正規行列

エルミート行列の対角化について議論するために、エルミート行列・ユニタリ行列を含むより包括的な概念として正規行列を導入する

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p197〜200
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p287〜292
ref: 行列と行列式の基礎 p209

正規行列　複素正方行列 A が次を満たすとき、A を正規行列という

$$AA^* = A^*A$$

正規行列の例

A をエルミート行列とすると、$A^* = A$ なので、

$$AA^* = A^2$$
$$A^*A = A^2$$

となり、正規行列の定義を満たす

エルミート行列の正規行列性　エルミート行列は正規行列である

また、A をユニタリ行列とすると、$A^* = A^{-1}$ なので、

$$AA^* = AA^{-1} = E$$
$$A^*A = A^{-1}A = E$$

となり、こちらも正規行列の定義を満たす

ユニタリ行列の正規行列性　ユニタリ行列は正規行列である

正規行列の性質

正規行列と随伴によるノルム保存性　複素正方行列 A が正規行列であることは、任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ に対し、

$$\|A\boldsymbol{v}\| = \|A^*\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことと同値である

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p262 問 6.9 (1)]

正規行列における固有ベクトルの随伴対応　A を正規行列とするとき、$\boldsymbol{v}$ が A の固有値 α の固有ベクトルならば、$\boldsymbol{v}$ は A^* の固有値 $\overline{\alpha}$ の固有ベクトルである

すなわち、

$$A\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} \Longrightarrow A^*\boldsymbol{v} = \overline{\alpha}\boldsymbol{v}$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p262 問 6.9 (2)]

正規行列の対角化

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p287～292

A の固有値 α に属する線型独立な固有ベクトルがちょうど k 個存在することは、

$$\dim\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}\} = k$$

と表せる

これは、固有値 α の固有空間の次元が k であること、噛み砕くと、固有値 α の固有ベクトル $\boldsymbol{x}$ の集合が部分空間であり、k 個の固有ベクトルがこの部分空間の基底を成す（線型独立である）ことを意味する

固有空間は核空間 $\mathrm{Ker}(A-\alpha E)$ と定義されるため、この次元が k であることは、次のようにも書ける

$$\dim \mathrm{Ker}(A-\alpha E) = k$$

正規行列について、一般に次が成り立つ

正規行列における固有空間の次元と固有値の重複度の一致

n 次複素正方行列 A が正規行列であるとき、$\Phi_A(x)$ における固有値 α の重複度 k について、次の等式が成り立つ

$$k = n - \mathrm{rank}(A-\alpha E)$$

次元定理を用いて言い換えると、α の固有空間 $W(\alpha)$ について、

$$\dim W(\alpha) = k$$

が成り立つ

証明

$l = n - \mathrm{rank}(A-\alpha E)$ とおく（l が重複度 k に等しいことを示すことが目標）

すなわち、

$$\mathrm{rank}(A-\alpha E) = n - l$$

であると仮定する

また、固有値 α の固有ベクトルは、斉次形方程式

$$(A-\alpha E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

の非自明解である

この方程式の解空間は $\mathrm{Ker}(A-\alpha E)$ であるが、次元定理より、

$$\dim \mathrm{Ker}(A-\alpha E)=n-\mathrm{rank}(A-\alpha E)=l$$

であるので、$\mathrm{Ker}(A-\alpha E)$ は次元 l の部分空間である

すなわち、方程式 $(A-\alpha E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を満たす l 個の線型独立なベクトルが存在する

これらを $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_l$ とすると、これらはすべて固有値 α の固有ベクトルである

これらが正規直交系でない場合は、グラム・シュミットの直交化法を用いて正規直交系に変換し、それを改めて $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_l$ とする

次に、これら l 個のベクトルを補う形で、正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_l,\boldsymbol{v}_{l+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n$ を作る

これらを用いて、行列 U を

$$U=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_l,\boldsymbol{v}_{l+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n)$$

とおくと、U はユニタリ行列である

さらに、$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_l$ は A の固有値 α に属する固有ベクトルであることから、

$$U^{-1}AU=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \longleftarrow l \longrightarrow & \longleftarrow n-l \longrightarrow \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \alpha & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \updownarrow n-l \end{array} \end{array}$$

ユニタリ行列 U の定義より、$U^{-1} = U^*$ が成り立つので、

$$U^*AU = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad l \quad & \quad n-l \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & B \\ & & \alpha & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) & \begin{array}{c} l \\ \\ \\ n-l \end{array} \end{array}$$

ここで、両辺の随伴行列をつくることを考える

左辺は、積の随伴行列をつくると積の順序が入れ替わることに注意して、

$$(U^*AU)^* = U^*A^*(U^*)^* = U^*A^*U$$

右辺は、転置してから各成分を共役複素数に置き換えればよいので、

$$U^*A^*U = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad l \quad & \quad n-l \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{\alpha} & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \overline{\alpha} & \\ \hline & B^* & & C^* \end{array}\right) & \begin{array}{c} l \\ \\ \\ n-l \end{array} \end{array}$$

