Chapter 1

実数の連続性

$\varepsilon-\delta$ 論法によって微分積分の理論を再定義しても、その議論は実数の連続性に依存している。
この章では、「実数は連続である」、平たく言えば「数直線には穴がない」という表現を観察する。

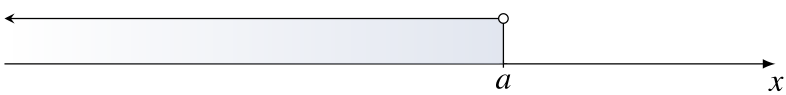
1.1　区間の限界を表す

区間の最大値や最小値は、その区間の中で最大もしくは最小となる数を指す。
閉区間の場合は、区間の端点が最大値・最小値となるが、開区間では端点を含まないため、「区間の中で」最大（もしくは最小）といえる数は存在しないことになる。

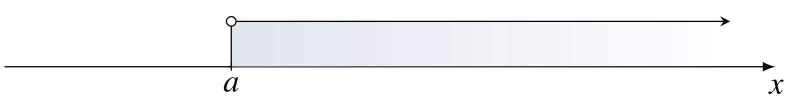
しかし、「最大値（最小値）がない＝区間は限りなく続く」というわけではない。
もしそうだとしたら、次の 3 つの開区間が区別できないことになる。

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\}$$



そこで、最大値・最小値とは別に、区間に限界があることを表す概念を導入する。

1.1.1 上界と下界

区間内の数がとりうる値に「限界が有る」ことを、有界という概念で表す。

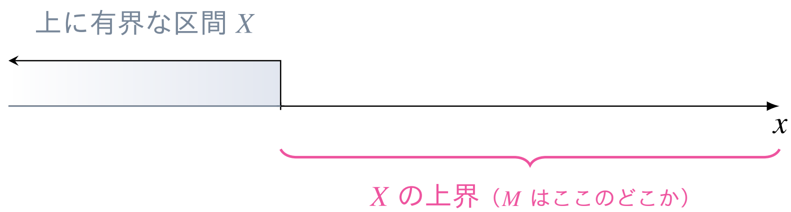
上界、上に有界

ある区間に属するどの数も、ある数 M 以下であるとき、この区間は上に有界であるといい、この M を上界という。

上界 M が区間 X の 上界 であるとは、

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対して } x \leq M \text{ が成り立つ}$$

ことをいう。このような上界 M が存在するとき、X は 上に有界 であるという。



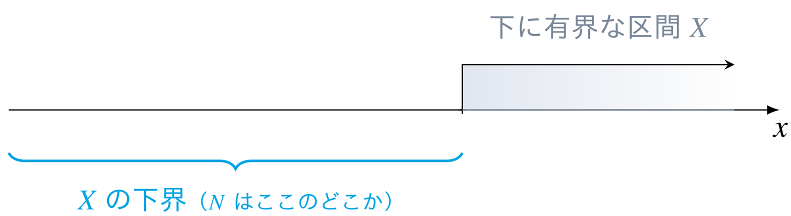
下界、下に有界

ある区間に属するどの数も、ある数 N 以上であるとき、この区間は下に有界であるといい、この N を下界という。

下界 N が区間 X の 下界 であるとは、

$$\text{任意の } x \in X \text{ に対して } x \geq N \text{ が成り立つ}$$

ことをいう。このような下界 N が存在するとき、X は 下に有界 であるという。



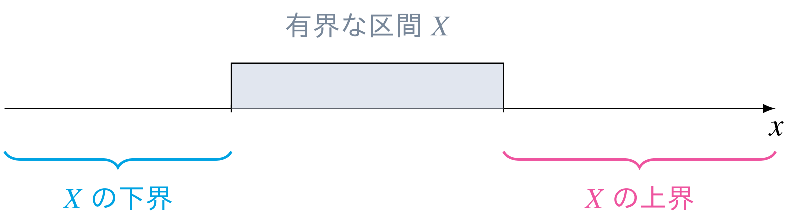
有界

ある区間が上にも下にも有界であるとき、この区間は有界であるという。

有界 区間 X が 有界 であるとは、

X が上に有界かつ下に有界である

ことをいう。



1.1.2 上限と下限

1.1.3 上限定理

[Todo 1: 公理 3.1]

1.2 数列の極限再訪

1.2.1 アルキメデスの公理

[Todo 2: 命題 3.2]

1.2.2 収束列の有界性

[Todo 3: 定理 2.11]

1.2.3 単調数列

[Todo 4: 定義 5.1]

1.2.4 有界な単調数列の収束性

[Todo 5: 定理 5.4]

1.3 区間縮小法

[Todo 6: 定理 5.11]

1.4 収束する部分列

1.4.1 部分列

[Todo 7: 定義 6.5]

1.4.2 収束する数列の部分列の極限

[Todo 8: 定理 6.7]

1.4.3 ボルツァーノ・ワイエルシュトラスの定理

[Todo 9: 定理 6.8]

1.5 コーシー列と実数の完備性

1.5.1 コーシー列

[Todo 10: 定義 6.9]

1.5.2 実数の完備性

[Todo 11: 定理 6.11]

1.6 上限定理再訪

[Todo 12: 定理 6.12]

Zebra Notes

Type	Number
todo	12