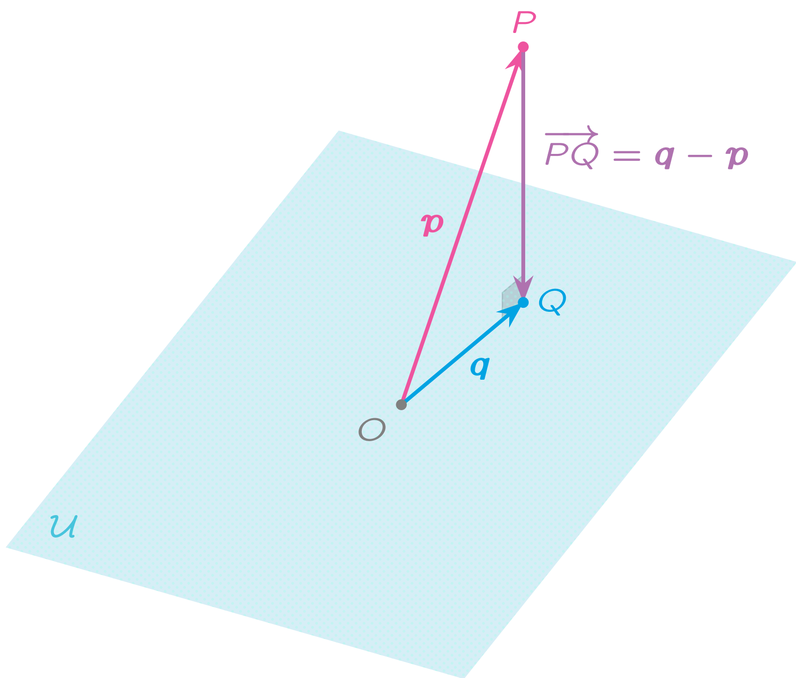
直交射影と反射影

$\mathbb{R}^n$ 上の点 P に対して、部分空間 $\mathcal{U}$ 上の点 $Q \in \mathcal{U}$ のうち、$\overrightarrow{PQ}$ が $\mathcal{U}$ に直交するような点 Q を、点 P の $\mathcal{U}$ への**直交射影**あるいは**正射影**という

ref: 線形代数セミナー p4〜5

また、$\overrightarrow{QP}$ を点 Q の $\mathcal{U}$ からの**反射影**という

射影前のベクトルを $\boldsymbol{p}$、射影後のベクトルを $\boldsymbol{q}$ とすると、直交射影とは、$\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ が直交するように射影することである



このとき、次のような関係が成り立っている

$$
\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}
$$

$$
\overrightarrow{OQ} \in \mathcal{U}, \quad \overrightarrow{QP} \in \mathcal{U}^{\perp}
$$

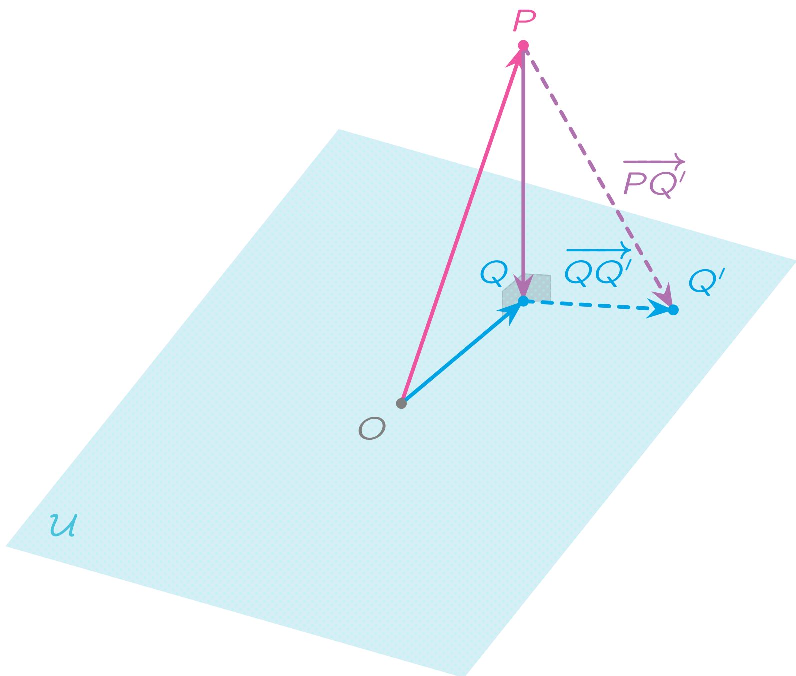
ここで、$\mathcal{U}^{\perp}$ は部分空間 $\mathcal{U}$ に直交するベクトルの全体であり、$\mathcal{U}$ の**直交補空間**と呼ばれる

$\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\mathcal{U}$ の直交補空間 $\mathcal{U}^{\perp}$ も、$\mathbb{R}^n$ の部分空間となる

$\overrightarrow{OP}$ は $\mathbb{R}^n$ の任意のベクトルを表すことから、$\mathbb{R}^n$ のベクトルは、$\mathcal{U}$ への射影 $\overrightarrow{OQ}$ と、$\mathcal{U}$ からの反射影 $\overrightarrow{QP}$ の和として表されることがわかる

このような表し方は一意的であり、$\overrightarrow{OP}$ の $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}^{\perp}$ への直和分解という

点 Q を $\mathcal{U}$ 上の別の点 Q' に移動した場合を考える



このとき、三平方の定理より、

$$\|\overrightarrow{PQ'}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QQ'}\|^2 > \|\overrightarrow{PQ}\|^2$$

となるから、

射影した点 Q は、点 P から最短となる $\mathcal{U}$ 上の点

であることがわかる