第 12 章

線形同型

線形同型

線形写像 $f\colon V \to U$ が全単射であるとき、f を同型写像（isomorphism）という。

def 12.1 - 線形同型写像

V, W を線形空間とし、線形写像 $f\colon V \to W$ が全単射であるとき、f は線形同型写像あるいは単に線形同型であるという。

このとき、同型を表す記号 $\cong$ を用いて、次のように表す。

$$f\colon V \xrightarrow{\cong} W$$

全単射性から、V のベクトル全体と W のベクトル全体の間に一対一の対応がつく。

また、線形性より、和・スカラー倍といった基本的な演算も対応がつく。

これより、W は V を f という精巧なレンズで観測した像であり、実体は同じものだとも考えられる。

def 12.2 – 部分空間の線形同型

V と W の間に線形同型写像が存在するとき、V と W は**線形同型**であるといい、次のように表す。

$$V \cong W$$

同型写像はふたつのベクトル空間を写しあう精巧なレンズである。

たとえば、同型写像 $f\colon V \to W$ があるとき、f を通して、V の性質を W の性質として「観測」することができる。

W が未知の線型空間でも、既知の線型空間 V と同型なら、W のことも V と同じようによくわかることになる。

特に、既知の線型空間として、数ベクトル空間 K^n を考えることが多い。

線形同型の性質

ここでは、線形同型写像の恒等写像、逆写像、合成写像との関係を述べる

線形同型と恒等写像

theorem – 恒等写像の線形同型性

恒等写像は線形同型写像である

証明

恒等写像は明らかに全単射であり、線形写像でもあるため、線形同型写像である ■

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

theorem - 部分空間の自己同型性

部分空間 V は V 自身と線形同型である

すなわち、

$$V \cong V$$

線形同型と逆写像

theorem - 線形同型写像の逆写像

線形同型写像の逆写像は線形同型写像である

証明

[Todo 1: book: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p93〜94]

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

theorem - 線形同型性の対称性

部分空間 V が部分空間 W と線形同型なら、W は V と線形同型である

すなわち、

$$V \cong W \Longrightarrow W \cong V$$

線形同型と合成写像

theorem - 線形同型写像の合成

線形同型写像の合成は線形同型写像である

証明

[Todo 2: book: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94]

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

theorem – 線形同型性の推移性

部分空間 V が部分空間 W と線形同型で、W が部分空間 U と線形同型ならば、V は U と線形同型である

すなわち、

$$V \cong W \land W \cong U \Longrightarrow V \cong U$$

ここまでで登場した、部分空間の線形同型に関する性質をまとめると、

theorem – 線形同型の同値関係としての性質

i. $V \cong V$
ii. $V \cong W \Longrightarrow W \cong V$
iii. $V \cong W \land W \cong U \Longrightarrow V \cong U$

となり、これらは、

> 同型 $\cong$ が等号 $=$ と同じ性質をもつ

ことを意味している

同型写像の像と基底

線形写像 $f: V \to W$ において、f が同型写像であることと、f が V の基底を W の基底に写すことは同値である。

基底によって、その線形空間のすべての元（ベクトル）を一意的に表すことができる。

そのため、基底の像がまた基底になることは、

i. f では作れないベクトルが W に残ることはない（f の像が W を張る）
ii. 異なるベクトルが同じベクトルに潰れることがない（f の像は線形従属にはならない）

ということを意味する。
ここで、(i) は全射の条件、(ii) は単射の条件を表しているので、基底の像がまた基底になるなら、f は全単射すなわち同型写像となる。

逆に、同型写像は基底を基底に写す写像となる。

theorem 12.1 – 基底の像が基底となることと同型性

V を線形空間とし、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする。線形写像 $f\colon V \to W$ に対し、次の条件は同値である。

i. $f\colon V \to W$ は同型である
ii. $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は W の基底をなす

