微分積分の整理帳

tomixy

2025 年 7 月 20 日

目次

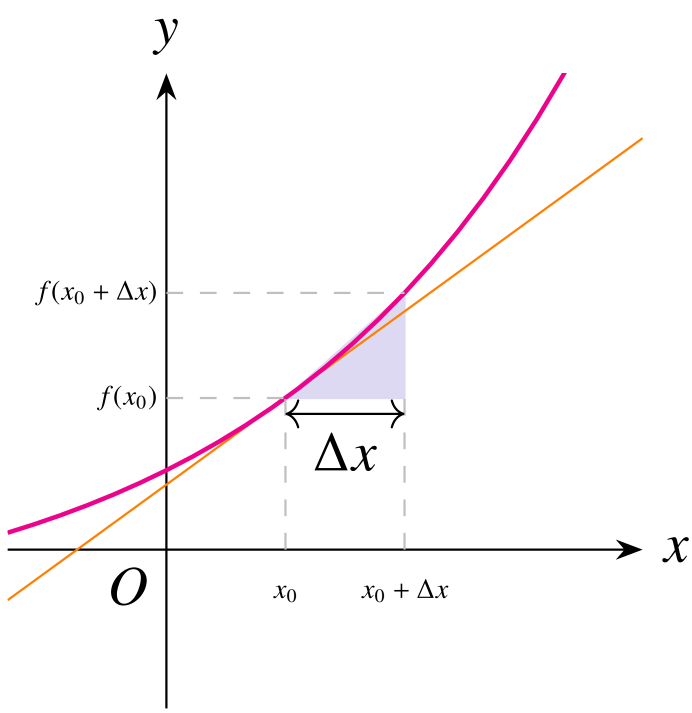
第 1 章

1 変数関数の微分

微分とは、複雑な問題も「拡大して見たら簡単に見える（かもしれない）」という発想で、わずかな変化に着目して入力と出力の関係（関数）を調べる手法といえる。

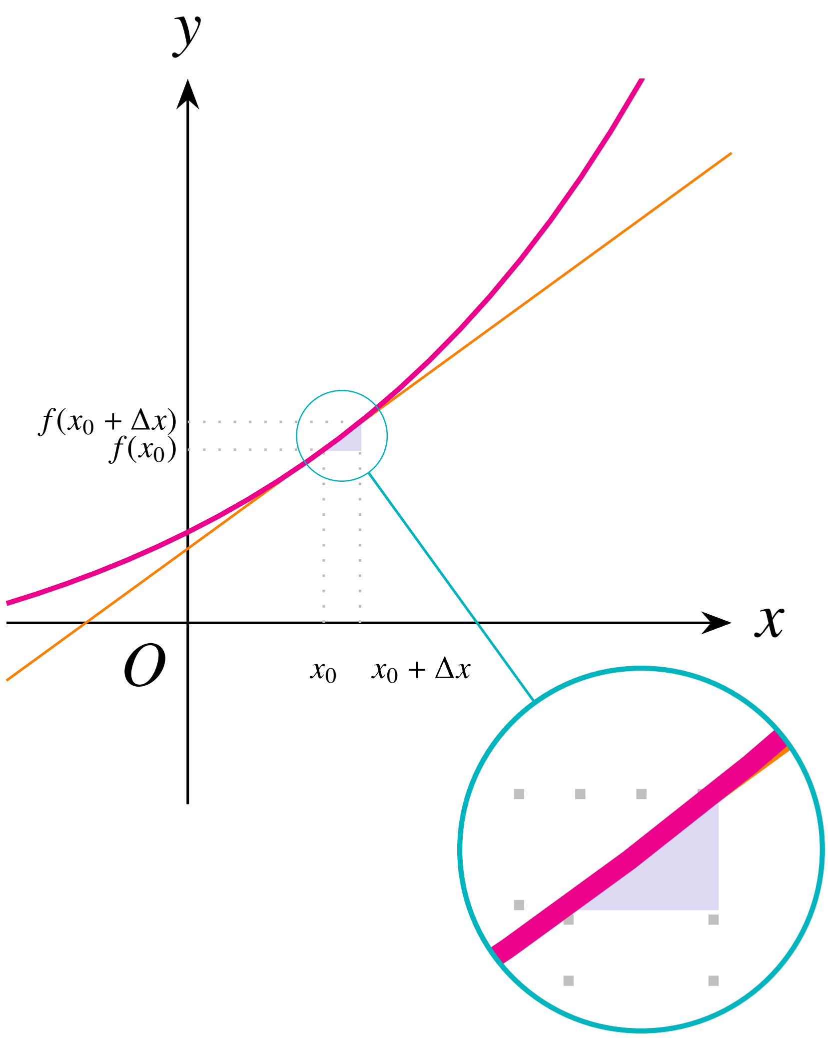
接線：拡大したら直線に近似できる

関数 $y = f(x)$ について、引数の値を $x = x_0$ からわずかに増加させて、$x = x_0 + \Delta x$ にした場合の出力の変化を考える。



このとき、増分の幅 Δx を狭くしていく（Δx の値を小さくしていく）と、$x = x_0$ 付近において、関

数 $y = f(x)$ のグラフは直線にほとんど重なるようになる。



このように、関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

$$f(x) \simeq a(x - x_0) + b$$

という直線に近似することができる。

ここで、$f(x_0)$ の値を考えると、

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a(x_0 - x_0) + b \\ &= a \cdot 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$

であるから、実は $b = f(x_0)$ である。

一方、a はこの直線の傾きを表す。

そもそも、傾きとは、x が増加したとき、y がどれだけ急に（速く）増加するかを表す量である。
関数のグラフを見ると、急激に上下する箇所もあれば、なだらかに変化する箇所もある。
つまり、ある点でグラフにぴったりと沿う直線（接線）を見つけたとしても、その傾きは場所によって異なる。
そこで、「傾きは位置 x の関数」とみなして、次のように表現しよう。

$$a = f'(x)$$

これで、先ほどの直線の式を完成させることができる。

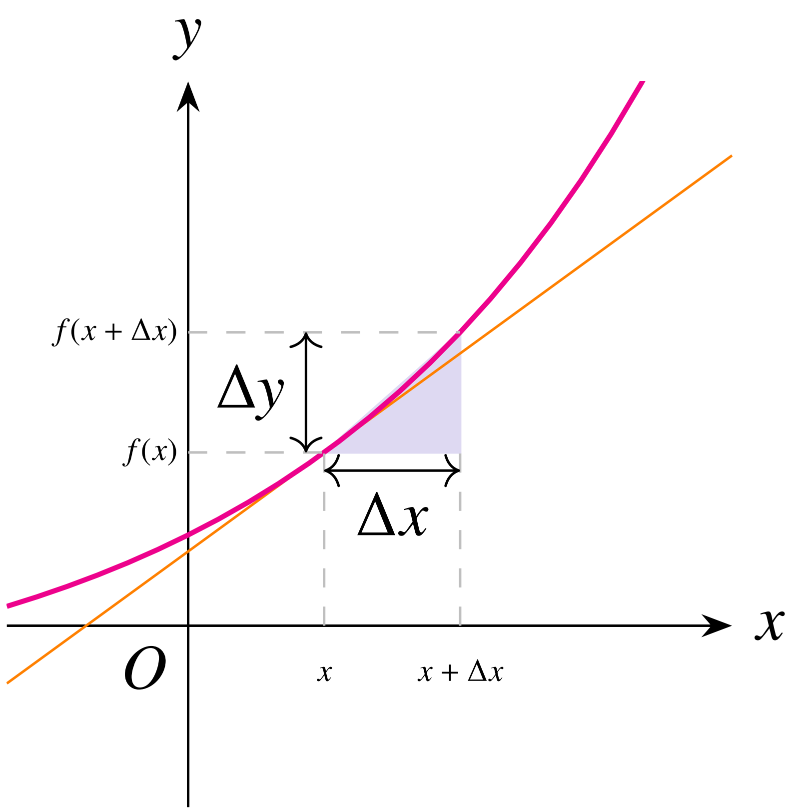
関数の各点での直線による近似　関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

という傾き $f'(x)$ の直線に近似できる。

接線の傾きとしての導関数

傾きは位置 x の関数 $f'(x)$ としたが、この関数がどのような関数なのか、結局傾きを計算する方法がわかっていない。
直線の傾きは x と y の増加率の比として定義されているから、まずはそれぞれの増加率を数式で表現しよう。



この図から、y の増加率 Δy は次のように表せることがわかる。

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

この両辺を Δx で割ると、x の増加率 Δx と y の増加率 Δy の比率が表せる。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

図では Δx には幅があるが、この幅を限りなく 0 に近づけると、幅というより点になる。
つまり、$\Delta x \to 0$ とすれば、$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は任意の点 x での接線の傾きとなる。
「任意の点 x での傾き」も x の関数であり、この関数を導関数と呼ぶ。

導関数　関数 $f(x)$ の任意の点 x における接線の傾き（増加の速さ）を表す関数を導関数といい、次のように定義する。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

