読書ノート：地力をつける微分積分

tomixy

2025 年 3 月 12 日

目次

微分と積分は何を捉えているか

微分は、「微小な変化でどのような変動が起こるか」を分析する数学の手法

数学では、極限という概念を用いて「無限小レベルの変化」として厳密に微分を定義する

＊ ＊ ＊

現実の事象を解明しようとすると、その事象に関わる要因は 1 つではなく、複数の要因が絡み合っていることが多い

複数の要因が絡み合っている状況を数量的に表すのが多変数関数

＊ ＊ ＊

変数が 2 個以上あると、「変数を少し動かす」といってもいろいろな動かし方がある

その動かし方を精密に扱うのが偏微分

＊ ＊ ＊

積分は「そこにある量を算出する道具」

「そこにある量」を小分けして合算して求める考え方（区分求積法）が積分論の主軸

本書の内容

数学では、相対的に無視できるものを切り捨てるという操作を論理的に積み重ねて、無限という概念に向き合う

＊ ＊ ＊

近似をしたつもりなのに大きな誤差が生じているとすると、その兆候はどこかに現れているはず

局所近似の誤差の兆候は高階の微分に現れる

これを逆に突き詰めるとテイラー展開という概念に到達する

大きな数を感覚的に捉える方法

分子も分母も無限大に近づく中で、分母に比べて分子を無視できるという等式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3} = 0$$

分子を 1 辺 n の正方形の面積（2 次元）、分母を 1 辺 n の立方体の体積（3 次元）とみなせば、「次数が高くなると巨大な数が現れやすい」という性質の 1 つの姿と思うこともできる

収束や発散の速さ

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ という数列があったときに、その初めの N 個の和を次のように表す

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N$$

2 個や 3 個の和なら $a_1 + a_2$ や $a_1 + a_2 + a_3$ と書けるが、たとえば N が 10^{16} というようなときには、すべての項を書き出せないため、このように記法を決めておく

＊ ＊ ＊

等比級数 A_N の収束の速さを考える

$$A_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^N}$$

この和に $\frac{1}{2^N}$ を足すと、1 になる

たとえば、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

なので、N 個の総和は、

$$1 - \frac{1}{2^N}$$

$\frac{1}{2^N}$ がどれくらい小さいかがわかれば、A_N の和が 1 にどれくらい近いかがわかる

では、$N = 10^{16}$ のとき、$\frac{1}{2^N}$ はどれくらいの大きさか？

まず、$N = 10$ の場合を考えると、

$$2^{10} = 1024 \fallingdotseq 1000$$

より、

$$\frac{1}{2^{10}} \fallingdotseq 0.001$$
$$1 - \frac{1}{2^{10}} \fallingdotseq 0.999$$

というふうに、小数点以下に 9 が 3 つ連続して並ぶ

$N = 10^2$ のときは、

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = (1024)^{10} \fallingdotseq (1000)^{10} = 10^{30}$$

から、9 がおよそ 30 個並ぶ（$1024 > 1000$ なので、「少なくとも」30 個並ぶ）

$N = 10^{16}$ のときは、

$$2^{10^{16}} = (2^{10})^{10^{15}} \fallingdotseq 10^{30 \times 10^{15}}$$

から、$3 \times 10^{15} = 3000$ 兆以上の 9 が並ぶ

このように、N を大きくしていくと、2^N はきわめて 1 に近い数になる

$N \to \infty$ としたときに、等比級数 A_N は 1 に収束する

誤差評価

測定や推定で何らかの値を得たとき、**誤差**は次のように定義される

$$誤差 = \left|測定値 \text{ or } 推定値 - 真の値\right|$$

誤差が論理的に小さいと言えれば、その測定値や推定値は一定の安心感を持って**近似値**として使うことができる

誤差がある数 ε より小さくなるという不等式

$$\left|測定値 \text{ or } 推定値 - 真の値\right| < \varepsilon$$

を**誤差評価**という

N が 10^{16} のとき、右辺は小数点以下に少なくとも 3×10^{15} 個の 0 が並ぶ

$$|A_N - 1| < 0.00\ldots0\ldots$$

この不等式は、$N = 10^{16}$ のときの A_N が、極限値である 1 をどの程度の精度で近似しているかを表す誤差評価と考えることもでき、この誤差評価は、相対的な収束の速さを数値的に表すものでもある（右辺の小数点以下に並ぶ 0 の数で速さがわかる）

関数の全体を見る

$y = x^4$ と $y = x^2$ の差異を考えてみる

x が大きい場合の例として、たとえば $x = 10$ のときは、

$$y = x^4 = 10^4 = 10000$$
$$y = x^2 = 10^2 = 100$$

x をもっと大きくすると、x^2 も x^4 も大きな数になるが、この 2 つだけを比較すると、x^4 の方がはる

かに大きいので x^2 は相対的に無視できそうだといえる

x が 0 に近い場合の例として、たとえば $x = 0.1$ のときは、

$$y = x^4 = 0.1^4 = 0.0001$$
$$y = x^2 = 0.1^2 = 0.01$$

$x = 0$ の近くでグラフを書くと、$y = x^4$ の方は x 軸すれすれになる

このように、x が 0 に近いときは x^2 も x^4 も小さな数だが、この 2 つだけを比較すると、x^2 の方が相対的に大きいので x^4 は無視できるくらい小さそうだといえる

3 つ以上のものを比較するときも、圧倒的に大きいものが 1 つだけあれば残りを無視しようという考え方ができる

微分や積分における極限にも、この考え方が用いられる

＊　＊　＊

厳密な論理体系である数学では、どういう基準で何を無視するかというルールを明確に決めてから議論を積み重ねることになる

その一方で、論理的な証明を導く際には、効くものと無視できるものを区別するという直観が役立つ

二項係数の 4 つの側面

パスカルの三角形を帰納的に定義する

- 1 段目（最上段）は 1 とする
- n 段目に n 個の数を定めたとして、$n+1$ 段目は線で繋がっているすぐ上の数を足し合わせて定めることにする

このとき、次の 4 つの数が一致する

1. $(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-k}b^k$ の係数
2. パスカルの三角形の $n+1$ 段目、左から $k+1$ 番目の数
3. パスカルの三角形で $n+1$ 段目、左から $k+1$ 番目の地点から最上段に登る最短経路の個数
4. ${}_nC_k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

＊　＊　＊

1 と 4 の一致　次のように $(a+b)^n$ を n 個の積を並べたものとして表すことで示す

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)}_{n}$$

この展開式において、たとえば $a^{n-k}b^k$ という項がどこから生じるかを考える

右辺を展開するとき、$a+b$ のそれぞれの項で a か b の 2 通りの選択肢があるため、展開すると全部で 2^n 通りの単項式の和になる

展開したときに $a^{n-k}b^k$ という項に寄与するのは、n 個の $(a+b)$ の中から b を k 個選ぶ場合の数なので、${}_nC_k$ 通りある

こうして、${}_nC_k$ 通りの $a^{n-k}b^k$ が現れることから、$a^{n-k}b^k$ の係数は ${}_nC_k$ となる

＊　＊　＊

2 と 3 の一致　ある地点から最上段に行くには、その地点の左上か右上に移動するしかない

そのため、この地点から最上段に登る最短経路の個数は、そのすぐ左上の地点を経由して最上段に登る最短経路の個数と、そのすぐ右上の地点を経由して最上段に登る最短経路の個数の和になる（和の法則）

これはまさにパスカルの三角形を定義したときのルールであり、パスカルの三角形の $n+1$ 段目、左から $k+1$ 番目の数は、n 段目かつ左から k 番目の数と、n 段目かつ左から $k+1$ 番目の数の和になる

＊　＊　＊

1 と 2 の一致　次のように書くことで見えてくる

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= (a+b)^{n-1} \times (a+b) \\ &= (a+b)^{n-1} \times a + (a+b)^{n-1} \times b\end{aligned}$$

これは、$(a+b)^{n-1}$ の各項に、a と b をそれぞれかけて足し合わせる計算になっている

$(a+b)^{n-1}$ を展開すると、それぞれの項は、a を $(n-1)-k$ 回、b を k 回かけた形になる

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k \cdot a^{n-k-1}b^k$$

$(a+b)^{n-1}$ の各項に a をかけると、a の指数が 1 増えるので、a^{n-k} の項が現れる

$$\begin{aligned}(a+b)^{n-1} \times a &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k a^{n-k}b^k \\ &= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-1}C_{k-1} a^{n-k}b^k\end{aligned}$$

同様に、$(a+b)^{n-1}$ の各項に b をかけると、b の指数が 1 増えるので、b^{k+1} の項が現れる

$$\begin{aligned}(a+b)^{n-1} \times b &= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k a^{n-k-1}b^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}C_k a^{n-k}b^k + b^n\end{aligned}$$

よって、これらを足し合わせると、

$$(a+b)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left({}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k\right) a^{n-k}b^k + b^n$$

${}_{n-1}C_{k-1} + {}_{n-1}C_k$ の部分は、それぞれ

- ${}_{n-1}C_{k-1}$ はパスカルの三角形の n 段目、左から k 番目の数
- ${}_{n-1}C_k$ はパスカルの三角形の n 段目、左から $k+1$ 番目の数

を表すので、これらの和（$a^{n-k}b^k$ の係数）がパスカルの三角形の $n+1$ 段目、左から $k+1$ 番目の数になることがいえる

（注：段数は 1 から始まるので、$n+1$ 段目が $(a+b)^n$ の展開に対応する。同様に、左から数える番号も 1 始まりなので、$k+1$ 番目が $a^{n-k}b^k$ の係数に対応する）

＊　＊　＊

一般の展開公式　1 と 4 の一致から、一般の展開公式は次のように書ける

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k}b^k$$

この展開公式を二項展開という

そして、$a^{n-k}b^k$ の係数

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

は二項係数という

＊　＊　＊

二項展開において、$a=1$ の場合を考えると、

$$(1+b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2!}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}b^3 + \cdots$$

ここで、二項係数はいつでも正なので、$b>0$ ならば、上の二項展開に現れる項はすべて正となる

特に、$n \geq 2$ ならば、次の不等式が成り立つ

$$(1+b)^n > 1 + nb$$

100! と 10^{100} はどちらが大きいか？

$n=100$ のとき、10^n はとても大きい数だが、$n!$ と比べたら取るに足らないことを示す（$n!$ を概算するスターリングの公式は使わずに）

*　*　*

100! において、10 から先をすべて 10 に置き換える

10 から 100 までの数は 91 個あるので、

$$100! > 10^{91}$$

がわかる

より精密に評価するために、10 から 99 までの 90 個の数の積を 10 個ずつまとめてみると、

$$\begin{gathered} 10^{10} < 10\cdot 11\cdots 19 < 10^{20} \\ 10^{20} < 20\cdot 21\cdots 29 < 10^{30} \\ \vdots \\ 10^{90} < 90\cdot 91\cdots 99 < 10^{100} \end{gathered}$$

