

読書ノート：ろんりと集合

tomixy

2025 年 5 月 19 日

目次	集合の要素	8
記号化の効用	1 集合の表記法	8
命題論理の法則	2 集合の「等しい」	8
恒真命題と恒偽命題	3 有限集合と無限集合	8
矛盾法則と排中法則	4 空集合	8
ならば	4 部分集合	8
必要条件と十分条件	4 共通部分	9
三段論法	5 和集合	9
逆と対偶	5 集合と論理の間の対応関係	10
2 つの同値	5 記号化の効用	
命題関数	6 文を記号化することにより、文の長さや内容に煩わされることなく、文の構造を把握することが容易となり、「思考の節約」になる	
すべての～	6	
ある～	6	もともとの文は忘れて、記号で表された文の間の関係を調べる分野のことを記号論理学という
「すべての～」と「ある～」	7	
\forall と \exists を含んだ式の同値変形	7	記号論理学は、
\forall と \exists の否定	7	● 主張（命題）を扱う 命題論理学
集合	8	● 「すべての～」とか「ある～」とかを含む文を扱う 述語論理学

に分かれている

* * *

命題論理の法則

■結合法則

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

結合法則は、「どこから計算しても同じ」という性質を支えるもの

* * *

記号論理では、ある法則が成り立つとき、

その法則の \wedge を \vee に、そして、 \vee を \wedge に置き換えた法則が成り立つ

という原理があり、**双対性**と呼ばれている

双対性は、2つのことから・概念が、ちょうどお互いに鏡で写し合っているような対称性を持つ状況

双対性は数学のいろんな分野で登場する

* * *

■冪等法則

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

これらを繰り返して適用すると、

$$p \wedge \cdots \wedge p \equiv p$$

$$p \vee \cdots \vee p \equiv p$$

であることが容易にわかる

これは、AND（あるいは OR）を「何度繰り返しても同値」であることを示している

\wedge をかけ算（積）と見なすと、 $p \wedge \cdots \wedge$ は p の累乗である

昔は、累乗のことを「冪」と呼んだので、「冪等法則」の名称もここから来ている

* * *

■交換法則

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

p と q の順序が交換できることを示している

* * *

■分配法則

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

交換法則を考慮すると、分配法則は右から分配することもできる

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (q \vee r) \wedge p$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (q \wedge r) \vee p$$

* * *

■吸収法則

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

分配法則によく似ているが、分配する方と分配される方のどちらにも p が入っている

このような状況では q の影響がなくなって、命題が p と同値になるというのが**吸収法則**

* * *

■ド・モルガンの法則（命題論理）

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

ド・モルガンの法則は、AND および OR の否定がどうなるかを述べたもの

命題の否定を作るときにはなくてはならない重要な公式

* * *

これらの法則を前提にすると、真理表を使用せずに、**同値変形**という方法で、2つの命題が同値であることを確かめることができる

* * *

恒真命題と恒偽命題

同値変形をしていく場合に、真理値が一定な値をとる命題を考えると、便利であることがわかってくる

■定義（恒真命題） 真理値を1しかとらない命題を**恒真命題**と呼び、 I で表す

■定義（恒偽命題） 真理値を0しかとらない命題を**恒偽命題**と呼び、 O で表す

* * *

恒真命題と恒偽命題の定義から、明らかに次が成り立つ

■恒真命題と恒偽命題の関係

$$\neg I \equiv O$$

$$\neg O \equiv I$$

なぜなら、否定をとるとというのは、真理値について0を1にし、1を0にする操作だから

* * *

■恒真命題の性質

$$p \wedge I \equiv p$$

$$p \vee I \equiv I$$

■恒偽命題の性質

$$p \wedge O \equiv O$$

$$p \vee O \equiv p$$

これらの性質において、

- \wedge を \vee に

- \vee を \wedge に
- I を O に
- O を I に

置き換えると、

$$\begin{aligned} p \wedge I &\equiv p & \leftrightarrow & & p \vee O &\equiv p \\ p \vee I &\equiv I & \leftrightarrow & & p \wedge O &\equiv O \end{aligned}$$

という対応が得られ、恒真命題と恒偽命題が**双対**的であることがわかる

* * *

矛盾法則と排中法則

「命題とその否定命題は同時に成り立たない」というのが**矛盾法則**

■矛盾法則

$$p \wedge \neg p \equiv O$$

矛盾法則とは双対的に、**排中法則**は、「命題とその否定命題のどちらかは常に成り立つ」ということを表している

■排中法則

$$p \vee \neg p \equiv I$$

* * *

否定を含む論理式の同値変形において、矛盾法則、排中法則、恒真命題の性質、恒偽命題の性質を用いると、次のような2つのステップで、式をより単純な形にすることができる

1. 矛盾法則や排中法則により、命題とその否定命題のペアは、恒真命題 I や恒偽命題 O に置き換えることができる
2. 恒真命題の性質や恒偽命題の性質により、恒真命題 I と恒偽命題 O は、式をより簡単にする

