

# 第 1 章

## 線形写像と行列の演算



### 行列の導入

長方形に並んだ数の集まりを

ref: 行列と行列式の基礎 1.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

などと書き、**行列**と呼ぶ

横の数字の並びを**行**、縦の数字の並びを**列**と呼ぶ

$A$  は  $m$  個の行と  $n$  個の列をもつ行列である

第  $i$  行、第  $j$  列にある数字を  $a_{ij}$  と表し、これを  $(i, j)$  **成分**と呼ぶ

行が  $m$  個、列が  $n$  個の行列は、 **$m$  行  $n$  列の行列**、あるいは  **$m \times n$  型の行列**であるという

$n \times n$  型の場合、行列は正方形なので  $n$  次**正方行列**と呼ぶ



$A$  の成分から第  $j$  列だけを取り出して  $\mathbb{R}^m$  のベクトルとしたものが

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$


であり、これを  $A$  の  $j$  番目の列ベクトルという

$A$  は、これらを横に並べたものという意味で

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

と書くことができる



 行列とベクトルの積  $m \times n$  型の行列  $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  と  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  との積を

$$A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_n\mathbf{a}_n$$

により定める

ここで、 $v_i$  は  $\mathbf{v}$  の第  $i$  成分である


$A\mathbf{v}$  を考えるとき、ほとんどの場合は、 $A$  が 1 つ与えられていて  $\mathbf{v}$  がいろいろ動くという意識が強い


それは、行列  $A$  のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る

$$\text{入力ベクトル } \mathbf{v} \rightarrow \text{出力ベクトル } A\mathbf{v}$$

という装置、すなわち写像だとみなすことである



 行列のスカラー倍  $A$  を行列、 $c$  をスカラーとすると、 $A$  のすべての成分を  $c$  倍して得られる行列を  $cA$  とする

 行列とベクトルの積の性質  $A, B$  を  $m \times n$  型行列、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 、 $c \in \mathbb{R}$  とするとき、次が成り立つ

i.  $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

ii.  $A(c\mathbf{v}) = cA\mathbf{v}$


 証明



[ Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p24 (命題 1.4.3) ]



## 線形写像の定義

 線形写像と線形性 写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  が線形写像であるとは、次の 2 つの条件が成立することである

i.  $f(c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v})$  がすべての  $c \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して成り立つ

ii.  $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$  がすべての  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して成り立つ

これらの性質を写像  $f$  の線形性という

また、 $m = n$  のとき、線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を  $\mathbb{R}^n$  の線形変換と呼ぶ

ref: 行列と行列式の  
基礎 2

線形変換は空間  $\mathbb{R}^n$  からそれ自身への写像なので、 $\mathbb{R}^n$  内において「ベクトルが変化している」(あるいは  $f$  が空間  $\mathbb{R}^n$  に作用している) ニュアンスとみることができる




$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を線形写像とすると、i より、

$$f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

なので、

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

 **零ベクトルの像** 零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される



$m = n = 1$  のときは、線形写像  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  は、通常の意味の関数である


このとき、i の性質から、

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1)$$

が成り立つので、 $a = f(1) \in \mathbb{R}$  とおくと、

$$f(x) = ax$$

と書ける

 **比例関数** 線形写像  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  は、 $a$  を**比例定数**とする**比例関数**である



## 線形写像の表現行列

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を線形写像とすると、各基本ベクトル  $\mathbf{e}_j$  の  $f$  による像を

$$f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

と書くとする

これらを横に並べることによって、 $m$  行  $n$  列の行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

この行列  $A$  を  $f$  の表現行列という

特に、 $\mathbb{R}^n$  の線形変換の表現行列は  $n$  次正方行列である



$\mathbb{R}^n$  の一般のベクトル  $\mathbf{v}$  を、基本ベクトルの線型結合として

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j$$

と書く

このとき、 $f$  の線形性より、

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n v_j f(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{a}_j$$

