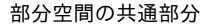
# 第 18 章

# 直和分解と不変部分空間



[ Placeholder 1: 再編予定 (book: 線形代数の世界 p20~21) ]

与えられた部分空間から、新しく部分空間を作ることができる

♪ Theorem - 線形部分空間の共通部分は部分空間

U, W を体 K 上の V の部分空間とするとき、共通部分  $U \cap W$  は V の部分空間である



#### 和について

 $m{a}$ ,  $m{b} \in U \cap W$  とすると、共通部分の定義より、 $m{a}$  と  $m{b}$  はどちらも U と W の両方に属していることになる

 $\neg \exists b, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in U \text{ } b \neg \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W \text{ } cas$ 

U も W も部分空間なので、部分空間の定義より、

$$a + b \in U$$
  
 $a + b \in W$ 

a+b が U と W の両方に属していることから、a+b は  $U\cap W$  に属するよって、 $U\cap W$  は和について閉じている

#### スカラー倍について

共通部分の定義より、 $\boldsymbol{a}$  は U と W の両方に属しているので、部分空間の定義より

$$c\mathbf{a} \in U$$
  
 $c\mathbf{a} \in W$ 

よって、ca は  $U \cap W$  に属するため、 $U \cap W$  はスカラー倍について閉じている



## 部分空間の和

[ Placeholder 2: 再編予定 (book: 線形代数の世界 p20~21) ]

#### ♪ Theorem - 線形部分空間の和は部分空間

U, W を体 K 上の V の部分空間とするとき、和空間

$$U + W := \{ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W \}$$

は V の部分空間である

証明

#### 和について

 $a_1, a_2 ∈ U, b_1, b_2 ∈ W$  とする

UとW は部分空間なので、部分空間の定義より

$$a_1 + a_2 \in U$$
,  $b_1 + b_2 \in W$ 

一方、和空間の定義より、 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{b}_1$ ,  $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{b}_2$  はそれぞれ U+W の元である これらの元の和をとったときに、その和も U+W に属していれば、和空間は 和について閉じているといえる

$$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)$$
  
 $\in U + W$ 

上式で、和空間は和について閉じていることが示された

#### スカラー倍について

UとW は部分空間なので、部分空間の定義より

$$c\mathbf{a} \in U$$
 $c\mathbf{b} \in W$ 

一方、和空間の定義より、 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$  は U+W の元である この元をスカラー倍したときに、そのスカラー倍も U+W に属していれば、 和空間はスカラー倍について閉じているといえる

$$c(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c\mathbf{a} + c\mathbf{b}$$
$$\in U + W$$

上式で、和空間はスカラー倍について閉じていることが示された

3 つ以上の部分空間の和も同様に考えて、一般に和空間は次のように定義される

**☎** 和空間 線形空間 V と、その部分空間  $V_1, \ldots, V_k$  が与えられたときに、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k \quad (\boldsymbol{v}_i \in V_i, i = 1, \ldots, k)$$

と表されるベクトル  $\boldsymbol{v}$  全体がなす集合を  $V_1, \ldots, V_k$  の和空間といい、

$$\sum_{i=1}^{k} V_i$$

と書く

#### 和空間を張るベクトル

部分空間を生成するベクトルを用いて、部分空間の和を表せる

♣ Theorem 18.1 - 部分空間の和と生成ベクトル

 $K^n$  の 2 つの部分空間  $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle$  と  $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$  に対して、和空間 U + W は

$$U + W = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

となる

証明 証明

和空間 U+W は

$$U + W = \{ \boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}, \ \boldsymbol{u} \in U, \ \boldsymbol{w} \in W \}$$

と定義される

また、 $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_k$  の張る部分空間は

$$H = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

である

これらが等しいことを示せばよい

 $U+W\subseteq H$ 

任意の  $\boldsymbol{x} \in U + W$  に対し、 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$  ( $\boldsymbol{u} \in U$ ,  $\boldsymbol{w} \in W$ ) と書ける すなわち、

$$\boldsymbol{u} = a_1 \boldsymbol{u}_1 + \dots + a_m \boldsymbol{u}_m \qquad (a_i \in K)$$

$$\boldsymbol{w} = b_1 \boldsymbol{w}_1 + \dots + b_k \boldsymbol{w}_k \qquad (b_j \in K)$$

