第 15 章

正射影と直交化

観測装置としての内積

ここでは、内積 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ において、$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の機能を分離して、

内積 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ とは、$\boldsymbol{a}_1$ で $\boldsymbol{a}_2$ を測って得られる値

という再解釈を行う。

縦ベクトルが基本

内積 $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ は、次のように表すこともできた。

$$\boldsymbol{a}_1^\top \boldsymbol{a}_2$$

つまり、縦ベクトル $\boldsymbol{a}_2$ に、横ベクトル $\boldsymbol{a}_1^\top$ を作用させることで、内積が得られると読むことができる。

このように、$\boldsymbol{a}_2$ が測りたい対象で、$\boldsymbol{a}_1$ がその測定器であるという視点を持つことができる。

ブラとケット

この視点を表す上で有用なのが、ブラケット記法である。

- 横ベクトルに対応する記号として $\langle \boldsymbol{a}_1|$ を定義し、これをブラベクトルと呼ぶ
- 縦ベクトルに対応する記号として $|\boldsymbol{a}_2\rangle$ を定義し、これをケットベクトルと呼ぶ

これらの記号を用いると、内積は次のように表せる。

$$\langle \boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2\rangle$$

このように、ブラとケットが組み合わされると、スカラー値 $\langle \boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2\rangle$ が得られる。

ケットという「観測対象」に対して、結果としてスカラー値を返すような関数（内積）を考えたとき、そのための「観測装置」となるのがブラである。

観測装置であるブラ（横ベクトル）は、縦ベクトルからスカラー値を得るための写像 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ とみることもできる。

この捉え方を一般化すると、線形汎関数という概念に結びつく。

基底によるベクトルの展開

縦ベクトルをケット、横ベクトルをブラで表すことにする。

測定値からベクトルを特定する

基底 $|\boldsymbol{a}_1\rangle, |\boldsymbol{a}_2\rangle$ を用いて、ベクトル $|\boldsymbol{x}\rangle$ を次のような線形結合で表そう。

$$|\boldsymbol{x}\rangle = x_1 |\boldsymbol{a}_1\rangle + x_2 |\boldsymbol{a}_2\rangle$$

ここで、係数 x_1, x_2 を求めるために、左からブラ $\langle \boldsymbol{a}_1|, \langle \boldsymbol{a}_2|$ を作用させる。

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{x}\rangle &= x_1 \langle \boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_1\rangle + x_2 \langle \boldsymbol{a}_1|\boldsymbol{a}_2\rangle \\
\langle \boldsymbol{a}_2|\boldsymbol{x}\rangle &= x_1 \langle \boldsymbol{a}_2|\boldsymbol{a}_1\rangle + x_2 \langle \boldsymbol{a}_2|\boldsymbol{a}_2\rangle
\end{aligned}$$

ブラとケットが組み合わされたブラケット $\langle \cdot|\cdot\rangle$ はスカラー値を表しているので、これは未知数 x_1, x_2 に関する連立方程式である。

この連立方程式を解けば、係数 x_1, x_2 が求まり、ベクトル $|\boldsymbol{x}\rangle$ を特定できる。

直交基底による展開

直交基底を用いると、線形結合の係数は連立方程式を解くことなく、内積を用いて直接計算できる。

直交基底 $|\boldsymbol{u}_1\rangle$, $|\boldsymbol{u}_2\rangle$ に対して、ベクトル $|\boldsymbol{x}\rangle$ が次のように表されるとする。

$$|\boldsymbol{x}\rangle = x_1 |\boldsymbol{u}_1\rangle + x_2 |\boldsymbol{u}_2\rangle$$

左からブラ $\langle\boldsymbol{u}_1|$, $\langle\boldsymbol{u}_2|$ を作用させると、

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{x}\rangle &= x_1 \langle\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}_1\rangle + x_2 \langle\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}_2\rangle \\
\langle\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{x}\rangle &= x_1 \langle\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{u}_1\rangle + x_2 \langle\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{u}_2\rangle
\end{aligned}$$

