線形変換の全単射性

$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像 f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換と呼ぶのだった

ref: 行列と行列式の基礎 p70

一般の線形写像と対比して、線形変換の大きな特徴は次が成り立つことである

線形代数における鳩の巣原理 f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換とし、A を f の表現行列とするとき、次はすべて同値である

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は全単射
iv. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ において、表現行列を A とすると、

$$
\begin{aligned}
f \text{ が単射} &\iff \mathrm{rank}(A) = n \\
f \text{ が全射} &\iff \mathrm{rank}(A) = m
\end{aligned}
$$

であることを以前示した

線形変換は、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の $m = n$ の場合であるので、f が単射であることも、全射であることも、

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

という条件と同値になる

つまり、線形変換は単射かつ全射であり、これは全単射であることも意味する ■

単射と全射は、一般には一方から他方が導かれるわけではない 2 つの性質だが、$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像（線形変換）の場合は同値になる

先ほど示した定理は、いわば線形代数版「鳩の巣原理」である

> 有限集合 $X = \{1, 2, ..., n\}$ からそれ自身への写像 f に対して、単射と全射は同値である

この事実は鳩の巣原理と呼ばれる

鳩の巣原理は、歴史的には部屋割り論法とも呼ばれ、

> n 個のものを m 個の箱に入れるとき、$n > m$ であれば、少なくとも 1 個の箱には 1 個より多いものが中にある

ことを指す

ここで鳩の巣原理と呼んだのはこの命題そのものではないが、その変種と考えてよい