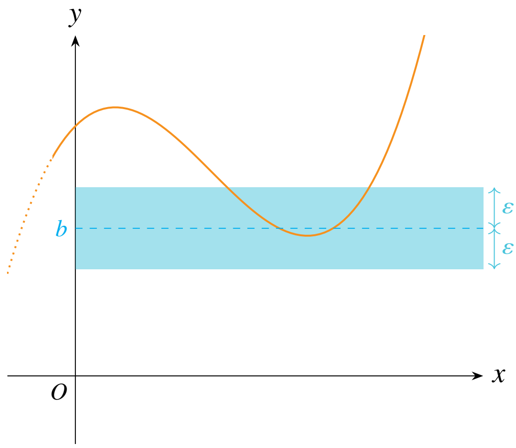
0.1 関数の極限

0.1.1 ε - δ 論法による関数の極限

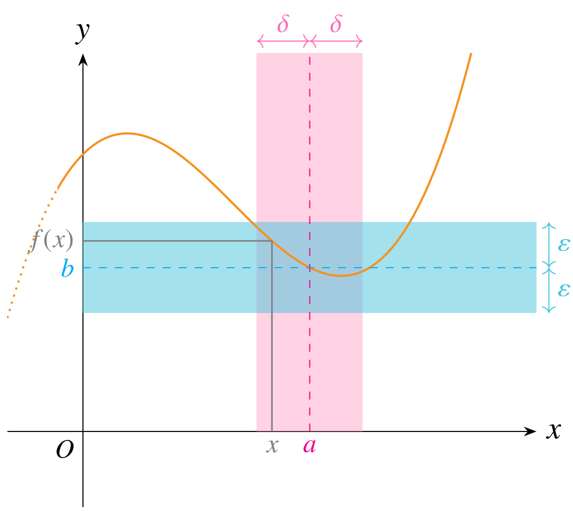
ε がどんなに小さい正の数であっても、x と a の誤差を δ 以内に収めることで $f(x)$ と b の誤差が ε 以内に収まるとき、関数 $f(x)$ は点 a で b に収束するという。

* * *

まず、$y = b$ の周りに、両側それぞれ ε だけ広げた区間を考える。（この区間を青い帯と呼ぶことにする。）



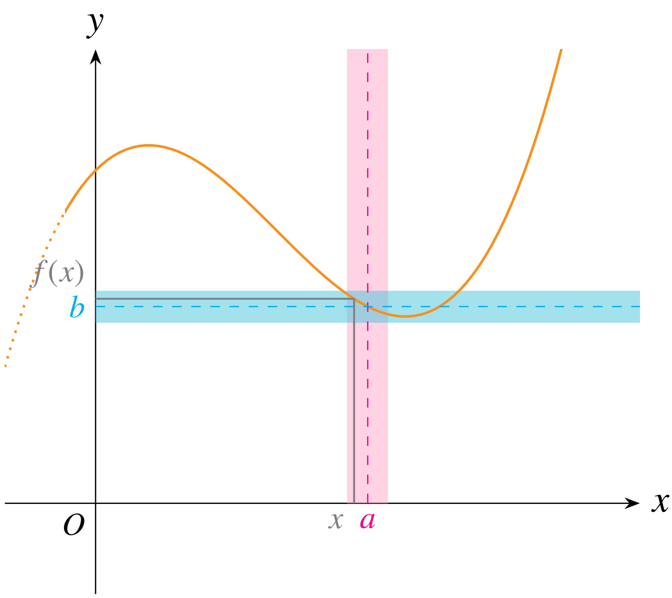
$x = a$ の周りには、両側それぞれ δ だけ広げた区間を考える。（この区間をピンクの帯と呼ぶことにする。）
このとき、「この x であれば、$f(x)$ が青い帯に収まる」という x を探して、その x をピンクの帯で包むように δ を設定する。



ε は正の数ならなんでもよいとすれば、ε を小さな数に設定し、いくらでも青い帯を狭めることができる。

しかしこのとき、x をピンクの帯に収まるようにしなければならない。

ピンクの帯の中心は a なので、x をピンクの帯に収めようとすると、x は a に近づいていくことになる。



青い帯の幅 ε がどんなに小さくても、ピンクの帯の幅 δ を小さくしていけば、x と $f(x)$ をそれぞれ帯の中に収めることができる。

このように、x を a に近い範囲に閉じ込めれば、$f(x)$ も b に近い範囲に閉じ込められるという状況を、点 a での関数の収束と定義する。

青い帯の幅 ε がどんなに小さくても、「この x であれば、$f(x)$ が青い帯に収まる」という x がピンクの帯からはみ出ないように δ を小さくしていけるなら、自動的に x も $f(x)$ もそれぞれ帯の中に収まる。

つまり、δ に課された制約が肝心で、「この x であれば、$f(x)$ が青い帯に収まる」という x を包めるような δ の存在が、収束を保証することになる。

関数の収束と極限値（$x \to a$ の場合）

関数 $f(x)$ と実数 a, b について、次の条件を考える。

任意の正の数 ε に対して

$$|x-a|<\delta \implies |f(x)-b|<\varepsilon$$

が成り立つような正の数 δ が存在する

この条件が成り立つとき、関数 $f(x)$ は点 a で b に 収束 するといい、次のように表す。

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \text{または} \quad f(x) \to b \quad (x \to a)$$

このとき、b を数列 $f(x)$ の 極限値 という。

1. 定義 1.1

0.1.2 関数の極限と数列の極限の関係

2. 定理 1.7

0.1.3 関数の極限の性質

3. 定理 1.8

4. 定理 1.9

0.1.4 はさみうち法

5. 定理 1.10

0.1.5 合成関数の極限

6. 定理 1.11

0.1.6 右極限と左極限

7. 定義 1.15

8. 定義 1.16

9. 定理 1.19