ここで、直交していれば内積は 0 になるので、$\langle\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}_2\rangle$ や $\langle\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{u}_1\rangle$ は 0 となる。

$$\begin{aligned}
\langle\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{x}\rangle &= x_1 \langle\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}_1\rangle \\
\langle\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{x}\rangle &= x_2 \langle\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{u}_2\rangle
\end{aligned}$$

この式から、係数 x_1, x_2 は次のように求まる。

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\langle\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{x}\rangle}{\langle\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}_1\rangle} \\
x_2 &= \frac{\langle\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{x}\rangle}{\langle\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{u}_2\rangle}
\end{aligned}$$

⚓ Theorem 15.1 – 直交基底によるベクトルの展開

計量空間 V の直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ に対して、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)}{(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i)} \boldsymbol{u}_i$$

と表すことができる。

証明

ベクトル $\boldsymbol{v}$ が次のような線形結合

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n$$

で表されるとし、係数を求めることを目指す。

このとき、$\boldsymbol{u}_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)$ との内積をとると、

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) &= (c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_j) \\ &= c_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_j) + \cdots + c_n(\boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j)\end{aligned}$$

となるが、$\boldsymbol{u}_i$ は直交系であるため、$i \neq j$ のとき $(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = 0$ である。

よって、上の式において残るのは、$i = j$ の項だけとなり、

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) = c_j(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_j)$$

ここで、直交系の定義より $\boldsymbol{u}_j \neq \boldsymbol{o}$ なので、$(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_j) \neq 0$ である。

そこで、両辺を $(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_j)$ で割ることができ、

$$c_j = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j)}{(\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_j)}$$

が得られる。 ■

正規直交基底による展開

さらに、$|\boldsymbol{u}_1\rangle, |\boldsymbol{u}_2\rangle$ が正規直交基底であるなら、これらのノルムは 1 であるので、

$$\langle \boldsymbol{u}_1 | \boldsymbol{u}_1 \rangle = \|\boldsymbol{u}_1\|^2 = 1, \quad \langle \boldsymbol{u}_2 | \boldsymbol{u}_2 \rangle = \|\boldsymbol{u}_2\|^2 = 1$$

よって、係数 x_1, x_2 はさらに簡単な形で表すことができる。

$$\begin{aligned}x_1 &= \langle \boldsymbol{u}_1 | \boldsymbol{x} \rangle \\ x_2 &= \langle \boldsymbol{u}_2 | \boldsymbol{x} \rangle\end{aligned}$$

⚓ Theorem 15.2 – 正規直交基底によるベクトルの展開

計量空間 V の正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ に対して、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\boldsymbol{u}_i$$

と表すことができる。

証明

正規直交基底の場合、

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i) = \|\boldsymbol{u}_i\|^2 = 1$$

であることを用いると、Theorem 15.1「直交基底によるベクトルの展開」において分母が 1 となり、この形が得られる。 ■

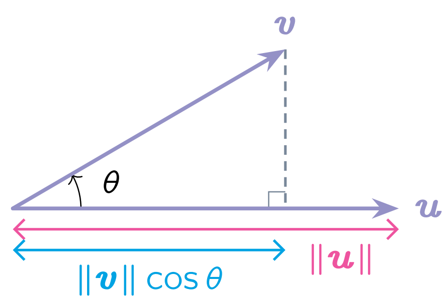
ベクトルの正射影

このように、直交基底や正規直交基底を用いることで計算が簡単になる場面が多くある。実は、任意の基底を直交基底や正規直交基底に作り変えることもできる。

正規直交系をつくるにあたって重要となる、正射影という概念を導入しよう。

ベクトルの「影」

内積の幾何学的解釈は、次のような図で内積の意味を捉えようとするものだった。



ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ のなす角 θ を用いると、$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ との内積は次のように表すことができる。