微分とその関係式

微分　関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求める操作を微分という。

関数のグラフから離れて、微分という「計算」を考えるにあたって、先ほどの導関数の定義式よりも都合の良い表現式がある。

$x \to 0$ とした後の Δx を dx と書くことにして、$\lim\limits_{\Delta x \to 0}$ を取り払ってしまおう。

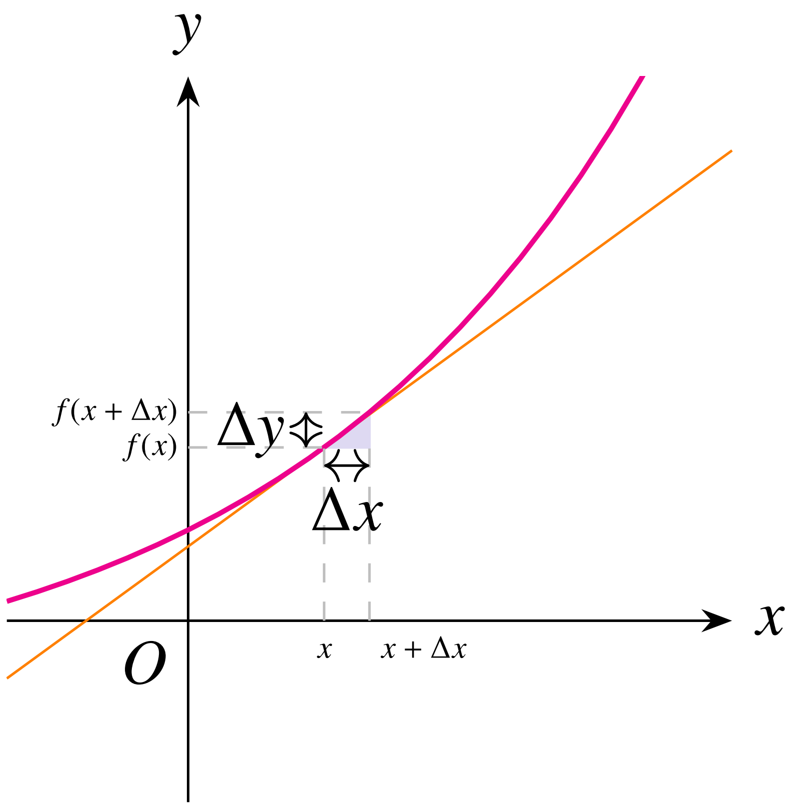
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} && \text{両辺} \times dx \\
f'(x)dx &= f(x+dx)-f(x) && f(x)\ \text{を移項} \\
f'(x)dx + f(x) &= f(x+dx)
\end{aligned}
$$

微分の関係式

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$$

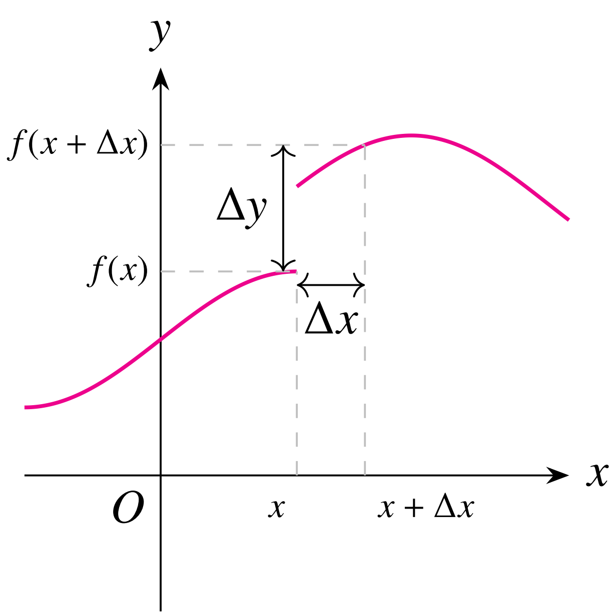
不連続点と微分可能性

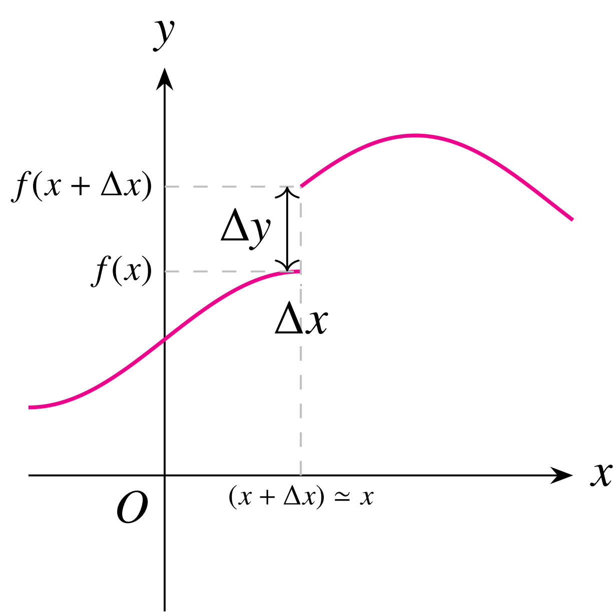
点 x において連続な関数であれば、幅 Δx を小さくすれば、その間の変化量 Δy も小さくなるはずである。



しかし、不連続な点について考える場合は、そうはいかない。

下の図を見ると、Δx の幅を小さくしても、Δy は不連続点での関数の値の差の分までしか小さくならない。





このような不連続点においては、どんなに拡大しても、関数のグラフが直線にぴったりと重なることはない。

「拡大すれば直線に近似できる」というのが微分の考え方だが、不連続点ではこの考え方を適用できないのだ。

関数の不連続点においては、微分という計算を考えることがそもそもできない。

ある点での関数のグラフが直線に重なる（微分可能である）ためには、$\Delta x \to 0$ としたときに $\Delta y \to 0$ となる必要がある。

導関数のさまざまな記法

微分を考えるときは、$\Delta x \to 0$ としたときに $\Delta y \to 0$ となる前提のもとで議論する。

$\Delta x \to 0$ とした結果を dx、$\Delta y \to 0$ の結果を dy とすると、ある点 x での接線の傾きは、次のようにも表現できる。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

この接線の傾きが x の関数であることを表現したいときは、次のように書くこともある。

$$\frac{dy}{dx}(x)$$

これも一つの導関数（位置に応じた接線の傾きを表す関数）の表記法である。

この記法は、どの変数で微分しているかがわかりやすいという利点がある。

導関数のライプニッツ記法　次のような記号はいずれも、関数 $y = f(x)$ の導関数を表す。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

特に、$\dfrac{d}{dx}f(x)$ という記法は、$\dfrac{d}{dx}$ の部分を微分操作を表す演算子として捉えて、「関数 $f(x)$ に微分という操作を施した」ことを表現しているように見える。

微分演算子　関数を微分するという操作を表現する演算子を微分演算子という。

例えば、次のような記号で表される。

$$\frac{d}{dx}$$

ところで、これまで使ってきた $f'(x)$ という導関数の記法にも、名前がついている。

導関数のニュートン記法　次の記号は、関数 $y = f(x)$ の導関数を表す。

$$f'(x)$$

この記法は、「f という関数から導出された関数が f' である」ことを表現している。
導関数はあくまでも関数 f から派生したものであるから、f という文字はそのまま、加工されたことを表すために $'$ をつけたものと解釈できる。

微分と高次の微小量

まずは、基本的な例として、冪関数 $y = x^n$ の微分を考えてみよう。

$y = x^2$ の微分

$y = f(x) = x^2$ において、x を dx だけ微小変化させると、y は dy だけ変化するとする。
すると、微分の関係式は $y + dy = f(x + dx) = (x + dx)^2$ となるが、これを次のように展開して考える。

$$y + dy = (x + dx)(x + dx)$$

右辺の $(x + dx)(x + dx)$ からは、

- x^2 の項が 1 つ
- xdx の項が 2 つ
- dx^2 の項が 1 つ

現れることになる。
数式で表すと、

$$y + dy = x^2 + 2xdx + dx^2$$

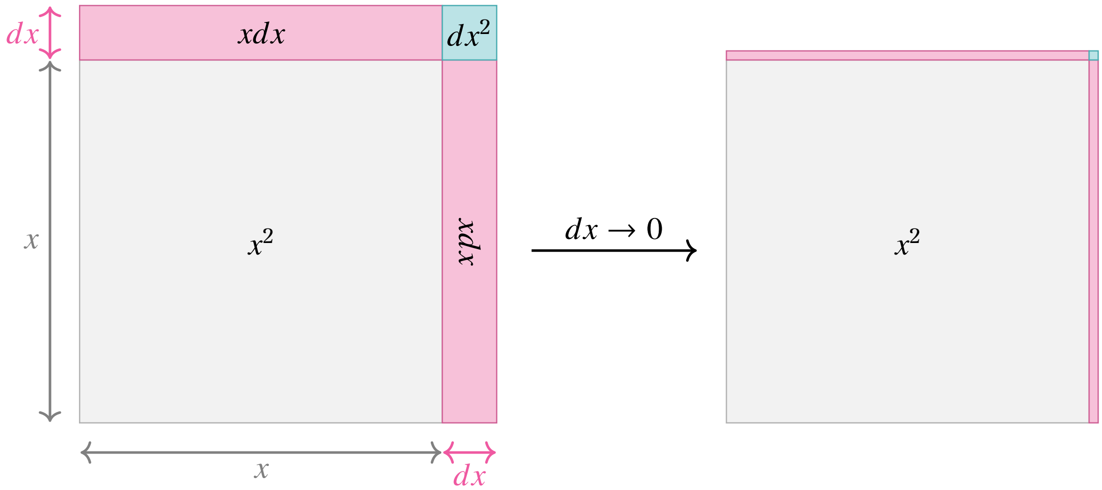
同じ

ここで $y = x^2$ なので、左辺の y と右辺の x^2 は相殺される。

$$dy = 2xdx + \overset{\text{高次の微小量}}{\boxed{dx^2}}$$

さらに、dx^2 の項は無視することができる。

なぜなら、dx を小さくすると、dx^2 は dx とは比べ物にならないくらい小さくなってしまうからだ。



というわけで、次のような式が得られる。

$$dy = 2xdx$$

よって、$y = x^2$ の導関数は、$y' = 2x$ となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$y = x^3$ の微分

