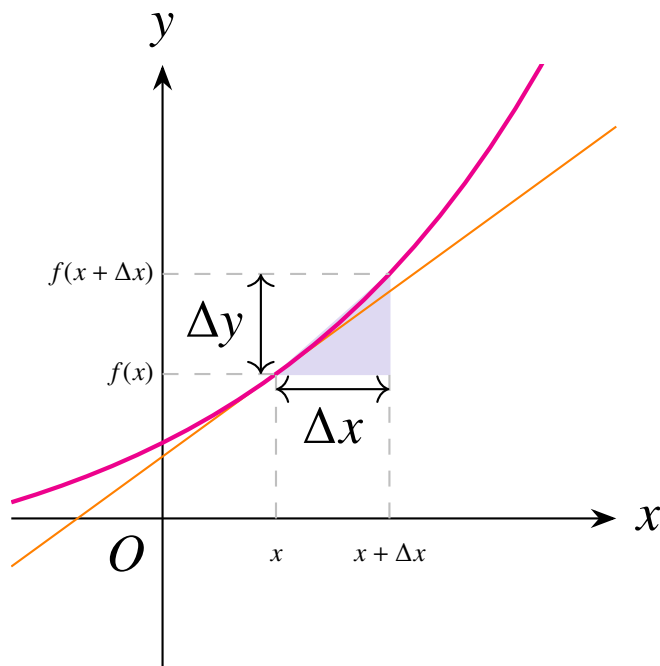
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

という傾き  $f'(x)$  の直線に近似できる。

### 1.1.2 接線の傾きとしての導関数

傾きは位置  $x$  の関数  $f'(x)$  としたが、この関数がどのような関数なのか、結局傾きを計算する方法がわかっていない。

直線の傾きは  $x$  と  $y$  の増加率の比として定義されているから、まずはそれぞれの増加率を数式で表現しよう。



この図から、 $y$  の増加率  $\Delta y$  は次のように表せることがわかる。

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

この両辺を  $\Delta x$  で割ると、 $x$  の増加率  $\Delta x$  と  $y$  の増加率  $\Delta y$  の比率が表せる。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

図では  $\Delta x$  には幅があるが、この幅を限りなく 0 に近づけると、幅というより点になる。

つまり、 $\Delta x \rightarrow 0$  とすれば、 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  は任意の点  $x$  での接線の傾きとなる。

「任意の点  $x$  での傾き」も  $x$  の関数であり、この関数を導関数と呼ぶ。

### 導関数

関数  $f(x)$  の任意の点  $x$  における接線の傾き（増加の速さ）を表す関数を導関数といい、次のように定義する。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1.1.3 微分とその関係式

**微分** 関数  $f(x)$  から、その導関数  $f'(x)$  を求める操作を微分という。

関数のグラフから離れて、微分という「計算」を考えるにあたって、先ほどの導関数の定義式よりも都合の良い表現式がある。

$x \rightarrow 0$  とした後の  $\Delta x$  を  $dx$  と書くことにして、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$  を取り払ってしまおう。

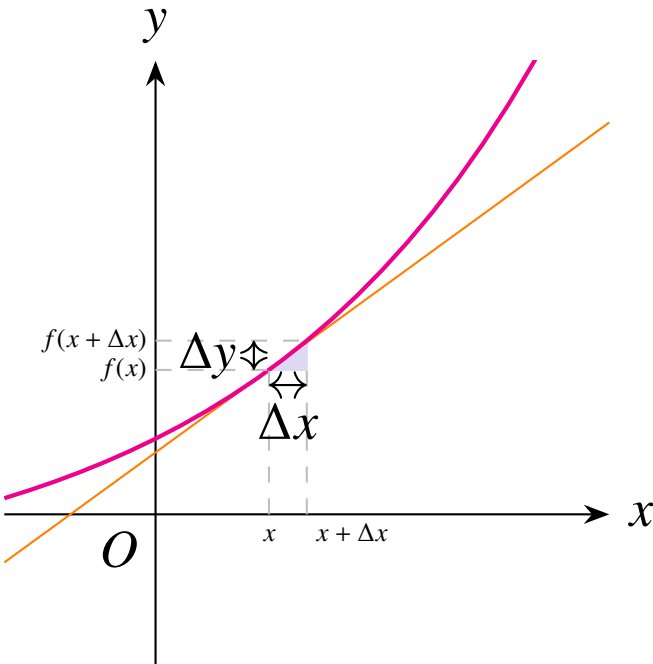
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} \\ f'(x)dx &= f(x + dx) - f(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{両辺} \times dx \\ f(x) \text{ を移項} \end{array} \right. \\ f'(x)dx + f(x) &= f(x + dx) \end{aligned}$$

**微分の関係式**

$$f(x + dx) = f(x) + f'(x)dx$$

1.1.4 不連続点と微分可能性

点  $x$  において連続な関数であれば、幅  $\Delta x$  を小さくすれば、その間の変化量  $\Delta y$  も小さくなるはずである。



しかし、不連続な点について考える場合は、そうはいかない。

下の図を見ると、 $\Delta x$  の幅を小さくしても、 $\Delta y$  は不連続点での関数の値の差の分までしか小さくならない。



このような不連続点においては、どんなに拡大しても、関数のグラフが直線にぴったりと重なることはない。

「拡大すれば直線に近似できる」というのが微分の考え方だが、不連続点ではこの考え方を適用できないのだ。

関数の不連続点においては、微分という計算を考えることがそもそもできない。

ある点での関数のグラフが直線に重なる（微分可能である）ためには、 $\Delta x \rightarrow 0$  としたときに  $\Delta y \rightarrow 0$  となる必要がある。

### 1.1.5 導関数のさまざまな記法

微分を考えると、 $\Delta x \rightarrow 0$  としたときに  $\Delta y \rightarrow 0$  となる前提のもとで議論する。

$\Delta x \rightarrow 0$  とした結果を  $dx$ 、 $\Delta y \rightarrow 0$  の結果を  $dy$  とすると、ある点  $x$  での接線の傾きは、次のようにも表現できる。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

この接線の傾きが  $x$  の関数であることを表現したいときは、次のように書くこともある。

$$\frac{dy}{dx}(x)$$

これも一つの導関数（位置に応じた接線の傾きを表す関数）の表記法である。

この記法は、どの変数で微分しているかがわかりやすいという利点がある。

### 導関数のライプニッツ記法

次のような記号はいずれも、関数  $y = f(x)$  の導関数を表す。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

特に、 $\frac{d}{dx}f(x)$  という記法は、 $\frac{d}{dx}$  の部分を微分操作を表す演算子として捉えて、「関数  $f(x)$  に微分という操作を施した」ことを表現しているように見える。