さらに、これを縦にかけ合わせて、

$$10^{10}\cdots 90^{10} < 10\cdots 99 < 20^{10}\cdots 100^{10}$$

左辺は、

$$\begin{aligned} 10^{10}\cdots 90^{10} &= (10\cdots 90)^{10} \\ &= ((10\cdot 1)\cdot(10\cdot 2)\cdot\cdots\cdot(10\cdot 9))^{10} \\ &= \left(10^9\cdot(1\cdot 2\cdot\cdots\cdot 9)\right)^{10} \\ &= \left(10^9\cdot 9!\right)^{10} \\ &= 10^{90}\cdot(9!)^{10} \end{aligned}$$

右辺は、

$$\begin{aligned} 20^{10}\cdots 100^{10} &= (20\cdots 100)^{10} \\ &= ((10\cdot 2)\cdot(10\cdot 3)\cdots(10\cdot 10))^{10} \\ &= \left(10^9\cdot(1\cdot 2\cdots 9\cdot 10)\right)^{10} \\ &= \left(10^9\cdot 9!\cdot 10\right)^{10} \\ &= \left(10^{10}\cdot 9!\right)^{10} \\ &= 10^{100}\cdot(9!)^{10} \end{aligned}$$

なので、

$$10^{90}\cdot(9!)^{10} < 10\cdots 99 < 10^{100}\cdot(9!)^{10}$$

ここで、

$$100! = 9!\cdot 10\cdots 99\cdot 100$$

と表し、後回しにしていた $9!\cdot 100$ を不等式の各項にかけると、

$$10^{90}\cdot(9!)^{10}\cdot 10^2\cdot 9! < 100! < 10^{100}\cdot(9!)^{10}\cdot 10^2\cdot 9!$$

$$10^{92}\cdot(9!)^{11} < 100! < 10^{102}\cdot(9!)^{11}$$

ところで、$9! = 362880 \fallingdotseq 3.6\times 10^5$ から、

$$3\times 10^5 < 9! < 4\times 10^5$$

と粗く評価しておき、この式の両辺を 11 乗すると、

$$3^{11}\times 10^{55} < (9!)^{11} < 4^{11}\times 10^{55}$$

ここで、次のように考えると、$10^5 < 3^{11}$ という大まかな不等式が成り立つ

$$\begin{aligned} 10^5 &= 3^5\times\frac{10^5}{3^5} \\ &= 3^5\times\left(\frac{10}{3}\right)^5 \\ &\fallingdotseq 3^5\times(3.3)^5 \\ &= 3^5\times 3^{0.3\times 5} \\ &= 3^{10}\times 3^{0.3} \\ &< 3^{11} \end{aligned}$$

また、次のように考えることで、$4^{11} < 10^7$ という大まかな不等式も成り立つ

$$\begin{aligned} 4^{11} &= 2^{22} \\ &= 2^{10} \times 2^{10} \times 2^2 \\ &= 1024^2 \times 4 \\ &= \left(1000 \times \frac{1024}{1000}\right)^2 \times 4 \\ &= \left(10^3 \times 1.024\right)^2 \times 4 \\ &= 10^6 \times 1.024^2 \times 4 \\ &< 10^6 \times 1.1^2 \times 4 \\ &< 10^7 \end{aligned}$$

これらを使うと、$(9!)^{11}$ に関する不等式の左辺と右辺は、

$$\begin{aligned} 3^{11} \times 10^{55} &< (9!)^{11} < 4^{11} \times 10^{55} \\ 10^5 \times 10^{55} &< (9!)^{11} < 10^7 \times 10^{55} \\ 10^{60} &< (9!)^{11} < 10^{62} \end{aligned}$$

したがって、$100!$ に関する不等式の左辺と右辺は、

$$\begin{aligned} 10^{92} \times (9!)^{11} &< 100! < 10^{102} \times (9!)^{11} \\ 10^{92} \times 10^{60} &< 100! < 10^{102} \times 10^{62} \\ 10^{152} &< 100! < 10^{164} \end{aligned}$$

これで、大まかな手計算で $100!$ の大きさを評価できた

特に、$10^{152} < 100!$ から、$100!$ が 10^{100} よりもはるかに大きいことがわかる

$\cos x$ のテイラー展開

単項式におまじないの係数をつけて足したり引いたりした関数を考える

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots$$

この無限級数を途中で打ち切らずに、ずっと続けることを考えてみる

x を固定しておくと、n が大きいとき、分子のべき乗 x^n と分母の階乗 $n!$ では $n!$ の方が圧倒的に大きくなり、この無限級数は収束する

この無限級数をプロットしたグラフは、$|x|$ が小さいところでは $y = \cos x$ のグラフとほぼ重なり合う

原点から少し離れたところでも、多項式の項の個数を増やすとよく近似できる

このように、調べたい関数を多項式で近似し、局所的に近似の精度を上げるときは多項式の項を増やすという形で定理を形式化したものがテイラー展開である

関数の局所的な様子を見る

簡単な関数のグラフは拡大していくと急に様子が変わったりせず、むしろ、だんだん安定したものになると考えられる

局所的な部分を拡大すると安定した姿になるとき、その様子を数学的にとらえる概念が微分

ものによっては、拡大するとどんどん見え方が変わるものもある

拡大を何度繰り返しても同じ複雑さを保つ数学的構造（フラクタル）も自然界には現れる

拡大すれば何でも簡単になるわけではないが、微分では、拡大したとき安定していく「素直」なものを主な対象とする

つまり、微分は局所を分析するのに強力な手法だが、万能ではない

微分の定義

関数は変化の法則性をとらえる数学的言語

数 x に対して数 $f(x)$ が定まるとき、$f(x)$ を変数 x の関数という

＊　＊　＊

座標 $(x, f(x))$ を xy 平面でプロットした曲線を関数 $f(x)$ のグラフという

これは、x 座標の点 x における高さが $f(x)$ となる曲線

＊　＊　＊

この曲線の局所的な様子を見るのに、変数 x を $x+h$ に動かしてみる

そうすると、関数の値は $f(x)$ から $f(x+h)$ に変わる

「素直」な関数のグラフをどんどん拡大すると、拡大部分はだんだん直線のように見えるだろう、と考えられる

h が小さいとき、斜めの曲線がほぼ一定の傾きの直線に見えるというのは、関数の値の変化量 $f(x+h) - f(x)$ が h にほぼ正比例するということ

式で表すと、x から $x+h$ の区間のグラフを直線とみなしたときの勾配

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

は、h が 0 に近づくとある 1 つの数に近づく、すなわち、収束するはずである

＊　＊　＊

■**定義**　h を 0 に近づけると、$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ がある数に収束するとき、$f(x)$ は x において微分可能であるという

このとき、極限値を

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

と書き、$f(x)$ の微分または微分係数（微係数）という

＊　＊　＊

定数関数の微分　「収束する」ことを「限りなく近づく」と言うこともある

日常的な言葉だと「限りなく近づく」には「その値に達していない」というニュアンスを感じるが、数学では、最初からずっと同じ値のときも「収束する」場合に含める

$f(x)$ が x の値によらないとき、$f(x)$ を定数関数という

このときは h がどんな数でも $f(x+h) - f(x) = 0$ となるので、定数関数の微分は 0 である

＊　＊　＊

微分係数が定まらない例

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が収束しない状況の例として、$y = |x|$ を考える

$f(x) = |x|$ の場合、$x = 0$ で

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

を計算しようとすると、

$h > 0$ のときは

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$h < 0$ のときは

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

となり、h を正から 0 に近づけるときと、負から 0 に近づけるときとで、$\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ の極限の値が異なってしまうので、微分係数 $f'(0)$ が定まらない

＊　＊　＊

■**定理**　$a < x < b$ で定義された、微分可能な関数 $f(x)$ が $x = c$ で最大値または最小値をとるならば、$f'(c) = 0$ である

＊　＊　＊

$f'(c)$ が最大値となる場合の証明

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

において、$f(c)$ が最大値であることから、

$$\begin{aligned} f(c) &\geq f(c+h) \\ f(c+h) - f(c) &\leq 0 \end{aligned}$$

したがって、$h > 0$ のときは、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

となり、h を正の側から 0 に近づけた極限値として $f'(c) \leq 0$ が成り立つ

一方、$h < 0$ のときは、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

となり、h を負の側から 0 に近づけた極限値として $f'(c) \geq 0$ が成り立つ

$f'(c) \leq 0$ かつ $f'(c) \geq 0$ なので、$f'(c) = 0$ が導かれた　□

＊　＊　＊

$f'(c)$ が最小値となる場合の証明　$f'(c)$ が最大値となる場合と同様に示される　□

導関数

x を止めて考えると、$f(x)$ の微分は 1 つの数

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

また別の視点として、

- x に数を与えると、何か 1 個、数が出てくる
- また別の x に対しては、別の数が出る

そう思うと、x から $\frac{df}{dx}(x)$ への対応は 1 つの関数を与えていると考えることができる

このように、$\frac{df}{dx}(x)$ を x の関数と見たとき、それを $f(x)$ の**導関数**という

＊　＊　＊

「微分」と「導関数」は視点の違いで使い分けられる言葉

- x を止めて $\frac{df}{dx}(x)$ という 1 個の数（微分係数）に注目するのか
- x を変数と思って $\frac{df}{dx}(x)$ を関数とみなす（導関数として扱う）のか

後者の立場に立って、$\frac{df}{dx}(x)$ を関数だと思うと、さらに微分を考えることができる

＊　＊　＊

微分できないからといってそこで終わりではない

たとえば、関数概念を拡張した**超関数**の理論は、極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

が存在しない場合にも、より広く「微分」という概念をとらえる枠組みを与えるもの

単項式 x^n の微分

$f(x+h) = (x+h)^n$ の二項展開

$$f(x+h) = x^n + nx^{n-1}h + {}_nC_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

を用いると、

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= (x+h)^n - x^n \\
&= x^n + nx^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 \\
&\qquad + \cdots + h^n - x^n \\
&= nx^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + h^{n-1}
\end{aligned}
$$

上の式変形で、最初の x^n は最後の $-x^n$ と相殺されている

両辺を h で割ると、

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{nx^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + h^{n-1}}{h} \\
&= nx^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1}
\end{aligned}
$$

h が 0 に近づくと、

- h に無関係な最初の項 nx^{n-1} はそのまま残る
- 次の h の項は 0 に近づく
- その後の $h^2, h^3, \cdots, h^{n-1}$ の項はさらに速く 0 に近づく

というわけで、h を 0 に近づけると nx^{n-1} に収束し、

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

が成り立つ

微分しても変わらない不思議な関数

この式をぼんやりと眺めていると、

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

- 左辺における $\dfrac{d}{dx}$ という記号に呼応して、右辺では n が飛び出すというふうにも見える
- 左辺では x の n 乗だったものが、右辺では $n-1$ 乗になっている

＊　＊　＊

x^n を n の階乗で割った $\dfrac{x^n}{n!}$ という関数を考える

この関数を微分すると、$\dfrac{1}{n!}$ は微分の外に出せる

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}x^n\right) = \frac{nx^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

