



特性多項式と特性方程式

λ が n 次正方行列 A の固有値であることは、

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$$

となるような $\mathbf{x} \in K^n$ が存在することである


ここで、 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ を次のように変形することができる

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$A\mathbf{x} - \lambda E\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$


$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ という条件により、 $(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ は非自明な解を持つ必要がある

 固有ベクトルの斉次形方程式による定義 固有値 λ の固有ベクトルとは、斉次形方程式

$$(A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

の非自明な解のことである

固有値を求める上で重要となるこの定理は、行列式を使って言い換えることができる

 固有値の方程式による定義 行列 A の固有値 λ は、 \mathbf{x} についての n 次方程式

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

の K に含まれる解である

ref: 行列と行列式の基礎 p184、p188~191
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p258~260

証明

λ が A の固有値であることは、斉次形方程式 $(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が非自明解を持つことと言い換えられる

そして、斉次形方程式が非自明解を持つことは、行列式が 0 になることと同値である

すなわち、

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

が成り立ち、つまり $x = \lambda$ は方程式 $\det(A - xE) = 0$ の解である ■



$A = (a_{ij})$ において、

$$\det(A - xE) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix}$$

を展開すると、 x についての n 次式になる

特に、すべての列（あるいはすべての行）から、 x を含む成分をとった場合の積は、

$$(a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x)$$

であるので、これを展開して現れる項を中心に考察する

n 次の項

$(a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x)$ の各因子から、 $-x$ だけを選んでかけ合わせたものが

$$(-1)^n x^n$$

であり、これが最高次の項となる

$n - 1$ 次の項

$(a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x)$ のうち、1 つだけ a_{ii} を選び、残りの因子からは $-x$ を選んでかけ合わせたものが

$$(-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})x^{n-1}$$

である

これは、トレースの定義より、

$$(-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)x^{n-1}$$

とも書き換えられる

$n - 2$ 次以下の項

行列式では、各列から 1 つずつ、行に重複がないように成分を選ぶ必要がある

そして、今取り上げている行列式では x を含む成分が対角線上にあるので、 $n - 1$ 次の場合は、対角成分以外を選ぶことができなかった（対角成分以外から x でない数 a_{ij} を得ようとする、同じ行もしくは列から 2 つ成分を選ぶことになってしまう）

しかし、 $n - 2$ 次以下の項では、 x を含まない成分を 2 個以上選ぶことができるので、対角成分以外からも成分を選ぶことができる

そのため、 $n - 2$ 次以下の項は、上の展開式以外からも現れることになり、単純に計算はできない

定数項

定数項は、多項式において $x = 0$ とおくことで得られるので、 $\det(A - xE)$ に $x = 0$ を代入した

$$\det(A)$$

が定数項となる

多項式の最高次の係数に $(-1)^n$ がつくのは面倒なので、 $\det(A - xE)$ の代わりに、その $(-1)^n$ 倍である

$$\det(xE - A)$$

を考えることが多い

実際、 $\det(xE - A)$ を展開すると、

$$\det(xE - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$


となり、 x の前に (-1) がつかずに済む

 特性多項式 A を正方行列、 x を変数として、


$$\Phi_A(x) = \det(xE - A)$$

とおく

これを特性多項式あるいは固有多項式と呼ぶ

 特性多項式の構造 A を n 次正方行列とすると、特性多項式は、次のような n 次多項式である

$$\Phi_A(x) = x^n - \operatorname{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

 特性方程式 特性多項式 $\Phi_A(x)$ の根を求める方程式

$$\Phi_A(x) = 0$$

を、特性方程式あるいは固有方程式と呼ぶ