よって、

$$oldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m a_i oldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^k b_j oldsymbol{w}_j \in H$$

## $H \subseteq U + W$

任意の  $\boldsymbol{x} \in H$  は

$$oldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m a_i oldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^k b_j oldsymbol{w}_j$$

と書ける

ここで

$$oldsymbol{u} = \sum_{i=1}^m a_i oldsymbol{u}_i \in U$$
 $oldsymbol{w} = \sum_{i=1}^k b_j oldsymbol{w}_j \in W$ 

とすれば、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in U + W$$

以上より、 $U+W\subseteq H$  と  $H\subseteq U+W$  が成り立つので、U+W=H が示された

## 和空間の包含関係

#### ♣ Theorem - 和空間における部分空間の和集合の包含

和空間は、和集合を部分集合として包含する すなわち、U, W を V の部分空間とするとき、

 $U+W\supset U\cup W$ 

が成り立つ

#### 証明

**Theorem 10.1**「部分空間における零ベクトルの包含」より、部分空間はいずれも零ベクトルを含むので、たとえば、 $U = \{\mathbf{0}\}$  の場合、

 $U + W \supset W$ 

同様に、

 $U+W\supset U$ 

よって、U+W は U または W を包含することがわかる すなわち、

 $U + W \supset U \cup W$ 

が成り立つ

#### ♪ Theorem - 和空間の最小包含性

*U*, *W* を *V* の部分空間とする

和空間 U+W は、U と W を含む部分空間のうち、最小のものである

#### 証明

V の任意の部分空間のうち、U と W の両方を包含するもの V' を考えるこのとき、部分空間は和に閉じているため、V' は U+W も包含する

$$V' \supset U + W$$

よって、V' の任意性から、U+W は U と W を含む部分空間のうち、最小のものとなる



このように、和空間 U+W は、U や W を部分空間として含むが、U や W より真に大きい(U, W を真部分集合として含む)とは限らない

別の角度からいうと、

$$V = W_1 + W_2$$

という関係があるだけで、「V が  $W_1$  と  $W_2$  の和に分解された」というのは適当ではない 和空間が持つこの欠陥を補うために、和空間の概念をより精密化したものが、次に述べる れである



## 直和分解

**■** 直和分解 線形空間 V の部分集合  $W_1$ ,  $W_2$  に対して、任意の  $\boldsymbol{v} \in V$  が  $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ ,  $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$  によって

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$$

と一意的に表されるとき、V は  $W_1$  と  $W_2$  の $\overline{\mathbf{e}}$ 和である( $\overline{\mathbf{e}}$ 和に分解される)といい、

$$V = W_1 \oplus W_2$$

と書く

この定義は、次のように言い換えることができる

#### **3** Theorem 18.2 - 直和分解の同値条件

線形空間 V の部分集合  $W_1$ ,  $W_2$  に対して  $V=W_1 \oplus W_2$  が成り立つことと、

i. 
$$V = W_1 + W_2$$

ii. 
$$W_1 \cap W_2 = \{ \mathbf{0} \}$$

の両方が成り立つことは同値である

証明 証明

### (i), (ii) $\Longrightarrow V = W_1 \oplus W_2$

 ${m w}_1$ ,  ${m w}_1' \in W_1$ ,  ${m w}_2$ ,  ${m w}_2' \in W_2$  とする

仮定 (i) と和空間の定義より、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1' + \boldsymbol{w}_2'$$

この等式は、移項によって次のように変形できる

$$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2$$

部分空間は和に閉じているため、左辺は  $W_1$  に、右辺は  $W_2$  に属するよって、このベクトルは  $W_1 \cap W_2$  に属する

仮定 (ii) より、 $W_1 \cap W_2$  の元は零ベクトルであるので、

$$m{w}_1 - m{w}_1' = m{0}$$
  
 $m{w}_2' - m{w}_2 = m{0}$ 

したがって、

$${m w}_1 = {m w}_1', \quad {m w}_2 = {m w}_2'$$

となり、**v** の表現の一意性が示された

#### $V = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow (i), (ii)$

和空間の定義をふまえると、(i) は直和分解の定義に含まれる

(ii) を示すため、 $\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$  とする  $\boldsymbol{v}$  は零ベクトルを用いて、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + 0 = 0 + \boldsymbol{v}$$

