




線形関数の集合

${}^t\mathbb{R}^n$ 上の線形関数全体の集合を $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ と書く

ref: 行列と行列式の基礎 p121~121

$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を与えたとき、 ${}^t\mathbb{R}^n$ 上の線形関数 $\langle -, \boldsymbol{v} \rangle$ が得られる


(ここで、 $-$ はプレースホルダーであり、ここに具体的な値を入れられることを意味する)

 線形関数の空間の基底と次元の一致 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ を \mathbb{R}^n の基底とすると、 $\{\langle -, \boldsymbol{v}_1 \rangle, \dots, \langle -, \boldsymbol{v}_n \rangle\}$ は $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ の基底である

よって、

$$\dim({}^t\mathbb{R}^n)^* = \dim \mathbb{R}^n = n$$

$({}^t\mathbb{R}^n)^*$ は、もとの縦ベクトル空間 \mathbb{R}^n と自然に同一視できる

 線形関数の空間と縦ベクトル空間の同型性 写像 $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow ({}^t\mathbb{R}^n)^*$ を $\boldsymbol{v} \mapsto \langle -, \boldsymbol{v} \rangle$ と定めると、これは線形同型写像である

証明

\boldsymbol{v} によって定まる線形関数 $l_{\boldsymbol{v}} = \langle -, \boldsymbol{v} \rangle \in ({}^t\mathbb{R}^n)^*$ を考える

このとき、写像 ι は $\boldsymbol{v} \mapsto l_{\boldsymbol{v}}$ と定義できる

写像 ι は線形

写像 $\boldsymbol{v} \mapsto l_{\boldsymbol{v}}$ は、関数を返す写像である

写した結果の関数が、和やスカラー倍と作用の順序を入れ替えても同じになることを確認する

任意の入力 ϕ とすると、

$$\begin{aligned}l_{\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2}(\phi) &= \langle \phi, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \phi, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \phi, \mathbf{v}_2 \rangle \\&= l_{\mathbf{v}_1}(\phi) + l_{\mathbf{v}_2}(\phi) \\l_{c\mathbf{v}}(\phi) &= \langle \phi, c\mathbf{v} \rangle = c\langle \phi, \mathbf{v} \rangle = cl_{\mathbf{v}}(\phi)\end{aligned}$$

任意の入力に対して等しい結果になることは、関数そのものが等しいことを意味する

和やスカラー倍を先に計算しても作用後に計算しても、同じ関数が得られるので、写像 l は線形である ■

写像 l は単射

写像 l が「違う入力は違う出力になる」こと、すなわち単射であることを確認する

そのためには、 l が零でないベクトルは零でない関数に移すこと、すなわち

$$\mathbf{v} \neq \mathbf{0} \implies l_{\mathbf{v}} \neq 0$$

を示せばよい

$\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ならば、 \mathbf{v} の成分のうち少なくとも 1 つは非零である

その成分を k 番目の成分とし、横ベクトル $\phi = {}^t\mathbf{e}_k$ を考える

ここで、 ${}^t\mathbf{e}_k$ は k 番目の成分が 1 で他の成分が 0 の横ベクトルである

すると、

$$l_{\mathbf{v}}(\phi) = \langle \phi, \mathbf{v} \rangle = \phi(\mathbf{v}) = {}^t\mathbf{e}_k \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_k$$

ここで、 $v_k \neq 0$ なので、 $l_{\mathbf{v}}(\phi) \neq 0$ となる

したがって、 l は単射である ■

写像 l は全射

$\dim({}^t\mathbb{R}^n)^* = \dim \mathbb{R}^n = n$ より、 ι は全射である ■

以上より、 $({}^t\mathbb{R}^n)^*$ と \mathbb{R}^n は同じ次元をもち、写像 $\iota: \mathbb{R}^n \rightarrow ({}^t\mathbb{R}^n)^*$ が単射かつ全射であることから、線形代数の鳩の巣原理より、 ι は線形同型写像である ■