### 微分演算子

関数を微分するという操作を表現する演算子を微分演算子という。

例えば、次のような記号で表される。

$$\frac{d}{dx}$$

ところで、これまで使ってきた  $f'(x)$  という導関数の記法にも、名前がついている。

### 導関数のニュートン記法

次の記号は、関数  $y = f(x)$  の導関数を表す。

$$f'(x)$$

この記法は、「 $f$  という関数から導出された関数が  $f'$  である」ことを表現している。

導関数はあくまでも関数  $f$  から派生したものであるから、 $f$  という文字はそのまま、加工されたことを表すために'をつけたものと解釈できる。

## 1.1.6 微分の性質

微分の関係式を使うことで、微分に関する有用な性質を導くことができる。

## REVIEW

微分の関係式

$$f(x+dx) = \overset{\text{元の関数}}{f(x)} + \overset{\text{導関数}}{f'(x) dx}$$

関数の一次結合の微分

 $\alpha f(x) + \beta g(x)$  において、 $x$  を  $dx$  だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned} \alpha f(x+dx) + \beta g(x+dx) &= \alpha \{f(x) + f'(x)dx\} + \beta \{g(x) + g'(x)dx\} \\ &= \overset{\text{元の関数}}{\alpha f(x) + \beta g(x)} + \{ \overset{\text{導関数}}{\alpha f'(x) + \beta g'(x)} \} dx \end{aligned}$$

微分の線形性

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

関数の積の微分

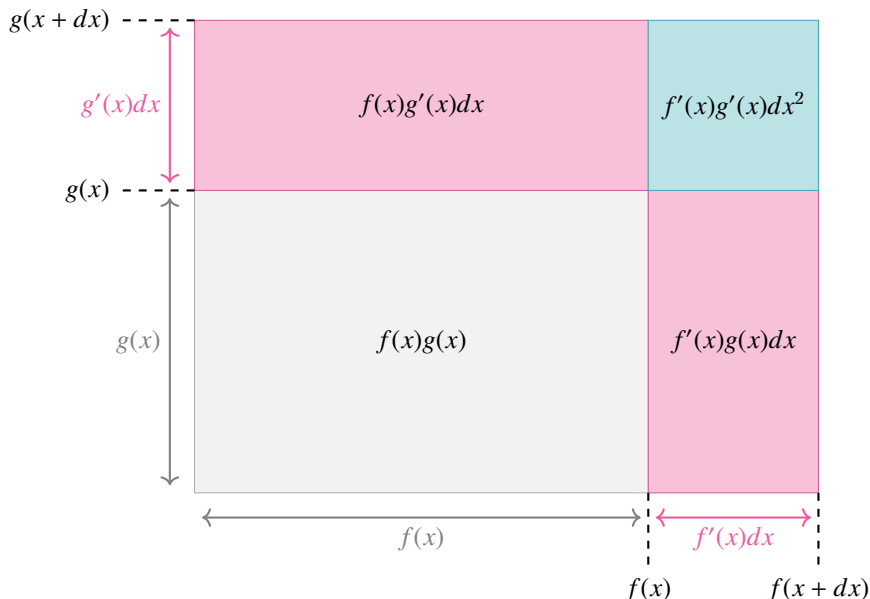
 $f(x)g(x)$  において、 $x$  を  $dx$  だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned} f(x+dx)g(x+dx) &= \{f(x) + f'(x)dx\} \{g(x) + g'(x)dx\} \\ &= f(x)g(x) + f'(x)g(x)dx + f(x)g'(x)dx + f'(x)g'(x)dx^2 \\ &= f(x)g(x) + \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx + \overset{\text{2 次以上の微小量}}{f'(x)g'(x)dx^2} \end{aligned}$$

ここで、 $dx^2$  は、 $dx$  より速く 0 に近づくので無視できる。荒く言ってしまうと、 $dx$  でさえ微小量なのだから、 $dx^2$  なんて存在しないも同然だと考えてよい。

このことは、次の図を見るとイメージできる。





$dx \rightarrow 0$  のとき  $dy \rightarrow 0$  となる場合に微分という計算を定義するのだから、 $dx$  を小さくしていくと、 $dy$  にあたる  $f(x+dx) - f(x)$  (これは  $f'(x)dx$  と等しい) も小さくなっていく。同様に、 $g(x+dx) - g(x)$  (これは  $g'(x)dx$  と等しい) も小さくなっていく。

### REVIEW

微分の関係式  $f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$  より、

$$f'(x)dx = f(x+dx) - f(x)$$

$dx$  を小さくした場合を図示すると、



### 2 次以上の微小量

$f'(x)g'(x)dx^2$  に相当する左上の領域は、ほとんど点になってしまうことがわかる。

このように、 $dx^2$  の項は無視してもよいものとして、先ほどの計算式は次のようになる。

$$f(x+dx)g(x+dx) = \overset{\text{元関数}}{f(x)g(x)} + \overset{\text{導関数}}{\{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}}dx$$

微分のライプニッツ則

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

### 1.1.7 冪関数の微分

具体的な関数の導関数も、微分の関係式をもとに考えることができる。

まずは、基本的な例として、冪関数  $y = x^n$  の微分を考えてみよう。

$y = x^2$  の微分

$y = f(x) = x^2$  において、 $x$  を  $dx$  だけ微小変化させると、 $y$  は  $dy$  だけ変化するとする。

すると、微分の関係式は  $y + dy = f(x + dx) = (x + dx)^2$  となるが、これを次のように展開して考える。

$$y + dy = (x + dx)(x + dx)$$

右辺の  $(x + dx)(x + dx)$  からは、

- $x^2$  の項が1つ
- $xdx$  の項が2つ
- $dx^2$  の項が1つ

現れることになる。

数式で表すと、

$$\boxed{y} + dy = \boxed{x^2} + 2xdx + dx^2$$

↑                      ↑  
同じ

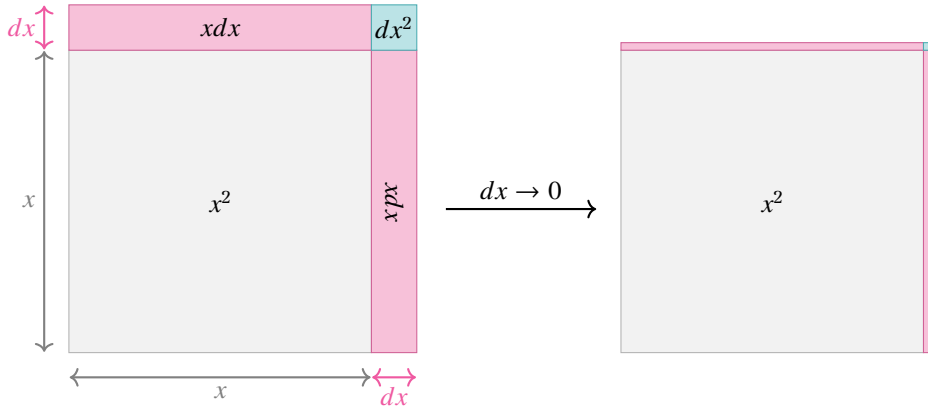
ここで  $y = x^2$  なので、左辺の  $y$  と右辺の  $x^2$  は相殺される。

