線形写像の核空間の基底

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解の自由度を d とすると、基本解 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_d \in \operatorname{Ker} A$ が存在して、任意の $\boldsymbol{u} \in \operatorname{Ker} A$ に対し、

ref: 行列と行列式の基礎 p94〜95

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{u}_d$$

を満たす $c_1, \dots, c_d \in \mathbb{R}$ が一意的に定まる。

このことは、基底の言葉で言い換えると次のようになる。

> ⚓ **斉次形方程式の基本解と核空間の基底**　A を $m \times n$ 型行列とし、$\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_d$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の基本解とするとき、$\{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_d\}$ は $\operatorname{Ker} A$ の基底である。

つまり、基本解 $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_d$ を基準として固定すれば、$\operatorname{Ker} A$ の元を 1 つ指定することは、パラメータの値の組

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

を指定することと同じである。

解のパラメータの空間と座標部分空間

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の主変数を $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$、自由変数を $x_{j_1}, \dots, x_{j_d}$ とすると、解のパラメータの空間は座標部分空間 $\mathbb{R}^{\{j_1, \dots, j_d\}}$ である。

そして、そのパラメータ付けは、

$$\mathbb{R}^{\{j_1, \dots, j_d\}} \ni \sum_{k=1}^{d} t_k \boldsymbol{e}_{j_k} \longmapsto \sum_{k=1}^{d} t_k \boldsymbol{u}_k \in \operatorname{Ker} A$$

によって与えられる。