

第 2 章

線形写像と行列の演算

線形写像と線形性

写像 $f: K^n \rightarrow K^m$ が与えられたとき、これは K^n の出来事、構造、その他もろもろの情報を K^m に投影していると考えられる。

このとき、その「写り方」にはどのような性質を期待するべきであろうか？

ベクトルには、和とスカラー倍という 2 つの演算が備わっていた。

そして、和とスカラー倍の組み合わせが、線形結合として重要な役割を果たしている。

そのため、写った先でも、ベクトルどうしの和・定数倍に関する関係式が保存されるという状況が望ましい。

def - 線形写像と線形性

写像 $f: K^n \rightarrow K^m$ が**線形写像** (linear mapping) であるとは、次の条件を満たすことをいう。

- i. 任意の $c \in K$, $\mathbf{v} \in K^n$ に対して、 $f(c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v})$
- ii. 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K^n$ に対して、 $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$

これらの性質を写像 f の線形性という。

また、 $m = n$ のとき、線形写像 $f: K^n \rightarrow K^n$ を K^n の線形変換 (linear transformation) という。

f が線形写像であれば、たとえば $c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}$ を f で写したときに、

$$f(c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}) = c_1 f(\mathbf{u}) + c_2 f(\mathbf{v})$$

というように、ベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} を f で写したものに置き換えただけで、線形結合の形はそのまま保たれる。

比例関数の一般化

線形写像のひとつの解釈として、「比例関数の一般化」という考え方もできる。

$m = n = 1$ の場合の線形写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は、単に数と数を対応させているので、(写像というより) 関数である。このとき、線形性 (i) から、

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R})$$

が成り立つので、 $a = f(1) \in \mathbb{R}$ とおくと、次のように書ける。

$$f(x) = ax$$

theorem 2.1 - 一次元線形写像と比例関数の同一性

線形写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は、 a を比例定数とする比例関数である。

もっとも簡単な関数である比例関数が満たすべき性質を抽象化し、高次元の世界で実現しているのが線形写像だとも考えられる。

線形写像による零ベクトルの像

$f: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ を線形写像とすると、線形性 (i) より、

$$f(0 \cdot \mathbf{v}) = 0 \cdot f(\mathbf{v})$$

よって、次が成り立つ。

$$f(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$$

🚧 theorem - 零ベクトルの像

零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される。

局所的な線形写像

線形写像は「局所的には」ありふれている。

たとえば、あらゆる微分可能な関数は、あらゆる場所で「線形写像+誤差」と局所的に表現される。局所的に線形写像として近似するのが微分ともいえる。



線形写像の記述と行列

K^n の任意のベクトル \mathbf{v} は、基本ベクトル（標準基底）の線型結合として次のように書ける。

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \mathbf{e}_n = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j$$

この \mathbf{v} に、線形写像 f を作用させると、 f の線形性より、

$$f(\mathbf{v}) = v_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + v_n f(\mathbf{e}_n) = \sum_{j=1}^n v_j f(\mathbf{e}_j)$$

ここで、 v_1, \dots, v_n は \mathbf{v} の成分なので、 f の引数にどんなベクトルを入れるかによって変わる部分である。

$$f(\mathbf{v}) = \underbrace{v_1}_{\text{引数}} \overbrace{f(\mathbf{e}_1)}^{f \text{ の構成要素}} + \cdots + \underbrace{v_n}_{\text{引数}} \overbrace{f(\mathbf{e}_n)}^{f \text{ の構成要素}}$$

よって、 f 自体は、基本ベクトルの像 $f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n)$ だけで決まってしまう。

行列：線形写像の簡略記法

f の構成要素 (f が表す操作) と f の引数 (f の操作対象) を分離して、もっと簡潔に書けないか? というのを考える。

基本ベクトル $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ が、 f によって $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ というベクトルに写るとしよう。
すなわち、 $f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j$ と書き直して、

$$f(\mathbf{v}) = v_1 \mathbf{a}_1 + \dots + v_n \mathbf{a}_n$$

ここで、基本ベクトルの像 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ を横に並べたものを A とおく。

$$A = (\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n)$$

A は、縦ベクトルを横に並べたものなので、結局は縦横に数を並べたものになっている。

このような、縦横に数を並べたものを **行列** (matrix) という。

そして、次のような演算の規則を定める。

 **def** - 行列とベクトルの積

行列 $A = (\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n)$ と $\mathbf{v} \in K^n$ との**積**を次のように定める。

$$A\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a}_1 + \dots + v_n \mathbf{a}_n$$