同じように、$y = x^3$ の微分を考えてみよう。

$$y + dy = (x + dx)(x + dx)(x + dx)$$

右辺の $(x + dx)(x + dx)(x + dx)$ からは、

- x^3 の項が 1 つ
- x^2dx の項が 3 つ
- dx^3 の項が 1 つ

現れることになる。

$$\boxed{y} + dy = \boxed{x^3} + 3x^2dx + dx^3$$

同じ

ここで $y = x^3$ なので、左辺の y と右辺の x^3 は相殺される。

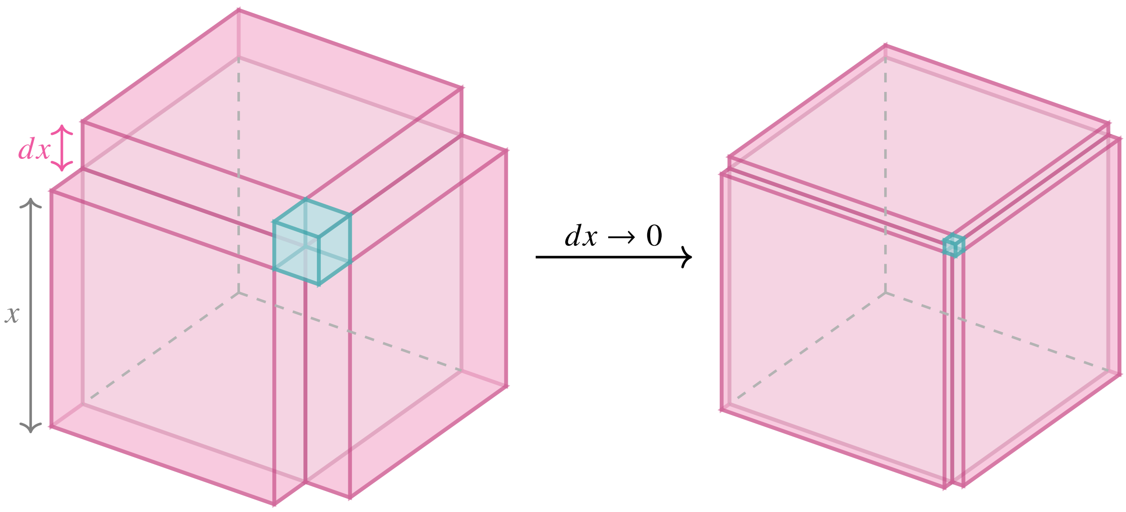
$$dy = 3x^2dx + \overset{\text{高次の微小量}}{\boxed{dx^3}}$$

さらにここでは、dx^3 の項を無視することができる。

次の図を見てみよう。

各辺 dx の立方体は、dx を小さくすると、ほぼ点にしか見えないほど小さくなる。

つまり、各辺 dx の立方体の体積 dx^3 は、考慮する必要がない。



というわけで、$y = x^3$ の導関数は、$y' = 3x^2$ となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$y = x^n$ の微分（n が自然数の場合）

n が自然数だとすると、$y = x^n$ の微分は、$y = x^2$ や $y = x^3$ の場合と同じように考えられる。

$$y + dy = \underbrace{(x + dx)(x + dx) \cdots (x + dx)}_{n\ \text{個}}$$

右辺の $(x + dx)(x + dx) \cdots (x + dx)$ を展開しようすると、次のような 3 種類のかけ算が発生する。

- x どうしのかけ算

- x と dx のかけ算
- dx どうしのかけ算

つまり、右辺からは、

- x^n の項が 1 つ
- $x^{n-1}dx$ の項が n 個
- dx^n の項が 1 つ

という項が現れることになる。

そして、x^n は左辺の y と相殺され、dx^n の項は高次の微小量として無視できる。

すると、残るのは次のような式になるだろう。

$$dy = nx^{n-1}dx$$

この式は、$y = \alpha x$ という直線の式によく似ている。

高次の dx の項 dx^n を無視し、1 次の dx の項だけ残したのは、微分という計算が微小範囲における直線での近似であるからだ。

あくまでも微小範囲での直線の式であることを表すために、x, y を dx, dy として、$dy = \alpha dx$ という形の式になっていると考えればよい。

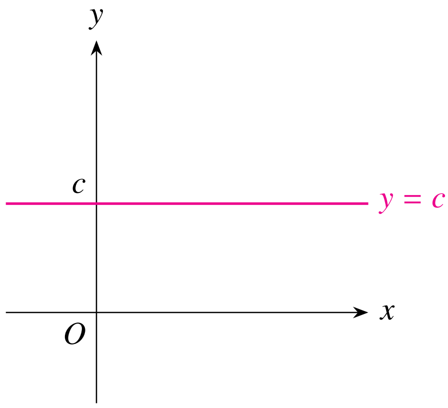
⚓ 自然数の冪を持つ冪関数の導関数　n が自然数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

定数関数の微分

常に一定の値 c を返す定数関数 $f(x) = c$ の微分はどうなるだろうか。

関数のグラフを描いて考えてみよう。



定数関数のグラフは、x 軸に対して平行な直線であり、この直線の傾きは見るからに 0 である。

実際、導関数の定義に従って計算することで、定数関数の導関数は 0 になることを確かめられる。

REVIEW

導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

どの点 x においても $f(x)$ が c を返すということは、$f(x + \Delta x)$ も c であるため、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、定数関数 $f(x) = c$ の微分の結果は c に依存せず、常に 0 になる。

定数関数の微分　常に定数 c の値をとる定数関数 $f(x) = c$ は、微分すると 0 になる。

$$\frac{d}{dx} c = 0$$

微分の性質

微分の関係式を使うことで、微分に関する有用な性質を導くことができる。

REVIEW

微分の関係式

$$f(x+dx) = \underbrace{f(x)}_{\text{元の関数}} + \underbrace{f'(x)}_{\text{導関数}}\,dx$$

関数の一次結合の微分

$\alpha f(x)+\beta g(x)$ において、x を dx だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned}\alpha f(x+dx)+\beta g(x+dx) &= \alpha\{f(x)+f'(x)dx\}+\beta\{g(x)+g'(x)dx\}\\ &= \underbrace{\alpha f(x)+\beta g(x)}_{\text{元の関数}}+\{\underbrace{\alpha f'(x)+\beta g'(x)}_{\text{導関数}}\}dx\end{aligned}$$

微分の線形性

$$(\alpha f(x)+\beta g(x))' = \alpha f'(x)+\beta g'(x)$$

関数の積の微分

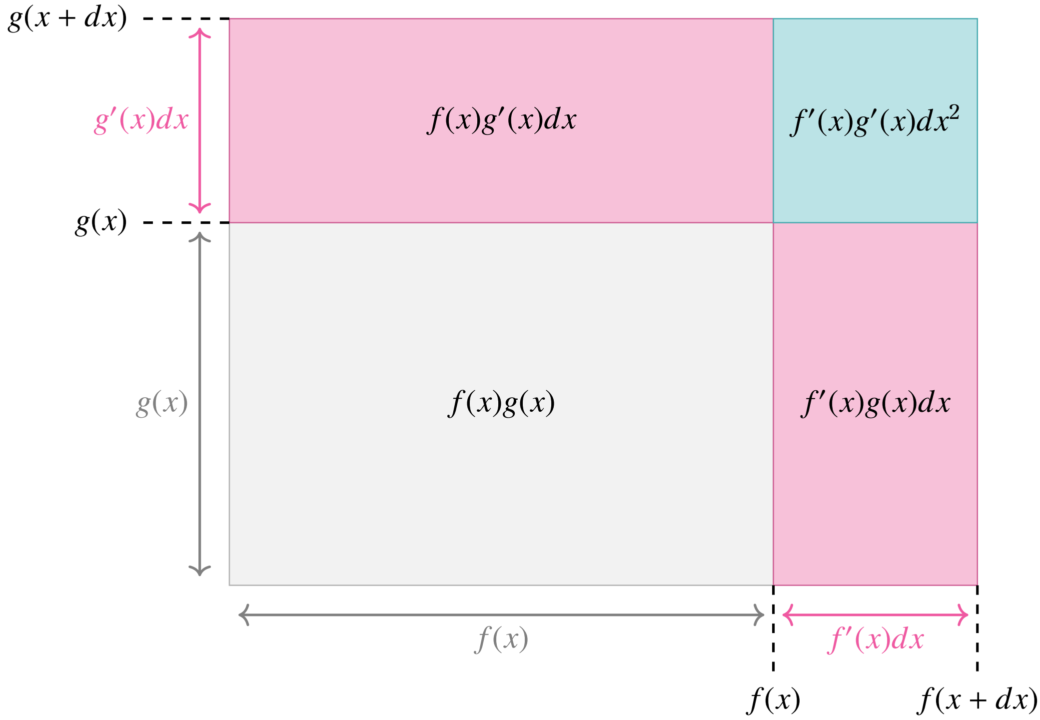
$f(x)g(x)$ において、x を dx だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned}f(x+dx)g(x+dx) &= \{f(x)+f'(x)dx\}\{g(x)+g'(x)dx\}\\ &= f(x)g(x)+f'(x)g(x)dx+f(x)g'(x)dx+f'(x)g'(x)dx^2\\ &= f(x)g(x)+\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx+\underbrace{f'(x)g'(x)dx^2}_{\text{2 次以上の微小量}}\end{aligned}$$

