




ユニタリ変換

体 \mathbb{C}^n 上の計量空間において、内積を保つ線形変換を **ユニタリ変換** という


ref: 行列と行列式の基礎 p77~82

 **ユニタリ変換** 体 \mathbb{C}^n 上の計量空間 V における線形変換 f が **ユニタリ変換** であるとは、任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対し、

$$(f(\mathbf{u}), f(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

が成り立つことである

ユニタリ変換は、ベクトルの長さを変えない変換でもある

 **ユニタリ変換とノルム保存性** 計量空間 V における線形変換を f がユニタリ変換であることと、任意の $\mathbf{v} \in V$ に対し

$$\|f(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$$

が成り立つことは同値である

証明


f がユニタリ変換 $\implies f$ はノルムを保つ

ユニタリ変換の定義より、

$$(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v})) = (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{v}\|^2$$

ここで、 $\|f(\mathbf{v})\| = \sqrt{(f(\mathbf{v}), f(\mathbf{v}))}$ であるから、

$$\|f(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$$

が成り立つ 

f はノルムを保つ $\implies f$ はユニタリ変換

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し、

$$\|f(\boldsymbol{v})\| = \|\boldsymbol{v}\|$$

が成り立つというのが仮定である

そこで、 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ とすると、

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|$$

両辺を二乗して、

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|^2$$

このとき、左辺は次のように展開できる

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 &= (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\ &= (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2\end{aligned}$$

右辺も同様に、

$$\begin{aligned}\|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|^2 \\ = \|f(\boldsymbol{a})\|^2 + 2(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b})) + \|f(\boldsymbol{b})\|^2\end{aligned}$$

さて、仮定より、 $\|f(\boldsymbol{a})\| = \|\boldsymbol{a}\|$ と $\|f(\boldsymbol{b})\| = \|\boldsymbol{b}\|$ が成り立つことから、

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|f(\boldsymbol{a}) + f(\boldsymbol{b})\|^2$$

という等式の両辺を展開した結果、残る項は

$$2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 2(f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}))$$

だけとなる

したがって、

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (f(\boldsymbol{a}), f(\boldsymbol{b}))$$

が成り立つので、 f はユニタリ変換である ■