固有値の符号

対角化の応用では、固有値の符号が重要となることがある

ref: 線形代数セミナー p22

- 半正値行列：すべての固有値が非負（正または零）である行列
- 正値行列：すべての固有値が正である行列

エルミート行列との積の固有値

任意の行列は、自身の転置行列との積で対称行列を作ることができるが、複素行列（エルミート行列）の世界でも同様のことが成り立ち、さらに固有値の符号についても重要な性質がある

随伴積による半正値エルミート行列の構成　任意の行列 A に対して、AA^* および A^*A はともに半正値エルミート行列である

証明

エルミート行列であること

積をエルミート行列にすると積の順番が入れ替わることに注意して、対称行列の場合と同様に示せる ■

半正値行列であること

エルミート行列 AA^* の固有ベクトルを $\boldsymbol{u}$ とし、その固有値を $\lambda \in \mathbb{C}$ とすると、

$$AA^*\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$$

両辺で $\boldsymbol{u}$ との内積をとると、

$$(\boldsymbol{u}, AA^*\boldsymbol{u}) = \lambda(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \lambda\|\boldsymbol{u}\|^2$$

この左辺は、随伴公式を用いて、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{u}, AA^*\boldsymbol{u}) &= (\boldsymbol{u}, A(A^*\boldsymbol{u})) \\
&= (A^*\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{u}) \\
&= \|A^*\boldsymbol{u}\|^2 \geq 0
\end{aligned}
$$

外側の A に
随伴公式を適用

となるので、

$$\|A^*\boldsymbol{u}\|^2 = \lambda\|\boldsymbol{u}\|^2 \geq 0$$

ここで、固有ベクトルは零ベクトルではないので、$\|\boldsymbol{u}\|^2 > 0$
である

よって、$\lambda\|\boldsymbol{u}\|^2 \geq 0$ の両辺を $\|\boldsymbol{u}\|^2$ で割ることにより、

$$\lambda \geq 0$$

が得られる

A^*A についても同様に、

$$(\boldsymbol{u}, A^*A\boldsymbol{u}) = (A\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u}) = \|A\boldsymbol{u}\|^2 \geq 0$$

から、$\lambda \geq 0$ が得られる ■