

# 線形代数の整理帳

tomixy

2025 年 5 月 28 日

## 目次

第 1 章	ベクトル	3
	ベクトルと次元	3
	$n$ 次の実ベクトル空間	3
第 2 章	線形写像と行列の演算	4
	行列の導入	4
	線形写像の定義	6
	線形写像の表現行列	8
	$\mathbb{R}^2$ の線形変換の例	10
	行列の積	11
	行列の和とスカラー倍	13
	行列の積の結合法則	14
	行列の区分け	16
	行列と複素数	17
	対角行列	18

トレース . . . . .	19
<b>第 3 章 連立一次方程式と階数</b>	<b>20</b>
掃き出し法 . . . . .	20
連立一次方程式の行列表記 . . . . .	20
行基本変形 . . . . .	22
行階段行列 . . . . .	22
行列の階数 . . . . .	23
簡約化された行階段行列 . . . . .	24
連立一次方程式を解く . . . . .	25
拡大係数行列と解の存在条件 . . . . .	25
一般解のパラメータ表示 . . . . .	27
解の一意性 . . . . .	28
線型独立性 . . . . .	29
非自明解の存在と有限従属性定理 . . . . .	30
行列の階数と線型独立性 . . . . .	32
<b>第 4 章 線形写像の単射性と全射性</b>	<b>36</b>
線形写像とベクトルの線型独立性 . . . . .	36
線形写像の単射性と全射性 . . . . .	38
像空間と核空間 . . . . .	39
<b>第 5 章 正則な線形変換と逆行列</b>	<b>41</b>
<b>第 6 章 内積と直交変換</b>	<b>42</b>

# 第 1 章

## ベクトル



### ベクトルと次元

いくつかの情報の組を並べて書いたものをベクトルという

また、ベクトルに並んだ情報の個数を次元という

ref: 図解でわかる線型  
代数 p16~19



### $n$ 次の数ベクトル空間

ref: 行列と行列式の基  
礎 p6~8



ベクトルの集合が張る空間  $k$  個のベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$  を与えたとき、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  の線形結合全体の集合を

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k \rangle$$

によって表し、これを  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  が張る空間という

## 第 2 章

# 線形写像と行列の演算



### 行列の導入

長方形に並んだ数の集まりを

ref: 行列と行列式の基礎 1.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

などと書き、**行列**と呼ぶ

横の数字の並びを**行**、縦の数字の並びを**列**と呼ぶ

$A$  は  $m$  個の行と  $n$  個の列をもつ行列である

第  $i$  行、第  $j$  列にある数字を  $a_{ij}$  と表し、これを  $(i, j)$  **成分**と呼ぶ

行が  $m$  個、列が  $n$  個の行列は、 **$m$  行  $n$  列の行列**、あるいは  **$m \times n$  型の行列**であるという

$n \times n$  型の場合、行列は正方形なので  $n$  次**正方行列**と呼ぶ



$A$  の成分から第  $j$  列だけを取り出して  $\mathbb{R}^m$  のベクトルとしたものが

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$


であり、これを  $A$  の  $j$  番目の列ベクトルという

$A$  は、これらを横に並べたものという意味で

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

と書くことができる



 行列とベクトルの積  $m \times n$  型の行列  $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  と  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  との積を

$$A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n$$

により定める

ここで、 $v_i$  は  $\mathbf{v}$  の第  $i$  成分である

$A\mathbf{v}$  を考えるとき、ほとんどの場合は、 $A$  が 1 つ与えられていて  $\mathbf{v}$  がいろいろ動くという意識が強い

それは、行列  $A$  のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る

$$\text{入力ベクトル } \mathbf{v} \rightarrow \text{出力ベクトル } A\mathbf{v}$$

という装置、すなわち写像だとみなすことである



 行列のスカラー倍  $A$  を行列、 $c$  をスカラーとすると、 $A$  のすべての成分を  $c$  倍して得られる行列を  $cA$  とする

 行列とベクトルの積の性質  $A, B$  を  $m \times n$  型行列、 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 、 $c \in \mathbb{R}$  とするとき、次が成り立つ

i.  $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

ii.  $A(c\mathbf{v}) = cA\mathbf{v}$

 証明



[ Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p24 (命題 1.4.3) ]



