

## 第 34 章

# 低ランク近似



### ランク 1 行列による圧縮

1 つのグレースケール画像を行列  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  に見立てると、画像のファイルサイズは  $mn$  に比例する。単純に行列の成分を保存しようとする、膨大な記憶容量が必要となる。

そこで、圧縮に向けた一つの考え方として、 $m \times n$  型行列  $A$  を、

いくつかの「縦ベクトルと横ベクトルの積」の和として近似的に表現  
する



ことを考える。

### ランク 1 行列

ここで重要なのは次の事実である。

「縦ベクトルと横ベクトルの積」は階数が 1 の行列



たとえば、

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^\top = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}$$

とすると、これらの積は次のように計算される。

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^\top = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 & 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{pmatrix}$$

各行は、最初の行  $(4, 5)$  のスカラー倍となっていることに注目しよう。

つまり、独立な行は  $(4, 5)$  だけであり、他の行はこの行の線形結合で表現できる。

独立な行が 1 つしかないので、この行列の階数は 1 である。

このことは、一般的な成分表示で考えることもできる。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^\top = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

とおくと、これらの積は次のように計算される。

$$\mathbf{u}\mathbf{v}^\top = \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \cdots & u_1 v_n \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \cdots & u_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \cdots & u_m v_n \end{pmatrix}$$

ここで、 $i$  行目を取り出すと、

$$u_i \cdot \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = u_i \mathbf{v}^\top$$

となっているので、すべての行は  $\mathbf{v}^\top$  のスカラー倍で表現できることがわかる。

## 低ランク近似による圧縮

縦ベクトルと横ベクトルの積は階数 1 の行列となることから、もし  $k$  個の和で近似するならば、近似した行列の階数は  $k$  以下となる。

もし、 $k$  個の和で良い近似になっているのであれば、

- $m$  次元ベクトル（縦ベクトル）を  $k$  本
- $n$  次元ベクトル（横ベクトル）を  $k$  本

保持すればよいことになる。

これで、 $mn$  個の成分を保持する必要はなくなり、 $k(m+n)$  個の成分を保持すれば十分となる。

たとえば、 $m = 1000, n = 1000$  の行列を  $k = 50$  個の和でうまく近似できるとしたら、

$$\frac{k(m+n)}{mn} = \frac{50(1000+1000)}{1000 \times 1000} = 0.1$$

より、ファイルサイズを 90% 削減できることがわかる。

このようなアイデアを、工学では**圧縮**といい、数学的には行列の**低ランク近似**という。



## 特異値分解による低ランク近似

さて、 $O$  でない任意の行列  $A$  は、次のように特異値分解できた。

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^\top + \cdots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^\top + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^\top$$

これは、「縦ベクトルと横ベクトルの積」の和の形になっている。

さらに、特異値  $\sigma_i$  は大きい順に並んでいるので、ランク  $k$  の行列の中で、

$$A_k = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^\top + \cdots + \sigma_k \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k^\top$$

が  $A$  に最も近い近似となるのではないかと予想できる。

ここで、「 $A$  との近さ」を測るためには、行列に関する**ノルム**を考える必要がある。