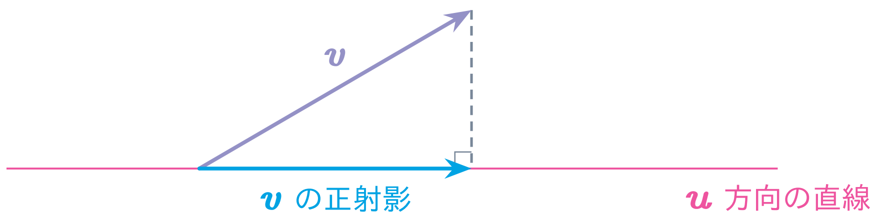
$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$$

つまり、$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積とは、$\boldsymbol{u}$ の長さ $\|\boldsymbol{u}\|$ と、$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向の長さ $\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$ の積であるとも捉えられる。

> 厳密には、θ の値によっては $\cos\theta$ は負の数になり得るので、$\|\boldsymbol{v}\| \cos\theta$ をそのまま正射影の「長さ」と呼ぶのは適切ではないのだが…

ここで、$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ 方向の長さは、上から光を当てたときに $\boldsymbol{u}$ に投影される、「$\boldsymbol{v}$ の影」の長さのように見える。

そこで、$\boldsymbol{u}$ 方向の直線上に落とした $\boldsymbol{v}$ の影となるベクトルを、$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影と呼ぶ。

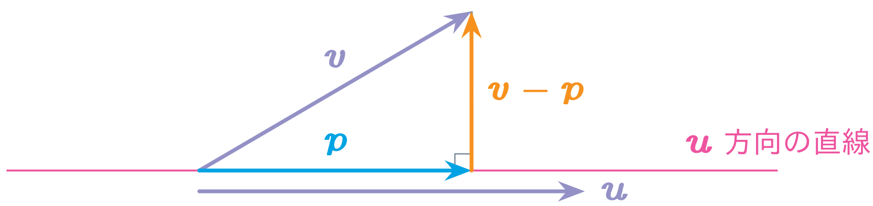


正射影の公式

なす角 θ を使わずに、$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影を表すことを考えてみよう。

$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影を $\boldsymbol{p}$ とおくと、次の関係が成り立っている。

- $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{u}$ と平行である
- $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{u}$ と直交する



$\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{u}$ と平行であることから、スカラー k を用いて次のように表せる。

$$\boldsymbol{p} = k\boldsymbol{u}$$

また、$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{u}$ と直交することから、これらの内積は 0 になる。

$$(\boldsymbol{v} - k\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$$

内積の双線形性を用いて展開すると、

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) &= 0 \\ \therefore \quad k\|\boldsymbol{u}\|^2 &= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \end{aligned}$$

ここで、$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$ であれば、そのノルム $\|\boldsymbol{u}\|$ は 0 にはなり得ないので、$\|\boldsymbol{u}\|^2$ で両辺を割ることができる。

$$k = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}$$

よって、正射影ベクトル $\boldsymbol{p} = k\boldsymbol{u}$ は、次のように表すことができる。

$$\text{正射影ベクトル} = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}$$

ここまでの話をまとめておこう。

正射影　$\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{u}$ が与えられているとき、ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し、

i. $\boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{u}$ と平行
ii. $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{p}$ が $\boldsymbol{u}$ と直交

という条件を満たすベクトル $\boldsymbol{p}$ を、$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への**正射影**という。

Theorem – 正射影の公式

ベクトル $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影 $\boldsymbol{p}$ は、次のように表される。

$$\boldsymbol{p} = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{u}\|^2}\boldsymbol{u}$$

正射影を測る観測装置

$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影の（符号付き）長さは、係数 k の部分で表される。

$$k = \frac{\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\|^2}$$

この長さの分だけ $\boldsymbol{u}$ をスケーリングしたものが、$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影 $\boldsymbol{p} = k\boldsymbol{u}$ となる。

