# 第 1 章

# 行列式

## 連立方程式の解の判別式としての行列式

## 置換と互換

たとえば、$(1, 2, 3, 4)$ を並び替えた列 $(i, j, k, l)$ があるとして、

ref: 行列と行列式の基礎 p155〜158

$$
\begin{aligned}
1 &\longmapsto i \\
2 &\longmapsto j \\
3 &\longmapsto k \\
4 &\longmapsto l
\end{aligned}
$$

というように、番号を並び替える操作そのものを写像とみなし、置換と呼ぶ

**置換**　集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への写像 $\sigma$ が全単射であるとき、$\sigma$ は $n$ 次の置換であるという

たとえば、

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1$$

によって 3 次の置換を定めることができる

この置換を、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

と表記する

## 置換の積

写像とみる利点の 1 つは、積が定義できることである

もう 1 つの置換

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

が与えられたとき、合成写像 $\sigma \circ \tau$ は、

$$\begin{aligned} 1 &\xmapsto{\tau} 1 \xmapsto{\sigma} 2 \\ 2 &\xmapsto{\tau} 3 \xmapsto{\sigma} 1 \\ 3 &\xmapsto{\tau} 2 \xmapsto{\sigma} 3 \end{aligned}$$

なので、

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

である

通常、合成の記号 $\circ$ を書かずに $\sigma\tau$ と表記する

なお、$\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ は一般に異なる

写像の合成の結合法則から、置換の積でも結合法則が成り立つ

**置換の積の結合法則**

$$(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$$

## 恒等置換

恒等写像

$$\begin{aligned} \mathrm{id} \colon \{1, 2, \ldots, n\} &\longmapsto \{1, 2, \ldots, n\} \\ \mathrm{id}(i) = i &\quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

は置換であるので、これを恒等置換と呼び、

$$e = \mathrm{id}$$

と書く

任意の置換 $\sigma$ に対して、明らかに

$$\sigma e = e \sigma = \sigma$$

が成り立つ

また、次の性質はのちに行列式の性質を議論する際に重要になる

**⚓ 恒等置換の単調性による特徴づけ** $i \leq \sigma(i)$（あるいは $i \geq \sigma(i)$）を満たす置換 $\sigma$ は恒等置換しか存在しない

証明

$\sigma$ が恒等置換でないと仮定する

条件 $i \leq \sigma(i)$ より、「元の位置より後ろに移される」、すなわち「すべてが自分以上に移る」ことになる

たとえば、1 を 2 に、2 を 3 に、...、$n-1$ を $n$ に写す置換を考える

しかし、集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の要素は $n$ 個しかないので、$n$ を $n+1$ に写すことはできない

そこで、$n$ を $n$ に写すとすると、$n-1$ も $n$ も $n$ に写ることになり、これは置換が全単射であるという定義に反する

$i \geq \sigma(i)$ の場合も、「元の位置より前に移される」、すなわち「すべてが自分以下に移る」ことになると考えると、同様の矛盾が生じる

よって、$\sigma$ は恒等置換でなければならない ■

## 逆置換

置換 $\sigma$ は、定義より全単射であるので、逆写像 $\sigma^{-1}$ が存在する

これを逆置換と呼ぶ

## 置換の集合

すべての $n$ 次の置換からなる集合は群と呼ばれる構造を持っている

これを $n$ 次対称群と呼び、記号 $S_n$ で表す

## 互換

置換の中で最も基本的なのは、2 文字だけを交換する置換である

**互換** $1 \leq i \neq j \leq n$ のとき、$\sigma(i) = j,\ \sigma(j) = i$ であって、$k$ が $i, j$ 以外のとき $\sigma(k) = k$ とすることで得られる置換を

$$\sigma = (ij)$$

と書き、このような置換を互換という

たとえば、

$$(24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

## 互換の逆置換

互換は $(ij)$ と書いても $(ji)$ と書いても同じ操作を表す

$i$ と $j$ を交換してから $j$ と $i$ を交換すると元に戻るが、この $(ij)$ と $(ji)$ は互換としては同じなので、

互換の逆置換は自分自身

である

## 置換の一行表示

置換を表す 2 行の表示は、下の行だけで情報としては十分なので、たとえば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