* * *

ならば

■定義 命題 p, q に対して、 $\neg p \vee q$ という命題を $p \rightarrow q$ と書いて、「 p ならば q 」と読む

* * *

必要条件と十分条件

■定義（必要条件と十分条件） 命題 p, q に対して、命題 $p \rightarrow q$ が常に正しいとき、 $p \Rightarrow q$ と書き、

- p は q の**必要条件**である
- q は p の**十分条件**である

と呼ぶ

■定義（必要十分条件） $p \Rightarrow q$ であり、 $q \Rightarrow p$ であるとき、 $p \Leftrightarrow q$ と書き、

- p は q の**必要十分条件**である
- q は p の**必要十分条件**である

と呼ぶ

* * *

三段論法

「ならば」を用いた有名な議論の方法として、**仮言三段論法**がある

これは、「 A ならば B 」という主張と「 B ならば C 」という主張から、「 A ならば C 」という主張を導くことができるというもの

* * *

逆と対偶

対偶 $\neg q \rightarrow \neg p$ と、もとの命題 $p \rightarrow q$ は同値である

$$\begin{aligned} \neg q \rightarrow \neg p & \\ \equiv (\neg \neg q) \vee \neg p & \quad \left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{の定義} \\ \text{反射法則} \end{array} \right\} \\ \equiv q \vee \neg p & \quad \left. \begin{array}{l} \text{交換法則} \\ \rightarrow \text{の定義} \end{array} \right\} \\ \equiv \neg p \vee q & \\ \equiv p \rightarrow q & \end{aligned}$$

* * *

「晴れるならば、外出する」はまともな主張だが、その対偶「外出しないならば、晴れない」というのは、少し違和感を感じる

これは、「外出しない」という原因によって「晴れない」という結果が導かれるととらえてしまうから

あくまで、論理の「ならば」は、「外出しない」という事実があるときに、「晴れない」という事実があるという状態を表すもの

「～ならば～」というのは、

原因と結果という因果関係ではなく、2つの状態の間の事実関係である

とっておくとよい

* * *

$\neg p \rightarrow \neg q$ は、 $p \rightarrow q$ の**裏**と呼ばれることもある

- $(\neg p \rightarrow \neg q) \equiv (\neg \neg p) \vee \neg q \equiv p \vee \neg q$
- $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$

であるため、裏 $\neg p \rightarrow \neg q$ と元の命題 $p \rightarrow q$ は特に関係がない

* * *

2つの同値

■定義（同値） 2つの命題 p, q に対して、真理値がすべて等しい（真理表が一致する）ということを、 p と q は**同値**であると呼び、

$$p \equiv q$$

と表す

一方、同値にはもう1つの定義がある

■定義（同値） 命題 p と命題 q がお互いに必要十分条件であるとき、言いかえると、 $p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ であるとき、 p と q は**同値**であると呼び、

$$p \Leftrightarrow q$$

と表す

この2つの同値 \equiv と \Leftrightarrow は、実は同じ内容を表している

「 $p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ 」であるというのは、

命題 $p \rightarrow q$ および命題 $q \rightarrow p$ の真理値がすべて 1 である

ということだから、「 p と q の真理値が等しいこと」と「 $p \rightarrow q$ と $q \rightarrow p$ の真理値がどちらも 1 であること」は一致している

したがって、2 つの同値 \equiv と \Leftrightarrow は同じ内容を表していることがわかる

* * *

命題関数

これまで、たとえば「1234567891 は素数である」というような**命題**を扱ってきた

ここで、たとえば x が自然数全体を動くとき、「 x は素数である」という形の主張を**命題関数**と呼ぶ

命題は記号 p で表されたのに対し、命題関数は $p(x)$ と書く

命題関数 $p(x)$ は、 x の値に応じて主張が変わり、真理値が変化していく

命題関数 $p(x)$ の x は、**変数**と呼ばれる

命題関数 $p(x)$ の変数は、実数や自然数のような数以外に、直線とか地図のような数学的対象や一般的概念をとる

* * *

すべての～

命題関数 $p(x)$ に対して、「すべての x について $p(x)$ である」という命題を

$$\forall x p(x)$$

と表す

「すべての～について〇〇である」は、

- 「すべての～は〇〇である」
- 「任意の～について〇〇である」
- 「任意の～は〇〇である」

と表すこともある

\forall という記号は、「all (すべての～)」や「any (任意の～)」の頭文字の A を逆さにしたものに由来する

* * *

変数 x が $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「すべての x について $p(x)$ である」というのは、

