正則行列

ref: 行列と行列式の基礎 p71

正則　線形変換 f は全単射であるとき、正則な線形変換であるという

正則行列　正方行列 A は、それが正則な線形変換を与えるとき、正則行列であるという

「線形代数における鳩の巣原理」から、次のことがいえる

正則の判定と階数　n 次正方行列 A に対して、

$$A \text{ が正則行列} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

この定理は、線形変換 f（もしくは正方行列 A）が正則かどうかについて、階数という 1 つの数値で判定できることを示している

列ベクトルの線型独立性による正則の判定　n 次正方行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

に対して、次が成り立つ

$$A \text{ が正則行列} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立}$$

証明

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ が線型独立であることは、

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

と同値であることを以前示した

さらに、先ほど示した定理より、$\mathrm{rank}(A) = n$ は A が正則行列であることと同値である ■

逆行列

写像 f が全単射であれば、逆写像 f^{-1} が存在する

ref: 行列と行列式の基礎 p71〜72

逆写像の線形性 f を $\mathbb{R}^n$ の正則な線形変換とするとき、逆写像 f^{-1} は線形である

証明

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とし、次の 2 つを示せばよい

i. $f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$

ii. $f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$

(i)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{y} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

また、f は線形写像であるから、

$$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x})+f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{v})$ は、$f(f^{-1}(\boldsymbol{v}))$ を意味する記号なので、

$$f(f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x})+f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

両辺を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x})+f^{-1}(\boldsymbol{y})$$

となり、(i) が示された　■

(ii)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x})) \\ c\boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(c\boldsymbol{x})) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$ の両辺に c をかけた、次も成り立つ

$$c\boldsymbol{x} = cf(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

さらに、f は線形写像であるから、

$$cf(f^{-1}(\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

ここまでの $c\boldsymbol{x}$ の複数の表現により、次式が成り立つ

$$f(f^{-1}(c\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

両辺を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$$

となり、(ii) が示された　■

n 次正則行列 A は、正則な線形変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と対応している

逆写像 f^{-1} が存在し、線形であるから、ある n 次正方行列 B が対応するはずである

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ であり、線形写像の合成は行列の積に対応するから、

$$AB = BA = E$$

が成り立つ

このような B を A の逆行列と呼び、A^{-1} と書く

逆行列の性質

逆行列の一意性　正方行列 A に対して、A の逆行列が存在するならば、それは一意的である

証明

A の逆行列が B_1 と B_2 の 2 つあるとする

$$AB_1 = B_1A = E \quad \text{かつ} \quad AB_2 = B_2A = E$$

$AB_2 = E$ の両辺に B_1 をかけると、

$$B_1 = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2$$

よって、$B_1 = B_2$ となり、逆行列は一意的である ■

逆行列に対する逆行列　正則行列 A の逆行列 A^{-1} は正則であり、その逆行列は A である

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

証明

A の逆行列が A^{-1} であることから、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

この式は、A^{-1} が正則であり、その逆行列が A であることを示す式でもある　■

正則行列の積に対する逆行列　正則行列 A, B の積 AB は正則であり、その逆行列は次のようになる

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

証明

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AEA^{-1} \\ &= E\end{aligned}$$

であり、同様に

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B \\ &= B^{-1}EB \\ &= E\end{aligned}$$

であるので、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ ■

逆行列の計算法と線形方程式

正則行列 A に対して、方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のただ 1 つの解は次で与えられる

ref: 行列と行列式の基礎 p72〜73

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

A^{-1} が計算できれば、行列のかけ算によって線型方程式の解が求められる

正則行列 A の逆行列を計算するために、次の定理に注目しよう

逆行列の計算法の原理 正方行列 A に対して、$AB = E$ を満たす正方行列 B があるならば、A は正則であり、B は A の逆行列である

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p72 命題 2.4.6]

上の定理の証明は、逆行列の計算法のヒントを含んでいる

A の逆行列 B を求めるには、n 個の線形方程式

$$A\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

を解けばよい

A は階数 n の n 次正方行列なので、行変形で A から E に到達することができる

$\boldsymbol{b}_i$ を求めるには、行変形により

$$(A \mid \boldsymbol{e}_i) \to \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_i)$$

とすればよい

i ごとに掃き出し法を何度も実行しないといけないのかと思いきや、一度にまとめられる

$$\begin{gathered}(A \mid E) = (A \mid \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \to \\ \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n) = (E \mid B)\end{gathered}$$

このようにすれば、行変形は 1 通りで十分である

正則行列と転置行列

ref: 行列と行列式の基礎 p88

正則行列の転置の正則性　正則行列 A に対して、その転置行列 ${}^tA$ も正則である

証明

A が正則であることから、その逆行列 A^{-1} が存在し、

$$A^{-1}A = E$$

両辺の転置をとると、右辺の単位行列は転置しても単位行列であり、左辺には正則行列の積に対する逆行列の公式を用いて、

$${}^t(A^{-1}A) = {}^tA{}^t(A^{-1}) = E$$

この等式より、${}^tA$ の逆行列は ${}^t(A^{-1})$ であることがわかる　■

正則行列と対角行列

ref: 行列と行列式の基礎 p74〜75

上三角行列の正則性　対角成分がすべて 0 でない上三角行列は正則である

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p74 命題 2.4.9]

ブロック対角行列の正則性　次のようなブロック対角行列 M において、対角ブロック A, B が正則であれば、M も正則である

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \quad l \quad & \quad n-l \quad \end{array} \\ M = & \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right) \begin{array}{l} l \\ n-l \end{array} \end{array}$$

証明

A と B が正則であるから、逆行列 A^{-1} と B^{-1} が存在する

それらを用いて、次のような積を考える

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AA^{-1} & O \\ O & BB^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_l & O \\ O & E_{n-l} \end{pmatrix} \\ &= E_n \end{aligned}$$

この等式は、M の逆行列の存在を示している

$$M\begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = E_n$$

つまり、対角ブロックがそれぞれ正則であれば、それらの逆行列を並べることで全体の逆行列が構成できる

このようにして、M が正則であることがわかる ■

行基本変形と対角行列 正則行列 A に対して、行のスカラー倍以外の行基本変形を繰り返し行って対角行列にできる

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p75 命題 2.4.12]

Zebra Notes

Type	Number
todo	3