この式では、左辺と右辺で似た形が現れている

文字は左辺の n から右辺の $n-1$ に化けるが、形は同じ

n に具体的な数を入れて確かめてみる

- $n=0$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^0}{0!}\right) = 0$
- $n=1$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^1}{1!}\right) = \dfrac{x^0}{0!}$
- $n=2$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{2!}\right) = \dfrac{x^1}{1!}$
- $n=3$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^3}{3!}\right) = \dfrac{x^2}{2!}$
- $n=4$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^4}{4!}\right) = \dfrac{x^3}{3!}$
- $n=5$ のとき、$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^5}{5!}\right) = \dfrac{x^4}{4!}$

微分すると斜め右下にまったく同じ形の式が現れるというパターンが続く

上のリストでは $n=5$ で止めているが、たとえば $n=100$ までいっても同じパターンが続く

そこで、$\dfrac{x^n}{n!}$ を $n=0$ から順に全部足すことを考え、それを $f(x)$ とおく

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
\frac{d}{dx}f(x) &= 0 + \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots
\end{aligned}
$$

下の式は 1 個右にずれているので、途中で打ち切れば 1 個足りなくなるが、無限に足すと、上の式と下の式はぴったり一致している

したがって、

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$$

が成り立つことがわかる

つまり、関数 $f(x)$ は微分したものが自分自身になっている！

いま無限級数として定義した関数 $f(x)$ を何通りかの記法で表しておく

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ &= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \end{aligned}$$

後にこの関数は、指数関数として e^x と書くことになる

ネイピアの数

次の関数に $x = 0$ と $x = 1$ を代入してみる

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

＊　＊　＊

$x = 0$ を代入すると　最初の 1 だけが残り、

$$f(0) = 1$$

＊　＊　＊

$x = 1$ を代入すると　1 を何乗しても 1 であるから、

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

この $f(1)$ の数値はどのくらいになるだろうか？

1. 第 1 項は 1
2. 第 2 項も 1
3. 第 3 項は 0.5
4. 次は前の項を 3 で割るわけだから 0.166...
5. 次はさらに 4 で割るから 0.041...
6. 次はさらにそれを 5 で割って 0.008...

ここまでの 6 項の和で 2.716... となる

加える項は急速に 0 に近づく

項が 100 個くらいまで進むと、次に加える $\dfrac{1}{100!}$ は小数点以下に 0 が 150 個以上並ぶくらい小さな数になる（$10^{152} < 100! < 10^{164}$ という不等式より）

このように、無限級数 $f(1)$ は収束がとても速く、

$$f(1) = 2.71828\ldots$$

という数になる

＊　＊　＊

■定理

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

証明のスケッチ　二項展開を用いて、

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

ここで、$k = 2$ 以降の各項は次のように展開する

$$\begin{aligned} \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} &= \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{1}{n^3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} \\ &= \frac{1}{3!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \\ &= \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 &+ \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \end{aligned}$$

n が大きくなると $\dfrac{1}{n}$ は 0 に近づくので、$1-\dfrac{1}{n}$ は 1 に近づき、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$$

となる　□

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ の収束

n を大きくすると $n!$ は急速に大きくなるので、$x=1$ のときには無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ が収束することは納得できる

では、$x>1$ のときもこの無限級数は収束するといえるのだろうか？

＊　＊　＊

そもそも数列の各項が 0 に近づかないと、その数列の総和は収束しないため、まず次の問いを考える（以下では x を固定しておく）

■問題　n をどんどん大きくしたとき、$\dfrac{x^n}{n!}$ は 0 に近づくか？

この問いは、x^n と $n!$ の大きさを比べようという問題である

たとえば $n=100$ とすると、実は $100!$ の方が 10^{100} よりも圧倒的に大きくなることをすでに示している

$n=100$ に限らず、「x を止めたとき、x^n と $n!$ の比である $\dfrac{x^n}{n!}$ は、n を大きくすると分母が圧倒的に大きくなり、比は 0 に近づく」ことが同様の議論で示される

＊　＊　＊

無限級数の各項が 0 に近づいたとしても、「塵も積もれば山となる」（足し合わせると発散する）ことも起こり得る

では、次の問題はどうだろうか？

■問題　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ は収束するか？

実はこの無限級数は、等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ よりももっと速く収束する

証明のスケッチ

x は固定して、n に関する和を考える

整数 n が十分に大きければ、

$$\frac{|x|^n}{n!}<\frac{1}{2^n}$$

これは、「無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ が等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ より速く収束する」という 1 つの表現

正確には、$8x^2+1$ より大きいすべての自然数 n に対して、

$$\frac{|x|^n}{n!}<\frac{1}{2^n}$$

が成り立つ

このことがいえれば、$8x^2$ より大きい整数 N に対して、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ は次のように等比級数

$\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ より速く収束する

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n} \\ &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^N}\end{aligned}$$

上の計算のうち、$\left|\displaystyle\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n}$ では、次のような三角不等式を利用している

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_m| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|$$
$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

そこで、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ を、$n = N$ までの有限和と、$n = N+1$ からの無限級数に分けて考える

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

このように考えると、左辺の無限級数が、右辺の有限和に収束することがわかる

不等式 $\dfrac{|x|^n}{n!} < \dfrac{1}{2^n}$ の証明

一般に $A \leq 0$ のとき、$n > 2A^2 + 1$ ならば、

$$A^n < n!$$

という不等式が成り立つことを示す

$A = 2|x|$ の場合 $(2|x|)^n < n!$ が、$\dfrac{|x|^n}{n!} < \dfrac{1}{2^n}$ となる

n が偶数（$= 2m$）の場合、$n > 2A^2$ の n を $2m$ に置き換えることで、$m > A^2$ となり、

$$\begin{aligned} n! = (2m)! &= 2m \cdot (2m-1) \cdots 2 \cdot 1 \\ &> m \cdot m \cdots m = m^m = m^{\frac{n}{2}} \\ &> \left(A^2\right)^{\frac{n}{2}} = A^n \end{aligned}$$

が成り立つ

n が奇数の場合、$n-1$ は偶数なので、偶数の場合の結果から $(n-1)! > A^{n-1}$ がいえる

さらに、$n > 2A^2 + 1 > A$ なので、

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1)! \\ &> n \cdot A^{n-1} \\ &> A \cdot A^{n-1} = A^n \end{aligned}$$

となり、いずれの場合も $A^n < n!$ が成り立つ　□

関数等式

無限級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ に $x + y$ を代入し、$f(x+y)$ を計算してみる

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \end{aligned}$$

＊　＊　＊

2 重和　何かを算出したいとき、一旦小計を取ることがある

小計を取ってから、小計を足し合わせて総計を取るのが **2 重和**

小計として何を選ぶかには自由度がある

たとえば、1 ヶ月の支出を計算するときに、

- 食費や本代などの品目ごとの小計をを取り、それを足し合わせる
- 日々の支出を計算し、それを足し合わせる

どちらの方法を選んでも、まったく同じ総額が得られる
一般の 2 重和の計算においても、何を小計として選んでも総和は同じになる

多重積分における累次積分の計算法は、2 重和 $\sum\sum$ を一般化したものになっている

＊　＊　＊

$f(x+y)$ で現れる 2 重和は、そもそも全体として何を算出しようとしているのか？

a, b という自然数（0 を含む）を固定して、$x^a y^b$ という項が $f(x+y)$ の 2 重和の中にどのように出現しているのか探す

$$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)$$

この式において、

- $x^k y^{n-k}$ が $x^a y^b$ となるのは、$a = k, b = n-k$ の場合
- (k, n) の組は a, b によって $k = a, n = a+b$ とただ 1 つ定まる
- このとき $0 \leq k \leq n$ を満たしている（$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$ より）

まとめると、$(a, b) = (k, n-k)$ すなわち $(k, n) = (a, a+b)$ という等式の下で、組 (a, b) と組 (k, n) が 1 対 1 に対応している

そのため、$x^a y^b$ は、$f(x+y)$ の 2 重和の中で、

$$\frac{x^a}{a!}\cdot\frac{y^b}{b!} = \frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

という形で現れることがわかる

また、

- $a = 0, 1, 2, \ldots$ かつ $b = 0, 1, 2, \ldots$
- $n = 0, 1, 2, \ldots$ かつ $0 \leq k \leq n$

という数の範囲の条件も、1 対 1 に対応している

このことから、$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}$ を $\displaystyle\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}$ に書き換えることができて、

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\ &= \sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{x^a}{a!}\frac{y^b}{b!} \end{aligned}$$

が成り立つ
このように書き換えると、2 重和の計算の順序は入れ替えてもよいことがわかる

＊　＊　＊

ここでさらに、かけ算の分配法則（有限個の場合と同様に、和がきちんと収束すれば分配法則が成り立つ）を使って書き直すと、

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{x^a}{a!}\frac{y^b}{b!} \\ &= \left(\sum_{a=0}^{\infty}\frac{x^a}{a!}\right)\left(\sum_{b=0}^{\infty}\frac{y^b}{b!}\right) \end{aligned}$$

$f(x)$ の定義式 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ より、

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

$f(x+y)$ を二項展開を使って 2 重和として書き表し、「小計の取り方を変えても、結局は同じ総和が計算できる」という 2 重和のトリックを使うと、$f(x)f(y)$ という積になった

＊　＊　＊

■定理　無限級数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は次の関数等式を満たす

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

指数関数の拡張

先ほど示した関数等式は、指数法則ともいう

＊　＊　＊

$f(x)$ が無限級数として定義されていたことは一旦忘れて、

- $x > 0$ のとき $f(x) > 0$
- $f(x+y) = f(x)f(y)$
- $f(0) = 1, \quad f(1) = e$

という性質だけを用いて何が言えるか見ていく

＊　＊　＊

■定理　m を自然数とするとき、

$$f(mx) = f(x)^m$$

が成り立つ

$m = 0$ の場合　$f(0) = 1$ より、$f(0x) = f(0) = 1$

また、$f(x)^0 = 1$ より、$f(x)^0 = f(0x)$ が成り立つ

$m = 1$ の場合　$f(x) = f(x)^1$ が成り立つ

一般の場合の証明　$m+1$ の場合を考える

$y = mx$ とおくと、$x + y = (m+1)x$ となり、関数等式が使える

よって、$f(mx) = f(x)^m$ が m で成り立つなら、

$$\begin{aligned} f((m+1)x) &= f(mx)f(x) \\ &= f(x)^m f(x) \\ &= f(x)^{m+1} \end{aligned}$$

となり、$m+1$ でも成り立つ

これで、数学的帰納法によって、すべての自然数 m に対して $f(mx) = f(x)^m$ が成り立つことが示された　□

＊　＊　＊

$x = 1$ の場合　n が自然数のとき、

$$f(n) = f(1)^n = e^n$$

x が正の有理数の場合　x を正の有理数 $x = \dfrac{n}{m}$ とする

m は自然数なので、先ほど示した $f(x)^m = f(mx)$ が成り立ち、

$$f(x)^m = f(mx) = f\left(m \cdot \frac{n}{m}\right) = f(n)$$

さらに n も自然数なので、$f(n) = e^n$ となり、

$$f(x)^m = e^n$$

$f(x) > 0$ に注意して、両辺の m 乗根を取れば、

$$f(x) = e^{\frac{n}{m}} = e^x$$

となり、x が正の有理数のときも $f(x) = e^x$ が成り立つ

x が負の有理数の場合　関数等式より、

$$f(-x)f(x) = f(-x+x) = f(0) = 1$$

なので、$f(-x)$ は $f(x)$ の逆数となる

したがって、$f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ であり、$f(x) = e^x$ より、