## 線形写像の定義

ref: 行列と行列式の  
基礎 2

 線形写像と線形性 写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  が線形写像であるとは、次の 2 つの条件が成立することである

i.  $f(c\mathbf{v}) = cf(\mathbf{v})$  がすべての  $c \in \mathbb{R}$ 、 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して成り立つ

ii.  $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$  がすべての  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して成り立つ

これらの性質を写像  $f$  の線形性という

また、 $m = n$  のとき、線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を  $\mathbb{R}^n$  の線形変換と呼ぶ

線形変換は空間  $\mathbb{R}^n$  からそれ自身への写像なので、 $\mathbb{R}^n$  において「ベクトルが変化している」(あるいは  $f$  が空間  $\mathbb{R}^n$  に作用している) ニュアンスと

みることができる



$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を線形写像とすると、 $i$  より、

$$f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

なので、

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

 **零ベクトルの像** 零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される



$m = n = 1$  のときは、線形写像  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  は、通常の意味の関数である


このとき、 $i$  の性質から、

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1)$$

が成り立つので、 $a = f(1) \in \mathbb{R}$  とおくと、

$$f(x) = ax$$

と書ける

 **比例関数** 線形写像  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  は、 $a$  を**比例定数**とする**比例関数**である



## 線形写像の表現行列

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を線形写像とすると、各基本ベクトル  $\mathbf{e}_j$  の  $f$  による像を

$$f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

と書くとする

これらを横に並べることによって、 $m$  行  $n$  列の行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$$

この行列  $A$  を  $f$  の表現行列という

特に、 $\mathbb{R}^n$  の線形変換の表現行列は  $n$  次正方行列である



$\mathbb{R}^n$  の一般のベクトル  $\mathbf{v}$  を、基本ベクトルの線型結合として

$$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{e}_j$$

と書く

このとき、 $f$  の線形性より、

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^n v_j f(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{a}_j$$

となる

このベクトルの第  $i$  成分は

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n$$

と書ける

これは  $A\mathbf{v}$  の第  $i$  成分である



したがって、この記法を踏まえて、次のような表記ができる

### 線形写像とその表現行列の関係

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

比例関数が比例定数  $a$  だけで決まるのと同じように、線形写像は表現行列  $A$  が与えられれば決まる



 零写像と零行列  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を、すべての  $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して  $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$  と定めたものは明らかに線形写像であり、これを **零写像** と呼ぶ

その表現行列はすべての成分が  $0$  である行列である

この行列を **零行列** と呼び、 $O$  で表す

$m \times n$  型であることを明示するために  $O_{m,n}$  と書くこともある

また、 $n$  次正方行列の場合は、 $O_n$  と書く



 恒等写像と単位行列  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を、すべての  $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$  に対して  $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$  と定めたものは明らかに線形写像である  
これを **恒等写像** と呼び、 $f = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  と書く

恒等写像の表現行列は、 $f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) より

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを **単位行列** と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、 $n$  次であることを明示したいときは  $E_n$  と書く



線形写像  $f$  から行列  $A$  を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることができる

 行列から線形写像を作る  $m \times n$  型行列  $A$  に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

によって写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を定めれば、 $f$  は線形写像である

 証明

行列とベクトルの積の性質より、 $f$  は線形写像である

また、 $f$  の定義から明らかに  $A$  は  $f$  の表現行列である 



## $\mathbb{R}^2$ の線形変換の例



[ Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p51 - p56]



## 行列の積

 線形写像の合成  $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^m$  への線形写像  $g$  と、 $\mathbb{R}^m$  から  $\mathbb{R}^l$  への線形写像  $f$  が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g: \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、 $\mathbb{R}^n$  から  $\mathbb{R}^l$  への線形写像である

 証明



[ Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p56 (問 2.2) ]

$f$  と  $g$  の表現行列をそれぞれ  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  とする

