次元の不変性

ref: 行列と行列式の基礎 p99
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p37〜38

次元の不変性　K^n の部分空間 V の基底をなすベクトルの個数（次元）は一定である。

つまり、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ と $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l\}$ がともに V の基底ならば、$k = l$ である。

証明

$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l \in \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であり、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l$ は線型独立であるから、有限従属性定理の抽象版より、$l \leq k$ である。

同様にして $k \leq l$ も成り立つので、$k = l$ である。 ■

線型独立なベクトルと次元

ref: 行列と行列式の基礎 p100

線形独立なベクトルの最大個数と空間の次元　線形空間 V 中の線型独立なベクトルの最大個数は $\dim V$ と等しい。

証明

V の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ とすると、V には k 個の線型独立なベクトルが存在する。

また、$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であるため、有限従属性定理の抽象版より、V 中の線型独立なベクトルの個数は k を超えることはない。

つまり、k は V に含まれる線型独立なベクトルの最大個数である。

■

線形空間を生成するベクトルの最小個数と次元 線形空間 V を張るベクトルの最小個数は $\dim V$ と等しい。

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p100 問 3.3]

Zebra Notes

Type	Number
todo	1