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

x を $-x$ に置き換えても、$f(x) = e^x$ が成り立つことがわかる

＊　＊　＊

以上の議論から、x が有理数のとき $f(x) = e^x$ となることがわかった

x が有理数以外のときに、e^x はどうやって定義すればよいだろうか？

有理数での近似による定義　1 つの考え方として、どんな実数でも有理数を使っていくらでも近似できるということを用いる

たとえば、実数 x を小数点以下 3 桁まで表示して得られる数 y は、$y = \dfrac{\text{整数}}{1000}$ と表せるので有理数であり、しかも x との誤差が 10^{-3} 未満になる

e^x の値が変数 x について連続的に動くと考えると、実数 x を有理数 $\dfrac{n}{m}$ で近似すれば、$e^{\frac{n}{m}}$ は e^x を近似できるだろう

そこで、近似をどんどん精密にしたときの極限として e^x の値を定義する

べき級数展開による定義　x が有理数とは限らない場合に指数関数 e^x を定義する別の方法として、次のべき級数展開を用いるという考え方もある

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

x が有理数でなくても、右辺の無限級数で定義した関数を e^x と表記しよう、という発想

べき乗という 1 つの観点にこだわっていると、x が複素数の場合に e の x 乗が何を意味するのかは、哲学的な問題となってしまう

無限級数であれば、x が複素数であっても意味を持つ

x が複素数の場合も含めて、無限級数で指数関数 e^x を定義しておくと、指数関数と三角関数も結びつき、さらに世界が拡がる

位置の変化で微分を感じる

「傾き」としての微分は歩いているときにも感じることができる

まっすぐな坂道があって、坂道の出発点から水平方向に x だけ進んだ地点の標高が $f(x)$ だとする

標高 $f(x)$ は x の関数だと思うことができ、坂道を真横から見ると、$y = f(x)$ のグラフとみなせる

$f(x+h) - f(x)$ は地点 x から水平に h だけ進んだときの標高の差となるので、$\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ はこの地点のおおよその勾配となる

一方、$f(x)$ が微分可能ならば、h が十分に小さいとき、この値は微分 $f'(x)$ に近い値になっているだろう

つまり、坂道の勾配として、標高の「微分を感じている」ことになる

■微分を感じる例　坂道において、$f(x)$ を出発点から水平に x だけ離れた地点の標高とすると、$f'(x)$ はその地点における勾配を表す

＊　＊　＊

坂道の勾配は、位置によって異なる

x 座標が増える方向に歩いているとき、ある地点 x における勾配が $f'(x)$ というのは、次のように感じることができる

- $f'(x) > 0$：登り坂
- $f'(x) < 0$：下り坂
- $|f'(x)|$ が大きい：急勾配

時間の変化で微分を感じる

時が経つにつれて変化する量は、時刻を変数とする関数で表される
たとえば、時とともに何かものが動くときは、その位置の座標は時刻を変数とする関数で記述できる

ここでは、このような時刻を変数として位置を表す例を考える

位置の微分　数直線上で物体が動いていて、時刻 t におけるその位置をその座標 $f(t)$ で表すとする

ここで、微分の定義において、極限を取る前の

$$\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

という値の意味に注目する

分子は時刻 t から時刻 $t+h$ の間に進んだ距離で、それをその間にかかった時間 h で割っていることから、これは時間間隔 h での平均速度を表している

したがって、時間間隔 h を 0 に近づけたときの極限、すなわち位置の微分 $f'(t)$ は、時刻 t における（瞬間）速度を表していると理解できる

■微分を感じる例　位置の微分 $f'(t)$ は、時刻 t における速度である

＊　＊　＊

位置の 2 階微分　速度は、時刻とともに変わっていく
速度の時間変化を見るために、速度 $f'(t)$ を時刻 t の関数とみなすと、これは位置 $f(t)$ の導関数である

速度 $f'(t)$ をさらに微分するということは、$f(t)$ の 2 階微分 $f''(t)$ を考えることになる
これにも名前がついていて、加速度という
加速度 $f''(t)$ は、速度の変化を表す量である

■微分を感じる例　位置の 2 階微分 $f''(t)$ は、時刻 t における加速度である

＊　＊　＊

運動の記述　運動という言葉は、物理学では「物体が時々刻々と位置を変える」という"motion"の意味で使われる

先ほどは、数直線上という 1 次元的な位置の変化を考えたが、今度は次元を上げて、平面上あるいは空間の中における「運動」を考えてみる

そのために、座標を用いて時々刻々と変わる位置を記述することにする
たとえば 2 次元の運動の場合、時刻 t における位置を位置ベクトルとして、

$$(x(t), y(t))$$

とベクトルで表す
3 次元空間の場合には、もう 1 つ z 座標を用いる

位置ベクトルの x 成分、y 成分をそれぞれ微分して得られるベクトル

$$(x'(t), y'(t)) = \left(\frac{dx}{dt}(t), \frac{dy}{dt}(t)\right)$$

を速度ベクトルという

速度ベクトルは大きさだけではなく、どちらの方向に進んでいるかという向きの情報も持っている

これに対して、速度ベクトルの大きさを速さといい、向きの情報を含む「速度」と区別した用語を使う

$$\text{速さ} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

加速度ベクトルは、速度ベクトルを微分した次のベクトルになる

$$(x''(t), y''(t)) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}(t), \frac{d^2y}{dt^2}(t)\right)$$

＊　＊　＊

物理法則は、座標とは無関係に成り立っている
一方、座標系を使うことで、次元が高い場合でも、座標成分ごとに微分すれば速度ベクトルや加速度ベクトルを求めることができるため、計算上の便利さがある

経済学における微分

何かの消費量が q であるとき、そのことによって得られる満足感やありがたみ（の総量）を仮想的に数値化して効用と呼ぶ
効用は、消費量 q の関数とみなして効用関数とよび、

$$U = U(q)$$

と表記する

この考え方には、そもそも満足度を数値化できるのだろうか？という批判がある
そのため、現代の経済学では、効用の絶対的な大きさには意味がなく、「どちらが好きか」という個人の好み（選好）を描写する表現であるという考え方が使われている
p が q と同じ程度かそれ以上に好きならば、$U(p) \geq U(q)$ を満たすような関数 $U(q)$ を、この選好を描写する効用関数という

同じ選好を描写する効用関数 $U(q)$ は無数にあるが、どれを使っても結論が変わらない性質は、その選好から導かれる性質と考えることができる

たとえば、効用関数の微分

$$\frac{dU}{dq}(q) = U'(q)$$

の符号は、その選好を描写する効用関数のどれを使っても変わらない
効用関数の微分 $U'(q)$ を、経済学では限界効用とよぶ

＊　＊　＊

限界効用漸減の法則　たとえば、喉が渇いているうちは、少し水を飲めるだけでも嬉しいと感じるが、何杯も飲むとありがたみが薄れてくる

このような「最初は嬉しいが、そのうち飽きてくる」という経験的事実を限界効用漸減の法則という

この性質は、効用関数 $U(q)$ の微分（限界効用）および 2 階微分を用いて、

- ありがたいと思う：$U'(q) \geq 0$
- だんだん飽きてくる：$U''(q) \leq 0$

と表される

＊　＊　＊

「ありがたみ」の数式化　まず、水を「ありがたいと思う」を数式化してみる

たとえば、すでに q の分量だけ水を飲んだ後、追加で少量の水を h だけ飲んだとすると、

$$U(q+h) > U(q)$$

が「ありがたい」という選好を描写する不等式になる

したがって、$h > 0$ のとき、

$$\frac{U(q+h) - U(q)}{h} > 0$$

となるので、$h \to 0$ としたときの極限である $U'(q)$ は、$U'(q) \geq 0$ を満たすことになる

このようにして、「水をありがたいと思う」ことから、限界効用 $U'(q)$ の性質 $U'(q) \geq 0$ が導かれた

＊　＊　＊

「飽き」の数式化　「だんだん飽きてくる」を選好で説明するには、効用関数 $U(q)$ は p と q のどちらが好きかというだけではなく、好みをもう少し精密に描写している必要がある

その 1 つのアプローチに、「飽きてくる」ということを「他のものに目移りする」というように、他のものとの比較をするというものがある

すなわち、複数のものに対する選好を考え、それを複数の変数を持つ効用関数で描写する

ここでは 1 変数のままで、以下のように一定量を追加して消費したときの選好があると仮定して話を進める

すなわち、今までの消費量が $q < p$ のとき、同じ量 h の追加であっても、q しか飲んでいないときと比べて、すでに p というたくさんの量を飲んだ後では「ありがたみが薄れる」ということを、次の不等式で描写してみる

$$U(q+h) - U(q) > U(p+h) - U(p)$$

このような不等式を満たす効用関数 $U(q)$ は無数にあるが、どれを使っても $U''(q) \leq 0$ となる

このことを確かめるために、まず不等式の両辺を $h > 0$ で割って、h を 0 に近づけた極限を取ると、$U'(q) \geq U'(p)$ となることがわかる

次に、$s > 0$ として $p = q + s$ とおくと、$U'(q) \geq U'(p)$ より、

$$U'(q) \geq U'(q+s)$$
$$U'(q+s) - U'(q) \leq 0$$

となるので、両辺を s で割って、$s \to 0$ の極限を取ると、

$$U''(q) = \lim_{s \to 0} \frac{U'(q+s) - U'(q)}{s} \leq 0$$

となる

これで、「だんだん飽きてくる」という限界効用漸減の法則から、効用関数の 2 階微分の不等式 $U''(q) \leq 0$ が導かれた

逆に「やみつきになる」場合は、限界効用漸減の法則とは正反対で、$U''(q) \geq 0$ となる

＊　＊　＊

このように、何かを消費したときに、「ありがたい」とか「飽きてくる」という感情を描写する効用関

数はどれを使っても、その微分や 2 階微分の符号に特徴が現れることになる

■微分を感じる例　効用関数の微分（限界効用）$U'(q)$ の符号は、消費量が q の時点で追加で消費することに対する「ありがたみ」を表し、2 階微分 $U''(q)$ の符号は「飽き」や「やみつき」の傾向を表す

＊　＊　＊

微分の符号とグラフの形状　「最初はありがたいが、たくさんあるとだんだん飽きてくる」という効用関数をグラフに表すと、グラフは右上がりで上に凸になる

1. 限界効用が正：「ありがたみを感じる」ということでグラフは右上がり
2. 2 階微分が負：「だんだん飽きてくる（関数の増加率がだんだん減ってくる）」ということでグラフは上に凸

微分がつねに 0 ならば定数である

標語的に言えば、無限小レベルで変化がなければ、大域的に変化がないということ

＊　＊　＊

■定理　実数全体で定義された関数 $f(x)$ について、すべての x で $f'(x) = 0$ ならば、その関数 $f(x)$ は定数である

＊　＊　＊

この定理は、平均値の定理という一種の「不動点定理」から導かれる

- どの時刻でも速度が 0 ならば、実は動いていない（位置が一定）
- 限界効用が 0 ならば、そもそもこの人はそのことに無関心（効用関数 $U(q)$ が消費量 q によらずに一定）

