Chapter 1

線形代数

線形代数は、高次元に立ち向かうための強力な道具となる。

どれだけ高次元に話を広げたとしても、「関係」を語る言葉の複雑さが増すことはない。 この章では、そんな状況を実現するための理論を追いかけていく。

1.1 ベクトルの定義

1.1.1 移動の表現としてのベクトル

Under construction...

1.1.2 ベクトルの多次元化:数ベクトル

多次元空間内の「移動」を表すには、「縦」と「横」の2方向だけでなく、もっと多くの数が必要になる。

また、4次元を超えてしまうと、矢印の描き方すら想像がつかなくなってしまう。それは、方向となる軸が多すぎて、どの方向に進むかを表すのが難しくなるためだ。

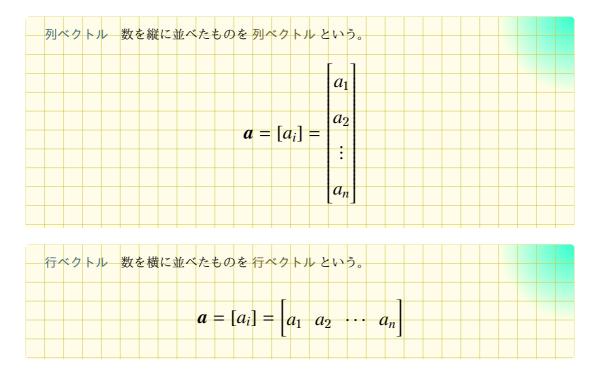
そこで、一旦「向き」の情報を取り除くことで、高次元に立ち向かえないかと考える。

移動を表す矢印は「どの方向に進むか」と「どれくらい進むか」という向きと大きさの情報を持っているが、その「どれくらい進むか」だけを取り出して並べよう。

こうして単に「数を並べたもの」もベクトルと呼ぶことにし、このように定義したベクトルを数

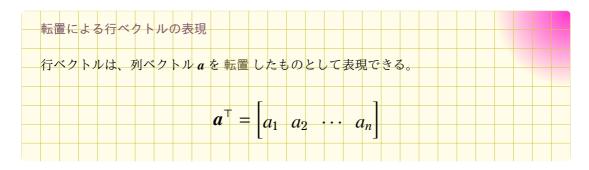
ベクトルという。

数を並べるとき、縦と横の2通りがある。それぞれ列ベクトル、行ベクトルとして定義する。



単に「ベクトル」と言った場合は、列ベクトルを指すことが多い。

行ベクトルは、列ベクトルを横倒しにしたもの(列ベクトルの転置)と捉えることもできる。



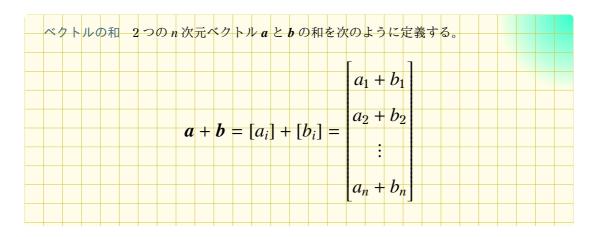
1.1.3 ベクトルの演算

ベクトルによって数をまとめて扱えるようにするために、ベクトルどうしの演算を定義したい。

ベクトルの和

ベクトルどうしの足し算は、同じ位置にある数どうしの足し算として定義する。

1.1. ベクトルの定義 3



i番目の数がaとbの両方に存在していなければ、その位置の数どうしの足し算を考えることはできない。

そのため、ベクトルの和が定義できるのは、同じ次元を持つ(並べた数の個数が同じ)ベクトル どうしに限られる。

数ベクトルを「どれくらい進むか」を並べたものと捉えると、同じ位置にある数どうしを足し合わせるということは、同じ向きに進む量を足し合わせるということになる。

たとえば、x 軸方向に a_1 、y 軸方向に a_2 進んだ場所から、さらに x 軸方向に b_1 、y 軸方向に b_2 進む…というような「移動の合成」を表すのが、ベクトルの和である。

1. 図

ベクトルのスカラー倍

「どれくらい進むか」を表す数たち全員に同じ数をかけることで、向きを変えずにベクトルを「引き伸ばす」ことができる。

2. 図

ここで位置ごとにかける数を変えてしまうと、いずれかの方向に多く進むことになり、ベクトル の向きが変わってしまう。そのため、「同じ」数をかけることに意味がある。

3. 図

そこで、ベクトルの定数倍(スカラー倍)を次のように定義する。

| ベク | ナト | ルの | Dス | 力 ⁻ | ラー | 倍 | n | 次テ | Ēベ | クー | トル | a | D k | 倍で | を次 | の | よう | うに | 定義 | す | る。 | | | |
|----|----|----|----|----------------|----|---|---|----|-----|----|----|-------------|---------|----|------------------|-------|----|----|----|---|----|--|--|--|
| | | | | | | | | | | | | | | | $\left[k\right]$ | a_1 | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | - 1 | ka | _ | k [₄ | a_i 1 | = | k | a_2 | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | - | | | - ` L | 13 | | | : | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | k | a_n | j | | | | | | | |

1.2. ベクトルの作り方 5

1.2 ベクトルの作り方

1.2.1 一次結合

ベクトルを「引き伸ばす」スカラー倍と、「つなぎ合わせる」足し算を組み合わせることで、ある ベクトルを他のベクトルを使って表すことができる。

4. 図

このように、スカラー倍と和のみを使った形を一次結合もしくは線形結合という。

1.2.2 基底

3次元までのベクトルは、矢印によって「ある点を指し示すもの」として定義できる。 しかし、4次元以上の世界に話を広げるため、ベクトルを単に「数を並べたもの」として再定義 した。

点を指し示すためのもう一つの概念として、座標がある。

座標も結局は矢印と同様に、x 軸方向にこのくらい進み、y 軸方向にこのくらい進む、というように、「進む方向」と「進む長さ」を持つ。

単なる数の並びを、向きと大きさを持つ量として復元するための道具が、基底である。

1.3 ベクトルの測り方

