解の一意性

ここまでの議論で、問題 B が解決している

ref: 行列と行列式の基 礎 p37~38

 \mathbf{x} 解の一意性 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解が存在するとき、

解が一意的である \iff rank(A) = n

ここで、n は変数の個数である



 \longleftarrow

 $\operatorname{rank}(A)=n$ であれば、解の自由度は n-n=0、すなわち自由変数が存在しないことになる

自由変数がなければ「各変数=定数」という式に変形できる ことになるので、解は明らかに一意的である ■



対偶 $rank(A) \neq n \Longrightarrow$ 解が一意的 を示す

 $\mathrm{rank}(A) \leq n$ であるので、 $\mathrm{rank}(A) \neq n$ は $\mathrm{rank}(A) < n$ を意味する

 ${\sf rank}(A) < n$ であれば、自由変数が 1 つ以上存在するので解は無数にある

よって、解は一意的ではない



自明解しか存在しない \iff rank(A) = n

ここで、n は変数の個数である

証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性 $\operatorname{rank}(A) = n$ は、それ以外の解がないということを意味している



自由変数を $x_{j_1},\ldots,x_{j_{n-r}}$ とするとき、一般解の表示

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + t_{n-r} \mathbf{u}_{n-r}$$

の j_k 番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる このことから、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + t_{n-r} \mathbf{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の n-r 個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる

この事実は、 $oldsymbol{u}_1,oldsymbol{u}_2,\ldots,oldsymbol{u}_{n-r}\in\mathbb{R}^m$ が線形独立であると表現される