高次の微小量

$$dy = 2xdx + dx^2$$

さらに、 $dx^2$  の項は無視することができる。

なぜなら、 $dx$  を小さくすると、 $dx^2$  は  $dx$  とは比べ物にならないくらい小さくなってしまふからだ。



というわけで、次のような式が得られる。

$$dy = 2xdx$$

よって、 $y = x^2$  の導関数は、 $y' = 2x$  となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$y = x^3$  の微分

同じように、 $y = x^3$  の微分を考えてみよう。

$$y + dy = (x + dx)(x + dx)(x + dx)$$

右辺の  $(x + dx)(x + dx)(x + dx)$  からは、

- $x^3$  の項が1つ
- $x^2 dx$  の項が3つ
- $dx^3$  の項が1つ

現れることになる。

$$y + dy = \overset{\text{同じ}}{\overset{\uparrow}{x^3}} + 3x^2 dx + dx^3$$

ここで  $y = x^3$  なので、左辺の  $y$  と右辺の  $x^3$  は相殺される。

高次の微小量

$$dy = 3x^2 dx + \text{dx}^3$$

さらにここでは、 $dx^3$  の項を無視することができる。

次の図を見てみよう。

各辺  $dx$  の立方体は、 $dx$  を小さくすると、ほぼ点にしか見えないほど小さくなる。

つまり、各辺  $dx$  の立方体の体積  $dx^3$  は、考慮する必要がない。



というわけで、 $y = x^3$  の導関数は、 $y' = 3x^2$  となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$y = x^n$  の微分 ( $n$  が自然数の場合)

$n$  が自然数だとすると、 $y = x^n$  の微分は、 $y = x^2$  や  $y = x^3$  の場合と同じように考えられる。

$$y + dy = \underbrace{(x + dx)(x + dx) \cdots (x + dx)}_{n \text{ 個}}$$

右辺の  $(x + dx)(x + dx) \cdots (x + dx)$  を展開しようすると、次のような 3 種類のかけ算が発生する。

- $x$  どうしのかけ算
- $x$  と  $dx$  のかけ算

- $dx$  どうしのかけ算

つまり、右辺からは、

- $x^n$  の項が1つ
- $x^{n-1}dx$  の項が  $n$  個
- $dx^n$  の項が1つ

という項が現れることになる。

そして、 $x^n$  は左辺の  $y$  と相殺され、 $dx^n$  の項は高次の微小量として無視できる。

すると、残るのは次のような式になるだろう。

$$dy = nx^{n-1}dx$$

この式は、 $y = \alpha x$  という直線の式によく似ている。

高次の  $dx$  の項  $dx^n$  を無視し、1次の  $dx$  の項だけ残したのは、微分という計算が微小範囲における直線での近似であるからだ。

あくまでも微小範囲での直線の式であることを表すために、 $x, y$  を  $dx, dy$  として、 $dy = \alpha dx$  という形の式になっていると考えればよい。

自然数の冪を持つ冪関数の導関数

$n$  が自然数のとき、 $y = x^n$  の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$y = x^n$  の微分 ( $n$  が整数の場合)

指数法則を使うことで、 $n$  が負の整数の場合にも拡張することができる。

まずは、 $y = x^{-1}$  の微分を考えてみよう。

指数法則より、 $y = x^{-1}$  は次のように変形できる。

$$\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ xy = 1 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \text{両辺} \times x \end{array} \right\}$$

微小変化を加えた微分の関係式を作って、次のように展開していく。

$$(x + dx)(y + dy) = 1$$

$$\overset{\text{高次の微小量}}{xy} + xdy + ydx + dydx = 1$$

↑ 同じ ↑

ここで、微小量の掛け合わせである  $dydx$  は無視できるほど小さい。

また、 $y = \frac{1}{x}$  より、 $xy = 1$  なので、左辺の  $xy$  と右辺の  $1$  は相殺される。

すると、残った式は、

$$\begin{aligned} xdy + ydx &= 0 \\ xdy &= -ydx && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} ydx \text{ を移項} \\ x \frac{dy}{dx} &= -y && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{両辺} \div dx \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{両辺} \div x \end{aligned}$$

$y$  が残ってしまっているので、 $y = \frac{1}{x}$  を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \\ &= -x^{-2} \end{aligned}$$

これは、冪が自然数の場合の冪関数の微分  $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$  において、 $n = -1$  を代入したものになっている。

$n$  が任意の負の整数の場合も、同様に考えられる。

$y = x^{-n}$  を、 $x^n y = 1$  として、

$$\underbrace{(x+dx)(x+dx)\cdots(x+dx)}_{n\text{個}} \times (y+dy) = 1$$

高次の微小量

$$(x^n + nx^{n-1}dx + dx^n) \times (y+dy) = 1$$

$$(x^n + nx^{n-1}dx) \times (y+dy) = 1$$

高次の微小量を無視

高次の微小量

$$x^n y + x^n dy + nx^{n-1} y dx + nx^{n-1} dx dy = 1$$

同じ

相殺&amp;無視

$$x^n dy + nx^{n-1} y dx = 0$$

移項してさらに整理すると、

$$x^n dy = -nx^{n-1} y dx$$

$$x^n \frac{dy}{dx} = -nx^{n-1} y$$

$$\frac{dy}{dx} = -nx^{n-1} x^{-n} y$$

$$= -nx^{n-1} x^{-n} x^{-n}$$

$$= -nx^{-n-1}$$

両辺  $\div dx$ 両辺  $\times x^{-n}$  $y = x^{-n}$ 指数法則  $x^m x^n = x^{m+n}$ 

これもやはり、冪が自然数の場合の冪関数の微分  $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$  において、 $n$  を  $-n$  に置き換えたものになっている。

つまり、自然数（正の整数）だけでなく、負の整数も許容して、次のことがいえる。

整数の冪を持つ冪関数の導関数

$n$  が整数のとき、 $y = x^n$  の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$y = x^n$  の微分 ( $n$  が実数の場合)

$n$  が有理数の場合はどうだろうか。実はこれも、指数法則によって拡張することができる。

$m$  と  $n$  はどちらも自然数として、 $y = x^{\frac{m}{n}}$  の微分を考える。

まず、 $y = x^{\frac{m}{n}}$  は、 $y^n = x^m$  とまったく同じ式である。

$$\begin{array}{l} y^n = x^m \\ y = x^{\frac{m}{n}} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} y^n = x^m \\ y = x^{\frac{m}{n}} \end{array}} \right\} \text{両辺 } \frac{1}{n} \text{ 乗}$$

というわけで、 $y^n = x^m$  を微小変化させて、展開してみよう。

$$\underbrace{(y + dy)(y + dy) \cdots (y + dy)}_{n \text{ 個}} = \underbrace{(x + dx)(x + dx) \cdots (x + dx)}_{m \text{ 個}}$$

