第 11 章

線形写像の階数

線形写像の像と列空間

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の張る空間の記号を用いると、ベクトルの張る空間と $\operatorname{Im} A$ に関する考察は次のようにまとめられる。

$$\operatorname{Im} A = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

つまり、A の列ベクトルが張る空間が $\operatorname{Im} A$ である。

このことから、$\operatorname{Im} A$ を A の列空間と呼ぶこともある。

Theorem – 線形写像の像と表現行列の列空間の一致

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の像 $\operatorname{Im} f$ は、f の表現行列の列ベクトルが張る空間である。

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とするとき、$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

なので、

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{u} \in \operatorname{Im} f \\
\iff & \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}) \\
\iff & \exists v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \ s.t. \ \boldsymbol{u} = v_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + v_n \boldsymbol{a}_n \\
\iff & \boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} A = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle
$$

が成り立つ。 ■

上述の証明の

$$
\boldsymbol{u} \in \operatorname{Im} f \iff \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t. \ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})
$$

という変形に着目すると、この定理は次のように線型方程式の文脈で言い換えられる。

⚓ Theorem – 線形写像の像空間と方程式の解の存在

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$
\boldsymbol{b} \in \operatorname{Im} A \iff \text{方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ}
$$

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ が $\operatorname{Im} A$ に属するかどうかを調べるためには Theorem 8.2「拡大係数行列と解の存在条件」が使える。

線形写像の像空間の基底

線形写像の像空間は表現行列の列ベクトルによって張られるが、列ベクトルの集合は一般には線型独立ではない。

像空間の基底を得るためには、列ベクトルの部分集合、たとえば主列ベクトルを考えるのが自然である。

Theorem 11.1 – 主列ベクトルによる像空間の基底の構成

行列 A の主列ベクトルの集合は $\mathrm{Im}\, A$ の基底である。

証明

[Todo 1: book: 行列と行列式の基礎 p97 定理 3.1.10]

線形写像の階数

次の定理は、行列の階数のさらに本質的な意味を明らかにし、行列の階数が行変形の仕方によらずに決まることを念押しするような定理である。

Theorem – 行列の階数と像空間の次元の一致

行列の階数は像空間の次元である。

すなわち、A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$\operatorname{rank} A = \dim \mathrm{Im}\, A$$

証明

Theorem 11.1「主列ベクトルによる像空間の基底の構成」で示したように、A の主列ベクトル $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ は $\mathrm{Im}\, A$ の基底を成す。

よってその個数 $r = \operatorname{rank} A$ は $\mathrm{Im}\, A$ の次元である。 ■

この定理から、線形写像に対して、像空間の次元をその階数と定める。

線形写像の階数　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、f の階数を

$$\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f$$

と定義する。

核空間と斉次形方程式の解空間

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、

$$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}\}$$

と定めると、$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ という関係から、$\operatorname{Ker} f$ と $\operatorname{Ker} A$ は同じものを指す。

$\operatorname{Ker} A$ すなわち $\operatorname{Ker} f$ とは、f によって $\boldsymbol{o}$ に写ってしまうような、つまり $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ となるような $\boldsymbol{x}$ すべての集合である。

つまり、$\operatorname{Ker} A$ とは、斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間そのものである。

核空間と一般解のパラメータ表示

解のパラメータ表示の再解釈で述べたように、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解をすべて見つけるには、

1. 1 つの解（特殊解）$\boldsymbol{x}_0$ を見つける
2. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の一般解を求める
3. それらの和が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解となる

という考え方を使うことができた。

このことを $\operatorname{Ker} A$ を用いて定式化できる。

⚓ Theorem – 特殊解と核の元による別解の構成

$\boldsymbol{x}_0$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であるとき、$\mathrm{Ker}\, A$ に属する任意のベクトル $\boldsymbol{u}$ を用いて、$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}$ もまた $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解となる。

証明

$\boldsymbol{x}_0$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であることから、

$$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}$$

また、$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}\, A$ より、

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$$

よって、

$$\begin{aligned} A(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}) &= A\boldsymbol{x}_0 + A\boldsymbol{u} \\ &= A\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{o} \\ &= \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

となり、$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}$ もまた $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解であることがわかる。 ■

