

角速度

遠くに電車が走っているのが見えたとする

距離はわからなくても、見える角度は時々刻々と変化していく

こんな状況を正確に言い表すために**角速度**という概念がある

* * *

基準点と、それを通る基準線（基準の方向）をあらかじめ決めておく

注目している点が、基準点から見て基準の方向から（左回りに測って）角度 θ の位置にあるとする

この角度 θ は時間 t によって変化するので、 t を変数とする関数という意味で、 $\theta(t)$ と表す

このとき、微分

$$\frac{d\theta(t)}{dt}$$

を時刻 t における**角速度**という

* * *

どこから見るか、すなわち基準点をどこにとるかによって、角速度は変わる

一方、基準線の方角については、どのように選んでも角速度に影響しない

実際、基準線の方角を変えても、角度 $\theta(t)$ には時刻によらない定数が付け加わるだけであるから、その微分である角速度には影響しないことになる

三角関数の微分

円周上を一定の速さで進むことを**等速円運動**という

等速円運動では、円の中心から見ると角速度が一定になっている

* * *

ここでは計算を簡単にするため、半径 1 の円周上を速さ 1 で左回りに動くことを考える

速さ 1 というのは、経過した時間が t ならば、円弧を長さ t だけ進むということ（経過時間と進んだ距離が等しい＝その比が 1 になる）

円の中心から見た角度も、弧度法で t だけ増える

この等速円運動を xy 座標を用いて表す

時刻 $t = 0$ のときに x 軸上の点 $(1, 0)$ を出発すると、時刻 t の位置 P は、原点を中心に角度 t だけ円周上を左回りに進んだ点として

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$$

と座標表示される

この運動の速さは 1 で一定だが、速度ベクトルの向きは時刻とともに変わる

速度ベクトルは、 x 座標、 y 座標それぞれについて微分すればよいので、時刻 t において、

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt} \right) = \left(\frac{d}{dt} \cos t, \frac{d}{dt} \sin t \right)$$

で与えられる

角速度から三角関数の微分を導く

半径 1 の円周上を動くという条件は、

$$x^2(t) + y^2(t) = 1$$

と表される

両辺を微分すると、積の微分に関するライプニッツの法則より、

$$2(x(t)x'(t) + y(t)y'(t)) = 0$$

となり、内積が 0 であることから、速度ベクトルは位置ベクトルに直交していることがわかる

また、速さが 1 なので、速度ベクトルの大きさは 1 である

したがって、この速度ベクトルは大きさが 1 で、向きは位置ベクトルを $\frac{\pi}{2}$ だけ左に回転させた方向を向いていることになり、

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) &= \left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= (-\sin t, \cos t)\end{aligned}$$

がわかる

速度ベクトルの 2 通りの表現が得られたので、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \cos t &= -\sin t \\ \frac{d}{dt} \sin t &= \cos t\end{aligned}$$

という、三角関数の微分の公式が導かれた