第 1 章

写像と集合

関数から写像へ

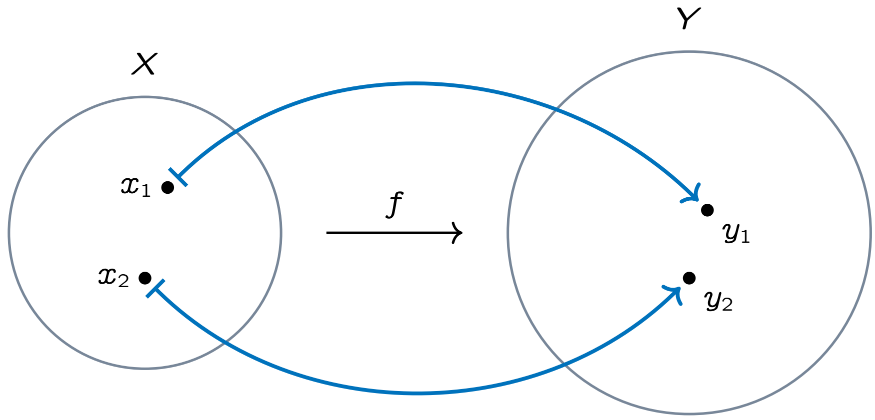
関数は、数を入力すると数が出力される装置であり、入力した数に「対応」する数を決める規則である。

このような「対応」という考え方の対象を「数」に限定せず、「集合の要素（元）」に一般化したものを写像という。

写像　集合 X, Y があったとき、X のすべての要素 x に対して、Y のある要素 y をただ一つ対応させる規則 f が与えられたとする。

このとき、f を X から Y への写像といい、次のように表す。

$$f : X \to Y$$



写像による像

写像 f により、X の要素 x が Y の要素 y に対応しているとき、

- y は x の f による像である
- f により x は y に写る

というような言い回しが使われる。

このとき、関数と同じように、次のように書くことがある。

$$f(x) = y$$

集合の対応と集合の元の対応

集合の対応を表すには $\to$ を使い、集合の元の対応を表すには $\mapsto$ を使う。

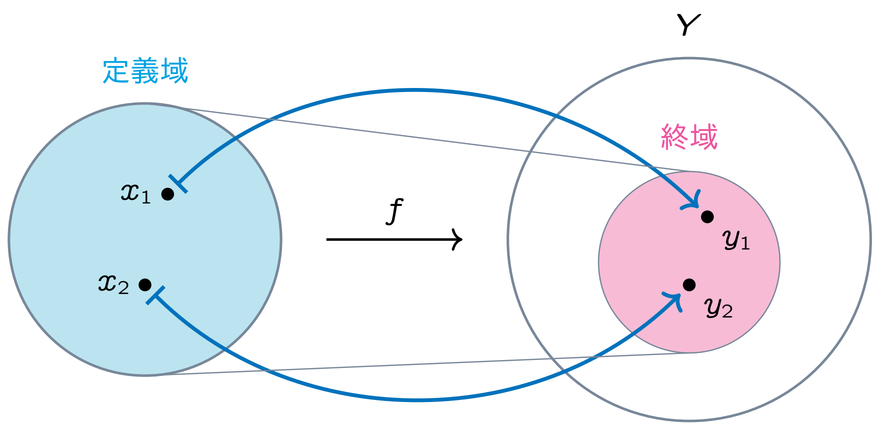
$x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき、次のように書くことがある。