ここで、dx^2 は、dx より速く 0 に近づくので無視できる。

荒く言ってしまえば、dx でさえ微小量なのだから、dx^2 なんて存在しないも同然だと考えてよい。

このことは、次の図を見るとイメージできる。



$dx \to 0$ のとき $dy \to 0$ となる場合に微分という計算を定義するのだから、dx を小さくしていくと、dy にあたる $f(x+dx)-f(x)$（これは $f'(x)dx$ と等しい）も小さくなっていく。

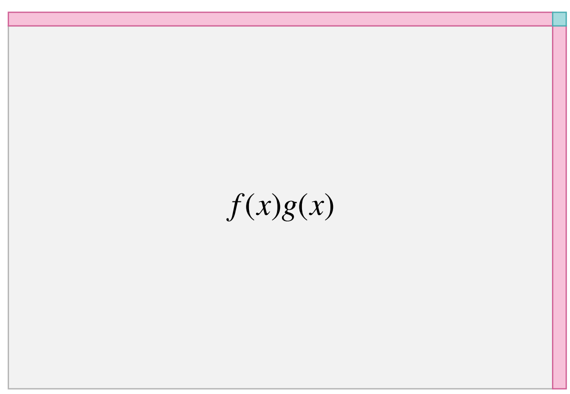
同様にして、$g(x+dx)-g(x)$（これは $g'(x)dx$ と等しい）も小さくなっていく。

REVIEW

微分の関係式 $f(x+dx)=f(x)+f'(x)dx$ より、

$$f'(x)dx = f(x+dx)-f(x)$$

dx を小さくした場合を図示すると、



2 次以上の微小量

$f'(x)g'(x)dx^2$ に相当する左上の領域は、ほとんど点になってしまうことがわかる。

このように、dx^2 の項は無視してもよいものとして、先ほどの計算式は次のようになる。

$$f(x+dx)g(x+dx) = \underbrace{f(x)g(x)}^{\text{元の関数}} + \{\underbrace{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}^{\text{導関数}}\}dx$$

微分のライプニッツ則

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

合成関数の微分

合成関数の微分の一般的な式は、いろいろな関数の微分を考える上で重要な公式である。

関数の微小変化量

関数 $f(x)$ において、変数 x を dx だけ微小変化させた式は、これまで何度も登場した。

$$f(x+dx) = f(x) + \overbrace{f'(x)dx}^{\text{増えた分}}$$

この式は、「x を dx だけ微小変化させることで、関数 f の値は $f'(x)dx$ だけ増加した」と捉えることもできる。

言い換えれば、関数 f の微小変化量は $f'(x)dx$ だということだ。

変化量という観点で眺めるには、次のように移項した式がわかりやすいかもしれない。

$$\overbrace{f(x+dx)-f(x)}^{\text{区間 } dx \text{ での変化}} = \overbrace{f'(x)dx}^{\text{変化量}}$$

関数 f の微小変化量 $f'(x)dx$ を、df と表すことにしよう。

合成関数の微分の関係式

今回はさらに、$t = f(x)$ を関数 $g(t)$ に放り込むことを考える。

$g(t)$ についても、次のような微分の関係式が成り立つはずだ。

$$g(t+dt) = g(t) + g'(t)dt$$

合成関数 $g(f(x))$ を作るため、$t = f$（引数 (x) を省略して書いた関数 $f(x)$）を代入する。

$$g(f+df) = g(f) + g'(f)df$$

f を $f(x)$ に、df を $f'(x)dx$ に書き戻すと、

$$g(f(x) + f'(x)dx) = g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)dx$$

となり、左辺の $g()$ の中身 $f(x) + f'(x)dx$ は $f(x+dx)$ と書き換えられるので、次の式を得る。

$$g(f(x+dx)) = \overbrace{\boxed{g(f(x))}}^{\text{元の関数}} + \overbrace{\boxed{g'(f(x))f'(x)}}^{\text{導関数}}\,dx$$

⚓ **合成関数の微分（ニュートン記法による表現）** 合成関数 $g(f(x))$ の微分は、次の式で表される。

$$(g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$$

連鎖律としての表現

ニュートン記法による表現はなかなかに覚えづらい式に見えるが、ライプニッツ記法を使って書き直すと、実は単純な関係式になっている。

- $(g(f(x)))'$ は、$g(f(x))$ を x で微分したもの：$\frac{d}{dx}g(f(x))$
- $f'(x)$ は、$f(x)$ を x で微分したもの：$\frac{d}{dx}f(x)$
- $g'(f(x))$ は、$g(t)$ を t で微分したもの $\frac{d}{dt}g(t)$ に、$t = f(x)$ に代入したもの：$\frac{d}{df}g(f(x))$

として書き直すと、

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{df}g(f(x))$$

さらに、引数を省略して書くと、

$$\frac{dg}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{df}$$

これは、df を約分できると考えたら、当たり前の式になっている。

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\cancel{df}}{dx} \cdot \frac{dg}{\cancel{df}}$$

合成関数の微分（連鎖律：ライプニッツ記法による表現） $y = f(x)$、$z = g(y)$ という関係があるとき、次の式が成り立つ。

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

これは、x が微小変化すると y も微小変化し、さらに連鎖して z も微小変化するという関係から、連鎖律と呼ばれる。

ネイピア数と指数関数の微分

指数関数を定義した際に、「どんな数も 0 乗したら 1 になる」と定義した。

つまり、指数関数 $y = a^x$ において、$x = 0$ での関数の値は 1 である。

ここでさらに、$x = 0$ でのグラフの傾きも 1 となるような a を探し、その値をネイピア数と呼ぶことにする。

ネイピア数（自然対数の底） 指数関数 $y = a^x$ において、$x = 0$ での接線の傾きが 1 となるような底 a の値をネイピア数と呼び、e と表す。

この定義では、「$x = 0$ では関数の値も傾きも等しく 1 になる」という、$x = 0$ での振る舞いにしか言及していない。

だが、実はネイピア数を底とする指数関数は、「微分しても変わらない（すべての x において、関数の値と傾きが一致する）」という性質を持つ。

ネイピア数を底とする指数関数の微分

指数関数 $y = e^x$ の微分は、導関数の定義から次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
&= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

ここで、$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ は x によらない定数であり、

$$
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x}
$$

というように、これは $x = 0$ における傾き（導関数に $x = 0$ を代入したもの）を表している。

そもそも、ネイピア数 e の定義は「$x = 0$ での e^x の傾きが 1」というものだったので、

$$
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1
$$

となり、「e^x は微分しても変わらない」という性質が導かれる。

$$
\frac{d}{dx}e^x = e^x
$$

⚓ **ネイピア数を底とする指数関数の微分**　ネイピア数を底とする指数関数は、微分しても変わらない関数である。

$$
\frac{d}{dx}e^x = e^x
$$

指数が定数倍されている場合

$y = e^{kx}$ のように、指数が定数倍（k 倍）されている場合は、合成関数の微分の公式を使って計算できる。

$t = kx$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{d}{dx}(kx) \cdot \frac{d}{dt}(e^t) \\
&= k\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}} \cdot e^t \\
&= ke^t \\
&= ke^{kx}
\end{aligned}
$$

となり、e^{kx} 自体は変わらず、指数の係数 k が e の肩から「降りてくる」形になる。

⚓ ネイピア数を底とする指数関数の微分（指数が定数倍されている場合） k を定数とし、指数が k 倍されている場合は、微分すると全体が k 倍される。

$$
\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx}
$$

指数が関数の場合

指数が関数になっている場合 $y = e^{f(x)}$ の微分も、合成関数の微分を使って考えればよい。

$t = f(x)$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\
&= \frac{d}{dt}e^t \cdot \frac{d}{dx}f(x) \\
&= e^t \cdot f'(x) \\
&= e^{f(x)} \cdot f'(x)
\end{aligned}
$$

⚓ ネイピア数を底とする指数関数の微分（指数が関数の場合）

$$
\frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}
$$

高階微分

関数 $f(x)$ を微分したもの $f'(x)$ をさらに微分して、その結果をさらに微分して…というように、「導関数の導関数」を繰り返し考えていくことを高階微分という。

まずは、2 回微分した場合について定義しよう。

$f(x)$ を 2 回微分したものは、ニュートン記法では $f''(x)$ と表される。

ライプニッツ記法で表現するには、次のように考えるとよい。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)=\left(\frac{d}{dx}\right)^2 f(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

二階微分（二階導関数） 関数 $f(x)$ を微分して得られた導関数 $f'(x)$ をさらに微分することを二階微分といい、その結果得られた導関数を二階導関数という。

二階導関数は、次のように表記される。

$$f''(x)=\frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

n 階微分も同様に定義される。

n が大きな値になると、プライム記号をつける表記では $f'''''''(x)$ のようになってわかりづらいので、$f^{(n)}(x)$ のようにプライムの数 n を添える記法がよく使われる。

n 階微分（n 階導関数） 関数 $f(x)$ を n 回微分することを n 階微分といい、その結果得られた導関数を n 階導関数という。

n 階導関数は、次のように表記される。

$$f^{(n)}(x)=\frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

冪関数の高階微分

n 次の冪関数 $f(x)=x^n$ を k 回微分すると、次のようになる。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^n \\
f'(x) &= nx^{n-1} \\
f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} \\
f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))x^{n-k} \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}
\end{aligned}
$$

ここで、$k = n$ とすると、

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)x^{n-n} \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 1 \cdot x^0 \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 1 \\
&= n!
\end{aligned}
$$

となり、n 階微分した時点で定数 $n!$ になるので、これ以上微分すると 0 になる。

$$
f^{(n+1)}(x) = 0
$$

⚓ n 次冪関数の高階微分

n 次冪関数 $f(x) = x^n$ の n 階微分は $n!$ となり、$n+1$ 回以上微分すると 0 になる。

$$
f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= n! \\
f^{(n+1)}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