ここで、 $n$  と  $m$  は自然数なのだから、自然数幂のときと同じように考えて、次のような式が残ることになる。

$$ny^{n-1}dy = mx^{m-1}dx$$

よって、 $\frac{dy}{dx}$  の式の  $y$  を含まない形を目指すと、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} \\ &= \frac{mx^{m-1}}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}} && \left. \vphantom{\frac{mx^{m-1}}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}}} \right\} y = x^{\frac{m}{n}} \\ &= \frac{mx^{m-1}}{nx^{m-\frac{m}{n}}} \\ &= \frac{mx^m x^{-1}}{nx^m x^{-\frac{m}{n}}} && \left. \vphantom{\frac{mx^m x^{-1}}{nx^m x^{-\frac{m}{n}}}} \right\} \text{指数法則 } x^{a+b} = x^a x^b \\ &= \frac{mx^{-1}}{nx^{-\frac{m}{n}}} && \left. \vphantom{\frac{mx^{-1}}{nx^{-\frac{m}{n}}}} \right\} x^m \text{ で約分} \\ &= \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{-1}}{x^{-\frac{m}{n}}} \\ &= \frac{m}{n} \cdot x^{-1-(-\frac{m}{n})} && \left. \vphantom{\frac{m}{n} \cdot x^{-1-(-\frac{m}{n})}} \right\} \text{指数法則 } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ &= \frac{m}{n} \cdot x^{-1+\frac{m}{n}} \\ &= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

これは、幂が自然数の場合の幂関数の微分  $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$  において、 $n$  を  $\frac{m}{n}$  に置き換えたものになっている。

つまり、整数だけでなく、有理数に対しても同様の導関数の式が成り立つ。

ここまで来ると、無理数はどうだろうか？という疑問が生まれるが、無理数への拡張は指数法則では対応できない。



無理数に対しては、極限操作によって同様の導関数の式を導くことができ、実数全体に対して同じ導関数の式が成り立つことが示される。

### 冪関数の導関数

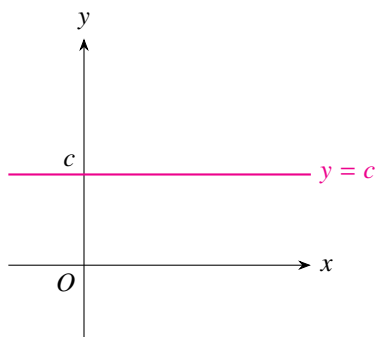
$n$  が実数のとき、 $y = x^n$  の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

### 1.1.8 定数関数の微分

常に一定の値  $c$  を返す定数関数  $f(x) = c$  の微分はどうなるだろうか。

関数のグラフを描いて考えてみよう。



定数関数のグラフは、 $x$  軸に対して平行な直線であり、この直線の傾きを見るからに 0 である。実際、導関数の定義に従って計算することで、定数関数の導関数は 0 になることを確かめられる。

#### REVIEW

導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

どの点  $x$  においても  $f(x)$  が  $c$  を返すということは、 $f(x + \Delta x)$  も  $c$  であるため、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、定数関数  $f(x) = c$  の微分の結果は  $c$  に依存せず、常に 0 になる。

### 定数関数の微分

常に定数  $c$  の値をとる定数関数  $f(x) = c$  は、微分すると 0 になる。

$$\frac{d}{dx}c = 0$$

### 1.1.9 合成関数の微分

合成関数の微分の一般的な式は、いろいろな関数の微分を考える上で重要な公式である。

#### 関数の微小変化量

関数  $f(x)$  において、変数  $x$  を  $dx$  だけ微小変化させた式は、これまで何度も登場した。

$$f(x+dx) = f(x) + \overset{\text{増えた分}}{f'(x)dx}$$

この式は、「 $x$  を  $dx$  だけ微小変化させることで、関数  $f$  の値は  $f'(x)dx$  だけ増加した」と捉えることもできる。

言い換えれば、関数  $f$  の微小変化量は  $f'(x)dx$  だということだ。

変化量という観点で眺めるには、次のように移項した式がわかりやすいかもしれない。

$$\overset{\text{区間 } dx \text{ での変化}}{f(x+dx) - f(x)} = \overset{\text{変化量}}{f'(x)dx}$$

関数  $f$  の微小変化量  $f'(x)dx$  を、 $df$  と表すことにしよう。

#### 合成関数の微分の関係式

今回はさらに、 $t = f(x)$  を関数  $g(t)$  に放り込むことを考える。

$g(t)$  についても、次のような微分の関係式が成り立つはずだ。

$$g(t+dt) = g(t) + g'(t)dt$$

合成関数  $g(f(x))$  を作るため、 $t = f$  (引数  $x$ ) を省略して書いた関数  $f(x)$  を代入する。

$$g(f + df) = g(f) + g'(f)df$$

$f$  を  $f(x)$  に、 $df$  を  $f'(x)dx$  に書き戻すと、

$$g(f(x) + f'(x)dx) = g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)dx$$

となり、左辺の  $g()$  の中身  $f(x) + f'(x)dx$  は  $f(x + dx)$  と書き換えられるので、次の式を得る。

$$g(f(x + dx)) = \overset{\text{元の関数}}{g(f(x))} + \overset{\text{導関数}}{g'(f(x))f'(x)} dx$$

合成関数の微分（ニュートン記法による表現）

合成関数  $g(f(x))$  の微分は、次の式で表される。

$$(g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$$

### 連鎖律としての表現

ニュートン記法による表現はなかなか覚えづらい式に見えるが、ライプニッツ記法を使って書き直すと、実は単純な関係式になっている。

- $(g(f(x)))'$  は、 $g(f(x))$  を  $x$  で微分したもの： $\frac{d}{dx}g(f(x))$
- $f'(x)$  は、 $f(x)$  を  $x$  で微分したもの： $\frac{d}{dx}f(x)$
- $g'(f(x))$  は、 $g(t)$  を  $t$  で微分したもの  $\frac{d}{dt}g(t)$  に、 $t = f(x)$  に代入したもの： $\frac{d}{df}g(f(x))$

として書き直すと、

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{df}g(f(x))$$

さらに、引数を省略して書くと、

$$\frac{dg}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{df}$$

これは、 $df$  を約分できると考えたら、当たり前の式になっている。

$$\frac{dg}{dx} = \cancel{\frac{df}{dx}} \cdot \frac{dg}{\cancel{df}}$$

合成関数の微分（連鎖律：ライプニッツ記法による表現）

$y = f(x)$ 、 $z = g(y)$  という関係があるとき、次の式が成り立つ。

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

これは、 $x$  が微小変化すると  $y$  も微小変化し、さらに連鎖して  $z$  も微小変化するという関係から、連鎖律と呼ばれる。

1.1.10 逆関数の微分

関数  $y = f(x)$  の逆関数  $x = f^{-1}(y)$  の微分も、ライプニッツ記法で考えると、ごく当たり前の式として導出できる。

ネタバレすると、次の式がそのまま逆関数の微分を表すものになっている。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$\frac{dy}{dx}$  を  $f'(x)$  と表記するなら、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

