部分空間の和

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p22～23
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p231～232
ref: テンソル代数と表現論 p6

線形部分空間の和は部分空間 U, W を体 K 上の V の部分空間とするとき、和空間

$$U + W := \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}$$

は V の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in U,\ \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in W$ とする
U と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in U, \quad \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \in W$$

一方、和空間の定義より、$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2$ はそれぞれ $U + W$ の元である
これらの元の和をとったときに、その和も $U + W$ に属していれば、和空間は和について閉じているといえる

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) \\ \in U + W$$

上式で、和空間は和について閉じていることが示された ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in U, \boldsymbol{b} \in W$ と $c \in K$ をとる

U と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$
\begin{aligned}
c\boldsymbol{a} &\in U \\
c\boldsymbol{b} &\in W
\end{aligned}
$$

一方、和空間の定義より、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は $U+W$ の元である

この元をスカラー倍したときに、そのスカラー倍も $U+W$ に属していれば、和空間はスカラー倍について閉じているといえる

$$
\begin{aligned}
c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b} \\
&\in U+W
\end{aligned}
$$

上式で、和空間はスカラー倍について閉じていることが示された ■

3 つ以上の部分空間の和も同様に考えて、一般に和空間は次のように定義される

和空間 線形空間 V と、その部分空間 $V_1, \ldots, V_k$ が与えられたときに、

$$
\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k \quad (\boldsymbol{v}_i \in V_i, i = 1, \ldots, k)
$$

と表されるベクトル $\boldsymbol{v}$ 全体がなす集合を $V_1, \ldots, V_k$ の和空間といい、

$$
\sum_{i=1}^{k} V_i
$$

と書く

和空間を張るベクトル

部分空間を生成するベクトルを用いて、部分空間の和を表せる

⚓ 部分空間の和と生成ベクトル　K^n の 2 つの部分空間 $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle$ と $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$ に対して、和空間 $U + W$ は

$$U + W = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

となる

証明

和空間 $U + W$ は

$$U + W = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w},\ \ \boldsymbol{u} \in U,\ \ \boldsymbol{w} \in W\}$$

と定義される

また、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ の張る部分空間は

$$H = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

である

これらが等しいことを示せばよい

$U + W \subseteq H$

任意の $\boldsymbol{x} \in U + W$ に対し、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$（$\boldsymbol{u} \in U$, $\boldsymbol{w} \in W$）と書ける

すなわち、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &= a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{u}_m \qquad && (a_i \in K) \\ \boldsymbol{w} &= b_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + b_k\boldsymbol{w}_k && (b_j \in K) \end{aligned}$$

よって、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j \in H$$

$H \subseteq U + W$

任意の $\boldsymbol{x} \in H$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j \boldsymbol{w}_j$$

と書ける

ここで

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{m} a_i \boldsymbol{u}_i \in U$$
$$\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{k} b_j \boldsymbol{w}_j \in W$$

とすれば、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in U + W$$

以上より、$U + W \subseteq H$ と $H \subseteq U + W$ が成り立つので、$U + W = H$ が示された ■

和空間の包含関係

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p233

和空間における部分空間の和集合の包含　和空間は、和集合を部分集合として包含する

すなわち、U, W を V の部分空間とするとき、

$$U + W \supset U \cup W$$

が成り立つ

証明

部分空間はいずれも零ベクトルを含むので、たとえば、$U = \{\mathbf{0}\}$ の場合、

$$U + W \supset W$$

同様に、

$$U + W \supset U$$

よって、$U + W$ は U または W を包含することがわかる

すなわち、

$$U + W \supset U \cup W$$

が成り立つ ■

和空間の最小包含性　U, W を V の部分空間とする

和空間 $U + W$ は、U と W を含む部分空間のうち、最小のものである

証明

V の任意の部分空間のうち、U と W の両方を包含するもの V' を考える

このとき、部分空間は和に閉じているため、V' は $U + W$ も包含する

$$V' \supset U + W$$

よって、V' の任意性から、$U + W$ は U と W を含む部分空間のうち、最小のものとなる ■

このように、和空間 $U + W$ は、U や W を部分空間として含むが、U や W より真に大きい（U, W を真部分集合として含む）とは限らない

別の角度からいうと、

$$V = W_1 + W_2$$

という関係があるだけで、「V が W_1 と W_2 の和に分解された」というのは適当ではない

和空間が持つこの欠陥を補うために、和空間の概念をより精密化したものが、次に述べる直和である