線形部分空間の定義

$\mathbb{R}^n$ の部分集合であって、ベクトル演算で閉じた集合について考える

原点を含み直線や平面などを一般化した概念である

ref: 行列と行列式の基礎 p93〜94

線形部分空間　$\mathbb{R}^n$ のベクトルからなる空集合でない集合 V は、次が成り立つとき**線形部分空間**あるいは簡単に**部分空間**であるという

i. すべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ が成り立つ
ii. すべての $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \in V$ に対して $c\boldsymbol{u} \in V$ が成り立つ

線形部分空間の例：$\mathbb{R}^n$ 自身

たとえば、$\mathbb{R}^n$ 自身は明らかに $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

線形部分空間の例：零ベクトルだけからなる部分集合

零ベクトル $\mathbf{0}$ だけからなる部分集合 $\{\mathbf{0}\}$ も部分空間である

V は空集合でないので、ある $\boldsymbol{v} \in V$ をとるとき、線形部分空間の定義 ii より

$$0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \in V$$

よって部分空間は必ず $\mathbf{0}$ を含む

線形部分空間の例：ベクトルが張る空間

⚓ ベクトルが張る空間は線形部分空間　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は部分空間である

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.2]

たとえば $\mathbb{R}^3$ において座標を (x, y, z) とするとき、xy 平面は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である

座標部分空間　$\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合 I に対して、$x_i\ (i \in I)$ 以外の座標がすべて 0 である部分集合は $\mathbb{R}^n$ の部分集合である

このようなものを**座標部分空間**といい、$\mathbb{R}^I$ と書く

$$\mathbb{R}^I = \langle \boldsymbol{e}_i \mid i \in I \rangle$$

と表すこともできる

⚓ 部分空間の張る空間は部分空間　$V \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ とすると、

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \subset V$$

証明

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.4]

線形部分空間の例：交わり

⚓ 線形部分空間の和空間は部分空間　V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき、交わり $V \cap W$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

線形部分空間の例：和空間

⚓ 線形部分空間の和空間は部分空間　V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき、和空間

$$V + W := \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

線形写像の核空間

ref: 行列と行列式の基礎 p94〜95

⚓ 線形写像の核空間は部分空間　$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、核空間 $\mathrm{Ker}(f)$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p69 問 2.15]

すでに学んだように、斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度を d とすると、基本解 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d \in \mathrm{Ker}(A)$ が存在して、任意の $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(A)$ に対して

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_d\boldsymbol{u}_d$$

を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$ が一意的に定まる

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	3