基底の定義

核空間の場合を参考にして、部分空間のパラメータ表示を与えるために基準として固定するベクトルの集合を定式化すると、基底という概念になる

基底は、座標空間の「座標軸」に相当するものであり、部分空間を生成する独立なベクトルの集合として定義される

ref: 行列と行列式の基礎 p96
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p33〜

基底　V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする

ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subset V$ は、次を満たすとき V の基底であるという

i. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ は線型独立である
ii. $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$

基底の例：標準基底

たとえば、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり、これを $\mathbb{R}^n$ の標準基底という

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p35

数ベクトル空間の標準基底　数ベクトル空間 K^n において、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は K^n の基底である

証明

部分空間を生成すること

任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in K^n$ は、次のように表せる

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

したがって、K^n は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ によって生成される

■

線型独立であること

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の線形関係式

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

を考える

このとき、左辺は

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられるので、これが零ベクトルになるためには、

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

でなければならない

よって、$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は線型独立である ■

基底の存在

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p98〜99]

ref: 行列と行列式の基礎 p98〜99

部分空間と数ベクトル空間の同一視

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p99]

ref: 行列と行列式の基礎 p99

線形写像の核空間と基底

核空間について先ほど述べたことは、基底の言葉で言い換えると次のようになる

> ⚓ **斉次形方程式の基本解と核空間の基底**　A を $m \times n$ 型行列とし、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解とするとき、$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ は $\mathrm{Ker}(A)$ の基底である

線形写像の像空間と基底

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97]

ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97

Zebra Notes

Type	Number
todo	3