第 1 章

行列の階数と解の性質

拡大係数行列と連立方程式の同値変形

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p66〜69

A を m 行 n 列の行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とするとき、線形方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

は、n 個の文字 $x_1, \ldots, x_n$ に関する m 本の連立方程式である。

$\boldsymbol{x}$ は未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を成分とするベクトルである。

このとき、A は方程式の係数行列と呼ばれ、A の右端に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を追加して得られる m 行 $(n+1)$ 列の行列

$$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$$

を拡大係数行列という。

掃き出し法による連立一次方程式の解法では、拡大係数行列 $\tilde{A}$ のうち、係数行列 A の部分を既約行階段形に変形することで、解を読み取ることを目

指した。

$$\tilde{A}\text{の変形後} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_m \end{array}\right) \\ \xleftrightarrow[\mathrm{n}]{\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{array}$$

途中の行基本変形を表現する基本行列を順に $P_1, P_2, \ldots, P_k$ として、

$$P = P_k \cdots P_2 P_1$$

とおくと、行基本変形を施した後の行列は、

$$P\tilde{A} = P(A \mid \boldsymbol{b}) = (PA \mid P\boldsymbol{b})$$

すなわち、

$$PA = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \xleftrightarrow[\mathrm{n}]{\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{array}, \quad P\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

と表せる。

つまり、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longrightarrow PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$

であり、基本行列の積 P は正則であるから、両辺に左から P^{-1} をかけることで $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に戻せるので、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$$

よって、与えられた連立方程式は、係数部分を既約行階段形に変形した形の連立方程式と同値である。

行基本変形によって得られる方程式の解は、
元の方程式の解と同じ

これが、掃き出し法による連立一次方程式の解法の根拠となる。
変形後の拡大係数行列から、解を読み取ればよい。

連立方程式の解のパターン

方程式を解くということは、次のような問題に答えることである。

ref: 行列と行列式の基礎 p25

A. **解の存在**：解は存在するか？
B. **解の一意性**：解が存在する場合、それはただ 1 つの解か？
C. **解の自由度**：解が複数存在する場合、どれくらい多く存在するのか？
D. **解のパラメータ表示**：解全体の集合をいかにしてわかりやすく表示できるか？

連立方程式において、解が 1 つに定まらない場合を不定、そもそも解が存在しない場合を不能と呼ぶ。
不定の場合は、問題 C と問題 D に答えることが方程式を「解く」ことになる。

不能かどうかを判断するのが問題 A、不定かどうかを判断するのが問題 B だが、これらは次のように変形された拡大係数行列から判断することがで

きる。

$$\tilde{A}\text{の変形後} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_m \end{array}\right) \\ \underset{\text{n}}{\longleftrightarrow} \end{array}$$

このような係数拡大行列において、方程式の解が存在するのは、

$$b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$$

の場合に限る。

つまり、

$$\tilde{A}\text{の変形後} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underset{\text{n}}{\longleftrightarrow} \end{array}$$

というような形に変形された場合、$0 = 0$ という常に成り立つ等式の本数だけ解の不定性（解が定まらない変数）が残るが、解は存在する。

仮に $b_{r+1}, \ldots, b_m$ のうち、1 つでも 0 でないものがある場合、解は存在しない。

たとえば、

$$
\tilde{A}\text{の変形後} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right) \\
\xleftrightarrow{\quad\quad\quad\quad n \quad\quad\quad\quad}
\end{array}
$$

という形が得られた場合は、$0 = -1$ という常に成り立たない等式が含まれているので、連立されたすべての方程式を満たす解は存在しないことになる。

一般解のパラメータ表示

解が 1 つに定まらない場合は、解の全体像を知ることが方程式を「解く」ことになる。

ref: 行列と行列式の基礎 p33〜36

無数個の解が存在する場合、解の集合が直線を成していたり、もっと高い次元の図形になっていることがある。

主変数と自由変数

係数行列 A の n 個の列が、n 個の変数に対応していることを思い出そう。

> **主変数と自由変数**　行列 A を行基本変形により行階段形にしたとき、主成分がある列に対応する変数を**主変数**と呼び、それ以外の変数を**自由変数**と呼ぶ。

