線形部分空間

$m > n$ の場合、$m \times n$ 型行列 A は、写し先の空間をカバーしきれない写像を表していた。
つまり、写った結果が空間の一部、部分空間になるということである。

ref: 行列と行列式の基礎 p93〜94、p99

そこで、$\mathbb{R}^n$ の部分集合であって、ベクトル演算で閉じた集合について考える。これは、原点を含む直線や平面などを一般化した概念である。

線形部分空間　$\mathbb{R}^n$ のベクトルからなる空集合でない集合 V は、次が成り立つとき線形部分空間あるいは簡単に部分空間であるという。

i. すべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ が成り立つ
ii. すべての $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \in V$ に対して $c\boldsymbol{u} \in V$ が成り立つ

入れものの空間 $\mathbb{R}^n$ のことはあまり意識せずに、集合 V とそのベクトル演算に着目して、ある $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間のことを単に線形空間と呼ぶこともある。

$\mathbb{R}^n$ 自身も部分空間

たとえば、$\mathbb{R}^n$ 自身は明らかに $\mathbb{R}^n$ の部分空間である。

零ベクトルだけからなる部分集合も部分空間

零ベクトル $\boldsymbol{o}$ だけからなる部分集合 $\{\boldsymbol{o}\}$ も部分空間である。

部分空間における零ベクトルの包含　部分空間は必ず零ベクトル $\boldsymbol{o}$ を含む。

証明

V は空集合でないので、ある $\boldsymbol{v} \in V$ をとるとき、線形部分空間の定義 (ii) より

$$0 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \in V$$

よって部分空間は必ず $\boldsymbol{o}$ を含む。 ■

線形写像の像は部分空間

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p82

線形写像の像は部分空間 線形写像 $f: V \to W$ の像 $\mathrm{Im}(f)$ は W の部分空間である。

証明

和について

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}(f)$ とすると、$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}_1)$, $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{v}_2)$ とおける。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) \\ &= f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

となり、$\mathrm{Im}(f)$ は和について閉じている。 ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(f)$ と $c \in \mathbb{R}$ をとると、$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})$ とおける。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{u} &= cf(\boldsymbol{v}) \\ &= f(c\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

となり、$\mathrm{Im}(f)$ はスカラー倍について閉じている。 ■

線形写像の核は部分空間

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p71〜72

部分空間の零ベクトルと線形写像　部分空間 V, W の間の線形写像 $f: V \to W$ に対して、V の零ベクトルを $\boldsymbol{o}_V$、W の零ベクトルを $\boldsymbol{o}_W$ とすると、

$$f(\boldsymbol{o}_V) = \boldsymbol{o}_W$$

証明

任意の $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W$ に対して、

$$\begin{aligned} 0 \cdot \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{o}_V \\ 0 \cdot \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{o}_W \end{aligned}$$

が成り立つ。

$f(\boldsymbol{o}_V)$ は、f の線形性により、次のように変形できる。

$$f(\boldsymbol{o}_V) = f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

ここで、$f(\boldsymbol{v})$ は、f による $\boldsymbol{v} \in V$ の像であるので、W に属する。そこで、$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ とおくと、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{o}_V) &= 0 \cdot f(\boldsymbol{v}) \\ &= 0 \cdot \boldsymbol{w} \\ &= \boldsymbol{o}_W \end{aligned}$$

となり、目標としていた式が示された。 ■

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p82

線形写像の核は部分空間　線形写像 $f\colon V \to W$ の核 $\mathrm{Ker}(f)$ は V の部分空間である。

証明

前述の定理の主張 $f(\boldsymbol{o}_V) = \boldsymbol{o}_W$ より、零ベクトルは核空間に属する。

$$\boldsymbol{o} \in \mathrm{Ker}(f)$$

和について

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ とすると、$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$ かつ $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ である。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) \\ &= \boldsymbol{o} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

したがって、$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ である。 ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ と $c \in \mathbb{R}$ をとると、$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$ である。

よって、f の線形性より、

$$\begin{aligned} f(c\boldsymbol{u}) &= cf(\boldsymbol{u}) \\ &= c \cdot \boldsymbol{o} = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

したがって、$c\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ である。 ■