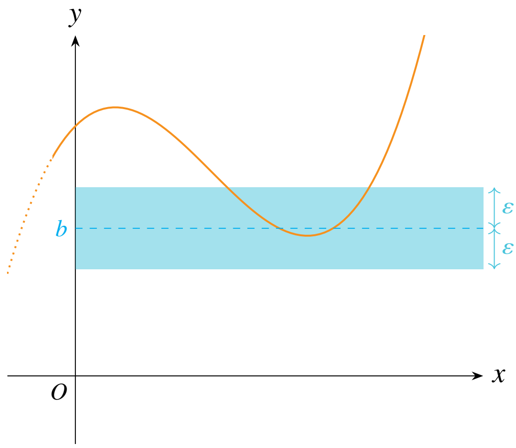
0.1 関数の極限

0.1.1 ε - δ 論法による関数の極限

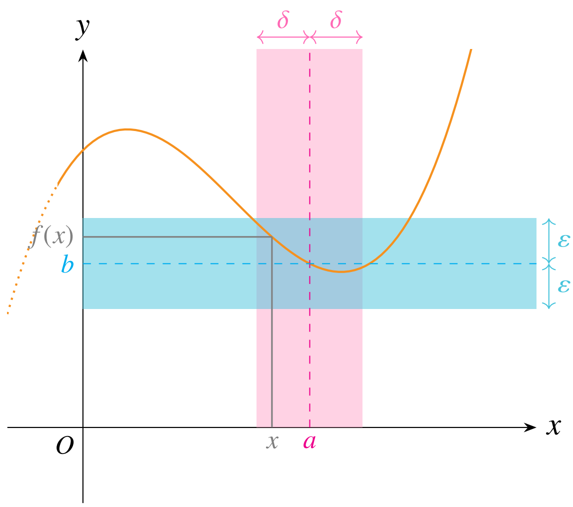
ε がどんなに小さい正の数であっても、x と a の誤差を δ 以内に収めることで $f(x)$ と b の誤差が ε 以内に収まるとき、関数 $f(x)$ は点 a で b に収束するという。

* * *

まず、$y = b$ の周りに、両側それぞれ ε だけ広げた区間を考える。（この区間を青い帯と呼ぶことにする。）



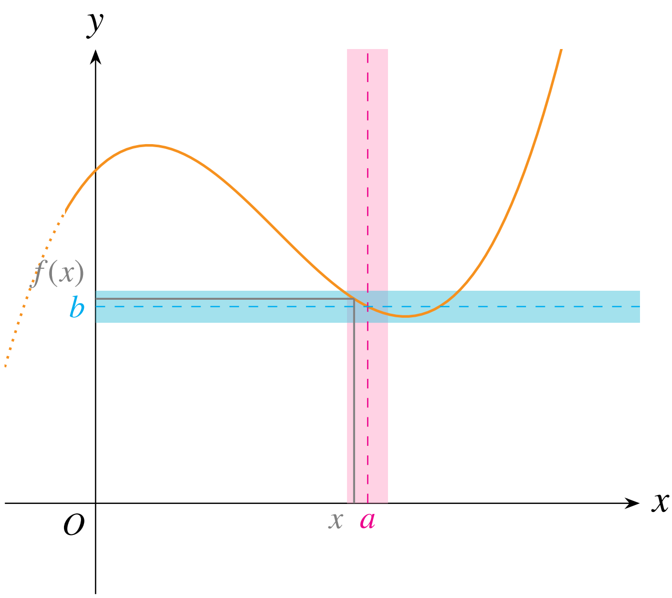
$x = a$ の周りには、両側それぞれ δ だけ広げた区間を考える。（この区間をピンクの帯と呼ぶことにする。）
このとき、「この x であれば、$f(x)$ が青い帯に収まる」という x を探して、その x をピンクの帯で包むように δ を設定する。



ε は正の数ならなんでもよいとすれば、ε を小さな数に設定し、いくらでも青い帯を狭めることができる。

しかしこのとき、x をピンクの帯に収まるようにしなければならない。

ピンクの帯の中心は a なので、x をピンクの帯に収めようとすると、x は a に近づいていくことになる。



青い帯の幅 ε がどんなに小さくても、ピンクの帯の幅 δ を小さくしていけば、x と $f(x)$ をそれぞれ帯の中に収めることができる。

このように、x を a に近い範囲に閉じ込めれば、$f(x)$ も b に近い範囲に閉じ込められるという状況を、点 a での関数の収束と定義する。

青い帯の幅 ε がどんなに小さくても、「この x であれば、$f(x)$ が青い帯に収まる」という x がピンクの帯からはみ出ないように δ を小さくしていけるなら、自動的に x も $f(x)$ もそれぞれ帯の中に収まる。

つまり、δ に課された制約が肝心で、「この x であれば、$f(x)$ が青い帯に収まる」という x を包めるような δ の存在が、収束を保証することになる。

関数の収束と極限値（$x \to a$ の場合）

関数 $f(x)$ と実数 a, b について、次の条件を考える。

任意の正の数 ε に対して

$$|x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - b| < \varepsilon$$

が成り立つような正の数 δ が存在する

この条件が成り立つとき、関数 $f(x)$ は点 a で b に 収束 するといい、次のように表す。

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{または} \quad f(x) \to b \quad (x \to a)$$

このとき、b を数列 $f(x)$ の 極限値 という。

[Todo 1: 定義 1.1]

0.1.2 関数の極限と数列の極限の関係

[Todo 2: 定理 1.7]

0.1.3 関数の極限の性質

[Todo 3: 定理 1.8]

[Todo 4: 定理 1.9]

0.1.4 はさみうち法

[Todo 5: 定理 1.10]

0.1.5 合成関数の極限

[Todo 6: 定理 1.11]

0.1.6 右極限と左極限

[Todo 7: 定義 1.15]

[Todo 8: 定義 1.16]

[Todo 9: 定理 1.19]

Zebra Notes

Type	Number
todo	9