読書ノート：線形代数の半歩先

tomixy

2025 年 3 月 21 日

目次

はじめに

数式を眺める視点を、いろいろと

行列にはベクトルをうまく操作するための装置としての役割もある

ベクトルを別のベクトルに変換するものとしての行列、という見方もできる

その先に、関数を別の関数に変換するものを考え、これが行列とつながり、さらに時間発展する系の記述ともつながる…と話は続く

＊ ＊ ＊

半歩先から見える景色を

線形代数は便利な道具でもあり、世界を捉えるための思考方法でもある

入力に対して出力を対応させるという少し抽象的いな「コト」を、数値がならんだベクトルや行列という具体的な「モノ」で表現する、それを可能にするのが線形代数

関数という「曲がってうねる形」を、具体的な数値のならびに書き下せること、さらには、一つの対象をさまざまに表現できること、線形代数が教えてくれるこれらは、現実世界の問題をどのように数学の言葉で記述して、どのように計算機で処理していくのかを考えるうえで、とても役立つ

「数の集まり」に「演算」を追加

集まるだけでは面白くないので

数学では、要素が集まった集合を考えるのが基本

そこにたとえば足し算の演算を入れると、要素間を行き来できるようになる

実数の集合を考えたとき、$7.4 + 6.4 = 13.8$ のように、二つの要素を足すことで別の要素に移れる

また、関係性まで考えるとさらに応用の幅が広がる

関係性の一つの例は「距離」

ベクトルや行列と同じような「集合・演算・関係性」をもつ対象なら、その類似性を使ってベクトルや行列で扱える

* * *

足し算が豊かさを与えてくれる

ベクトルに演算を導入すると、別のベクトルと行き来できるようになる

この演算を入れたものを線形空間という

* * *

線形空間の定義

たとえば和を計算したときに、結果として得られた要素が考えている集合からはみ出てしまっては困る

演算で集合の要素を行き来でき、その演算の結果が想定外にならない安全な場所、というのが線形空間

実際には、線形空間 V は以下の性質を満たすものとして定義できる

1. $c\boldsymbol{x} \in V$（スカラー倍しても V からはみ出ません）
2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$（足し算でもはみ出ません）
3. $(c_1c_2)\boldsymbol{x} = c_1(c_2\boldsymbol{x})$（スカラー倍は分離できます）
4. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$（1 というスカラー倍は要素を変えません）
5. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$（足し算の順番は交換できます）
6. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$（前半、後半、どちらを先に計算しても同じ）
7. $\boldsymbol{x} + 0 = \boldsymbol{x}$ となるベクトル 0 が存在する（零元があります）
8. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = 0$ となるベクトル $\boldsymbol{u}$ が存在し、このベクトル $\boldsymbol{u}$ を $-\boldsymbol{x}$ と書く、すなわち $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = 0$（逆元、つまり負符号もあります）
9. $c_1(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = c_1\boldsymbol{x} + c_1\boldsymbol{y}$（足してからスカラー倍、スカラー倍してから足す、が同じ）
10. $c_1\boldsymbol{x} + c_2\boldsymbol{x} = (c_1 + c_2)\boldsymbol{x}$（スカラー倍だけ先に計算も可能）

一次結合がすべての基本

組み合わせるという視点

演算によってベクトル同士を行き来できるようになると、あるベクトルをほかのベクトルを使って表現できる

スカラー倍と和のみを使った形を一次結合もしくは線形結合という

* * *

一次結合の係数を求める方法

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ によって $\boldsymbol{c}$ を書き表すときの係数は、一般には連立方程式を使って求める

$$\boldsymbol{c} = \lambda_1 \boldsymbol{a} + \lambda_2 \boldsymbol{b}$$

から、$\boldsymbol{c}$ の各要素 c_i に対して以下が成り立つ

$$c_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i$$

ただし、連立方程式の解がない場合もある

＊　＊　＊

分解するという視点

分解できる場合もあれば、できない場合もある

これは、先ほどの「組み合わせる」という視点において、一次結合を作っても一部のベクトルしか再現できない、ということ

＊　＊　＊

空間を生成するという視点

r と s は実数から自由に選べるとすると、$\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{a}_1 + s\boldsymbol{a}_2$ でさまざまなベクトル $\boldsymbol{x}$ を表現できる

それらを集めると平面が形作られていき、実はこの平面も線形空間になっている

このように一次結合で線形空間を作ることができ、その「もと」となるベクトルのことを生成元という

無駄をはぶく

よい矢印、余分な矢印

ある矢印 $\boldsymbol{x}$ を、他の矢印の一次結合の形で書きたいとき、

- 2 次元系を考えているから 2 つあれば十分、3 つは冗長
- 「平行」なものが 2 つだと不十分

などが言える

無駄なものをはぶく、必要最低限で済ます、線形代数にもそれを表すための概念がきちんと用意されている

＊　＊　＊

したがうことは、お互いさま

一次従属は、線形従属とも呼ばれる

「従属」という言葉からわかるように、何かが何かにしたがっている

たとえば、互いをスカラー倍だけで表現できているベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を考える

$$\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{a}_1$$

自分自身をほかの矢印を使って表現できているので、$\boldsymbol{a}_1$ は $\boldsymbol{a}_2$ にしたがっているし、逆も然り

また、$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表せるベクトル $\boldsymbol{a}_3$ は、この 2 つの矢印 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ にしたがっている

