第 29 章

双線形形式

内積と双線形形式

$\mathbb{R}^n$ 上の内積は、2 つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ のペア（直積）から、スカラー値 $\mathbb{R}$ を返す関数として捉えることができる。
このように内積を写像に見立てて、この写像を b とおくと、

$$b \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

と表すことができる。

さらに、$\mathbb{R}^n$ 上の内積は次のような双線形性を満たすものだった。

i. $(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$
ii. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2)$
iii. $(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

双線形性とは、2 つの引数それぞれに対して線形性があるという性質である。
線形性をもつ写像を線形写像として特別視したように、双線形性をもつ写像について考えてみよう。

双線形形式　U, V を線型空間とする。直積集合 $U \times V$ から $\mathbb{R}$ への写像 b が次の条件を満たすとき、b は $U \times V$ 上の**双線形形式**（bilinear form）であるという。

i. $b(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v})$
ii. $b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2)$
iii. $b(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = b(\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = cb(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$

例：行列による双線形形式

Theorem – 行列による双線形形式の構成

A を $m \times n$ 型行列とするとき、$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{v}$$

により $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上の双線形形式が得られる。

証明

和に対する双線形性（i）

Theorem 2.5「行列の和に対する転置の分配性」より、

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2)^T A \boldsymbol{v} \\ &= \boldsymbol{u}_1^T A \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}_2^T A \boldsymbol{v} \\ &= b(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

和に対する双線形性（ii）

（i）と同様に、

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) &= \boldsymbol{u}^T A (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \\ &= \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{v}_2 \\ &= b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

スカラー倍に対する双線形性（iii）

Theorem 2.4「転置と行列積の順序反転性」と、スカラー（1×1 型行列）を転置しても変わらないことを用いて、

$$\begin{aligned} b(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= (c\boldsymbol{u})^T A\boldsymbol{v} \\ &= c(\boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{v}) \\ &= cb(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

以上より、b は $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ 上の双線形形式である。 ■

特に、$m = n$ で $A = E$ の場合、

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}$$

となり、$\mathbb{R}^n$ 上の内積と一致する。