第 23 章

直交補空間と射影行列

直交補空間

内積を導入したことで、ベクトルの長さや直交性が利用できるようになった。 直交性は、ベクトルだけでなく、部分空間に対しても拡張できる。

計量空間の部分空間に直交するベクトルの集合を、直交補空間という。

■ 直交補空間 計量空間 V の部分空間 W に対し、W の直交補空間 W^{\perp} を次のように定義する。

 $W^{\perp} := \{ \boldsymbol{v} \in V \mid \forall \boldsymbol{w} \in W, (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0 \}$

直交補空間は V の部分空間

直交補空間もまた、計量空間の部分空間になっている。

♪ Theorem - 直交補空間の部分空間性

計量空間 V の部分空間 W の直交補空間 W^{\perp} は、計量空間 V の部分空間である。

証明 証明

和について

 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in W^{\perp}$ とすると、任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して、

$$(a_1 + a_2, b) = (a_1, b) + (a_2, b) = 0 + 0 = 0$$

となるので、 $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in W^{\perp}$ である。

スカラー倍について

 $\boldsymbol{a} \in W^{\perp}$ とすると、任意のスカラー $\boldsymbol{c} \in K$ と任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対して、

$$(c\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=c(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=c\cdot 0=0$$

となるので、 $ca \in W^{\perp}$ である。



直交補空間による直和分解

「直交補空間」という名前は、「補集合」と同様に、何らかの集合を補う集合であることを想起させる。

実際、直交補空間 W^{\perp} は、もとの集合 W を補い、V 全体を構成するような性質を持つ。

♣ Theorem - 直交補空間を用いた計量空間の分解

計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$V = W + W^{\perp}$$

★ 証明

 $W = \{o\}$ の場合は、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して o との内積は 0 になることから、 W^{\perp} は V 全体となる。

$$W^{\perp} = \{ \boldsymbol{v} \in V \mid (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{o}) = 0 \} = V$$

よって、

$$V = W + W^{\perp} = \{o\} + V = V$$

が成り立つ。

以降、 $W \neq \{o\}$ とする。

W の基底 $\{\boldsymbol{w}_1',\ldots,\boldsymbol{w}_k'\}$ を 1 つとり、これに対してグラム・シュミットの直交化法を適用して、正規直交基底 $\{\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_k\}$ を得る。

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ をとり、次のようにおく。

$$oldsymbol{u} = oldsymbol{v} - \sum_{i=1}^k (oldsymbol{v}, oldsymbol{w}_i) oldsymbol{w}_i$$

 \boldsymbol{u} と \boldsymbol{w}_i の内積を計算すると、

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_i) = \left(\boldsymbol{v} - \sum_{j=1}^k (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j) \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_i\right)$$

$$= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - \sum_{j=1}^k (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j) (\boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{w}_i)$$

$$= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - \sum_{j=1}^k (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_j) \delta_{ij}$$

$$= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_i)$$

$$= 0$$

このように、任意の $i=1,\ldots,k$ に対して、 $oldsymbol{u}$ と $oldsymbol{w}_i$ の内積が 0 になることから、 $oldsymbol{u}\in W^\perp$ である。

一方、 \boldsymbol{u} の定義式を \boldsymbol{v} を表す式として整理すると、

$$oldsymbol{v} = oldsymbol{u} + \sum_{i=1}^k (oldsymbol{v}, oldsymbol{w}_i) oldsymbol{w}_i$$

となるが、 \boldsymbol{w}_i が W の正規直交基底であることから、

$$\sum_{i=1}^k (oldsymbol{v}, oldsymbol{w}_i) oldsymbol{w}_i$$

の部分は、W の任意の元を表す。

よって、V の任意の元 \boldsymbol{v} は、W の元と W^{\perp} の元 \boldsymbol{u} の和として表されるので、

$$V = W + W^{\perp}$$

が成り立つ。

さらに、次の定理が成り立つことで、単なる空間の和ではなく、直和として分解できること がわかる。

♣ Theorem - 直交補空間との交わり

計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$W \cap W^{\perp} = \{o\}$$

