解の存在条件

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p110〜111

連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解の存在条件について、階数を用いて議論することができる。

まず、行基本変形によって得られる方程式の解は、元の方程式の解と同じであった。

そこで、次のように変形した拡大係数行列をもとに考えると、

$$
\tilde{A}\text{の変形後} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_{r+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & b_m
\end{array}\right) \\
\underset{n}{\longleftrightarrow}
\end{array}
$$

この方程式の解が存在するのは、

$$
b_{r+1} = \cdots = b_m = 0
$$

の場合のみであることをすでに考察した。

ここで、拡大係数行列 $\tilde{A}$ は A の右端に 1 列追加して得られるので、零行でない行の個数、すなわち階数を考えると、rank $\tilde{A}$ は rank A と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかである。

$b_{r+1} = \cdots = b_m = 0$ の場合、rank $\tilde{A}$ と rank A は一致する。

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\xleftrightarrow[n]{\qquad\qquad\qquad}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{matrix} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & \end{matrix} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\xleftrightarrow[n]{\qquad\qquad\qquad}
\end{array}
$$

一方、$b_{r+1}, \ldots, b_m$ のうち、1 つでも 0 でないものがある場合は、拡大係数行列の右端の列に主成分が現れ、$\operatorname{rank}\tilde{A}$ と $\operatorname{rank}A$ は一致しない。

$$
\begin{array}{c}
\begin{matrix} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
\xleftrightarrow[n]{\qquad\qquad\qquad}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{matrix} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & \end{matrix} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & b_r \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \\
\xleftrightarrow[n]{\qquad\qquad\qquad}
\end{array}
$$

$b_{r+1}, \ldots, b_m$ のうち、0 でないものが 2 つ以上ある場合も、さらに行基本変形を行うことで、右上の拡大係数行列と同じ形にできるので、

$$
\operatorname{rank}\tilde{A} = \operatorname{rank}A + 1
$$

となる。

以上の考察から、連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する条件は、

係数行列と拡大係数行列の階数が等しい

ことだといえる。

拡大係数行列と解の存在条件　A を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする

$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ とおくとき、

$$\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A) \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p31 （定理 1.5.1）]

解の存在条件の系　A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する} \iff \mathrm{rank}(A) = m$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p32 （定理 1.5.2, 1.5.3）]

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	2