証明

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

このとき、f は単射でもあり、全射でもある。
theorem 5.4「単射な線型写像は線型独立性を保つ」ことから、f の単射性により、基底の線型独立性が保たれる。
また、theorem 5.3「線形写像の全射性と像の関係」より、f の全射性は、f の像が W を張ることを意味する。
よって、f による像は W の基底をなす。 ■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

[Todo 3:]

座標写像による数ベクトル空間との同型

K^n の座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ を、次のように V のベクトルに送り込む写像 Φ を考える。

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{v}_n$$

ここで、K^n の座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ は、標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ を用いたベクトルの成分表示として考えている。（標準基底による直交座標系の構成［第 1 章］）

[Todo 4: 座標写像が線形写像であること]

def 12.3 - 座標写像

V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする。

このとき、K^n から V への線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}} \colon K^n \to V$ を次のように定める。

$$\Phi_{\mathcal{V}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \quad (x_i \in K)$$

この写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ を $\mathcal{V}$ で定まる座標写像という。

theorem 12.2 - 座標写像の線形同型性

座標写像（def 12.3）は線形同型写像である。

証明

K^n の座標 $(x_1, \ldots, x_n)$ を $\boldsymbol{x}$ と表記し、線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ が全単射であることを示す。

単射であること

基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の線型独立性は、次の条件を満たすことである。

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{o} \Longrightarrow x_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$\Phi_{\mathcal{V}}$ の定義をふまえると、上の条件は、次のように書ける。

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

よって、theorem 5.1「零ベクトルへの写像による単射性の判定」より、

$\Phi_{\mathcal{V}}$ は単射である ■

全射であること

基底の定義より、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は V を生成する。

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = V$$

$\Phi_{\mathcal{V}}$ の定義をふまえると、$\Phi_{\mathcal{V}}$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合全体、すなわち ベクトルが張る空間（def 10.2）を像として持つ。

$$\operatorname{Im} \Phi_{\mathcal{V}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$$

よって、

$$V = \operatorname{Im}(\Phi_{\mathcal{V}})$$

が成り立つため、theorem 5.3「線形写像の全射性と像の関係」より、$\Phi_{\mathcal{V}}$ は全射である。 ■

数ベクトル空間との同型

theorem 12.2「座標写像の線形同型性」を部分空間の線形同型に関して言い換えると、次のような主張になる。

theorem 12.3 - 有限次元部分空間と数ベクトル空間の線形同型性

任意の部分空間 V は、次元の等しい数ベクトル空間 K^n と線形同型である。

このことはつまり、

和とスカラー倍だけに着目すれば、

どんな部分空間も数ベクトル空間と「同じ」

ということを意味する。

この同型により、部分空間に座標を与えることができる。

そしてその座標によって、ベクトルの成分表示が得られる。

基底が定める同型と成分表示

同型を選ぶことは、基底を選ぶことと同値である。

同型写像 $f\colon K^n \to V$ を 1 つ選ぶと、theorem 12.1「基底の像が基底となることと同型性」より、その像 $\{f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)\}$ は V の基底を成す。

逆に、V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を 1 つ選ぶと、$\boldsymbol{e}_i \mapsto \boldsymbol{v}_i$ と定めることで、同型写像 $f\colon K^n \to V$ が一意的に定まる。

つまり、基底を選ぶことは、V に座標を入れて $V \cong K^n$ とみなすことにほかならない。

ここで、次の定理により、未知の同型写像 $f\colon K^n \to V$ に関する議論を、座標写像による議論に帰着させることができる。

theorem 12.4 - 基底に基づく座標写像と同型写像の同一視

任意の同型写像 $f\colon K^n \to V$ は、V のある基底 $\mathcal{V}$ に対する座標写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ そのものである。

証明

f が同型 $\Longrightarrow$ f は座標写像

任意の同型写像 $f\colon K^n \to V$ をとる。

f は同型であるから、theorem 12.1「基底の像が基底となることと同型性」より、f は K^n の基底を V の基底に写す。

そこで、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を、K^n の標準基底の像として定める。

$$\boldsymbol{v}_i = f(\boldsymbol{e}_i) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