となる

このベクトルの第  $i$  成分は

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n$$

と書ける

これは  $A\mathbf{v}$  の第  $i$  成分である


したがって、この記法を踏まえて、次のような表記ができる

### 線形写像とその表現行列の関係

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

比例関数が比例定数  $a$  だけで決まるのと同じように、線形写像は表現行列  $A$  が与えられれば決まる



 零写像と零行列  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を、すべての  $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して  $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$  と定めたものは明らかに線形写像であり、これを **零写像** と呼ぶ


その表現行列はすべての成分が  $0$  である行列である

この行列を **零行列** と呼び、 $O$  で表す

$m \times n$  型であることを明示するために  $O_{m,n}$  と書くこともある

また、 $n$  次正方行列の場合は、 $O_n$  と書く



 恒等写像と単位行列  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を、すべての  $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して  $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$  と定めたものは明らかに線形写像である  
これを **恒等写像** と呼び、 $f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  と書く

恒等写像の表現行列は、 $f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) より

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを **単位行列** と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、 $n$  次であることを明示したいときは  $E_n$  と書く



線形写像  $f$  から行列  $A$  を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることができる


 行列から線形写像を作る  $m \times n$  型行列  $A$  に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

によって写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を定めれば、 $f$  は線形写像である

 証明

行列とベクトルの積の性質より、 $f$  は線形写像である

また、 $f$  の定義から明らかに  $A$  は  $f$  の表現行列である 




## $\mathbb{R}^2$ の線形変換の例



[ Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p51 - p56]



## 行列の積

 線形写像の合成  $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^m$  への線形写像  $g$  と、 $\mathbb{R}^m$  から  $\mathbb{R}^l$  への線形写像  $f$  が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g: \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、 $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^l$  への線形写像である

 証明



[ Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p56 (問 2.2) ]

$f$  と  $g$  の表現行列をそれぞれ  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  とする

$A$  は  $l \times m$  型、 $B$  は  $m \times n$  型の行列である

このとき、 $f \circ g$  は  $l \times n$  型行列で表現される

それを  $C$  と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

$B$  を列ベクトルに分解して  $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  と書くとき、

$$(f \circ g)(\mathbf{e}_j) = f(g(\mathbf{e}_j)) = f(\mathbf{b}_j) = A\mathbf{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n)$$

となる

$C$  の  $(i, j)$  成分は  $A\mathbf{b}_j$  の第  $i$  成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる



つまり、 $C$  の  $(i, j)$  成分を計算するときは、 $A$  の第  $i$  行、 $B$  の第  $j$  列だけを見ればよい


$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

このようにして得られた  $l \times n$  型行列  $C$  を  $AB$  と書き、 $A$  と  $B$  の積と呼ぶ

 単位行列との積  $A$  を  $m \times n$  型とすると、次が成り立つ

$$E_m A = A$$

$$A E_n = A$$

 零行列との積  $A$  を  $m \times n$  型とすると、次が成り立つ

$$O_m A = A O_n = O_{m,n}$$

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は可換であるという

一般には、2 つの行列は可換であるとは限らない


つまり、 $AB$  と  $BA$  は一般には異なる

[ Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p58 (例 2.2.3, 2.2.4) ]




## 行列の和とスカラー倍

$A, B$  がともに  $m \times n$  型行列であるとき、それぞれの  $(i, j)$  成分を足すことで行列の和  $A + B$  を定める

 分配法則 積が定義できるとき、

$$\begin{aligned} A(B + C) &= AB + AC \\ (B + C)A &= BA + CA \end{aligned}$$

 行列の積とスカラー倍の性質 行列  $A, B$  の積  $AB$  が定義できるとき、つまり  $A$  の列の個数と  $B$  の行の個数が同じであるとき、 $c \in \mathbb{R}$  に対して

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

が成り立つ



 線形写像の和  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を線形写像とし、

$$h(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$


により写像  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を定めるとき、 $h$  も線形写像である

また、 $f, g$  の表現行列を  $A, B$  とするとき、 $h$  の表現行列は  $A + B$  である

なお、 $h = f + g$  と書き、 $f, g$  の和と呼ぶ



[ Todo 5: ref: 行列と行列式の基礎 p59 (問 2.5) ]