を $\sigma = 14325$ などと書いてしまうと便利である

これを $\sigma$ の一行表示と呼ぶ

## 互換と置換の積

一行表示を用いた場合、互換と置換の積はたとえば次のように書ける

$\sigma = 14325$ とすると、

$$(12)\sigma = 24315, \quad \sigma(12) = 41325$$

$(12)\sigma$ は、$\sigma = 14325$ に互換 $(12)$ を作用させて、24315 となる

$\sigma(12)$ は、12345 に互換 $(12)$ を作用させて 21345 とし、さらに置換 $\sigma$ を作用させることを意味する

置換 $\sigma$ は、4 と 2 を入れ替える置換なので、21345 に対して $\sigma$ を作用させると、41325 となる

この例の結果を一般的に述べると、次のようになる

⚓ **互換と置換の積**　$\sigma \in S_n$ に対して、$\tau = (ij)$ を左からかけた $\tau\sigma$ の一行表示は、$\sigma$ の数字 $i$ と $j$ を交換したものである

また、$\tau$ を右からかけた $\sigma\tau$ の一行表示は、$\sigma$ の $i$ 番目の数字と $j$ 番目の数字を交換したものである

## 互換の積への分解

たとえば、$\sigma = 2413$ とすると、これは、

1. 1234 の 3 と 4 を交換して 1243
2. 1243 の 1 と 2 を交換して 2143
3. 2143 の 2 と 3 を交換して 2413

というように、互換に分解して考えることができる

数式でまとめると、

$$\sigma = (34)(12)(23)$$

**互換の積への置換の分解**　任意の置換 $\sigma$ は、いくつかの互換の積として書ける

証明

$n$ に対する帰納法を用いる

$n=1$ のときは、互換の定義における $i, j$ の条件を満たさず、$i, j$ 以外の $k$ について $\sigma(k) = k$ とすることで得られる置換に相当するので、1 つの互換とみなせる

$(n-1)$ 次以下の置換が互換の積で書けることを仮定する

$\sigma$ を $n$ 次の置換とし、$\sigma(n)$ の値を $c$ とする

$c = n$ すなわち $\sigma(c) = c$ の場合、$\sigma$ は $c$ をまったく動かしていないため、実質的に $c-1$ までの数字だけを並び替えていることになる

そのため、$\sigma$ は $c-1$ すなわち $(n-1)$ 次の置換とみなせるため、帰納法の仮定より、互換の積として書ける

$c \neq n$ の場合、$\sigma(c)$ を $d$ とし、$d$ と $c$ を交換する互換 $\tau = (cd)$ を考える

このとき、$\tau\sigma$ は、$\sigma$ の数字 $c$ と $d$ を交換したものであるので、

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & c-1 & c & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & c-1 & \sigma(c) & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$c$ が $n$ に一致しないという仮定をふまえると、

$$\tau\sigma(n) = n$$

であることが読み取れる

よって、$\tau\sigma$ は実質的に $(n-1)$ 次の置換とみなせるので、帰納法の仮定より、互換の積として書ける

$$\tau\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

ゆえに、

$$\sigma = \tau^{-1}\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

であるが、互換の逆置換は自分自身であるので、

$$\sigma = \tau\tau_1\tau_2\cdots\tau_m$$

と書ける ■

## 置換の符号と偶奇

すべての置換は互換の積に分解できるが、その方法は一通りではない

しかし、互換の積の個数の偶奇性は、置換が与えられれば定まる

このことを証明するために、置換と多項式の関係を考察する

ref: 行列と行列式の基礎 p177〜179、p158〜159

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p103

### 置換の多項式への作用

置換 $\sigma \in S_n$ と $n$ 変数多項式 $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が与えられたとき、変数 $x_i$ に $x_{\sigma(i)}$ を代入することにより、式 $\sigma f$ を