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & y \end{array}$$

定義域と終域

写像では、「どの集合からどの集合への対応であるか」を明示しておかなければならない。

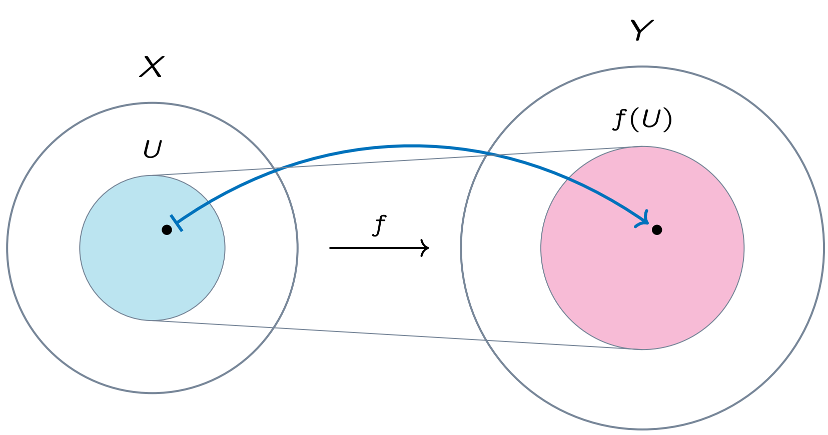
写像の定義域と終域　写像 $f\colon X \to Y$ において、集合 X を f の定義域という。また、$x \in X$ に対応する $y \in Y$ の集合は、Y の部分集合であり、これを f の終域という。



像と逆像

部分集合の像　写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき、X の部分集合 U に対し、$x \in U$ を f で写したものの集合を U の像という。

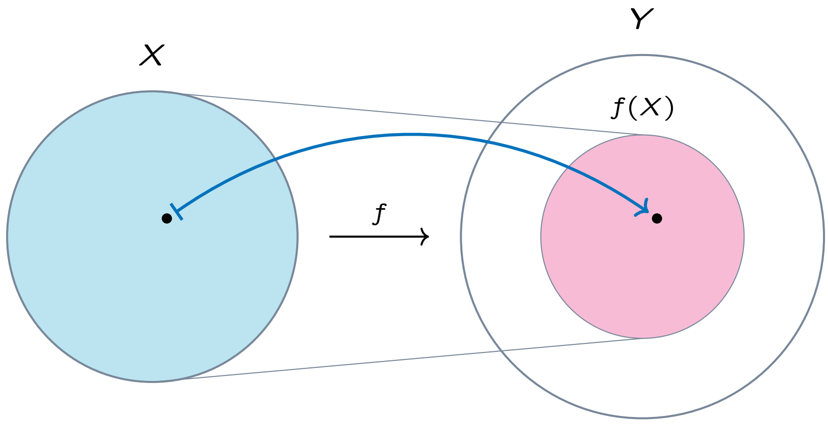
$$f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \subset Y$$



$X = U$ の場合、X の像は f の像と呼ばれる。

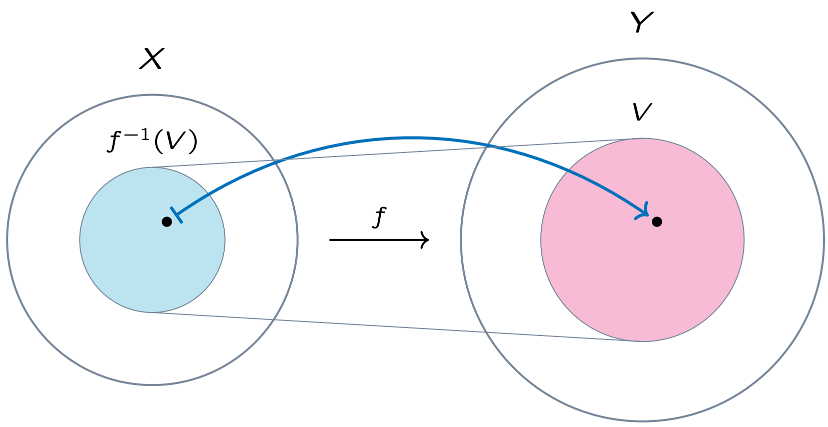
写像の像　写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき、$x \in X$ を f で写したものの集合を f の像という。

