読書ノート：「集合と位相」をなぜ学ぶのか

tomixy

2025 年 5 月 21 日

目次

熱伝導方程式とフーリエ級数

細長い棒状の物体があったとする

時刻 t における、左端から右に向かって距離 x の位置での、この物体の温度を $u(x,t)$ と表す

このとき、u の変化は、次の熱伝導方程式に従う

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

* * *

棒の両端での温度をゼロに保ち、初期状態での温度が位置 x の関数 $f(x)$ で与えられているものとして、温度 u のその後の変化を追っていく

計算を簡単にするため、棒の長さが円周率 π となるように長さの単位を選ぶことにする

すると、棒の左端では $x=0$、右端では $x=\pi$ であるから、両端の温度がいつでもゼロであるという条件は

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

と表現される

この条件を熱伝導方程式に対する境界条件という

また、最初の温度が $f(x)$ で与えられるという条件は、

$$u(x,0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

と表現できる

この条件を熱伝導方程式に対する初期条件という

熱伝導方程式を、これらの境界条件と初期条件のもとで解けばよい

* * *

熱伝導方程式と境界条件は、次の性質をもつ

- u_1 と u_2 が熱伝導方程式と境界条件を満たすとき、和 $u_1 + u_2$ もまた熱伝導方程式と境界条件を満たす
- u が熱伝導方程式と境界条件を満たすとき、その任意の定数倍 ku もまた熱伝導方程式と境界条件を満たす

熱伝導方程式のこの性質を、重ね合わせの原理という

* * *

フーリエは、重ね合わせの原理を活用して、

1. 方程式と境界条件を満たす関数のうち、なるべく簡単なものを求める
2. 得られた簡単な形の関数を足し合わせることで、初期条件を満たす関数を作る

という二段構えで問題を解こうとした

まず、熱伝導方程式の変数分離型の解のうち、境界条件を満たすのは、

$$e^{-n^2 t}\sin(nx) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

という形のものとその定数倍だけであることがわかる

> 注：ただし、棒の長さが π ではなく、一般に長さ L の棒であれば、ここでの解は
>
> $$e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$
>
> という形になる

重ね合わせの原理により、この関数に定数 b_n をかけて、たとえば $1 \leq n \leq N$ の範囲で足し合わせた

$$\sum_{n=1}^{N} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

という関数も、方程式と境界条件を満たす

ここでフーリエは大胆にも、和の上限 N をなくした無限和

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 t}\sin(nx)$$

も方程式と境界条件を満たすだろうと主張した

そして、初期条件を満たす関数 u を求めるためには、上の式の右辺で $t = 0$ とした式を関数 $f(x)$ と等値した

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

が成り立つように定数 b_n を定めればよいと考えた

この式が有限和

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx)$$

であった場合には、両辺に $\sin kx$ をかけて 0 から π まで積分すれば、定積分の公式

$$\int_0^{\pi} \sin nx \sin kx \, dx = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ \frac{\pi}{2} & (n = k) \end{cases}$$

によって、

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{\pi}{2} b_k$$

となり、b_n は積分

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

で求められる

無限和の場合も同様に、与えられた関数 $f(x)$ に対して、この式で b_n を定めれば、無限級数が成立するだろうとフーリエは主張した

＊　＊　＊

こうして、熱伝導方程式を解く方法の一環として、関数 $f(x)$ から得られる積分値を係数とした三角関数の和で $f(x)$ を表示する、という着想にフーリエは至った

$f(x)$ からこの方法で得られる三角関数の和を、$f(x)$ のフーリエ級数という

> 注：ここでは、$f(x)$ が区間の両端でゼロになる場合だけを扱ったため、フーリエ級数がサイン関数だけの和になった
> 一般には、区間の両端で値が一致しない関数や、原点でグラフが対称でない関数も含めて考えるために、サイン関数とコサイン関数の和を考える

＊　＊　＊

フーリエの理論の問題点

一般に、$-\pi$ から π までの実数 x に対して定義された関数 $f(x)$ に対して、a_n と b_n を

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

のように定めれば、$f(x)$ のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

という形を持つことになる

フーリエ級数は、収束するかどうかわからない上、収束しても値が $f(x)$ と一致するかどうかわからないため、一般には、この式の両辺を等号で結ぶことはできない

そこで、左辺の関数のフーリエ級数は右辺の級数だよ、ということを表現するために、等号の代わりに ~ 記号を用いる

＊　＊　＊

フーリエの議論の一番の問題点は、無限級数の項別積分の可能性にあった

仮に、関数 $f(x)$ が本当に三角関数の和として

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

の形で与えられているとしても、このことから、たとえば

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

を結論づけるには、無限和と積分の順序交換、すなわち項別積分