第 13 章

表現行列と基底変換

一般の基底に関するベクトルの成分表示

基底が定める同型［第 12 章］でも簡単に述べたように、（有限次元）線形空間の元は、基底を使えば数ベクトルで表すことができる。

V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ をその基底とすると、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ は、

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i$$

と一意的に書ける。

このとき、x_i を縦に並べた数ベクトルを、基底 $\mathcal{V}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の座標ベクトルという。

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

すると $\boldsymbol{v}$ は、基底 $\mathcal{V}$ と、この座標ベクトル $\boldsymbol{x}$ の各成分との線形結合で表されるといえる。

数ベクトルの表記に倣って $\boldsymbol{v}$ を成分表示する際は、基底 $\mathcal{V}$ に関する成分（座標）であることを明示するために、次のように右下に $\mathcal{V}$ を添えて書き表すことにする。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{V}} \in V$$

座標写像の逆写像

ある基底 $\mathcal{V}$ に関する座標ベクトルは、座標写像（def 12.3）の逆写像（def A.7）を用いて表すことができる。

座標写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ は、K^n の座標 $\boldsymbol{x}$ から V の元 $\boldsymbol{v}$ を得る線形写像として定義された。

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}$$

theorem 12.2「座標写像の線形同型性」より、座標写像は全単射（可逆）であるので、その逆写像を定義できる。
座標写像の逆写像 $\Phi_{\mathcal{V}}^{-1}$ は、$\boldsymbol{v} \in V$ から、その基底 $\mathcal{V}$ に関する座標ベクトル $\boldsymbol{x}$ を得る線形写像となる。

$$\Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{x}$$

すなわち、

$$\Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$$

として、座標ベクトルを表すことができる。

一般の基底に関する表現行列

数ベクトル空間の間の線形写像は行列によって表すことができ、線形写像とその表現行列を対応づけて考えることができた。（行列と A 倍写像の同型［第 12 章］）
では、一般の線形空間の間の線形写像についてはどうだろうか？

結論から言うと、有限次元の線形空間であれば、一般の線形空間の線形写像も、基底を使えば行列で表すことができる。
これから述べるように、座標写像による同型を用いることで、数ベクトル空間の間の線形写像に帰着させて考えればよい。

線形写像の座標表現

V, W をそれぞれ次元が n, m の線形空間とし、f を V から W への線形写像とする。

また、$\mathcal{V}, \mathcal{W}$ をそれぞれ V, W の基底とする。

このとき、それぞれの基底について座標写像を定義できる。

$$\Phi_{\mathcal{V}}\colon K^n \to V, \quad \Phi_{\mathcal{W}}\colon K^m \to W$$

K^n, K^m, V, W とその間の線形写像の関係を、次のような図式で整理しておこう。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"] & K^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{W}}"'] \end{tikzcd}$$

さて、座標写像 $\Phi_{\mathcal{V}}, \Phi_{\mathcal{W}}$ は線形同型（全単射）であるので、逆写像を定義できる。

そこで、$\Phi_{\mathcal{W}}$ の矢印を逆にたどることで、K^n から K^m への写像を考えることができる。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{W}}^{-1}"] \\ K^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"] & K^m \end{tikzcd}$$

これはすなわち、$\Phi_{\mathcal{W}}$ の逆写像を用いて、次のような合成写像を作ったということである。

$$\Phi_{\mathcal{W}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{V}}\colon K^n \to K^m \tag{13.1}$$

この合成写像は、数ベクトル空間 K^n から K^m への線形写像なので、$m \times n$ 型行列 A により表現される。

この行列 A を、基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する f の行列表示（matrix presentation）、あるいは f の表現行列（matrix representing f）という。

[Note 1: 後の章で、線形写像にその行列表示を対応させる写像は同型であることを示す]

このように、V から W への線形写像 f は、数ベクトル空間との線形同型写像（座標写像）を合成することにより、数ベクトル空間の間の線形写像（A 倍写像）と考えることができる。

行列と線形写像の同一視

また、theorem 12.3「有限次元部分空間と数ベクトル空間の線形同型性」より、線形空間 V, W はそれぞれ次元の等しい数ベクトル空間 K^n, K^m と同型である。

このことから、V から W への線型写像 f を、K^n から K^m への A 倍写像と同一視できると考えることもできる。

$$
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{f} & W \\
\cong\uparrow & & \uparrow\cong \\
K^n & \xrightarrow{A\times} & K^m
\end{array}
$$