ここで、 v_i は \mathbf{v} の第 i 成分である。

行列とベクトルの積を用いると、 $f(\mathbf{v})$ は次のように簡潔に書ける。

$$f(\mathbf{v}) = \overset{\text{操作}}{A} \underset{\text{引数}}{\mathbf{v}}$$

このとき、行列 A は線形写像 f の**表現行列**と呼ばれる。

線形写像 f は基本ベクトルの像 $f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n)$ だけで決まるのだから、これらを並べたものとして表現行列 A を定めれば、 f は表現行列 A だけで決まることになる。

このことは、比例関数が比例定数 a だけで決まることの高次元版ともいえる。



行列の定義

前節で述べたように、線形写像の簡略記法として生まれたものが、**行列**である。

ここでは、行列についての用語をいくつか定義する。

行列：縦横に数を並べたもの

縦ベクトルは数を縦に並べたもの、横ベクトルは数を横に並べたものだった。

縦横に数を並べたものは**行列**といい、たとえば次のように書く。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

列

行

横の数字の並びを**行**、縦の数字の並びを**列**という。

行列の型

A は、 m 個の行と n 個の列をもつ行列である。

行が m 個、列が n 個の行列を、 **m 行 n 列の行列**、あるいは **$m \times n$ 型行列**という。

$m = n$ の場合、すなわち $n \times n$ 型行列は、正形状に数を並べたものなので **n 次正方形行列**という。

行列の成分

第 i 行、第 j 列にある数を a_{ij} と表し、これを **(i, j) 成分**という。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

j

i

行列 A を、 a_{ij} 成分の集まりとして、次のように略記することもある。

$$A = (a_{ij})$$

行列の列ベクトル

行列 A から、第 j 列だけを取り出して K^m のベクトルとしたものは、

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

であり、これを A の j 番目の列ベクトルという。

$m \times n$ 型行列 A は、 m 次元の列ベクトルを横に n 個並べたものという意味で、

$$A = (\mathbf{a}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n)$$

と書くこともできる。

行列の行ベクトル

行列 A から、第 i 行だけを取り出して K^n のベクトルとしたものは、

$$\mathbf{a}_i = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$$

であり、これを A の i 番目の行ベクトルという。

$m \times n$ 型行列 A は、 n 次元の行ベクトルを縦に m 個並べたものという意味で、

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

と書くこともできる。

行列全体の集合

n 次元数ベクトル全体の集合を K^n と書くのと同様に、 $m \times n$ 型行列全体の集合を $M_{mn}(K)$ と書くことがある。

- 実数を縦横に並べた $m \times n$ 型行列の集合は、 $M_{mn}(\mathbb{R})$ と表す。

- 複素数を縦横に並べた $m \times n$ 型行列の集合は、 $M_{mn}(\mathbb{C})$ と表す。



行列から定まる線形写像

線形写像の記述と行列 [第 2 章] では、線形写像 f による像 $f(\mathbf{v})$ を、行列 A を用いて次のように表した。

$$f(\mathbf{v}) = \overset{\text{操作}}{A} \underset{\text{引数}}{\mathbf{v}}$$

このように、行列とベクトルの積 $A\mathbf{v}$ を考えるとき、「 A が 1 つ与えられていて \mathbf{v} がいろいろ動く」と解釈することが多い。

これは、行列 A のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る装置、すなわち写像だとみなすことである。

$$\text{入力ベクトル } \mathbf{v} \xrightarrow{A \times} \text{出力ベクトル } A\mathbf{v}$$

次の定理は、この「行列 A を左からかける」という操作が、線形写像であることを示している。

theorem 2.2 - 行列とベクトルの積の性質

A, B を $m \times n$ 型行列、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K^n$ 、 $c \in K$ とするとき、次が成り立つ。

