直交補空間

内積を導入すると、ベクトルの長さや直交性が利用できるようになる

直交性は、ベクトルだけでなく、部分空間に対しても拡張できる

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p136〜137

計量空間の部分空間に直交するベクトルの集合を、直交補空間と呼ぶ

直交補空間　計量空間 V の部分空間 W に対し、W の直交補空間 $W^\perp$ を次のように定義する

$$W^\perp := \{\boldsymbol{v} \in V \mid \forall \boldsymbol{w} \in W, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0\}$$

直交補空間もまた、計量空間の部分空間になっている

直交補空間の部分空間性　計量空間 V の部分空間 W の直交補空間 $W^\perp$ は、計量空間 V の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in W^\perp$ とすると、任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して、

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = 0 + 0 = 0$$

となるので、$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in W^\perp$ である　■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in W^\perp$ とすると、任意のスカラー $c \in K$ と任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して、

$$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c \cdot 0 = 0$$

となるので、$c\boldsymbol{a} \in W^{\perp}$ である ■

直交補空間による直和分解

「直交補空間」という名前は、「補集合」と同様に、何らかの集合を補う集合であることを想起させる

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p137〜139

実際、直交補空間 $W^{\perp}$ は、もとの集合 W を補い、V 全体を構成するような性質を持つ

直交補空間を用いた計量空間の分解　計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$V = W + W^{\perp}$$

証明

$W = \{\mathbf{0}\}$ の場合は、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して $\mathbf{0}$ との内積は 0 になることから、$W^{\perp}$ は V 全体となる

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in V \mid (\boldsymbol{v}, \mathbf{0}) = 0\} = V$$

よって、

$$V = W + W^{\perp} = \{\mathbf{0}\} + V = V$$

が成り立つ

以降、$W \neq \{\mathbf{0}\}$ とする

W の基底 $\{\boldsymbol{w}'_1, \ldots, \boldsymbol{w}'_k\}$ を 1 つとり、これに対してグラム・シュミットの直交化法を適用して、正規直交基底 $\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k\}$ を得る

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ をとり、次のようにおく

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$$

$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}_i$ の内積を計算すると、

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_i) &= \left(\boldsymbol{v} - \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j)\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_i \right) \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j)(\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_i) \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j)\delta_{ij} \\
&= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

このように、任意の $i = 1, \ldots, k$ に対して、$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}_i$ の内積が 0 になることから、$\boldsymbol{u} \in W^\perp$ である

一方、$\boldsymbol{u}$ の定義式を $\boldsymbol{v}$ を表す式として整理すると、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$$

となるが、$\boldsymbol{w}_i$ が W の正規直交基底であることから、

$$\sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i$$

の部分は、W の任意の元を表す

よって、V の任意の元 $\boldsymbol{v}$ は、W の元と $W^\perp$ の元 $\boldsymbol{u}$ の和として表されるので、

$$V = W + W^\perp$$

が成り立つ ■

さらに、次の定理が成り立つことで、単なる空間の和ではなく、直和として

分解できることがわかる

直交補空間との交わり　計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$$

証明

$\boldsymbol{a} \in W \cap W^{\perp}$ とすると、$\boldsymbol{a} \in W$ かつ $\boldsymbol{a} \in W^{\perp}$ である

$\boldsymbol{a} \in W^{\perp}$ より、$\boldsymbol{a} \in W$ に対しても内積が 0 になるので、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0$$

ここで、内積の性質より、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \|\boldsymbol{a}\|^2 \geq 0$$

であり、等号が成立するのは、$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ のときのみである

よって、$\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ である

零ベクトルは任意のベクトルと直交し（内積が 0 になり）、また任意の部分空間に属するので、明らかに $\mathbf{0} \in W \cap W^{\perp}$ である

$\boldsymbol{a}$ は $W \cap W^{\perp}$ の任意の元であり、$\boldsymbol{a} = \mathbf{0} \in W \cap W^{\perp}$ であることがわかったので、

$$W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$$

がいえる　■

こうして、次の両方が成り立つことから、

i. $V = W + W^{\perp}$
ii. $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$

計量空間 V は部分空間 W とその直交補空間 $W^{\perp}$ の直和として分解で

きる

直和の次元公式より、次の定理が従う

直交補空間と次元　計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$$