そして、どんな解もこの方法で作ることができる。

⚓ Theorem – 特殊解と核空間による一般解の構成

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たす 1 つの解 $\boldsymbol{x}_0$ が見つかれば、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の一般解は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の一般解 $\boldsymbol{u}$ を用いて、$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}$ と表される。

証明

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の 1 つの解を $\boldsymbol{x}_0$、もう 1 つの解を $\boldsymbol{x}_1$ とおくと、

$$A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{b}, A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}$$

が成り立つので、

$$
\begin{aligned}
A\boldsymbol{x}_1 - A\boldsymbol{x}_0 &= \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o} \\
\therefore \quad A(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) &= \boldsymbol{o}
\end{aligned}
$$

となり、$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解である。

ここで、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の一般解 $\boldsymbol{u}$ が得られているなら、$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0$ も $\boldsymbol{u}$ で表すことができる。

したがって、$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のすべての解を網羅する。 ■

解が 1 つ見つかれば、その解 $\boldsymbol{x}_0$ は固定して、$\mathrm{Ker}\, A$ に属するベクトル $\boldsymbol{u}$ をいろいろ変えることにより、$\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}$ ですべての解が得られる。

核空間の基底と基本解

「$\boldsymbol{u}$ をいろいろ変えることにより」という部分をもう少し精密に述べよう。
いろいろ動かしてすべての解を網羅するには、解空間 $\mathrm{Ker}\, A$ の基底が必要である。すなわち、$\boldsymbol{u}$ は $\mathrm{Ker}\, A$ の基底 $\boldsymbol{u}_i$ を用いた次のような形で表される。

$$
\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_d\boldsymbol{u}_d
$$

ここで、$c_1, \ldots, c_d$ は任意であるので、この式は斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の基本解のパラメータ表示そのものである。

⚓ **Theorem – 斉次形方程式の基本解と核空間の基底**

A を $m \times n$ 型行列とし、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の基本解とするとき、$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ は $\mathrm{Ker}\, A$ の基底である。

言い換えると、$\mathrm{Ker}\, A$ の元 $\boldsymbol{u}$ は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の基本解 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ を使ってパラメータ表示できる。

パラメータの空間と座標部分空間

つまり、基本解 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ を基準として固定すれば、$\mathrm{Ker}\, A$ の元を 1 つ指定することは、パラメータの値の組

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

を指定することと同じである。

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の主変数を $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$、自由変数を $x_{j_1}, \ldots, x_{j_d}$ とすると、解のパラメータの空間は座標部分空間 $\mathbb{R}^{\{j_1,\ldots,j_d\}}$ である。

そして、そのパラメータ付けは、

$$\mathbb{R}^{\{j_1,\ldots,j_d\}} \ni \sum_{k=1}^{d} t_k \boldsymbol{e}_{j_k} \longmapsto \sum_{k=1}^{d} t_k \boldsymbol{u}_k \in \mathrm{Ker}\, A$$

によって与えられる。

核空間の次元と解の自由度

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ でない一般の連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ においても、基本解の個数 d は解の自由度であり、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ は $\mathrm{Ker}\, A$ の基底をなすため、

$\mathrm{Ker}\, A$ の次元は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の自由度と一致する

ということがいえる。

次元定理

連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の自由度は、

$$\text{解の自由度} = (\text{変数の個数}) - \mathrm{rank}\, A$$

で表された。

そして、この解の自由度は Ker A の次元と一致する。

$$\dim \operatorname{Ker} A = (\text{変数の個数}) - \operatorname{rank} A$$

ここで、次のような線形写像

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \uplus & & \uplus \\ & \boldsymbol{x} & \longmapsto & A\boldsymbol{x} \end{array}$$

を考えると、次のように対応づけられる。

- 行列 A は、線形写像 f を表す
- 変数の個数は、$\boldsymbol{x}$ の動く空間 $\mathbb{R}^n$ の次元 n に対応する

このように行列 A を線形写像 f に対応させると、

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \operatorname{rank} f$$

さらに、線形写像の階数の定義から、

$$\dim \operatorname{Ker} f = n - \dim \operatorname{Im} f$$

という、次元に関する関係式が得られる。これを次元定理という。

⚓ Theorem 11.2 - 線形写像の次元定理

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、次が成り立つ。

$$\operatorname{rank}(f) = \dim \operatorname{Im} f = n - \dim \operatorname{Ker}(f)$$

