



連立一次方程式を解く

方程式を解くということは、次のような問題に答えることである

ref: 行列と行列式の基礎 p25

- A. 解は存在するか？
- B. 解が存在する場合、それはただ 1 つの解か？
- C. 解が複数存在する場合は、どれくらい多く存在するのか？
- D. 解全体の集合を以下にしてわかりやすく表示できるか？



拡大係数行列

A を m 行 n 列の行列、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ とし、線形方程式

ref: 行列と行列式の基礎 p31~32

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

を考える

これは、 n 個の文字に関する m 本の連立方程式である

\mathbf{x} は未知数 x_1, x_2, \dots, x_n を成分とするベクトルである

このとき、 A は方程式の**係数行列**と呼ばれる

A の右端に列ベクトル \mathbf{b} を追加して得られる m 行 $(n + 1)$ 列の行列

$$\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$$

を考えて、これを**拡大係数行列**という



斉次形

$\mathbf{b} = \mathbf{0}$ の場合、つまり

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

の形の線形連立方程式は**斉次形**であるという

斉次形の場合は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が明らかに解になっていて、これを**自明解**という
したがって、自明解以外に解が存在するかどうかが基本的な問題である



解の存在条件

まず、一般の \boldsymbol{b} の場合の解の存在（問題 A）について考える

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数
講義 p110~111

拡大係数行列 \tilde{A} は A の右端に 1 列追加して得られるので、掃き出しの過程を考えると、 $\text{rank}(\tilde{A})$ は $\text{rank}(A)$ と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかであることがわかる

また、方程式の拡大係数行列の行に関する基本変形は、元の連立方程式と同値な式への変形であるため、

基本変形によって得られる方程式の解は、元の方程式の解と同じ

となる

そこで、 $\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ の既約行階段形を $(P \mid \boldsymbol{q})$ とし、 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の代わりに

$$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$$

を解くことを考える

まず、

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ O \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$$

とおく

ここで、 P_1 は $r \times n$ 行列 ($r = \text{rank}(P)$) とし、 \boldsymbol{q}_1 は r 次元列ベクトル、 \boldsymbol{q}_2 は $m - r$ 次元列ベクトルとする

すると、 $P\mathbf{x} = \mathbf{q}$ は

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} P_1 \mathbf{x} \\ \mathbf{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{pmatrix}$$

と表せる

このとき、この方程式が解を持つには、 $\mathbf{q}_2 = \mathbf{o}$ でなければならない

たとえば、

$$\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

だとしたら、

$$\begin{pmatrix} P_1 \mathbf{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり、 $0 = -1$ という矛盾が生じる時点で、この方程式は不能になる

このような $\mathbf{q}_2 \neq \mathbf{o}$ の場合、拡大係数行列の階数は、係数行列の階数 $+1$ となっている

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(P | \mathbf{q}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

一方、 $\mathbf{q}_2 = \mathbf{o}$ であれば、方程式は

$$P_1 \mathbf{x} = \mathbf{q}_1$$

となる

ここで、 P_1 は $r = \text{rank}(P)$ 個の行をもち、行数と階数が一致している

ということは、すべての行に主成分が現れていることを意味する

主成分は最も左側にある 0 でない成分なので、係数拡大行列にするために
右に 1 列追加したとしても、主成分の数は増えることがない
すなわち、 $\mathbf{q}_2 = \mathbf{o}$ の場合は係数行列と拡大係数行列の階数が一致する




以上の考察から、連立方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ の解が存在する条件は、

係数行列と係数拡大行列の階数が等しい

ことだとわかる

そして、その階数 r は、係数行列の行数とも一致していたため、次の 2 つ
の定理が得られる

 解の存在条件 A を $m \times n$ 型行列、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ とする

$\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$ とおくと、

$$\text{rank}(\tilde{A}) = \text{rank}(A) \iff \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ に解が存在する}$$

 証明



[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p31 (定理 1.5.1)]

 解の存在条件の系 A を $m \times n$ 型行列とすると、

$$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ の解が存在する } \iff \text{rank}(A) = m$$

 証明



[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p32 (定理 1.5.2, 1.5.3)]


右端の列に主成分がない場合は、一般には無数個の解が存在する
解の集合が直線を成していたり、もっと高い次元の図形になっていることがある

解が 1 つに定まらない場合は、解の全体像を知ることが方程式を「解く」ことになる

一般解のパラメータ表示

係数行列 A の n 個の列が、 n 個の変数に対応していることを思い出そう

ref: 行列と行列式の基礎 p33~36

 主変数と自由変数 行列 A を行基本変形により行階段形にしたとき、主成分がある列に対応する変数を **主変数** と呼び、それ以外の変数を **自由変数** と呼ぶ

解が存在する場合には、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1 \boldsymbol{u}_1 + t_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r} \boldsymbol{u}_{n-r}$$

という形の一般解の表示（問題 D の答え）が得られる

ここで、 r は行列 A の階数である

自由変数、すなわちパラメータの個数を **解の自由度** と呼ぶ

$$\begin{aligned}\text{解の自由度} &= (\text{変数の個数}) - \text{rank}(A) \\ &= n - r\end{aligned}$$


これは、解全体の集合が何次元の空間なのかを表している（問題 C の答え）



解の一意性

ここまでの議論で、問題 B が解決している

ref: 行列と行列式の基礎 p37~38

 解の一意性 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解が存在するとき、

解が一意的である $\iff \text{rank}(A) = n$


ここで、 n は変数の個数である

 証明



[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p37 (定理 1.5.8)]

斉次形の場合の非自明解の存在問題も解決している

 斉次形の非自明解の存在条件 斉次形の方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ において、

自明解しか存在しない $\iff \text{rank}(A) = n$

ここで、 n は変数の個数である

 証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性は、それ以外の解がないということである ■



自由変数を $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}$ とするとき、一般解の表示

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + t_{n-r} \mathbf{u}_{n-r}$$

の j_k 番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる

このことから、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + t_{n-r} \mathbf{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の $n - r$ 個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる

この事実は、 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^m$ が線形独立であると表現される

.....

Zebra Notes

Type	Number
todo	3