合成関数の微分

$x = g(t)$ を $f(x)$ に代入すると、t を変数とする関数 $f(g(t))$ が得られる

この関数 $f(g(t))$ を、関数 $f(x)$ と関数 $g(t)$ の合成関数という

＊　＊　＊

■定理：合成関数の微分（連鎖律）

関数 $f(x)$ と関数 $g(t)$ の合成関数 $f(g(t))$ を $F(t)$ と書くと、

$$F'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

が成り立つ

＊　＊　＊

代入してから微分 $\neq$ 微分してから代入であることに注意

- $F'(t)$：代入してから微分（$x = g(t)$ を $f(x)$ に代入した関数 $f(g(t))$ を微分）
- $f'(g(t))$：微分してから代入（$f(x)$ を微分した $f'(x)$ に $x = g(t)$ を代入）

後者に $g'(t)$ をかけて初めて前者と一致する、というのが合成関数の微分公式の趣旨

＊　＊　＊

連鎖率の感覚　勾配が一定の坂道を登っている状況を考える

- 水平方向の速度は、「単位時間あたりにどれだけ進むか」を表している
- 坂道の勾配は、「単位距離進むごとにどれだけ登るか」を表している

よって、上下方向の速度「単位時間あたりにどれだけ登るか」を求めるには、水平方向の速度と勾配をかければよい

$$\text{上下方向の速度} = \text{水平方向の速度} \times \text{勾配}$$

この計算式を、微分を用いて表現する

水平方向に座標 x をとり、その標高を $f(x)$ とする

そうすると、微分 $f'(x)$ はこの地点での坂道の勾配となる

一方、ある人が時刻 t に、x 座標では $x = g(t)$ の地点にいるとすると、微分 $g'(t)$ はその人の水平方向の速度となる

このとき、合成関数 $F(t) = f(g(t))$ は時刻 t にこの人がいる地点の標高となり、その微分 $F'(t)$ は、時刻 t における上下方向の速度を表すことになる

よって、上下方向の速度を求める式は、

$$F'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

これは、合成関数の微分の公式になっている