しかし、数ベクトル空間との同型は、基底によって定まる座標写像から導かれているため、基底に依存して成り立っていることに注意しよう。つまり、

基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ を固定して考えるときは、f と A を同一視できる

線形写像の表現行列は、基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ を固定することで決まる、線形写像の「成分表示」と解釈することができる。

合成写像の一致を表す可換図式

$f\colon V \to W$ の $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する行列表示が A であることは、次の図式によって整理される。（ここで、f_A は A 倍写像を表す。）

$$
\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{f} & W \\
\Phi_{\mathcal{V}}\uparrow & & \uparrow\Phi_{\mathcal{W}} \\
K^n & \xrightarrow{f_A} & K^m
\end{array}
\tag{13.2}
$$

この図式から、K^n から W への経路は 2 通りあることが読み取れる。

- $\Phi_{\mathcal{V}}$ と f を辿るルート（$f \circ \Phi_{\mathcal{V}}$）
- f_A と $\Phi_{\mathcal{W}}$ を辿るルート（$\Phi_{\mathcal{W}} \circ f_A$）

ここで、前節で定義した合成写像 $K^n \to K^m$ の式 (13.1) を思い出すと、

$$f_A\colon \Phi_{\mathcal{W}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{V}}$$

であるので、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{W}} \circ f_A &= \Phi_{\mathcal{W}} \circ \Phi_{\mathcal{W}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{V}} \\ &= f \circ \Phi_{\mathcal{V}}\end{aligned}$$

すなわち、K^n から W への 2 通りの写像は一致する。

$$\Phi_{\mathcal{W}} \circ f_A = f \circ \Phi_{\mathcal{V}}$$

このように、図式の左下から右上への 2 通りの合成写像が一致するという意味で、図式 (13.2) は**可換**（commutative）であるという。

可換な図式を**可換図式**（commutative diagram）といい、図式の中に ↻ を書くことで可換を明示することも多い。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ K^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "f_A"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & K^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{W}}"'] \end{tikzcd}$$

表現行列を定める規則

線形写像 $f\colon V \to W$、V の基底 $\mathcal{V}$、W の基底 $\mathcal{W}$ が与えられたとき、f の表現行列 A は具体的にどのような規則で構成できるだろうか。

線形写像の記述と行列［第 2 章］で述べたように、数ベクトル空間の間の線形写像を定める行列は、標準基底 $\boldsymbol{e}_j$ の f による像

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$

を横に並べたもの、すなわち、

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = A$$

として構成された。

このような表現行列の構成を、一般の線形空間 V, W の基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関して一般化しよう。

V, W をそれぞれ m, n 次元線形空間とし、それらの基底を $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$、$\mathcal{W} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ と定める。

このとき、$\boldsymbol{a}_j$ は座標写像 $\Phi_{\mathcal{W}}$ によって、次のように W に写される。

$$\Phi_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \boldsymbol{w}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

また、$\boldsymbol{e}_j$ は座標写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ によって、

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} e_{ij} \boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

のように V に写されるが、これは $\boldsymbol{v}_j$ そのものである。

補足：$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{v}_j$ の確認

たとえば、$j = 1$ のときは、次のようになる。

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{e}_1) = \sum_{i=1}^{n} e_{i1} \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_1$$

よって、$\boldsymbol{e}_j \mapsto \boldsymbol{a}_j$ という写像は、

$$\boldsymbol{v}_j \mapsto \Phi_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{a}_j)$$

という V から W への写像 f に対応する。

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{v}_j \arrow[r, mapsto, "f"] & \boldsymbol{w}_j \\
\boldsymbol{e}_j \arrow[u, mapsto, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, mapsto, "A\times"] & \boldsymbol{a}_j \arrow[u, mapsto, "\Phi_{\mathcal{W}}"']
\end{tikzcd}$$

記号を書き換えると、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \Phi_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \boldsymbol{w}_i$$

となり、これで $\boldsymbol{v}_j$ の写り先が決まったので、theorem 10.7「基底を写す線形写像の存在」より f を定めることができる。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{v}_1) &= a_{11}\boldsymbol{w}_1 + a_{12}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{w}_n \\ f(\boldsymbol{v}_2) &= a_{21}\boldsymbol{w}_1 + a_{22}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{2n}\boldsymbol{w}_n \\ &\cdots \\ f(\boldsymbol{v}_m) &= a_{m1}\boldsymbol{w}_1 + a_{m2}\boldsymbol{w}_2 + \cdots + a_{mn}\boldsymbol{w}_n \end{aligned}$$