ここで、$\boldsymbol{u}$ のノルムが 1 であれば、k は内積 $\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle$ そのものになる。

$$\langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{v} = k$$

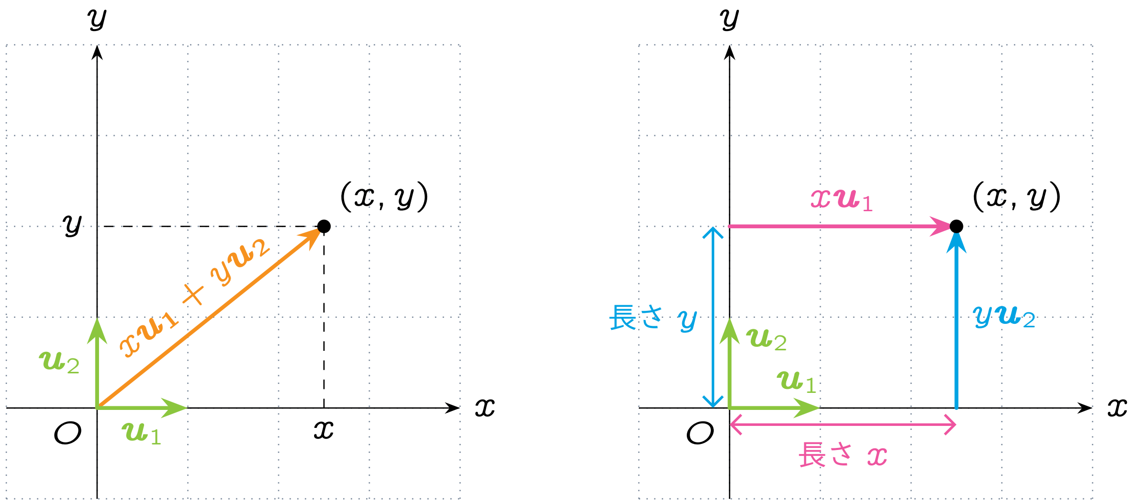
つまり、ノルムが 1 の横ベクトル $\langle \boldsymbol{u} | = \boldsymbol{u}^\top$ は、$\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影の（符号つき）長さを測る観測装置として機能する。

単位ベクトル $\boldsymbol{u}$ との内積は、

「$\boldsymbol{u}$ 方向に正射影し、その長さを返す」操作になる

基底方向への正射影と座標

正規直交基底の場合、「基底方向への正射影の長さ」を測ることは、その方向の「成分（座標)」を得ることに相当する。



たとえば、ベクトル $\boldsymbol{v}$ が正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ に関して次のように表されるとする。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{u}_1 + y\boldsymbol{u}_2$$

このとき、各係数 x, y は、次のような正射影の長さとして得られる。

- $x\boldsymbol{u}_1$ を $\boldsymbol{u}_1$ 方向へ正射影したものの長さが x
- $y\boldsymbol{u}_2$ を $\boldsymbol{u}_2$ 方向へ正射影したものの長さが y

ここで、「正射影を測る観測装置」で述べた、

単位ベクトルとの内積は、その方向に正射影したときの長さを与える

という解釈と合わせると、次のように各座標（成分）を得ることができる。

$$x = \langle \boldsymbol{u}_1 | \boldsymbol{v} \rangle, \quad y = \langle \boldsymbol{u}_2 | \boldsymbol{v} \rangle$$

直交化と正規化

ベクトル $\boldsymbol{a}$ が、互いに直交するベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \widehat{\boldsymbol{u}}_3$ を用いて、次のように書けるとする。

$$\boldsymbol{a} = x_1 \boldsymbol{u}_1 + x_2 \boldsymbol{u}_2 + \widehat{\boldsymbol{u}}_3$$

ここで、$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ のノルムは 1 だが、$\widehat{\boldsymbol{u}}_3$ はそうではない。
$\widehat{\boldsymbol{u}}_3$ は、ノルムが 1 のベクトル $\boldsymbol{u}_3$ を用いると、$\widehat{\boldsymbol{u}}_3 = x_3 \boldsymbol{u}_3$ となるようなベクトルであるとする。

