読書ノート：ろんりと集合

tomixy

2025 年 5 月 19 日

目次

記号化の効用

文を記号化することにより、文の長さや内容に煩わされることなく、文の構造を把握することが容易となり、「思考の節約」になる

もともとの文は忘れて、記号で表された文の間の関係を調べる分野のことを**記号論理学**という

記号論理学は、

- 主張（命題）を扱う**命題論理学**
- 「すべての〜」とか「ある〜」とかを含む文を扱う**述語論理学**

に分かれている

＊　＊　＊

命題論理の法則

■結合法則

$$(p \land q) \land r \equiv p \land (q \land r)$$
$$(p \lor q) \lor r \equiv p \lor (q \lor r)$$

結合法則は、「どこから計算しても同じ」という性質を支えるもの

＊　＊　＊

記号論理では、ある法則が成り立つとき、

その法則の $\wedge$ を $\vee$ に、そして、$\vee$ を $\wedge$ に置き換えた法則が成り立つ

という原理があり、双対性と呼ばれている

双対性は、2 つのことがら・概念が、ちょうどお互いに鏡で写し合っているような対称性を持つ状況

双対性は数学のいろんな分野で登場する

＊　＊　＊

■冪等法則

$$p \wedge p \equiv p$$
$$p \vee p \equiv p$$

これらを繰り返して適用すると、

$$p \wedge \cdots \wedge p \equiv p$$
$$p \vee \cdots \vee p \equiv p$$

であることが容易にわかる

これは、AND（あるいは OR）を「何度繰り返しても同値」であることを示している

$\wedge$ をかけ算（積）と見なすと、$p \wedge \cdots \wedge$ は p の累乗である

昔は、累乗のことを「冪」と呼んだので、「冪等法則」の名称もここから来ている

＊　＊　＊

■交換法則

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$

p と q の順序が交換できることを示している

＊　＊　＊

■分配法則

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

交換法則を考慮すると、分配法則は右から分配することもできる

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (q \vee r) \wedge p$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (q \wedge r) \vee p$$

＊　＊　＊

■吸収法則

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

分配法則によく似ているが、分配する方と分配される方のどちらにも p が入っている

このような状況では q の影響がなくなって、命題が p と同値になるというのが吸収法則

＊　＊　＊

■ド・モルガンの法則（命題論理）

$$\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q$$
$$\neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q$$

ド・モルガンの法則は、AND および OR の否定がどうなるかを述べたもの

命題の否定を作るときにはなくてはならない重要な公式

＊　＊　＊

これらの法則を前提にすると、真理表を使用せずに、同値変形という方法で、2 つの命題が同値であることを確かめることができる

＊　＊　＊

恒真命題と恒偽命題

同値変形をしていく場合に、真理値が一定な値をとる命題を考えると、便利であることがわかってくる

■定義（恒真命題）　真理値を 1 しかとらない命題を恒真命題と呼び、I で表す

■定義（恒偽命題）　真理値を 0 しかとらない命題を恒偽命題と呼び、O で表す

＊　＊　＊

恒真命題と恒偽命題の定義から、明らかに次が成り立つ

■恒真命題と恒偽命題の関係

$$\neg I \equiv O$$
$$\neg O \equiv I$$

なぜなら、否定をとるというのは、真理値について 0 を 1 にし、1 を 0 にする操作だから

＊　＊　＊

■恒真命題の性質

$$p \land I \equiv p$$
$$p \lor I \equiv I$$

■恒偽命題の性質

$$p \land O \equiv O$$
$$p \lor O \equiv p$$

これらの性質において、

- $\land$ を $\lor$ に
- $\lor$ を $\land$ に
- I を O に
- O を I に

置き換えると、

$$p \land I \equiv p \quad \leftrightarrow \quad p \lor O \equiv p$$
$$p \lor I \equiv I \quad \leftrightarrow \quad p \land O \equiv O$$

という対応が得られ、恒真命題と恒偽命題が双対的であることがわかる

＊　＊　＊

矛盾法則と排中法則

「命題とその否定命題は同時に成り立たない」というのが矛盾法則

■矛盾法則

$$p \wedge \neg p \equiv O$$

矛盾法則とは双対的に、排中法則は、「命題とその否定命題のどちらかは常に成り立つ」ということを表している

■排中法則

$$p \vee \neg p \equiv I$$

＊　＊　＊

否定を含む論理式の同値変形において、矛盾法則、排中法則、恒真命題の性質、恒偽命題の性質を用いると、次のような 2 つのステップで、式をより単純な形にすることができる