$$(\sigma f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

と定める

**置換作用の結合法則**　$f = f(x_1, \ldots, x_n)$ を $n$ 変数の多項式とし、$\sigma, \tau \in S_n$ とするとき、

$$(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$$

証明

式 $\tau f$ は、

$$(\tau f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(n)})$$

である

さらに $\sigma$ を作用させると、$x_{\tau(i)}$ は $x_{\sigma(\tau(i))} = x_{(\sigma\tau)(i)}$ に置き換わるので、

$$\begin{aligned}(\sigma(\tau f)) &= f(x_{(\sigma\tau)(1)}, \ldots, x_{(\sigma\tau)(n)}) \\ &= ((\sigma\tau)f)(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

が成り立つ　■

## 互換の差積への作用

次のような $n$ 変数の多項式を差積と呼ぶ

$$\begin{array}{cccc}(x_1 - x_2) & (x_1 - x_3) & \cdots & (x_1 - x_n) \\ & (x_2 - x_3) & \cdots & (x_2 - x_n) \\ & & \ddots & \\ & & & (x_{n-1} - x_n)\end{array}$$

**差積**　次のような $n$ 変数の多項式を差積と呼ぶ

$$\Delta_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$$

置換の符号を理解するために、差積を使うことができる

その第一歩となるのが、次の定理である

**互換による差積の符号変化**　$\tau$ を互換とするとき、

$$\tau\Delta_n = -\Delta_n$$

証明

$i < j$ として、$\tau = (ij)$ とすると、各因子 $x_s - x_t\,(1 \leq s < t \leq n)$ の変化は次のようになる

### $x_i - x_j$ は $x_j - x_i$ になる

$x_i$ と $x_j$ を入れ替えることで、その差が逆転して符号が反転する

$$x_j - x_i = -(x_i - x_j)$$

よって、この項は $-1$ 倍の効果をもたらす

### $s < i < j$ のとき、$x_s - x_i$ と $x_s - x_j$ が入れ替わる

この場合、$s$ は $i,\ j$ より前の添字である

- 互換前：$(x_s - x_i)(x_s - x_j)$
- 互換後：$(x_s - x_j)(x_s - x_i)$

2 つの項が交換されるだけなので、積の絶対値は変わらず、符号にも影響しない

### $i < j < s$ のとき、$x_i - x_s$ と $x_j - x_s$ が入れ替わる

この場合、$s$ は $i,\ j$ より後の添字である

- 互換前：$(x_i - x_s)(x_j - x_s)$
- 互換後：$(x_j - x_s)(x_i - x_s)$

この場合も、並び順だけが入れ替わり、符号には影響しない

$i < s < j$ のとき、$x_i - x_s$ と $x_s - x_j$ は…

この場合、$s$ は $i$ と $j$ の間にある添字である

- 互換前：$(x_i - x_s)(x_s - x_j)$
- 互換後：$(x_j - x_s)(x_s - x_i)$

互換前の積を変形してみると、

$$\begin{aligned}(x_i - x_s)(x_s - x_j) &= -(x_i - x_s)(x_j - x_s) \\ &= (x_s - x_i)(x_j - x_s) \\ &= (x_j - x_s)(x_s - x_i)\end{aligned}$$

という形で、互換後の積が得られる

よって、この場合も積の符号は変わらない

以上をふまえると、符号が反転するのは $x_i - x_j$ の項だけである

よって、1 回の互換 $(ij)$ によって、差積全体は $(-1)$ 倍される

■

## 置換の符号

**置換による差積の符号変化**　置換 $\sigma \in S_n$ が $s$ 個の互換の積として書けるならば、

$$\sigma \Delta_n = (-1)^s \Delta_n$$

が成り立つ

証明

置換 $\sigma$ を $s$ 個の互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s$ と書いたとき、

$$\sigma \Delta_n = (\tau_1 \cdots \tau_s) \Delta_n$$

置換作用の結合法則を用いて、

$$\sigma \Delta_n = (\tau_1 \cdots \tau_{s-1})(\tau_s \Delta_n)$$

互換による差積の符号変化を繰り返し用いると、

$$
\begin{aligned}
\sigma\Delta_n &= (\tau_1 \cdots \tau_{s-1})(-\Delta_n) \\
&= (-1)(\tau_1 \cdots \tau_{s-1})\Delta_n \\
&= (-1)^s \Delta_n
\end{aligned}
$$