証明

 $\boldsymbol{a} \in W \cap W^{\perp}$ とすると、 $\boldsymbol{a} \in W$ かつ $\boldsymbol{a} \in W^{\perp}$ である。

 $\mathbf{a} \in W^{\perp}$ より、 $\mathbf{a} \in W$ に対しても内積が 0 になるので、

$$(a, a) = 0$$

ここで、内積の性質より、

$$(a, a) = ||a||^2 > 0$$

であり、等号が成立するのは、 $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ のときのみである。

 $\exists z \in a = 0 \text{ } (z \in a)$

零ベクトルは任意のベクトルと直交し(内積が 0 になり)、また任意の部分空間に属するので、明らかに $o \in W \cap W^{\perp}$ である。

 $m{a}$ は $W \cap W^{\perp}$ の任意の元であり、 $m{a} = m{o} \in W \cap W^{\perp}$ であることがわかったので、

$$W \cap W^{\perp} = \{o\}$$

がいえる。

こうして、次の両方が成り立つことから、

- i. $V = W + W^{\perp}$
- ii. $W \cap W^{\perp} = \{o\}$

Theorem 18.2「直和分解の同値条件」より、計量空間 V は部分空間 W とその直交補空間 W^{\perp} の直和として分解できる。

よって、Theorem 18.3「直和の次元」より、次の定理が従う。

我 Theorem - 直交補空間と次元

計量空間 V の部分空間 W に対して、

$$\dim V = \dim W + \dim W^{\perp}$$

直交補空間の性質

直交補空間の直交補空間はもとの空間

♣ Theorem 23.1 - 部分空間の双直交補と元空間の一致

計量空間 V の部分空間 W に対して、次が成り立つ。

$$(W^{\perp})^{\perp} = W$$

証明

[Todo 1:]

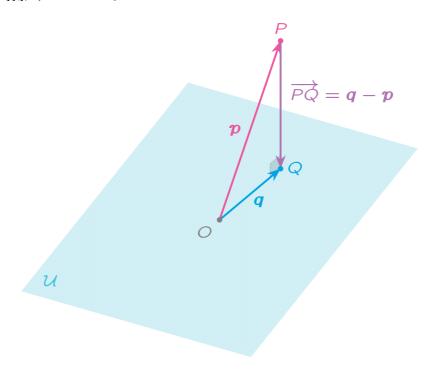


直交射影と反射影

 \mathbb{R}^n 上の点 P に対して、部分空間 U 上の点 $Q \in U$ のうち、 \overrightarrow{PQ} が U に直交するような 点 Q を、点 P の U への直交射影あるいは正射影という

また、 \overrightarrow{QP} を点 Q の U からの \overline{Q} からの \overline{Q} がらの \overline{Q}

射影前のベクトルを \boldsymbol{p} 、射影後のベクトルを \boldsymbol{q} とすると、直交射影とは、 \boldsymbol{q} と $\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}$ が直 交するように射影することである



このとき、次のような関係が成り立っている

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$\overrightarrow{OQ} \in \mathcal{U}, \quad \overrightarrow{QP} \in \mathcal{U}^{\perp}$$

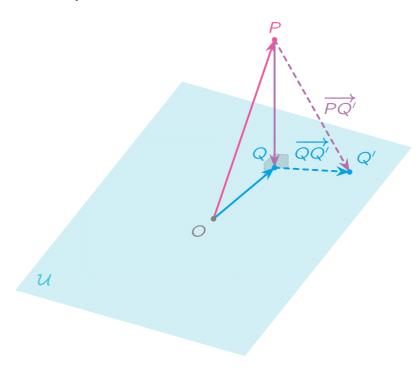
ここで、 \mathcal{U}^{\perp} は部分空間 \mathcal{U} に直交するベクトルの全体であり、 \mathcal{U} の<mark>直交補空間</mark>と呼ばれる \mathbb{R}^n の部分空間 \mathcal{U} の直交補空間 \mathcal{U}^{\perp} も、 \mathbb{R}^n の部分空間となる

