直交行列とユニタリ行列

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p275〜276
ref: 行列と行列式の基礎 p204

ユニタリ行列　複素正方行列 A が次を満たすとき、A を**ユニタリ行列**という

$$A^* = A^{-1}$$

A が実正方行列のときは、

$$A \text{ がユニタリ行列} \iff {}^tA = A^{-1}$$

となり、このような A は**直交行列**と呼ばれる

直交行列　実正方行列 A が次を満たすとき、A を**直交行列**という

$${}^tA = A^{-1}$$

直交行列という名前の由来は、次のように考えられる

A を n 個の列ベクトルを横一列に並べたものとみなし、

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

とおくと、${}^tA = A^{-1}$、すなわち ${}^tAA = E$ は、

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

と表される

これは、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が、次の性質

$${}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$$

を満たすことを意味する

すなわち、直交行列 A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, ..., \boldsymbol{a}_n$ は、互いに直交する単位ベクトルである

この事実は、複素行列に対しても成立する

⚓ **todo**　複素正方行列 U を $U = (\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_n)$ と列ベクトル分解するとき、

$$U \text{ がユニタリ行列} \iff (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$$

すなわち、ユニタリ行列の列ベクトルは、互いに直交する単位ベクトルである

ユニタリ変換

体 $\mathbb{C}$ 上の計量空間において、内積を保つ線形変換を**ユニタリ変換**という

ref: 行列と行列式の基礎 p77〜82
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p126〜131

ユニタリ変換　体 $\mathbb{C}$ 上の計量空間 V における線形変換 f が**ユニタリ変換**であるとは、任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し、

$$(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことである

体 $\mathbb{R}$ 上のユニタリ変換は、**直交変換**と呼ばれる

ユニタリ変換とノルム

ユニタリ変換は、ベクトルの長さを変えない変換でもある

ユニタリ変換とノルム保存性　計量空間 V における線形変換を f がユニタリ変換であることと、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し

$$\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことは同値である

証明

f がユニタリ変換 $\Longrightarrow$ f はノルムを保つ

ユニタリ変換の定義より、

$$(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{v}\|^2$$

ここで、$\|f(\boldsymbol{v})\| = \sqrt{(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v}))}$ であるから、

$$\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つ　■

f はノルムを保つ $\Longrightarrow$ f はユニタリ変換

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し、

$$\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つというのが仮定である

そこで、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ とすると、

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|$$

両辺を二乗して、

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|^2$$

このとき、左辺は次のように展開できる

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\
&= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\
&= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2
\end{aligned}$$

右辺も同様に、

$$\begin{aligned}&\|f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})\|^2 \\ &\qquad = \|f(\boldsymbol{a})\|^2 + 2(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})) + \|f(\boldsymbol{b})\|^2\end{aligned}$$

さて、仮定より、$\|f(\boldsymbol{a})\| = \|\boldsymbol{a}\|$ と $\|f(\boldsymbol{b})\| = \|\boldsymbol{b}\|$ が成り立つことから、

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})\|^2$$

という等式の両辺を展開した結果、残る項は

$$2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}))$$

だけとなる

したがって、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}))$$

が成り立つので、f はユニタリ変換である ■

ユニタリ変換の表現行列

ユニタリ変換の表現行列は、ユニタリ行列である

todo 計量空間上の線形変換 f がユニタリ変換であることと、f の表現行列 A がユニタリ行列であることは同値である

証明

f がユニタリ変換 $\Longrightarrow$ A がユニタリ行列

A がユニタリ行列 $\Longrightarrow$ f がユニタリ変換