$A$  は  $l \times m$  型、 $B$  は  $m \times n$  型の行列である

このとき、 $f \circ g$  は  $l \times n$  型行列で表現される

それを  $C$  と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

$B$  を列ベクトルに分解して  $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  と書くとき、

$$(f \circ g)(\mathbf{e}_j) = f(g(\mathbf{e}_j)) = f(\mathbf{b}_j) = A\mathbf{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \dots, A\mathbf{b}_n)$$

となる

$C$  の  $(i, j)$  成分は  $A\mathbf{b}_j$  の第  $i$  成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、 $C$  の  $(i, j)$  成分を計算するときは、 $A$  の第  $i$  行、 $B$  の第  $j$  列だけを見ればよい

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \dots \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} \dots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

このようにして得られた  $l \times n$  型行列  $C$  を  $AB$  と書き、 $A$  と  $B$  の積と呼ぶ

 単位行列との積  $A$  を  $m \times n$  型とすると、次が成り立つ

$$E_m A = A$$

$$A E_n = A$$

 零行列との積  $A$  を  $m \times n$  型とすると、次が成り立つ

$$O_m A = A O_n = O_{m,n}$$

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は可換であるという

一般には、2 つの行列は可換であるとは限らない

つまり、 $AB$  と  $BA$  は一般には異なる

[ Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p58 (例 2.2.3, 2.2.4) ]




## 行列の和とスカラー倍

$A, B$  がともに  $m \times n$  型行列であるとき、それぞれの  $(i, j)$  成分を足すことで行列の和  $A + B$  を定める

 分配法則 積が定義できるとき、

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

 行列の積とスカラー倍の性質 行列  $A, B$  の積  $AB$  が定義できるとき、つまり  $A$  の列の個数と  $B$  の行の個数が同じであるとき、 $c \in \mathbb{R}$  に対して

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

が成り立つ



 線形写像の和  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を線形写像とし、

$$h(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$


により写像  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を定めるとき、 $h$  も線形写像である

また、 $f, g$  の表現行列を  $A, B$  とするとき、 $h$  の表現行列は  $A + B$  である

なお、 $h = f + g$  と書き、 $f, g$  の和と呼ぶ



[ Todo 5: ref: 行列と行列式の基礎 p59 (問 2.5) ]

 スカラー行列  $c$  をスカラーとすると、 $cE$  の形の行列を **スカラー行列** という

$$cE = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

行列  $A$  にスカラー行列をかけることは、

$$(cE)A = A(cE) = cA$$

のように、スカラー  $c$  をかけるのと同じである

## 行列の積の結合法則

 積の結合法則 積  $AB, BC$  がともに定義できるとき、

$$(AB)C = A(BC)$$

$A, B, C$  がそれぞれ  $q \times m, m \times n, n \times p$  型行列だとする  
線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、 $f, g, h$  の表現行列をそれぞれ  $A, B, C$  とする  
一般的な写像の合成の性質として、

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

が成り立つから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう ■

### 積の計算規則による証明

$AB$  の  $(i, l)$  成分は、

$$(AB)_{il} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^n (AB)_{il} c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} \end{aligned}$$

$i, j$  はいま固定されているので、和には関係がない  
動いているのは  $k, l$  だけ

ここで、次の書き換えができる

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} &= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} \end{aligned}$$

$\sum_{l=1}^n$  の右にある式は  $l$  に関する和をとる前のものなので、 $l$  は止まっ  
ていると考えてよく、単純な分配法則を使っている

また、括弧がなくても、 $k$  に関する和を先にとって、その後で  $l$  に  
関する和をとっていると読むことができる

このとき、和の順番は交換してもよいので、

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kl} c_{lj} &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{ik} b_{kl} c_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ik} \left( \sum_{l=1}^n b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^m a_{ik} (BC)_{kj}\end{aligned}$$

先ほどと同様に、 $\sum_{k=1}^m$  の右では  $k$  は止まっていると考えている  
 そして、この結果は、 $A(BC)$  の  $(i, j)$  である ■

結合法則が成り立つことが示されたので、 $(AB)C$  または  $A(BC)$  を表す  
 とき、括弧を書かずに単に  $ABC$  と書いても問題ない  
 行列の個数が増えても同様である

