第 1 章

複素行列と計量空間上の変換

転置行列と随伴行列

複素正方行列 A の転置行列において、各成分をその共役複素数に置き換えた行列を随伴行列という

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p275

随伴行列　複素正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し、$\overline{a_{ji}}$ を (i, j) 成分にもつ行列 ${}^t\overline{A}$ を A の随伴行列といい、A^* と表す

実数 x の複素共役は $\overline{x} = x$ であるので、A が実行列のときは、

$$A^* = {}^tA$$

すなわち、

> 実行列の世界では、随伴行列は転置行列

にすぎない

転置を二回行うと元に戻ることと同様に、次が成り立つ

随伴行列の自己反転性　複素正方行列 A に対し、随伴行列を二回とると元に戻る

$$(A^*)^* = A$$

証明

随伴行列の定義より、

$$(A^*)^* = {}^t\overline{A^*} = {}^t\overline{{}^t\overline{A}}$$

$A = (a_{ij})$ とすると、A の各成分を共役複素数にした行列は、

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

これを転置すると、

$$^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$$

さらに、もう一度各成分の複素共役をとると、

$$\overline{{}^t\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji})$$

したがって、

$$(A^*)^* = {}^t\overline{{}^t\overline{A}} = (a_{ij}) = A$$

が成り立つ　■

転置行列と複素共役の性質から、次の性質が成り立つ

積に対するエルミート共役の順序反転性　複素行列 A B の積 AB が定義できるとき、

$$(AB)^* = B^*A^*$$

証明

[Todo 1:]

随伴行列と標準内積は、次のような関係で結ばれる

随伴公式　複素行列 A と計量空間上のベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

証明

転置を用いて内積を表すと、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\overline{\boldsymbol{v}}$$

転置と行列積の順序反転性より、${}^t(A\boldsymbol{u}) = {}^t\boldsymbol{u}{}^tA$ なので、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ({}^t\boldsymbol{u}{}^tA)\overline{\boldsymbol{v}}$$

行列の積の結合法則を用いて、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}({}^tA\overline{\boldsymbol{v}})$$

ここで、$\overline{{}^t\overline{A}}$ は、$A = (a_{ij})$ とすると、

1. $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$
2. ${}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$
3. $\overline{{}^t\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji}) = {}^tA$

となり、${}^tA$ と一致する

これを用いて書き換えると、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}(\overline{{}^t\overline{A}}\overline{\boldsymbol{v}})$$

複素共役の積の性質 $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ を用いて、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}\overline{{}^t\overline{A}\boldsymbol{v}}$$

この時点で、右辺を内積として書き直すと、$A\boldsymbol{v}$ の複素共役がなくなることに注意して、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, {}^t\overline{A}\boldsymbol{v})$$

随伴行列の定義 $A^* = {}^t\overline{A}$ より、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

となり、目的の等式が得られた ■

直交行列とユニタリ行列

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p275〜276
ref: 行列と行列式の基礎 p204

ユニタリ行列 複素正方行列 A が次を満たすとき、A をユニタリ行列という

$$A^* = A^{-1}$$

A が実正方行列のときは、

$$A \text{ がユニタリ行列} \Longleftrightarrow {}^tA = A^{-1}$$

となり、このような A は直交行列と呼ばれる

直交行列 実正方行列 A が次を満たすとき、A を直交行列という

$${}^tA = A^{-1}$$

直交行列という名前の由来は、次のように考えられる

A を n 個の列ベクトルを横一列に並べたものとみなし、

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

とおくと、${}^tA = A^{-1}$、すなわち ${}^tAA = E$ は、

$$\begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}_1 \\ {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

と表される

これは、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が、次の性質

$${}^t\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$$

を満たすことを意味する

すなわち、直交行列 A の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は、互いに直交する単位ベクトルである

この事実は、複素行列に対しても成立する

⚓ **todo**　複素正方行列 U を $U = (\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n)$ と列ベクトル分解するとき、

$$U \text{ がユニタリ行列} \iff (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$$

すなわち、ユニタリ行列の列ベクトルは、互いに直交する単位ベクトルである

ユニタリ変換

体 $\mathbb{C}$ 上の計量空間において、内積を保つ線形変換を**ユニタリ変換**という

ref: 行列と行列式の基礎 p77〜82

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p126〜131

ユニタリ変換　体 $\mathbb{C}$ 上の計量空間 V における線形変換 f が**ユニタリ変換**であるとは、任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対し、

$$(f(\boldsymbol{u}), f(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つことである

体 $\mathbb{R}$ 上のユニタリ変換は、**直交変換**と呼ばれる

ユニタリ変換とノルム

ユニタリ変換は、ベクトルの長さを変えない変換でもある

ユニタリ変換とノルム保存性　計量空間 V における線形変換を f がユニタリ変換であることと、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し

$$\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つことは同値である

証明

f がユニタリ変換 $\Longrightarrow$ f はノルムを保つ

ユニタリ変換の定義より、

$$(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{v}\|^2$$

ここで、$\|f(\boldsymbol{v})\| = \sqrt{(f(\boldsymbol{v}), f(\boldsymbol{v}))}$ であるから、

$$\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つ　■

f はノルムを保つ $\Longrightarrow$ f はユニタリ変換

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し、

$$\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つというのが仮定である

そこで、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ とすると、

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|$$

両辺を二乗して、

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|^2$$

このとき、左辺は次のように展開できる

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2\end{aligned}$$

右辺も同様に、

$$\begin{aligned}&\|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|^2 \\ &\qquad = \|f(\boldsymbol{a})\|^2 + 2(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})) + \|f(\boldsymbol{b})\|^2\end{aligned}$$

さて、仮定より、$\|f(\boldsymbol{a})\| = \|\boldsymbol{a}\|$ と $\|f(\boldsymbol{b})\| = \|\boldsymbol{b}\|$ が成り立つことから、

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|^2$$

という等式の両辺を展開した結果、残る項は

$$2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}))$$

だけとなる

したがって、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}))$$

が成り立つので、f はユニタリ変換である ■

ユニタリ変換の表現行列

ユニタリ変換の表現行列は、ユニタリ行列である

todo 計量空間上の線形変換 f がユニタリ変換であることと、f の表現行列 A がユニタリ行列であることは同値である

証明

f がユニタリ変換 $\Longrightarrow$ A がユニタリ行列

A がユニタリ行列 $\Longrightarrow$ f がユニタリ変換

対称行列とエルミート行列

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p275〜276

エルミート行列 複素正方行列 A が次を満たすとき、A をエルミート行列という

$$A^* = A$$

A が実正方行列のときは、

$$A \text{ がエルミート行列} \Longleftrightarrow {}^tA = A$$

となり、このような A は対称行列、あるいは実対称行列と呼ばれる

エルミート変換

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p126〜131

エルミート変換　体 $\mathbb{C}$ 上の計量空間 V における線形空間 f がエルミート変換であるとは、任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対し、

$$(f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, f(\boldsymbol{v}))$$

が成り立つことである

体 $\mathbb{R}$ 上のエルミート変換は、対称変換と呼ばれる

随伴写像

[Todo 2:]

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p131〜133

直交補空間

[Todo 3:]

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p136〜140

Zebra Notes

Type	Number
todo	3