写像の視点

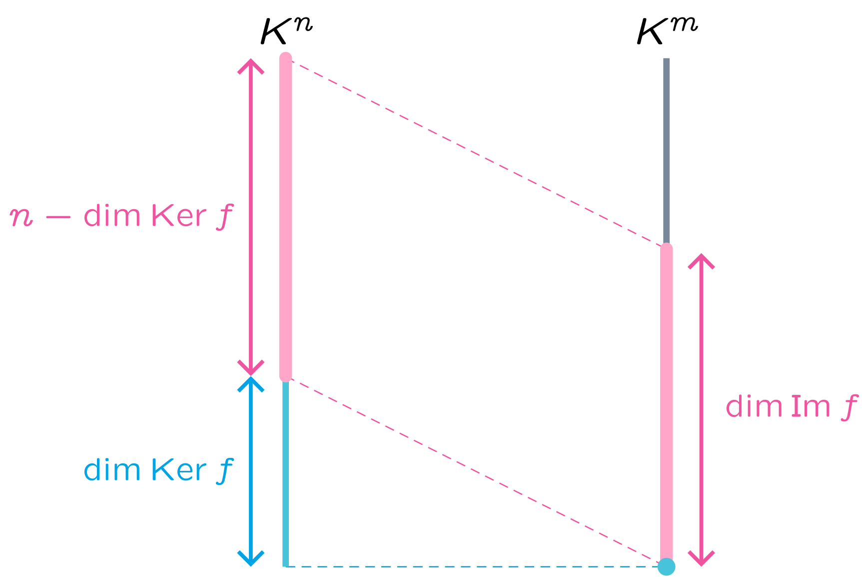
f を n 次元線型空間から m 次元線型空間への線形写像とすると、

$$n - \dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Im} f$$

という次元定理の式は、次のように読める。

元の n 次元空間から、$\mathrm{Ker}\, f$ の次元分が潰れて、

残ったのが $\mathrm{Im}\, f$ の次元分



次元定理と単射性・全射性

$m \times n$ 型行列 A によって表現される線形写像 f が単射・全射かどうかは、m と n の大小によって決まる。

A が横長（$m < n$）の場合

このとき、A が表現する線形写像 f は単射ではない。

1. $\mathrm{Im}\, A$ は行き先の m 次元空間の一部なので、$\dim \mathrm{Im}\, A \leq m$
2. $m < n$ より、$\dim \mathrm{Im}\, A < n$
3. 次元定理より、$\dim \mathrm{Ker}\, A > 0$

潰れる部分 $\mathrm{Ker}\, A$ が $\{o\}$ でないことは、単射ではないことを意味する。

表現行列 A が横長（$m < n$）だと単射にはなれない

A が縦長（$m > n$）の場合

このとき、A が表現する線形写像 f は全射ではない。

1. 次元は 0 以上なので、$\dim \operatorname{Ker} A \geq 0$
2. 次元定理より、$\dim \operatorname{Im} A \leq n$
3. $m > n$ より、$\dim \operatorname{Im} A < m$

$\operatorname{Im} A$ が写り先の空間全体をカバーしていないことは、全射ではないことを意味する。

表現行列 A が縦長（$m > n$）だと全射にはなれない

階数と単射性・全射性

線型写像の単射性・全射性は、その表現行列の階数によって判定することもできる。

また、その判定条件は、連立一次方程式の解の性質とも結びつく。

単射な線形写像と階数

A の階数が元の空間（定義域）の次元と同じ場合、A が表す線形写像は単射となる。

$$\operatorname{rank} A = n$$

元の n 次元空間が写した先でも n 次元の広がりを保っているのなら、潰れていないはずだからである。

⚓ Theorem – 線形写像の単射性と表現行列

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値である。

i. f は単射
ii. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は自明な解しか持たない
iii. $\operatorname{rank} A = n$

証明

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が単射であることの言い換えは、

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

であり、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が自明解しか持たないことは、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

が成り立つということである

$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であるから、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