 スカラー行列  $c$  をスカラーとすると、 $cE$  の形の行列を **スカラー行列** という

$$cE = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

行列  $A$  にスカラー行列をかけることは、

$$(cE)A = A(cE) = cA$$

のように、スカラー  $c$  をかけるのと同じである

## 行列の積の結合法則

 積の結合法則 積  $AB, BC$  がともに定義できるとき、

$$(AB)C = A(BC)$$

$A, B, C$  がそれぞれ  $q \times m, m \times n, n \times p$  型行列だとする  
線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、 $f, g, h$  の表現行列をそれぞれ  $A, B, C$  とする  
一般的な写像の合成の性質として、

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

が成り立つから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう ■

### 積の計算規則による証明

$AB$  の  $(i, l)$  成分は、

$$(AB)_{il} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^n (AB)_{il} c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \end{aligned}$$

$i, j$  はいま固定されているので、和には関係がない

動いているのは  $k, l$  だけ

ここで、次の書き換えができる

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} &= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} \end{aligned}$$

$\sum_{l=1}^n$  の右にある式は  $l$  に関する和をとる前のものなので、 $l$  は止まっていると考えてよく、単純な分配法則を使っている

また、括弧がなくても、 $k$  に関する和を先にとって、その後で  $l$  に関する和をとっていると読むことができる

このとき、和の順番は交換してもよいので、

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ik} \left( \sum_{l=1}^n b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ik} (BC)_{kj}\end{aligned}$$

先ほどと同様に、 $\sum_{k=1}^m$  の右では  $k$  は止まっていると考えている  
 そして、この結果は、 $A(BC)$  の  $(i, j)$  である ■

結合法則が成り立つことが示されたので、 $(AB)C$  または  $A(BC)$  を表す  
 とき、括弧を書かずに単に  $ABC$  と書いても問題ない  
 行列の個数が増えても同様である

また、 $A$  が正方行列の場合は、

$$\begin{aligned}A^2 &= AA \\ A^3 &= AAA\end{aligned}$$

などのように書く



## 行列の区分け

行列を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ref: 行列と行列式の基礎 p64

のようなブロック型に区分けして計算することがよくある

$A$  が  $m \times n$  型るとき、 $m = m_1 + m_2$ ,  $n = n_1 + n_2$  として、 $A_{ij}$   
 は  $m_i \times n_j$  型である

また、 $B$  が  $n \times l$  型で、 $n = n_1 + n_2$ ,  $l = l_1 + l_2$  と区分けして

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように  $A_{ij}$  などが行列の成分であるかのようにして（ただし積の順序は変えずに）積が計算できる

ここで、 $A$  の列の区分けと  $B$  の行の区分けの仕方が同じであることが必要である

3 つ以上のブロックに分ける場合も同様である



## 行列と複素数

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき、

$$aE + bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

という形の行列を **複素数** と呼ぶことにより、複素数の定義ができる


この定義では、通常は  $a + bi$  と書かれるものを行列として実現している




[ Todo 6: ref: 図解でわかる線型代数 p43~49]




## 対角行列

 **対角成分** 正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、 $a_{ii}$  を**対角成分**と呼ぶ

 **対角行列** 対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列を**対角行列**と呼ぶ

$a_{ii} = c_i \quad (1 \leq i \leq n)$  である対角行列を次のように表す

$$\text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

 **対角行列と列ベクトルのスカラー倍** 右から対角行列をかけると、各列ベクトルがスカラー倍になる

すなわち、 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  とすると、

$$A \cdot \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_1 \mathbf{a}_1, c_2 \mathbf{a}_2, \dots, c_n \mathbf{a}_n)$$

が成り立つ

---


 証明



[ Todo 7: ref: 行列と行列式の基礎 p63 (問 2.8) ]




## トレース

 **トレース** 正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、対角成分の和

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

を  $A$  の **トレース** と呼び、 $\text{tr}(A)$  と表す

ref: 行列と行列式の基礎 p64

 **トレースの性質**

- i.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- ii.  $\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A)$
- iii.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

 **証明**



[ Todo 8: ref: 行列と行列式の基礎 p64 問 2.9]

## Zebra Notes

Type	Number
todo	8