Topic Note: 述語論理

tomixy

2025 年 5 月 21 日

目次

＊　＊　＊

命題関数

これまで、たとえば「1234567891 は素数である」というような命題を扱ってきた

ここで、たとえば x が自然数全体を動くとき、「x は素数である」という形の主張を命題関数と呼ぶ

命題は記号 p で表されたのに対し、命題関数は $p(x)$ と書く

命題関数 $p(x)$ は、x の値に応じて主張が変わり、真理値が変化していく

命題関数 $p(x)$ の x は、変数と呼ばれる

命題関数 $p(x)$ の変数は、実数や自然数のような数以外に、直線とか地図のような数学的対象や一般的概念をとる

＊ ＊ ＊

すべての〜

命題関数 $p(x)$ に対して、「すべての x について $p(x)$ である」という命題を

$$\forall x p(x)$$

と表す

「すべての〜について○○である」は、

- 「すべての〜は○○である」
- 「任意の〜について○○である」
- 「任意の〜は○○である」

と表すこともある

$\forall$ という記号は、「all（すべての〜）」や「any（任意の〜）」の頭文字の A を逆さにしたものに由来する

＊ ＊ ＊

変数 x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「すべての x について $p(x)$ である」というのは、

> $p(a_1)$ であり、かつ、$p(a_2)$ であり、かつ、$\cdots$、かつ、$p(a_n)$ である

ということに他ならない

言い換えると、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$$

ということになる

＊　＊　＊

ある〜

命題関数 $p(x)$ に対して、「ある x について $p(x)$ である」という命題を

$$\exists x p(x)$$

と表す

「ある〜について○○である」は、

- 「ある〜は○○である」
- 「ある〜が存在して○○である」
- 「○○であるような〜が存在する」

と表すこともある

∃という記号は、「exists（存在する）」の頭文字の E を逆さにしたものに由来する

＊　＊　＊

変数 x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「ある x について $p(x)$ である」というのは、

> $p(a_1)$ であるか、あるいは、$p(a_2)$ であるか、あるいは、$\cdots$、あるいは、$p(a_n)$ である

ということに他ならない

言い換えると、

$$\exists x p(x) = p(a_1) \lor p(a_2) \lor \cdots \lor p(a_n)$$

ということになる

＊　＊　＊

「すべての〜」と「ある〜」

「すべての〜」と「ある〜」の 2 つの概念の間には双対性がある

$$
\begin{aligned}
\forall x p(x) &= p(a_1) \land p(a_2) \land \cdots \land p(a_n) \\
\exists x p(x) &= p(a_1) \lor p(a_2) \lor \cdots \lor p(a_n)
\end{aligned}
$$

という式を比較してみると、「すべての〜（∀）」と「ある〜（∃）」は、AND（∧）と OR（∨）の双対性を反映していることがわかる

＊　＊　＊

∀ と ∃ を含んだ式の同値変形

⚓ ∀ と ∃ の性質

$$
\begin{aligned}
\forall x(p(x) \land q(x)) &\equiv \forall x p(x) \land \forall x q(x) \\
\exists x(p(x) \lor q(x)) &\equiv \exists x p(x) \lor \exists x q(x)
\end{aligned}
$$

これらはそれぞれ、

- 「すべての〜」（$\forall x$）と AND（∧）
- 「ある〜」（$\exists x$）と OR（∨）

が対応していると思って眺めるとよい

＊　＊　＊

∀ と ∃ の否定

「すべての〜」(∀)と「ある〜」(∃)を含む命題の否定は、次のド・モルガンの法則で与えられる

ド・モルガンの法則(述語論理)

$$\neg\forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$$
$$\neg\exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$$

$\neg\forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$ より、

> 「すべての〜について…である」の否定は、「ある〜について…でない」

$\neg\exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$ より、

> 「ある〜について…である」の否定は、「すべての〜について…でない」

要するに、否定をとると、「すべての〜」は「ある〜」になり、「ある〜」は「すべての〜」になる

* * *

述語論理のド・モルガンの法則は、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっている

x が $x = a_1, a_2, \cdots, a_n$ というように、有限個の値しかとらない場合、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \land p(a_2) \land \cdots \land p(a_n)$$
$$\exists x p(x) = p(a_1) \lor p(a_2) \lor \cdots \lor p(a_n)$$

であり、

$$\forall x \neg p(x) = \neg p(a_1) \land \neg p(a_2) \land \cdots \land \neg p(a_n)$$
$$\exists x \neg p(x) = \neg p(a_1) \lor \neg p(a_2) \lor \cdots \lor \neg p(a_n)$$

であるので、述語論理のド・モルガンの法則は、それぞれ次のように書き換えられる

$$\neg(p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)) \\ \equiv \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \cdots \vee \neg p(a_n)$$

$$\neg(p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)) \\ \equiv \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(a_n)$$

これらはそれぞれ、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっていることは一目瞭然