Theorem 8.4「斉次形方程式の非自明解の存在条件」より、斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ に自明解しか存在しないことと

$$\operatorname{rank} A = n$$

と同値である。 ■

全射な線形写像と階数

A の階数が行き先の空間（値域）の次元と同じ場合、A が表す線形写像は全射となる。

$$\operatorname{rank} A = m$$

写した先でその空間全体と同じ m 次元の広がりを持っているのなら、空間全体をカバーしているはずだからである。

Theorem – 線形写像の全射性と表現行列

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値である。

i. f は全射
ii. 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解が存在する
iii. $\operatorname{rank} A = m$

証明

(i) $\iff$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が全射であることの言い換えは、

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

であり、これは

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

と同値である

よって、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\iff$ (iii)

Theorem 8.3「解の存在条件の系」より、$\operatorname{rank} A = m$ は、次の条件

$$^\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する}$$

ことと同値である。 ■

全単射な線形変換と階数

一般の線形写像と対比して、線形変換の大きな特徴は次が成り立つことである。

単射と全射は、一般には一方から他方が導かれるわけではない 2 つの性質だが、$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像（線形変換）の場合は同値になる。

Theorem 11.3 - 線形代数における鳩の巣原理

f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換とし、A を f の表現行列とするとき、次はすべて同値である。

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は全単射
iv. $\operatorname{rank} A = n$

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ において、表現行列を A とすると、

$$\begin{aligned} f \text{ が単射} &\iff \operatorname{rank} A = n \\ f \text{ が全射} &\iff \operatorname{rank} A = m \end{aligned}$$

である。

線形変換は、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の $m = n$ の場合であるので、f が単射であることも、全射であることも、

$$\operatorname{rank} A = n$$

という条件と同値になる。

つまり、線形変換は単射かつ全射であり、これは全単射であることも意味する。 ■

この定理は、いわば線形代数版「鳩の巣原理」である。

Theorem – 鳩の巣原理

有限集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への写像 f に対して、単射と全射は同値である

鳩の巣原理は、歴史的には部屋割り論法とも呼ばれ、

> n 個のものを m 個の箱に入れるとき、$n > m$ であれば、
> 少なくとも 1 個の箱には 1 個より多いものが中にある

ことを指す。

ここで鳩の巣原理と呼んだのはこの命題そのものではないが、その変種と考えてよい。

正則の判定

ここまでの議論により、さまざまな正則判定法が得られる。

階数による正則判定

Theorem 11.3「線形代数における鳩の巣原理」から、次のことがいえる。

Theorem 11.4 – 階数による正則の判定

n 次正方行列 A に対して、

$$A \text{ が正則行列} \iff \operatorname{rank} A = n$$

この定理は、線形変換 f（もしくは正方行列 A）が正則かどうかについて、階数という 1 つの数値で判定できることを示している。

列ベクトルの線型独立性による正則の判定

Theorem 11.5 – 列ベクトルの線型独立性による正則の判定

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を列ベクトルとする n 次正方行列 A に対して、次が成り立つ。

$$A \text{ が正則行列} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立}$$

証明

Theorem 9.1「列ベクトルの線型独立性と階数」より、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ が線型独立であることは、$\operatorname{rank} A = n$ と同値である。

Theorem 11.4「階数による正則の判定」より、$\operatorname{rank} A = n$ は A が正則行列であることと同値である ■

核空間の次元による正則の判定

次元定理から、次のような正則判定法が得られる。

Theorem 11.6 – 核空間の次元による正則判定

n 次正方行列 A に対して、

$$\begin{aligned} A \text{ が正則行列} &\iff \operatorname{Ker} A = \{\boldsymbol{o}\} \\ &\iff \dim \operatorname{Ker} A = 0 \end{aligned}$$

証明

Theorem 11.4「階数による正則の判定」より、A が正則であることは、

$$\operatorname{rank} A = n$$

であることと同値である。

ここで、次元定理より、

$$\operatorname{rank} A + \dim \operatorname{Ker} A = n$$

$\operatorname{rank} A = n$ を代入し、整理すると、

$$\dim \operatorname{Ker} A = 0$$

が得られる。 ■

Zebra Notes

Type	Number
todo	1