多変数微積分の整理帳

tomixy

2025 年 7 月 14 日

目次

第 1 章

多変数関数

複数の変数

ものごとは通常、単一の要因だけではなく、複数の要因が絡みあっている。さまざまな要因が関係する現象を数量的に分析するためには、1 つの変数だけでなく、複数の変数を含む関数を使う。

ref: 地力をつける 微分と積分 p155

このようにいくつもの変数があって、それによって値が定まるような関数を多変数関数という。

二変数関数のグラフ

2 変数関数 $f(x, y)$ が与えられたとき、変数 x, y を自由に動かして点 $(x, y, f(x, y))$ を xyz 空間でプロットして得られる曲面を $z = f(x, y)$ のグラフという。

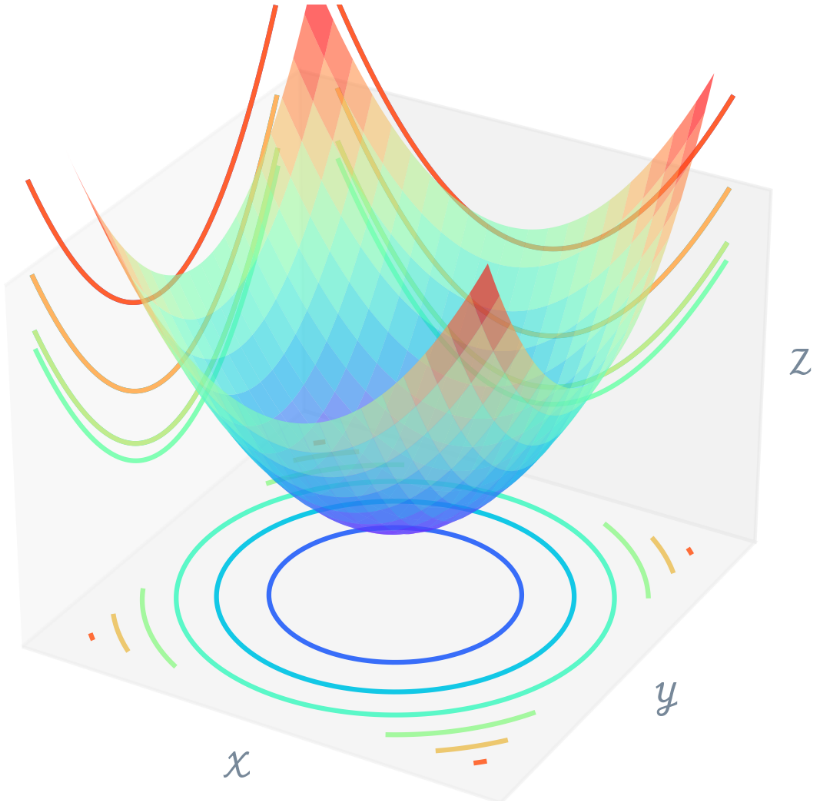
ref: 地力をつける 微分と積分 p163〜166

$f(x, y)$ が地点 (x, y) の標高の場合は、この $z = f(x, y)$ のグラフが表す曲面はこの野山の地表にほかならない。

- 2 変数関数 $f(x, y)$ をグラフで可視化すると、野山の形状になる

- 野山の形状から標高を考えると、2 変数関数 $f(x, y)$ になる

$z = x^2 + y^2$ のグラフ



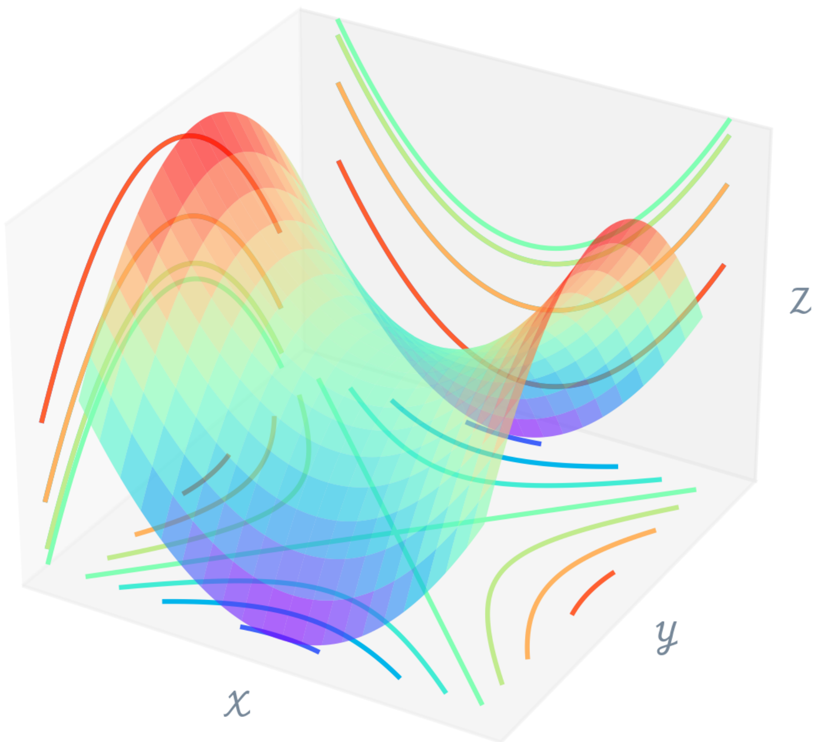
- xy 平面（$z = 0$） 円 $x^2 + y^2 = 0$
- xz 平面（$y = 0$） 下に凸の放物線 $z = x^2$
- yz 平面（$x = 0$） 下に凸の放物線 $z = y^2$