1. 矛盾法則や排中法則により、命題とその否定命題のペアは、恒真命題 I や恒偽命題 O に置き換えることができる
2. 恒真命題の性質や恒偽命題の性質により、恒真命題 I と恒偽命題 O は、式をより簡単にする

＊　＊　＊

ならば

■定義　命題 p, q に対して、$\neg p \vee q$ という命題を $p \to q$ と書いて、「p ならば q」と読む

＊　＊　＊

必要条件と十分条件

■定義（必要条件と十分条件）　命題 p, q に対して、命題 $p \to q$ が常に正しいとき、$p \Rightarrow q$ と書き、

- p は q の必要条件である
- q は p の十分条件である

と呼ぶ

■定義（必要十分条件）　$p \Rightarrow q$ であり、$q \Rightarrow p$ であるとき、$p \Leftrightarrow q$ と書き、

- p は q の必要十分条件である
- q は p の必要十分条件である

と呼ぶ

＊　＊　＊

三段論法

「ならば」を用いた有名な議論の方法として、仮言三段論法がある

これは、「A ならば B」という主張と「B ならば C」という主張から、「A ならば C」という主張を導くことができるというもの

＊　＊　＊

逆と対偶

対偶 $\neg q \to \neg p$ と、もとの命題 $p \to q$ は同値である

$$
\begin{aligned}
&\neg q \to \neg p \\
&\equiv (\neg\neg q) \lor \neg p && \text{$\to$ の定義} \\
&\equiv q \lor \neg p && \text{反射法則} \\
&\equiv \neg p \lor q && \text{交換法則} \\
&\equiv p \to q && \text{$\to$ の定義}
\end{aligned}
$$

＊　＊　＊

「晴れるならば、外出する」はまともな主張だが、その対偶「外出しないならば、晴れない」というのは、少し違和感を感じる

これは、「外出しない」という原因によって「晴れない」という結果が導かれるととらえてしまうから

あくまで、論理の「ならば」は、「外出しない」という事実があるときに、「晴れない」という事実があるという状態を表すもの

「〜ならば〜」というのは、

> 原因と結果という因果関係ではなく、2 つの状態の間の事実関係である

と思っておくとよい

＊　＊　＊

$\neg p \to \neg q$ は、$p \to q$ の**裏**と呼ばれることもある

- $(\neg p \to \neg q) \equiv (\neg\neg p) \lor \neg q \equiv p \lor \neg q$
- $(p \to q) \equiv (\neg p \lor q)$

であるため、裏 $\neg p \to \neg q$ と元の命題 $p \to q$ は特に関係がない

＊　＊　＊

2 つの同値

> **■定義（同値）**　2 つの命題 p, q に対して、真理値がすべて等しい（真理表が一致する）ということを、p と q は**同値**であると呼び、
>
> $$p \equiv q$$
>
> と表す

一方、同値にはもう 1 つの定義がある

> **■定義（同値）**　命題 p と命題 q がお互いに必要十分条件であるとき、言いかえると、$p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ であるとき、p と q は**同値**であると呼び、
>
> $$p \Leftrightarrow q$$
>
> と表す

