線形写像の単射性と表現行列

線形写像 f が単射であることを、表現行列 A の性質として述べると、次のような言い換えができる

ref: 行列と行列式の基礎 p67〜68

線形写像の単射性と表現行列　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値である

i. f は単射
ii. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ は自明な解しか持たない
iii. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が単射であることの言い換えは、

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

であり、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が自明解しか持たないことは、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

が成り立つということである

$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であるから、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ に自明解しか存在しないことと

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

と同値であることは以前証明済み ■

線形写像の全射性と表現行列

単射性と対比して、全射性についても表現行列の言葉で整理する

ref: 行列と行列式の基礎 p67〜68

⚓ **線形写像の全射性と表現行列**　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値である

i. f は全射
ii. 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解が存在する
iii. $\mathrm{rank}(A) = m$

証明

(i) $\iff$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が全射であることの言い換えは、

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

であり、これは

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

と同値である

よって、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\iff$ (iii)

$\mathrm{rank}(A) = m$ が、次の条件

$$^{\forall}\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する}$$

ことと同値であることは、以前証明済み $\blacksquare$