具体例に当てはめると当たり前に思えるが、よく見ると局所的な性質から大域的な性質を導いていることがわかる

＊　＊　＊

■定理　実数全体で定義された関数 $g(x)$ について、すべての x で $g'(x) = a$ ならば、$g(x) = ax + g(0)$ である

＊　＊　＊

証明　この定理は、前述の定理から導かれる

新たな関数として $f(x) = g(x) - ax$ とおいてみると、

$$f'(x) = g'(x) - a = a - a = 0$$

となるので、$f(x)$ は定数である

特に、$f(x) = f(0)$ がすべての x に対して成り立つ

$f(x) = g(x) - ax$ だったことを思い出すと、$f(0) = g(0)$ となるので、

$$g(x) - ax = f(0) = g(0)$$
$$\therefore \quad g(x) = ax + g(0)$$

が示される　□

＊　＊　＊

ここで取り上げた 2 つの定理は、もっとも簡単な微分方程式を解いたとみなすこともできる

合成関数の微分

$x = g(t)$ を $f(x)$ に代入すると、t を変数とする関数 $f(g(t))$ が得られる

この関数 $f(g(t))$ を、関数 $f(x)$ と関数 $g(t)$ の合成関数という

＊ ＊ ＊

■定理：合成関数の微分（連鎖律）

関数 $f(x)$ と関数 $g(t)$ の合成関数 $f(g(t))$ を $F(t)$ と書くと、

$$F'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

が成り立つ

＊ ＊ ＊

代入してから微分 $\neq$ 微分してから代入であることに注意

- $F'(t)$：代入してから微分（$x = g(t)$ を $f(x)$ に代入した関数 $f(g(t))$ を微分）
- $f'(g(t))$：微分してから代入（$f(x)$ を微分した $f'(x)$ に $x = g(t)$ を代入）

後者に $g'(t)$ をかけて初めて前者と一致する、というのが合成関数の微分公式の趣旨

＊ ＊ ＊

連鎖率の感覚　勾配が一定の坂道を登っている状況を考える

- 水平方向の速度は、「単位時間あたりにどれだけ進むか」を表している
- 坂道の勾配は、「単位距離進むごとにどれだけ登るか」を表している

よって、上下方向の速度「単位時間あたりにどれだけ登るか」を求めるには、水平方向の速度と勾配をかければよい

$$\text{上下方向の速度} = \text{水平方向の速度} \times \text{勾配}$$

この計算式を、微分を用いて表現する

水平方向に座標 x をとり、その標高を $f(x)$ とする

そうすると、微分 $f'(x)$ はこの地点での坂道の勾配となる

一方、ある人が時刻 t に、x 座標では $x = g(t)$ の地点にいるとすると、微分 $g'(t)$ はその人の水平方向の速度となる

このとき、合成関数 $F(t) = f(g(t))$ は時刻 t にこの人がいる地点の標高となり、その微分 $F'(t)$ は、時刻 t における上下方向の速度を表すことになる

よって、上下方向の速度を求める式は、

$$F'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

これは、合成関数の微分の公式になっている

積の微分（ライプニッツの法則）

2 つの関数が与えられたとすると、それらを足せば 1 つの関数になり、またそれらをかけても別の関数が得られる

2 つの関数をかけたとき、その微分がどうなるか？

＊ ＊ ＊

■定理：積の微分（ライプニッツの法則）

2 つの関数 $f(t), g(t)$ の積 $f(t)g(t)$ の微分は、

$$(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$$

である

＊ ＊ ＊

ライプニッツの法則の可視化

時刻 t のときに高さ $g(t)$、底辺の長さ $f(t)$ の長方形を考える

この長方形の面積は $f(t)g(t)$ である

時々刻々と $f(t)$ も $g(t)$ も変わる、それに応じて長方形の形も変わり、面積 $f(t)g(t)$ が変化する
ライプニッツの法則の左辺 $(f(t)g(t))'$ は、この面積の変化率を表している

まず、微分の定義に戻って、積 $f(t)g(t)$ の微分を書き下すと、

$$(f(t)g(t))' = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t)}{h}$$

右辺の分子は、時刻 $t+h$ での長方形の面積と、時刻 t での長方形の面積の差になっている

時刻 t から $t+h$ になったとき、高さも底辺の長さも増加する
このとき、長方形の面積の変化を、次の 3 つの部分に分けて考える

- 高さの変化による面積の増加（縦長の帯）
- 底辺の長さの変化による面積の増加（横長の帯）
- 高さと底辺の長さの変化による面積の増加（小さな四角形）

＊　＊　＊

高さの変化によって増えた部分

縦長の帯は、幅 h、高さ $g(t+h) - g(t)$ の縦長の長方形になっている

h が 0 に近づくと、$\dfrac{g(t+h) - g(t)}{h}$ は $g(t)$ の微分 $g'(t)$ に近づくことから、h が 0 に近ければ、

$$g(t+h) - g(t) \approx hg'(t)$$

となるので、縦長の帯の高さは $hg'(t)$ で近似できる
よって、

$$\text{縦長の帯の面積} \approx f(t) \cdot hg'(t) = hf(t)g'(t)$$

＊　＊　＊

底辺の長さの変化によって増えた部分

横長の帯は、幅 h、高さ $f(t+h) - f(t)$ の横長の長方形になっている
先ほどと同様に高さの近似を考えて、

$$\text{横長の帯の面積} \approx g(t) \cdot hf'(t) = hf(t)g'(t)$$

＊　＊　＊

高さと底辺の長さの変化によって増えた部分

小さな四角形は、幅 $f(t+h) - f(t)$、高さ $g(t+h) - g(t)$ の長方形になっている
幅と高さについて、これまでと同様に近似を考えると、

$$\begin{aligned}\text{小さな四角形の面積} &\approx (hf'(t)) \times (hg'(t)) \\ &= h^2 f'(t)g'(t)\end{aligned}$$

h が小さいとき、縦長の帯と横長の帯は、縦か横のいずれかだけが小さくなるが、小さな四角形は縦も横も小さい
この違いを反映して、右辺には h^2 という、h よりもはるかに小さい係数が現れている
この項は、h を 0 に近づける極限の計算の中では実は寄与しない

＊　＊　＊

まとめると、長方形の面積の変化は、縦長の帯の面積と横長の帯の面積と小さな四角形の面積の和になるので、

$$\begin{aligned}&f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t) \\ &\quad = hf(t)g'(t) + hf(t)g'(t) + h^2 f'(t)g'(t) \\ &\quad\quad = h\left(f(t)g'(t) + f'(t)g(t) + hf'(t)g'(t)\right)\end{aligned}$$

よって、積の微分は、

$$
\begin{aligned}
&(f(t)g(t))' \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)g(t+h) - f(t)g(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(f(t)g'(t) + f'(t)g(t) + hf'(t)g'(t)\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(f(t)g'(t) + f'(t)g'(t) + hf'(t)g'(t)\right) \\
&= f(t)g'(t) + f'(t)g(t)
\end{aligned}
$$

となり、ライプニッツの法則が導かれた

＊　＊　＊

このように図形を用いると、ライプニッツの法則は、

長方形の面積の変化
　　= 縦長の帯の寄与 + 横長の帯の寄与

という形で「目に見える」ようになる

商の微分

■定理：商の微分

$$\left(\frac{f(t)}{g(t)}\right)' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{(g(t))^2}$$

＊　＊　＊

証明　左辺の $\dfrac{f(t)}{g(t)}$ を $G(t)$ とおいておく

$G(t)$ の微分 $G'(t)$ を求めるのが目標

$G(t) = \dfrac{f(t)}{g(t)}$ の分母を払うと、

$$f(t) \times G(t) = g(t)$$

この両辺を微分すると、ライプニッツの法則を使って、

$$f(t)G'(t) + f'(t)G(t) = g'(t)$$

移項して、$f(t)$ で割れば、

$$
\begin{aligned}
G'(t) &= \frac{g'(t) - f'(t)G(t)}{f(t)} \\
&= \frac{g'(t) - f'(t) \times \dfrac{f(t)}{g(t)}}{f(t)} \\
&= \frac{g'(t)f(t) - f'(t)g(t)}{(f(t))^2}
\end{aligned}
$$

となり、商の微分の公式が導かれた　□

微分方程式とは？

未知の関数を $f(x)$ とおいて、$f(x)$ が満たすべき条件を等式で書き下したものが「関数に対する方程式」

関数に対する方程式の中に、$f(x)$ の微分 $f'(x)$ や $f''(x)$ が含まれているとき、その方程式を微分方程式という

もっとも簡単な微分方程式 $f'(x) = 0$

定数関数の微分は恒等的に 0 になる

逆に、「微分 $f'(x)$ が恒等的に 0 ならば $f(x)$ は定数である」という定理も示した

この定理の仮定は、未知関数 $f(x)$ が微分方程式

$$\frac{df}{dx}(x) = 0$$

を満たしているということ

つまり、この定理は、「微分方程式 $\dfrac{df}{dx}(x) = 0$ の解は定数関数 $f(x) = C$ である」ことを主張している

「どの点でも勾配がなければ、実は、その道は水平だ（高さが一定だ）」というのは、実生活では当たり前に見える

数学としては、無限小レベルの条件である微分方程式から、その解の大域的な性質を記述している

ことになる

＊　＊　＊

以前述べた定理「すべての x で $f'(x) = a$ ならば、$f(x) = ax + f(0)$ である」も、微分方程式の言葉で記述できる

すなわち、a を定数とするとき、初期条件 $f(0) = C$ の下で、未知関数 $f(x)$ に関する微分方程式

$$\frac{df}{dx}(x) = a$$

の解が

$$f(x) = ax + C$$

であるという主張になる

$f'(x) = \lambda f(x)$ という微分方程式を解く

指数関数 e^x は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ というべき級数展開を用いると導関数が自分自身になる、すなわち $(e^x)' = e^x$ が成り立つことを以前示した

その逆は成り立つだろうか？

これは「$f'(x) = f(x)$ という微分方程式を解く」問題である

＊　＊　＊

■定理　λ を定数とする

実数全体で定義された関数 $F(t)$ が

- 微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$
- 初期条件 $F(0) = A$

を満たすならば、$F(t) = Ae^{\lambda t}$ である

＊　＊　＊

解を１つ見つける

まず、指数関数 $e^{\lambda t}$ が微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$ を満たしていることを確かめる

$e^{\lambda t}$ を $f(x) = e^x$ と $g(t) = \lambda t$ の合成関数と見なすと、

- $f(x) = e^x$ に対しては $f'(x) = e^x$
- $g(t) = \lambda t$ に対しては $g'(t) = \lambda$

が成り立つので、合成関数の微分の公式より、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\lambda t} &= \frac{d}{dt}f(g(t)) \\ &= f'(g(t)) \cdot g'(t) \\ &= e^{g(t)} \cdot \lambda \\ &= e^{\lambda t} \cdot \lambda\end{aligned}$$

