第 1 章

線形写像の階数

線形写像の像と列空間

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の張る空間の記号を用いると、ベクトルの張る空間と $\operatorname{Im} A$ に関する考察は次のようにまとめられる。

ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97、ref: プログラミングのための線形代数 p135

$$\operatorname{Im} A = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

つまり、A の列ベクトルが張る空間が $\operatorname{Im} A$ である。

このことから、$\operatorname{Im} A$ を A の列空間と呼ぶこともある。

線形写像の像と表現行列の列空間の一致　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の像 $\operatorname{Im} f$ は、f の表現行列の列ベクトルが張る空間である。

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とするとき、$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

なので、

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{u} \in \operatorname{Im} f \\
\Longleftrightarrow\ & \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t.\ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}) \\
\Longleftrightarrow\ & \exists v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \ s.t.\ \boldsymbol{u} = v_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + v_n \boldsymbol{a}_n \\
\Longleftrightarrow\ & \boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle
\end{aligned}
$$

したがって、

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

が成り立つ。 ■

上述の証明の

$$\boldsymbol{u} \in \operatorname{Im} f \Longleftrightarrow \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t.\ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})$$

という変形に着目すると、この定理は次のように線型方程式の文脈で言い換えられる。

⚓ 線形写像の像空間と方程式の解の存在　$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} A \Longleftrightarrow \text{方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ}$$

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ が $\operatorname{Im} A$ に属するかどうかを調べるためには階数による判定条件が使える。

線形写像の像空間の基底

線形写像の像空間は表現行列の列ベクトルによって張られるが、列ベクトルの集合は一般には線型独立ではない。

ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97

像空間の基底を得るためには、列ベクトルの部分集合を考えるのが自然である。

主列ベクトルによる像空間の基底の構成　行列 A の主列ベクトルの集合は $\mathrm{Im}\,A$ の基底である。

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p97 定理 3.1.10]

線形写像の階数

行列の階数のさらに本質的な意味を明らかにするのが次の結果である

ref: 行列と行列式の基礎 p100

行列の階数と像空間の次元の一致　行列の階数は像空間の次元である

すなわち、A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$$

証明

定理「主列ベクトルによる像空間の基底の構成」より、A の主列ベクトル $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ は $\mathrm{Im}(A)$ の基底を成す

よってその個数 $r = \mathrm{rank}(A)$ は $\mathrm{Im}(A)$ の次元である ■

この定理は、A の階数が行変形の仕方によらずに決まることを念押しするような定理である

列ベクトルの言葉で階数の解釈を与える定理「階数と線型独立な列ベクトルの最大個数」よりも一段と抽象性が高くなっている

より抽象性を上げて、次の定義をする

> 🎓 **線形写像の階数**　線形写像に対して、像空間の次元をその階数と定める
>
> つまり、$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、f の階数を
>
> $$\mathrm{rank}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$$
>
> と定義する

次元定理

ref: 行列と行列式の基礎 p101
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p82〜83

連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の自由度は、

$$\text{解の自由度} = (\text{変数の個数}) - \mathrm{rank}(A)$$

で表された

この関係は、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$、すなわち斉次形の場合にも成り立つ

そこで、変数の個数を n とおくと、次のようにも書き換えられる

$$\mathrm{rank}(A) = n - (A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解の自由度})$$

線型方程式と階数に関するこの関係を、線形写像と次元の言葉で言い換えたい

次のような線形写像

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x} \end{array}$$

を考えると、

- 写像 f は、行列 A に対応する
- 変数の個数は、$\boldsymbol{x}$ の動く空間 $\mathbb{R}^n$ の次元 n に対応する

- $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度は、写像 f で $\mathbf{0}$ になってしまうものの次元に対応する

という関係が読み取れる

ここで、写像 f で $\mathbf{0}$ になってしまう縮退するものは、写像 f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ である

このことを用いて関係式を表現し直すと、次のようになる

$$\mathrm{rank}(f) = n - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

線形写像の次元定理　$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、次が成り立つ

$$\mathrm{rank}(f) = n - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

証明

A を f の表現行列とし、$\mathrm{rank}(f) = r$ とする

このとき、$\mathrm{Ker}(f)$ の次元は $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間の自由度 $n - r$ と一致するため、

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}(f) &= n - r \\ &= n - \mathrm{rank}(f) \\ \therefore \quad \mathrm{rank}(f) &= n - \dim \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

となり、定理が成り立つ　■

階数の性質

2 つの行列の階数の和　A, B を同じ型の行列とするとき、

$$\mathrm{rank}(A+B) \leq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p44 問 1.15]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	2