線形写像とベクトルの線型独立性

ref: 行列と行列式の基礎 p65〜66

線形写像とベクトルの線形独立性　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする

i. $\{f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ が線型独立ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ は線型独立

ii. $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線形従属ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ は線形従属

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p65 問 2.11]

ii は、平行なベクトルを線型写像で写した結果、平行でなくなったりはしないということを述べている

線型写像とベクトルの線型独立性　線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して、次の 2 つは同値になる

i. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ならば、$f(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$

ii. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線型独立ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線型独立

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p66 命題 2.3.2]

i は、零写像と射影を除けば、f によってベクトルが「つぶれない」という性質を表している

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

ii は、たとえば平行四辺形の像が線分や 1 点になったりしないことなどを意味している

線形写像の単射性　線形写像 f が単射であることと次は同値である

$$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

証明

[Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p66 命題 2.3.3]

線形写像の単射性と全射性

線形写像 f の単射性を表現行列 A の言葉で述べる

ref: 行列と行列式の基礎 p67〜

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	4