ベクトルが張る空間

$m \times n$ 型行列 A で写れる範囲を $\mathrm{Im}\, A$ として定義した。

ref: 行列と行列式の基礎 p6〜8、ref: プログラミングのための線形代数 p135

$\boldsymbol{x}$ を n 次元ベクトルとすると、$\mathrm{Im}\, A$ は次のようなものといえる。

$\boldsymbol{x}$ をいろいろ動かしたときの、
$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ が動ける範囲が $\mathrm{Im}\, A$

ここで、A を列ベクトルを並べたもの $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ として書き、$\boldsymbol{x}$ も成分 $x_1, \ldots, x_n$ で書けば、

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

つまり、

数 $x_1, \ldots, x_n$ をいろいろ動かしたときの、
$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ が動ける範囲が $\mathrm{Im}\, A$

であり、この線形結合が動ける範囲を「ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の張る空間」という。

ベクトルが張る空間　k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ を与えたとき、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$$

あるいは

$$\mathrm{span}\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k\}$$

によって表し、これを $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が張る空間という。

ベクトルが張る空間は部分空間

ベクトルが張る空間は部分空間 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は部分空間である

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.2]

部分空間の張る空間は部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ とすると、

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \subset V$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.4]

ベクトルが張る空間の幾何的解釈

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の張る空間 $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ は、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で定まる平面の一般化といえる。（ここで、点は 0 次元平面、直線は 1 次元平面と考える。）

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がすべて $\boldsymbol{o}$ なら、$\boldsymbol{o}$ ただ一点が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がすべて一直線上にあれば、その直線が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ がすべて平面上にあれば、その平面が $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$

たとえば $\mathbb{R}^3$ において座標を (x, y, z) とするとき、xy 平面は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である。

座標部分空間　$\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合 I に対して、$x_i\ (i \in I)$ 以外の座標がすべて 0 である部分集合は $\mathbb{R}^n$ の部分集合である。

このようなものを**座標部分空間**といい、$\mathbb{R}^I$ と書く。

$$\mathbb{R}^I = \langle \boldsymbol{e}_i \mid i \in I \rangle$$

と表すこともできる。

ベクトルが張る空間と有限従属性

有限従属性定理の抽象版　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ とする $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ に含まれる k 個よりも多い個数のベクトルの集合は線形従属である

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p41 （問 1.14）]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	3