# Chapter 1

# ε - δ 論法と関数の極限

ここまでのこの本では、極限というものを厳密に定義していなかった。また、微分と積分において、イメージで導出できることを最重視し、厳密な議論を避けた箇所が多くある。

厳密には、極限は ε - δ 論法によって定義され、微分積分の基礎理論は極限の議論に基づいている。ε - δ 論法に踏み込んでいない私たちは、極限というものを語る言葉をまだ持ち合わせていない。

## 1.1　実数の基礎

厳密な理論を展開する前に、知っておくべき言葉の定義を行う。

### 1.1.1　区間

2 つの実数の間の範囲は、区間と呼ばれる。

**区間**

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合のうち、$a < b$ である実数 $a$ と $b$ の間にあるすべての実数の集合を 区間 という。

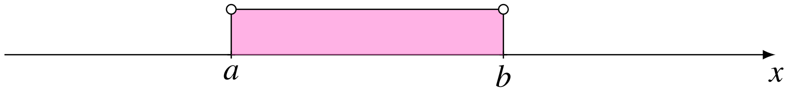
区間は、端点を含むかどうかによって、開区間、閉区間、半開区間に分類される。

#### 開区間

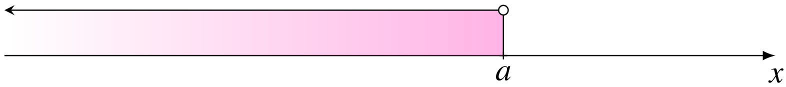
端点を含まない区間を開区間という。

**開区間**　$a \leq x \leq b$ となる実数 $x$ の集合を 開区間 といい、$(a, b)$ と表す。

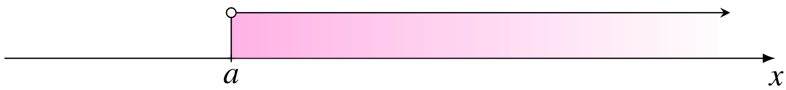
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$




$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$




$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\}$$




## 閉区間

端点を含まない区間を閉区間という。

**閉区間**　$a < x < b$ となる実数 $x$ の集合を 閉区間 といい、$[a, b]$ と表す。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$


$$[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$


$$[-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}$$


## 半開区間

一方の端点を含み、他方の端点を含まない区間を半開区間という。

**半開区間** 次のような集合を 半開区間 という。

- $a \leq x < b$ となる実数 $x$ の集合を、$[a, b)$ と表す。
- $a < x \leq b$ となる実数 $x$ の集合を、$(a, b]$ と表す。

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$


$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$