である。この発想を納得するために、もう少し詳しく見ていこう。

\* \* \*

$y = f(x)$  の導関数  $f'(x)$  は、ライプニッツ記法では  $\frac{dy}{dx}$  と表記される。

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ライプニッツ記法  $\frac{dy}{dx}$  には、「 $y$  で表される関数を  $x$  で微分する」という意味がこめられている。ならば、逆関数  $x = f^{-1}(y)$  の導関数は、「 $x$  で表される関数を  $y$  で微分する」という意味で、 $\frac{dx}{dy}$  と表記できる。

$$\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y)$$

ここで、 $\frac{dy}{dx} = f'(x)$  という式から、次の等式も成り立つと考えられる。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

これは逆関数の導関数になっているが、逆関数が  $y$  の関数なのだから、その導関数  $\frac{dx}{dy}$  も  $y$  の関数であってほしい。

そこで、 $x$  を消すために  $x = f^{-1}(y)$  を代入することで、逆関数の導関数を完成させる。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=f^{-1}(y)}$$

### 逆関数の微分

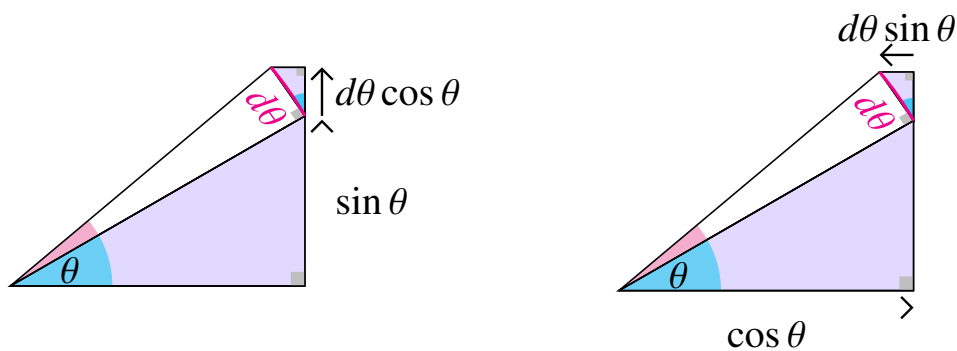
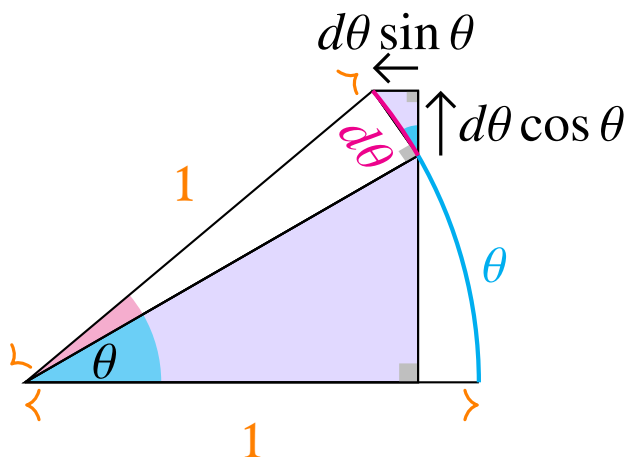
逆関数の導関数は、元の関数の導関数の逆数になる。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=f^{-1}(y)}$$

ここで、 $\Big|_{x=f^{-1}(y)}$  は、その直前の式を計算した後に、 $x = f^{-1}(y)$  を代入することを意味する。

#### 1.1.11 三角関数の微分

角度  $\theta$  を  $d\theta$  だけ微小変化させたときの、三角形の高さの変化が  $\sin \theta$  の微小変化であり、底辺の長さの変化が  $\cos \theta$  の微小変化である。



sin の微分

三角形の高さは、 $d\theta \cos \theta$  だけ増えているので、

$$\sin(\theta + d\theta) = \sin \theta + \cos \theta d\theta$$

sin 関数の微分

$$\frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta$$

cos の微分

三角形の底辺の長さは、 $d\theta \sin \theta$  だけ減っているのを、

$$\cos(\theta + d\theta) = \cos \theta - \sin \theta d\theta$$

元の関数      導関数

$$\cos(\theta + d\theta) = \cos \theta + (-\sin \theta) d\theta$$

cos 関数の微分

$$\frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta$$

### 1.1.12 ネイピア数

指数関数を定義した際に、「どんな数も 0 乗したら 1 になる」と定義した。

つまり、指数関数  $y = a^x$  において、 $x = 0$  での関数の値は 1 である。

ここでさらに、 $x = 0$  でのグラフの傾きも 1 となるような  $a$  を探し、その値をネイピア数と呼ぶことにする。

ネイピア数（自然対数の底）

指数関数  $y = a^x$  において、 $x = 0$  での接線の傾きが 1 となるような底  $a$  の値をネイピア数と呼び、 $e$  と表す。

この定義では、「 $x = 0$  では関数の値も傾きも等しく 1 になる」という、 $x = 0$  での振る舞いにしか言及していない。

だが、実はネイピア数を底とする指数関数は、「微分しても変わらない（すべての  $x$  において、関数の値と傾きが一致する）」という性質を持つ。

### 1.1.13 ネイピア数を底とする指数関数の微分

指数関数  $y = e^x$  の微分は、導関数の定義から次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}e^x &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
 &= e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$  は  $x$  によらない定数であり、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x}$$

というように、これは  $x = 0$  における傾き（導関数に  $x = 0$  を代入したもの）を表している。

そもそも、ネイピア数  $e$  の定義は「 $x = 0$  での  $e^x$  の傾きが1」というものだったので、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

となり、「 $e^x$  は微分しても変わらない」という性質が導かれる。

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

ネイピア数を底とする指数関数の微分

ネイピア数を底とする指数関数は、微分しても変わらない関数である。

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

指数が定数倍されている場合

$y = e^{kx}$  のように、指数が定数倍（ $k$  倍）されている場合は、合成関数の微分の公式を使って計算できる。

$t = kx$  とおくと、



$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} \\
 &= \frac{d}{dx}(kx) \cdot \frac{d}{dt}(e^t) \\
 &= k \frac{dx}{dx} \cdot e^t \\
 &= ke^t \\
 &= ke^{kx}
 \end{aligned}$$