$$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$$

＊　＊　＊

従属は「組」に対する概念

ここで大切なのは、何かしらの「組」を考えたときに「それらが従属の関係にある」かどうかを判断できること

何かが何かにしたがっていれば、逆のことも言える

たとえば、$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ は、

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3 - 2\boldsymbol{a}_1$$

とも書ける

ほかをしたがえているように見えて、実は自分がしたがっていて…という関係にある

ベクトルの組を考え、どれか 1 つのベクトルがほかのベクトルの一次結合で表せるときに、それらのベクトルの組は一次従属である、と言う

たとえば、$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は一次従属である

一次従属であれば、余分なものが含まれている

そこで、次に一次従属ではないものを考える

＊　＊　＊

従属していなければ独立

線形空間 V に属する N 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ および N 個の実数 $c_1, c_2, \ldots, c_N$ に対して、

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_N\boldsymbol{a}_N = 0$$

が成立するのが $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$ の場合に限られるとき、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ は一次独立であると言う

一次独立の場合、互いに表現できないため、無駄がないとわかる

＊　＊　＊

一次独立の定義を噛み砕く

一次独立の定義に出てきた式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_N\boldsymbol{a}_N = 0$$

に対して、たとえば $c_1 \neq 0$ とする

これは一次独立の条件 $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$ を破っている

今は $c_1 \neq 0$ なので、式を

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{c_N}{c_1}\boldsymbol{a}_N$$

と変形できる

すると、$\boldsymbol{a}_1$ をほかのベクトルで表現できてしまっているので、一次従属であることがわかる

c_1 以外が 0 でない場合も同様なので、条件 $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$ を満たすときのみ、このような式変形ができない

これが一次独立の状況である

＊　＊　＊

「基底」は、必要十分なもの

ベクトルの一次結合を使って空間を過不足なく表現できる「必要十分であるもの」、それが基底

2 次元空間の基底は、平行でない 2 つのベクトルである

3 次元空間に埋め込まれている平面は、2 つの平行でないベクトルの一次結合で表現可能なので、その 2 つのベクトルは、3 次元空間の中にある部分空間の基底となる

基底は、「注目している空間」を過不足なく、必要十分に表現できるもの

余分であれば削る必要がある

また、考えている基底で表現できる空間が、もっと大きな空間の部分空間になっていることもある

＊　＊　＊

一次独立かどうかが鍵

D 次元空間 $\mathbb{R}^D$ を考えたとき、その部分空間 $V \subset \mathbb{R}^D$ を作り出すベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_D$ を考える

このとき、これらの生成元が一次独立ならば、$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_D\}$ を V の基底と言う

一次従属だと、互いを互いで表現できてしまうので、余分なものがあるとわかる

基底であるかどうかの鍵は、一次独立性があるかどうかである

なお、上の定義において、$D' \leq D$ であることに注意

部分空間として、たとえば 3 次元空間中の平面を考えると、$D' = 2$ および $D = 3$ である

3 次元空間中で考えても必ずしも 3 次元空間すべてを表現する必要はない

基底と呼ぶときには、どのような線形空間を考えているのかにも注意が必要である

方法を決めれば表現は「一つ」

基底が変われば、座標は変わる

ベクトル $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$ を、いわゆる「座標」で表現する場合、どのように書くだろうか？

直感的には「右に 2 つ、上に 3 つ」と簡単に捉えて、$[2, 3]^\top$ と考えられる

しかし、これは基底として $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ を考えていたから

一次結合の係数をならべたものが「座標」だが、「座標」というのは使っている基底の情報とセットでないと意味をなさないもの

特定の表現方法、つまり基底を決めてこそ、数をならべたベクトルを作ることができる

これを利用すれば、基底を変えることで目的の計算に便利なベクトルを作ることもできる

* * *

表現方法はいろいろでも本質は「一つ」

基底の選び方はたくさんあるが、基底を決めてしまえば表現方法は一つに定まる

つまり、基底が決まれば「座標」は一意に決まる

表現したい矢印やベクトル（本質）は一つ

基底の選び方は表現方法の違いであり、基底を一つに決めれば、表現の仕方は一意に定まる

* * *

そもそもどうやって無駄なものを知るの？

基底は無駄をはぶいたものだが、そのためには行基本変形などで一次独立かどうかを調べる必要がある

内積で近さを測る

ベクトル同士の関係性を知る方法

集合だけだと身動きできないが、演算によって互いを行き来できるようになった

ただし、2 つのベクトルを取り出したときに、それらが似ているかどうかを議論するためには道具が少し必要となる

それがベクトルの内積である

矢印で考えた場合、内積は次のように定義された

1. $\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ のなす角を θ とする
2. ベクトル $\overrightarrow{x}$ の大きさを $|\overrightarrow{x}|$、ベクトル $\overrightarrow{y}$ の大きさを $|\overrightarrow{y}|$ とする
3. $\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ の内積を $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = |\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}| \cos\theta$ とする

矢印で記述できる場合にはこれでも大丈夫だが、想像できないような 4 次元以上の高次元では、角度 θ から出発するわけにはいかない

そのため、順番を逆にして定義していく

* * *

内積はスカラー値を与える関数