逆行列の一意性

逆行列は、存在するとしてもただ 1 つしか存在しない。

逆行列の一意性　正方行列 A に対して、A の逆行列が存在するならば、それは一意的である。

証明

A の逆行列が B_1 と B_2 の 2 つあるとする。

$$AB_1 = B_1A = E \quad \text{かつ} \quad AB_2 = B_2A = E$$

$AB_2 = E$ の両辺に B_1 をかけると、

$$B_1 = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2$$

よって、$B_1 = B_2$ となり、逆行列は一意的である。 ∎

行列の演算と逆行列

逆行列の逆行列

「A の取り消し」を取り消すには、A すればよい。

ref: プログラミングのための線形代数 p46

逆行列に対する逆行列　正則行列 A の逆行列 A^{-1} は正則であり、その逆行列は A である。

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

証明

A の逆行列が A^{-1} であることから、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

この式は、A^{-1} が正則であり、その逆行列が A であることを示す式でもある。 ■

行列の積の逆行列

「B して A したもの」を元に戻すには、まず A を取り消してから B を取り消す必要がある。

ref: プログラミングのための線形代数 p46

正則行列の積に対する逆行列　正則行列 A, B の積 AB は正則であり、その逆行列は次のようになる。

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

証明

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AEA^{-1} \\ &= E\end{aligned}$$

であり、同様に

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B \\ &= B^{-1}EB \\ &= E\end{aligned}$$

であるので、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ。 ■

転置行列の正則性

ref: 行列と行列式の基礎 p88

正則行列の転置の正則性　正則行列 A に対して、その転置行列 ${}^tA$ も正則である。

証明

A が正則であることから、その逆行列 A^{-1} が存在し、

$$A^{-1}A = E$$

両辺の転置をとると、右辺の単位行列は転置しても単位行列であり、左辺には正則行列の積に対する逆行列の公式を用いて、

$${}^t(A^{-1}A) = {}^tA{}^t(A^{-1}) = E$$

この等式より、${}^tA$ の逆行列は ${}^t(A^{-1})$ であることがわかる。 ■

三角行列の正則性

ref: 行列と行列式の基礎 p74

上三角行列の正則性　対角成分がすべて 0 でない上三角行列は正則である。

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p74 命題 2.4.9]

正則な上三角行列の逆行列　正則な上三角行列は、その逆行列も上三角行列である。

証明

[Todo 2:]

正則な上三角行列と関連して、次の事実が成り立つ。

行基本変形と対角行列　正則行列 A に対して、行のスカラー倍以外の行基本変形を繰り返し行って対角行列にできる。

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p75 命題 2.4.12]

正則行列と対角行列

[Todo 4: ref: プログラミングのための線形代数 p46〜47]

ref: 行列と行列式の基礎 p74〜75

ブロック対角行列の正則性　次のようなブロック対角行列 M

において、対角ブロック A, B が正則であれば、M も正則である。

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \quad l \quad & \quad n-l \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \quad A \quad & \quad O \quad \\ \hline \quad O \quad & \quad B \quad \end{array}\right) & \begin{array}{l} l \\ n-l \end{array} \end{array}$$

証明

A と B が正則であるから、逆行列 A^{-1} と B^{-1} が存在する。

それらを用いて、次のような積を考える。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AA^{-1} & O \\ O & BB^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_l & O \\ O & E_{n-l} \end{pmatrix} \\ &= E_n \end{aligned}$$

この等式は、M の逆行列の存在を示している。

$$M \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = E_n$$

つまり、対角ブロックがそれぞれ正則であれば、それらの逆行列を並べることで全体の逆行列が構成できる。

このようにして、M が正則であることがわかる。 ■

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	4