このとき、任意の $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ について、

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(\boldsymbol{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \Phi_{\mathcal{V}}(x)$$

が成り立つことから、$f = \Phi_{\mathcal{V}}$ である。 ■

f が座標写像 $\Longrightarrow$ f は同型

theorem 12.2「座標写像の線形同型性」から成り立つ。 ■

同型と基底の対応

基底を選ぶことは、V に座標を入れて $V \cong K^n$ とみなすことにほかならない。

このことは、次の定理として示すことができる。

theorem – 同型と基底の対応

V を n 次元線形空間、K^n の標準基底を $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ とする。

同型写像 $\Phi\colon K^n \to V$ に対し、V の基底を対応させる写像は同型である。

$$\begin{array}{cccc} \Theta\colon & \{\text{ 同型 } K^n \to V\} & \longrightarrow & \{V \text{ の基底 }\} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & f & \longmapsto & \{f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)\} \end{array}$$

証明

V の基底を $\mathcal{V}$ と表記する。

Θ の定義より、次のように書ける。

$$\Theta(f) = \{f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)\} = \mathcal{V}$$

theorem 12.4「基底に基づく座標写像と同型写像の同一視」より、同型写像 $f\colon K^n \to V$ を座標写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ とみなしても一般性を失わない。

そこで、写像 Ψ を、V の基底に対して座標関数 $\Phi_{\mathcal{V}}$ を対応させる写像として定める。

$$\Psi\colon \{V \text{ の基底 }\} \to \{\text{ 同型 } K^n \to V\}$$

すなわち、次のように書ける。

$$\Psi(\mathcal{V}) = \Phi_{\mathcal{V}} = f$$

Θ と Ψ が互いに逆写像であることを示せば、Θ が同型（可逆）であることが従う。

まず、任意の $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対し、

$$\begin{aligned}(\Theta \circ \Psi)(\mathcal{V}) &= \Theta(\Psi(\mathcal{V})) = \Theta(\Phi_{\mathcal{V}}) \\ &= \{\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{e}_1), \ldots, \Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{e}_n)\} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} = \mathcal{V}\end{aligned}$$

となるので、$\Theta \circ \Psi$ は恒等写像である。

また、任意の $f\colon K^n \to V$ に対し、

$$(\Psi \circ \Theta)(f) = \Psi(\Theta(f)) = \Psi(\mathcal{V}) = \Phi_{\mathcal{V}} = f$$

となるので、$\Psi \circ \Theta$ も恒等写像である。

したがって、 def A.7「逆写像（恒等写像による定義）」より、Θ と Ψ は互いに逆写像である。

このことから、Θ は同型であることがいえる。 ■

基底が定める同型

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が基底であるとき、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が定める線形写像 $f\colon K^n \to V$ を、基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が定める同型という。

どんな線型空間 V でも、V の基底があれば、数ベクトル空間から V への同型が定まるため、V の元を数ベクトルを使って表すことができる。

V の基底をとる（take）ことで、

V の元を数ベクトルを使って表すことができる

行列と A 倍写像の同型

これまで、線形写像とその表現行列を「同じ」ものとして扱うことが多くあった。

その基本的な考え方については行列から定まる線形写像［第 2 章］で述べたが、同型の概念によって、その根拠をより厳密に議論できる。

A 倍写像

縦ベクトルに左から行列をかけたものは、縦ベクトルとなる。

より具体的には、n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、$m \times n$ 型行列 A を左からかけたものは、m 次元縦ベクトルとなる。

$$\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{\boldsymbol{v}} = \underset{m \times 1}{A\boldsymbol{v}}$$