このとき、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ は単位ベクトルであるから、$\boldsymbol{a}$ との内積でそれぞれの係数を得ることができる。

$$\boldsymbol{a} = \langle \boldsymbol{u}_1 | \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u}_1 + \langle \boldsymbol{u}_2 | \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u}_2 + \widehat{\boldsymbol{u}}_3$$

この式を変形すると、$\widehat{\boldsymbol{u}}_3$ は次のように表せる。

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_3 = \boldsymbol{a} - \langle \boldsymbol{u}_1 | \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u}_1 - \langle \boldsymbol{u}_2 | \boldsymbol{a} \rangle \boldsymbol{u}_2$$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ を構成するときに、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ に直交するような成分が $\widehat{\boldsymbol{u}}_3$ である。
これを求めるためには、$\boldsymbol{a}$ から $\widehat{\boldsymbol{u}}_3$ 以外の方向 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ への正射影を引けばよい。

互いに直交するベクトルは、正射影を利用することで連鎖的に得ることができる。
実際、$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ を直交化しておけば、これらへの正射影を引くという形で、さらにこれらに直交するベクトル $\widehat{\boldsymbol{u}}_3$ をつくることができる。

なお、ベクトルのノルムを 1 にすることを正規化という。
$\boldsymbol{u}_1$ と $\boldsymbol{u}_2$ が正規化されていれば、これらへの正射影は内積だけで簡単に求まる。

グラム・シュミットの直交化法

正規化と直交化を連鎖させることで正規直交系をつくろうとするのが、グラム・シュミットの直交化法である。

具体的には、次の手順を繰り返すことで、計量空間 V の線型独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ から正規直交系 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ をつくることができる。

1. ノルムが 1 のベクトルをつくる
2. ノルムが 1 のベクトルとの内積で、正射影をつくる
3. 元のベクトルから正射影を引くことで、直交ベクトルをつくる

正規化

まずは、$\boldsymbol{a}_1$ から、ノルムが 1 であるベクトルをつくる。

ベクトルのノルムを 1 にすることを正規化という。

$\boldsymbol{a}_1$ を正規化したベクトルは、次のように求められる。

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}$$

ここで、$\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{a}_1$ をスカラー $\dfrac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}$ 倍しただけなので、$\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{a}_1$ は平行である。

正射影による直交化

次に、$\boldsymbol{e}_1$ と直交するような $\boldsymbol{u}_2$ をつくる。

そのために、$\boldsymbol{a}_2$ から $\boldsymbol{a}_2$ の $\boldsymbol{e}_1$ への正射影を引いたものは、$\boldsymbol{e}_1$ と直交することを利用する。

$\boldsymbol{a}_2$ の $\boldsymbol{e}_1$ への正射影は、次のように計算できる。

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$$

そこで、

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{a}_2 - (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1$$

とおくと、$\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{e}_1$ と直交する。

再び正規化

ここで、もし $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{o}$ ならば、$\boldsymbol{a}_2$ は $\boldsymbol{a}_1$ の線形結合で表されることになり、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は線型従属になってしまう。

$$\boldsymbol{a}_2 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 = (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)\frac{1}{\|\boldsymbol{a}_1\|}\boldsymbol{a}_1$$

ここでは、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は線型独立なベクトルと仮定しているので、$\boldsymbol{u}_2 \neq \boldsymbol{o}$ である。

よって、$\boldsymbol{u}_2$ を次のように正規化することができる。

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|}$$

$\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{e}_1$ と直交するベクトルであるので、$\boldsymbol{e}_2$ も $\boldsymbol{e}_1$ と直交する。
さらに、$\boldsymbol{e}_2$ はノルムが 1 のベクトルになっている。

そこで、前工程「正射影への直交化」に戻って、今度は $\boldsymbol{e}_2$ と直交するようなベクトル $\boldsymbol{u}_3$ をつくることができる。

正規化と直交化の連鎖

以上の手順を繰り返すことで、線型独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ から、正規直交系 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ を得ることができる。