また、 $A$  が正方行列の場合は、

$$\begin{aligned}A^2 &= AA \\ A^3 &= AAA\end{aligned}$$

などのように書く



## 行列の区分け

行列を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ref: 行列と行列式の基礎 p64

のようなブロック型に区分けして計算することがよくある

$A$  が  $m \times n$  型るとき、 $m = m_1 + m_2$ ,  $n = n_1 + n_2$  として、 $A_{ij}$   
 は  $m_i \times n_j$  型である



また、 $B$  が  $n \times l$  型で、 $n = n_1 + n_2$ ,  $l = l_1 + l_2$  と区分けして

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように  $A_{ij}$  などが行列の成分であるかのようにして（ただし積の順序は変えずに）積が計算できる

ここで、 $A$  の列の区分けと  $B$  の行の区分けの仕方が同じであることが必要である

3 つ以上のブロックに分ける場合も同様である



## 行列と複素数

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき、

$$aE + bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

という形の行列を**複素数**と呼ぶことにより、複素数の定義ができる


この定義では、通常は  $a + bi$  と書かれるものを行列として実現している




[ Todo 6: ref: 図解でわかる線型代数 p43~49]




## 対角行列

 **対角成分** 正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、 $a_{ii}$  を**対角成分**と呼ぶ

 **対角行列** 対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列を**対角行列**と呼ぶ

$a_{ii} = c_i \quad (1 \leq i \leq n)$  である対角行列を次のように表す

$$\text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

 **対角行列と列ベクトルのスカラー倍** 右から対角行列をかけると、各列ベクトルがスカラー倍になる

すなわち、 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  とすると、

$$A \cdot \text{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) = (c_1 \mathbf{a}_1, c_2 \mathbf{a}_2, \dots, c_n \mathbf{a}_n)$$

が成り立つ

---

 証明




[ Todo 7: ref: 行列と行列式の基礎 p63 (問 2.8) ]




# トレース

ref: 行列と行列式の基礎 p64

 **トレース** 正方行列  $A = (a_{ij})$  に対して、対角成分の和

$$\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

を  $A$  の **トレース** と呼び、 $\text{tr}(A)$  と表す

 **トレースの性質**

- i.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$
- ii.  $\text{tr}(cA) = c \text{tr}(A)$
- iii.  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$

---

 **証明**



[ Todo 8: ref: 行列と行列式の基礎 p64 問 2.9 ]

## 第 3 章

# 連立一次方程式と階数



### 掃き出し法

連立一次方程式において、文字の個数や方程式の本数が増えた場合にも見通しよく計算を進めるためには、**掃き出し法**と呼ばれる方法がある

ref: 行列と行列式の基礎 p18~21

掃き出し法の基本方針は、次の形を目指すことである

$$\begin{cases} *x_1 + *x_2 + *x_3 = * \\ \quad *x_2 + *x_3 = * \\ \qquad *x_3 = * \end{cases}$$

- \* はどんな数であってもよい（同じ数でなくてもよい）
- \* は 0 でない数を意味する

この形の方程式は**上三角形**と呼ばれ、いつでもこの形に変形できるわけではないが、1 つの理想形である



### 連立一次方程式の行列表記

ref: 行列と行列式の基礎 p22~25




## 行基本変形

連立一次方程式を行列によってとり扱うとき、1 つ 1 つの方程式は行列の行によって表されている

ref: 行列と行列式の基礎 p25

よって、行列の行に関する次のような操作（変形）を考えることは自然である

 行基本変形 行列への次の 3 種類の操作を行基本変形という

- i. ある行の定数倍を他の行に加える
- ii. ある行に 0 でない数をかける
- iii. 2 つの行を交換する

原則として上三角型を目指してこのような変形を繰り返すが、いつでも上三角型にできるわけではなく、**行階段行列**と呼ばれる形を作っていくのが**掃き出し法**と呼ばれる手法である



## 行階段行列

掃き出し法では、あるステップで下の成分がすべて 0 になって、

ref: 行列と行列式の基礎 p26~28

$$\begin{pmatrix} \spadesuit & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のような形になるのが典型例である