となり、 $e^{kx}$  自体は変わらず、指数の係数  $k$  が  $e$  の肩から「降りてくる」形になる。

ネイピア数を底とする指数関数の微分（指数が定数倍されている場合）

$k$  を定数とし、指数が  $k$  倍されている場合は、微分すると全体が  $k$  倍される。

$$\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx}$$

### 指数が関数の場合

指数が関数になっている場合  $y = e^{f(x)}$  の微分も、合成関数の微分を使って考えればよい。

$t = f(x)$  とおくと、

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\
 &= \frac{d}{dt}e^t \cdot \frac{d}{dx}f(x) \\
 &= e^t \cdot f'(x) \\
 &= e^{f(x)} \cdot f'(x)
 \end{aligned}$$

ネイピア数を底とする指数関数の微分（指数が関数の場合）

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

### 1.1.14 一般の指数関数の微分

指数関数の底の変換公式より、 $a$  を底とする指数関数の微分は、ネイピア数  $e$  を底とする指数関数の微分（指数が定数倍されている場合）に帰着できる。

#### REVIEW

指数関数の底の変換公式

$$a^x = b^{(\log_b a)x}$$

指数関数の底の変換公式において、 $b = e$  の場合を考えると、

$$a^x = e^{(\log a)x}$$

となるので、指数が  $\log a$  倍された、 $e$  を底とする指数関数の微分として考えればよい。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} a^x &= \frac{d}{dx} e^{(\log a)x} \\ &= (\log a) e^{(\log a)x} \\ &= (\log a) a^x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{d}{dx} e^{kx} = k e^{kx} \\ e^{(\log a)x} = a^x \end{array} \right\}$$

指数関数の微分

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x (\log a)$$

## 1.2 1 変数関数の積分

積分とは、「部分を積み重ねる」演算である。

微小部分を調べる微分と、微小部分を積み重ねる積分は、互いに逆の操作になっている。

### 1.2.1 区分求積法：面積の再定義

長方形の面積は、なぜ「縦 × 横」で求められるのだろうか？

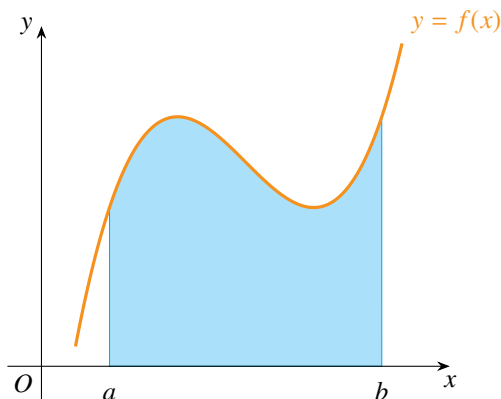
そこには、長方形の横幅分の長さを持つ線分を、長方形の高さに達するまで積み重ねるという発想がある。

面積の計算を「線を積み重ねる」という発想で捉えると、あらゆる形状の面積を考えることができる。

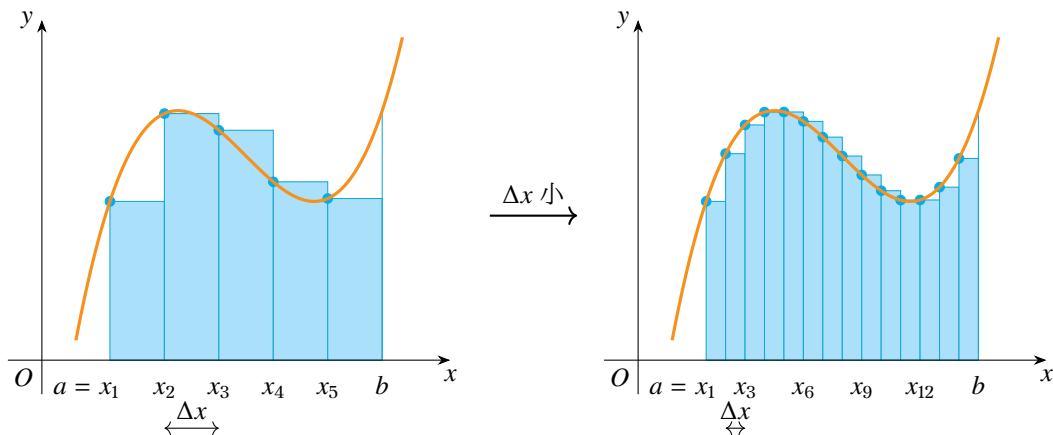
長方形では、積み重ねる線の長さは一定だが、他の形状では、積み重ねる線の長さが変化する。  
積み重ねるべき線の長さを、関数で表すことができれば…

\* \* \*

関数  $y = f(x)$  が与えられたとき、高さ  $f(x)$  の線分を  $a$  から  $b$  までの区間で積み重ねることで、 $x$  軸とグラフに挟まれた部分の面積を求めることを考える。



この考え方は、面積を求めたい部分を長方形に分割し、長方形の幅を限りなく 0 に近づけるとい  
う操作で表現できる。

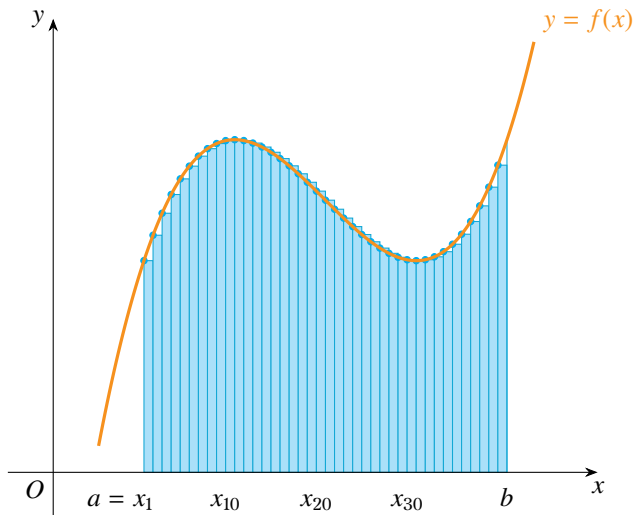


$a \leq x \leq b$  の区間を  $n$  等分して、 $x_1, x_2, \dots, x_n$  とする。

分割された各長方形は、幅が  $\Delta x$  で、高さが  $f(x)$  であるので、各長方形の面積は次のように表せる。

$$\Delta S = f(x) \cdot \Delta x$$

どんどん  $\Delta x$  を小さくしていくと、細かい長方形分割で、面積を求めたい図形を近似できる。



つまり、求めたい面積は、分割した長方形の面積をすべて足し合わせることで近似できる。

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

$\Delta x \rightarrow 0$  の果てでは、幅を持たなくなった長方形は線分とみなせるので、もはや近似ですらなくなるだろう。

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

このような考え方は、区分求積法と呼ばれる。

### 1.2.2 定積分：面積を求める積分

ここで、区間  $a \leq x \leq b$  における関数  $y = f(x)$  と  $x$  軸の間の面積  $S$  を求める式を、次のように表記する。

