行列の積

線形写像の合成　$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 g と、$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^l$ への線形写像 f が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g \colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^l$ への線形写像である

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p56 （問 2.2）]

f と g の表現行列をそれぞれ $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij})$ とする

A は $l \times m$ 型、B は $m \times n$ 型の行列である

このとき、$f \circ g$ は $l \times n$ 型行列で表現される

それを C と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

B を列ベクトルに分解して $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ と書くとき、

$$(f \circ g)(\boldsymbol{e}_j) = f(g(\boldsymbol{e}_j)) = f(\boldsymbol{b}_j) = A\boldsymbol{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$$

となる

C の (i, j) 成分は $A\boldsymbol{b}_j$ の第 i 成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、C の (i,j) 成分を計算するときは、A の第 i 行、B の第 j 列だけを見ればよい

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{ccccc} & & j\text{ 列} & & \end{array} \\
 & & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & b_{kj} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} \\ i\text{ 行} \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}
\end{array}$$

このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、A と B の**積**と呼ぶ

⚓ **単位行列との積**　A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$E_mA = A$$
$$AE_n = A$$

⚓ **零行列との積**　A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$O_mA = AO_n = O_{m,n}$$

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は**可換**であるという

一般には、2 つの行列は可換であるとは限らない

つまり、AB と BA は一般には異なる

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p58 （例 2.2.3, 2.2.4）]

行列の和とスカラー倍

A, B がともに $m \times n$ 型行列であるとき、それぞれの (i, j) 成分を足すことで行列の和 $A + B$ を定める

分配法則　積が定義できるとき、

$$\begin{aligned} A(B + C) &= AB + AC \\ (B + C)A &= BA + CA \end{aligned}$$

行列の積とスカラー倍の性質　行列 A, B の積 AB が定義できるとき、つまり A の列の個数と B の行の個数が同じであるとき、$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

が成り立つ

線形写像の和　$f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とし、

$$h(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

により写像 $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定めるとき、h も線形写像である

また、f, g の表現行列を A, B とするとき、h の表現行列は $A+B$ である

なお、$h = f + g$ と書き、f, g の**和**と呼ぶ

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p59 （問 2.5）]

スカラー行列　c をスカラーとするとき、cE の形の行列をスカラー行列という

$$cE = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

行列 A にスカラー行列をかけることは、

$$(cE)A = A(cE) = cA$$

のように、スカラー c をかけるのと同じである

行列の積の結合法則

積の結合法則　積 AB, BC がともに定義できるとき、

$$(AB)C = A(BC)$$

写像による証明

A, B, C がそれぞれ $q \times m$, $m \times n$, $n \times p$ 型行列だとする

線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、$f,\ g,\ h$ の表現行列をそれぞれ $A,\ B,\ C$ とする

一般的な写像の合成の性質として、

$$(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$$

が成り立つから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう ■

積の計算規則による証明

AB の (i,l) 成分は、

$$(AB)_{il} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^{n}(AB)_{il}c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj}\end{aligned}$$

$i,\ j$ はいま固定されているので、和には関係がない

動いているのは $k,\ l$ だけ

ここで、次の書き換えができる

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}\right)c_{lj} &= \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}$ の右にある式は l に関する和をとる前のものなので、l は止まっていると考えてよく、単純な分配法則を使っている

また、括弧がなくても、k に関する和を先にとって、その後で l に関する和をとっていると読むことができる

このとき、和の順番は交換してもよいので、

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(BC)_{kj}\end{aligned}$$

先ほどと同様に、$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}$ の右では k は止まっていると考えている

そして、この結果は、$A(BC)$ の (i,j) である ■

結合法則が成り立つことが示されたので、$(AB)C$ または $A(BC)$ を表すとき、括弧を書かずに単に ABC と書いても問題ない

行列の個数が増えても同様である

また、A が正方行列の場合は、

$$\begin{aligned}A^2 &= AA \\ A^3 &= AAA\end{aligned}$$

などのように書く

行列の区分け

行列を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

のようなブロック型に区分けして計算することがよくある

ref: 行列と行列式の基礎 p64

A が $m \times n$ 型のとき、$m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2$ として、A_{ij} は $m_i \times n_j$ 型である

また、B が $n \times l$ 型で、$n = n_1 + n_2$, $l = l_1 + l_2$ と区分けして

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように A_{ij} などが行列の成分であるかのようにして（ただし積の順序は変えずに）積が計算できる

ここで、A の列の区分けと B の行の区分けの仕方が同じであることが必要である

3 つ以上のブロックに分ける場合も同様である

. . . .

Zebra Notes

Type	**Number**
todo	3