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$



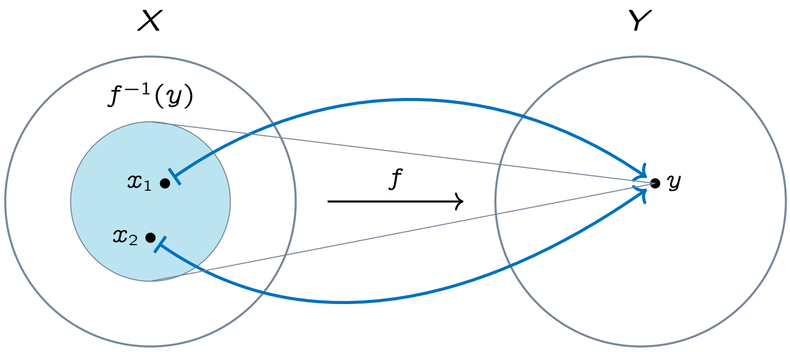
部分集合の逆像　写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき、Y の部分集合 V に対し、f によって V の元に写るような $x \in X$ の集合を V の逆像という。

$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subset X$$



終域の元の逆像　写像 $f\colon X \to Y$ が与えられたとき、Y の元 y に対し、f によって y に写るような $x \in X$ の集合を y の逆像という。

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \subset X$$



単射と全射

写像の性質として、次の 2 点が重要になる。

i. 異なる 2 元を写して同じ元になるか？
ii. 終域のどんな元も、定義域の元になるか？（y に写るような x があるか？）

これら 2 つの視点から、単射と全射が定義される。

i. 「異なる元は異なる元に写る」という性質を満たすとき、写像は単射であるという。
ii. 「どんな y も X の元の像となる」という性質を満たすとき、写像は全射であるという。

単射の定義とイメージ

単射　写像 $f\colon X \to Y$ が単射であるとは、X の任意の要素 x_1, x_2 に対して、次が成り立つことをいう。

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

この条件の対偶をとると、

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

となる。つまり、単射であるということは、

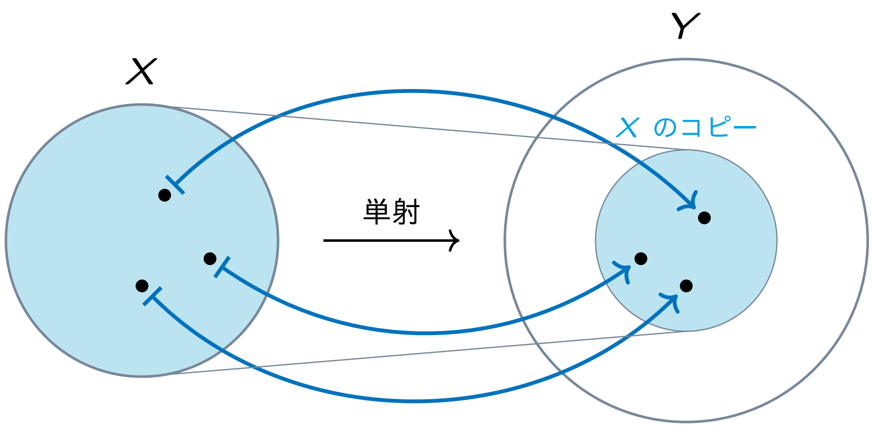
異なる元が f によって同じ元に対応することはない

ということにほかならない。

これは、元々の集合の元が、f で写しても他の元と重なってしまうようなことはない、ということを意味する。情報が失われることなく、すべての元がそのまま写るので、

単射な写像は、定義域を終域の中にそっくり「コピーする」

と考えることができる。



また、単射は終域の元の逆像を用いて定義することもできる。

単射（逆像による定義）　写像 $f\colon X \to Y$ が単射であるとは、任意の $y \in Y$ に対し、逆像 $f^{-1}(y)$ の元の個数が 1 以下であることをいう。