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$\Sigma$  は離散的な和を表す記号であり、例えば  $\sum_{i=0}^n$  であれば、 $i$  を 1 ずつ増やして  $n$  に達するまで足し合わせることを意味する。

一方、ここで新たに導入した  $\int$  は連続的な和を表す記号であり、微小変化を繰り返しながら足し合わせることを意味する。

$\Sigma$  は間隔を取って足し合わせるのに対し、 $\int$  は間隔を限りなく小さくして足し合わせる。

足し合わせる間隔を限りなく小さくするという操作は、極限を取る操作に相当するので、 $\Sigma$  の極限を取ったもの  $\lim \Sigma$  をまとめて  $\int$  という記号で表記したと捉えることができる。

さらに、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$  とした果ての  $\Delta x$  は、微小変化を意味する  $dx$  と書き換えられている。

### 定積分

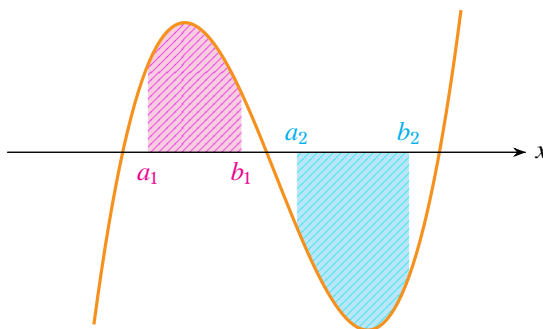
$a \leq x \leq b$  の区間内における関数  $f(x)$  のグラフと  $x$  軸の間の領域の符号付き面積を求める

演算を定積分と定義し、次のように表記する。

$$\int_a^b f(x) dx$$

このとき、 $f(x)$  を被積分関数と呼ぶ。

$f(x)$  の値が負になる区間では、定積分の値も負になるため、定積分は符号付き面積を表す。



### 1.2.3 微小範囲の定積分から微分へ

定積分  $\int_a^b f(x) dx$  は、積分区間の取り方 ( $a$  や  $b$  の値) を変えると、当然異なる計算結果になる。

ここで、下端  $a$  は固定し、上端  $b$  を変化させて積分区間を広げていくことを考えよう。

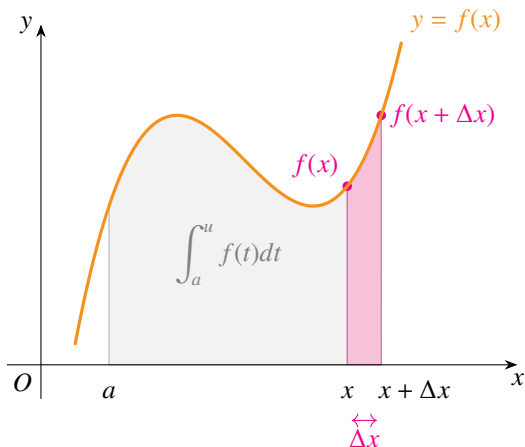
上端が変化することを強調するため、上端は  $x$  と表記することにする。

このとき、定積分  $\int_a^x f(t) dt$  は、上端  $x$  の関数として捉えられる。

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt$$



$\int$  の中で使っている変数  $t$  は、積分区間の下端から上端まで動く変数であり、どんな文字を使ってもよい。「 $t$  が下端  $a$  から上端  $x$  まで動く」なら違和感なく聞こえるが、「 $x$  が下端  $a$  から上端  $x$  まで動く」というのはややこしいので、上端  $x$  と区別するために  $t$  を使うことにした。

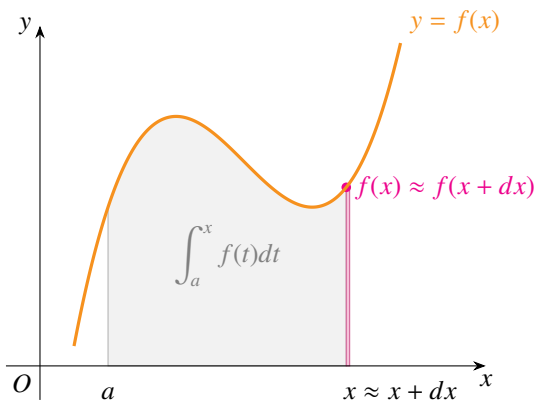


$x$  を  $\Delta x$  だけ増加させたときに増える面積は、

$$S(x + \Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

となるが、ここでさらに  $\Delta x$  を小さくしていくと…

増えた領域は、幅  $dx$ 、高さ  $f(x)$  の長方形とみなせるので、その面積は  $f(x)dx$  となる。



よって、 $\Delta x \rightarrow 0$  としたときには、

$$S(x + dx) - S(x) = f(x)du$$

という式が成り立ち、これは実は見慣れた微分の関係式と同じ形をしている。

元の関数 導関数

$$S(x + dx) = S(x) + f(x) du$$

この式は、定積分したもの  $F(x)$  を  $x$  で微分すると、積分前の関数  $f(x)$  に戻るということを示している。

このような「積分したものを微分すると、元の関数に戻る」という事実は、微積分学の基本定理として知られている。

微積分学の基本定理 積分の逆の演算は微分である。

1.2.4 不定積分：原始関数を求める積分

定積分の定義は面積から始まったが、定積分という操作で「微分したら元の関数に戻る」ような関数を作ることもできた。

ここで、「微分したら元の関数に戻る」関数を次のように定義する。

原始関数

微分することで元の関数  $f(x)$  が得られる関数を、 $f(x)$  の 原始関数 と呼び、 $F(x)$  と表す。

$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x)$$

「微分したら元の関数に戻る」関数の1つが、前節で調べた  $S(x) = \int_a^x f(t)dt$  であつたが、実はこのような関数は他にも存在する。

例えば、定数を微分すると0になるため、 $S(x)$  に任意の定数  $C$  を加えた関数  $S(x) + C$  を作っても、その微分結果は変わらず元の関数になる。

このことは、「原始関数には定数  $C$  分の不定性がある」などと表現されることがある。

「微分したら元の関数に戻る」関数を求める演算、すなわち「微分の逆演算」として捉えた積分を新たに定義してみよう。

## 不定積分

関数  $f(x)$  から原始関数  $F(x)$  を求める演算を、 $f(x)$  の不定積分と呼び、次のように表す。

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ここで、 $C$  は積分定数と呼ばれる任意の定数である。

## 1.2.5 原始関数による定積分の表現

少し前に、定積分  $\int_a^x f(t)dt$  を上端  $x$  の関数  $S(x)$  とみて、 $x$  を微小変化させることで、 $S(u)$  が  $f(u)$  の原始関数である ( $S(u)$  を  $u$  で微分したら  $f(u)$  になる) ことを確かめた。

