基底と次元

部分空間のパラメータ表示を与えるために基準として固定するベクトルの集合を定式化すると、基底という概念になる

ref: 行列と行列式の基礎 p96、p99～100
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p33～35

基底は、座標空間の「座標軸」に相当するものであり、部分空間を生成する独立なベクトルの集合として定義される

基底　V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする

ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subset V$ は、次を満たすとき V の基底であるという

i. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ は線型独立である
ii. $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$

線形空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ を 1 つ見つけたら、ベクトルの個数を数えて、V の次元が k であるとする

次元　V を線形空間とする

V の基底をなすベクトルの個数を V の次元といい、$\dim V$ と書く

また、$\dim\{\boldsymbol{0}\} = 0$ と定義する

基底の例：標準基底

たとえば、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり、これを $\mathbb{R}^n$ の標準基底という

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p35

標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は n 個のベクトルからなるため、$\mathbb{R}^n$ の次元は n である

数ベクトル空間の標準基底　数ベクトル空間 K^n において、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は K^n の基底である

証明

部分空間を生成すること

任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in K^n$ は、次のように表せる

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

したがって、K^n は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ によって生成される

■

線型独立であること

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の線形関係式

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

を考える

このとき、左辺は

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられるので、これが零ベクトルになるためには、

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

でなければならない

よって、$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は線型独立である　■

基底と次元を定義するにあたって、次の保証が必要になる

i. 任意の部分空間に、基底の定義を満たす有限個のベクトルが存在すること（基底の存在）
ii. 任意の部分空間に対して、基底をなすベクトルの個数が、基底の選び方によらず一定であること（次元の不変性）

基底の存在

基底の構成と存在を示すために、次の補題を用いる

ref: 行列と行列式の基礎 p98〜99
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p36〜37

⚓ 線型独立なベクトルの延長　V を K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間とする

このとき、V の線型独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ と、V に入らないベクトル $\boldsymbol{a}$ は線型独立である

証明

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線型従属であるとする

すると、定理「線形結合によるベクトルの表現」より、$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表され、V に入り、矛盾する

よって、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は線型独立である　■

この定理は、ベクトルの集合が張る空間の記号を用いると、次のように簡潔にまとめられる

⚓ 線型独立なベクトルの延長　$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が線型独立であって、$\boldsymbol{v}_{k+1} \notin \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\}$

は線型独立である

K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間 V の線型独立なベクトルは、V の基底に拡張できる

⚓ **基底の存在**　K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間 V には基底が存在する

証明

$V \neq \{\mathbf{0}\}$ なので、V には少なくとも 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$ が存在する
定理「単一ベクトルの線型独立性と零ベクトル」より、$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は線型独立である

このとき、$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subset V$ であるが、もしも $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle = V$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は V の基底である

$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneq V$ ならば、$\boldsymbol{v}_2 \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ であるベクトルを V から選ぶことができる
補題「線型独立なベクトルの延長」より、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は線型独立である

このとき、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subset V$ であるが、もしも $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = V$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は V の基底である

$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subsetneq V$ ならば、$\boldsymbol{v}_3 \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であるベクトルを V から選ぶことができる
補題「線型独立なベクトルの延長」より、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は線型独立である

以下同様に続けると、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle = V$ となるまで、V に属するベクトルを選び続けることができる

ここで線型独立なベクトルを繰り返し選ぶ操作が無限に続かないこと（有限値 k が存在すること）は、有限従属性定理により、K^n の中には n 個を超える線型独立なベクトルの集合は存在しないことから保証される ■

基底の存在証明で行った基底の構成をさらに続けることで、次の定理が得られる

ref: 行列と行列式の基礎 p103

基底の延長 V を n 次元の線形空間とし、線型独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ が与えられたとする
このとき、$(n-m)$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ を追加して、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底になるようにできる

証明

基底の存在の証明において、線型独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ が得られたところからスタートし、同様の手続きを繰り返せばよい
■

次元の不変性

ref: 行列と行列式の基礎 p99
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p37〜38

次元の不変性　K^n の部分空間 V の基底をなすベクトルの個数（次元）は一定である

つまり、$\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_k\}$ と $\{\boldsymbol{u}_1, ..., \boldsymbol{u}_l\}$ がともに V の基底ならば、$k = l$ である

証明

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_l \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k \rangle$ であり、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, ..., \boldsymbol{u}_l$ は線型独立であるから、有限従属性定理の抽象版より、$l \leq k$ である

同様にして $k \leq l$ も成り立つので、$k = l$ である　■

線型独立なベクトルと次元

ref: 行列と行列式の基礎 p100

線形独立なベクトルの最大個数と空間の次元　線形空間 V 中の線型独立なベクトルの最大個数は $\dim V$ と等しい

証明

V の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k\}$ とすると、V には k 個の線型独立なベクトルが存在する

また、$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k \rangle$ であるため、有限従属性定理の抽象版より、V 中の線型独立なベクトルの個数は k を超えることはない

つまり、k は V に含まれる線型独立なベクトルの最大個数である

■

⚓ 線形空間を生成するベクトルの最小個数と次元　線形空間 V を張るベクトルの最小個数は $\dim V$ と等しい

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p100 問 3.3]

次元による部分空間の比較

ref: 行列と行列式の基礎 p102
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p41

⚓ 次元による部分空間の比較　K^n の部分空間 V, W について、$V \subseteq W$ ならば、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立するのは、$V = W$ のときに限る

証明

$V \subseteq W$ であることから、基底の延長により、V の基底を延長して W の基底にできるので、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

このとき、$\dim V = \dim W$ であることは、V の基底をこれ以上

延長しなくても W の基底にできることを意味する

つまり、$\dim V = \dim W$ ならば、V と W は同じ基底で張られる空間であるので、$V = W$ が成り立つ ■

核空間・像空間の次元

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p83～84

線形写像の単射性と核の次元　線形写像 $f: V \to W$ について、

$$f \text{ が単射} \iff \dim \operatorname{Ker}(f) = 0$$

証明

線形写像の単射性と核の関係より、f が単射であることは次と同値である

$$\operatorname{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

次元の定義より、$\{\mathbf{0}\}$ の次元は 0 であるので、

$$\dim \operatorname{Ker}(f) = 0$$

が成り立つ ■

線形写像の全射性と像の次元　線形写像 $f: V \to W$ について、

$$f \text{ が全射} \iff \dim \operatorname{Im}(f) = \dim W$$

証明

像空間と全射性の関係より、f が全射であることは、

$$\mathrm{Im}(f) = W$$

と同値である

[Todo 2: ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p83]

線形写像の核空間と基底

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解の自由度を d とすると、基本解 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d \in \mathrm{Ker}(A)$ が存在して、任意の $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(A)$ に対して

ref: 行列と行列式の基礎 p94〜95

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_d\boldsymbol{u}_d$$

を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$ が一意的に定まる

このことは、基底の言葉で言い換えると次のようになる

斉次形方程式の基本解と核空間の基底　A を $m \times n$ 型行列とし、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ を $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の基本解とするとき、$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ は $\mathrm{Ker}(A)$ の基底である

Zebra Notes

Type	Number
todo	2