0.1. 論理

1

## 0.1 論理

数学では「曖昧さ」を取り除いた議論が重要である。

ここでは、文章 (表現) の曖昧さを取り除くために、文章の意味を記号化して扱おう、というアプローチを考えていく。

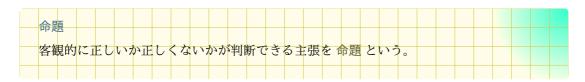
### 0.1.1 命題:客観的視点に絞る

数学では、多くの問いを立てて、それが正しいかどうかをひとつひとつ確かめていくことになる。 このとき、数学の議論の対象にできるのは、主観を含まない、「真偽を問うことができる」文章で ある。

たとえば、「数学は面白い」という文章は、私たちにとっては事実かもしれないが、主観を含む(も はや個人的感想に近い)主張である。

このような、人によって回答が分かれるような文章について議論するのは、また別の学問領域に 任せてしまおう。

数学の議論の対象とできる文章は、「正しい」か「正しくない」かをはっきりと定められるもので、 そのような文章は<mark>命題</mark>と呼ばれる。



#### 0.1.2 記号化:解釈を一通りに絞る

数学で扱う命題は、文章ではなく記号で表現されることも多い。どのような記号をどんな意味で 使うかを見ていく前に、そもそもなぜ記号化するのか、ということを考えておきたい。

私たちが日常で使う言葉は、表現のパターンがあまりにも多い。英語に比べると、日本語は特に その傾向がある。

たとえば、次の3つの文章は、まったく同じことを主張しているものである。

- 1. パンケーキは太る
- 2. パンケーキを食べると太る
- 3. パンケーキを食べたならば、体重が増える

1つめの文章は、ネイティブの日本人の間では問題なく伝わるが、日本語に慣れていない人には伝わらない可能性がある。

実際にこのような日本語を聞いて、「パンケーキ=太る」ってどういうこと…?となる外国人は多いらしい。「パンケーキ」と「太る」が「=」で結ばれているかのように見える時点で、問題がある。

2つめの文章では、より意味が明確になった。この文章であれば、英語が苦手な私が英訳を試みたとしても、"Pancakes is fat."みたいな奇妙な英文を生み出さずに済むだろう。

3つめの文章は、少し堅苦しく感じるかもしれない。しかし、これが最も数学らしい表現である。「パンケーキを食べた」と「体重が増える」という2つの事象が「ならば」で結ばれていて、論理の構造がはっきりしている。

\* \* \*

このように、何通りもの表現がある文章は、人によって解釈が異なる可能性がある。

客観的な主張であるはずの命題も、その表し方によって解釈の齟齬が生まれてしまうと、結局正 しいか正しくないかが人によって異なる事態に陥ってしまうかもしれない。

解釈を一通りにするには、表し方を統一してしまうのが手っ取り早い。そのために、共通認識と して定義された記号を使って文章を表現するのが、数学のアプローチなのである。

#### 0.1.3 真偽値:正しさを値とみなす

ここからは、命題を記号化する具体的なルールを見ていこう。

命題は、主張の内容によって「正しい」か「正しくない」かが決まる。 このとき、「正しい」ことを真と呼び、「正しくない」ことを偽と呼ぶ。

命題の真偽				
• 命題が正し	Jいとき、その	命題は真であると	いう。	
● 命題が正し	<b>しくないとき、</b>	その命題は偽であ	るという。	

命題は必ず「真」か「偽」のどちらかに決定されるため、この「真」や「偽」を命題が持つ値として考えて、**真**偽値と呼ぶことがある。

0.1. 論理 3

さらに、コンピュータでの応用を見据えて、真偽値を0と1で表すことがある。

真	為個	1																					
	•	命題	゚゙゚゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙゙	真で	あ	ると	き,	そ	· の	命題	夏の	真偽	自值	は 1	で	ある	ると	する	<b>5</b> 。				
	•	命題	がん	為で	あ	ると	き、	、そ	· の	命題	夏の	真偽	自値	は(	で	ある	ると	する	<b>5</b> 。				

- 論理演算子
- 論理式

# 0.1.4 命題関数