第 1 章

部分空間の双対性

行空間と核空間の直交

$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする。
このとき、A の第 i 行ベクトル $\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、次の線形汎関数 ϕ_i と同一視できる。

$$\phi_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$$

この行ベクトル $\phi_i \in {}^t\mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle \subset {}^t\mathbb{R}^n$ を、A の行空間と呼び、$\mathrm{Row}\, A$ と書く。

ここで、x_j はベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、j 番目の成分を返す座標関数である。そこで、

$$\begin{aligned} \phi_i(\boldsymbol{v}) &= a_{i1}x_1(\boldsymbol{v}) + \cdots + a_{in}x_n(\boldsymbol{v}) \\ &= a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n \end{aligned}$$

とみると、ϕ_i は $\boldsymbol{v}$ に作用して、A の第 i 行ベクトルと $\boldsymbol{v}$ の内積を返すことがわかる。

すると、$\phi_i(\boldsymbol{v})$ を縦に並べたものは、$A\boldsymbol{v}$ に一致する。

$$A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1(\boldsymbol{v}) \\ \vdots \\ \phi_m(\boldsymbol{v}) \end{pmatrix}$$

このとき、$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ となる場合は、

$$\phi_i(\boldsymbol{v}) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

が成り立つことになる。
すなわち、A のすべての行ベクトルに対して、$\boldsymbol{v}$ との内積が 0 になる。

このことから、A の行空間に属するベクトルと、$A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ の解空間 $\mathrm{Ker}\, A$ に属するベクトル $\boldsymbol{v}$ は、互いに直交することがわかる。
よって、次の関係が成り立つ。

$$\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Row}\, A)^{\perp}$$

また、$(\mathrm{Row}\, A)^{\perp}$ の直交補空間は $\mathrm{Row}\, A$ に一致することから、両辺の直交補空間をとると、次も成り立つ。

$$(\mathrm{Ker}\, A)^{\perp} = \mathrm{Row}\, A$$

核空間と行空間の直交関係　A の核空間と、A の行空間（行ベクトルが張る空間）は、直交補空間の関係にある。

$$\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Row}\, A)^{\perp}$$
$$(\mathrm{Ker}\, A)^{\perp} = \mathrm{Row}\, A$$

この定理は、核空間と像空間との関係として言い換えることもできる。

A の像空間 $\mathrm{Im}\, A$ は、A の列ベクトルが張る空間（列空間）であった。
A を転置すると行と列が入れ替わるので、$A^{\top}$ の行空間は A の列空間に対応する。

よって、定理を次のように書き換えることができる。

核空間と転置行列の像空間の直交関係　A の核空間と、$A^{\top}$ の像空間は、直交補空間の関係にある。

$$\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Im}\, A^{\top})^{\perp}$$
$$(\mathrm{Ker}\, A)^{\perp} = \mathrm{Im}\, A^{\top}$$

直交補空間から零化空間へ

さて、$\mathrm{Ker}\, A = (\mathrm{Row}\, A)^\perp$ という直交補空間の関係を導くにあたって、ここでは次のような議論を行った。

1. 横ベクトルと同一視できる線形汎関数を考える
2. 線形汎関数に縦ベクトルを作用させたものを内積とみなす
3. 内積が 0 になることから直交補空間の関係を導く

つまり、ここでは内積が定められている空間（計量空間）で議論を行ったわけだが、内積を考えずに、線形汎関数の集合（双対空間）だけで議論を行うこともできる。

直交補空間の概念を内積を使わずに拡張し、一般の線形空間上で定義したものが、次に述べる零化空間である。

零化空間

V を線形空間とし、その部分空間 $W \subset V$ を考える。
V の双対空間 V^*（線形汎関数の集合）の中で、「W の元に作用させると 0 になる」ような線形汎関数を集めた集合を零化空間（`annihilator`）という。

零化空間　V を n 次元の線形空間とする。W を V の部分空間とするとき、

$$W^\perp = \{\phi \in V^* \mid \forall \boldsymbol{w} \in W, \langle \phi, \boldsymbol{w} \rangle = 0\}$$

を W の零化空間という。

$\phi \in V^*$ が W のすべてのベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して $\phi(\boldsymbol{w}) = 0$ となるとき、その ϕ は W を「全滅させてしまう（`annihilate`）」という意味で、零化空間は `annihilator` と呼ばれる。

零化空間は V^* の部分空間

V^* の中から、$\phi(\boldsymbol{w}) = 0$ を満たす元 $\phi \in V^*$ を取り出した集合が $W^\perp$ であるので、$W^\perp$ は V^* の部分空間である。

零化空間の双対空間への包含関係　V を n 次元の線形空間とし、W を V の部分空間とする。

このとき、W の零化空間 $W^\perp$ は、V の双対空間 V^* の部分空間である。

証明

[Todo 1:]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1