部分空間の共通部分

与えられた部分空間から、新しく部分空間を作ることができる

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p22

線形部分空間の共通部分は部分空間　V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき、共通部分 $V \cap W$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V \cap W$ とすると、共通部分の定義より、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ はどちらも V と W の両方に属していることになる

つまり、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ かつ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ である

V も W も部分空間なので、部分空間の定義より、

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in V$$
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \in W$$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ が V と W の両方に属していることから、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は $V \cap W$ に属する

よって、$V \cap W$ は和について閉じている　■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in V \cap W$ と $c \in \mathbb{R}$ をとる

共通部分の定義より、$\boldsymbol{a}$ は V と W の両方に属しているので、部分空間の定義より

$$c\boldsymbol{a} \in V$$
$$c\boldsymbol{a} \in W$$

よって、$c\boldsymbol{a}$ は $V \cap W$ に属するため、$V \cap W$ はスカラー倍について閉じている ■

部分空間の和

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p22〜23
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p231〜233

⚓ **線形部分空間の和は部分空間**　V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき、和空間

$$V + W := \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in V$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in W$ とする
V と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in V, \quad \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \in W$$

一方、和空間の定義より、$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2$ はそれぞれ $V + W$ の元である
これらの元の和をとったときに、その和も $V + W$ に属していれば、和空間は和について閉じているといえる

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) \in V + W$$

上式で、和空間は和について閉じていることが示された ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in V,\ \boldsymbol{b} \in W$ と $c \in \mathbb{R}$ をとる

V と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{a} &\in V \\ c\boldsymbol{b} &\in W \end{aligned}$$

一方、和空間の定義より、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は $V + W$ の元である

この元をスカラー倍したときに、そのスカラー倍も $V + W$ に属していれば、和空間はスカラー倍について閉じているといえる

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= c\boldsymbol{a} + c\boldsymbol{b} \\ &\in V + W \end{aligned}$$

上式で、和空間はスカラー倍について閉じていることが示された ■

部分空間を生成するベクトルを用いて、部分空間の和を表せる

部分空間の和と生成ベクトル K^n の 2 つの部分空間 $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$ と $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$ に対して、和空間 $V + W$ は

$$V + W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

となる

証明

和空間 $V + W$ は

$$V + W = \{ \boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w},\ \ \boldsymbol{v} \in V,\ \ \boldsymbol{w} \in W \}$$

と定義される

また、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ の張る部分空間は

$$H = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

である

これらが等しいことを示せばよい

$V + W \subseteq H$

任意の $\boldsymbol{x} \in V + W$ に対し、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$（$\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$）と書ける

すなわち、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{v}_m \qquad (a_i \in K) \\ \boldsymbol{w} &= b_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + b_k\boldsymbol{w}_k \qquad (b_j \in K) \end{aligned}$$

よって、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j \in H$$

$H \subseteq V + W$

任意の $\boldsymbol{x} \in H$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j$$

と書ける

ここで

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{v}_i \in V,$$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j \in W$$

とすれば、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in V + W$$

以上より、$V + W \subseteq H$ と $H \subseteq V + W$ が成り立つので、$V + W = H$ が示された ■

部分空間の和の次元

ref: 行列と行列式の基礎 p103
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p39～41

部分空間の和の次元　K^n の部分空間 V, W に対して、次が成り立つ

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

証明

$\dim(V) = n, \dim(W) = m$ とする

$V \cap W$ の基底 $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ をとる

これを基底の延長の定理に基づいて、V の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}\}$$

に延長する

同様に、$\mathcal{V}$ を W の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}\}$$

に延長する

このとき、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}$ が $V+W$ の基底になることを示す

$V+W$ を生成すること

$\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W$ とすると、それぞれ基底の線形結合で表す

ことができる

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} a_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j \boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{d} c_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{k=1}^{m-d} d_k \boldsymbol{w}_k$$

$V + W$ の任意の元は、$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ と書けるので、

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{d} (a_i + c_i) \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j \boldsymbol{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} d_k \boldsymbol{w}_k$$

となり、$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}\}$ の線形結合で表せる ■

線型独立であること

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}$ が線型独立であることを示すために、次のような線形関係式を考える

$$\sum_{i=1}^{d} c_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} c_{d+j} \boldsymbol{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} c_{d+n-d+k} \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0}$$

ここで、$c_i \in K$ はスカラーである

この式を V と W の基底の線型結合として考えると、V の基底 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{v}_j$ に関する部分と W の基底 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{w}_k$ に関する部分がそれぞれ線形独立であるため、結局どの項においても $c_i = 0$ である必要がある

よって、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}$ は線型独立である ■

以上より、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}$ は $V + W$ の基底であることが示された

この基底をなすベクトルの個数（次元）について考えると、

$$\begin{aligned} \dim(V + W) &= d + (n - d) + (m - d) \\ &= n + m - d \end{aligned}$$

となる

ここで、$d = \dim(V \cap W)$ なので、

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

と書き換えられ、目的の式が得られた ■