行列式の特徴づけ

n 個の与えられた n 次実ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ に対して、ある実数が定まるとき、これを $F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ と表すことにする

ref: 行列と行列式の基礎 p162〜163

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p123〜

> ⚓ **多重線形性と交代性による行列式の特徴づけ**　写像 $F: \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が多重線形性と交代性を満たすならば、
>
> $$F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) = F(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n) \det(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$

証明

多重線形性により、

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) &= F\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i_1 1}\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \sum_{i=1}^{n} a_{i_n n}\boldsymbol{e}_{i_n}\right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} F(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_n}) \end{aligned}$$

和において、各 $i_k\ (1 \leq k \leq n)$ は行番号なのでそれぞれ 1 から n まで動く

ここで、交代性から導かれる定理より、$(i_1, \dots, i_n)$ に同じ添字が 2 つ以上ある場合には $F(\boldsymbol{e}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = 0$ である

したがって、この和は $(i_1, \dots, i_n)$ がすべて異なる場合、すなわち $(i_1, \dots, i_n)$ が $(1, \dots, n)$ の置換である場合にのみ寄与する

よって、$(i_1, \dots, i_n)$ にわたる和は、実際には n 次の置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

にわたる和であるとみなせる

この対応により、$(i_1, \ldots, i_n)$ と $\sigma \in S_n$ を同一視すると、

$$F(\boldsymbol{e}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{i_n}) = F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$$

さらに、$(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)})$ を $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ に並び替えることを考える

すなわち、σ の逆置換 σ^{-1} を考えることになる

交代性によって、1 回の互換につき (-1) 倍されるが、全体の符号は互換の回数によって定まるので、$\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ となる

$$F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

以上より、

$$\begin{aligned}
& F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} F(\boldsymbol{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}_{\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \,\mathrm{sgn}(\sigma) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \right) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) \\
&= \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)
\end{aligned}$$

となり、目的の等式が示された ■

ここで、$F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ であれば、

$$F(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

と表せることになる

この $F(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$ を正規化の条件といい、行列式は

i. 双線形性
ii. 交代性
iii. 正規化の条件

によって特徴づけられる

すなわち、行列式は、この 3 つの条件を満たすような

> n 個の列ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ で定まる関数

として定義することもできる