Chapter 1

論理と集合

数学の理論は、集合という概念で語られる。
そして、集合を構成する条件を考えるために、論理が利用される。
さらに、集合と集合を対応づける概念として、写像がある。

この章で学ぶことは、これから数学の理論を語るための「言葉」として機能するものである。

1.1　論理

数学では「曖昧さ」を取り除いた議論が重要である。
ここでは、文章（表現）の曖昧さを取り除くために、文章の意味を記号化して扱おう、というアプローチを考えていく。

1.1.1　命題：客観的視点に絞る

数学では、多くの問いを立てて、それが正しいかどうかをひとつひとつ確かめていくことになる。
このとき、数学の議論の対象にできるのは、主観を含まない、「真偽を問うことができる」文章である。

たとえば、「数学は面白い」という文章は、私たちにとっては事実かもしれないが、主観を含む（もはや個人的感想に近い）主張である。
このような、人によって回答が分かれるような文章について議論するのは、また別の学問領域に任せてしまおう。

数学の議論の対象とできる文章は、「正しい」か「正しくない」かをはっきりと定められるもので、そのような文章は命題と呼ばれる。

命題　客観的に正しいか正しくないかが判断できる主張を 命題 という。

1.1.2　記号化：解釈を一通りに絞る

数学で扱う命題は、文章ではなく記号で表現されることも多い。どのような記号をどんな意味で使うかを見ていく前に、そもそもなぜ記号化するのか、ということを考えておきたい。

私たちが日常で使う言葉は、表現のパターンがあまりにも多い。英語に比べると、日本語は特にその傾向がある。
たとえば、次の 3 つの文章は、まったく同じことを主張しているものである。

1. パンケーキは太る
2. パンケーキを食べると太る
3. パンケーキを食べたならば、体重が増える

1 つめの文章は、ネイティブの日本人の間では問題なく伝わるが、日本語に慣れていない人には伝わらない可能性がある。
実際にこのような日本語を聞いて、「パンケーキ＝太る」ってどういうこと…？となる外国人は多いらしい。「パンケーキ」と「太る」が「＝」で結ばれているかのように見える時点で、問題がある。

2 つめの文章では、より意味が明確になった。この文章であれば、英語が苦手な私が英訳を試みたとしても、"Pancakes is fat."みたいな奇妙な英文を生み出さずに済むだろう。

3 つめの文章は、少し堅苦しく感じるかもしれない。しかし、これが最も数学らしい表現である。「パンケーキを食べた」と「体重が増える」という 2 つの事象が「ならば」で結ばれていて、論理の構造がはっきりしている。

＊　＊　＊

このように、何通りもの表現がある文章は、人によって解釈が異なる可能性がある。

客観的な主張であるはずの命題も、その表し方によって解釈の齟齬が生まれてしまうと、結局正しいか正しくないかが人によって異なる事態に陥ってしまうかもしれない。

解釈を一通りにするには、表し方を統一してしまうのが手っ取り早い。そのために、共通認識として定義された記号を使って文章を表現するのが、数学のアプローチなのである。

ここからは、命題を記号化する具体的なルールを見ていくことにする。

1.1.3 真偽値：正しさを値とみなす

命題は、主張の内容によって「正しい」か「正しくない」かが決まる。
このとき、「正しい」ことを真と呼び、「正しくない」ことを偽と呼ぶ。

命題の真偽

- 命題が正しいとき、その命題は 真である という。
- 命題が正しくないとき、その命題は 偽である という。

命題は必ず「真」か「偽」のどちらかに決定されるため、この「真」や「偽」を命題が持つ値として考えて、真偽値と呼ぶことがある。
さらに、コンピュータでの応用を見据えて、真偽値を 0 と 1 で表すことがある。

真偽値

- 命題が真であるとき、その命題の真偽値は **1** であるとする。
- 命題が偽であるとき、その命題の真偽値は **0** であるとする。

1.1.4 論理式：命題を記号化する

命題が真偽値という値を持つという視点に立つと、その値を反転させたり、組み合わせたりといった操作を考えることができる。
この考え方は、小学校からお馴染みの数の演算に近いものだ。たとえば、足し算という演算は、1 と 2 という値を組み合わせて、3 という新たな値を作り出す操作といえる。