指数関数の高階微分

ネイピア数を底とする指数関数 $f(x) = e^x$ は、何度微分しても変わらない関数である。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^x \\
f'(x) &= e^x \\
f''(x) &= e^x \\
f'''(x) &= e^x \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= e^x
\end{aligned}
$$

⚓ ネイピア数を底とする指数関数の高階微分

e を底とする指数関数 $f(x) = e^x$ の n 階微分は変わらず e^x となる。

$$
f(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f^{(n)}(x) = e^x
$$

指数が k 倍されている場合 $f(x) = e^{kx}$ は、微分するたびに k が前に落ちてきて、n 階微分すると k^n が前につくことになる。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{kx} \\
f'(x) &= ke^{kx} \\
f''(x) &= k^2e^{kx} \\
f'''(x) &= k^3e^{kx} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= k^ne^{kx}
\end{aligned}
$$

⚓ ネイピア数を底とする指数関数の高階微分（指数が定数倍されている場合） e を底とし、指数が定数 k 倍された指数関数 $f(x) = e^{kx}$ の n 階微分は k^ne^{kx} となる。

$$
f(x) = e^{kx} \quad \Longrightarrow \quad f^{(n)}(x) = k^ne^{kx}
$$

高階微分による近似：テイラー展開

微分の導入として話した、関数の各点での直線による近似に立ち返ろう。

REVIEW

関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

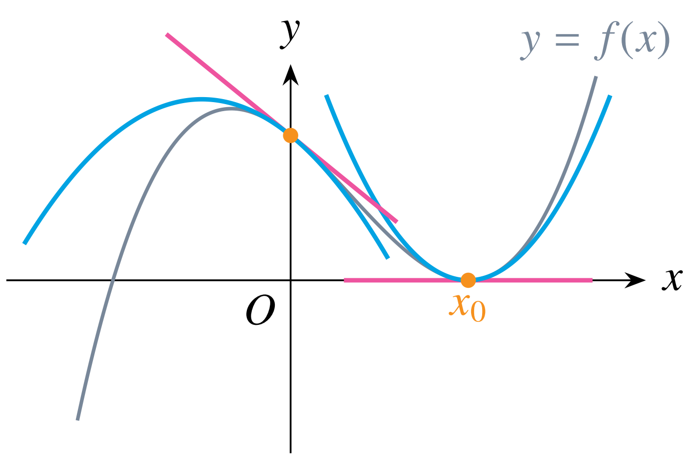
という傾き $f'(x)$ の直線に近似できる。

この式に $x = x_0$ を代入すると、

$$\begin{aligned} f(x_0) &\simeq f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) \\ f(x_0) &\simeq f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 \\ \therefore \quad f(x_0) &= f(x_0) \end{aligned}$$

となり、たしかに点 x_0 では一致することがわかる。

ここで、両辺を高階微分しても、点 x_0 で一致するような近似式を作りたい。
一階微分が一致するなら点 x_0 でのグラフの傾きが等しく、二階微分が一致するなら点 x_0 でのグラフの曲がり具合が等しい、…といった具合に、高階微分を一致させていけば、どんどん本物の関数 $f(x)$ に近い近似式が得られるからだ。



n 階微分してから $x = x_0$ を代入しても、$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ が成り立つようにするには、近似式の右辺 $f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ をどのように変更すればよいだろうか？

$f'(x)(x-x_0)$ の n 階微分

右辺を微分した時点で定数項 $f(x_0)$ は消えてしまうので、$f'(x)(x-x_0)$ の微分結果だけが残ることになる。

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(f'(x)(x-x_0)\right)$$

そこで、$f'(x)(x-x_0)$ の高階微分がどうなるかを探っていく。1 階微分から順に見ていこう。

この計算では、関数の積の微分（ライプニッツ則）を思い出す必要がある。

REVIEW

関数の積の微分（ライプニッツ則）

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

積の各項の微分を計算しておくと、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}f'(x) = f''(x) \\
&\frac{d}{dx}(x-x_0) = \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}x_0 = 1 - 0 = 1
\end{aligned}$$

となるので、ライプニッツ則より、1 階微分は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= \underbrace{\boxed{f''(x)}}_{f'(x)\text{ の微分}}(x-x_0) + f'(x)\cdot\underbrace{\boxed{1}}_{(x-x_0)\text{ の微分}} \\
&= f''(x)(x-x_0) + f'(x)
\end{aligned}$$

この結果をもう一度微分すると、2 階微分が求まる。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= \frac{d}{dx}\left(f''(x)(x-x_0) + f'(x)\right) \\
&= \frac{d}{dx}f''(x)(x-x_0) + \frac{d}{dx}f'(x) \\
&= \underbrace{\boxed{f'''(x)}}_{f''(x)\text{ の微分}}(x-x_0) + f''(x)\cdot\underbrace{\boxed{1}}_{(x-x_0)\text{ の微分}} + f''(x) \\
&= f'''(x)(x-x_0) + 2f''(x)
\end{aligned}$$

さらにもう一度微分することで、3 階微分が求められる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= \frac{d}{dx}\left(f'''(x)(x-x_0)+2f''(x)\right) \\
&= \frac{d}{dx}f'''(x)(x-x_0)+2\frac{d}{dx}f''(x) \\
&= \overbrace{\boxed{f''''(x)}}^{f'''(x)\text{ の微分}}(x-x_0)+f'''(x)\cdot\overbrace{\boxed{1}}^{(x-x_0)\text{ の微分}}+2f'''(x) \\
&= f''''(x)(x-x_0)+3f'''(x)
\end{aligned}
$$

プライム記号の数が増えてきたので、$f'''=f^{(3)}$ のように書き直して結果をまとめると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(2)}(x)(x-x_0)+f^{(1)}(x) \\
\frac{d^2}{dx^2}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(3)}(x)(x-x_0)+2f^{(2)}(x) \\
\frac{d^3}{dx^3}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(4)}(x)(x-x_0)+3f^{(3)}(x) \\
&\vdots \\
\frac{d^n}{dx^n}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(n+1)}(x)(x-x_0)+nf^{(n)}(x)
\end{aligned}
$$

のように続き、n 階微分の結果が得られる。

$x=x_0$ を代入すると…

これで、$f(x)$ の n 階微分 $f^{(n)}(x)$ は、次のように表せることがわかった。

$$
f^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)(x-x_0)+nf^{(n-1)}(x)
$$

ここに、$x=x_0$ を代入してみると、

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)(\underbrace{x_0-x_0}_{0})+n\overbrace{\boxed{f^{(n-1)}(x_0)}}^{\text{定数の微分は }0} \\
&= f^{(n)}(x_0)\cdot 0+n\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

というように、右辺の項がすべて消えて、0 になってしまう。

$f^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$ を成り立たせるには、右辺に項が足りないということになる。

n 階微分して $x = x_0$ を代入しても 0 にならず、$f^{(n)}(x_0)$ として生き残るような項を、元の近似式の右辺に追加する必要がある。

近似式の続きを予想する

具体的にどんな項を加えていけばよいかは、式の規則性から予想していくことにする。

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

という式を、次のように読み替えてみよう。

$$f(x) \simeq \underbrace{f^{(0)}(x_0)(x - x_0)^0}_{0\text{ 次の項}} + \underbrace{f^{(1)}(x_0)(x - x_0)^1}_{1\text{ 次の項}}$$

$f(x_0)$ は 0 階微分（微分を 1 回もしていない、そのままの関数）と考えて、$f^{(0)}(x_0)$ と書いた。

また、0 乗は必ず 1 になるので、$f(x_0)$ の後ろには $(x - x_0)^0 = 1$ が隠れていると考えることができる。

このように書き換えた式をみると、なんとなく次のような続きを予想できる。

$$f(x) \stackrel{?}{=} \underbrace{f^{(0)}(x_0)(x - x_0)^0}_{0\text{ 次の項}} + \underbrace{f^{(1)}(x_0)(x - x_0)^1}_{1\text{ 次の項}} + \underbrace{f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3}_{3\text{ 次の項}} + \cdots$$

この式が正しいかどうかはわからないが、この式をベースに調整を加えていくアプローチを試してみよう。

2 次の項を加えた近似式

まず 2 次の項だけ加えた状態で、$f(x)$ の 2 階微分を考えてみる。

$$f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2$$

このとき、元の近似式は 2 階微分すると 0 になってしまうので、元の近似式にあった 0 次の項と 1 次の項は 2 階微分によって消えてしまうことになる。

よって、$f(x)$ の 2 階微分は、2 次の項だけの微分として考えればよい。

定数なので外に出せる

$$
\begin{aligned}
f''(x) &\overset{?}{=} \frac{d^2}{dx^2}\left(f''(x_0)\ (x-x_0)^2 \right) \\
&= f''(x_0) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(x-x_0)^2 \\
&= f''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\left\{ \frac{d}{dx}(x-x_0)^2 \right\} \\
&= f''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\ (2(x-x_0)) \\
&= f''(x_0) \cdot 2\frac{d}{dx}(x-x_0) \\
&= f''(x_0) \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 2f''(x_0)
\end{aligned}
$$

$$\frac{d}{dx}X^n = nX^{n-1}$$

$x = x_0$ を代入すると、

$$f''(x_0) \overset{?}{=} 2f''(x_0)$$

という、微妙に惜しい結果が得られる。

この結果から、2 次の項に $\dfrac{1}{2}$ をかけておけば、$f''(x_0) = f''(x_0)$ が成り立たせることができるとわかる。

つまり、近似式は次のように修正すればよい。

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2}_{\text{2 次の項}} + \cdots$$

