第 1 章

基本変形と基本行列

行基本変形と基本行列

基本変形を行列のかけ算によって実現することができる

ref: 行列と行列式の基礎 p85〜86
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p58〜61

> 基本行列　基本変形 α を単位行列 E に行った結果を E_α とするとき、E_α を α に対応する基本行列と呼ぶ

行基本変形とは、次の 3 種類の操作であった

i. 2 つの行を交換する
ii. ある行に 0 でない数をかける
iii. ある行の定数倍を他の行に加える

これらに対応して、行基本変形を表現する基本行列は、次の 3 種類がある

i. $F(i,j)$: E の i 行と j 行を交換したもの（$i \neq j$）
ii. $G(i;c)$: E の (i,j) 成分を 1 から c に置き換えたもの（$c \neq 0$）
iii. $H(i,j;c)$: E の (i,j) 成分を 0 から c に置き換えたもの（$i \neq j$）

$$F(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$G(i;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$H(i,j;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

行に関する基本変形は、基本行列を左からかけることに他ならない

基本行列による行基本変形の表現　行列 A に行基本変形 α を行って得られる行列を B とすると、

$$B = E_\alpha A$$

証明

$\boldsymbol{e}_k$ を k 列目が 1 で他が 0 の横ベクトルとし、A の k 行目の行ベクトルを $\boldsymbol{a}_k$ とする

行の交換

基本行列 $F(i,j)$ の k 行目は、

$$(F(i,j))_{k,*} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_j & (k=i) \\ \boldsymbol{e}_i & (k=j) \\ \boldsymbol{e}_k & (k \neq i,j) \end{cases}$$

よって、$F(i,j)A$ の k 行目は、

$$(F(i,j)A)_{k,*} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_j & (k=i) \\ \boldsymbol{a}_i & (k=j) \\ \boldsymbol{a}_k & (k \neq i,j) \end{cases}$$

となり、i 行目と j 行目が交換されていることがわかる ■

行の定数倍

基本行列 $G(i;c)$ の k 行目は、

$$(G(i;c))_{k,*} = \begin{cases} c\boldsymbol{e}_i & (k=i) \\ \boldsymbol{e}_k & (k \neq i) \end{cases}$$

よって、$G(i;c)A$ の k 行目は、

$$(G(i;c)A)_{k,*} = \begin{cases} c\boldsymbol{a}_i & (k=i) \\ \boldsymbol{a}_k & (k \neq i) \end{cases}$$

となり、i 行目が c 倍されていることがわかる ■

行の定数倍の加算

基本行列 $H(i,j;c)$ の k 行目は、

$$(H(i,j;c))_{k,*} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_i + c\boldsymbol{e}_j & (k=i) \\ \boldsymbol{e}_j & (k=j) \\ \boldsymbol{e}_k & (k \neq i,j) \end{cases}$$

よって、$H(i,j;c)A$ の k 行目は、

$$(H(i,j;c)A)_{k,*} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j & (k=i) \\ \boldsymbol{a}_j & (k=j) \\ \boldsymbol{a}_k & (k \neq i,j) \end{cases}$$

となり、i 行目に j 行目の c 倍が加えられていることがわかる ■

列基本変形と基本行列

行基本変形と同様に、列に関する基本変形を考えることもできる

ref: 行列と行列式の基礎 p87

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p61〜62

i. 2 つの列を交換する
ii. ある列に 0 でない数をかける
iii. ある列の定数倍を他の列に加える

列に関する基本変形は、基本行列を右からかけることで実現できる

基本行列による列基本変形の表現 行列 A に列基本変形 α を行って得られる行列を B とすると、

$$B = AE_\alpha$$

証明

転置すると A になるような行列 A' を考える

$$A' = {}^t(A)$$

転置すると行と列が入れ替わるので、A' に「行」基本変形を施した行列を転置すれば、A に同じ基本変形を列に関して施した行列が得られる

適用したい基本変形を α とし、これを列に関して施す基本行列が E_α なら、これを行に関して施す基本行列は ${}^t(E_\alpha)$ となる

よって、

$$B = {}^t({}^t(E_\alpha)A') = {}^t(A')^t({}^t(E_\alpha)) = AE_\alpha$$

というように、積の転置を取ると積の順序が入れ替わることから、行基本変形の場合とは積の順序が逆転することがいえる ■

基本行列の正則性

行基本変形も列基本変形も、基本行列によって定式化できる

この考えをさらに進めるため、基本行列の性質を述べる

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p62

ref: 行列と行列式の基礎 p86

基本行列の正則性　基本行列は正則である

証明

基本行列の表す変形を考えれば、

$$\begin{gathered}
F(i,j)F(i,j) = E \\
G(i;c)G(i;\frac{1}{c}) = G(i;\frac{1}{c})G(i;c) = E \\
H(i,j;c)H(i;-c) = H(i,;-c)H(i,j;c) = E
\end{gathered}$$

が成り立つことがわかる

したがって、基本行列は逆行列を持つので正則である ■

つまり、各々の基本変形は可逆の変形、すなわち逆に戻ることのできる変形である

基本行列の積と逆行列

行基本変形が基本行列を左からかけることに対応することから、行基本変形とは線形写像であり、基本行列はその表現行列であるという見方もできる

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p62〜63
ref: 行列と行列式の基礎 p86

そのため、行基本変形の合成は、基本行列の積として表現できる

このことから、行についての連続する複数の基本変形の繰り返しも可逆であることがいえる

基本行列の積による行変形の構成 行列の行変形 $A \to B$ に対し、$B = PA$ を満たす正則行列 P が存在する
このとき、P はいくつかの基本行列の積である

