0.1　対数関数

0.1.1　対数：指数部分を関数で表す

指数関数は、「a を x 乗したら y になる」という関係を表現するものだった。

ここで、逆に「y は a の何乗か？」という関係を表現するものとして、対数関数を定義する。

これは、y から x を導き出す関数であるから、指数関数 $y = a^x$ の逆関数といえる。

対数

$a^y = x$ を満たす y を、a を底とする x の対数といい、次のように表す。

$$y = \log_a x$$

ここで、x は真数、a は底と呼ばれる。

対数関数は指数関数の逆関数

対数関数 $y = \log_a x$ は、指数関数 $x = a^y$ の逆関数である。

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x$$

対数は、指数関数の指数部分を表す。

$a^y = x$ の y に、$y = \log_a x$ を代入することで、次のような式にまとめることもできる。

指数部分は対数で書き換えられる

$$a^{\log_a x} = x$$

0.1.2　対数の性質

指数法則を対数に翻訳することで、対数の性質を導くことができる。

真数のかけ算は log の足し算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$ として、指数法則 $a^m \times a^n = a^{m+n}$ を考える。

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= a^m \times a^n \\ &= a^{m+n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$m + n = \log_a(x_1 x_2)$ がいえる。

また、$x_1 = a^m$ より $m = \log_a x_1$、$x_2 = a^n$ より $n = \log_a x_2$ と表せるから、

$$m + n = \log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a(x_1 x_2)$$

積の対数は対数の和

$$\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

真数の割り算は log の引き算

$x_1 = a^m, x_2 = a^n$ として、指数法則 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ を考える。

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \frac{a^m}{a^n} \\ &= a^{m-n} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$m - n = \log_a\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)$ がいえる。

また、$x_1 = a^m$ より $m = \log_a x_1$、$x_2 = a^n$ より $n = \log_a x_2$ と表せるから、

$$m - n = \log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

商の対数は対数の差

$$\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$

真数の冪乗は log の指数倍

$x = a^m$ として、指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ を考える。

$$\begin{aligned} x^n &= (a^m)^n \\ &= a^{mn} \end{aligned}$$

対数は指数部分を表すので、$mn = \log_a x^n$ がいえる。

また、$x = a^m$ より $m = \log_a x$ と表せるから、

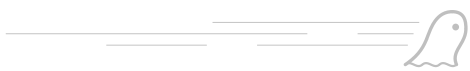
$$mn = n \log_a x \log_a x^n$$

冪の対数は対数の指数倍

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

0.1.3 常用対数と桁数

Under construction...



常用対数　底を 10 にした対数関数を、常用対数と呼ぶ。

$$\log_{10} x$$

0.1.4 指数関数の底の変換：対数を用いた表現

指数関数の底 a から b に変換するには、「a は b の何乗か？」がわかっている必要があった。

REVIEW

$a = b^c$ という関係があるなら、

$$a^x = b^{cx}$$

今では、$a = b^c$ となるような c を、対数で表すことができる。

$$b^c = a \iff c = \log_b a$$

指数関数の底の変換公式

$$a^x = b^{(\log_b a)x}$$