y の逆像は、f によって y に写るような $x \in X$ の集合である。

この定義でも、同じ y に写るような x がただ一つしかない（もしくは存在しない）ことが単射だと述べている。

全射の定義とイメージ

全射　写像 $f\colon X \to Y$ が全射であるとは、f の像 $f(X)$ が Y に一致することをいう。

$$f(X) = Y$$

X から Y への写像 f が全射であるとは、

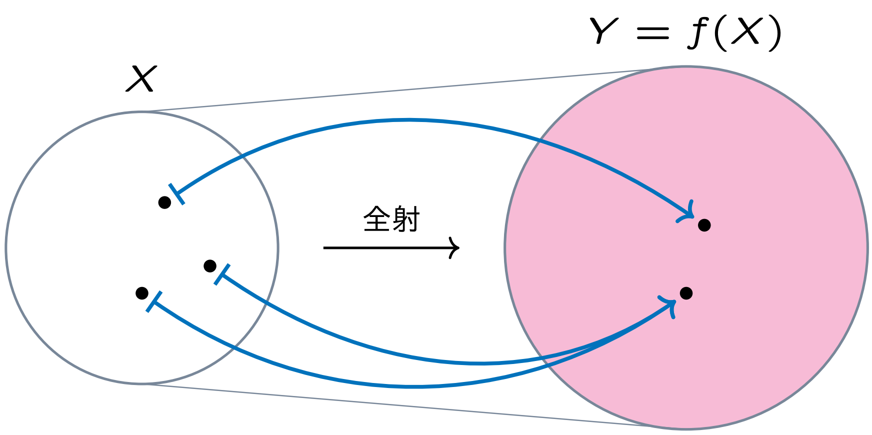
> Y のすべての元が、X のある元の像となる

ということを意味する。

つまり、

> 全射な写像は、定義域の元の像で終域を「埋め尽くす」

と考えることができる。



全単射と一対一対応

全単射　写像 f が全単射であるとは、f が単射かつ全射であることをいう。

単射と全射は、それぞれ次の条件を満たす性質だった。

- 単射：y に写るような x はただ一つしかない（異なる元は異なる元に写る）
- 全射：どんな y も X の元の像 x になる（すべての元に漏れなく写る）

これらの両方を満たす性質である全単射は、次のような性質だといえる。

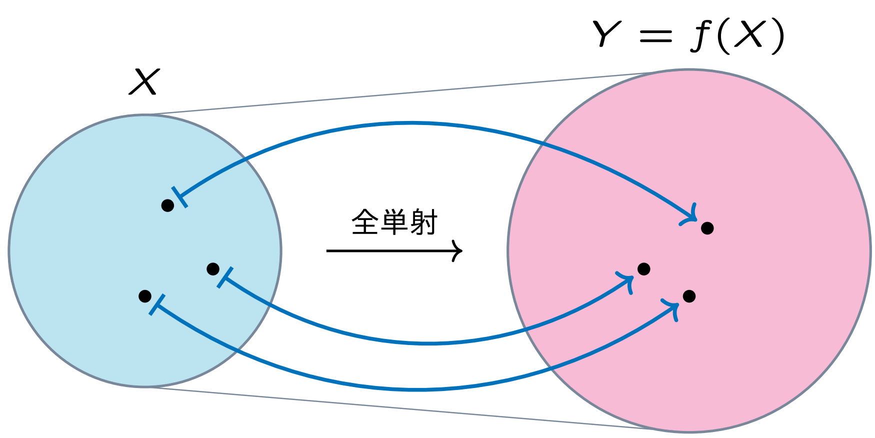
どんな y も、x に対するただ一つの像となる

単射は「X のコピーを Y の中に作る」ことだった。

さらに全射でもあれば、「X のコピーは Y に一致する」ことになる。

そのため、X と Y の間の写像 f が全単射であれば、X と Y を同一視する（同じ集合とみなす）という考え方も成り立つ。

全単射な写像 f により、X の元と Y の元は一対一に対応する



恒等写像と包含写像

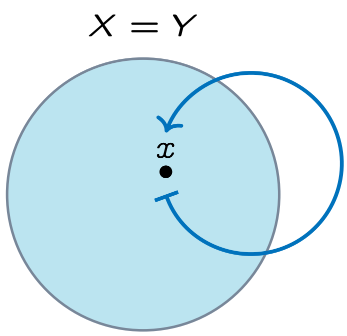
自分自身に対応させる写像は、次のように書ける。

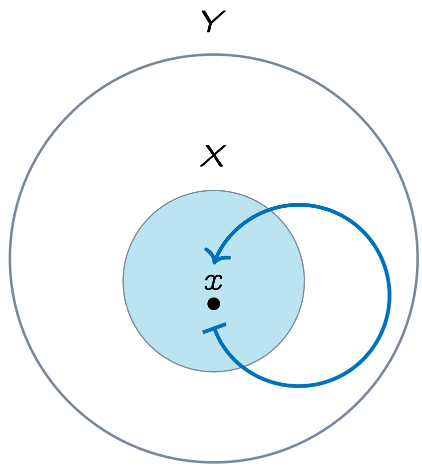
$$f(x) = x$$