0 でない成分を ♠ で、任意の値をもつ成分を \* で表した

一般には、成分が 0 ばかりの行が下にくる

そのような行を**零行**という

零行が現れない場合もあるし、複数現れる場合もある

零行でない行に対して、一番左の 0 でない成分 ♠ を **主成分** と呼ぶ

先ほど示した形では、行の主成分は左上から斜め右下  $45^\circ$  方向にまっすぐ並んでいるが、一般にはそうできるとは限らない

しかし、次のような形には必ずできる

$$\begin{pmatrix} 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

 **行階段行列** 次の条件を満たす行列を **行階段行列** という

- 零行でない行の主成分が、下の行ほど 1 つ以上右にある
- 零行がある場合は、まとめてすべて下にある


どんな行列も、行基本変形の繰り返しで行階段行列にできる



## 行列の階数

行階段行列に変形することで、重要な量が読み取れる

ref: 行列と行列式の基礎 p28~29

 **行列の階数** 行列  $A$  を行階段行列に変形したとき、零行でない行の個数を  $A$  の **階数** (rank) と呼び、 $\text{rank}(A)$  と書く

変形の結果として得られる行階段行列は 1 通りとは限らないし、変形の途中の掃き出しの手順も 1 通りとは限らないが、階数は  $A$  のみによって定まる値であることが後に証明できる



$A$  が  $m \times n$  型ならば、行は  $m$  個なので、 $\text{rank}(A)$  は 0 以上  $m$  以下

の整数である

行階段行列において、零行でない行の個数は主成分の個数と一致するので、階数は行階段行列に変形したときの主成分の個数でもある

行基本行列の主成分は各列に高々 1 つなので、主成分の個数は列の個数  $n$  を超えない

したがって、次の重要な評価が成り立つ

$$0 \leq \text{rank}(A) \leq \min(m, n)$$



## 簡約化された行階段行列

必要に応じて、行階段行列をさらに変形して次のような形にする

ref: 行列と行列式の基礎 p29~30

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行の主成分はすべて 1 で、主成分のある列の主成分以外の成分はすべて 0 である

この形を簡約化された行階段行列と呼ぶ

与えられた行列  $A$  に対して、行基本変形の繰り返しで得られる行階段行列は一意的ではないが、簡約化された行階段行列は一意的であることを後に議論する

そこで、簡約化された行階段行列を  $A_0$  と書くことにする



変形の過程を

行列  $A \rightarrow$  行階段行列  $\rightarrow$  簡約化された行階段行列  $A_0$



と 2 段階にわけるのは、計算の効率以上の意味がある

行階段行列にするとところまでで解決する問題（解の存在と一意性など）もあるからである



## 連立一次方程式を解く

方程式を解くということは、次のような問題に答えることである

ref: 行列と行列式の基礎 p25

- A. 解は存在するか？
- B. 解が存在する場合、それはただ 1 つの解か？
- C. 解が複数存在する場合は、どれくらい多く存在するのか？
- D. 解全体の集合を以下にしてわかりやすく表示できるか？



## 拡大係数行列と解の存在条件

$A$  を  $m$  行  $n$  列の行列、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  とし、線形方程式

ref: 行列と行列式の基礎 p31~32

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

を考える

これは、 $n$  個の文字に関する  $m$  本の連立方程式である

$\mathbf{x}$  は未知数  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を成分とするベクトルである

このとき、 $A$  は方程式の**係数行列**と呼ばれる

$A$  の右端に列ベクトル  $\mathbf{b}$  を追加して得られる  $m$  行  $(n + 1)$  列の行列

$$\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$$

を考えて、これを**拡大係数行列**という



$\mathbf{b} = \mathbf{0}$  の場合、つまり

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$


の形の線形連立方程式は**斉次形**であるという

斉次形の場合は  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  が明らかに解になっていて、これを**自明解**という  
したがって、自明解以外に解が存在するかどうかが基本的な問題である