3 次の項を加えた近似式

3 階微分した場合、先ほど追加した 2 次の項も消えてしまうので、さらに 3 次の項を加える必要がある。

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &\overset{?}{=} \frac{d^3}{dx^3}\left(f'''(x_0)(x-x_0)^3\right) \\
&= f'''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left((x-x_0)^3\right)\right)\right) \\
&= f'''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(3(x-x_0)^2\right)\right) \\
&= f'''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\ (3 \cdot 2(x-x_0)) \\
&= f'''(x_0) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1
\end{aligned}
$$

先ほどと同じように考えて、3 次の項に $\dfrac{1}{3\cdot 2\cdot 1} = \dfrac{1}{3!}$ をかけておけば、$f'''(x_0) = f'''(x_0)$ が成り立たせることができる。

これで、近似式は次のようになる。

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3}_{3\text{ 次の項}} + \cdots$$

$2! = 2\cdot 1 = 2$ なので、2 次の項の係数も階乗で書き直している。

0 次の項と 1 次の項についても、$0! = 1$、$1! = 1$ を使って書き換えれば、次のような規則的な式になっていることがわかる。

$$f(x) \simeq \underbrace{\frac{1}{0!}f^{(0)}(x_0)(x - x_0)^0}_{0\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{1!}f^{(1)}(x_0)(x - x_0)^1}_{1\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3}_{3\text{ 次の項}} + \cdots$$

これで、n 次の項まで加えていった一般形が想像つくようになったのではないだろうか。

無限に項を加えた近似式：テイラー展開

同じような考え方で、n 次の項まで加えた近似式を作ることができる。

$$f(x) \simeq \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$n \to \infty$ とした場合のこの近似式には、テイラー展開という名前がつけられている。

⚓ **テイラー展開**　関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で何回でも微分可能であるとき、関数 $f(x)$ が x_0 の付近で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

と表せるなら、この式を関数 $f(x)$ の $x = x_0$ 周りにおける**テイラー展開**という。

特に、$x_0 = 0$ の場合のテイラー展開には、マクローリン展開という別な名前がつけられている。

⚓ **マクローリン展開**　関数 $f(x)$ が $x = 0$ で何回でも微分可能であるとき、関数 $f(x)$ が 0 の付近で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

と表せるなら、この式を関数 $f(x)$ の**マクローリン展開**という。

第 2 章

多変数関数

複数の変数

ものごとは通常、単一の要因だけではなく、複数の要因が絡みあっている。

さまざまな要因が関係する現象を数量的に分析するためには、1 つの変数だけでなく、複数の変数を含む関数を使う。

このようにいくつもの変数があって、それによって値が定まるような関数を多変数関数という。

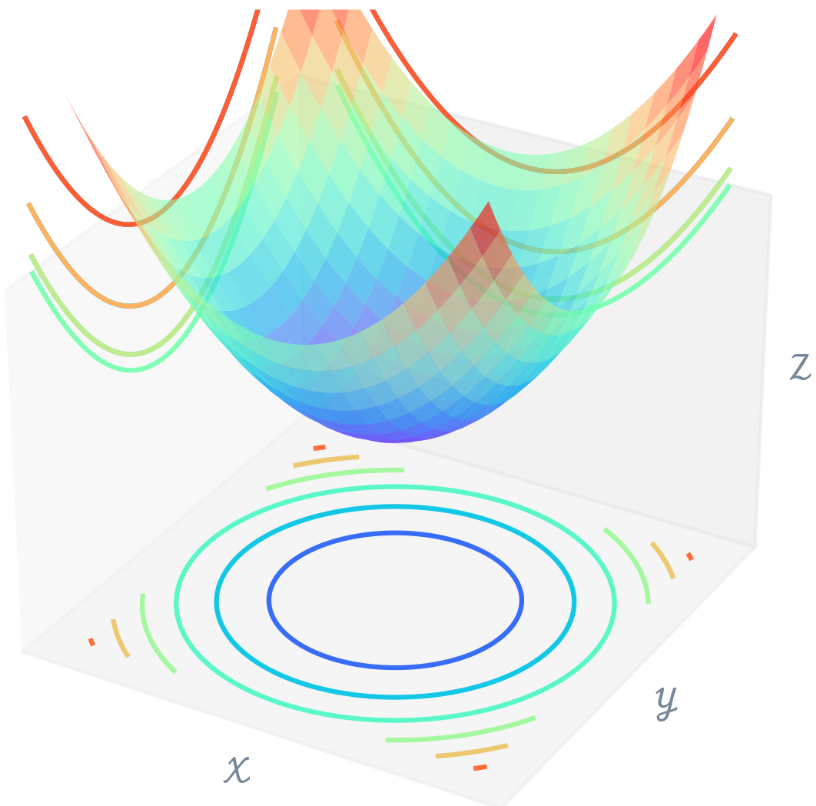
二変数関数のグラフ

2 変数関数 $f(x, y)$ が与えられたとき、変数 x, y を自由に動かして点 $(x, y, f(x, y))$ を xyz 空間でプロットして得られる曲面を $z = f(x, y)$ のグラフという。

$f(x, y)$ が地点 (x, y) の標高の場合は、この $z = f(x, y)$ のグラフが表す曲面はこの野山の地表にほかならない。

- 2 変数関数 $f(x, y)$ をグラフで可視化すると、野山の形状になる
- 野山の形状から標高を考えると、2 変数関数 $f(x, y)$ になる

$z = x^2 + y^2$ のグラフ



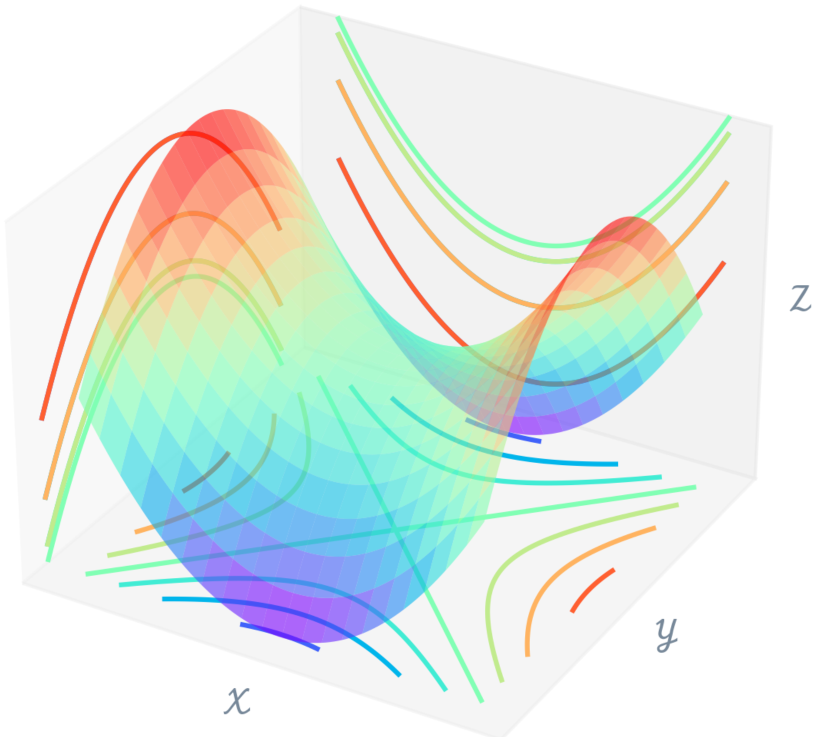
- xy 平面（$z = 0$） 円 $x^2 + y^2 = 0$
- xz 平面（$y = 0$） 下に凸の放物線 $z = x^2$
- yz 平面（$x = 0$） 下に凸の放物線 $z = y^2$

「曲面を見る」堅実な方法は、断面図（切り口）を順に見ることである。

1. $y = 0$ とすると、断面が xz 平面内の放物線 $z = x^2$ になる
2. $y = 1$ とすると、$z = x^2 + 1$ となり、これは $z = x^2$ のグラフを 1 だけ高くした放物線
3. $y = 2$ とすると、$z = x^2 + 4$ となり、放物線がさらに高くなる

こうして、$y =$ **定数** とした断面図をつなぎ合わせることで曲面の姿をつかむことができる。

$z = x^2 - y^2$ のグラフ

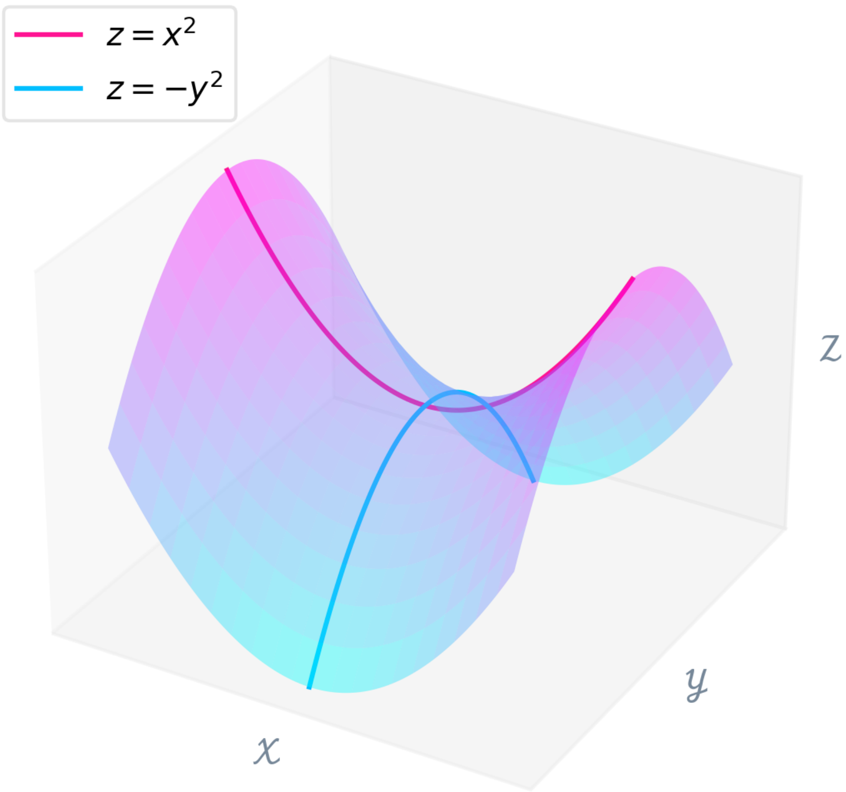


- xy 平面（$z = 0$）　双曲線 $x^2 - y^2 = 0$
- xz 平面（$y = 0$）　下に凸の放物線 $z = x^2$
- yz 平面（$x = 0$）　上に凸の放物線 $z = -y^2$