同じ

このとき、行列は、あるベクトルを別なベクトルに対応させる役割を果たしている。

そこで、「左から行列をかける」という操作を、一種の 写像（def A.1）と考えることができる。

def - A 倍写像

$m \times n$ 型行列 A に対し、次のようにおくことで定まる写像 $f_A\colon K^n \to K^m$ を、A 倍写像（multiplication by A）という。

$$f_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

A 倍写像が線形であることは、theorem 2.3「行列から定まる線形写像」で示されている。

theorem - A 倍写像の線形性

A を $m \times n$ 型行列とすると、A 倍写像 $f_A\colon K^n \to K^m$ は線形写像である。

A 倍写像と標準基底

行列 A を、n 個の m 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in K^m$ を並べたものとみなす。

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

このとき、A 倍写像 $f_A\colon K^n \to K^m$ は、次のように定義される。

$$f_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in K^n)$$

この f_A を標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in K^n$ に作用させると、

$$f_A(\boldsymbol{e}_i) = A\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

よって、A 倍写像 f_A は、標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \in K^n$ を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in K^m$ に写す線形写像にほかならない。

行列と線形写像の同一視

次の同型が、行列 A と線形写像 f_A を同じものと考えることの根拠となっている。

theorem – 行列と線形写像の同型対応

$m \times n$ 型行列 A に対して、A 倍写像 $f_A\colon K^n \to K^m$ を対応させる写像は同型である。

$$\begin{array}{cccc} \Psi\colon & M_{mn}(K) & \longrightarrow & \{\text{線形写像 } K^n \to K^m\} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & A & \longmapsto & f_A \end{array}$$

証明

K^n の標準基底を $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ とする。

また、$A \in M_{mn}(K)$ の第 j 列を $\boldsymbol{a}_j \in K^m$ と書くことにする。

Ψ の定義と存在

theorem 10.7「基底を写す線形写像の存在」より、

$$f_A(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

を満たす線形写像 $f_A\colon K^n \to K^m$ が一意に存在する。

よって、A を与えたときに f_A は一意に定まるため、写像 Ψ が定義できる。

Ψ の単射性

$f_A = f_B$ ならば、すべての j について次が成り立つ。

$$\boldsymbol{a}_j = A\boldsymbol{e}_j = f_A(\boldsymbol{e}_j) = f_B(\boldsymbol{e}_j) = B\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{b}_j$$

したがって、A, B の列ベクトルは一致するため、$A = B$ がいえる。

よって、

$$f_A = f_B \implies A = B$$

より、Ψ は 単射（def A.3）である。 ■

Ψ の全射性

任意の線形写像 $g\colon K^n \to K^m$ をとる。

各 j について $\boldsymbol{w}_j = g(\boldsymbol{e}_j)$ とおき、行列 A を次のように定める。

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \cdots & \boldsymbol{w}_n \end{pmatrix} \in M_{mn}(K)$$

すると、$f_A(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{w}_j = g(\boldsymbol{e}_j)$ であるから、theorem 10.8「基底上の値による線型写像の同一性判定」より、$f_A = g$ がしたがう。

ゆえに、Ψ の像は任意の線形写像となるため、Ψ の像空間と線形写像全体の集合は一致する。よって、Ψ は 全射（def A.4）である。 ■

Ψ の線形性

$A, B \in M_{mn}(K)$、$c_1, c_2 \in K$ とすると、

$$(c_1A + c_2B)\boldsymbol{e}_j = c_1A\boldsymbol{e}_j + c_2B\boldsymbol{e}_j$$

なので、基底 $\{\boldsymbol{e}_j\}$ 上で次が成り立つ。

$$f_{c_1A+c_2B}(\boldsymbol{e}_j) = c_1f_A(\boldsymbol{e}_j) + c_2f_B(\boldsymbol{e}_j)$$

theorem 10.8「基底上の値による線型写像の同一性判定」より、基底上で値が一致する線形写像は一意であるから、

$$\Psi(c_1A + c_2B) = c_1\Psi(A) + c_2\Psi(B)$$

よって、Ψ は線形写像である。 ■

線形代数における鳩の巣原理

theorem 12.5 - 線形代数における鳩の巣原理の抽象版

V, W を同じ次元の線形空間とするとき、線形写像 $f\colon V \to W$ に関して、次はすべて同値である

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は線形同型
iv. $\operatorname{rank}(f) = \dim V = \dim W$