この場合、f によって x が y に変わるようなことはなく、f は x をそのまま写す（何も変えない）。

任意の $x \in X$ に対して、$f(x) = x$ が成り立ち、かつ $f(x) \in Y$ を満たすような状況は、次の 2 通りが考えられる。

- $X = Y$ の場合（左図）を恒等写像（`identity map`）という。
- $X \subset Y$ の場合（右図）を包含写像（`inclusion map`）という。





恒等写像　集合 X に対して、X の任意の元 x を $x \in X$ に対応させる X から X への写像を X 上の恒等写像といい、id_X あるいは単に id と表す。

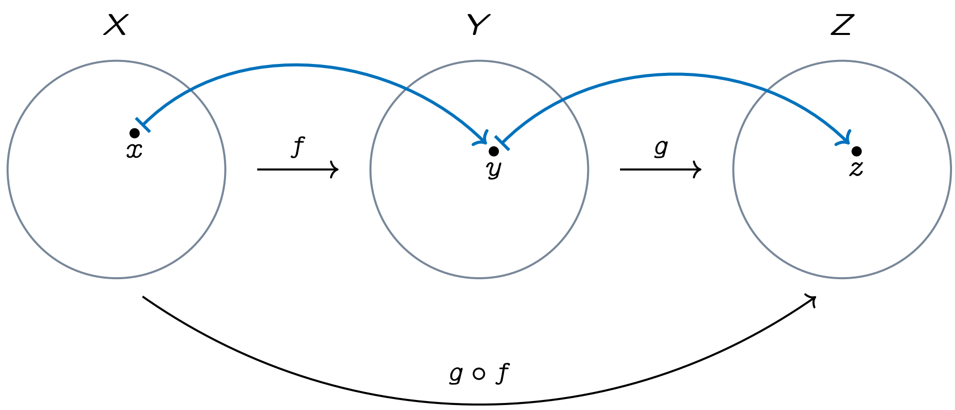
$$\begin{array}{cccc} \mathrm{id}_X : & X & \longrightarrow & X \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

包含写像　定義域 X が終域 Y の部分集合のとき、X の任意の元 x を $x \in Y$ に対応させる写像を包含写像といい、ι と表す。

$$
\begin{array}{cccc}
\iota\colon & X & \longrightarrow & Y \\
 & \Cup & & \Cup \\
 & x & \longmapsto & x
\end{array}
$$

合成写像

対応づける操作を続けて行うことは、写像の合成として定義される。



合成写像　2 つの写像 $f\colon X \to Y, g\colon Y \to Z$ が与えられたとき、X の元に対して Z の元を対応させる X から Z への写像を f と g の合成写像といい、$g \circ f$ と表す。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

単射な写像の合成

[Todo 1: 単射な写像の合成は単射である]