下に凸の放物線（吊り下げたひも）の各点に、上に凸の放物線（針金）を順に貼り付けていくと、$z = x^2 - y^2$ のグラフが得られる。

曲面と山の形状

曲面 $z = x^2 - y^2$ の局所的な形状は、身近なところにも現れている。



上の図では、$y = 0$ としたときのグラフ $z = x^2$ を赤線で、$x = 0$ としたときのグラフ $z = -y^2$ を青線で示した。

これらのグラフは、原点 $(0, 0, 0)$ で交わっている。
この交点は、

- 山の峠に見立てて**峠点**
- $z = x^2$ の凹みを馬の背に見立てて**鞍点**（乗馬の際に鞍を置く場所）

などと呼ばれる。

山が連なっているような山脈を越えて向こう側に行きたいとすると、できるだけ登りが少ない経路を選ぶだろう。
このような往来によって踏み固められてできた道が山脈越えの道（グラフでは $x = 0$ の場合の放物線 $z = -y^2$）である。

旅人が山脈越えの道を登っていくと、峠はその道沿いではいちばん高い地点になっている。
峠で左右を見ると、山（グラフでは $x =$ **定数** の場合の放物線）が続いている。

いま登ってきた山脈越えの道と垂直に交わっている尾根道（グラフでは $y = 0$ の場合の放物線 $z = x^2$）があるかもしれない。

尾根道沿いに歩けば、峠はその前後ではいちばん低い場所になっている。

第 3 章

多変数関数の微分

偏微分：一つずつ考えるアプローチ

複数の要因が絡む状況を判断する際には、すべての要因を同時に考えるのではなく、まず 1 つの要因に着目し、次に視点を変えて別の要因を考え、そして最後に、個別に考察した要因を統合して考えることがある。

偏微分のアイデアも、そのアプローチに似ている。

1 つの変数を変化させるときは、他の変数は一定にしておく

多変数関数の偏微分では、1 つの変数に注目し、それ以外の変数をいったん固定した状態で微分する。

このように 1 つの変数に偏った微分ということで、偏微分と名付けられている。偏微分の英語訳は **partial derivative** であり、「部分的な」微分という意味である。

ある変数に関する偏微分係数

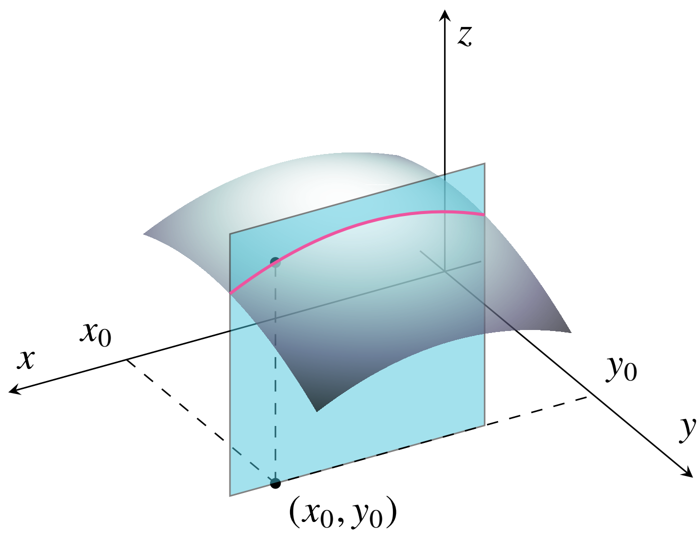
2 変数関数 $z = f(x, y)$ において、x 方向の傾きを考えてみる。

このとき、y は定数として固定する。

$$y = y_0$$

この平面 $y = y_0$ は、x 軸と z 軸に平行な平面である。

この平面で関数のグラフを切り、その切り口に現れた関数のグラフを微分することを考える。



切り口として現れるグラフは、$y = y_0$ と $z = f(x, y)$ の交線で、

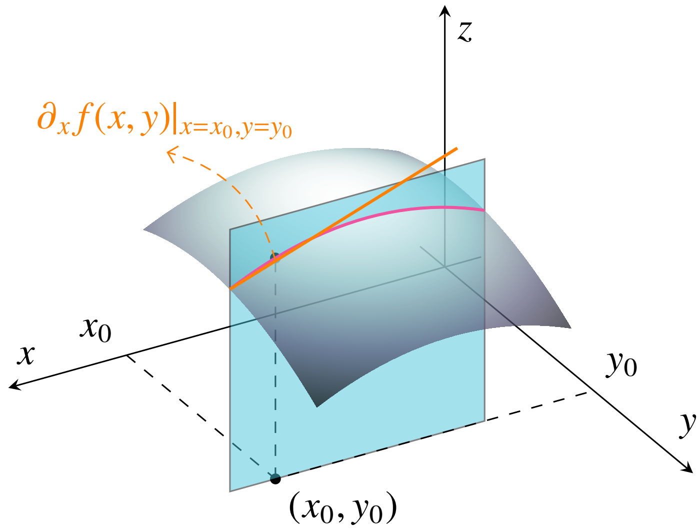
$$\begin{cases} x = x_0 \\ z = f(x_0, y_0) \end{cases}$$

という連立方程式を解いて得られる。

この 2 式は、代入により次のような形にまとめられ、これが切り口を表している。

$$z = f(x, y_0)$$

切り口となる関数 $z = f(x, y_0)$ の $x = x_0$ での接線の傾きが、求めたい x 方向の傾きである。



切り口となる関数は x の 1 変数関数にすぎないので、x に関して普通に微分すればよい。

h を微小量とし、$x = x_0$ から少しだけ移動した点を $x = x_0 + h$ とすると、次のように接線の傾きが計算できる。

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

この式を、関数 $f(x, y)$ の (x_0, y_0) における x に関する**偏微分係数**という。

偏微分の場合は、通常の微分記号 $\dfrac{d}{dx}$ の代わりに、$\dfrac{\partial}{\partial x}$ という記号を用いる。

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

ある変数に関する偏導関数

偏微分係数は、(x_0, y_0) という値を 1 つ決めたときに、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ という値が 1 つ決まるという式である。

x 軸と y 軸に平行な平面 $y = y_0$ は無数にあるので、y_0 を変えれば、その切り口に現れる関数のグラフも異なるものになる。
また、切り口に現れる関数のグラフの傾きは、各点によって異なるので、x_0 を変えれば、偏微分係数も異なる値になる。

つまり、見方を変えれば、偏微分係数は x_0 と y_0 の 2 変数関数である。

そこで、入力 (x_0, y_0) を変数 (x, y) に置き換えて、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

という 2 変数関数を新たに考える。これを x に関する偏導関数という。

偏微分の記号

偏導関数の記号にはさまざまな表記法があるが、どれも同じものである。

$\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$	微小量の変化の比
$f_x(x, y)$	微分の省略形 $f'(x)$ の代わり（何に関する偏微分かを下に添えた）
$\partial_x f(x, y)$	偏微分するという操作を関数に施す
$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_y$	関数の変数を省略した形（止めている他の変数を下に添えた）

高次の偏微分

多変数関数を 1 回偏微分すると、偏導関数という多変数関数が得られる。

その偏導関数をさらに偏微分して…というように、「偏導関数の偏導関数」を繰り返し考えていくことができる。

同じ変数に関して偏微分を繰り返す場合

たとえば、x に関する偏微分を 2 回、3 回…と繰り返して得られる高次偏導関数は、次のように表記する。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \quad \cdots$$

異なる変数に関して偏微分を繰り返す場合

x で偏微分してから y で偏微分する場合は、どのように表記すればよいだろうか？

x に関する偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を、y に関して偏微分すると考えて、

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

これをひとまとめにして、次のように表記する。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

接平面の方程式

偏微分では、他の変数を固定して、特定の変数に関する微分を考えた。

これは、曲面 $z = f(x, y)$ を平面で切った断面に現れる一変数関数に対して、グラフの接線の傾きを求めることに相当する。

結局偏微分では、一変数関数に帰着させて、一変数関数のグラフのある点での接線を考えていた。

ここから見方を変えて、一変数関数のグラフをある点で接線として近似できたように、多変数関数のグラフをある点で接平面として近似することを考える。

平面と曲面が接する条件

3 次元空間において、曲面 $z = f(x, y)$ と平面 $g(x, y) = ax + by + d$ が点 $P(x_0, y_0, z_0)$ で接するための条件を考える。