上の m 個の式をまとめて、次のように書くことができる。

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

このときの行列 $A = (a_{ij})$ が、f の表現行列あるいは行列表示と呼ばれるものとなる。

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix} A$$

theorem 13.1 – 線形写像の行列表現の構成

V, W をそれぞれ m, n 次元線形空間とし、それらの基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$、$\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n\}$ と定める。このとき、線形写像 $f\colon V \to W$ の表現行列 A は、次式を満たすものとして構成される。

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix} A$$

行列表示を使えば、線形空間と線形写像についての問題を、ベクトルと行列についての問題に帰着させて解くことができる。

基底の取り替え

一般に、基底が変わればベクトルの成分表示が変わるように、基底が変われば線形写像の表現行列も変わる。

線形写像 $f\colon V \to W$ に対して、その表現行列が簡単な形になるように V と W の基底を選ぶことができれば、f がよくわかることになる。

そのため、線形写像を調べる上では、最初から与えられた基底をそのまま使うのではなく、基底の取り替え（基底変換）を行うことが多くの場面で重要になる。

線形変換の表現行列と基底の選び方

線形変換（$V = W$ の場合）では、写像の定義される空間 V と、写す先の空間 W が同じなので、V, W どちらに対しても同じ基底を用いることができる。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ {\scriptstyle \Phi_{\mathcal{V}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Phi_{\mathcal{V}}} \\ K^n & \xrightarrow{A\times} & K^n \end{array}$$

[Note 2: V の基底と W の基底として同じものを考える場合については、後の章で詳しく扱う]

もちろん、考える問題によっては別な基底を用いる場合もある。

その重要な例として、基底変換も、定義域と終域の基底を別に選んだ場合の線形変換として考えることができる。

基底を変換する線形変換

V を線形空間とし、V の基底 $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を別な基底 $\mathcal{V}' = \{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ に取り替えることを考える。

このとき、基底 $\mathcal{V}$ を別な基底 $\mathcal{V}'$ に写す線形変換を f とおく。

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_1) & = & \boldsymbol{v}'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ f(\boldsymbol{v}_n) & = & \boldsymbol{v}'_n \end{cases}$$

$f\colon V \to V$ は、基底 $\mathcal{V}$ を構成するそれぞれのベクトルを、基底 $\mathcal{V}'$ を構成するベクトルに順に写す線形変換であり、まとめて次のようにも書ける。

$$\big(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\big) = \big(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\big) \tag{13.3}$$

一方、f の表現行列を P とすると、theorem 13.1「線形写像の行列表現の構成」より、P は次の規則で定まる。

$$\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & \cdots & f(\boldsymbol{v}_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} P$$

先ほどの等式 (13.3) を代入して、次の式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}'_1 & \cdots & \boldsymbol{v}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} P$$

f は基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ を表す線形写像であり、P はその表現行列である。

この意味で、P を基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の基底変換行列（change-of-basis matrix）という。

theorem – 基底変換行列の構成

V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$, $\mathcal{V}' = \{\boldsymbol{v}'_i\}_{i=1}^n$ を V の基底とするとき、基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列 P は次の式で定まる。

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}'_1 & \cdots & \boldsymbol{v}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix} P$$

基底変換行列の可換図式

基底変換行列 P は、座標写像を介して考えると、次の可換図式で定まるものである。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ K^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "P\times"] & K^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}'}"'] \end{tikzcd}$$

V を 1 つにまとめて書いてしまうと関係がよりわかりやすい。

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[dd, "P\times"'] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] & \\ & V \\ K^n \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{V}}"'] & \end{tikzcd} \tag{13.4}$$

この図式から、P は、次のような数ベクトル空間上の線形変換の（標準基底に関する）表現行列であることがわかる。

$$\Phi_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{V}'} \colon K^n \to K^n$$

$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[d, "P\times"'] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] & \\ K^n & V \arrow[l, "\Phi_{\mathcal{V}}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

基底変換行列の正則性

基底変換行列 P を座標写像の合成写像として表すことで、P の正則性が明らかになる。

theorem 13.2 - 基底変換行列の正則性

基底変換行列は正則行列である。

証明

基底変換行列 P は、次の線形変換の表現行列である。

$$\Phi_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{V}'} : K^n \to K^n$$

