# 転置行列と随伴行列

複素正方行列 $A$ の転置行列において、各成分をその共役複素数に置き換えた行列を随伴行列という

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p275

**随伴行列** 複素正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し、$\overline{a_{ji}}$ を $(i,j)$ 成分にもつ行列 ${}^t\overline{A}$ を $A$ の随伴行列といい、$A^*$ と表す

実数 $x$ の複素共役は $\overline{x}=x$ であるので、$A$ が実行列のときは、

$$A^* = {}^tA$$

すなわち、

> 実行列の世界では、随伴行列は転置行列

にすぎない

## 転置と似た性質

転置を二回行うと元に戻ることと同様に、次が成り立つ

**随伴行列の自己反転性** 複素正方行列 $A$ に対し、随伴行列を二回とると元に戻る

$$(A^*)^* = A$$

証明

随伴行列の定義より、

$$(A^*)^* = {}^t\overline{A^*} = {}^t\overline{{}^t\overline{A}}$$

$A=(a_{ij})$ とすると、$A$ の各成分を共役複素数にした行列は、

$$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$$

これを転置すると、

$${}^t\overline{A}=(\overline{a_{ji}})$$

さらに、もう一度各成分の複素共役をとると、

$$\overline{{}^t\overline{{}^tA}}=(\overline{\overline{a_{ji}}})=(a_{ji})$$

したがって、

$$(A^*)^*=\overline{{}^t\overline{{}^tA}}=(a_{ij})=A$$

が成り立つ ■

⚓ **積に対するエルミート共役の順序反転性** 複素行列 $A$ $B$ の積 $AB$ が定義できるとき、

$$(AB)^*=B^*A^*$$

証明

[ Todo 1: ]

## 随伴による内積の表現

標準内積は、随伴を用いて表現することもできる

⚓ **随伴による標準内積の表現**

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{b}^*\cdot\boldsymbol{a}$$

証明

標準内積の対称性より、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})}$$

ここで、右辺の内積を転置を用いて表すと、

$$\overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} = \overline{\boldsymbol{b}^\top \cdot \overline{\boldsymbol{a}}} = \overline{\boldsymbol{b}^\top} \cdot \overline{\overline{\boldsymbol{a}}} = \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}$$

よって、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})} = \boldsymbol{b}^* \cdot \boldsymbol{a}$$

が成り立つ ■

## 随伴公式

随伴行列と標準内積は、次のような関係で結ばれる

**随伴公式** 複素行列 $A$ と計量空間上のベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対し、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

証明

転置を用いて内積を表すと、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t(A\boldsymbol{u})\overline{\boldsymbol{v}}$$

転置と行列積の順序反転性より、${}^t(A\boldsymbol{u}) = {}^t\boldsymbol{u}{}^tA$ なので、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = ({}^t\boldsymbol{u}{}^tA)\overline{\boldsymbol{v}}$$

行列の積の結合法則を用いて、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}({}^tA\overline{\boldsymbol{v}})$$

ここで、$\overline{{}^tA}$ は、$A = (a_{ij})$ とすると、

1. $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$
2. ${}^t\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$
3. $\overline{{}^t\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji}) = {}^tA$

となり、${}^tA$ と一致する

これを用いて書き換えると、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}(\overline{{}^t\overline{A}\boldsymbol{v}})$$

複素共役の積の性質 $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ を用いて、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = {}^t\boldsymbol{u}\overline{{}^t\overline{A}\boldsymbol{v}}$$

この時点で、右辺を内積として書き直すと、$A\boldsymbol{v}$ の複素共役がなくなることに注意して、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, {}^t\overline{A}\boldsymbol{v})$$

随伴行列の定義 $A^* = {}^t\overline{A}$ より、

$$(A\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, A^*\boldsymbol{v})$$

となり、目的の等式が得られた ■

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# Zebra Notes

| Type | Number |
|---|---|
| todo | 1 |