全射な写像の合成

[Todo 2: 全射な写像の合成は全射である]

逆写像と可逆な写像

全単射な写像では、終域のどんな元も、定義域のただ 1 つの元の像となっている。

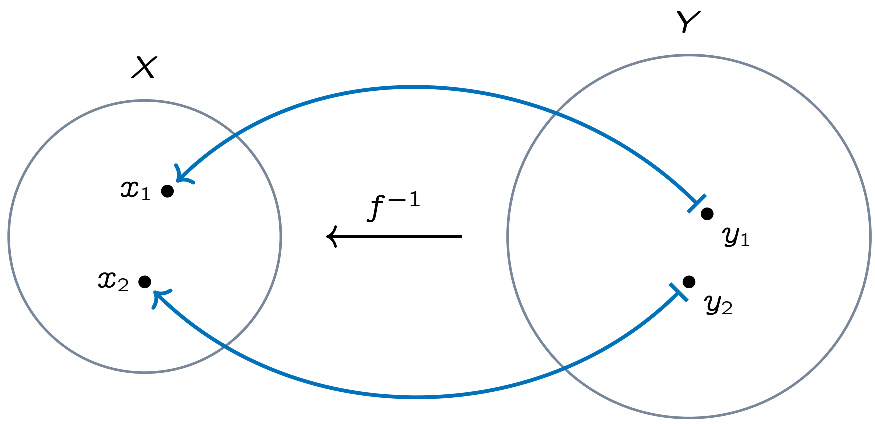
そのため、終域の元からその像になるような定義域の元をただ 1 つ決めることができる。

この対応は、元々の写像の終域から定義域への写像となり、逆写像と呼ばれる。

逆写像　写像 $f\colon X \to Y$ が全単射であるとき、任意の $y \in Y$ に対して、$f(x) = y$ となる $x \in X$ がただ一つ存在する。

このとき、Y の元 y に対して、$f(x) = y$ となる x を対応させる写像を f の逆写像（`inverse mapping`）といい、次のように表す。

$$f^{-1}\colon Y \to X$$



可逆　写像 $f\colon X \to Y$ の逆写像が存在するとき、f は可逆（`invertible`）であるという。

逆写像を定義する上での前提は、写像が全単射であることだったため、

可逆な写像とは、全単射な写像

のことをいう。

また、逆写像は恒等写像によって定義することもできる。

そのための議論を次に行う。

左逆写像と右逆写像

f で写した後に g を適用すると元に戻るとき、g は f の左逆写像と呼ばれる。

左逆写像　写像 $f\colon X \to Y$ に対して、写像 $g\colon Y \to X$ が存在して、

$$g \circ f = \mathrm{id}_X$$

を満たすとき、g は f の左逆写像であるという。

集合レベルでの左逆写像

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & X \end{tikzcd}$$

要素レベルでの左逆写像

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) \overset{g}{\longmapsto} x$$

g で戻した後に f を適用すると元に戻るとき、g は f の右逆写像と呼ばれる。

右逆写像　写像 $f\colon X \to Y$ に対して、写像 $g\colon Y \to X$ が存在して、

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

を満たすとき、g は f の右逆写像であるという。

集合レベルでの右逆写像

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_Y"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

要素レベルでの右逆写像

$$y \xmapsto{g} g(y) \xmapsto{f} y$$

全単射の特徴づけ

全単射と逆写像の存在　写像 $f\colon X \to Y$ に対して、次の 2 つは同値である。

i. f は全単射である
ii. f の左逆写像であり、右逆写像でもある写像 $g\colon Y \to X$ が存在する

証明

[Todo 3: book: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p62]

逆写像は、次のように定義することもできる。

逆写像（恒等写像による定義）　写像 $g\colon Y \to X$ が写像 $f\colon X \to Y$ の逆写像であるとは、次が成り立つことをいう。

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \quad \text{かつ} \quad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

写像の制限

[Todo 4:]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	4