ここで、$\Phi_{\mathcal{V}}, \Phi_{\mathcal{V}'}$ は座標写像であるので、線形同型（全単射）である。

線形同型写像は全単射であるから、その表現行列は正則である。（def 6.1「正則（写像の言葉で）」）

そこで、$\Phi_{\mathcal{V}}$ の表現行列を A、$\Phi_{\mathcal{V}'}$ の表現行列を B とすると、A, B はともに正則行列であり、線形写像の合成は行列の積として、

$$P = A^{-1}B$$

と書くことができる。

ここで、theorem 6.1「逆行列に対する逆行列」より、A^{-1} も正則行列である。また、theorem 6.2「正則行列の積に対する逆行列」より、正則行列の積は正則行列である。よって、P は正則行列である。 ■

基底変換による座標ベクトルの変化

基底変換行列 P は、ベクトルの成分表示の変換に用いることもできる。

次の定理は、P を定めた図式 (13.4) において、線形空間の元の対応を考えると一目瞭然である。

> **⚓ theorem 13.3 – 座標ベクトルの変換則**
>
> 基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P とし、ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ の $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ に関する座標ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ とするとき、次が成り立つ。
>
> $$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$$

線形空間の対応

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] \arrow[dd, "P\times"'] & \\
& V \\
K^n \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{V}}"'] &
\end{tikzcd}$$

線形空間の元の対応

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{x}' \arrow[dr, mapsto, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] \arrow[dd, mapsto, "P\times"'] & \\
& \boldsymbol{v} \\
\boldsymbol{x} \arrow[ur, mapsto, "\Phi_{\mathcal{V}}"'] &
\end{tikzcd}$$

基底変換による表現行列の変化

基底を取り替えたときに線形写像の表現行列がどのように変わるかは、基底変換行列を使って計算できる。

線形写像の表現行列の変換則

V, W をそれぞれ n, m 次元線型空間とする。

$f\colon V \to W$ を線形写像とし、V, W の基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する f の表現行列を A とする。

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] & W \\
K^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "A\times"] & K^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{W}}"']
\end{tikzcd}
$$

また、別な基底 $\mathcal{V}', \mathcal{W}'$ によって f を表現する行列を B とする。

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "B\times"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{V}'}"'] & K^m \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{W}'}"] \\
V \arrow[r, "f"] & W
\end{tikzcd}
$$

このとき、B をどうやって計算すればよいかを考えたい。

基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P、$\mathcal{W} \rightharpoonup \mathcal{W}'$ の変換行列を Q とするとき、次の可換図式で整理できる。

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "B\times"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] \arrow[dd, "P\times"'] & & & K^m \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{W}'}"'] \arrow[dd, "Q\times"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
K^n \arrow[rrr, "A\times"] \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{V}}"] & & & K^m \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{W}}"']
\end{tikzcd}
$$

ここで、左上の K^n から右下の K^m への線形写像を考えると、次の等式が成り立つ。

$$AP = QB$$

theorem 13.2「基底変換行列の正則性」より、P, Q は正則行列である。

そこで、左から Q^{-1} をかけることで、次の式を得る。

$$Q^{-1}AP = B$$

⚓ theorem 13.4 - 線形写像の表現行列の基底変換則

線形写像 $f\colon V \to W$ の基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する表現行列を A とし、同じ線形写像 f の別な基底 $\mathcal{V}', \mathcal{W}'$ に関する表現行列を B とする。

基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P、$\mathcal{W} \rightharpoonup \mathcal{W}'$ の変換行列を Q とすると、B は次のように表される。

$$B = Q^{-1}AP$$

線形変換の表現行列の変換則

実用上は $V = W$ である場合が特に重要で、この場合には $P = Q$ とすることができるので、次が成り立つ。

$$B = P^{-1}AP$$

⚓ theorem 13.5 - 線形変換の表現行列の基底変換則

線形変換 $f\colon V \to V$ の基底 $\mathcal{V}$ に関する表現行列を A とし、同じ線形変換 f の別な基底 $\mathcal{V}'$ に関する表現行列を B とする。

