線形従属

ベクトルの組を考え、どれか 1 つのベクトルがほかのベクトルの線形結合で表せるとき、それらのベクトルの組は線形従属であるという。

線形従属　k 個のベクトル $\{\boldsymbol{a}_1, ..., \boldsymbol{a}_k\}$ が線形従属であるとは、少なくとも 1 つは 0 でない k 個の係数 $\{c_1, ..., c_k\}$ を用意すれば、それらを使った線形結合を零ベクトル $\boldsymbol{o}$ にできることをいう。

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$$

たとえば、c_1 が 0 でないとき、線形結合を零ベクトルにできるということは、次のような式変形ができることになる。

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{a}_2 - \frac{c_3}{c_1}\boldsymbol{a}_3 - \cdots - \frac{c_k}{c_1}\boldsymbol{a}_k$$

つまり、ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ をほかのベクトルの線形結合で表せている。

「従属」という言葉を味わう

自分自身をほかのベクトルを使って表現できるということは、ほかのベクトルに依存している（従っている）ということになる。

たとえば、$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せるベクトル $\boldsymbol{a}_3$ は、 この 2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に従っているといえる。

$$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$$

しかし、「$\boldsymbol{a}_3$ が $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ に従っている」という一方的な主従関係になっているわけではない。その逆もまた然りである。
なぜなら、次のような式変形もできるからだ。

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3 - 2\boldsymbol{a}_1$$

この式で見れば、今度は $\boldsymbol{a}_2$ が $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_3$ に従っていることになる。

このように、線形従属とは、「どちらがどちらに従う」という主従関係ではなく、ベクトルの組の中での相互の依存関係を表すものである。