となり、確かに $e^{\lambda t}$ は微分方程式を満たす関数である

＊　＊　＊

すべての解を見つける

では、$e^{\lambda t}$ と異なるタイプの解は存在するだろうか？

微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$ を満たす未知の解 $F(t)$ を既知の解 $e^{\lambda t}$ と比較するため、割り算してみる

定理の結論は、

$$\frac{\text{未知の解}}{\text{既知の解}} = \frac{F(t)}{e^{\lambda t}}$$

が t によらない定数 A になるということ

そこで、割り算したものを t で微分してみる

商の微分の公式を使うと、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right) = \frac{F'(t)e^{\lambda t} - F(t)\lambda e^{\lambda t}}{(e^{\lambda t})^2}$$

ここで、$F'(t) = \lambda F(t)$ であり、$(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ なので、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right) = \frac{\lambda F(t)e^{\lambda t} - \lambda F(t)e^{\lambda t}}{e^{2\lambda t}}$$

この分子は、同じものどうしの引き算なので 0 になる

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F(t)}{e^{\lambda t}}\right) = 0$$

t で微分すると 0 になるということは、この関数 $\dfrac{F(t)}{e^{\lambda t}}$ は定数関数である

$\dfrac{F(t)}{e^{\lambda t}}$ の値は t によらないので、特に、$t=0$ における値とも同じになる

初期条件 $F(0)=A$ を思い出すと、

$$\frac{F(t)}{e^{\lambda t}} = \frac{F(0)}{e^{\lambda \cdot 0}} = \frac{A}{e^0} = A$$

よって、

$$F(t) = Ae^{\lambda t}$$

これで、初期条件 $F(0)=A$ を満たす微分方程式 $F'(t)=\lambda F(t)$ の解は、$F(t)=Ae^{\lambda t}$ のみであることが示された　□

* * *

このように、指数関数の性質である

1. 無限級数表示
2. 指数法則
3. 微分方程式

は、同じ関数の 3 つの異なる側面を表している

ここでは、微分方程式を解くことによって、3 から 1 や 2 の性質を復元できることを確かめた

* * *

パラメータ λ の符号

微分方程式 $F'(t)=\lambda F(t)$ のパラメータ λ は、その解の挙動に大事な役割を持つ

初期条件 $A>0$ とすると、$F(t)=Ae^{\lambda t}$ のグラフの形状は λ の符号によって異なる

現象を記述するとき、ある量が変数 t を用いて $Ae^{\lambda t}$ という形で（近似的に）表されることがよくある

こういった場合、その量は

- $\lambda>0$ のとき、指数的に増大する（ネズミ算式に増える）
- $\lambda<0$ のとき、指数的に減少する

と言うことがある

* * *

$A=\lambda=1$ の場合と自然対数

$A=\lambda=1$ の場合の指数関数 e^t は、t が決まれば e^t の値が定まり、そのグラフ $y=e^t$ は単調増加になっている

逆に、グラフを見ると、$y>0$ に対して $y=e^t$ となる実数 t が 1 つ定まることがわかる

この値を y の自然対数といい、$t=\log y$ と表記する

角速度

遠くに電車が走っているのが見えたとする

距離はわからなくても、見える角度は時々刻々と変化していく

こんな状況を正確に言い表すために角速度という概念がある

* * *

基準点と、それを通る基準線（基準の方向）をあらかじめ決めておく

注目している点が、基準点から見て基準の方向から（左回りに測って）角度 θ の位置にあるとする

この角度 θ は時間 t によって変化するので、t を変数とする関数という意味で、$\theta(t)$ と表す

このとき、微分

$$\frac{d\theta(t)}{dt}$$

を時刻 t における角速度という

＊　＊　＊

どこから見るか、すなわち基準点をどこにとるかによって、角速度は変わる

一方、基準線の方向については、どのように選んでも角速度に影響しない

実際、基準線の方向を変えても、角度 $\theta(t)$ には時刻によらない定数が付け加わるだけであるから、その微分である角速度には影響しないことになる

三角関数の微分

円周上を一定の速さで進むことを等速円運動という

等速円運動では、円の中心から見ると角速度が一定になっている

＊　＊　＊

ここでは計算を簡単にするため、半径 1 の円周上を速さ 1 で左回りに動くことを考える

速さ 1 というのは、経過した時間が t ならば、円弧を長さ t だけ進むということ（経過時間と進んだ距離が等しい＝その比が 1 になる）

円の中心から見た角度も、弧度法で t だけ増える

この等速円運動を xy 座標を用いて表す

時刻 $t=0$ のときに x 軸上の点 $(1,0)$ を出発すると、時刻 t の位置 P は、原点を中心に角度 t だけ円周上を左回りに進んだ点として

$$(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$$

と座標表示される

この運動の速さは 1 で一定だが、速度ベクトルの向きは時刻とともに変わる

速度ベクトルは、x 座標、y 座標それぞれについて微分すればよいので、時刻 t において、

$$\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) = \left(\frac{d}{dt}\cos t, \frac{d}{dt}\sin t\right)$$

で与えられる

角速度から三角関数の微分を導く

半径 1 の円周上を動くという条件は、

$$x^2(t) + y^2(t) = 1$$

と表される

両辺を微分すると、積の微分に関するライプニッツの法則より、

$$2\left(x(t)x'(t) + y(t)y'(t)\right) = 0$$

となり、内積が 0 であることから、速度ベクトルは位置ベクトルに直交していることがわかる

また、速さが 1 なので、速度ベクトルの大きさは 1 である

したがって、この速度ベクトルは大きさが 1 で、向きは位置ベクトルを $\frac{\pi}{2}$ だけ左に回転させた方向を向いていることになり、

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) &= \left(\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= (-\sin t, \cos t)\end{aligned}$$

がわかる

速度ベクトルの 2 通りの表現が得られたので、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\cos t &= -\sin t\\ \frac{d}{dt}\sin t &= \cos t\end{aligned}$$

という、三角関数の微分の公式が導かれた

オイラーの公式と三角関数のテイラー展開

$F(t)$ が実数値の関数 $f(t), g(t)$ を用いて

$$F(t) = f(t) + ig(t)$$

と表されるとき、$F(t)$ を複素数値の関数という

ここで、i は虚数単位で、$i^2 = -1$ である

＊　＊　＊

$F(t) = \cos t + i \sin t$ という複素数値の関数を考える

実数であっても複素数であっても定数倍は微分の外に出せることに留意して、$F(t)$ の微分を計算する

$$\begin{aligned}\frac{dF(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}\cos t + i\frac{d}{dt}\sin t\\ &= -\sin t + i\cos t\\ &= i\cos t + i^2\sin t\\ &= i(\cos t + i\sin t)\\ &= iF(t)\end{aligned}$$

両辺を見比べると、

$$F'(t) = iF(t)$$

という微分方程式が得られたことになる

＊　＊　＊

ところで、関数 $F(t)$ が

- 微分方程式 $F'(t) = \lambda F(t)$
- 初期条件 $F(0) = 1$

を満たすならば、$F(t)$ は

$$F(t) = e^{\lambda t}$$

という形になっていることを、以前示した

指数関数 $e^{\lambda t}$ は、無限級数表示 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$ を用いると、λ が複素数のときでも意味を持つ

そうすると、この定理は、定数 λ が複素数で $F(t)$ が複素数値の関数の場合にも成り立つ

上述の $F(t) = \cos t + i\sin t$ は、$F'(t) = iF(t)$ と $F(0) = 1$ を満たすので、$\lambda = i$ の場合に対応する

＊　＊　＊

■定理：オイラーの公式

$$e^{it} = \cos t + i\sin t$$

＊　＊　＊

この公式を用いると、三角関数の性質は、指数関数のさまざまな性質から導ける

三角関数の加法公式

指数法則

$$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$$

すなわち、

$$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$$

の右辺を展開して、実部と虚部を比較することで、

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b\\ \sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b\end{aligned}$$

が得られる

三角関数の 3 倍角の公式

指数法則

$$e^{i3t} = (e^{it})^3$$

において、$x = it$ とすると、

$$\cos 3t + i\sin 3t = e^{i3t} = (e^{it})^3 = (\cos t + i\sin t)^3$$

右辺を展開して、実部と虚部を比較することで、

$$\begin{aligned}\cos 3t &= 4\cos^3 t - 3\cos t\\ \sin 3t &= 3\sin t - 4\sin^3 t\end{aligned}$$

が得られる

e, π, i の関係式

オイラーの公式において、$t = \pi$ とすれば、

$$e^{i\pi} = -1$$

という等式が成り立つ

これは、数学における 3 つの重要な数 e, π, i の間に成り立つ美しい関係式である

三角関数のテイラー展開

e^x のべき級数展開に $x = it$ を代入すると、

$$\begin{aligned} e^{it} &= 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \frac{(it)^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + it - \frac{t^2}{2!} - i\frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + i\frac{t^5}{5!} - \cdots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots + i\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) \end{aligned}$$

となる

この実部と虚部を、$e^{it} = \cos t + i \sin t$ の実部や虚部と比べると、

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

という、三角関数のテイラー展開が得られる

近似と誤差

曲線を局所的に近似する場合、接線で近似するのが最初のステップになる

次のステップとして、接線からの乖離を正確に知りたい

たとえば道路が急カーブしているときは、直線ではなく円弧で近似する方がより正確になる

関数のグラフの各点で、その曲がり方を表す円弧の半径を求めるのには 2 階の微分を使う

実用上は、1 階微分と 2 階微分を用いると、多くの場合、局所的に十分良い近似ができるが、それでも微小な乖離は生じる

この微小な誤差は、3 階微分を使うと評価できる

これを続け、1 階微分だけではなく、2 階、3 階、. . . と高階の微分を用い、必要な精度を実現するためには近似をどのように行えばよいかを指し示すのがテイラー展開とその剰余項である

* * *

誤差評価を行う際には、範囲をきちんと意識する必要がある

- 翌日の天気が予測できても、1 ヶ月先の天気予報は難しい
- 坂道の勾配を見て 100m 先の高低差は推測できても、10km 先の高低差はわからない

誤差と誤差率

測定値や何らかの概算値が真の値とどれくらい異なるかは、

$$誤差 = \left|測定値 - 真の値\right|$$

という絶対量で表された

一方、相対的な比率として定義される、

$$誤差率 = \left|\frac{誤差}{真の値}\right| = \left|\frac{測定値 - 真の値}{真の値}\right|$$

も大事な視点である

実用上は、分母を「測定値」に取り換えた、

$$P = \left|\frac{誤差}{測定値}\right| = \left|\frac{測定値 - 真の値}{測定値}\right|$$

で代用することもある

P が小さいときは誤差率として代用できることは、次のように確認できる

＊ ＊ ＊

■**定理**　$P < \dfrac{1}{101}$ ならば、誤差率は 1% 未満

＊ ＊ ＊

証明　$t = \dfrac{\text{真の値}}{\text{測定値}}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\text{誤差} &= \left|\text{測定値} - \text{真の値}\right| \\
&= \left|\text{測定値} - t\,\text{測定値}\right| \\
&= |1 - t|\,\text{測定値}
\end{aligned}$$