たとえば、次のような既約行階段形に変形した拡大係数行列を考える。

$$
\tilde{A}_\circ = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 1 & & 3 & 4 & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\underset{5}{\longleftrightarrow}
\end{array}
$$

変数を使って方程式の形に直すと、

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 = -3 \\
0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 1 \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5 = 2
\end{cases}
$$

主成分がある列は 1, 3, 4 列なので、主変数は x_1, x_3, x_4 である。

それ以外の x_2, x_5 は自由変数となる。

自由変数とパラメータ

先ほどの方程式

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - x_5 = -3 \\
\qquad\qquad x_3 \qquad + 2x_5 = 1 \\
\qquad\qquad\qquad x_4 + x_5 = 2
\end{cases}
$$

において、自由変数を含む項を左辺に移行すれば、

$$
\begin{cases}
x_1 = -3 - 2x_2 + x_5 \\
x_3 = 1 - 2x_5 \\
x_4 = 2 - x_5
\end{cases}
$$

となる。

自由変数 x_2, x_5 に任意の値を代入したときの主変数 x_1, x_3, x_4 の値はすべてこの方程式の解になる。

自由変数の値は定まらないので、任意の値を取りうる文字として表すしかない。

そこで、

$$x_2 = t_1, \quad x_5 = t_2$$

とおけば、

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad\qquad = -3 - 2t_1 + t_2 \\
\qquad x_3 \qquad\quad = 1 - 2t_2 \\
\qquad\qquad\quad x_4 = 2 - t_2
\end{cases}
$$

すなわち、

$$
\begin{cases}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = -3 - 2t_1 + t_2 \\
\qquad x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad = t_1 \\
\qquad\qquad x_3 \qquad\qquad\quad = 1 - 2t_2 \\
\qquad\qquad\qquad x_4 \qquad = 2 - t_2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x_5 = t_2
\end{cases}
$$

と書ける。

これをベクトル形に直すことで、一般的な解のパラメータ表示が得られる。

$$
\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

各行の方程式から得られる一般解

先ほどの具体例を一般化して考えてみよう。

次のように変形された係数拡大行列のうち、係数行列部分において主成分

を含む列を $j_1, j_2, \ldots, j_r$ とする。

$$
\tilde{A}\text{の変形後} =
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & &
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\xleftrightarrow{\hspace{6em}} \\
n
\end{array}
$$

すると、各行の方程式は次のような形になる。

$$
x_{j_i} + \sum_k \star x_k = b_i
$$
$$
(k > j_i, k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\})
$$

ここで、x_k は j_i 列よりも右にある、$\star$ に対応する変数である。

既約行階段形では、主成分を含む列の主成分以外の要素はすべて 0 であるため、$\star$ に対応する自由変数のみが残る。
そのため、$k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ という条件によって、$\star$ だけを残すようにしている。

移項して主変数 x_{j_i} について解いた形にすると、各行から得られる解は、

$$
x_{j_i} = b_i - \sum_k \star x_k
$$

となる。

この式から、$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外の自由変数 x_k に勝手な数を与えるごとに、主変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ が定まることがわかる。

このような自由変数は $n - r$ 個あるので、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は、$n - r$ 個のパラメータを用いて表すことができる。

基本解と特殊解

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p103

自由変数 $\star$ をパラメータ t_i とおき、各行の方程式から得られる解を縦に並べてベクトルの形にまとめると、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}' + \sum_{i=1}^{n-r} t_i \boldsymbol{u}_i$$

という形の一般解の表示が得られる。

ここで、パラメータ t_i をかけた列ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を連立方程式の基本解という。
また、パラメータをかけていない列ベクトル $\boldsymbol{b}'$ は、連立方程式の定数項 $\boldsymbol{b}$ に行基本変形を施した結果として得られるベクトルであり、これを特殊解という。

行列の階数

ここで、主成分の個数 r に名前をつけておこう。

ref: 行列と行列式の基礎 p28〜29

行階段行列において、主成分とは、零行でない行の中で一番左にある 0 でない成分のことを指す。
つまり、行階段行列の主成分の個数 r は、零行でない行の数と一致する。

> **行列の階数**　行列 A を行階段行列に変形したとき、零行でない行の個数を A の階数あるいはランクといい、$\mathrm{rank}\, A$ と書く。