まず、一般の  $\mathbf{b}$  の場合の解の存在（問題 A）について考える

$\tilde{A}$  は  $A$  の右端に 1 列追加して得られるので、掃き出しの過程を考えると、  
 $\text{rank}(\tilde{A})$  は  $\text{rank}(A)$  と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかであることがわかる

 解の存在条件  $A$  を  $m \times n$  型行列、 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  とする

$\tilde{A} = (A \mid \mathbf{b})$  とおくと、

$$\text{rank}(\tilde{A}) = \text{rank}(A) \iff A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ に解が存在する}$$

 証明



[ Todo 9: ref: 行列と行列式の基礎 p31 (定理 1.5.1) ]

 解の存在条件の系  $A$  を  $m \times n$  型行列とすると、

$$\forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ の解が存在する } \iff \text{rank}(A) = m$$

 証明



[ Todo 10: ref: 行列と行列式の基礎 p32 (定理 1.5.2, 1.5.3) ]


右端の列に主成分がない場合は、一般には無数個の解が存在する  
解の集合が直線を成していたり、もっと高い次元の図形になっていることがある

解が 1 つに定まらない場合は、解の全体像を知ることが方程式を「解く」ことになる

## 一般解のパラメータ表示

係数行列  $A$  の  $n$  個の列が、 $n$  個の変数に対応していることを思い出そう

ref: 行列と行列式の基礎 p33~36

 **主変数と自由変数** 行列  $A$  を行基本変形により行階段形にしたとき、主成分がある列に対応する変数を**主変数**と呼び、それ以外の変数を**自由変数**と呼ぶ

解が存在する場合には、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1 \boldsymbol{u}_1 + t_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r} \boldsymbol{u}_{n-r}$$

という形の一般解の表示（問題 D の答え）が得られる

ここで、 $r$  は行列  $A$  の階数である

自由変数、すなわちパラメータの個数を**解の自由度**と呼ぶ

$$\begin{aligned}\text{解の自由度} &= (\text{変数の個数}) - \text{rank}(A) \\ &= n - r\end{aligned}$$


これは、解全体の集合が何次元の空間なのかを表している（問題 C の答え）



## 解の一意性

ここまでの議論で、問題 B が解決している

ref: 行列と行列式の基礎 p37~38

 解の一意性  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  の解が存在するとき、

解が一意的である  $\iff \text{rank}(A) = n$


ここで、 $n$  は変数の個数である

 証明



[ Todo 11: ref: 行列と行列式の基礎 p37 (定理 1.5.8) ]

斉次形の場合の非自明解の存在問題も解決している

 斉次形の非自明解の存在条件 斉次形の方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  において、

自明解しか存在しない  $\iff \text{rank}(A) = n$

ここで、 $n$  は変数の個数である

 証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性は、それ以外の解がないということである ■



自由変数を  $x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-r}}$  とするとき、一般解の表示

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + t_{n-r} \mathbf{u}_{n-r}$$

の  $j_k$  番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる

このことから、

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + \cdots + t_{n-r} \mathbf{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の  $n - r$  個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる


この事実は、 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^m$  が線形独立であると表現される



## 線型独立性

線型独立性の定義式を移項することで、次の事実が得られる

ref: 行列と行列式の基礎 p38~40

 線型結合の一意性 線型独立性は、線形結合の一意性

$$\begin{aligned} c_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c_k \mathbf{a}_k &= c'_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + c'_k \mathbf{a}_k \\ \implies c_1 &= c'_1, \dots, c_k = c'_k \end{aligned}$$


と同値である

つまり、

線型独立性は、両辺の係数比較ができるという性質

であるとも理解できる




 線形関係式 ベクトル  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  に対する等式

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2 + \dots + c_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$$

を、 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$  の線形関係式という

特に、 $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$  として得られる線形関係式を自明な線形関係式という

