

第 22 章

三角化と行列多項式



行列の三角化

対角化の次善の策として、**三角化**という方法がある

Theorem 22.1 - 三角化定理

A を n 次複素正方行列とすると、ある正則行列 P が存在して、 $P^{-1}AP$ が上三角行列になる

その対角成分は重複度を含めて A の固有値と一致する

証明

三角化できること

n に関する帰納法を用いる

$n = 1$ のとき、 A は 1×1 型行列なので、上三角行列である

$n \geq 2$ のとき、 \mathbf{v}_1 を A の固有ベクトルとし、その固有値を α_1 とする

$\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ を追加して、 \mathbb{C}^n の基底に延長する

$P_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ とおくと、

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}$$

ここで、 A_1 は $(n - 1)$ 次正方行列である

帰納法の仮定より、 $(n - 1)$ 次の正則行列 P_2 を選べば、 $P_2^{-1}A_1P_2$ は上三角行列になる

そこで、

$$P = P_1 \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix}$$

とおくと、**Theorem 6.5「ブロック対角行列の正則性」**より、 P_2 が正則であることから、 P は正則である

P の逆行列は、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2^{-1} \end{pmatrix} P_1^{-1}$$

であるので、

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2^{-1} \end{pmatrix} P_1^{-1}AP_1 \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & P_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & * \\ \mathbf{0} & P_2^{-1}A_1P_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$P_2^{-1}A_1P_2$ は上三角行列であるから、 $P^{-1}AP$ も上三角行列となる ■

対角成分が固有値と一致すること

Theorem 16.7「三角行列の行列式」より、三角行列の行列式は対角成分の積になる

このことから、 n 次上三角行列 $B = (b_{ij})$ に対して、

$$\Phi_B(x) = \det(xE - B) = (x - b_{11}) \cdots (x - b_{nn})$$

が成り立つため、 B の固有値は、特性方程式

$$(x - b_{11}) \cdots (x - b_{nn}) = 0$$

の解 b_{11}, \dots, b_{nn} となる

さて、 $P^{-1}AP$ と A は相似な行列であるので、**Theorem 19.4**「相似な行列の特性多項式」より、その特性多項式は一致する

$$\Phi_A(x) = \Phi_{P^{-1}AP}(x) = \det(xE - P^{-1}AP)$$

よって、 $P^{-1}AP$ が上三角行列ならば、 $A = (a_{ij})$ とおくと、

$$\Phi_A(x) = (x - a_{11}) \cdots (x - a_{nn})$$

が成り立ち、 A の固有値は A の対角成分 a_{11}, \dots, a_{nn} となる ■

QR 分解

任意の正則行列は、ユニタリ行列（直交行列）と上三角行列の積に分解することができる
この分解は **QR 分解** と呼ばれ、行列の数値計算等で利用されている

📌 Theorem - 正則行列に対する QR 分解の存在

任意の n 次複素**正則**行列 A に対して、 $A = QR$ となるユニタリ行列 Q と上三角行列 R が存在する

🔪 証明

A は正則行列であるので、**Theorem 11.5**「列ベクトルの線型独立性による正則の判定」より、その列ベクトルは線型独立である

そこで、 $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ とおくと、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ からグラム・シュミットの直交化法を用いて、正規直交基底 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ を作ることができる

このとき、**Theorem 15.2「正規直交基底によるベクトルの展開」**より、次のように正規直交基底を用いた線形結合で \mathbf{a}_j を表すことができる

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^j (\mathbf{a}_j, \mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i \quad (j = 1, \dots, n)$$

この等式は、次のように書き換えられる

$$\mathbf{a}_j = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_j, \mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_j, \mathbf{u}_j) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

そこで、

$$r_{jk} = \begin{cases} (\mathbf{a}_j, \mathbf{u}_k) & (1 \leq k \leq j) \\ 0 & (j < k \leq n) \end{cases}$$

とおくと、行列 $R = (r_{jk})$ は上三角行列である

また、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ は正規直交系であるので、**Theorem 20.7「ユニタリ行列の列ベクトルの直交正規性」**より、これらを列ベクトルとした行列 $Q = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ はユニタリ行列である

したがって、 $A = QR$ となる ■

この定理の証明において、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ から正規直交基底を構成するところを工夫すると、正則行列だけでなく、任意の複素正方行列もユニタリ行列と上三角行列の積で表せることがわかる

📌 Theorem - QR 分解の存在

任意の n 次複素正方行列 A に対して、 $A = QR$ となるユニタリ行列 Q と上三角行列 R が存在する

証明

A の列ベクトルは線型独立であるとは限らないが、グラム・シュミットの直交化法は線形従属なベクトルに対しても適用できる

ただし、線形従属なベクトルにグラム・シュミットの直交化法を適用すると、零ベクトルが得られることがある

零ベクトルは基底として使うことはできないため除外し、残った正規直交ベクトルを $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ とする

ここに $n - k$ 個のベクトルを補う形で、正規直交基底 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_n$ を構成する

この場合も、正規直交基底を用いた線形結合で任意のベクトル \mathbf{a}_j を表すことができるので、

$$\mathbf{a}_j = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} (\mathbf{a}_j, \mathbf{u}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{a}_j, \mathbf{u}_k) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり、以降は A が正則な場合と同様に示すことができる ■

ユニタリ行列による三角化

Theorem 20.12 「正規行列のユニタリ対角化」 より、ユニタリ行列によって対角化できる行列は正規行列であった

したがって、正規行列以外の行列は、ユニタリ行列によって対角化することはできないが、ユニタリ行列によって三角化することはできる

📌 Theorem - シューア分解の存在

n 次複素正方行列 A に対して、適当なユニタリ行列 U により、 $U^{-1}AU$ を上三角行列 (A の **シューア形**) にすることができる

🔪 証明

任意の正則行列 P は QR 分解でき、ユニタリ行列 U と上三角行列 T を用いて、 $P = UT$ と表せる

このとき、 P の列ベクトルを $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ 、 U の列ベクトルを $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ とすると、

$$(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)T$$

となり、 P の列ベクトルは P の正則性より線型独立、 U の列ベクトルは正規直交性から線型独立であるので、 T は $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ から $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ への基底変換行列とみなせる

よって、基底変換行列 T は正則であるので、その逆行列を用いて、

$$U = PT^{-1}$$

と書くことができる

また、 U はユニタリ行列であるので、その定義から正則である

U の逆行列は、**Theorem 6.2「正則行列の積に対する逆行列」**と、**Theorem 6.1「逆行列に対する逆行列」**より、逆行列の逆行列をとると元に戻ることを用いて、

$$U^{-1} = (PT^{-1})^{-1} = (T^{-1})^{-1}P^{-1} = TP^{-1}$$

と計算できる

これらを用いると、

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= (TP^{-1})APT^{-1} \\ &= T(P^{-1}AP)T^{-1} \end{aligned}$$

となり、ここで、

- T は上三角行列

- $P^{-1}AP$ は [Theorem 22.1「三角化定理」](#) より、上三角行列
- T^{-1} は [Theorem 6.4「正則な上三角行列の逆行列」](#) より、上三角行列

であることと、[Theorem 3.1「上三角行列の積」](#) より、上三角行列の積は上三角行列になることから、 $U^{-1}AU$ も上三角行列になる ■



行列多項式

[Todo 1:]



フロベニウスの定理

[Todo 2:]



ケイリー・ハミルトンの定理

[Todo 3:]



最小多項式

[Todo 4:]

.....

Zebra Notes

Type	Number
todo	4