線形写像とベクトルの線型独立性

ref: 行列と行列式の基礎 p65〜66

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p71〜73

線形写像と線形独立性 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の f による像

$$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$$

が線型独立であるとき、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ も線型独立である

証明

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

を考える

この両辺を f で写すと、f の線形性と零ベクトルの像 $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ を使って

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

仮定より $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は線型独立なので、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である

よって、

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_n$ は 0 しかないので、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は線型独立である ■

次の定理は、平行なベクトルを線型写像で写した結果、平行でなくなったりはしないということを述べている

線形写像と線形従属性 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線形従属ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ は線形従属である

証明

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線形従属であるとは、少なくとも 1 つは 0 でないある定数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ が存在して

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

が成り立つことを意味する

この両辺を f で写すと、線形性より

$$k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ

よって、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線形従属である ■

線型写像とベクトルの線型独立性 線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ に対して、次の 2 つは同値になる

i. $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ならば、$f(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{0}$
ii. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線型独立ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線型独立

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p66 命題 2.3.2]

i は、零写像と射影を除けば、f によってベクトルが「つぶれない」という性質を表している

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

ii は、たとえば平行四辺形の像が線分や 1 点になったりしないことなどを意味している

線形写像の単射性　線形写像 f が単射であることと次は同値である

$$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p66 命題 2.3.3]

線形写像の単射性と全射性

線形写像 f の単射性を表現行列 A の言葉で述べる

ref: 行列と行列式の基礎 p67〜68

線形写像の単射性と表現行列　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値

i. f は単射

ii. $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明な解しか持たない

iii. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

[Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p67 命題 2.3.4]

i は抽象的な概念、ii は方程式論的な言葉、iii は数値的な条件であり、これらは言い換えただけで同値であると述べている。

単射性と対比して、全射性の理解も表現行列の言葉で整理する

線形写像の全射性と表現行列　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値

i. f は全射

ii. 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解が存在する

iii. $\mathrm{rank}(A) = m$

証明

[Todo 5: ref: 行列と行列式の基礎 p68 命題 2.3.6]

像空間と核空間

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の全射性は、$\mathbb{R}^m$ の部分集合である像空間 $\mathrm{Im}(f)$ と関係している

ref: 行列と行列式の基礎 p68〜69

f が全射であることは、$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ と同値である

一方、f の単射性と関連して、$\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$$

を考え、これを f の核空間あるいはカーネルと呼ぶ

線形写像の単射性は、次のようにも言い換えられる

線形写像の単射性　線形写像 f が単射であることと次は同値である

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$$

核空間 $\mathrm{Ker}(f)$ は、実はすでに馴染みのある概念である

核空間と表現行列　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\}$$

と定めると、

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(A)$$

これは、斉次形の連立線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間そのものである

$\mathrm{Ker}(A)$ の元は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解を使ってパラメータ表示できる

Zebra Notes

Type	Number
todo	5