- $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
- $A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v})$

証明

(i) 和の性質

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n (u_j + v_j) \mathbf{a}_j = \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{a}_j + \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{a}_j = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$$

(ii) スカラー倍の性質

$$A(c\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n (cv_j)\mathbf{a}_j = c \sum_{j=1}^n v_j\mathbf{a}_j = c(A\mathbf{v})$$

行列から線形写像を作る

線形写像の記述と行列【第2章】で線形写像 f から行列 A を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることできる。

theorem 2.3 - 行列から定まる線形写像

$m \times n$ 型行列 A に対して、

$$f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} \quad (\mathbf{v} \in K^n)$$

によって写像 $f_A: K^n \rightarrow K^m$ を定めれば、 f_A は線形写像である。

証明

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K^n, c \in K$ とする。

theorem 2.2「行列とベクトルの積の性質」より、

$$f_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = f_A(\mathbf{u}) + f_A(\mathbf{v})$$

$$f_A(c\mathbf{v}) = A(c\mathbf{v}) = cA\mathbf{v} = cf_A(\mathbf{v})$$

が成り立つので、 f_A は線形写像である。 ■

行列と線形写像の対応

ここまでの議論をまとめると、行列 A と線形写像 f_A の間には、次のような関係がある。

- 行列 A が与えられれば、線形写像 f_A が定まる
- 線形写像 f_A が与えられれば、行列 A が定まる

このように、行列 A と線形写像 f_A は一対一に対応している。

このことから、

行列 A と線形写像 f_A は「同じ」ものを表す



とみなして議論を進めることも多い。

この同一視の根拠は、[行列と \$A\$ 倍写像の同型 \[第 12 章\]](#) でより厳密に議論する。



スカラー行列と単位行列

[Placeholder 1: 再編予定]

 **def** - 行列のスカラー倍

A を行列、 c をスカラーとすると、 A のすべての成分を c 倍して得られる行列を cA とする



特別な線形写像の表現行列

[Placeholder 2: 再編予定]

 **def** - 零写像と零行列

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ と定めたものは明らかに線形写像であり、これを **零写像** と呼ぶ

その表現行列はすべての成分が 0 である行列である

この行列を **零行列** と呼び、 O で表す

$m \times n$ 型であることを明示するために $O_{m,n}$ と書くこともある

また、 n 次正方行列の場合は、 O_n と書く

def - 恒等写像と単位行列

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ と定めたものは明らかに線形写像である

これを **恒等写像** と呼び、 $f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ と書く

恒等写像の表現行列は、 $f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j$ ($1 \leq j \leq n$) より

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを **単位行列** と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、 n 次であることを明示したいときは E_n と書く

\mathbb{R}^2 の線形変換の例

[Todo 1: book: 行列と行列式の基礎 p51 - p56]

行列の積

theorem 2.4 - 線形写像の合成

\mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への線形写像 g と、 \mathbb{R}^m から \mathbb{R}^l への線形写像 f が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g: \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、 \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^l への線形写像である

証明

任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ とスカラー $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ について、次の合成写像を考える。

$$(f \circ g)(c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}) = f(g(c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}))$$

g の線形性より、

$$g(c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}) = c_1 g(\mathbf{a}) + c_2 g(\mathbf{b})$$

これを f に適用すると、 f の線形性より、

$$\begin{aligned} f(c_1 g(\mathbf{a}) + c_2 g(\mathbf{b})) &= c_1 f(g(\mathbf{a})) + c_2 f(g(\mathbf{b})) \\ &= c_1 (f \circ g)(\mathbf{a}) + c_2 (f \circ g)(\mathbf{b}) \end{aligned}$$

したがって、

$$(f \circ g)(c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b}) = c_1 (f \circ g)(\mathbf{a}) + c_2 (f \circ g)(\mathbf{b})$$