証明

行基本変形を $A \xrightarrow{\alpha_k} \cdots \xrightarrow{\alpha_1} B$ と合成して得られる行変形は、$E_{\alpha_1} \cdots E_{\alpha_k}$ を左からかけることで実現される
すなわち、

$$B = E_{\alpha_1} \cdots E_{\alpha_k} A$$

が成り立つ
個々の基本行列 $E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_k}$ は正則であるので、これらの積 $P = E_{\alpha_1} \cdots E_{\alpha_k}$ も正則である ■

上の証明から、正則行列 P に対して、その逆行列を P^{-1} とすると、

$$P^{-1}B = P^{-1}E_{\alpha_1} \cdots E_{\alpha_k}A = P^{-1}PA = A$$

が成り立つことになる

ここで、$B = E$ の場合を考えると、$P^{-1}E = A$ となるので、次のことがいえる

単位行列への行変形による逆行列の構成　正方行列 A の単位行列への行変形 $A \to E$ に対応する基本変形の積は、A の逆行列を与える

つまり、任意の正方行列は行基本変形だけで単位行列に変形でき、その基本行列の積から逆行列を求めることができる

この章で得られた定理を組み合わせると、次の定理が得られる

基本行列の積による正則行列の表現　任意の正則行列はいくつかの基本行列の積である

証明

A を正則行列とすると、A の逆行列 A^{-1} は行変形 $A \to E$ に対応する基本変形の積によって与えられる

さらに、基本行列の積による行変形の構成より、行変形 $A \to E$ に対し、

$$E = PA$$

を満たす正則行列 P が存在する

この等式より、$A^{-1} = P$ となり、P も基本行列の積であることがいえる　■

行基本変形による階数の不変性

ref: 行列と行列式の基礎 p86

基本行列の積による行変形の構成から、行変形によって列ベクトルの線形関係が保たれることに対して別の証明を与えることができる

行基本変形による線型独立性の不変性（再掲） 行変形はベクトルの線形関係を保つ

すなわち、行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ に行の変形を施して $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ が得られたとするとき、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \iff \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$$

特に、

$$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \text{ が線型独立} \iff \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \text{ が線型独立}$$

証明

P を基本行列の積（正則行列）とすると、$B = PA$ が成り立つ

よって、$\boldsymbol{b}_i = P\boldsymbol{a}_i$ であり、線形関係式

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

に左から P をかけることで、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$$

が得られる

逆に、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$ が成り立つとき、P^{-1} を左からかけることで、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

が得られる

したがって、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \mathbf{0} \iff \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \mathbf{0}$$

が成り立つ ■

上の事実は、行列 A の階数が A の線型独立な列ベクトルの最大個数であることと合わせると、次のように言い換えられる

行基本変形による階数の不変性　行の基本変形で行列の階数は変化しない

階数標準形

任意の行列 A は、行基本変形により、次のような既約行階段行列に変形できる

ref: 行列と行列式の基礎 p87〜88

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p75〜78

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ここからさらに、列の交換によって、主成分のある列を左に集めることができる

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{n-r}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & * \\ \hline O & O \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow n-r \end{array} \end{array}$$

ここで、r は零行ではない行の個数、すなわち A の階数である

さらに、列の掃き出しで、左上のブロックの成分 $*$ をすべて 0 にできる

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} \overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{n-r}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ & \ddots & & O \\ & & 1 & \\ \hline & O & & O \end{array}\right) & \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \\ \updownarrow n-r \end{array}
\end{array}
$$

この形を、A の階数標準形という

この形を得るまでの過程をまとめると、次のことがいえる

> ⚓ **基本変形による階数標準形の構成**　任意の行列は、行と列の基本変形を繰り返すことで、階数標準形に変形できる

ここで、P を行基本変形に対応する基本行列の積、Q を列基本変形に対応する基本行列の積とすると、A の階数標準形は PAQ で与えられる

基本行列の積は任意の正則行列を表すので、次のようにまとめられる

> ⚓ **正則行列による階数標準形の構成**　$m \times n$ 型行列 A に対して、行変形に対応する m 次正則行列 P、列変形に対応する n 次正則行列 Q が存在し、
>
> $$B = PAQ$$
>
> が階数標準形となる

転置による階数の不変性

ref: 行列と行列式の基礎 p88

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p78〜80

正則行列による階数標準形の構成を用いて、次の重要な事実を証明することができる

転置に関する階数の不変性　任意の行列 A に対して、

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)$$

証明

A の階数標準形を B とすると、$B = PAQ$ となる正則行列 P, Q をとることができる

両辺の転置をとると、

$${}^tB = {}^t(PAQ) = {}^tQ{}^tA{}^tP$$

となり、ここで、正則行列は転置をとっても正則なので、${}^tP$, ${}^tQ$ も正則行列である

よって、${}^tA$ の階数標準形は ${}^tB$ である

B は階数標準形であり、その形から明らかに

$$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}({}^tB)$$

が成り立つので、変形前の行列 A についても

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)$$

が成り立つ　■

行列 A の階数は A の線型独立な列ベクトルの最大個数であったが、上の定理から次のこともいえるようになった

階数と線型独立な行ベクトルの最大個数　行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ は、A の行ベクトルに含まれる線型独立なベクトルの最大個数と一致する

上の事実を連立方程式の視点で解釈すると、

> 係数行列 A の階数は、
> 独立な（本質的に意味を持つ）方程式の最大本数

を表しているといえる