と表せるが、直和分解の定義より、**v** の表現は一意的であるので、

$$v = 0$$

を得る

よって、
$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$
 が成り立つ

#### 直和分解の一意性を表す条件

3 つ以上の部分空間による直和を考えるにあたって、直和分解の定義に含まれていた「一意性」を表す条件を定式化する

#### ♣ Theorem - 部分空間の和における表現の一意性

和空間  $\sum_{i=1}^k V_i$  の元  $oldsymbol{v}$  を、部分空間  $V_1,\ldots,V_k$  の元  $oldsymbol{v}_i\in V_i$  の和として

$$oldsymbol{v} = \sum_{i=1}^k oldsymbol{v}_i \quad (oldsymbol{v}_i \in V_i)$$

と書くとする

このとき、次の条件が成り立てば、和に使われる  $\boldsymbol{v}_i$  は  $\boldsymbol{v}$  により一意的に定まる

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = 0 \implies \boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = 0$$

≥ 証明

仮に、**v** が 2 通りの和で表せるとする

$$oldsymbol{v} = \sum_{i=1}^k oldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^k oldsymbol{v}_i' \quad (oldsymbol{v}_i, oldsymbol{v}_i' \in V_i)$$

このとき、

$$\sum_{i=1}^k (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i') = \mathbf{0}$$

となるが、ここで  $oldsymbol{v}_i - oldsymbol{v}_i'$  は  $V_i$  に属する

そこで、 $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_i' \in V_i$  とおき、

$$\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_k = 0 \implies \boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_k = 0$$

という条件を満たすとすると、 $\boldsymbol{w}_i = \mathbf{0}$  より、

$$oldsymbol{v}_i = oldsymbol{v}_i' \quad (i=1,\ldots,k)$$

が導かれる

したがって、 $oldsymbol{v}$  の和に使われる  $oldsymbol{v}_i$  は一意的に定まる

この一意性の条件を用いて、複数の部分空間による直和を次のように定義する

**■** 直和 線形空間 V と、その部分空間  $V_1, \ldots, V_k$  が与えられたとき、 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ ,  $\boldsymbol{v} \in \sum_{i=1}^k V_i$  に対して、

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \implies \boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$$

が成り立つとき、
$$\sum_{i=1}^k V_i$$
 は  $V$  の直和であるといい、



と書く

## 和空間と直和の次元

♪ Theorem - 和空間の次元

 $K^n$  の部分空間 V, W に対して、

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

が成り立つ

証明

$$\dim(V) = n$$
,  $\dim(W) = m$  とする

 $V \cap W$  の基底  $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$  をとる

これを Theorem 10.6 「基底の延長」に基づいて、 V の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}\}$$

に延長する

同様に、 $\boldsymbol{\mathcal{V}}$  を  $\boldsymbol{W}$  の基底

$$\mathcal{V} \cup \{ \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d} \}$$

に延長する

このとき、 $\boldsymbol{u_1},\ldots,\boldsymbol{u_d},\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_{n-d}},\boldsymbol{w_1},\ldots,\boldsymbol{w_{m-d}}$  がV+W の基底になることを示す

#### V + W を生成すること

 $\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W$  とすると、それぞれ基底の線形結合で表すことができる

$$egin{align} oldsymbol{v} &= \sum_{i=1}^d a_i oldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j oldsymbol{v}_j \ oldsymbol{w} &= \sum_{i=1}^d c_i oldsymbol{u}_i + \sum_{k=1}^{m-d} d_k oldsymbol{w}_k \end{aligned}$$

V + W の任意の元は、v + w と書けるので、

$$oldsymbol{v} + oldsymbol{w} = \sum_{i=1}^d (a_i + c_i) oldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j oldsymbol{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} d_k oldsymbol{w}_k$$

となり、 $\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}\}$  の線形結合で表せる

#### 線型独立であること

 $oldsymbol{u}_1,\ldots,oldsymbol{u}_d,oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_{m-d}$ が線型独立であることを示すために、次のような線形関係式を考える

$$\sum_{i=1}^d c_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} c_{d+j} \boldsymbol{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} c_{d+n-d+k} \boldsymbol{w}_k = \mathbf{0}$$

