## 掃き出し法の段階ごとに得られる形

ここまで見てきた、掃き出し法による連立方程式の解法をまとめると、大まかには次のような手順を踏むことになる

1. 左の列から順に、対角成分を 1 にする
2. 対角成分が 1 となっている列の対角成分以外を 0 にする

手順 1 で得られる形を行階段行列と呼び、手順 2 で得られる形を既約行階段行列と呼ぶ

ただし、$0 = -1$ が現れたときのように、手順 1（行階段行列への変形）だけで解が存在するかはわかってしまう
解の存在以外にも、行階段行列に変形した時点で読み取れる情報はさまざまある

## 行階段行列

ref: 行列と行列式の基礎 p26〜28
ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p81〜84

掃き出し法では、あるステップで下の成分がすべて 0 になって、

$$\begin{pmatrix} \spadesuit & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のような形になるのが典型例である。
ここで、0 でない成分を $\spadesuit$ で、任意の値をもつ成分を $*$ で表している。

### 零行

一般には、成分が 0 ばかりの行が下にくる。そのような行を零行という。
零行が現れない場合もあるし、複数現れる場合もある。

### 主成分

零行でない行に対して、一番左の 0 でない成分 $\spadesuit$ を主成分あるいは行に関する要と呼ぶ。

### 行階段行列の一般形

先ほど示した形では、行の主成分 $\spadesuit$ は左上から斜め右下 45° 方向にまっすぐ並んでいるが、一般にはそうできるとは限らない。

しかし、次のような形には必ずできる。

$$\begin{pmatrix} 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**行階段行列**　次の条件を満たす行列を行階段行列という。

- 零行でない行の主成分が、下の行ほど 1 つ以上右にある
- 零行がある場合は、まとめてすべて下にある

どんな行列も、行基本変形の繰り返しで行階段行列にできる。

## 既約行階段行列

必要に応じて、行階段行列をさらに変形して次のような形にする

ref: 行列と行列式の基礎 p29〜30
ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p82

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行の主成分はすべて 1 で、主成分のある列の主成分以外の成分はすべて 0 である

この形を**簡約化された行階段行列**あるいは**既約行階段行列**と呼ぶ

与えられた行列 $A$ に対して、行基本変形の繰り返しで得られる行階段行列は一意的ではないが、既約行階段行列は一意的であることを後に議論する

そこで、既約行階段行列を $A_{\circ}$ と書くことにする

変形の過程を

$$\text{行列 } A \longrightarrow \text{行階段行列} \longrightarrow \text{簡約化された行階段行列 } A_{\circ}$$

と 2 段階にわけるのは、計算の効率以上の意味がある

行階段行列にするところまでで解決する問題（解の存在と一意性など）もあるからである