


直交基底

 直交系と直交基底 計量空間 V の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ がどの 2 つも互いに直交する、すなわち、


$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0 \quad (i \neq j)$$

が成り立つとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ を直交系という
直交系が V の基底であるとき、直交基底と呼ばれる

ref: 図で整理！例題で
納得！線形空間入門

p117~118

ref: 長岡亮介 線形代数
入門講義 p181~182

 直交系の線型独立性 計量空間の直交系 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ は
線型独立である

証明

係数 $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ を用いた線形関係式

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

を考える

このとき、 \mathbf{a}_j ($j = 1, 2, \dots, n$) との内積をとると、

$$(c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_n \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_j) = 0$$

内積の双線形性より、

$$c_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_j) + c_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_j) + \dots + c_n(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n c_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$$

ここで、 \mathbf{a}_i は直交系であることから、 $i \neq j$ の場合、

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$$

よって、 $i \neq j$ の項はすべて 0 になり、残るのは

$$c_j(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j) = 0$$


ここで、直交系の定義より、 $\mathbf{a}_j \neq \mathbf{0}$ なので、

$$(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j) \neq 0$$

よって、 $c_j = 0$ でなければならず、これは $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ が線型独立であることを意味する ■



直交基底を用いると、基底の線形結合が内積によって簡単に計算できる

 直交基底を用いたベクトルの表現 計量空間 V の直交基底 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ に対して、任意のベクトル $\mathbf{v} \in V$ は

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{a}_i)}{(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i)} \mathbf{a}_i$$

と表すことができる

証明

ベクトル \mathbf{v} が次のような線形結合

$$\mathbf{v} = c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n$$

で表されるとし、係数を求めることを目指す

このとき、 \mathbf{a}_j ($j = 1, 2, \dots, n$) との内積をとると、

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}, \mathbf{a}_j) &= (c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + c_n \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_j) \\&= c_1(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_j) + c_2(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_j) + \cdots + c_n(\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_j) \\&= \sum_{i=1}^n c_i(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j)\end{aligned}$$

となるが、 \mathbf{a}_i は直交系であるため、 $i \neq j$ のとき $(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$ である

よって、上の式において残るのは、 $i = j$ の項だけとなり、

$$(\mathbf{v}, \mathbf{a}_j) = c_j(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j)$$

ここで、直交系の定義より $\mathbf{a}_j \neq \mathbf{0}$ なので、 $(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j) \neq 0$ である
そこで、両辺を $(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j)$ で割ることができ、

$$c_j = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{a}_j)}{(\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_j)}$$

が得られる ■



正規直交基底

🎓 正規直交系と正規直交基底 計量空間 V の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ が直交系であり、さらに、どのベクトルもそのノルムが 1 に等しいとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ を **正規直交系** という

正規直交系が V の基底であるとき、**正規直交基底** と呼ばれる


ref: 図で整理！例題で
納得！線形空間入門

p117~119


ref: 長岡亮介 線形代数
入門講義 p181~182



正規直交基底どうしの内積は、**クロネッカーのデルタ**記号を用いて、簡潔に表現できる

 **クロネッカーのデルタ** 次のように定義される δ_{ij} を**クロネッカーのデルタ**という

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

 **正規直交基底同士の内積** 計量空間 V の正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ の内積に関して、次が成り立つ

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

 **証明**

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ の直交性より、 $i \neq j$ のときは、

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$$

また、 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ はすべてノルムが 1 であることから、 $i = j$ のときは、

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \|\mathbf{e}_i\|^2 = 1$$

この場合分けとそれぞれの結果は、クロネッカーのデルタ記号の定義と一致する ■



計量空間 V の正規直交基底を用いると、内積を標準内積のように計算できる

計量空間 V の正規直交基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ とし、任意のベクトル

$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ を

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \beta_n \mathbf{e}_n$$

とすると、 \mathbf{a} と \mathbf{b} の内積は、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{e}_j \right)$$

内積の双線形性より、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\alpha_i \mathbf{e}_i, \beta_j \mathbf{e}_j)$$

内積の共役線形性に注意して、スカラーを外に出すと、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$$

ここで、正規直交基底の内積はクロネッカーのデルタ記号を用いて表現できるので、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \delta_{ij}$$

この式は、 $i = j$ のときのみ項が残り、 $\delta_{ii} = 1$ をふまえると、

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}$$

となり、標準内積と一致する

このように、

正規直交基底を用いると、

V の内積が K^n の標準内積と同様に計算できる

ことがわかる