より、

$$P = \left|\frac{\text{測定値} - \text{真の値}}{\text{測定値}}\right| = |1 - t|$$
$$\text{誤差率} = \left|\frac{\text{誤差}}{\text{真の値}}\right| = \left|\frac{|1 - t|\,\text{測定値}}{\text{真の値}}\right| = \left|\frac{1 - t}{t}\right|$$

と書き表せる

$P < \dfrac{1}{101}$ ならば、

$$\begin{aligned}
-P &> -\frac{1}{101} \\
1 - P &> 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}
\end{aligned}$$

であり、t について、三角不等式より、

$$\begin{gathered}
1 - |1 - t| = 1 - |t - 1| \leq |1 + (t - 1)| = t \\
\frac{100}{101} < 1 - P \leq t
\end{gathered}$$

これを用いると、

$$\begin{aligned}
\text{誤差率} &= \left|\frac{1 - t}{t}\right| \\
&< \left|\frac{1 - \frac{100}{101}}{\frac{100}{101}}\right| = \frac{\frac{1}{101}}{\frac{100}{101}} = \frac{\frac{1}{101} \cdot 101}{\frac{100}{101} \cdot 101} \\
&= \frac{1}{100}
\end{aligned}$$

として、誤差率は 1% 未満であることが示された

□

＊ ＊ ＊

真の値が分からなくとも、何か別の情報や論理から、誤差を「上から評価する」すなわち、「誤差が〜以下である」という形の評価式が得られることがある

弧長の近似と誤差評価

一般に、ある時点で誤差が生じると、その後の誤差が増幅して予期しない間違いが生じることがある

したがって、概算が信頼できるとするためには、誤差評価という別の論理が必要になる

誤差評価を行う際に用いるトリックが、存在定理である

中間値の定理

たとえば、今朝 7 時の気温が 22°C で、正午には 30°C に上がったとすると、午前中に 27°C になる瞬間が必ずある

これが中間値の定理である

＊ ＊ ＊

■**定理：中間値の定理**　$a \leq x \leq b$ で定義された連続関数 $f(x)$ を考える

$f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の実数 T を 1 つ選ぶと、$f(c) = T$ となる実数 c が a と b の間に必ず存在する

＊ ＊ ＊

例：時刻と気温　$f(x)$ が時刻 x における気温を表すとすると、気温は時刻が経過するとともに連続的に動くため、$f(x)$ は連続関数である

a を 7 時、b を 12 時とすると、$f(a) = 22$°C、$f(b) = 30$°C であり、$T = 27$ は $22 \leq T \leq 30$ を満たしている

中間値の定理は、$f(c) = 27°\text{C}$ となる時刻 c が 7 時から 12 時の間に必ず存在するということを述べている

＊　＊　＊

いつかは分からないけれど、「27°C になる瞬間があったのは確かである」

このようなタイプの定理を存在定理という

7 時から正午まで、一度も温度計を見ていなくても、その間の情報が皆無ではないということになる

探し物をするときでも、「この部屋にあるかどうかすらわからない」と思って探すのと、「この部屋にあることは確実だ」と信じて探すのでは大きな差がある

どこかには確実に存在するという存在定理は、上手く使うと決定的な証拠になることがある

＊　＊　＊

例：ゴムひもの動かない点　たとえば 1 本のゴムひもを両手で持って、左右に引っ張るとする

そうすると、ゴムひもの中で、まったく動かない点が必ず存在する

左右均等に引っ張れば、真ん中の点が動かない

左右均等に引っ張らなくても、必ず動かない点がある

＊　＊　＊

このことは、中間値の定理から説明できる

ゴムひもを数直線上に置き、左端と右端の座標をそれぞれ a, b とする

ゴムひも内のある点の座標を x とすると、$a \leq x \leq b$ である

両手の間隔を広げたとき、この点の行き先の座標を $g(x)$ とすると、

- 左端は元の位置よりも左に動くので、$g(a) < a$
- 右端は元の位置よりも右に動くので、$g(b) > b$

そこで、$f(x) = g(x) - x$ とおくと、次の不等式が成り立つ

$$f(a) = g(a) - a < 0$$
$$f(b) = g(b) - b > 0$$

そうすると、中間値の定理より、$f(c) = 0$ となる c が a と b の間に存在する

$f(c) = 0$ というのは、$g(c) = c$、つまり動かした後の座標 $g(c)$ と元の座標 c が一致するということなので、c は動かない点である

こうして、手を広げたとき、ゴムひもの中で必ず動かない点があることが示された

＊　＊　＊

動かない点があることを保証する定理を不動点定理という

不動点定理は存在定理の一種であり、「どこに不動点があるのか」は明示しないが、「どこかにある」ことを保証する

経済学やゲーム理論でも、均衡した状態がどこかに存在するということが、不動点定理から説明できることがある

平均値の定理

微分を含んだ存在定理として、平均値の定理がある

＊　＊　＊

■定理：平均値の定理　$f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で定義された関数で、微分可能とする

このとき、

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となる c が a と b の間に存在する

＊　＊　＊

点 P の座標を $(a,\ f(a))$、点 Q の座標を $(b,\ f(b))$ とすると、$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ は線分 PQ の傾きである

$f'(c)$ は接線の傾きなので、平均値の定理は、線分 PQ と平行な接線が必ずある、と述べている

＊　＊　＊

例：速度の平均値　オリンピックの 100m 走で、ぴったり 10 秒で走り切った選手がいるとする

この選手の 10 秒間の平均速度は秒速 10m であり、この平均速度は線分 PQ の傾きに対応する

もちろん、この選手は 10 秒間同じスピードで走っているわけではない

加速や減速の数値はわからなくても、ぴったり秒速 10m になった瞬間がこの 10 秒の中に必ず存在することは保証する、というのが平均値の定理の意味になる

＊　＊　＊

■定理（再掲）　$f'(x) = 0$ がすべての x で成り立てば、関数 $f(x)$ は定数である

証明　$f'(x) = 0$ がすべての x で成り立てば、平均値の定理の左辺 $f'(c)$ が 0 となるので、

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

$$f(b) - f(a) = 0$$

となり、$f(a) = f(b)$ がすべての実数 a, b に対して成り立つことがわかる

したがって、$f(x)$ は定数である　□

＊　＊　＊

平均値の定理の証明

平均値の定理は、「閉区間上の連続関数が最大値・最小値をとる」ことを用いて証明できる

$$g(x) = f(x) - Ax, \quad A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

とおくと、$g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で最大値・最小値をとる

一方、A の選び方から、$g(a) = g(b)$ である

$$\begin{aligned} g(a) - g(b) &= (f(a) - Aa) - (f(b) - Ab) \\ &= f(a) - f(b) - A(b - a) \\ &= f(a) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって、$g(x)$ の最大値または最小値のうち、少なくとも一方は $a \leq x \leq b$ の両端 a, b とは異なる点 c で実現される

ここで、

■定理（再掲）　$a < x < b$ で定義された、微分可能な関数 $f(x)$ が $x = c$ で最大値または最小値を取るならば、$f'(c) = 0$ である

という定理を思い出すと、$a < c < b$ なので $g'(c) = 0$ となる

$$g'(c) = f'(c) - A = 0$$

より、$f'(c) = A$ が示された　□

＊　＊　＊

- 中間値の定理は、微分は無関係で、連続関数のとる値に関する存在定理
- 平均値の定理は、1 階の微分に関する存在定理

もう一歩踏み込んで、2 階の微分、3 階の微分、...と高階の微分に関する存在定理を考えていくと、次に述べるテイラー展開の定理になる

テイラー展開と剰余項

関数のグラフなどの曲線を局所的に近似するのにもっとも簡単なのは直線を用いること

方程式でいえば 1 次式であり、多くの場合には、これだけで局所的には十分な情報が得られる

しかし、もっと精密なことを知りたい場合もある

こういうとき、2 次式や 3 次式、あるいはもっと高次の多項式を用いると、近似の精度が上がることが期待できる

しかし、それでも何らかの誤差は出てくるものである

近似に使う高次の多項式を**主要項**とみなしたとき、誤差項に相当するのが**剰余項**である

この剰余項は存在定理の形で表されるのだが、上手に用いると、「誤差は最悪でもこの程度だ」という論理に使える

* * *

■定理：テイラー展開と剰余項　$f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で定義され、何回でも微分できる関数とする

自然数 n を 1 つ選ぶと、このとき、

$$
\begin{aligned}
f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) \\
+ \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n \\
+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}
\end{aligned}
$$

となる c が a と b の間に存在する

* * *

この定理も存在定理の 1 つである

最後の項の分子は $f^{(n+1)}(c)$ となっており、c という実数はここだけに現れている

a も b も最初に与えられた数なので、最後の項以外は計算できる

ところが、最後の項に現れる c は、a と b の間に「存在する」としか言っていないので、実際の値はわからない

この最後の項を**剰余項**という

* * *

平均値の定理との関係　$n = 0$ の場合、この定理は平均値の定理そのものである

$$
\begin{aligned}
f(b) &= f(a) + \frac{f'(c)}{1!}(b-a) \\
&= f(a) + f'(c)(b-a)
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}
$$

* * *

剰余項の用途　テイラー展開の剰余項は、誤差評価する手法として用いることができる

* * *

主要項の用途　テイラー展開の主要項は、局所的に近似の精度を上げたいときに使うことができる

このとき、テイラー展開の主要項を何項目まで使えばよいか（定理の n をどう選べばよいか）を考慮することになる

* * *

■命題（平均値の定理の一般化）　$h(x)$ は $a \leq x \leq b$ で定義され、何回でも微分できる関数とし、

$$
h(a) = h(b) = 0, \quad h^{(k)}(a) = 0 \quad (1 \leq k \leq n)
$$

を満たすとする

このとき、$h^{(n+1)}(c) = 0$ となる c が a と b の間に存在する

＊　＊　＊

$n = 0$ の場合　平均値の定理にほかならない

n が一般の場合の証明　繰り返して平均値の定理を使って示すことができる

まず、$h(a) = h(b) = 0$ なので、$h(x)$ に平均値の定理を適用すると、$h'(c_1) = 0$ となる $c_1\,(a < c_1 < b)$ が存在することがわかる

次に、$h'(a) = h'(c') = 0$ なので、$h'(x)$ に平均値の定理を用いると、$h''(c_2) = 0$ となる $c_2\,(a < c_2 < c_1)$ が存在することがわかる

これを繰り返し、最後は n 階微分 $h^{(n)}(x)$ に平均値の定理を用いると、$h^{(n+1)}(c) = 0$ となる $c_{n+1}\,(a < c_{n+1} < c_n)$ が存在する

$c = c_{n+1}$ とおくと、確かに $a < c < b$ であり、命題が示された　□

＊　＊　＊

テイラー展開と剰余項の定理の証明

A を x によらない定数とし、

$$h(x) = f(x) - \sum_{l=0}^{n} \frac{f^{(l)}(a)}{l!}(x-a)^l - \frac{A(x-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}$$

とおく

ここで、

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^l = \begin{cases} l(l-1)\cdots(l-k+1)(x-a)^{l-k} & (l > k) \\ l! & (l = k) \\ 0 & (l < k) \end{cases}$$