このような方法をグラム・シュミットの直交化法という。

Theorem – グラム・シュミットの直交化法

計量空間 V の線型独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ から、正規直交系 $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$ を次のように構成できる。

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j$$
$$\boldsymbol{e}_k = \frac{\boldsymbol{u}_k}{\|\boldsymbol{u}_k\|}$$

ここで、$k = 1, 2, \dots, n$ である。

正規直交基底の構成

次の定理により、グラム・シュミットの直交化法は、線型独立なベクトルから正規直交系を得るだけでなく、任意の基底から正規直交基底を得る手法としても利用できる。

Theorem 15.3 – グラム・シュミットの直交化と生成空間の不変性

計量空間 V の線型独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ から、グラム・シュミットの直交化法を用いて得られた正規直交系を $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ とする。

このとき、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が張る空間と $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が張る空間は一致する。

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$$

証明

グラム・シュミットの直交化法では、各ステップ k において、まず $\boldsymbol{a}_k$ からその前に得られた直交ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k-1}$ への射影を引くことで、$\boldsymbol{a}_k$ に直交するベクトルを構成する。

すなわち、

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j$$

と定義し、その後これを正規化して $\boldsymbol{e}_k$ とする。

ここで、$\boldsymbol{u}_k$ は右辺の形から明らかなように、$\boldsymbol{a}_k$ と $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k-1}$ の線型結合である。

そしてさらに各 $\boldsymbol{e}_j$（$j < k$）は、それ以前の $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j$ の線型結合であることから、$\boldsymbol{u}_k$ は結局 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線型結合として書ける。

したがって、$\boldsymbol{e}_k$ も $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線型結合となり、$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ はすべて $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の線型結合である。

よって、すべての $\boldsymbol{e}_k$ は $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ に属することになり、

$$\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle \subset \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

が成り立つ。

両辺の部分空間の次元を考えると、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線型独立であるため、$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ の次元は n である。

一方、Theorem 14.1「直交系の線型独立性」より、$\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ も直交系であることから線型独立であるため、$\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ の次元も n である。

よって、Theorem 12.3「次元の一致による部分空間の一致判定」より、部分空間の次元が等しいことから、両者は一致する。 ■

正規直交基底の存在

このように、グラム・シュミットの直交化法によって、任意の基底から正規直交基底をつくることができる。
つまり、グラム・シュミットの直交化法は、内積が定められている空間（計量空間）には正規直交基底が必ず存在することを示している。

Theorem – 正規直交基底の存在

$\{\boldsymbol{o}\}$ でない任意の計量空間は正規直交基底を持つ。

線形従属なベクトルの正規直交化

与えられたベクトルが線型独立でない場合にグラム・シュミットの直交化法を適用すると、いずれ射影を引いたベクトルが $\boldsymbol{o}$ になる。

ある $\boldsymbol{a}_k$ が、前のベクトルたち $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ の線形結合として表される、すなわち線形従属であるとする。
ここで、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ から得られた正規直交系を $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k-1}$ とすると、Theorem 15.3「グラム・シュミットの直交化と生成空間の不変性」より、これらの張る空間は一致する。

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} \rangle = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k-1} \rangle$$

よって、$\boldsymbol{a}_k$ は、すでに得られた正規直交系 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k-1}$ の線形結合として表すこともできる。

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_i) \boldsymbol{e}_i$$

そのため、射影をすべて引くと、次のように残りが $\boldsymbol{o}$ になってしまう。

$$\boldsymbol{u}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{o}$$

このように、グラム・シュミットの直交化法における射影を引く操作は、すでにある正規直交基底に重なっている成分（従属部分）を消し去ってしまう。
この性質により、グラム・シュミットの直交化法は線形従属な場合でも破綻せずに使える。

しかし、結果として新しい成分がゼロになる（つまり新しい情報がない）ため、得られる直交系は完全な基底にはならない。

計量同型

[Todo 1:]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1