 \overrightarrow{OP} は \mathbb{R}^n の任意のベクトルを表すことから、 \mathbb{R}^n のベクトルは、 \mathcal{U} への射影 \overrightarrow{OQ} と、 \mathcal{U} からの反射影 \overrightarrow{QP} の和として表されることがわかる

このような表し方は一意的であり、 \overrightarrow{OP} の \mathcal{U} と \mathcal{U}^{\perp} への $\overline{\mathbf{0}}$ 和分解という

直交射影と最短距離

点 Q を U 上の別の点 Q' に移動した場合を考える



このとき、三平方の定理より、

$$\|\overrightarrow{PQ'}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QQ'}\|^2 > \|\overrightarrow{PQ}\|^2$$

となるから、

直交射影した点 Q は、

点 P から最短となる U 上の点



であることがわかる



射影行列

ベクトルの射影の概念は、射影行列を用いて表現できる。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は、 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ 、 $\boldsymbol{u}^{\perp} \in \mathcal{U}^{\perp}$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{\perp}$$

と一意的に分解できる(直和分解)。

ここで、 \boldsymbol{x} の \boldsymbol{U} への射影を表すのは、 \boldsymbol{u} である。

つまり、 \boldsymbol{U} への射影とは \boldsymbol{x} のうち、 \boldsymbol{U} に含まれる成分 \boldsymbol{u} だけを取り出す操作といえる。

そこで、部分空間 U へ射影する写像を Pu とすると、

$$P_{\mathcal{U}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$$

という、「 \boldsymbol{x} に $P_{\boldsymbol{u}}$ を作用させると \boldsymbol{u} だけが残る」という形で書ける。

部分空間への射影

このとき、 \boldsymbol{x} がもともと \boldsymbol{U} の元である場合は、 $\boldsymbol{u}^{\perp} = \boldsymbol{o}$ の場合と考えて、

$$x = u + o = u$$

つまり、射影しても変わらないので、

$$P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U})$$

である。

一方、 \boldsymbol{x} が \boldsymbol{U} の直交補空間 \boldsymbol{U}^{\perp} の元の場合は、 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o}$ の場合と考えて、

$$P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp})$$

となる。

以上をまとめると、次のように書ける。

$$P_{\mathcal{U}}oldsymbol{x} = egin{cases} oldsymbol{x} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \ o & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp}) \end{cases}$$

同様に、直交補空間 U^{\perp} へ射影する写像を $P_{U^{\perp}}$ とした場合、

$$P_{\mathcal{U}^{\perp}}oldsymbol{x} = egin{cases} oldsymbol{o} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \ oldsymbol{x} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp}) \end{cases}$$

とまとめられる。

射影行列の展開

 \mathbb{R}^n が \mathcal{U} と \mathcal{U}^\perp の直和に分解されることから、Theorem 18.4「直和の基底」より、 \mathbb{R}^n の基底は \mathcal{U} の基底と \mathcal{U}^\perp の基底を合わせたものになる。

そこで、部分空間 U の正規直交基底 $\{u_1,\ldots,u_r\}$ を選ぶと、これを \mathbb{R}^n の正規直交基 底 $\{u_1,\ldots,u_r,u_{r+1},\ldots,u_n\}$ に拡張できる。

ここで、 $\{\boldsymbol{u}_{r+1},\ldots,\boldsymbol{u}_n\}$ は \mathcal{U}^{\perp} の正規直交基底になる。

このとき、

$$P_{\mathcal{U}}oldsymbol{x} = egin{cases} oldsymbol{x} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \ oldsymbol{o} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{x}}}) \end{cases}$$

という式は、 $P_{\mathcal{U}}$ が \mathbb{R}^n の正規直交基底

$$\{{\bm u}_1,\ldots,{\bm u}_r,{\bm u}_{r+1},\ldots,{\bm u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する。

$$\{u_1, \ldots, u_r, o, \ldots, o\}$$

同様に、

$$P_{\mathcal{U}^{\perp}}oldsymbol{x} = egin{cases} oldsymbol{o} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \ oldsymbol{x} & (oldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp}) \end{cases}$$