が成り立つことから、 $f \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ は線形写像である。 ■

f と g の表現行列をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする

A は $l \times m$ 型、 B は $m \times n$ 型の行列である

このとき、 $f \circ g$ は $l \times n$ 型行列で表現される

それを C と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

B を列ベクトルに分解して $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$ と書くとき、

$$(f \circ g)(\mathbf{e}_j) = f(g(\mathbf{e}_j)) = f(\mathbf{b}_j) = A\mathbf{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n)$$

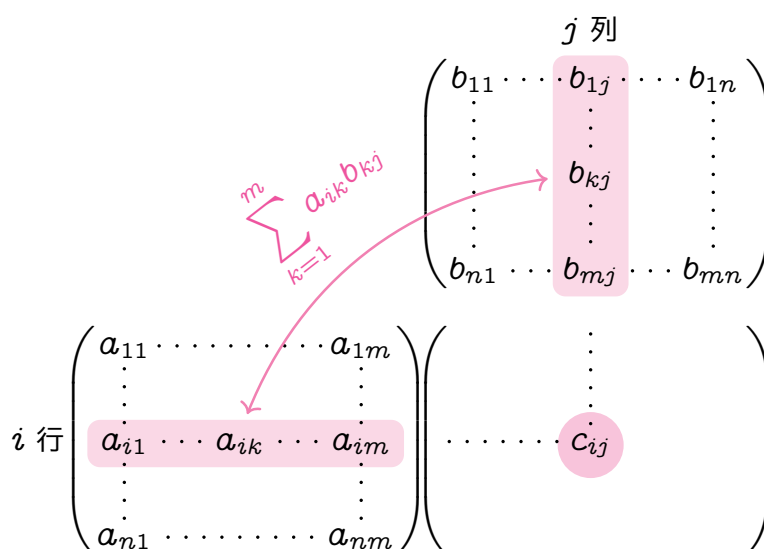
となる

C の (i, j) 成分は $A\mathbf{b}_j$ の第 i 成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、 C の (i, j) 成分を計算するときは、 A の第 i 行、 B の第 j 列だけを見ればよい



このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、 A と B の積と呼ぶ

📌 theorem - 単位行列との積

A を $m \times n$ 型とすると、次が成り立つ

$$E_m A = A$$

$$A E_n = A$$

📌 theorem - 零行列との積

A を $m \times n$ 型とすると、次が成り立つ

$$O_m A = A O_n = O_{m,n}$$

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は可換であるという

一般には、2 つの行列は可換であるとは限らない

つまり、 AB と BA は一般には異なる

[Todo 2: book: 行列と行列式の基礎 p58 (例 2.2.3, 2.2.4)]

行列の和とスカラー倍

A, B がともに $m \times n$ 型行列であるとき、それぞれの (i, j) 成分を足すことで行列の和 $A + B$ を定める

📌 theorem - 分配法則

積が定義できるとき、

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

📌 theorem - 行列の積とスカラー倍の性質

行列 A, B の積 AB が定義できるとき、つまり A の列の個数と B の行の個数が同じであるとき、 $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

が成り立つ



📌 theorem - 線形写像の和

$f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とし、

$$h(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

により写像 $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を定めるとき、 h も線形写像である

また、 f, g の表現行列を A, B とするとき、 h の表現行列は $A + B$ である

なお、 $h = f + g$ と書き、 f, g の和と呼ぶ

🔪 証明

[Todo 3: book: 行列と行列式の基礎 p59 (問 2.5)]



行列の積の結合法則

📌 theorem - 積の結合法則

積 AB, BC がともに定義できるとき、

$$(AB)C = A(BC)$$

写像による証明

A, B, C がそれぞれ $q \times m, m \times n, n \times p$ 型行列だとする

線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、 f, g, h の表現行列をそれぞれ A, B, C とする

一般的な写像の合成の性質として、

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

が成り立つから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう ■

積の計算規則による証明

AB の (i, l) 成分は、

$$(AB)_{il} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^n (AB)_{il} c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \end{aligned}$$

i, j はいま固定されているので、和には関係がない

動いているのは k, l だけ

ここで、次の書き換えができる

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} &= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} \end{aligned}$$