これ以外の場合、つまり  $c_i \neq 0$  となるような  $i$  が少なくとも 1 つあるならば、これは非自明な線形関係式である

 非自明な線形関係式の存在と線形従属 ベクトルの集まりは、それらに対する非自明な線形関係式が存在するとき、そのときに限り線形従属である

---

 証明

ベクトルの集まりが線型独立であることは、それらに対する線形関係式はすべて自明であるというのが定義である


それを否定すると、「自明でない線形関係式が存在する」となる ■



## 非自明解の存在と有限従属性定理

斉次形方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の非自明解の存在に対して、次の解釈もできる

ref: 行列と行列式の基礎 p40~41

 斉次形方程式の非自明解の存在と線形従属  $m \times n$  型行列

$A$  の列ベクトルを  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  とするとき、

$$\begin{aligned} & A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ に自明でない解がある} \\ \iff & \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \text{ が線形従属} \end{aligned}$$

 証明




[ Todo 12: ref: 行列と行列式の基礎 p40 (命題 1.6.4) ]




斉次形方程式に自明でない解が存在することは、 $\text{rank}(A) \neq n$ 、すなわち解の自由度が 0 ではないことと同値であった

一般に、斉次形の線型方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  の解の自由度は、 $n$  を変数の個数とすると  $n - \text{rank}(A)$  なので、次が成り立つ

 列ベクトルの線型独立性と階数  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$  に対して、 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  とおくと、

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \text{ が線型独立} \iff \text{rank}(A) = n$$

このことから、次の重要な結論が導かれる

 有限従属性定理  $\mathbb{R}^m$  内の  $m$  個よりも多いベクトルからなる集合は線形従属である

 証明




[ Todo 13: ref: 行列と行列式の基礎 p41 (系 1.6.6) ]

この結論は、幾何的な直観からは自然だといえる


平面  $\mathbb{R}^2$  内の 3 つ以上のベクトルがあれば、自動的に線形従属になる

この事実は、次元の概念を議論する際の基礎になる

同じことを線型方程式の文脈に言い換えると、次のようになる

 有限従属性定理の線型方程式版 斉次線型方程式  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  において、変数の個数が方程式の個数よりも多いときには、非自明な解が存在する

また、次のようにも言い換えられる

 有限従属性定理の抽象版  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$  とする  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$  に含まれる  $k$  個よりも多い個数のベクトルの集合は線形従属である

 証明



[ Todo 14: ref: 行列と行列式の基礎 p41 (問 1.14) ]



## 行列の階数と線型独立性

次の事実は、行変形のもっとも重要な性質である

ref: 行列と行列式の基礎 p42~44



 行変形はベクトルの線形関係を保つ 行列  $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  に行の変形を施して  $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  が得られたとする

このとき、

$$\sum_{i=1}^n c_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \iff \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0}$$

特に、


$\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$  が線型独立  $\iff \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  が線型独立


 証明



[ Todo 15: ref: 行列と行列式の基礎 p42 (命題 1.6.8) ]



 主列ベクトル 行列  $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$  を行階段形にしたときに、主成分のある列番号を  $i_1, i_2, \dots, i_r$  とする  
ここで、 $r$  は  $A$  の階数である  
このとき、 $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$  を主列ベクトルという


 主列ベクトルと線型独立性 行列の主列ベクトルの集合は線型独立である  
また、主列ベクトル以外の列ベクトルは、主列ベクトルの線形結合である

 証明



[ Todo 16: ref: 行列と行列式の基礎 p43 (命題 1.6.11) ]

掃き出し法は、行列の列ベクトルの中から、 $\text{rank}(A)$  個の線型独立な列ベクトルを選び出す方法を与えていることになる


 列ベクトルの線形従属性と階数 行列  $A$  の列ベクトルから  $\text{rank}(A)$  個よりも多いベクトルを選ぶと、線形従属になる

 証明



[ Todo 17: ref: 行列と行列式の基礎 p43 (命題 1.6.12) ]

以上によって、行列の階数に関する次の理解が得られたことになる

 階数と線型独立な列ベクトル 行列  $A$  の階数  $\text{rank}(A)$  は、 $A$  の列ベクトルに含まれる線型独立なベクトルの最大個数と一致する

 証明



[ Todo 18: ref: 行列と行列式の基礎 p43 (定理 1.6.13) ]