という式は、 $P_{\mathcal{U}^{\perp}}$ が \mathbb{R}^n の正規直交基底

$$\{{\bm u}_1,\ldots,{\bm u}_r,{\bm u}_{r+1},\ldots,{\bm u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する。

$$\{o, \ldots, o, u_{r+1}, \ldots, u_n\}$$

ゆえに、Theorem~14.2「正規直交基底による表現行列の展開」より、 $P_{\mathcal{U}}$ は次のように表現できる。

$$egin{aligned} egin{aligned} eta_{\mathcal{U}} &= oldsymbol{u}_1 oldsymbol{u}_1^ op + \cdots + oldsymbol{u}_r oldsymbol{u}_r^ op \ eta_{\mathcal{U}^\perp} &= oldsymbol{u}_{r+1} oldsymbol{u}_{r+1}^ op + \cdots + oldsymbol{u}_n oldsymbol{u}_n^ op \end{aligned}$$

 $P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^{\perp}}$ をそれぞれ、部分空間 U、およびその直交補空間 U^{\perp} への射影行列と呼ぶ。



単位行列の射影行列への分解

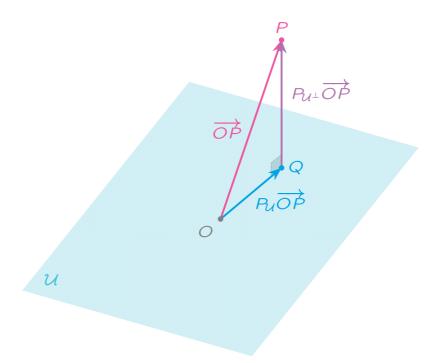
直交射影と反射影の章で示した、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$

$$\overrightarrow{OQ} \in \mathcal{U}, \quad \overrightarrow{QP} \in \mathcal{U}^{\perp}$$

という関係は、射影行列を用いて、次のようにも表せる

$$\overrightarrow{OP} = P_{\mathcal{U}}\overrightarrow{OP} + P_{\mathcal{U}^{\perp}}\overrightarrow{OP}$$
$$= (P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^{\perp}})\overrightarrow{OP}$$



 \mathbb{R}^n 内のすべての点 P に対して、 $\overrightarrow{OP} = (P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^{\perp}})\overrightarrow{OP}$ が成り立つことから、

$$P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^{\perp}} = E$$

が成り立っている

これはすなわち、単位行列 E が、部分空間 U その直交補空間 U^{\perp} への射影行列の和に分解できることを意味する

$$E = \underbrace{\boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_r \boldsymbol{u}_r^\top}_{P_{\mathcal{U}}} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{r+1} \boldsymbol{u}_{r+1}^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^\top}_{P_{\mathcal{U}^\perp}}$$

この式により、単位行列 E 自体を、空間全体 \mathbb{R}^n への射影行列と考えることもできる



射影行列とノルム

 $P_U\overrightarrow{OP}$ と $P_{U^{\perp}}\overrightarrow{OP}$ は直交するから、三平方の定理より、

$$\|\overrightarrow{OP}\|^2 = \|P_{\mathcal{U}}\overrightarrow{OP}\|^2 + \|P_{\mathcal{U}^{\perp}}\overrightarrow{OP}\|^2$$

がいえる

ゆえに、任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP}$ に対して、

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x}\|^2 + \|P_{\mathcal{U}^{\perp}}\boldsymbol{x}\|^2$$