$p(a_1)$ であり、かつ、 $p(a_2)$ であり、かつ、 \dots 、
かつ、 $p(a_n)$ である

ということに他ならない

言い換えると、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \dots \wedge p(a_n)$$

ということになる

* * *

ある～

命題関数 $p(x)$ に対して、「ある x について $p(x)$ である」という命題を

$$\exists x p(x)$$

と表す

「ある～について〇〇である」は、

- 「ある～は〇〇である」
- 「ある～が存在して〇〇である」
- 「〇〇であるような～が存在する」

と表すこともある

∃ という記号は、「exists（存在する）」の頭文字の E を逆さにしたもの由来する

* * *

変数 x が $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ という有限個の値をとるとき、「ある x について $p(x)$ である」というのは、

$p(a_1)$ であるか、あるいは、 $p(a_2)$ であるか、あるいは、 \dots 、あるいは、 $p(a_n)$ である

ということに他ならない
言い換えると、

$$\exists x p(x) = p(a_1) \vee p(a_2) \vee \dots \vee p(a_n)$$

ということになる

* * *

「すべての～」と「ある～」

「すべての～」と「ある～」の2つの概念の間には**双対性**がある

$$\begin{aligned}\forall x p(x) &= p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \dots \wedge p(a_n) \\ \exists x p(x) &= p(a_1) \vee p(a_2) \vee \dots \vee p(a_n)\end{aligned}$$

という式を比較してみると、「すべての～（ \forall ）」と「ある～（ \exists ）」は、AND（ \wedge ）と OR（ \vee ）の双対性を反映していることがわかる

* * *

\forall と \exists を含んだ式の同値変形

■ \forall と \exists の性質

$$\begin{aligned}\forall x (p(x) \wedge q(x)) &\equiv \forall x p(x) \wedge \forall x q(x) \\ \exists x (p(x) \vee q(x)) &\equiv \exists x p(x) \vee \exists x q(x)\end{aligned}$$

これらはそれぞれ、

- 「すべての～」（ $\forall x$ ）と AND（ \wedge ）
- 「ある～」（ $\exists x$ ）と OR（ \vee ）

が対応していると思って眺めるとよい

* * *

\forall と \exists の否定

「すべての～」（ \forall ）と「ある～」（ \exists ）を含む命題の否定は、次の**ド・モルガンの法則**で与えられる

■ ド・モルガンの法則（述語論理）

$$\begin{aligned}\neg \forall x p(x) &\equiv \exists x \neg p(x) \\ \neg \exists x p(x) &\equiv \forall x \neg p(x)\end{aligned}$$

$\neg \forall x p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$ より、

「すべての～について…である」の否定は、「ある～について…でない」

$\neg \exists x p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$ より、

「ある～について…である」の否定は、「すべての～について…でない」

要するに、否定をとると、「すべての～」は「ある～」になり、「ある～」は「すべての～」になる

* * *

述語論理のド・モルガンの法則は、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっている

x が $x = a_1, a_2, \dots, a_n$ というように、有限個の値

しかとらない場合、

$$\forall x p(x) = p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)$$

$$\exists x p(x) = p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)$$

であり、

$$\forall x \neg p(x) = \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(a_n)$$

$$\exists x \neg p(x) = \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \cdots \vee \neg p(a_n)$$

であるので、述語論理のド・モルガンの法則は、それぞれ次のように書き換えられる

$$\begin{aligned} \neg(p(a_1) \wedge p(a_2) \wedge \cdots \wedge p(a_n)) \\ \equiv \neg p(a_1) \vee \neg p(a_2) \vee \cdots \vee \neg p(a_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg(p(a_1) \vee p(a_2) \vee \cdots \vee p(a_n)) \\ \equiv \neg p(a_1) \wedge \neg p(a_2) \wedge \cdots \wedge \neg p(a_n) \end{aligned}$$

これらはそれぞれ、命題論理のド・モルガンの法則の一般化になっていることは一目瞭然

* * *

集合

集合とは「ものの集まり」のことであり、その「ものの集まり」に入っているか、あるいは、入っていないかが客観的に判断できるもの

* * *

集合の要素

集合を構成する個々の「もの」を、その集合の**要素**あるいは**元**と呼ぶ

x が集合 A の要素であるとき、 x は A に**含まれる**、あるいは**属する**と言い、記号では $x \in A$ と書く

* * *

集合の表記法

次のような 2 つの方法がある

- $\{x_1, x_2, \cdots\}$ （集合を書き並べる方法：**外延的記法**）
- $\{x \mid x \text{ は条件} \sim \text{を満たす}\}$ （要素になる条件を書く方法：**内包的記法**）