ここで、 $c_i \in K$  はスカラーである

この式を V と W の基底の線型結合として考えると、V の基底  $oldsymbol{u}_i$ ,  $oldsymbol{v}_j$  に関する部分と W の基底  $oldsymbol{u}_i$ ,  $oldsymbol{w}_k$  に関する部分がそれぞれ線形独立であるため、結局どの項においても  $c_i=0$  である必要がある

よって、 $oldsymbol{u}_1,\ldots,oldsymbol{u}_d,oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_{n-d},oldsymbol{w}_1,\ldots,oldsymbol{w}_{m-d}$  は線型独立である

以上より、 $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}$  は V+W の基底であることが示された

この基底をなすベクトルの個数(次元)について考えると、

$$\dim(V + W) = d + (n - d) + (m - d)$$
$$= n + m - d$$

となる

CCC,  $d = \dim(V \cap W)$  CCC,

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

と書き換えられ、目的の式が得られた



直和分解に対して和空間の次元定理を適用すると、次のようにまとめられる

#### ♣ Theorem 18.3 - 直和の次元

 $W_1$ ,  $W_2$  が V の部分空間であるとき、

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

が成り立つ



直和分解の定義より  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$  であるので、

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$$

よって、和空間の次元の式から、 $\dim(W_1 \cap W_2)$  が消えた形になる



また、和空間の次元定理の証明過程を、直和分解の場合で考えることで、次の定理が得られる

#### ♣ Theorem 18.4 - 直和の基底

線形空間 V が部分空間  $W_1$ ,  $W_2$  の直和に分解されることと、V の基底が  $W_1$ ,  $W_2$  の基底を合わせたものになることは同値である

#### 証明

直和分解の場合、 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$  であるため、和空間の次元定理の証明過程において、 $W_1 \cap W_2$  の基底を考える必要がなくなる

よって、和空間の次元定理の証明と同様にして、 $W_1$  の基底と  $W_2$  の基底を合わせた ものが V の基底になることが示される

## 不変部分空間

V 上の線形変換 f について、「変換 f で写しても変わらない」という性質を考える

 $f(W) \subset W$ 

すなわち、

 $\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{W} \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in \mathcal{W}$ 

が成り立つとき、W は f 不変な部分空間であるという

また、 $V=\mathbb{R}^n$  で、f が正方行列 A によって定まっているときは、f 不変な部分空間 W を A 不変な部分空間ともいう

## 写像の制限と不変部分空間

#### ♣ Theorem 18.5 - 不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現

V を n 次元線形空間とし、線形変換  $f: V \rightarrow V$  を考える

このとき、V のある部分空間 W が f 不変ならば、V の適当な基底について、f は

という形の行列で表すことができる

#### 証明 証明

 $\dim(W) = r$  とし、W の基底  $oldsymbol{v}_1, \ldots, oldsymbol{v}_r$  を延長して V の基底  $oldsymbol{v}_1, \ldots, oldsymbol{v}_r, oldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, oldsymbol{v}_n$  をとる

このとき、表現行列の構成法より、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} \boldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^n a_{ij} \boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

とおける

ここで、W は f 不変であることは、 $1 \leq j \leq r$  の範囲では  $f(\pmb{v}_j) \in W$  であることを意味する

W の元  $f(\boldsymbol{v}_j)$  は、W の基底だけを用いて表現できるので、

$$f(oldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} oldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

すなわち、もともとの  $f(\boldsymbol{v}_i)$  の式において、

$$\sum_{i=r+1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \quad (1 \leq j \leq r)$$

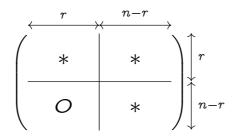
となっている

 $\boldsymbol{v}_i$  は基底なので線型独立であり、したがって、

$$a_{ij} = 0$$
  $(1 \le j \le r, r+1 \le i \le n)$ 

が成り立つ

この条件より、f の表現行列  $(a_{ij})$  は、



というような形になる

また、V の基底として、順序を変えた  $oldsymbol{v}_{r+1},\ldots,oldsymbol{v}_n,oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_r$  を取ることもできる