が成り立つ



射影行列の冪等性と対称性

「一度射影した点をもう一度射影しても変化しない」という性質は、次のような数式として表現できる



射影行列 凡 は冪等である

$$P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$$

▲ 証明

$$egin{aligned} &oldsymbol{\mathcal{P}}_{\mathcal{U}}^2 = \left(\sum_{i=1}^r oldsymbol{u}_i oldsymbol{u}_i^{ op} oldsymbol{u}_i oldsymbol{u}_i^{ op} \left(\sum_{j=1}^r oldsymbol{u}_j oldsymbol{u}_j^{ op}
ight) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r oldsymbol{u}_i oldsymbol{u}_i^{ op} oldsymbol{u}_j oldsymbol{u}_j^{ op} \ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \delta_{ij} oldsymbol{u}_i oldsymbol{u}_j^{ op} \ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \delta_{ij} oldsymbol{u}_i oldsymbol{u}_j^{ op} \end{aligned}$$

ここで、 δ_{ij} を含むことから、i=j の場合のみ項が残り、

$$P_{\mathcal{U}}^2 = \sum_{i=1}^r oldsymbol{u}_i oldsymbol{u}_i^ op = P_{\mathcal{U}}$$

が得られる

この $P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$ という式は、一般の(必ずしも直交射影でない)射影の定義として用いられる

次の性質は、射影が直交射影であることを示すものである

♪ Theorem - 射影行列の対称性

射影行列 Pu は、対称行列である

$$P_{\mathcal{U}}^{\top} = P_{\mathcal{U}}$$

証明

$$P_{\mathcal{U}}^{ op} = \left(\sum_{i=1}^r oldsymbol{u}_i oldsymbol{u}_i^{ op}
ight)^{ op}$$

Theorem 2.5「行列の和に対する転置の分配性」より、和の転置は転置の和であ ることを用いて、

$$P_{\mathcal{U}}^{ op} = \sum_{i=1}^r (oldsymbol{u}_i oldsymbol{u}_i^{ op})^{ op}$$

また、Theorem 2.4「転置と行列積の順序反転性」より、積の転置は転置の積だ が、積の順序が入れ替わることに注意して、

$$P_{\mathcal{U}}^{ op} = \sum_{i=1}^r (oldsymbol{u}_i^{ op})^{ op} oldsymbol{u}_i^{ op}$$

Theorem 2.3「転置操作の反復不変性」より、転置の転置をとると元に戻るので、

$$P_{\mathcal{U}}^{ op} = \sum_{i=1}^r oldsymbol{u}_i oldsymbol{u}_i^{ op} = P_{\mathcal{U}}$$

が得られる

射影行列は冪等かつ対称であるが、その逆も成り立つ

予 Theorem - 対称性と冪等性による射影行列の特徴づけ

対称かつ冪等な行列は、ある部分空間への射影行列となる

▲ 証明

Theorem 20.9 「エルミート行列の固有値の実数性」より、n 次対称行列 P は、 n 個の実数の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つ

これらに属する固有ベクトルを u_1, \ldots, u_n とすると、Theorem 20.10「エル ミート行列の固有値の直交性」より、**u**i は互いに直交する

固有値と固有ベクトルの関係から、

$$P\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$$

両辺に左から P をかけると、

$$P^2 \boldsymbol{u}_i = \lambda_i P \boldsymbol{u}_i = \lambda_i \cdot \lambda_i \boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$$

 $\therefore P^2 \boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$

ここで、P は冪等なので、 $P^2 = P$ が成り立つ

$$P^2 \boldsymbol{u}_i = P \boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$$

これを用いると、

$$\lambda_i oldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 oldsymbol{u}_i$$

固有ベクトル \mathbf{u}_i は零ベクトルではないので、

$$\lambda_i = \lambda_i^2$$

よって、

$$\lambda_i^2 - \lambda_i = 0$$
$$\lambda_i(\lambda_i - 1) = 0$$
$$\lambda_i = 0, 1$$

すなわち、固有値は 0 か 1 のいずれかである

そこで、

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 1$$
 $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$

とおくと、

$$Poldsymbol{u}_i = egin{cases} oldsymbol{u}_i & (i=1,\ldots,r) \ 0 & (i=r+1,\ldots,n) \end{cases}$$

よって、P は $\{ oldsymbol{u}_1, \ldots, oldsymbol{u}_r \}$ の張る部分空間への射影行列である

Zebra Notes

Туре	Number
todo	1