微分方程式とは？

未知の関数を $f(x)$ とおいて、$f(x)$ が満たすべき条件を等式で書き下したものが「関数に対する方程式」

関数に対する方程式の中に、$f(x)$ の微分 $f'(x)$ や $f''(x)$ が含まれているとき、その方程式を微分方程式という

もっとも簡単な微分方程式 $f'(x) = 0$

定数関数の微分は恒等的に 0 になる

逆に、「微分 $f'(x)$ が恒等的に 0 ならば $f(x)$ は定数である」という定理も示した

この定理の仮定は、未知関数 $f(x)$ が微分方程式

$$\frac{df}{dx}(x) = 0$$

を満たしているということ

つまり、この定理は、「微分方程式 $\frac{df}{dx}(x) = 0$ の解は定数関数 $f(x) = C$ である」ことを主張している

「どの点でも勾配がなければ、実は、その道は水平だ（高さが一定だ）」というのは、実生活では当たり前に見える

数学としては、無限小レベルの条件である微分方程式から、その解の大域的な性質を記述していることになる

＊　＊　＊

以前述べた定理「すべての x で $f'(x) = a$ ならば、$f(x) = ax + f(0)$ である」も、微分方程式の言葉で記述できる

すなわち、a を定数とするとき、初期条件 $f(0) = C$ の下で、未知関数 $f(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{df}{dx}(x) = a$$

の解が

$$f(x) = ax + C$$

であるという主張になる

$f'(x) = \lambda f(x)$ という微分方程式を解く

指数関数 e^x は $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ というべき級数展開を用いると導関数が自分自身になる、すなわち $(e^x)' = e^x$ が成り立つことを以前示した

その逆は成り立つだろうか？

これは「$f'(x) = f(x)$ という微分方程式を解く」問題である

＊　＊　＊

■定理　λ を定数とする

実数全体で定義された関数 $F(t)$ が

- 微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$
- 初期条件 $F(0) = A$

を満たすならば、$F(t) = Ae^{\lambda t}$ である

＊　＊　＊

解を 1 つ見つける

まず、指数関数 $e^{\lambda t}$ が微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$ を満たしていることを確かめる

$e^{\lambda t}$ を $f(x) = e^x$ と $g(t) = \lambda t$ の合成関数と見なすと、

- $f(x) = e^x$ に対しては $f'(x) = e^x$
- $g(t) = \lambda t$ に対しては $g'(t) = \lambda$

が成り立つので、合成関数の微分の公式より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}f(g(t)) \\ &= f'(g(t)) \cdot g'(t) \\ &= e^{g(t)} \cdot \lambda \\ &= e^{\lambda t} \cdot \lambda\end{aligned}$$

となり、確かに $e^{\lambda t}$ は微分方程式を満たす関数である

＊　＊　＊

すべての解を見つける

では、$e^{\lambda t}$ と異なるタイプの解は存在するだろうか？

微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$ を満たす未知の解 $F(t)$ を既知の解 $e^{\lambda t}$ と比較するため、割り算してみる

定理の結論は、

$$\frac{\text{未知の解}}{\text{既知の解}} = \frac{F(t)}{e^{\lambda t}}$$

が t によらない定数 A になるということ

そこで、割り算したものを t で微分してみる

商の微分の公式を使うと、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right) = \frac{F'(t)e^{\lambda t} - F(t)\lambda e^{\lambda t}}{(e^{\lambda t})^2}$$

ここで、$F'(t) = \lambda F(t)$ であり、$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ なので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right) = \frac{\lambda F(t)e^{\lambda t} - \lambda F(t)e^{\lambda t}}{e^{2\lambda t}}$$

この分子は、同じものどうしの引き算なので 0 になる

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right) = 0$$

t で微分すると 0 になるということは、この関数 $\dfrac{F(t)}{e^{\lambda t}}$ は定数関数である

$\dfrac{F(t)}{e^{\lambda t}}$ の値は t によらないので、特に、$t = 0$ における値とも同じになる

初期条件 $F(0) = A$ を思い出すと、

$$\frac{F(t)}{e^{\lambda t}} = \frac{F(0)}{e^{\lambda \cdot 0}} = \frac{A}{e^0} = A$$

よって、

$$F(t) = Ae^{\lambda t}$$

これで、初期条件 $F(0) = A$ を満たす微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$ の解は、$F(t) = Ae^{\lambda t}$ のみであることが示された　□

＊　＊　＊

このように、指数関数の性質である

1. 無限級数表示
2. 指数法則
3. 微分方程式

は、同じ関数の 3 つの異なる側面を表している

ここでは、微分方程式を解くことによって、3 から 1 や 2 の性質を復元できることを確かめた

＊　＊　＊

パラメータ λ の符号

微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$ のパラメータ λ は、その解の挙動に大事な役割を持つ

初期条件 $A > 0$ とすると、$F(t) = Ae^{\lambda t}$ のグラフの形状は λ の符号によって異なる

現象を記述するとき、ある量が変数 t を用いて $Ae^{\lambda t}$ という形で（近似的に）表されることがよくある

こういった場合、その量は

- $\lambda > 0$ のとき、指数的に増大する（ネズミ算式に増える）
- $\lambda < 0$ のとき、指数的に減少する

と言うことがある

＊　＊　＊

$A = \lambda = 1$ の場合と自然対数

$A = \lambda = 1$ の場合の指数関数 e^t は、t が決まれば e^t の値が定まり、そのグラフ $y = e^t$ は単調増加になっている

逆に、グラフを見ると、$y > 0$ に対して $y = e^t$ となる実数 t が 1 つ定まることがわかる
この値を y の自然対数といい、$t = \log y$ と表記する