基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P とすると、B は次のように表される。

$$B = P^{-1}AP$$

相似な行列と相似変換

「ある種の操作を行ったら同一のものになるもの」を「互いに相似」と呼ぶ。

たとえば、二つ以上の図形が「相似」であるとは、平行移動、回転、反転、拡大縮小などの操作を行うとそれら図形をぴったり重ねることができるという意味だった。

行列に対する「相似」は、次のように定める。

def 13.1 - 行列の相似

正方行列 A, B に対して、正則行列 P が存在して次式が成り立つとき、A と B は相似であるという。

$$B = P^{-1}AP$$

このような変換を相似変換という。

A と B が相似であるとき、A と B は 1 つの線形変換 f を異なる基底によって表現して得られた行列であるという関係にある。(theorem 13.5「線形変換の表現行列の基底変換則」)

線形写像の階数標準形

[Placeholder 1: 再編予定]

線形写像に対して、うまく基底を選ぶと、表現行列を階数標準形にできる

theorem – 線形写像の階数標準形

線形写像 $f\colon V \to W$ に対し、$r = \mathrm{rank}(f)$ とするとき、V, W のある基底に関する f の表現行列が次の形になる

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

証明

V の基底を次のように分けて構成する

i. $\mathrm{Ker}(f)$ を張るベクトル(これは f によって零に写る)
ii. $\mathrm{Ker}(f)$ に属さないが、f によって像を生成するベクトル(これは f によって非零に写る)

V, W の次元をそれぞれ n, m とすると、theorem 11.2「線形写像の次元定理」より、$\mathrm{Ker}(f)$ の次元は $n-r$ である

そこで、$\mathrm{Ker}(f) \subset V$ の基底を $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ とする

さらに、theorem 10.6「基底の延長」によって、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V$ を、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ が V の基底になるように選ぶ

このとき、

$$\boldsymbol{w}_i = f(\boldsymbol{v}_i) \quad (i = 1, \ldots, r)$$

とおくと、$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ は線形独立である

実際、線形関係式

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0}$$

があるとすると、f は線形写像なので、

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{r} c_i f(\boldsymbol{v}_i) = f\left(\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i\right) = \boldsymbol{0}$$

より、

$$\left(\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i\right) \in \mathrm{Ker}(f)$$

この線形結合で表されるベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i$$

すると、$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ より、$\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{Ker}(f)$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ の線形結合でも表すことができる

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{u}_j$$

したがって、$\boldsymbol{v}$ の 2 通りの表現から、次の等式が成り立つ

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{u}_j$$

ここで、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ は V の基底なので、線型独立である

よって、等式

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{0}$$

が成り立つには、各係数が 0 でなければならない

$$\begin{aligned} c_i &= 0 \quad (i = 1, \dots, r) \\ d_j &= 0 \quad (j = 1, \dots, n-r) \end{aligned}$$

したがって、$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r$ は線形独立である

$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r$ はすべて $\mathrm{Im}(f)$ に属するので、これは $\mathrm{Im}(f) \subset W$ の基底となる

そこで、この基底を延長して、$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{w}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{w}_m$ を W の基底とする

このように構成した V と W の基底に関する線形写像 f の表現行列を考える

$\mathrm{Ker}(f)$ を張るベクトル $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ は f によって零に写ることと、$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r$ の定義より、

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i & (i = 1, \dots, r) \\ f(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{0} & (j = 1, \dots, n-r) \end{cases}$$

よって、基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-r}\}$ における f の表現行列は、

$$\begin{aligned} &(f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_r), f(\boldsymbol{u}_1), \dots, f(\boldsymbol{u}_{n-r})) \\ &= (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{0}, \dots, \boldsymbol{0}) \\ &= (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r) \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

として定まる ■

このように、線形空間 V, W の任意の基底変換を許すと、線形写像 f の表現行列をとても単純な形

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

にできる

これを f の**階数標準形**という

theorem 13.4「線形写像の表現行列の基底変換則」を用いて、先ほどの定理を行列の言葉で表すことができる

線形写像 $f\colon V \to W$ の基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する表現行列を A とし、同じ線形写像 f の別な基底 $\mathcal{V}', \mathcal{W}'$ に関する表現行列を階数標準形を B とする

このとき、theorem 7.3「正則行列による階数標準形の構成」より、それぞれの基底変換行列 P, Q は行変形、列変形に対応する正則行列である

theorem - 表現行列の階数標準形

$m \times n$ 型行列 A に対し、それぞれ n, m 次の正則行列 P, Q が存在して、

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となる

ここで、$r = \operatorname{rank}(A)$ である

Zebra Notes

Type	Number
note	2
placeholder	1