第 1 章

階数と解の存在・一意性

行列の階数

行階段行列に変形することで、重要な量が読み取れる

ref: 行列と行列式の基礎 p28〜29

行列の階数　行列 A を行階段行列に変形したとき、零行でない行の個数を A の**階数**（rank）と呼び、$\mathrm{rank}(A)$ と書く

変形の結果として得られる行階段行列は 1 通りとは限らないし、変形の途中の掃き出しの手順も 1 通りとは限らないが、

> 階数は A のみによって定まる値である

ことが後に証明できる

A が $m \times n$ 型ならば、行は m 個なので、$\mathrm{rank}(A)$ は 0 以上 m 以下の整数である

行階段行列において、零行でない行の個数は主成分の個数と一致するので、階数は行階段行列に変形したときの主成分の個数でもある

行基本行列の主成分は各列に高々 1 つなので、主成分の個数は列の個数 n を超えない

したがって、次の重要な評価が成り立つ

$$0 \leq \mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$$

連立一次方程式を解く

方程式を解くということは、次のような問題に答えることである

ref: 行列と行列式の基礎 p25

A. 解は存在するか？
B. 解が存在する場合、それはただ 1 つの解か？
C. 解が複数存在する場合は、どれくらい多く存在するのか？
D. 解全体の集合をいかにしてわかりやすく表示できるか？

拡大係数行列

A を m 行 n 列の行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とし、線形方程式

ref: 行列と行列式の基礎 p31〜32

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を考える

これは、n 個の文字に関する m 本の連立方程式である

$\boldsymbol{x}$ は未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を成分とするベクトルである

このとき、A は方程式の係数行列と呼ばれる

A の右端に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を追加して得られる m 行 $(n+1)$ 列の行列

$$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$$

を考えて、これを拡大係数行列という

斉次形

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合、つまり

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の形の線形連立方程式は斉次形であるという

斉次形の場合は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が明らかに解になっていて、これを自明解という

したがって、自明解以外に解が存在するかどうかが基本的な問題である

解の存在条件

まず、一般の $\boldsymbol{b}$ の場合の解の存在（問題 A）について考える

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p110〜111

拡大係数行列 $\tilde{A}$ は A の右端に 1 列追加して得られるので、掃き出しの過程を考えると、$\mathrm{rank}(\tilde{A})$ は $\mathrm{rank}(A)$ と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかであることがわかる

また、方程式の拡大係数行列の行に関する基本変形は、元の連立方程式と同値な式への変形であるため、

> 基本変形によって得られる方程式の解は、元の方程式の解と同じ

となる

そこで、$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ の既約行階段形を $(P \mid \boldsymbol{q})$ とし、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の代わりに

$$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$$

を解くことを考える

まず、

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ O \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$$

とおく

ここで、P_1 は $r \times n$ 行列（$r = \mathrm{rank}(P)$）とし、$\boldsymbol{q}_1$ は r 次元列ベクトル、$\boldsymbol{q}_2$ は $m-r$ 次元列ベクトルとする

すると、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ は

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ O \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} P_1\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$$

と表せる

このとき、この方程式が解を持つには、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ でなければならない

たとえば、

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

だとしたら、

$$\begin{pmatrix} P_1\boldsymbol{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり、$0 = -1$ という矛盾が生じる時点で、この方程式は不能になる

このような $\boldsymbol{q}_2 \neq \boldsymbol{0}$ の場合、拡大係数行列の階数は、係数行列の階数 $+1$ となっている

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(P \mid \boldsymbol{q}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

一方、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ であれば、方程式は

$$P_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_1$$

となる

ここで、P_1 は $r = \mathrm{rank}(P)$ 個の行をもち、行数と階数が一致しているということは、すべての行に主成分が現れていることを意味する

主成分は最も左側にある 0 でない成分なので、係数拡大行列にするために右に 1 列追加したとしても、主成分の数は増えることがない
すなわち、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ の場合は係数行列と拡大係数行列の階数が一致する

以上の考察から、連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する条件は、

> 係数行列と係数拡大行列の階数が等しい

ことだとわかる

そして、その階数 r は、係数行列の行数とも一致していたため、次の 2 つの定理が得られる

拡大係数行列と解の存在条件　A を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする

$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ とおくとき、

$$\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A) \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p31 （定理 1.5.1）]

解の存在条件の系　A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$^{\forall}\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する} \iff \mathrm{rank}(A) = m$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p32 （定理 1.5.2, 1.5.3）]

一般解のパラメータ表示

右端の列に主成分がない場合は、一般には無数個の解が存在する

解の集合が直線を成していたり、もっと高い次元の図形になっていることがある

ref: 行列と行列式の基礎 p33〜36

解が 1 つに定まらない場合は、解の全体像を知ることが方程式を「解く」ことになる

係数行列 A の n 個の列が、n 個の変数に対応していることを思い出そう

主変数と自由変数　行列 A を行基本変形により行階段形にしたとき、主成分がある列に対応する変数を**主変数**と呼び、それ以外の変数を**自由変数**と呼ぶ

たとえば、次のような既約行階段形に変形した拡大係数行列を考える

$$
\tilde{A}_{\circ} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & & 3 & 4 & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\longleftrightarrow \\
5
\end{array}
$$

変数を使って方程式の形に直すと、

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & - & x_5 & = & -3 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & x_3 & + & 0x_4 & + & 2x_5 & = & 1 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \end{cases}$$