証明

$\mathcal{V}, \mathcal{W}$ をそれぞれ V, W の基底として、線形写像の合成

$$g\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{V}}} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{W}}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

を考える

このとき、g は $\mathbb{R}^n$ の線形変換である

f が単射（全射）であると仮定すると、座標写像は全単射であるので、f との合成写像 g も単射（全射）となる

逆に、g が単射（全射）であると仮定した場合について考える

f は g を用いて次のように表現でき、

$$f = \Phi_{\mathcal{W}} \circ g \circ \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}$$

座標写像は全単射であるので、g との合成写像 f も単射（全射）となる

以上より、f が単射（全射）であることと、g が単射（全射）であることは同値である

線形変換 g に対して、theorem 11.3「線形代数における鳩の巣原理」より、

$$g \text{ が単射} \iff g \text{ が全射} \iff g \text{ が全単射}$$

が成り立つが、g の単射性・全射性は f についても成り立つことがわかったので、

$$f \text{ が単射} \iff f \text{ が全射} \iff f \text{ が線形同型}$$

がいえる

最後に、階数に関する条件を示す

全射となるときの像 [第 5 章] により、f が全射であることは、$\mathrm{Im}(f) = W$ と同値であるから、

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim W$$

より、

$$\mathrm{rank}(f) = \dim W = \dim V$$

が得られる ■

次元による部分空間の比較

次の事実は、数の一致で空間の一致が結論できる有用な結果である

theorem 12.6 - 次元の一致による部分空間の一致判定

2 つの線型空間について、$V \subset W$ ならば、

$$\dim V = \dim W \Longrightarrow V = W$$

証明

$\boldsymbol{v} \in V$ をそのまま W の元と考えることで得られる写像を $\iota\colon V \to W$ とする（包含写像）

この包含写像は、V の元 $\boldsymbol{v}$ を W の中にそのまま「埋め込む」操作を表しているため、$\iota(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ 自身である

$$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$$

特に、$\iota(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ は $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ そのものを意味する

$$\iota(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \iff \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

したがって、theorem 5.1「零ベクトルへの写像による単射性の判定」より、ι は単射である

また、ι が単射であることと、仮定 $\dim V = \dim W$ を合わせると、theorem 12.5「線形代数における鳩の巣原理の抽象版」より、ι は全射であることがわかる

よって、全射の定義より、すべての $\boldsymbol{w} \in W$ に対して $\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v}$ が存在する

すなわち、W の元はすべて V の元であり、$V \subset W$ もふまえると、これは $V = W$ を意味する ■

theorem – 次元による部分空間の比較

K^n の部分空間 V, W について、$V \subseteq W$ ならば、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立するのは、$V = W$ のときに限る

証明

$V \subseteq W$ であることから、theorem 10.6「基底の延長」により、V の基底を延長して W の基底にできるので、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立する場合については、前述の theorem 12.6「次元の一致による部分空間の一致判定」を参照 ■

核空間・像空間の次元

theorem – 線形写像の単射性と核の次元

線形写像 $f : V \to W$ について、

$$f \text{ が単射} \iff \dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$

証明

theorem 5.2「線形写像の単射性と核の関係」より、f が単射であることは次と同値である

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

def 10.3「次元」より、$\{\mathbf{0}\}$ の次元は 0 であるので、

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$

が成り立つ ■

theorem – 線形写像の全射性と像の次元

線形写像 $f : V \to W$ について、

$$f \text{ が全射} \iff \dim \mathrm{Im}(f) = \dim W$$

証明

theorem 12.5「線形代数における鳩の巣原理の抽象版」の主張そのものである

■

Zebra Notes

Type	Number
todo	4