階数標準形

任意の行列 A は、行基本変形により、次のような既約行階段行列に変形できる

ref: 行列と行列式の基礎 p87〜88

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p75〜78

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

ここからさらに、列の交換によって、主成分のある列を左に集めることができる

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} \quad\overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{n-r}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & & & \\
& \ddots & & * \\
& & 1 & \\ \hline
& O & & O
\end{array}\right) &
\begin{array}{l} \updownarrow r \\ \\ \\ \updownarrow n-r \end{array}
\end{array}
$$

ここで、r は零行ではない行の個数、すなわち A の階数である

さらに、列の掃き出しで、左上のブロックの成分 $*$ をすべて 0 にできる

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} \quad\overset{r}{\longleftrightarrow} & \overset{n-r}{\longleftrightarrow} \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccc|c}
1 & & & \\
& \ddots & & O \\
& & 1 & \\ \hline
& O & & O
\end{array}\right) &
\begin{array}{l} \updownarrow r \\ \\ \\ \updownarrow n-r \end{array}
\end{array}
$$

この形を、A の**階数標準形**という

この形を得るまでの過程をまとめると、次のことがいえる

> ⚓ **基本変形による階数標準形の構成**　任意の行列は、行と列の基本変形を繰り返すことで、階数標準形に変形できる

ここで、P を行基本変形に対応する基本行列の積、Q を列基本変形に対応する基本行列の積とすると、A の階数標準形は PAQ で与えられる

基本行列の積は任意の正則行列を表すので、次のようにまとめられる

⚓ **正則行列による階数標準形の構成**　$m \times n$ 型行列 A に対して、行変形に対応する m 次正則行列 P、列変形に対応する n 次正則行列 Q が存在し、

$$B = PAQ$$

が階数標準形となる