手がかりが足りない場合

手がかりとなる情報を $\boldsymbol{y}$ とし、知りたい情報を $\boldsymbol{x}$ とする

ref: プログラミングのための線形代数 p112〜113

まずは、$\boldsymbol{y}$ の方が $\boldsymbol{x}$ より次元が小さい、すなわち $m < n$ の場合を考える

このとき、表現行列 A は横長の行列となる

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$m < n$ の場合は、「知りたい量が n 個もあるのに、手がかりはたった m 個しかない」という状況になっている

見方を変えると、A を作用させたことによって「情報の一部が欠落してしまった」ともいえる

$m < n$ の場合の線形写像の写し方

$m < n$ のとき、A は、元より次元の低い空間に写す線形写像を表す

そのため、$\boldsymbol{x}$ はこの線形写像によって「潰される」ことになる

「潰される」とはどのようなことかというと、空間を張る $\boldsymbol{x}$ それぞれの居場所を、写す先では全員分用意することができないので、

> 複数の $\boldsymbol{x}$ を同じ $\boldsymbol{y}$ に写すしかない

ということである

複数の $\boldsymbol{x}$ が同じ $\boldsymbol{y}$ に写ってしまうと、結果 $\boldsymbol{y}$ から元の $\boldsymbol{x}$ を特定することはできなくなる（つまり、情報が失われている）

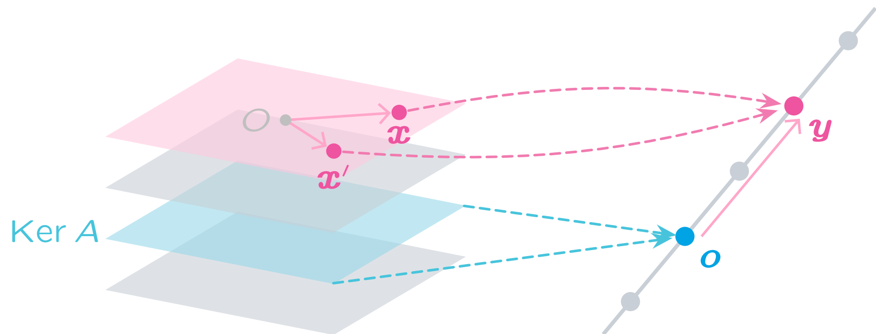
線形写像の核

次の図は、1×3 行列 A による線形写像を表している

同じ平面上の点がすべて同じ点に写されることで、平面の集まりである立体（3 次元）が、点の集まりである直線（1 次元）へと「潰されている」ことがわかる

ref: プログラミングのための線形代数 p112〜114

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p79〜84



このとき、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ に写ってくるような $\boldsymbol{x}$ の集合を、A の**核**あるいは**カーネル**といい、$\mathrm{Ker}\ A$ と表す

Ker A の次元

上の図では、零ベクトル $\boldsymbol{o}$（写り先の 1 次元空間の原点）に潰されている青い平面が $\mathrm{Ker}\ A$ に相当する

平面なので、この $\mathrm{Ker}\ A$ は 2 次元である

もしも $m < n$ でない場合、つまり潰れない写像の場合は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ に写る $\boldsymbol{x}$ は零ベクトル $\boldsymbol{o}$ だけなので、$\mathrm{Ker}\ A$ は 0 次元となる

Ker A に平行な方向の成分

[Todo 1: ref: プログラミングのための線形代数 p114]

Ker f の定義

A が線形写像 f の表現行列であるとすると、$\mathrm{Ker}\ f$ を同様に定義できる

線形写像の核　線形写像 $f\colon V \to W$ に対して、f による $\{\boldsymbol{o}\}$ の逆像 $f^{-1}(\{\boldsymbol{o}\})$ を、線形写像 f の核や核空間、あるいはカーネルといい、$\mathrm{Ker}(f)$ と表記する

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{\boldsymbol{o}\}) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}\} \subset V$$

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1