一方、A が正規行列であることから、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l$ は、A^* の固有値 $\overline{\alpha}$ に属する固有ベクトルでもあるので、

$$U^{-1}A^*U = U^*A^*U = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad l \quad & \quad n-l \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \overline{\alpha} & & & \\ & \ddots & & B' \\ & & \overline{\alpha} & \\ \hline & O & & C' \end{array}\right) & \begin{array}{c} l \\ \\ \\ n-l \end{array} \end{array}$$

とも表せる

ここで、B と C は $l \times (n-l)$ 型行列、B' と C' は $(n-l) \times l$ 型行列であり、型が一致するので成分を比較できる

よって、

$$B^* = O, \quad C^* = C'$$

0 の複素共役は 0 であることから、$B^* = O$ より、

$$B = O$$

がしたがう

このことをふまえて、あらためて U^*AU を表すと、

$$U^*AU = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad\overleftrightarrow{\qquad l \qquad} & \overleftrightarrow{\quad n-l \quad} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & & & \\ & \ddots & & O \\ & & \alpha & \\ \hline & O & & C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \\ \updownarrow n-l \end{array} \end{array}$$

となる

ここで、A と U^*AU の特性多項式は一致するので、実際に計算すると、

$$\begin{aligned} \det(xE - A) &= \det(xE - U^*AU) \\ &= \left|\begin{array}{ccc|c} x-\alpha & & & \\ & \ddots & & O \\ & & x-\alpha & \\ \hline & O & & xE_{n-l} - C \end{array}\right| \\ &= \left|\begin{array}{ccc} x-\alpha & & \\ & \ddots & \\ & & x-\alpha \end{array}\right| \det(xE_{n-l} - C) \\ &= (x-\alpha)^l \det(xE_{n-l} - C) \end{aligned}$$

また、$\alpha E - U^*AU$ を考えると、

$$\alpha E - U^*AU = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad\overleftrightarrow{\qquad l \qquad} & \overleftrightarrow{\quad n-l \quad} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & 0 & \\ \hline & O & & \alpha E_{n-l} - C \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \\ \updownarrow n-l \end{array} \end{array}$$

より、

$$\mathrm{rank}(\alpha E - U^*AU) = \mathrm{rank}(\alpha E_{n-l} - C)$$

ここで、A と U^*AU は相似な行列であり、相似な行列の固有値（特性方程式の根）は重複度も含めて一致するので、

$$\mathrm{rank}(\alpha E - U^*AU) = \mathrm{rank}(\alpha E - A) = n - l$$

よって、

$$\mathrm{rank}(\alpha E_{n-l} - C) = n - l$$

つまり、$\alpha E_{n-l} - C$ は行列の階数が次数 $n - l$ に等しいので、正則行列である

ゆえにその行列式は、

$$\det(\alpha E_{n-l} - C) \neq 0$$

となることから、$x = \alpha$ は方程式 $\det(xE_{n-l} - C) = 0$ の解ではないことがわかる

よって、$\det(xE - A) = 0$ の解 $x = \alpha$ は、$(x - \alpha)^l$ の部分から現れることになるため、$x = \alpha$ は l 重解である

したがって、α の重複度 k は l に等しいことが示された ■

固有空間の次元と重複度が一致すれば対角化可能であることから、正規行列は対角化可能である

さらに、上の定理の証明過程から、正規行列はユニタリ行列によって対角化できることもわかる

⚓ 正規行列とユニタリ対角化　複素正方行列 A について、A が正規行列であることと、A がユニタリ行列を用いて対角化できることは同値である

証明

正規行列 $\Longrightarrow$ ユニタリ行列を用いて対角化可能

正規行列における固有空間の次元と固有値の重複度の一致の定理の証明過程より明らか ■

ユニタリ行列を用いて対角化可能 $\Longrightarrow$ 正規行列

A がユニタリ行列 U を用いて、次のように対角化されたとする

$$U^*AU = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

このとき、両辺に左から U をかけ、右から U^* をかけると、ユニタリ行列の定義より $U^*U = UU^* = E$ であることから、

$$A = U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} U^*$$

と変形できる

よって、A^* は、積の随伴行列をつくると積の順序が入れ替わることに注意して、

$$\begin{aligned} A^* &= (U^*)^* \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \\ &= U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \end{aligned}$$

以上をふまえて、AA^* と A^*A をそれぞれ計算すると、

$$
\begin{aligned}
AA^* &= U\begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* \\
&= U\begin{pmatrix} \alpha_1\overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n\overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A^*A &= U\begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n} \end{pmatrix} U^* U \begin{pmatrix} \alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \alpha_n \end{pmatrix} U^* \\
&= U\begin{pmatrix} \overline{\alpha_1}\alpha_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \overline{\alpha_n}\alpha_n \end{pmatrix} U^*
\end{aligned}
$$

となり、$\alpha_i\overline{\alpha_i} = \overline{\alpha_i}\alpha_i$ なので、たしかに、

$$AA^* = A^*A$$

が成り立つ

これは、A が正規行列であることを意味する ■

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	2