




線形部分空間の定義

\mathbb{R}^n の部分集合であって、ベクトル演算で閉じた集合について考える
原点を含み直線や平面などを一般化した概念である

ref: 行列と行列式の基礎 p93~94、p99

 **線形部分空間** \mathbb{R}^n のベクトルからなる空集合でない集合 V は、次が成り立つとき**線形部分空間**あるいは簡単に**部分空間**であるという

- i. すべての $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ が成り立つ
- ii. すべての $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in V$ に対して $c\mathbf{u} \in V$ が成り立つ

ある \mathbb{R}^n の線形部分空間のことを単に**線形空間**と呼ぶこともある


入れものの空間 \mathbb{R}^n のことはあまり意識せずに、集合 V とそのベクトル演算に着目する考え方である

線形部分空間の例： \mathbb{R}^n 自身

たとえば、 \mathbb{R}^n 自身は明らかに \mathbb{R}^n の部分空間である

線形部分空間の例：零ベクトルだけからなる部分集合

零ベクトル $\mathbf{0}$ だけからなる部分集合 $\{\mathbf{0}\}$ も部分空間である

 **部分空間における零ベクトルの包含** 部分空間は必ず零ベクトル $\mathbf{0}$ を含む


証明

V は空集合でないので、ある $\boldsymbol{v} \in V$ をとるとき、線形部分空間の定義 ii より

$$0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \in V$$

よって部分空間は必ず $\mathbf{0}$ を含む ■

線形部分空間の例：ベクトルが張る空間


 ベクトルが張る空間は線形部分空間 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は部分空間である

証明



[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.2]


たとえば \mathbb{R}^3 において座標を (x, y, z) とするとき、 xy 平面は \mathbb{R}^3 の部分空間である

 座標部分空間 $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合 I に対して、 $x_i (i \in I)$ 以外の座標がすべて 0 である部分集合は \mathbb{R}^n の部分集合である

このようなものを座標部分空間といい、 \mathbb{R}^I と書く

$$\mathbb{R}^I = \langle \boldsymbol{e}_i \mid i \in I \rangle$$

と表すこともできる

 部分空間の張る空間は部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ とすると、

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle \subset V$$


 証明



[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.4]

線形部分空間の例：線形写像の像

ref: 図で整理！例題で
納得！線形空間入門 p82

 線形写像の像は部分空間 線形写像 $f: V \rightarrow W$ の像 $\text{Im}(f)$ は W の部分空間である

 証明

和について

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Im}(f)$ とすると、 $\mathbf{u} = f(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{v} = f(\mathbf{v}_2)$ とおける
よって、 f の線形性より

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_2) \\ &= f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\end{aligned}$$

となり、 $\text{Im}(f)$ は和について閉じている ■

スカラー倍について

$\mathbf{u} \in \text{Im}(f)$ と $c \in \mathbb{R}$ をとると、 $\mathbf{u} = f(\mathbf{v})$ とおける

よって、 f の線形性より

$$\begin{aligned}c\boldsymbol{u} &= cf(\boldsymbol{v}) \\ &= f(c\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

となり、 $\text{Im}(f)$ はスカラー倍について閉じている ■

線形部分空間の例：線形写像の核

ref: 図で整理！例題で
納得！線形空間入門 p71
~72

🚢 部分空間の零ベクトルと線形写像 部分空間 V, W の間の線形写像 $f: V \rightarrow W$ に対して、 V の零ベクトルを $\mathbf{0}_V$ 、 W の零ベクトルを $\mathbf{0}_W$ とすると、

$$f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$$

🔪 証明

任意の $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W$ に対して、

$$0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$$

$$0 \cdot \boldsymbol{w} = \mathbf{0}_W$$

が成り立つ


$f(\mathbf{0}_V)$ は、 f の線形性により、次のように変形できる

$$f(\mathbf{0}_V) = f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

ここで、 $f(\boldsymbol{v})$ は、 f による $\boldsymbol{v} \in V$ の像であるので、 W に属する
そこで、 $\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ とおくと、

$$\begin{aligned}f(\mathbf{0}_V) &= 0 \cdot f(\boldsymbol{v}) \\ &= 0 \cdot \boldsymbol{w} \\ &= \mathbf{0}_W\end{aligned}$$

となり、目標としていた式が示された ■

 線形写像の核は部分空間 線形写像 $f: V \rightarrow W$ の核 $\text{Ker}(f)$ は V の部分空間である

証明

前述の定理の主張 $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ より、零ベクトルは核空間に属する

$$\mathbf{0} \in \text{Ker}(f)$$

和について

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Ker}(f)$ とすると、 $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ かつ $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ である

よって、 f の線形性より

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

したがって、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Ker}(f)$ である ■

スカラー倍について

$\mathbf{u} \in \text{Ker}(f)$ と $c \in \mathbb{R}$ をとると、 $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ である

よって、 f の線形性より

$$\begin{aligned} f(c\mathbf{u}) &= cf(\mathbf{u}) \\ &= c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

したがって、 $c\mathbf{u} \in \text{Ker}(f)$ である ■

.....

Zebra Notes

Type	Number
todo	2