が最終的に得られる ■

この定理における $\sigma\Delta_n$ は、$\sigma$ をどのような互換の積として表すかとは無関係に、$\sigma$ が与えられれば決まる多項式である

そして、$(-1)^s$ という部分から、$\sigma$ を互換の積で表したとき、その個数 $s$ が偶数であれば符号は $+$ に、奇数であれば符号は $-$ になることがわかる

このようにして、次の定理が示されたことになる

**置換の符号の存在**　置換 $\sigma$ を互換の積として書くとき、用いられる互換の個数の偶奇は $\sigma$ のみによって決まる

そこで、置換の符号を次のように定義する

**置換の符号**　置換 $\sigma \in S_n$ を互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_i$ として書いたとき、$\sigma$ の符号を

$$
\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^i
$$

と定義する

そして、互換の個数の偶奇をそのまま、置換の偶奇として定める

**偶置換と奇置換**　置換 $\sigma \in S_n$ の符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ が $+1$ であれば $\sigma$ を偶置換と呼び、$-1$ であれば奇置換と呼ぶ

## 置換の性質

ref: 行列と行列式の基礎 p157、159

**逆置換の符号**

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

証明

置換 $\sigma$ を互換の積として書くと、逆置換はその互換の順序を逆にしたものになる

すなわち、$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_s$ とすると、

$$\sigma^{-1} = \tau_s^{-1} \cdots \tau_1^{-1}$$

であるが、互換の逆置換は自分自身であるので、

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = (-1)^s = \mathrm{sgn}(\sigma)$$

が成り立つ ■

**置換の符号の乗法性**

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$$

証明

それぞれを互換の積 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_i$、$\tau = \rho_1 \cdots \rho_j$ と書くと、

$$\sigma\tau = \tau_1 \cdots \tau_i \rho_1 \cdots \rho_j$$

である

このとき、$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^i$, $\mathrm{sgn}(\tau) = (-1)^j$ なので、

$$\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{i+j} = (-1)^i(-1)^j = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$$

が成り立つ ■

**置換群の左右作用に対する和の不変性** $f$ を $S_n$ 上の関数とするとき、任意の $\tau \in S_n$ に対して、次が成り立つ

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\tau\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma\tau)$$

証明

$\tau$ を固定して、$\sigma$ をすべての置換（$S_n$ の元）全体にわたって動かすとき、$\tau\sigma$ も $S_n$ の全体を動く

言い換えると、写像 $S_n \to S_n$ を $\sigma \longmapsto \tau\sigma$ と定めると、これは全単射である

したがって、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\tau\sigma)$$

が成り立つ

同様に、写像 $S_n \to S_n$ を $\sigma \longmapsto \sigma\tau$ と定めると、これも全単射

であるので、同様に、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma\tau)$$

が成り立つことがわかる ■

## 行列式の定義

ある正方行列の行列式は、

1. 各列から 1 つずつ、行に重複がないように成分を選ぶ
2. それらをかけ合わせる
3. 符号をつけて足す

という手順で定まる値である

ref: 行列と行列式の基礎 p159

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p107〜108

**行列式** $n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

で定められる値を $A$ の行列式と呼び、$|A|$ あるいは $\det(A)$ と表記する

## 三角行列の行列式

三角行列の場合、各列から 1 つずつ、0 でない成分を重複なく選び出す方法は、対角成分をすべて選ぶしかない

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p111〜112

ref: 行列と行列式の基礎 p160

**三角行列の行列式**　三角行列の行列式は、対角成分の積である

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{\huge 0} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \text{\huge 0} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