この場合は、

$$f(oldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} oldsymbol{v}_i + \sum_{i=r+1}^n a_{ij} oldsymbol{v}_i \quad (r+1 \leq j \leq n)$$

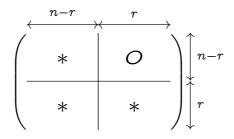
とおくと、 $r+1 \leq j \leq n$  の範囲 (V の基底の後半部分) で

$$\sum_{i=1}^r a_{ij} \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$$

となるので、すなわち、

$$a_{ij} = 0$$
  $(r + 1 \le j \le n, 1 \le i \le r)$ 

よって、f の表現行列  $(a_{ij})$  は、



という形になる

以上より、2 通りの f の表現行列の形が得られた

V の基底を  $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r,\boldsymbol{v}_{r+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n$  ととった場合、 $f(\boldsymbol{v}_i)\in W$  は

$$f(oldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^r a_{ij} oldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq r)$$

だけで表現できた

この  $1 \le i \le r$ ,  $1 \le j \le r$  の部分は、f の表現行列

$$A = (a_{ij}) = \left( egin{array}{c|c} & r & & n-r \\ \hline A_{11} & A_{12} & \\ \hline O & A_{22} & \end{array} 
ight) \uparrow^r$$

の、 $A_{11}$  の部分に対応する

つまり、この行列  $A_{11}$  は、 $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$  で張られる V の部分空間 W から W への線形写像 f' を、基底  $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$  について表現する行列になっている

f' は、f の定義域を W に制限したものになっているが、W の元に限定して考える限り、 実質的には f と区別がないものである

この意味で、写像 f' を、写像 f の W への制限と呼び、 $f|_{W}$  と表記する

写像の制限 写像  $f: X \to Y$  において、X のある部分集合 S が与えられたとき、定義域を S に限定したものを f の S に対する制限といい、

$$f|_{S}: S \to Y$$

と表す

同様に、V の基底を  $\boldsymbol{v}_{r+1},\ldots,\boldsymbol{v}_{n},\boldsymbol{v}_{1},\ldots,\boldsymbol{v}_{r}$  ととった場合、 $f(\boldsymbol{v}_{i})\in W$  は

$$\sum_{i=r+1}^n a_{ij} \boldsymbol{v}_i \quad (r+1 \le j \le n)$$

だけで表現できた

この  $r+1 \le i \le n$ ,  $r+1 \le j \le n$  の部分は、f の表現行列

$$A = (a_{ij}) = \left( egin{array}{c|c} A_{11} & O \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array} \right) \uparrow^{n-r}$$

の、 $A_{22}$  の部分に対応する

つまり、この場合は、 $A_{22}$  が変換 f の W への制限  $f|_{W}$  を表現する行列になっている



## 不変部分空間への直和分解

Theorem 18.5「不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現」の証明では、Wの基底  $m{v}_1,\ldots,m{v}_r$  を延長したものを V の基底  $m{v}_1,\ldots,m{v}_r,m{v}_{r+1},\ldots,m{v}_n$  としたこのとき、