ある命題から「新たな命題を作り出す操作」を表す記号を論理演算子といい、論理演算子のような記号の組み合わせによって命題を表現したものを、論理式という。

1.1.5 命題の否定

まずは、1 つの命題を作り変える操作を考えてみよう。

のび太くんの今回の算数テストの点数は 0 点だったとする。
このとき、のび太くんが「今回の算数テストは 0 点じゃなかった！」と主張しても、それは嘘である。

0 点だったという事実を p、0 点じゃなかったという主張を q とおこう。

- p : のび太くんの算数テストの点数は 0 点である
- q : のび太くんの算数テストの点数は 0 点ではない

このとき、q を p の否定命題と呼ぶ。

p が真実で、q は嘘であるのだから、

否定命題になると真偽が入れ替わる

ということになる。

命題の否定

命題 p に対して、「p ではない」という命題を p の 否定命題 といい、次のように表す。

$$\neg p$$

$\neg$ は「not」を意味する記号で、命題の否定を表す論理演算子である。

真理値表

ここで、初めての論理演算子が登場した。

論理演算子によって新たな命題を作り出すとき、元の命題からの真偽値の変化を一覧化しておくとわかりやすい。そのように真偽値を一覧化した表を、真理値表という。

この「否定の真理値表」では、次の対応関係が示されている。

- p の真偽値が 1 のとき、$\neg p$ の真偽値は 0 である
- p の真偽値が 0 のとき、$\neg p$ の真偽値は 1 である

p	$\neg p$
1	0
0	1

否定の真理値表

真理値表を使うと、「否定命題になると真偽が入れ替わる」ことも瞬時に捉えられる。

1.1.6 論理積と論理和：「かつ」と「または」

2 つの命題を組み合わせて、新たな命題を作り出す操作もある。
その代表例が論理積「かつ」と論理和「または」である。

日常生活での感覚

「かつ」と「または」という言葉は、日常生活でも意外と馴染みのあるものである。
命題としての厳密さを一旦忘れて、日常の感覚で考えてみよう。

1. 晴れていて風も弱ければ散歩に行こう
2. 紅茶かコーヒーをお選びください

1 つめの文章では、「晴れている」かつ「風が弱い」という条件を使っている。
「晴れている」と「風が弱い」という、2 つの条件を両方満たすときにしか、散歩には行きたくないのである。

2 つめの文章では、「紅茶」または「コーヒー」という、2 つの選択肢を提示している。
ところで、大抵の人は「紅茶」か「コーヒー」のどちらか片方だけを選ぶだろうが、数学者は両方を手に取ってしまうかもしれない。というのも、「または」という言葉は、日常生活でのニュアンスと数学での定義が若干異なるからだ。

- 日常生活での「A または B」：A と B のどちらか一方
- 数学での「A または B」：A と B の少なくとも一方（両方でもよい）

数学での定義

これらの感覚を踏まえて、「かつ」と「または」を数学的に定義していこう。

論理積

p, q を命題とするとき、「p かつ q」すなわち「p と q が両方真である」という命題を論理積 という。

論理積は、論理演算子 $\land$ を使って、次のように表す。

$$p \land q$$

1.1.7 命題関数

1.2 集合

Under construction...

1.2.1 実数の集合：区間

2 つの実数の間の範囲は、区間と呼ばれる。

区間

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合のうち、$a < b$ である実数 a と b の間にあるすべての実数の集合を 区間 という。

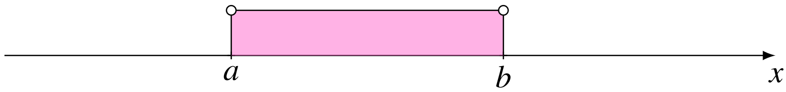
区間は、端点を含むかどうかによって、開区間、閉区間、半開区間に分類される。

開区間

端点を含まない区間を開区間という。

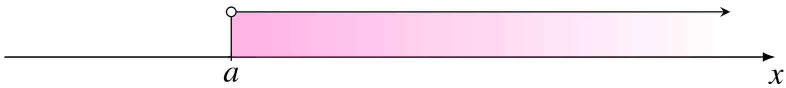
閉区間　$a \leq x \leq b$ となる実数 x の集合を 閉区間 といい、(a, b) と表す。

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\}$$



閉区間

端点を含まない区間を閉区間という。

閉区間　$a < x < b$ となる実数 x の集合を 閉区間 といい、$[a, b]$ と表す。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$[-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}$$

半開区間

一方の端点を含み、他方の端点を含まない区間を半開区間という。

半開区間　次のような集合を **半開区間** という。

- $a \leq x < b$ となる実数 x の集合を、$[a, b)$ と表す。
- $a < x \leq b$ となる実数 x の集合を、$(a, b]$ と表す。

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$