証明

行列式において、

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)} = 0$$

となる項は、和をとったときに消えてしまう

したがって、

$$a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}\cdots a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

すなわち

$$a_{1,\sigma(1)} \neq 0, \dots, a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

となるような選び方を考える

### 上三角行列の場合

上三角行列の定義より、$i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ である

$a_{ij} \neq 0$ とするには、$i \leq j$ でなければならないので、

$a_{i,\sigma(i)}$ においては、

$$i \leq \sigma(i)$$

である必要がある

そして、この条件を満たす置換は、恒等置換しか存在しないので、

$$\sigma(i) = i$$

より、$a_{ii}$ の積によって行列式の値が構成される

また、恒等置換は 0（偶数）回の互換で構成されるので、各項の符号は正となる ■

### 下三角行列の場合

下三角行列の定義より、$i < j$ ならば $a_{ij} = 0$ である

$a_{ij} \neq 0$ とするには、$i \geq j$ でなければならないので、

$a_{i,\sigma(i)}$ においては、

$$i \geq \sigma(i)$$

である必要がある

そして、この条件を満たす置換も、恒等置換しか存在しないので、上三角行列の場合と同様の結果が得られる ■

対角行列は、上三角行列でもあり下三角行列でもあるので、上の定理の特別な場合として次が成り立つ

**⚓ 対角行列の行列式**　対角行列の行列式は、対角成分の積である

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & \text{\Large 0} & \\ & & \ddots & \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特に、対角成分がすべて 1 の場合が単位行列である

**単位行列の行列式**　単位行列の行列式は 1 である

$$|E| = 1$$

## 行列式の基本性質

次の性質により、以後議論する行列式の性質が列に対して成り立つなら、行に対しても成り立つといえるようになる

ref: 行列と行列式の基礎 p161〜166
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p113〜121

**行列式の対称性**

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

証明

行列式の定義より、行列 ${}^tA$ の行列式は、行列 $A$ の行列式に現れる $a_{i,\sigma(i)}$ の添字を入れ替えたもの $a_{\sigma(i),i}$ の積和になる

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

一方、$j = \sigma(i)$ とおくと、$i = \sigma^{-1}(j)$ となるので、添字の変数を変換して

$$\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

よって、$\det({}^tA)$ の各項は、

$$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma^{-1}(j)}$$

となるが、これは $\det(A)$ の定義式の $\sigma^{-1}$ に対応する項と同じである

ここで、$\rho = \sigma^{-1}$ とおくと、$\sigma = \rho^{-1}$ であり、逆置換の符号から $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\rho^{-1}) = \operatorname{sgn}(\rho)$ であるから、

$$\det\left({}^tA\right) = \sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\rho(j)} = \det(A)$$

よって、$\det\left({}^tA\right) = \det(A)$ が示された ■

**行列式の列についての交代性**　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ において、2 つの列を入れ替えた行列を作ると、その行列の行列式の値は、元の行列 $A$ の行列式の値の $(-1)$ 倍になる

$$\begin{aligned}&\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &\qquad = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &\qquad\qquad (1 \leq i < j \leq n)\end{aligned}$$

証明

元々の行列 $A$ の行列式の各項が、

$$f(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i),i} \cdots a_{\sigma(j),j} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

であるのに対し、第 $i$ 列と $j$ 列を入れ替えた行列の行列式の各項は、

$$\operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(i),j} \cdots a_{\sigma(j),i} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

となる

ここで、$i$ を $j$ に、$j$ を $i$ に写す互換 $\sigma_0 = (ij)$ を考え、$\tau = \sigma\sigma_0$ とおくと、$\sigma(j) = \tau(i),\ \sigma(i) = \tau(j)$ となるので、

$$f(\tau) = \operatorname{sgn}(\tau) a_{\tau(1),1} \cdots a_{\tau(i),i} \cdots a_{\tau(j),j} \cdots a_{\tau(n),n}$$

このとき、置換群の左右作用に対する和の不変性より、

$$\sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\sigma\sigma_0) = \sum_{\tau \in S_n} f(\tau)$$