$\sum_{l=1}^n$ の右にある式は l に関する和をとる前のものなので、 l は止まっていると考えてよく、単純な分配法則を使っている

また、括弧がなくても、 k に関する和を先にとって、その後で l に関する和をとっていると読むことができる

このとき、和の順番は交換してもよいので、

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ik} \left(\sum_{l=1}^n b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ik} (BC)_{kj} \end{aligned}$$

先ほどと同様に、 $\sum_{k=1}^m$ の右では k は止まっていると考えている

そして、この結果は、 $A(BC)$ の (i, j) である ■

結合法則が成り立つことが示されたので、 $(AB)C$ または $A(BC)$ を表すとき、括弧を書かずに単に ABC と書いても問題ない

行列の個数が増えても同様である

また、 A が正方行列の場合は、

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ A^3 &= AAA \end{aligned}$$

などのように書く



行列の区分け

行列を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

のようなブロック型に区分けして計算することがよくある

A が $m \times n$ 型るとき、 $m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2$ として、 A_{ij} は $m_i \times n_j$ 型である

また、 B が $n \times l$ 型で、 $n = n_1 + n_2$, $l = l_1 + l_2$ と区分けして

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように A_{ij} などが行列の成分であるかのようにして（ただし積の順序は変えずに）積が計算できる

ここで、 A の列の区分けと B の行の区分けの仕方が同じであることが必要である

3 つ以上のブロックに分ける場合も同様である



行列の転置

行列 $A = (a_{ij})$ に対し、その成分の行と列の位置を交換してできる行列を **転置行列** という

def - 転置行列

$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 型行列とすると、 (i, j) 成分が a_{ji} である $n \times m$ 型行列を A の **転置行列** と呼び、 tA と表す

文字 t を左肩に書くのは、右肩に書くと t 乗に見えてしまうからである

t 乗と区別しつつ、右肩に書く流儀として、 A^T と書く場合もある

ベクトルの転置

特別な場合として、 n 次の数ベクトル \boldsymbol{v} を $n \times 1$ 型行列とみて転置したものの ${}^t\boldsymbol{v}$ は $1 \times n$ 型行列となる

すなわち、数ベクトルの転置は横ベクトルになる

このことを利用して、たとえば

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

を ${}^t(v_1, v_2, \dots, v_n)$ と表記することもある

転置の性質

転置は「行と列の入れ替え」であるので、明らかに次が成り立つ

📌 theorem 2.5 - 転置操作の反復不変性

tA に対して、転置をもう一度して得られる行列は A と一致する

$${}^t({}^tA) = {}^{tt}A = A$$



📌 theorem 2.6 - 転置と行列積の順序反転性

行列 A, B の積 AB が定義できるとき、

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$



[Todo 4: book: 行列と行列式の基礎 p78 命題 2.5.3]

theorem 2.7 - 行列の和に対する転置の分配性

A と B が同じ型の行列であるとき、

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

 証明

[Todo 5:]

対称行列と交代行列

正方行列 A が「転置しても元と変わらない」としたら、 A の成分は左上から右下にかけての対角線に関して**対称** ($a_{ij} = a_{ji}$) になっている

def 2.1 - 対称行列

正方行列 A が次を満たすとき、 A を**対称行列**という

$${}^tA = A$$

def - 交代行列

正方行列 A が次を満たすとき、 A を**交代行列**という

$${}^tA = -A$$

正方行列のトレース

def - 対角成分

正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、 a_{ii} を **対角成分** と呼ぶ

def 2.2 - トレース

正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、対角成分の和

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

を A の **トレース** と呼び、 $\text{tr}(A)$ と表す

theorem - トレースの性質

- i. $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- ii. $\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A)$
- iii. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

証明

[Todo 6: book: 行列と行列式の基礎 p64 問 2.9]

行列と複素数

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき、

$$aE + bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

という形の行列を複素数と呼ぶことにより、複素数の定義ができる

この定義では、通常は $a + bi$ と書かれるものを行列として実現している

[Todo 7: book: 意味がわかる線形代数 p43~49]

.....

Zebra Notes

Type	Number
todo	7
placeholder	2