

関数の局所的な様子を見る

簡単な関数のグラフは拡大していくと急に様子が変わったりせず、むしろ、だんだん安定したものになると考えられる

局所的な部分を拡大すると安定した姿になるとき、その様子を数学的にとらえる概念が微分

ものによっては、拡大するとどんどん見え方が変わるものもある

拡大を何度繰り返しても同じ複雑さを保つ数学的構造（フラクタル）も自然界には現れる

拡大すれば何でも簡単になるわけではないが、微分では、拡大したとき安定していく「素直」なものを主な対象とする

つまり、微分は局所を分析するのに強力な手法だが、万能ではない

微分の定義

関数は変化の法則性をとらえる数学的言語

数 x に対して数 $f(x)$ が定まるとき、 $f(x)$ を変数 x の関数という

座標 $(x, f(x))$ を xy 平面でプロットした曲線を関数 $f(x)$ のグラフという

これは、 x 座標の点 x における高さが $f(x)$ となる曲線

この曲線の局所的な様子を見るのに、変数 x を $x + h$ に動かしてみる

そうすると、関数の値は $f(x)$ から $f(x + h)$ に変わる

「素直」な関数のグラフをどんどん拡大すると、拡大部分はだんだん直線のように見えるだろう、と考えられる

h が小さいとき、斜めの曲線がほぼ一定の傾きの直線に見えるというのは、関数の値の変化量 $f(x + h) - f(x)$ が h にほぼ正比例すること

式で表すと、 x から $x + h$ の区間のグラフを直線とみなしたときの勾配

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

は、 h が 0 に近づくとある 1 つの数に近づくと、すなわち、収束するはずである

* * *

■定義 h を 0 に近づけると、 $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ がある数に収束するとき、 $f(x)$ は x において微分可能であるという

このとき、極限値を

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

と書き、 $f(x)$ の微分または微分係数（微係数）という

* * *

定数関数の微分 「収束する」ことを「限りなく近づく」と言うこともある

日常的な言葉だと「限りなく近づく」には「その値に達していない」というニュアンスを感じるが、数学では、最初からずっと同じ値のときも「収束する」場合に含める

$f(x)$ が x の値によらないとき、 $f(x)$ を定数関数という

このときは h がどんな数でも $f(x+h) - f(x) = 0$ となるので、定数関数の微分は 0 である

* * *

微分係数が定まらない例

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が収束しない状況の例として、 $y = |x|$ を考える

$f(x) = |x|$ の場合、 $x = 0$ で

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を計算しようとする、

$h > 0$ のときは

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$h < 0$ のときは

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

となり、 h を正から 0 に近づけると、負から 0 に近づけると、 $\frac{f(h) - f(0)}{h}$ の極限の値が異なってしまうので、微分係数 $f'(0)$ が定まらない

* * *

■定理 $a < x < b$ で定義された、微分可能な関数 $f(x)$ が $x = c$ で最大値または最小値をとるならば、 $f'(c) = 0$ である

* * *

$f'(c)$ が最大値となる場合の証明

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

において、 $f(c)$ が最大値であることから、

$$f(c) \geq f(c+h)$$

$$f(c+h) - f(c) \leq 0$$

したがって、 $h > 0$ のときは、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

となり、 h を正の側から 0 に近づけた極限值として $f'(c) \leq 0$ が成り立つ

一方、 $h < 0$ のときは、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

となり、 h を負の側から 0 に近づけた極限值として $f'(c) \geq 0$ が成り立つ

$f'(c) \leq 0$ かつ $f'(c) \geq 0$ なので、 $f'(c) = 0$ が導かれた □

* * *

$f'(c)$ が最小値となる場合の証明 $f'(c)$ が最大値となる場合と同様に示される □

導関数

x を止めて考えると、 $f(x)$ の微分は 1 つの数

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

また別の視点として、

- x に数を与えると、何か 1 個、数が出てくる
- また別の x に対しては、別の数が出る

そう思うと、 x から $\frac{df}{dx}(x)$ への対応は 1 つの関数を与えていると考えることができる

このように、 $\frac{df}{dx}(x)$ を x の関数と見たとき、それを $f(x)$ の導関数という

* * *

「微分」と「導関数」は視点の違いで使い分けられる言葉

- x を止めて $\frac{df}{dx}(x)$ という 1 個の数（微分係数）
に注目するのか
- x を変数と思って $\frac{df}{dx}(x)$ を関数とみなす（導関数として扱う）のか

後者の立場に立って、 $\frac{df}{dx}(x)$ を関数だと思えば、さらに微分を考えることができる

* * *

微分できないからといってそこで終わりではない

たとえば、関数概念を拡張した超関数の理論は、
極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が存在しない場合にも、より広く「微分」という概念をとらえる枠組みを与えるもの

単項式 x^n の微分