

# 第 1 章

## 双線形形式



### 内積と双線形形式

$\mathbb{R}^n$  上の内積は、2 つのベクトル  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  のペア（直積）から、スカラー値  $\mathbb{R}$  を返す関数として捉えることができる。

このように内積を写像に見立てて、この写像を  $b$  とおくと、

$$b: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$


と表すことができる。

さらに、 $\mathbb{R}^n$  上の内積は次のような**双線形性**を満たすものだった。

- i.  $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$
- ii.  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)$
- iii.  $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$


双線形性とは、2 つの引数それぞれに対して線形性があるという性質である。

線形性をもつ写像を線形写像として特別視したように、双線形性をもつ写像について考えてみよう。

 **双線形形式**  $U, V$  を線型空間とする。直積集合  $U \times V$  から  $\mathbb{R}$  への写像  $b$  が次の条件を満たすとき、 $b$  は  $U \times V$  上の**双線形形式** (**bilinear form**) であるという。

- i.  $b(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$
- ii.  $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2)$
- iii.  $b(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = cb(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

例：行列による双線形形式

 **行列による双線形形式の構成**  $A$  を  $m \times n$  型行列とすると、 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$$

により  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  上の双線形形式が得られる。

## 証明

### 和に対する双線形性 (i)

行列の和に対して転置を分配できることを用いて、

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)^T A \mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}_1^T A \mathbf{v} + \mathbf{u}_2^T A \mathbf{v} \\ &= b(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + b(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

### 和に対する双線形性 (ii)

(i) と同様に、

$$\begin{aligned} b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= \mathbf{u}^T A (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{u}^T A \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}^T A \mathbf{v}_2 \\ &= b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + b(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

### スカラー倍に対する双線形性 (iii)

行列の積に対する転置の性質と、スカラー ( $1 \times 1$  型行列) を転置しても変わらないことを用いて、

$$\begin{aligned} b(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) &= (c\boldsymbol{u})^T A \boldsymbol{v} \\ &= c(\boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{v}) \\ &= cb(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

以上より、 $b$  は  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  上の双線形形式である。 ■

特に、 $m = n$  で  $A = E$  の場合、

$$b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}$$

となり、 $\mathbb{R}^n$  上の内積と一致する。