すなわち、$\sigma$ 全体の総和は $\tau$ 全体の総和に一致する

さらに、置換の符号の乗法性より、

$$\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma_0) = -\operatorname{sgn}(\sigma)$$

であるから、

$$f(\sigma) = -f(\tau)$$

よって、列の交換後、行列式全体が $(-1)$ 倍される ■

**行列式の列についての多重線形性**　行列式を列の関数とみたとき、この関数は、どの列についても線形である

$$\begin{aligned}
&\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{a}_n) \\
&\quad = \alpha\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{u}, \dots, \boldsymbol{a}_n) \\
&\qquad + \beta\det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{a}_n)
\end{aligned}$$

証明

$\sigma \in S_n$ に対応する各項について、

$$a_{\sigma(1),1} \cdots (\alpha u_{\sigma(i)} + \beta v_{\sigma(i)}) \cdots a_{\sigma(n),n}$$

$C = a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$ とし、$A = \alpha u_{\sigma(i)}$, $B = \beta v_{\sigma(i)}$ とおくと、

$$C(A + B) = CA + CB = \alpha C u_{\sigma(i)} + \beta C v_{\sigma(i)}$$

のように展開できる

よって、

$$\begin{aligned}
&\alpha(a_{\sigma(1),1} \cdots u_{\sigma(i)} \cdots a_{\sigma(n),n}) \\
&\qquad + \beta(a_{\sigma(1),1} \cdots v_{\sigma(i)} \cdots a_{\sigma(n),n})
\end{aligned}$$

を用いれば、行列式の定義に基づいて定理が成り立つことがわかる

■

行列式の対称性より、次の定理も得られる

**行列式の行についての多重線形性と交代性**　行列式は行に関しても多重線形性と交代性をもつ

以降、列に対して成り立つ性質は行に対しても成り立つとし、列の場合のみを記載する

**列の重複による行列式の零化**　$A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ の $n$ 個の列の中に、まったく同じものがあれば、

$$\det(A) = 0$$

となる

証明

行列 $A$ の列ベクトルに、共通のベクトル $\boldsymbol{u}$ が含まれているとする

$$A = (\dots, \boldsymbol{u}, \dots, \boldsymbol{u}, \dots)$$

この 2 つの $\boldsymbol{u}$ の列を入れ替えると、

$$\det(\dots, \boldsymbol{u}, \dots, \boldsymbol{u}, \dots) = -\det(\dots, \boldsymbol{u}, \dots, \boldsymbol{u}, \dots)$$

ところが、入れ替えの前後で行列そのものは変化していない（まったく同じ列を入れ替えても行列は同じ）ので、行列式の値も変わらないはずである

すなわち、

$$\det A = -\det A$$

が成り立つ

ここで、両辺に $\det(A)$ を足すと、

$$2\det A = 0$$

より、$\det A = 0$ が成り立つ ■

## 基本変形と行列式

行列式の性質から、行列の列や行に関する基本変形と行列式の関係が見えてくる

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p117〜118
ref: 行列と行列式の基礎 p162

⚓ 基本変形と行列式の関係

i. 列（行）を交換すると行列式の符号が交換される
ii. 列（行）を定数倍すると、行列式の値も定数倍される
iii. 列（行）に他の列（行）の定数倍を加えても行列式の値は変化しない

(i) は行列式の交代性、(ii) は多重線形性であり、(iii) は次の定理によって示される

⚓ 列の掃き出しに関する不変性 $i \neq j$ のとき、

$$\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) = \det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots)$$

証明

行列式の多重線形性より、

$$
\begin{aligned}
&\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) \\
= &\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) + c\det(\ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots)
\end{aligned}
$$

ここで、同じ列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ が 2 つ含まれている行列式の値は 0 になるので、

$$
\det(\ldots, \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots) = \det(\ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j \ldots)
$$