「行変形を繰り返して行階段形にしたときの 0 でない段の数」として導入した階数という量の、より本質的な意味がわかったことになる

特に、

行変形によって定めた階数が行変形の仕方によらない

という事実がこの定理からしたがう



 2 つの行列の階数の和  $A, B$  を同じ型の行列とすると、

$$\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

 証明



[ Todo 19: ref: 行列と行列式の基礎 p44 問 1.15]


## 第 4 章

# 線形写像の単射性と全射性



### 線形写像とベクトルの線型独立性

ref: 行列と行列式の基礎 p65~66

 線形写像とベクトルの線形独立性  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  を線形写像、 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$  とする


- i.  $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$  が線型独立ならば、  
 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  は線型独立
- ii.  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  が線形従属ならば、  
 $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$  は線形従属

 証明



[ Todo 20: ref: 行列と行列式の基礎 p65 問 2.11]

ii は、平行なベクトルを線型写像で写した結果、平行でなくなったりはしないということを述べている

 線型写像とベクトルの線型独立性 線型写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  に対して、次の 2 つは同値になる

- i.  $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$  ならば、 $f(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$
- ii.  $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$  が線型独立ならば、  
 $\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \dots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$  も線型独立

 証明




[ Todo 21: ref: 行列と行列式の基礎 p66 命題 2.3.2]

i は、零写像と射影を除けば、 $f$  によってベクトルが「つぶれない」という性質を表している



[ Todo 22: ref: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

ii は、たとえば平行四辺形の像が線分や 1 点になったりしないことなどを意味している

 線形写像の単射性 線形写像  $f$  が単射であることと次は同値である

$$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

 証明




[ Todo 23: ref: 行列と行列式の基礎 p66 命題 2.3.3]

## 線形写像の単射性と全射性

線形写像  $f$  の単射性を表現行列  $A$  の言葉で述べる

ref: 行列と行列式の基礎  
p67~68

 線形写像の単射性と表現行列 線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  の表現行列を  $A$  とするとき、次はすべて同値

- i.  $f$  は単射
- ii.  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  は自明な解しか持たない
- iii.  $\text{rank}(A) = n$

 証明




[ Todo 24: ref: 行列と行列式の基礎 p67 命題 2.3.4]

i は抽象的な概念、ii は方程式論的な言葉、iii は数値的な条件であり、これらは言い換えただけで同値であると述べている。



単射性と対比して、全射性の理解も表現行列の言葉で整理する

 線形写像の全射性と表現行列 線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  の表現行列を  $A$  とするとき、次はすべて同値

- i.  $f$  は全射
- ii. 任意の  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  に対して、 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  には解が存在する
- iii.  $\text{rank}(A) = m$



[ Todo 25: ref: 行列と行列式の基礎 p68 命題 2.3.6]



## 像空間と核空間

線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  の全射性は、 $\mathbb{R}^m$  の部分集合である像空間  $\text{Im}(f)$  と関係している

ref: 行列と行列式の基礎 p68~69

$f$  が全射であることは、 $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^m$  と同値である




一方、 $f$  の単射性と関連して、 $\mathbb{R}^n$  の部分集合

$$\text{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\}$$

を考え、これを  $f$  の核空間あるいはカーネルと呼ぶ

線形写像の単射性は、次のようにも言い換えられる

 線形写像の単射性    線形写像  $f$  が単射であることと次は同値である

$$\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$



核空間  $\text{Ker}(f)$  は、実はすでに馴染みのある概念である

線形写像  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  の表現行列を  $A$  とするとき、

$$\text{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = \mathbf{0}\}$$

と定めると、 $\text{Ker}(f)$  と  $\text{Ker}(A)$  は同じものである

これは、斉次形の連立線形方程式  $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$  の解空間そのものである

$\text{Ker}(A)$  の元は、 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$  の基本解を使ってパラメータ表示できる



## 第 5 章

# 正則な線形変換と逆行列



[ Todo 26: ref: 行列と行列式の基礎 2.4]

## 第 6 章

# 内積と直交変換



[ Todo 27: ref: 行列と行列式の基礎 2.5]

.....

## Zebra Notes

Type	Number
todo	27