「曲面を見る」堅実な方法は、断面図（切り口）を順に見ることである。

1. $y = 0$ とすると、断面が xz 平面内の放物線 $z = x^2$ になる
2. $y = 1$ とすると、$z = x^2 + 1$ となり、これは $z = x^2$ のグラフを 1 だけ高くした放物線
3. $y = 2$ とすると、$z = x^2 + 4$ となり、放物線がさらに高くなる

こうして、$y =$ **定数** とした断面図をつなぎ合わせることで曲面の姿をつかむことができる。

$z = x^2 - y^2$ のグラフ



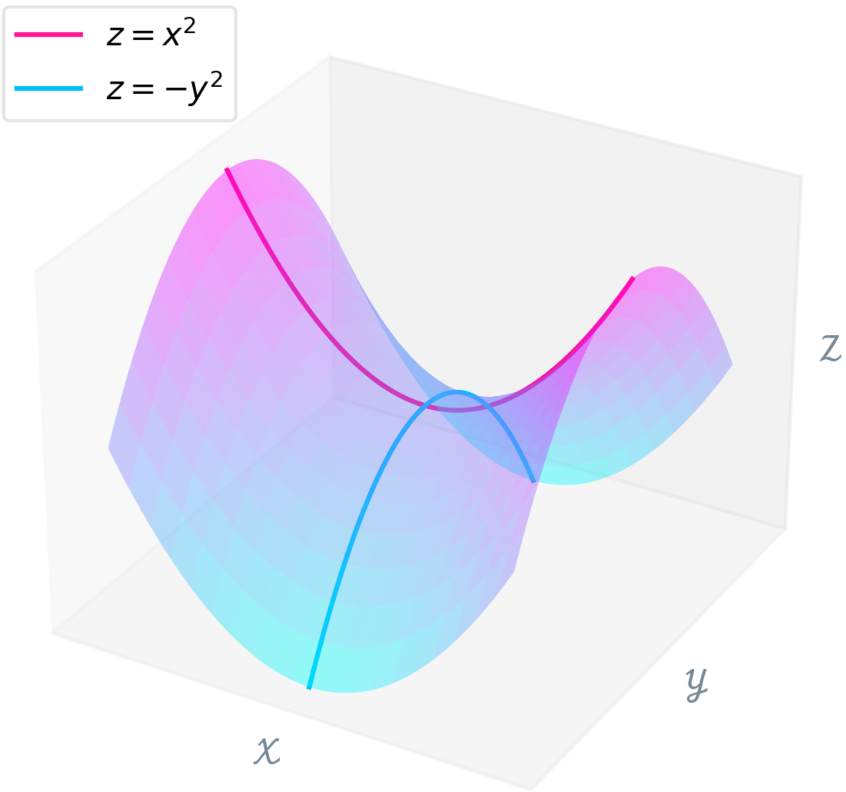
- xy 平面（$z = 0$） 双曲線 $x^2 - y^2 = 0$
- xz 平面（$y = 0$） 下に凸の放物線 $z = x^2$
- yz 平面（$x = 0$） 上に凸の放物線 $z = -y^2$

下に凸の放物線（吊り下げたひも）の各点に、上に凸の放物線（針金）を順に貼り付けていくと、$z = x^2 - y^2$ のグラフが得られる。

曲面と山の形状

曲面 $z = x^2 - y^2$ の局所的な形状は、身近なところにも現れている。

ref: 地力をつける 微分と積分



上の図では、$y = 0$ としたときのグラフ $z = x^2$ を赤線で、$x = 0$ としたときのグラフ $z = -y^2$ を青線で示した。

これらのグラフは、原点 $(0, 0, 0)$ で交わっている。
この交点は、

- 山の峠に見立てて峠点
- $z = x^2$ の凹みを馬の背に見立てて鞍点（乗馬の際に鞍を置く場所）

などと呼ばれる。

山が連なっているような山脈を越えて向こう側に行きたいとすると、できるだけ登りが少ない経路を選ぶだろう。
このような往来によって踏み固められてできた道が山脈越えの道（グラフでは $x = 0$ の場合の放物線 $z = -y^2$）である。

旅人が山脈越えの道を登っていくと、峠はその道沿いではいちばん高い地点になっている。
峠で左右を見ると、山（グラフでは $x =$ 定数 の場合の放物線）が続いて

いる。

いま登ってきた山脈越えの道と垂直に交わっている尾根道（グラフでは $y=0$ の場合の放物線 $z=x^2$）があるかもしれない。

尾根道沿いに歩けば、峠はその前後ではいちばん低い場所になっている。