直和分解

ref: 行列と行列式の基礎 p113〜114
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p233〜235

直和分解 線形空間 V の部分集合 W_1, W_2 に対して、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ によって

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$$

と一意的に表されるとき、V は W_1 と W_2 の**直和**である（**直和**に分解される）といい、

$$V = W_1 \oplus W_2$$

と書く

この定義は、次のように言い換えることができる

直和分解の同値条件 線形空間 V の部分集合 W_1, W_2 に対して $V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つことと、

i. $V = W_1 + W_2$
ii. $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$

の両方が成り立つことは同値である

証明

(i), (ii) $\Longrightarrow V = W_1 \oplus W_2$

$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1' \in W_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2' \in W_2$ とする

仮定 (i) と和空間の定義より、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_1' + \boldsymbol{w}_2'$$

この等式は、移項によって次のように変形できる

$$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' = \boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2$$

部分空間は和に閉じているため、左辺は W_1 に、右辺は W_2 に属する

よって、このベクトルは $W_1 \cap W_2$ に属する

仮定 (ii) より、$W_1 \cap W_2$ の元は零ベクトルであるので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_1' &= \mathbf{0} \\ \boldsymbol{w}_2' - \boldsymbol{w}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

したがって、

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_1', \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}_2'$$

となり、$\boldsymbol{v}$ の表現の一意性が示された ■

$V = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow$ (i), (ii)

和空間の定義をふまえると、(i) は直和分解の定義に含まれる

(ii) を示すため、$\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ とする

$\boldsymbol{v}$ は零ベクトルを用いて、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v}$$

と表せるが、直和分解の定義より、$\boldsymbol{v}$ の表現は一意的であるので、

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

を得る

よって、$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ が成り立つ ■