$$\mathcal{W}' = \langle \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

とおくと、V の基底が W, W' の基底を合わせたものになっているため、Theorem~18.4「直和の基底」より、

$$V = W \oplus W'$$

となる

ここで、もしW'もf不変であれば、右上の $A_{12}$ も零行列になって、表現行列は

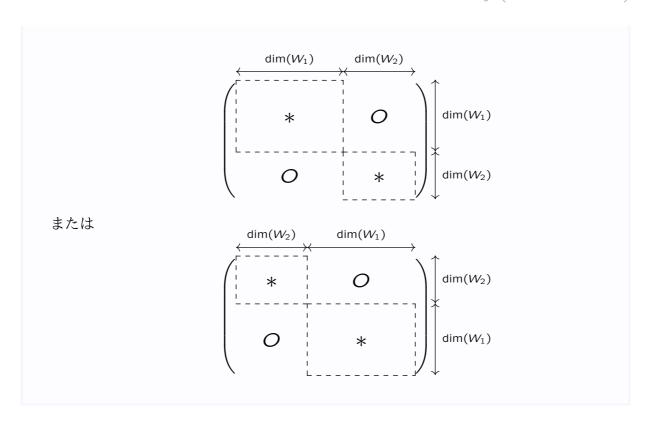
というブロック対角型になる

#### ♪ Theorem - 不変部分空間への直和分解

線形空間 V と、V 上の線形変換 f に対し、V が f 不変な部分空間  $W_1$  と  $W_2$  の 直和に分解することができれば、すなわち、

- i.  $V = W_1 \oplus W_2$
- ii.  $W_1$ ,  $W_2$  は f 不変な V の部分空間

となる  $W_1$ ,  $W_2$  が存在すれば、適当な V の基底について、f は次のような形の行列で表せる



#### ≥ 証明

 $W_1$  の基底、 $W_2$  の基底をこの順に並べるか、その反対の順に並べて、V の基底を構成することで、 $Theorem\ 18.5$ 「不変部分空間による線形変換のブロック型行列表現」の証明と同様に示される



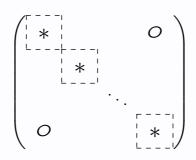
さらに、V をより細かい部分空間の直和に分解できる場合には、次のようになる

### ♣ Theorem - 複数の不変部分空間への直和分解

線形空間 V と、V 上の線形変換 f について、

- i.  $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$
- ii. 各部分空間  $W_i$  は f 不変な V の部分空間

であるならば、適当な V の基底に対し、f は次のような形の行列で表せる



対角線上の各正方形の大きさは、各部分空間  $W_i$  の次元に対応する

そこで、以上の議論を究極にまで押し進めると、次の定理になる

#### 我 Theorem 18.6 - 一次元部分空間への直和分解

n 次元部分空間 V が、n 個の f 不変の 1 次元部分空間の直和に分解できるとき、 すなわち、

- i.  $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n$
- ii.  $W_i$  ( $i=1,2,\ldots,n$ ) は f 不変な 1 次元部分空間

となるときは、f は次のような対角行列で表せる

## 一次元不変部分空間

W を一次元部分空間とすると、これは基底  $w \neq 0$  で張られる空間であるので、

$$W = \langle \boldsymbol{w} \rangle = \{ \alpha \boldsymbol{w} \mid \alpha \in K \}$$

この一次元部分空間 W が f 不変であるとは、定義より、

$$\forall \boldsymbol{w} \in \mathcal{W} \Longrightarrow f(\boldsymbol{w}) \in \mathcal{W}$$

であり、これで W の元は  $\alpha \boldsymbol{w}$  とも  $f(\boldsymbol{w})$  とも表せることになるので、

$$f(\boldsymbol{w}) = \alpha \boldsymbol{w} \quad (\alpha \in K)$$

がいえる

以上をふまえて、Theorem 18.6「一次元部分空間への直和分解」という定理をより具体的に整理してみる

 $\dim(V) = n$  とすると、V 上の線形変換 f の表現行列 A を構成する式は、

$$(f(\boldsymbol{w}_1),\ldots,f(\boldsymbol{w}_n))=(\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_n)A$$

となるが、ここで、

$$(f(\boldsymbol{w}_1),\ldots,f(\boldsymbol{w}_n))=(\alpha_1\boldsymbol{w}_1,\ldots,\alpha_n\boldsymbol{w}_n)$$

であるので、

$$(f(\boldsymbol{w}_1),\ldots,f(\boldsymbol{w}_n))=(\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_n)egin{pmatrix} lpha_1 & 0 & \cdots & 0 \ 0 & lpha_2 & \cdots & 0 \ dots & dots & \ddots & dots \ 0 & 0 & \cdots & lpha_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられる

したがって、f は基底  $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$  について、次の対角行列で表される

$$egin{pmatrix} lpha_1 & 0 & \cdots & 0 \ 0 & lpha_2 & \cdots & 0 \ dots & dots & \ddots & dots \ 0 & 0 & \cdots & lpha_n \end{pmatrix}$$

ここで現れたスカラー  $\alpha_i$  やベクトル  $m{w}_i$  と、線形写像  $m{f}$  との関係が、<mark>固有値・固有ベクト</mark> ルと行列の対角化という話題に発展する

## **Zebra Notes**

Туре	Number
placeholder	2