だけが残る ■

## 行列式の特徴づけ

$n$ 個の与えられた $n$ 次実ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、ある実数が定まるとき、これを $F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と表すことにする

ref: 行列と行列式の基礎 p162〜163

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p123〜127

⚓ 多重線形性と交代性による行列式の特徴づけ　写像 $F : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が多重線形性と交代性を満たすならば、

$$
F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)
$$

証明

多重線形性により、

$$
\begin{aligned}
F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) &= F\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_1 1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_{i_n n}\boldsymbol{e}_{i_n}\right) \\
&= \sum_{i_1, \ldots, i_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} F(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n})
\end{aligned}
$$

和において、各 $i_k\,(1 \leq k \leq n)$ は行番号なのでそれぞれ 1 から

$n$ まで動く

ここで、交代性から導かれる定理より、$(i_1, \ldots, i_n)$ に同じ添字が 2 つ以上ある場合には $F(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = 0$ である

したがって、この和は $(i_1, \ldots, i_n)$ がすべて異なる場合、すなわち $(i_1, \ldots, i_n)$ が $(1, \ldots, n)$ の置換である場合にのみ寄与する

よって、$(i_1, \ldots, i_n)$ にわたる和は、実際には $n$ 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

にわたる和であるとみなせる

この対応により、$(i_1, \ldots, i_n)$ と $\sigma \in S_n$ を同一視すると、

$$F(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$$

さらに、$(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$ を $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ に並び替えることを考える

すなわち、$\sigma$ の逆置換 $\sigma^{-1}$ を考えることになる

交代性によって、1 回の互換につき $(-1)$ 倍されるが、全体の符号は互換の回数によって定まるので、$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ となる

$$F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

以上より、

$$\begin{aligned}
&F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \, \mathrm{sgn}(\sigma) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\
&= \left( \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \right) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\
&= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)
\end{aligned}$$

となり、目的の等式が示された ■

ここで、$F(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n) = 1$ であれば、

$$F(\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n)$$

と表せることになる

この $F(\boldsymbol{e}_1, ..., \boldsymbol{e}_n) = 1$ を正規化の条件といい、行列式は

i. 双線形性
ii. 交代性
iii. 正規化の条件

によって特徴づけられる

すなわち、行列式は、この 3 つの条件を満たすような

> $n$ 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_n$ で定まる関数

として定義することもできる

## 行列式の幾何学的意味

[ Todo 1: ]

ref: 行列と行列式の基礎 p134〜136、p152〜153
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p127〜130

## 行列の積と行列式

行列式の特徴づけから導ける性質として、次が重要である

ref: 行列と行列式の基礎 p164
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p131〜132

> 行列式の乗法性 $A,\ B$ を同じ型の行列とするとき、
>
> $$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

証明

$B$ の列ベクトルを $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ とし、次の関数

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = \det(A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$$

を考える

ここで、det は列ベクトルに対して交代性をもつため、この関数 $F$ も交代性をもつ

また、det の多重線形性に加え、$A$ による作用は線形写像であるから、$F$ も多重線形性を満たす

よって、多重線形性と交代性による行列式の特徴づけより、

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \det(B)$$

一方、$F$ の引数を単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ にしたもの

$$F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \det(A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n)$$

を考えると、

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) &= \det(A\boldsymbol{e}_1, \ldots, A\boldsymbol{e}_n) \\ &= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

よって、

$$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n) = \det(A) \det(B)$$

ここで、$F(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ の定義を思い出すと、

$$\det(A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n) = \det(A) \det(B)$$

左辺の行列 $(A\boldsymbol{b}_1, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$ は、行列 $B$ の各列ベクトルに対して $A$ を左から作用させたものであり、行列 $AB$ を意味している

したがって、

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

が成り立つ ■

行列式の乗法性を繰り返し適用することで、次の定理が得られる

**累乗行列の行列式と行列式の累乗**　$A, B$ を正方行列とするとき、任意の自然数 $n$ について、

$$\det(A^n) = \det(A)^n$$

## 余因子展開

ref: 行列と行列式の基礎 p166〜169

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p133〜139

## Zebra Notes

| Type | Number |
|---|---|
| todo | 1 |