主成分がある列は $1, 3, 4$ 列なので、主変数は x_1, x_3, x_4 である

それ以外の x_2, x_5 は自由変数となる

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - \quad x_5 = -3 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad + 2x_5 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 + \quad x_5 = 2 \end{cases}$$

において、自由変数を含む項を左辺に移行すれば、

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -3 - 2x_2 + x_5 \\ \qquad x_3 \qquad = 1 - 2x_5 \\ \qquad\qquad x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

となる

自由変数の値を自由に選んで、主変数の値をこの等式によって定めれば、方程式の解になる

そこで、

$$x_2 = t_1, \quad x_5 = t_2$$

とおけば、

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = -3 - 2t_1 + t_2 \\ \qquad x_3 \qquad = 1 - 2t_2 \\ \qquad\qquad x_4 = 2 - t_2 \end{cases}$$

すなわち、

$$
\begin{cases}
x_1 & = -3 - 2t_1 + t_2 \\
\quad x_2 & = t_1 \\
\qquad x_3 & = 1 - 2t_2 \\
\qquad\quad x_4 & = 2 - t_2 \\
\qquad\qquad x_5 & = t_2
\end{cases}
$$

と書ける

これをベクトル形に直すことで、一般的な解のパラメータ表示を得られる

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

[Todo 3: ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p66〜69]

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p300〜301

一般化するために、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ を次のように表して考える

$$
(P \mid \boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & q_1 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{p}_r & q_r \\ \boldsymbol{0} & q_{r+1} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & q_m \end{pmatrix}
$$

ここで、$\boldsymbol{p}_1 \neq \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{p}_r \neq \boldsymbol{0}$ であるとする

このとき、解を持つための条件は、

$$
q_{r+1} = q_{r+2} = \cdots = q_m = 0
$$

であった

さて、P において、主成分を含む列を $j_1, j_2, \ldots, j_r \quad (r = \mathrm{rank}(P))$ とする

$$
(P \mid \boldsymbol{q}) = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & q_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & q_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & q_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\xleftrightarrow{\qquad\qquad n \qquad\qquad}
\end{array}
$$

すると、主変数 x_{j_i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$ は、次のように表される

$$x_{j_i} + \sum_k \star x_k = q_i \quad (k > j_i \text{かつ } k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\})$$

$$\therefore x_{j_i} = q_i - \sum_k \star x_k$$

ここで、x_k は j_i よりも右にある $\star$ に対応する変数である

既約行階段行列では、j_i 列の主成分以外の要素はすべて 0 であるため、$\star$ に対応する自由変数のみが残る（これが $k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ とした意味である）

つまり、$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外の自由変数 x_k に勝手な数を与えるごとに、主変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ は定まる

このような自由変数は $n - r$ 個あるので、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ の解は、$n - r$ 個のパラメータを用いて表せる

まとめると、解が存在する場合には、r を行列 A の階数として

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + \sum_{i=1}^{n-r} t_i \boldsymbol{u}_i$$

という形の一般解の表示（問題 D の答え）が得られる

ここで、パラメータ t_i をかけた列ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を連立方程式の基本解と呼ぶ

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p103

また、パラメータをかけていない列ベクトル $\boldsymbol{q}$ は、連立方程式の定数項から決まる解であり、これを特殊解と呼ぶ

解の自由度

連立一次方程式の一般解は、基本解の線形結合と特殊解の和で表された
そして、基本解の線形結合は、基本解の個数の分だけパラメータを用いて表された

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p113〜114

パラメータの個数は、自由変数の個数でもあり、基本解の個数でもある

このとき、パラメータの個数は、解を表す自由度と考えられる
そこで、解を表すパラメータの個数を解の自由度と呼ぶ

$$\begin{aligned} \text{解の自由度} &= (\text{変数の個数}) - \mathrm{rank}(A) \\ &= n - r \end{aligned}$$

解の自由度は、解全体のなす集合の大きさ、すなわち何次元の空間なのかを表している（問題 C の答え）

解の一意性

ここまでの議論で、問題 B が解決している

ref: 行列と行列式の基礎 p37〜38

⚓ 解の一意性　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するとき、

$$\text{解が一意的である} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

$\Longleftarrow$

$\mathrm{rank}(A) = n$ であれば、解の自由度は $n - n = 0$、すなわち自由変数が存在しないことになる

自由変数がなければ「各変数＝定数」という式に変形できることになるので、解は明らかに一意的である ■

$\Longrightarrow$

対偶 $\mathrm{rank}(A) \neq n \Longrightarrow$ 解が一意的 を示す

$\mathrm{rank}(A) \leq n$ であるので、$\mathrm{rank}(A) \neq n$ は $\mathrm{rank}(A) < n$ を意味する

$\mathrm{rank}(A) < n$ であれば、自由変数が 1 つ以上存在するので解は無数にある

よって、解は一意的ではない ■

斉次形の場合の非自明解の存在問題も解決している

斉次形の非自明解の存在条件　斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において、

$$\text{自明解しか存在しない} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性 $\mathrm{rank}(A) = n$ は、それ以外の解がないということを意味している ■

解のパラメータ表示の一意性

自由変数を $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}$ とするとき、一般解の表示

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

の j_k 番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる

このことから、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の $n-r$ 個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる

この事実は、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^m$ が線形独立であると表現される

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	3