これを用いて、

$$\frac{f^{(l)}(a)}{l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^l = \begin{cases} \dfrac{f^{(l)}(a)}{(l-k)!}(x-a)^{l-k} & (l > k) \\ f^{(k)}(a) & (l = k) \\ 0 & (l < k) \end{cases}$$

$x = a$ を代入すると、

$$\frac{f^{(l)}(a)}{l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^l = \begin{cases} 0 & (l > k) \\ f^{(k)}(a) & (l = k) \\ 0 & (l < k) \end{cases}$$

最後の項についても同様に、

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{A(x-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} &= \frac{A}{(b-a)^{n+1}}\left(\frac{d}{dx}\right)^k (x-a)^{n+1} \\ &= \frac{A(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}(x-a)^n \end{aligned}$$

$x = a$ を代入すると、

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^k \frac{A(x-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} = 0$$

よって、A が何であっても、

$$h^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - f^{(k)}(a) + 0 = 0 \quad (0 \le k \le n)$$

となり、$h^{(k)}(a) = 0 \quad (0 \le k \le n)$ が成り立つ

そこで $h(b) = 0$ となるように、A を

$$A = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$$

と定める

このような A で $h(b) = 0$ となることは、次のよう

に確かめられる

$$
\begin{aligned}
h(b) &= f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - \frac{A(b-a)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}} \\
&= f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k - A \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ここで、先ほどの命題を適用すると、$h^{(n+1)}(c) = 0$ となる c が a と b の間に存在する

一方、

$$
h^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{A(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}
$$

なので、$h^{(n+1)}(c) = 0$ より、

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - \frac{A(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} = 0 \\
\therefore \quad \frac{A(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} = f^{(n+1)}(c)
\end{aligned}
$$

A について解くと、

$$
A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}
$$

これで、A についての 2 通りの表現が得られたので、

$$
\begin{aligned}
f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\
f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}
\end{aligned}
$$

となり、テイラー展開と剰余項の定理が示された

□

偏微分 — 多変数関数の微分

ものごとには通常、単一の要因だけではなく、複数の要因が絡みあっている

さまざまな要因が関係する現象を数量的に分析するためには、1 つの変数だけでなく、複数の変数を含む関数を使う

このようにいくつもの変数があって、それによって値が定まるような関数を多変数関数という

* * *

複数の要因が絡む状況を判断する際には、すべての要因を同時に考えるのではなく、まず 1 つの要因に着目し、次に視点を変えて別の要因を考え、そして最後に、個別に考察した要因を統合して考えることがある

偏微分のアイデアも、そのアプローチに似ている

多変数関数の偏微分では、1 つの変数に注目し、それ以外の変数をいったん固定して定義する

そして、多変数関数の局所的な様子を分析するためには、各変数ごとに得られた偏微分の情報をどのように統合するかが重要になる

多変数関数の微分をイメージする

1 変数関数の例：道の標高

1 変数関数の場合、坂道の勾配は水平方向の座標を変数とする標高の微分だった

これは「道」という 1 次元の例

2 変数関数の例：野山の標高

状況を変えて、野山にいるとする

平面図で位置を指定するためには、たとえば東に x メートル、北に y メートルといった具合に、2 つの変数があればよい

その地点の高さは 2 変数関数 $f(x, y)$ として表される

この関数が極大となる地点は山頂に対応する

さらに、斜面の勾配は偏微分によって記述できる

野山の形状は、偏微分という抽象的な概念を「感じられる」身近な例

3 変数関数の例：温度や気圧

3 次元空間の各点での温度や気圧などは、3 変数関数の例となる

多変数関数の例：効用関数

2 種類以上のモノ（経済学では財）を消費する際の効用関数も、多変数関数とみなすことができる

たとえばジュースの量を x だけ飲み、お菓子の量を y だけ食べることと、x' だけ飲んで y' だけ食べることのどちらが好きかの選好を描写するのに 2 変数の関数を使う

前者 (x, y) の選択の方が後者 (x', y') の選択よりも好ましい場合には、$f(x, y) > f(x', y')$ という不等式を満たしているとする

このとき、それぞれの財に関する変化率（限界効用）は偏微分で表される

ジュースだけの場合は、喉が渇いているときにジュースを飲むと嬉しいが、たくさん飲むと飽きてくるといった経験則が、適切な仮定を満たす選好を描写する効用関数の 1 階微分（限界効用）や 2 階微分で表現された

一方、お菓子も合わせて食べるとどうだろうか？

ジュースとお菓子を適切な比率で組み合わせると一層楽しそうだし、飽きにくくなるかもしれない

逆に「相性」が悪い組み合わせもありそう

複数の要因に対しても、選好を描写する効用関数は無数にあるが、その共通の性質は、その選好から導かれると考えられる

偏微分には、複数の財の「相性」や「相乗効果」といった、多変数関数ならではの現象についての大事な情報も反映されている

偏微分の定義

2 変数関数 $f(x, y)$ の x に関する偏微分は、「y を止めて x に関して微分する」という意味で、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

と定義される

y を止めると、x だけが変数となるので、x の 1 変数関数と思って普通に微分する

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ を変数 x に関する編微分係数とよぶこともある

逆に、x を止め、y だけを動かして微分することで、

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

という y に関する偏微分が定義される

偏微分の記号　偏微分の記号にはさまざまな流儀があり、以下の記号はすべて同じ意味で使う

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f_x(x, y)$$

変数 (x, y) を省略した $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ や f_x という記法は文字数が少なくて便利だが、「y を止めて」という約束が記号に反映されていない

異なる解釈が生じる可能性があるときには注意が必要

＊　＊　＊

偏微分で混乱する大きな原因は、何を止めているのかが不明瞭になること

一定にするものを変えると、偏微分の意味も値も異なってしまう可能性がある

たとえば､先ほどの効用関数の例では､$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ はジュースを飲む量 x を増やしたときの効用の変化率を表す

しかし、何を一定にしているかを明示しないと、その内容がまったく異なることになる

- お菓子の量を一定にして、ジュースの量 x を増やす
- 予算を一定にして、ジュースの量 x を増やす

前者では単純にジュースの量 x が増えるのを好む一方で、後者では予算が一定であるため、ジュースの量 x を増やすとお菓子の量が減ることになる

そのため、後者ではジュースの量を増やすのを好まない人もいる

この場合は、効用関数を x に関して微分したときの結果も異なってくる

偏微分では、微分する変数だけではなく、その際にいったん固定している変数は何であるかを意識して式や文章を見る必要がある

* * *

偏微分を計算するときは微分していない変数をいったん止めるが、偏微分を行った後は x も y も自由に動かせる

偏微分 $f_x(x,y)$ や $f_y(x,y)$ は、x と y を与えると 1 つの数が決めるという意味で、再び x, y の関数と見なすことができる

このように x, y の関数と見なすときは、偏導関数とよぶ

関数だと思えば、さらに偏微分を繰り返すことができる

こうして偏微分を 2 回繰り返した 2 階の偏微分には、いくつか可能性がある

- f を x で微分すると $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$
  - f_x を x で微分すると $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
  - f_x を y で微分すると $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$
- f を y で微分すると $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$
  - f_y を x で微分すると $f_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
  - f_y を y で微分すると $f_{yy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

2 階の偏微分 f_{xy} と f_{yx} の違いは、どちらを先に偏微分するかという点だが、多くの場合はこの順序を気にする必要はない

「素直」な関数ならば偏微分の順序が交換でき、$f_{xy} = f_{yx}$ が成り立つ

グラフを描いて 2 変数関数を見る

2 変数関数 $f(x,y)$ が与えられたとき､変数 x, y を自由に動かして点 $(x,y,f(x,y))$ を xyz 空間でプロットして得られる曲面を $z = f(x,y)$ のグラフという。

$f(x,y)$ が地点 (x,y) の標高の場合は、この $z = f(x,y)$ のグラフが表す曲面はこの野山の地表にほかならない。

- 2 変数関数 $f(x,y)$ をグラフで可視化すると、野山の形状になる
- 野山の形状から標高を考えると、2 変数関数 $f(x,y)$ になる

＊　＊　＊

$f(x,y)=x^2+y^2$ のグラフ

このグラフは、壺のような形になっている

この形状を、2 通りの見方で理解してみる

断面図　「曲面を見る」堅実な方法は、断面図（切り口）を順に見ること

- $y=0$ とすると、断面が xz 平面内の放物線 $z=x^2$ になる
- $y=1$ とすると、$z=x^2+1$ となり、これは $z=x^2$ のグラフを 1 だけ高くした放物線
- $y=2$ とすると、$z=x^2+4$ となり、放物線がさらに高くなる

こうして、$y=$ 定数 とした断面図をつなぎ合わせることで曲面の姿をつかむことができる

回転対称性　回転対称性を利用するという巧妙な方法もある

三平方の定理から、x^2+y^2 は原点から点 (x,y) までの距離の 2 乗

したがって、点 (x,y) が原点を中心とする半径 R の円周上にあれば、$f(x,y)$ の値はいつでも R^2 であり、$z=f(x,y)$ のグラフは z 軸に関して回転させても形が変わらない曲面になっている

このようにして、$z=x^2+y^2$ のグラフが放物線を z 軸に関してぐるっと回した壺のような曲面になっている様子が見えてくる

＊　＊　＊

$f(x,y)=x^2-y^2$ のグラフ

断面図（切り口）を順に見ていく

xz 平面における断面は、$y=0$ を代入すればわかる

すると $z=f(x,0)=x^2$ で、xz 平面において下に凸の放物線になる

今度は x を止めて、y を動かす

xyz 空間の中で、$x=$ 定数 は yz 平面に平行な平面となる

たとえば $x=0,1,2,\cdots$ とすると、順に $z=-y^2, z=1-y^2, z=4-y^2,\cdots$ となり、いずれも上に凸の放物線になる

下に凸の放物線（吊り下げたひも）の各点に、上に凸の放物線（針金）を順に貼り付けていくと、$z=x^2-y^2$ のグラフが得られる

＊　＊　＊

曲面 $z=x^2-y^2$ の局所的な形状は、身近なところにもあちこちに現れている

日本の数学用語では、このグラフの原点を、山の峠にちなんで峠点とよぶ

西洋では、乗馬にちなんで鞍点とよぶ

乗馬するとき、馬の背の凹んでいるところに鞍を置いてまたがるが、その形状は峠とそっくり

山が連なっているような山脈を越えて向こう側に行きたいとすると、できるだけ登りが少ない経路を選ぶだろう

このような往来によって踏み固められてできた道が「山脈越えの道」（グラフでは $x=0$ の場合の放物線）

旅人が山脈越えの道を登っていくと、峠はその道

沿いではいちばん高い地点になっている

峠で左右を見ると、山が続いている（$x=$ 定数 の場合の放物線）

いま登ってきた山脈越えの道と垂直に交わっている尾根道があるかもしれない（尾根道は $y=0$ の場合の放物線）

尾根道沿いに歩けば、峠はその前後ではいちばん低い場所になっている

これは特定の峠の話ではなく、峠の形状の普遍的な性質を示している