転置行列と随伴行列

複素正方行列 *A* の転置行列において、各成分をその共役複素数に置き換え た行列を随伴行列という

ref: 長岡亮介 線形代数 入門講義 p275

酸伴行列 複素正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し、 $\overline{a_{ji}}$ を (i,j) 成分にもつ行列 ${}^t\overline{A}$ を A の随伴行列といい、 A^* と表す

実数 x の複素共役は $\overline{x} = x$ であるので、A が実行列のときは、

$$A^* = {}^t A$$

すなわち、

実行列の世界では、随伴行列は転置行列

にすぎない



転置を二回行うと元に戻ることと同様に、次が成り立つ

・随伴行列の自己反転性 複素正方行列 A に対し、随伴行列を 二回とると元に戻る

$$(A^*)^* = A$$



随伴行列の定義より、

$$(A^*)^* = {}^t \overline{A^*} = {}^t \overline{\overline{A}}$$

 $A = (a_{ij})$ とすると、A の各成分を共役複素数にした行列は、

$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

これを転置すると、

$${}^{t}\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$$

さらに、もう一度各成分の複素共役をとると、

$${}^{t}\overline{\overline{A}}=(\overline{\overline{a_{ji}}})=(a_{ji})$$

したがって、

$$(A^*)^* = {}^{t}\overline{\overline{A}} = (a_{ij}) = A$$

が成り立つ



転置行列と複素共役の性質から、次の性質が成り立つ

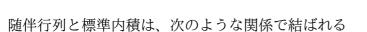
♣ 積に対するエルミート共役の順序反転性 複素行列 AB の積 AB が定義できるとき、

$$(AB)^* = B^*A^*$$





[Todo 1:]



・ 随伴公式 複素行列 A と計量空間上のベクトル u, v に対し、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},A^*\boldsymbol{v})$$

≥ 証明

転置を用いて内積を表すと、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = {}^{t}(A\boldsymbol{u})\overline{\boldsymbol{v}}$$

転置と行列積の順序反転性より、 $^t(A\boldsymbol{u})=^t\boldsymbol{u}^t\!A$ なので、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=({}^{t}\boldsymbol{u}^{t}A)\overline{\boldsymbol{v}}$$

行列の積の結合法則を用いて、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = {}^{t}\boldsymbol{u}({}^{t}\!A\overline{\boldsymbol{v}})$$

ここで、 \overline{tA} は、 $A=(a_{ij})$ とすると、

1.
$$\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$$

$$2. \ ^{t}\overline{A} = (\overline{a_{ji}})$$

3.
$$\overline{t}\overline{\overline{A}} = (\overline{\overline{a_{ji}}}) = (a_{ji}) = {}^tA$$

となり、 tA と一致する

これを用いて書き換えると、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = {}^{t}\boldsymbol{u}(\overline{{}^{t}\overline{A}}\overline{\boldsymbol{v}})$$

複素共役の積の性質 $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ を用いて、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = {}^{t}\boldsymbol{u}^{\overline{t}}\overline{\overline{A}}\boldsymbol{v}$$

この時点で、右辺を内積として書き直すと、*Av* の複素共役がなくなることに注意して、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},{}^{t}\overline{A}\boldsymbol{v})$$

随伴行列の定義 $A^* = {}^t\overline{A}$ より、

$$(A\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{u},A^*\boldsymbol{v})$$

となり、目的の等式が得られた

............

Zebra Notes

Туре	Number
todo	1