計量線形空間

内積の概念は、双線形性、対称性、正定値性を満たすものとして抽象化できる

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p173〜174
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p111〜117

計量線形空間　体 K 上の線形空間 V において、その任意の要素 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in V$ に対し、次の性質

i. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}_2)$
   $(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b})$
ii. $(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$
iii. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$
iv. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0, (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

を満たす K の要素 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ がただ一つ定まるとき、$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を内積と呼び、V は計量線形空間、または単に計量空間であるという

内積の定義に

$$(\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$$

が含まれていないことに注意しよう

この式は、(ii) と (iii) から導ける上、$K = \mathbb{C}^n$ の場合には成り立たない

$K = \mathbb{C}^n$ の場合を含め、一般に次が成り立つ

内積の共役線形性　計量空間 V の要素 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積と $c \in K$ について、次の性質が成り立つ

$$(\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{b}) = \overline{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \quad (c \in K)$$

証明

計量線形空間の定義の (ii) と (iii) を用いて、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}, c\boldsymbol{b}) &= \overline{(c\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} \\
&= \bar{c}\overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} \\
&= \bar{c}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})
\end{aligned}
$$

となる ■