零行でない行の個数は、既約行階段行列まで変形しなくても、行階段行列の時点で読み取れることに注意しよう。

変形の結果として得られる行階段行列は 1 通りとは限らないし、変形の途中の掃き出しの手順も 1 通りとは限らないが、

階数 $\mathrm{rank}\,A$ は A のみによって定まる値である

ことが後に証明できる。

階数のとりうる値の範囲

A が $m \times n$ 型ならば、行は m 個なので、$\mathrm{rank}\,A$ は 0 以上 m 以下の整数である。

また、階数は行階段行列に変形したときの主成分の個数でもあり、行基本行列の主成分は各列に高々 1 つなので、主成分の個数は列の個数 n を超えることはない。

したがって、次の重要な評価が成り立つ。

行列の階数の範囲　$m \times n$ 型の行列 A の階数に対して、次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$$

解の自由度

連立方程式は、解が存在する場合、$n - r$ 個のパラメータを用いて一般解を表現できた。

パラメータの個数は、自由変数の個数でもあり、基本解の個数でもある。パラメータの個数だけ、自由に値を決めることができる未知数が方程式に含まれているということである。

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p113〜114
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p69

そこで、解を表すパラメータの個数を**解の自由度**と呼ぶ。

$$\begin{aligned}\text{解の自由度} &= \text{変数の個数} - \mathrm{rank}(A) \\ &= n - r\end{aligned}$$

解の自由度は、解全体のなす集合の大きさ、すなわち何次元の空間なのかを表している。

解の存在条件

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の存在条件について、階数を用いて議論することができる。

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p110〜111

まず、行基本変形によって得られる方程式の解は、元の方程式の解と同じであった。

そこで、次のように変形した拡大係数行列をもとに考えると、

$$\tilde{A}\text{の変形後} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_m \end{array}\right) \\ \text{n} \end{array}$$

この方程式の解が存在するのは、

$$b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$$

の場合のみであることをすでに考察した。

ここで、拡大係数行列 $\tilde{A}$ は A の右端に 1 列追加して得られるので、零行でない行の個数、すなわち階数を考えると、$\mathrm{rank}\,\tilde{A}$ は $\mathrm{rank}\,A$ と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかである。

$b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$ の場合、$\mathrm{rank}\,\tilde{A}$ と $\mathrm{rank}\,A$ は一致する。

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}\\
\xleftrightarrow[\mathrm{n}]{\qquad\qquad\qquad}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)\\
\xleftrightarrow[\mathrm{n}]{\qquad\qquad\qquad}
\end{array}
$$

一方、$b_{r+1}, \ldots, b_m$ のうち、1 つでも 0 でないものがある場合は、拡大係数行列の右端の列に主成分が現れ、$\operatorname{rank} \tilde{A}$ と $\operatorname{rank} A$ は一致しない。

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}\\
\xleftrightarrow[\mathrm{n}]{\qquad\qquad\qquad}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)\\
\xleftrightarrow[\mathrm{n}]{\qquad\qquad\qquad}
\end{array}
$$

$b_{r+1}, \ldots, b_m$ のうち、0 でないものが 2 つ以上ある場合も、さらに行基本変形を行うことで、右上の拡大係数行列と同じ形にできるので、

$$
\operatorname{rank} \tilde{A} = \operatorname{rank} A + 1
$$

となる。

以上の考察から、連立一次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する条件は、

係数行列と拡大係数行列の階数が等しい

ことだといえる。

拡大係数行列と解の存在条件　A を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする

$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ とおくとき、

$$\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A) \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p31 （定理 1.5.1）]

解の存在条件の系　A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$^\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する} \iff \mathrm{rank}(A) = m$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p32 （定理 1.5.2, 1.5.3）]

解の一意性

ここまでの議論から、次のことがいえる。

ref: 行列と行列式の基礎 p37～38

解の一意性　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するとき、

$$\text{解が一意的である} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である。

証明

$\Longleftarrow$

rank$(A) = n$ であれば、解の自由度は $n - n = 0$、すなわち自由変数が存在しないことになる

自由変数がなければ「各変数＝定数」という式に変形できることになるので、解は明らかに一意的である ■

$\Longrightarrow$

対偶 rank$(A) \neq n \Longrightarrow$ 解が一意的 を示す

rank$(A) \leq n$ であるので、rank$(A) \neq n$ は rank$(A) < n$ を意味する

rank$(A) < n$ であれば、自由変数が 1 つ以上存在するので解は無数にある

よって、解は一意的ではない ■

解のパラメータ表示の一意性

自由変数を $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ とするとき、一般解の表示

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

の j_k 番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる

このことから、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の $n - r$ 個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる

この事実は、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^m$ が線形独立であると表現される

斉次形方程式の非自明解の存在

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ の場合、つまり、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

の形の線形連立方程式は斉次形であるという。

斉次形の場合は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が明らかに解になっていて、これを自明解という。

したがって、斉次形の方程式では、自明解以外に解が存在するかどうかが基本的な問題となる。

斉次形の非自明解の存在条件　斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ において、

$$\text{自明解しか存在しない} \iff \operatorname{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性 $\operatorname{rank}(A) = n$ は、それ以外の解がないということを意味している ■

斉次形方程式の解空間

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、

$$\operatorname{Ker} f = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}\}$$

と定めると、$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ という関係から、Ker f と Ker A は同じものを指す。

これは、斉次形の連立線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の解空間そのものである。
Ker A の元は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ の基本解を使ってパラメータ表示できる。

線形写像の表現行列と連立方程式

線型写像の単射性・全射性は、その表現行列の階数によって連立一次方程式の解の性質と結びつく。

ref: 行列と行列式の基礎 p67〜68

単射な線形写像と階数

線形写像 f が単射であることを、表現行列 A の性質として述べると、次のような言い換えができる。

線形写像の単射性と表現行列　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値である。

i. f は単射
ii. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は自明な解しか持たない
iii. $\text{rank}(A) = n$

証明

(i) $\iff$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が単射であることの言い換えは、

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

であり、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が自明解しか持たないことは、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

が成り立つということである

$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であるから、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

斉次形の非自明解の存在条件より、斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ に自明解しか存在しないことと

$$\text{rank}(A) = n$$

と同値である。 ■

全射な線形写像と階数

単射性と対比して、全射性についても表現行列の言葉で整理する。

線形写像の全射性と表現行列　線形写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値である。

i. f は全射
ii. 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解が存在する
iii. $\text{rank}(A) = m$

証明

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が全射であることの言い換えは、

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

であり、これは

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

と同値である

よって、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\iff$ (iii)

連立方程式の解の存在条件より、$\mathrm{rank}(A) = m$ は、次の条件

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する}$$

ことと同値である。 ■

全単射な線形変換と階数

一般の線形写像と対比して、線形変換の大きな特徴は次が成り立つことである。

ref: 行列と行列式の基礎 p70

単射と全射は、一般には一方から他方が導かれるわけではない 2 つの性質だが、$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像（線形変換）の場合は同値になる。

⚓ **線形代数における鳩の巣原理** f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換とし、A を f の表現行列とするとき、次はすべて同値である。

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は全単射
iv. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ において、表現行列を A とすると、

$$
\begin{aligned}
f \text{ が単射} &\iff \mathrm{rank}(A) = n \\
f \text{ が全射} &\iff \mathrm{rank}(A) = m
\end{aligned}
$$

である。

線形変換は、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の $m = n$ の場合であるので、f が単射であることも、全射であることも、

$$
\mathrm{rank}(A) = n
$$

という条件と同値になる。

つまり、線形変換は単射かつ全射であり、これは全単射であることも意味する。 ■

この定理は、いわば線形代数版「鳩の巣原理」である。

鳩の巣原理　有限集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への写像 f に対して、単射と全射は同値である

鳩の巣原理は、歴史的には**部屋割り論法**とも呼ばれ、

> n 個のものを m 個の箱に入れるとき、$n > m$ であれば、少なくとも 1 個の箱には 1 個より多いものが中にある

ことを指す。

ここで鳩の巣原理と呼んだのはこの命題そのものではないが、その変種と

考えてよい。

階数による正則判定

線形代数における鳩の巣原理から、次のことがいえる。

ref: 行列と行列式の基礎 p71

正則の判定と階数　n 次正方行列 A に対して、

$$A \text{ が正則行列} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

この定理は、線形変換 f（もしくは正方行列 A）が正則かどうかについて、階数という 1 つの数値で判定できることを示している。

Zebra Notes

Type	Number
todo	2