「接する」ということは、次の 2 つの条件が満たされることだ。

1. 点 P を共有する
2. 点 P における傾きが等しい

接点 P は $z = f(x, y)$ のグラフ上の点なので、$z_0 = f(x_0, y_0)$ が成り立つ。

よって、1 つ目の条件は、次のような数式で表すことができる。

1. 点 P を共有する：$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = z_0$

2 つ目の条件は、現時点では数式で表そうとすると悩ましい。
なぜなら、曲面の場合、360 度あらゆる方向の傾きを考えることができてしまうからだ。
その中で、どの方向の傾きが等しければよいのだろうか？

2 方向の勾配から任意の方向の勾配へ

例え話から直観的に考察してみよう。

2 変数関数 $z = f(x, y)$ のグラフは、野山の形状を表していると考えられる。
たとえば、

- 東西方向の位置を x
- 南北方向の位置を y

とすると、$f(x, y)$ はその地点での標高を表す。

このとき、

- x に関する偏微分 f_x は、東西方向の勾配
- y に関する偏微分 f_y は、南北方向の勾配

という意味を持つ。

実はこの 2 つの量 f_x, f_y は、東西や南北の方向だけではなく、この地点における全方位、たとえば北東の方向に進むときの傾斜の情報も持っている。

たとえば、斜面にボールを置いたときに、転がる方向は次のように推測できる。

- 斜面が「東に行くほど高い」なら、西の方に転がるだろう
- 斜面が「北に行くほど低い」なら、北の方に転がるだろう

両方合わせることで、だいたい北西の方向に転がるはずと推測できる。
さらに、東西より南北の方が勾配がきついとすると、北西方向よりやや北寄りに転がると推測できる。

このように、3 次元曲面において、全方位に対する勾配の情報を集めなくても、たった 2 つの方向（たとえば東西と南北）の勾配の情報があれば、斜面の傾きが決定される。

曲面の傾きが等しい条件

以上の議論から、東西方向 x と南北方向 y の傾き f_x, f_y が等しければ、平面（斜面）の傾きも等しくなると考えられる。

点 $P(x_0, y_0, z_0)$ において東西方向 x の傾きが一致するという条件は、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$$

同様に、南北方向 y の傾きが一致するという条件は、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$$

これで、平面 g と曲面 f が接するための、2 つ目の条件を記述することができた。

接平面の方程式の導出

以上をまとめると、曲面 $z = f(x, y)$ と平面 $g(x, y)$ が点 $P(x_0, y_0, z_0)$ で接するための条件は、次のように表される。

1. $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = z_0$（点 P を共有する）
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$（点 P における傾きが等しい）

$g(x, y) = ax + by + d$ とし、g の x, y に関する偏微分を計算しておこう。

x で偏微分する場合は、定数 $by + d$ が微分により 0 となり、y で偏微分する場合は、定数 $ax + d$ が微分により 0 となるので、

$$\frac{\partial g}{\partial x} = a, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = b$$

これらを用いると、接するための条件は、

$$f(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + d = z_0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b$$

a, b, d について解くと、

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

$$d = z_0 - ax_0 - by_0 = z_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y_0$$

よって、点 P における接平面の方程式は、次のように計算される。

$$\begin{aligned} z &= g(x,y) \\ &= ax + by + d \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y + \left(z_0 - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)x_0 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)y_0\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + z_0 \end{aligned}$$

接平面の方程式　$z_0 = f(x_0,y_0)$ とすると、グラフ $z = f(x,y)$ 上の点 (x_0,y_0,z_0) における接平面の方程式は、

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + z_0$$

全微分

接平面の方程式において、z_0 を移項すると、次のような式になる。

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

ここで、(x,y,z) を (x_0,y_0,z_0) の周辺の点として、微小変化量を用いて次のようにおく。

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y, \quad z = z_0 + \Delta z$$

すなわち、

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0, \quad \Delta z = z - z_0$$

このとき、接平面の方程式は次のように書き換えられる。

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y$$

接点となる点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ が変わると接平面も変わるので、この接平面の方程式を (x,y) の関数とみなして、次のように書こう。

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y$$

変数を省略して、

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$$

この式は、x と y を「どちらも」変化させたときに、関数値 $z = f(x, y)$ がどれくらい変化するかを表している。

微小変化であることを強調したい場合は、Δ ではなく d を用いて表記する。すると、偏微分とは異なり、x と y 両方の微小変化を反映した式になるので、この式は全微分と呼ばれる。

全微分（2 変数関数） 次の式を、関数 $f(x, y)$ の全微分という。

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

合成関数の偏微分

一変数関数の場合、合成関数の微分は連鎖律と呼ばれる公式で表された。

REVIEW

一変数関数 $f(x)$ において、x が関数 $x(t)$ になっている場合、t に関する微分は、

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

のように計算できる。

同様に、二変数関数 $f(x, y)$ において、x と y が関数になっている場合を考える。

$$f(x(t, s), y(t, s))$$

このような場合、同じ変数が何箇所も出てくるため、そのたびに偏微分を行えばよい。

例：t に関する偏微分

与えられた関数は、t, s の関数と考えることができる。

$$F(t, s) = f(x(t, s), y(t, s))$$

ここで、s を定数とみなせば、次のような関係としてまとめられる。

- t が変化すると x は変化する
- t が変化すると y は変化する

t が変化すると x と y の両方が変化するので、t を変化させたときの f の変化量は、全微分で表されることになる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = x \text{ による } f \text{ の変化} + y \text{ による } f \text{ の変化}$$

x による f の変化をみるために、f を x に関して偏微分する。
このとき、y は定数とみなすので、x に関する偏微分は 1 変数の合成関数の微分と同様に計算できる。

$$x \text{ による } f \text{ の変化} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}$$

y による f の変化も同様に、

$$y \text{ による } f \text{ の変化} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

よって、t に関する偏微分は次のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

まとめると、t に関する偏微分は、

1. x の中に t が出てくるので、x に関する偏微分を行う
2. y の中に t が出てくるので、y に関する偏微分を行う
3. その結果を足し合わせる

というように、変数 t が出てくるたびに偏微分を行い、結果を足し合わせることで求められる。

多変数関数のテイラー展開

一変数関数のテイラー展開は、次のようなものだった。

REVIEW

$f(x)$ の $x = x_0$ 周りにおけるテイラー展開は、

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

この式は、$x = x_0$ の付近では、関数 $f(x)$ を右辺の多項式で近似できることを表している。

ここで、x_0 は x に近い点として、$x = x_0 + \Delta x$ とおくと、$x - x_0 = \Delta x$ となることも用いて、

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df}{dx}(x_0)\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)(\Delta x)^2 + \cdots$$

この式は、x_0 の関数とみなせるので、x_0 を変数 x として書き換えておこう。

テイラー展開から、変数を微小変化させたときの関数の値が求まる

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}(x)\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)(\Delta x)^2 + \cdots$$

さらに移項により、次のように書き換えられる。

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{df}{dx}(x)\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)(\Delta x)^2 + \cdots$$

この式の左辺は、x を Δx だけ微小変化させたときの関数 $f(x)$ の変化量を表している。

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

つまり、テイラー展開によって、変数を微小変化させたときの関数の変化量を表すことができる。

テイラー展開から、変数を微小変化させたときの関数の変化量が導かれる

$$\Delta f = \frac{df}{dx}(x)\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)(\Delta x)^2 + \cdots$$

二変数関数への拡張

二変数関数 $f(x, y)$ においても同様に、x と y の値を微小変化させたときの関数の値

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

を求めることを目指す。

ここで、一変数関数の議論に帰着させるために、

$$F(s) = f(x + s\Delta x, y + s\Delta y)$$

という関数を考える。これは s に関する一変数関数であり、$s = 1$ の場合を考えれば、目的の $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ の値が得られる。

この一変数関数 $F(s)$ を $s = 0$ の周りでテイラー展開すると、

$$F(s) = F(0) + F'(0)s + \frac{1}{2!}F''(0)s^2 + \cdots$$

1 階微分 $F'(s)$ は、s が出てくるたびに偏微分して、それらを足し合わせることで、

$$F'(s) = \frac{dF}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)\Delta y$$

よって、$s = 0$ での微分係数は、

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y$$

2 階微分 $F''(s)$ は、1 階微分 $F'(s)$ をさらに微分したものである。

1 階微分 $F'(s)$ を次のように項に分けて考える。

$$F'(s) = F'_x(s) + F'_y(s)$$

まず、$F'(s)$ のうち、

$$F'_x(s) \coloneqq \frac{\partial f}{\partial x}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)\Delta x$$

の部分を 2 階微分すると、s が出てくるたびに偏微分することに注意して、

$$\begin{aligned} F''_x(s) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)\Delta x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)\Delta x\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)\Delta x\Delta y \end{aligned}$$

次に、$F'(s)$ のうち、

$$F'_y(s) \coloneqq \frac{\partial f}{\partial y}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)\Delta y$$

の部分を 2 階微分すると、同様に、

$$\begin{aligned} F''_y(s) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)\Delta y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)\Delta y\right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x + s\Delta x, y + s\Delta y)(\Delta y)^2 \end{aligned}$$

よって、$s = 0$ での 2 階微分は、

$$\begin{aligned} F''(0) &= F''_x(0) + F''_y(0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)(\Delta y)^2 \end{aligned}$$

偏微分が交換できる場合（偏導関数がともに連続な場合）は、次のようにまとめられる。

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)(\Delta y)^2$$

1 階微分と 2 階微分の結果を、$F(s)$ のテイラー展開の式に代入すると、

$$\begin{aligned} F(s) = F(0) &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y \right) s \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)(\Delta y)^2 \right) s^2 + \cdots \end{aligned}$$

$s = 1$ とおくことで、2 変数関数のテイラー展開が得られる。

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Delta y \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)(\Delta y)^2 \right) + \cdots \end{aligned}$$