## REVIEW

区間  $\Delta x$  での面積の増分を考え、

$$S(x + \Delta x) - S(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

$\Delta x \rightarrow 0$  とすれば、次のような微分の関係式が得られる。

元の関数 導関数

$$S(x + dx) = S(x) + f(x) dx$$

さらに前節では、「微分したら元に戻る」原始関数は1つだけではなく、任意の定数  $C$  を用いた  $F(x) + C$  も、 $f(x)$  の原始関数であることを述べた。

そこで、 $f(x)$  の任意の原始関数を  $F(x)$  とおくことにする。

原始関数は任意の定数  $C$  分だけ異なるので、 $f(x)$  の原始関数の1つである  $S(x)$  は、 $f(x)$  の他の原始関数  $F(x)$  を  $C$  分ずらしたものになるはずである。

$$S(x) = F(x) + C$$

ここで、 $S(x) = \int_a^x f(t)dt$  に、 $x = a$  を代入すると、下端と上端が一致する領域の面積（定積分）は明らかに0なので、



$$S(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

なんとここから、 $C$ を求めることができる。

$S(a) = F(a) + C = 0$  より、

$$C = -F(a)$$

この  $C$  を用いて、 $S(x)$  を次のように表現できる。

$$S(x) = F(x) - F(a)$$

$x = b$  を代入することで、積分区間の上端を  $b$  に戻した定積分を考えると、

$$S(b) = F(b) - F(a)$$

$$S(b) = \int_a^b f(x)dx$$

という、 $S(b)$  について 2 通りの表現が得られる。



上端を表す  $x$  という変数が現れなくなったので、 $\int$  の中で使っていた変数  $t$  はしれつと  $x$  に戻している。 $\int$  の中の  $x$  は「下端  $a$  から上端  $b$  まで動く」という意味しか持っていないので、何の文字を使っても意味は変わらない。

得られた 2 通りの表現式を組み合わせることで、次のような関係が成り立つ。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

原始関数による定積分の表現

関数  $f(x)$  の原始関数が  $F(x)$  であれば、定積分は次のように計算できる。

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ここで現れる  $F(b) - F(a)$  という量は、次の記号で表される。

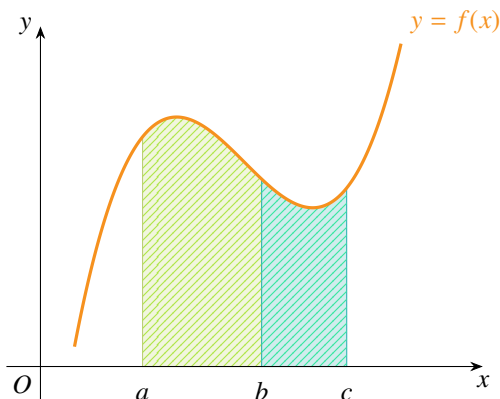
$$\left[ F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

### 1.2.6 定積分の性質

面積としての理解だけではうまく想像できない性質も、原始関数との関係を使うことで数式で確かめられるようになる。

#### 積分区間の結合

2つの定積分があり、それらの積分区間が連続していれば、1つの定積分としてまとめて計算できる。



積分区間が連続する定積分の和

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

面積として考えれば明らかな性質だが、原始関数を使って証明することもできる。

$f(x)$  の原始関数を  $F(x)$  とすると、

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\
 &= F(c) - F(a) \\
 &= \int_a^c f(x)dx
 \end{aligned}$$

として、式が成立することがわかる。

### 積分区間の反転

積分区間の上限と下限を入れ替わると、符号が変わる。

#### 定積分の積分区間の反転

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

これは、積分区間が連続する定積分の和の性質における、 $c = a$  の場合の式である。

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx &= \int_a^a f(x)dx \\
 &= 0 \\
 \int_a^b f(x)dx &= - \int_b^a f(x)dx
 \end{aligned}$$

### 定積分の線形性

微分や  $\Sigma$  記号などと同様に、定積分も線形性を持つ。

#### 定積分の線形性

$$\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

この性質は、微分の線形性から導かれる。

$f(x)$  の原始関数を  $F(x)$ 、 $g(x)$  の原始関数を  $G(x)$  とすると、微分の線形性より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \{\alpha F(x) + \beta G(x)\} &= \alpha \frac{d}{dx} F(x) + \beta \frac{d}{dx} G(x) \\ &= \alpha f(x) + \beta g(x)\end{aligned}$$

となるから、 $\alpha f(x) + \beta g(x)$  の原始関数は  $\alpha F(x) + \beta G(x)$  である。

よって、定積分を原始関数を使って書き表すと、

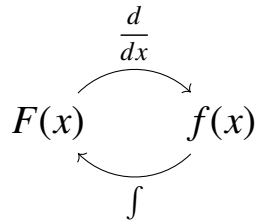
$$\begin{aligned}\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} dx &= \alpha F(b) - \alpha F(a) + \beta G(b) - \beta G(a) \\ &= \alpha \{F(b) - F(a)\} + \beta \{G(b) - G(a)\} \\ &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx\end{aligned}$$

となり、原始関数を使うことで、微分の線形性から定積分の線形性につながる事がわかる。

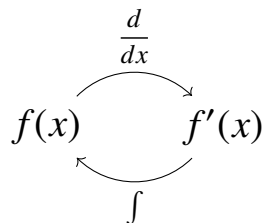
### 1.2.7 不定積分の性質

原始関数は、微分によって元の関数に戻る関数だった。

そして、元の関数から原始関数を求める演算が不定積分である。



原始関数という言葉にとらわれないように表現すると、結局は次のような関係が成り立っている。



不定積分と微分は逆の演算

関数を微分すると導関数になり、導関数を不定積分すると元の関数に戻る。

このような関係によって、微分が持つ性質から、不定積分の性質を導くことができる。

### 不定積分の線形性

微分の線形性から、不定積分の線形性も成り立つ。

#### REVIEW

##### 微分の線形性

$$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x)$$

微分の線形性の式の両辺を不定積分すると、左辺は微分する前の関数  $\alpha F(x) + \beta G(x)$  に戻るので、

$$\begin{aligned}\int (\alpha F(x) + \beta G(x))' dx &= \int \{\alpha F'(x) + \beta G'(x)\} dx \\ \alpha F(x) + \beta G(x) &= \int \{\alpha F'(x) + \beta G'(x)\} dx\end{aligned}$$

ここで、導関数を不定積分すると元の関数に戻ることから、

$$\begin{aligned}F(x) &= \int F'(x) dx \\ G(x) &= \int G'(x) dx\end{aligned}$$

と置き換えることができる。

これらを使って左辺を書き換えると、

$$\alpha \int F'(x) dx + \beta \int G'(x) dx = \int \{\alpha F'(x) + \beta G'(x)\} dx$$

$F(x)$  は  $f(x)$  の原始関数、 $G(x)$  は  $g(x)$  の原始関数であるとする、微分したらそれぞれ元に戻るので、次のように書き表せる。

$$\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx = \int \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} dx$$

不定積分の線形性

$$\int \{\alpha f(x) + \beta g(x)\} dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$