標準基底の内積

内積の公理から一般的な内積の定義式を考える前に、まずは単純なベクトルの内積がどのように振る舞うべきかを考えてみよう。

ここで取り上げる単純なベクトルとは、標準基底である。

標準基底の定義と直交性

標準基底は、座標軸の 1 目盛というイメージで捉えられる。数式としては、次のように定義される。

標準基底　n 次元線形空間 $\mathbb{R}^n$ において、i 番目の成分が 1 で、ほかの成分が 0 である n 個のベクトルを、標準基底と呼ぶ。

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

実際に座標軸の 1 目盛というイメージで描いてみるとわかるように、標準基底どうしは互いに直交している。

[Todo 1: 2 次元平面の場合の標準基底の図と数式を横並びで描く]

標準基底の内積

標準基底のうち、異なる 2 つのベクトルどうし（たとえば $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_2$）は直交していることから、その内積は 0 として定義しよう。

一方で、標準基底の 1 つである同じベクトルどうし（たとえば $\boldsymbol{e}_1$ と $\boldsymbol{e}_1$）の内積は、1 と定義してしまうことにする。

1 つの標準基底ベクトルは進む長さの 1 単位（座標軸上の 1 目盛）なのだ

から、同じ 1 つの標準基底ベクトルどうしの内積も、近さの 1 単位としておくと都合がいい。

クロネッカーのデルタ

ここまで議論した標準基底の内積の定義は、次のように整理できる。

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

ここで、クロネッカーのデルタという記号を、次のように定義しよう。

> クロネッカーのデルタ
>
> $$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

クロネッカーのデルタ記号を使うと、標準基底の内積の定義は、次のように簡潔に表現できる。

> **標準基底の内積** n 次元線形空間 $\mathbb{R}^n$ において、標準基底 $\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_j$ の内積を、次のように定義する。
>
> $$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$$

....

Zebra Notes

Type	Number
todo	1