集合では、このように、要素を括弧 $\{\}$ で囲んで記述する

* * *

集合の「等しい」

集合 A と集合 B が**等しい**とは、

A の要素がすべて B の要素であり、かつ、 B の要素がすべて A の要素である

ことを言う

集合 A と集合 B が等しいとき、 $A = B$ と書く

* * *

有限集合と無限集合

集合に含まれる要素の個数が有限個のとき**有限集合**といい、無限個のとき**無限集合**と呼ぶ

* * *

空集合

「要素が1つもない集まり」も、1つの集合とみなして、**空集合**と呼び、記号 \emptyset で表す

* * *

部分集合

2 つの集合 A と B に対して、 A は B の**部分集合**である（ A は B に**含まれる**）とは、

A のすべての要素が B の要素になっている

ことを言い、記号では $A \subset B$ と書く

「 $A \subset B$ かつ $B \subset A$ である」ことは、 $A = B$ である
ことに他ならない

* * *

共通部分

いくつかの集合があったとき、それらの「共通の
部分」、すなわち、

それらの共通の要素を集めてできた集合

のことを **共通部分** という
共通部分には \cap という記号が用いられる

* * *

たとえば、2つの集合 A, B に対して、 A と B のど
ちらにも含まれている要素の全体からなる集合を
 A と B の **共通部分** と呼び、記号では $A \cap B$ と書く
すなわち、

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

* * *

有限個の集合でも同様に、集合 A_1, A_2, \dots, A_n に対
して、すべての A_i に含まれている要素の全体か
らなる集合を、集合 A_1, A_2, \dots, A_n の **共通部分** と呼
び、記号で

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \quad \text{あるいは} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i$$

と書く

すなわち、

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n &= \{x \mid \forall A_i, c \in A_i\} \\ &= \{x \mid x \in A_1 \wedge \dots \wedge x \in A_n\} \end{aligned}$$

* * *

いくつかの集合があつて、それらのどの2つも共
通部分をもたないとき、それらは **互いに素** である
という

* * *

和集合

いくつかの集合があつたとき、

それらの集合をすべて集めてできた集合

のことを **和集合** という
和集合には \cup という記号が用いられる

* * *

たとえば、2つの集合 A, B に対して、 A と B のど
ちらかに含まれている要素の全体からなる集合を
 A と B の **和集合** と呼び、記号では $A \cup B$ と書く
すなわち、

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

* * *

有限個の集合でも同様に、集合 A_1, A_2, \dots, A_n に対
して、ある A_i に含まれている要素の全体からなる
集合を、集合 A_1, A_2, \dots, A_n の **和集合** と呼び、記
号で

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \quad \text{あるいは} \quad \bigcup_{i=1}^n A_i$$

と書く

すなわち、

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n &= \{x \mid \exists A_i, c \in A_i\} \\ &= \{x \mid x \in A_1 \vee \dots \vee x \in A_n\} \end{aligned}$$

* * *

集合と論理の間の対応関係

「集合」と「論理」は対応しているため、論理で登場した法則は集合に対しても成り立つ

■冪等法則

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

■交換法則

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

■結合法則

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

■分配法則

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

■吸収法則

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

たとえば、交換法則の証明は次のようになる

$$\begin{aligned} & A \cap B \\ &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \\ &= \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} \\ &= B \cap A \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \cap \text{の定義} \\ \left. \right\} \text{論理の交換法則} \\ \left. \right\} \cap \text{の定義} \end{array}$$

この証明を見てみると、「集合の性質」と「論理の性質」が対応していることがわかる

* * *

「集合」というのは、内包的記法により

$$\text{集合} = \{x \mid x \text{ は } \sim \text{である}\}$$

という形で表現できるが、「 x は \sim である」というのは、「論理」の命題関数である

すなわち、命題関数 $p(x)$ を用いて、

$$\text{集合} = \{x \mid p(x)\}$$

と書ける

このとき、 \cap と \cup の定義から、

$$\{x \mid p(x)\} \cap \{x \mid q(x)\} = \{x \mid p(x) \wedge q(x)\}$$

$$\{x \mid p(x)\} \cup \{x \mid q(x)\} = \{x \mid p(x) \vee q(x)\}$$

となる

さらに、次の 2 つの主張は同値である

- $p(x) \equiv q(x)$
- $\{x \mid p(x)\} = \{x \mid q(x)\}$

もっと一般に、次の 2 つの主張が同値であることが確かめられる

- $p(x) \Rightarrow q(x)$
- $\{x \mid p(x)\} \subset \{x \mid q(x)\}$