この 2 つの同値 $\equiv$ と $\Leftrightarrow$ は、実は同じ内容を表している

「$p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$」であるというのは、

> 命題 $p \to q$ および命題 $q \to p$ の真理値がすべて 1 である

ということだから、「p と q の真理値が等しいこと」と「$p \to q$ と $q \to p$ の真理値がどちらも 1 であること」は一致している

したがって、2 つの同値 $\equiv$ と $\Leftrightarrow$ は同じ内容を表していることがわかる

＊　＊　＊

命題関数

これまで、たとえば「1234567891 は素数である」というような命題を扱ってきた

ここで、たとえば x が自然数全体を動くとき、「x は素数である」という形の主張を命題関数と呼ぶ

命題は記号 p で表されたのに対し、命題関数は $p(x)$ と書く

命題関数 $p(x)$ は、x の値に応じて主張が変わり、真理値が変化していく

命題関数 $p(x)$ の x は、変数と呼ばれる

命題関数 $p(x)$ の変数は、実数や自然数のような数以外に、直線とか地図のような数学的対象や一般的概念をとる

＊　＊　＊

すべての〜

命題関数 $p(x)$ に対して、「すべての x について $p(x)$ である」という命題を

$$\forall x p(x)$$

と表す

「すべての〜について○○である」は、

- 「すべての〜は○○である」
- 「任意の〜について○○である」
- 「任意の〜は○○である」

と表すこともある

$\forall$ という記号は、「all（すべての〜）」や「any（任意の〜）」の頭文字の A を逆さにしたものに由来する

＊　＊　＊

変数 x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「すべての x について $p(x)$ である」というのは、

> $p(a_1)$ であり、かつ、$p(a_2)$ であり、かつ、$\cdots$、かつ、$p(a_n)$ である

ということに他ならない

言い換えると、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \land p(a_2) \land \cdots \land p(a_n)$$

ということになる

＊　＊　＊

ある〜

命題関数 $p(x)$ に対して、「ある x について $p(x)$ である」という命題を

$$\exists x p(x)$$

と表す

「ある〜について○○である」は、

- 「ある〜は○○である」
- 「ある〜が存在して○○である」
- 「○○であるような〜が存在する」

と表すこともある

$\exists$ という記号は、「exists（存在する）」の頭文字の E を逆さにしたものに由来する

＊　＊　＊

変数 x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「ある x について $p(x)$ である」というのは、

> $p(a_1)$ であるか、あるいは、$p(a_2)$ であるか、あるいは、$\cdots$、あるいは、$p(a_n)$ である

ということに他ならない

言い換えると、

$$\exists x p(x) = p(a_1) \lor p(a_2) \lor \cdots \lor p(a_n)$$

ということになる

＊　＊　＊

「すべての〜」と「ある〜」

「すべての〜」と「ある〜」の 2 つの概念の間には双対性がある

$$\forall x p(x) = p(a_1) \land p(a_2) \land \cdots \land p(a_n)$$
$$\exists x p(x) = p(a_1) \lor p(a_2) \lor \cdots \lor p(a_n)$$

という式を比較してみると、「すべての〜（$\forall$）」と「ある〜（$\exists$）」は、AND（$\land$）と OR（$\lor$）の双対性を反映していることがわかる

＊　＊　＊

$\forall$ と $\exists$ を含んだ式の同値変形

■$\forall$ と $\exists$ の性質

$$\forall x (p(x) \land q(x)) \equiv \forall x p(x) \land \forall x q(x)$$
$$\exists x (p(x) \lor q(x)) \equiv \exists x p(x) \lor \exists x q(x)$$

これらはそれぞれ、

- 「すべての〜」（$\forall x$）と AND（$\land$）
- 「ある〜」（$\exists x$）と OR（$\lor$）

が対応していると思って眺めるとよい

＊　＊　＊

$\forall$ と $\exists$ の否定

「すべての〜」（$\forall$）と「ある〜」（$\exists$）を含む命題の否定は、次の**ド・モルガンの法則**で与えられる

■ド・モルガンの法則（述語論理）

$$\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$$
$$\neg \exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$$

$\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$ より、

> 「すべての〜について…である」の否定は、「ある〜について…でない」

$\neg \exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$ より、

> 「ある〜について…である」の否定は、「すべての〜について…でない」

要するに、否定をとると、「すべての〜」は「ある〜」になり、「ある〜」は「すべての〜」になる

＊　＊　＊

述語論理のド・モルガンの法則は、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっている

x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ というように、有限個の値しかとらない場合、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \land p(a_2) \land \cdots \land p(a_n)$$
$$\exists x p(x) = p(a_1) \lor p(a_2) \lor \cdots \lor p(a_n)$$

であり、

$$\forall x \neg p(x) = \neg p(a_1) \land \neg p(a_2) \land \cdots \land \neg p(a_n)$$
$$\exists x \neg p(x) = \neg p(a_1) \lor \neg p(a_2) \lor \cdots \lor \neg p(a_n)$$

であるので、述語論理のド・モルガンの法則は、それぞれ次のように書き換えられる

$$\neg(p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)) \\ \equiv \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \cdots \vee \neg p(a_n)$$

$$\neg(p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)) \\ \equiv \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(a_n)$$

これらはそれぞれ、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっていることは一目瞭然