転置写像

A を $m \times n$ 型行列とする

ref: 行列と行列式の基礎 p122〜123

縦ベクトルに A を左からかけることによって定まる線形写像を次のように表す

$$f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ (\boldsymbol{v} \mapsto A\boldsymbol{v})$$

これと対照的に、横ベクトルに右から A をかけることによって定まる次の線形写像を**転置写像**と呼ぶ

$$f_A^* \colon {}^t\mathbb{R}^m \to {}^t\mathbb{R}^n \ (\phi \mapsto \phi A)$$

横ベクトル $\phi A \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、次の合成写像の表現行列である

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$$

転置写像と自然なペアリング　A を $m \times n$ 型行列とし、$\phi \in {}^t\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\langle f_A^*(\phi), \boldsymbol{v} \rangle = \langle \phi, f_A(\boldsymbol{v}) \rangle$$

証明

$$\begin{aligned}
\langle f_A^*(\phi), \boldsymbol{v} \rangle &= (\phi A)(\boldsymbol{v}) \\
&= \phi(A\boldsymbol{v}) \\
&= \phi(f_A(v)) \\
&= \langle \phi, f_A(\boldsymbol{v}) \rangle
\end{aligned}$$

より、目的の等式が得られる ■

転置写像と座標関数　A を $m \times n$ 型行列とし、$y_1, \ldots, y_m \in {}^t\mathbb{R}^m$ を ${}^t\mathbb{R}^m$ 上の座標関数とするとき、

$$f_A^*(y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

証明

行ベクトルとしての観点から見ると、$y_i = {}^t\boldsymbol{e}_i$ として、

$$f_A^*(y_i) = f_A^*({}^t\boldsymbol{e}_i) = {}^t\boldsymbol{e}_i A = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

これは双対基底 $x_j = {}^t\boldsymbol{e}_j$ を用いて、

$$\begin{aligned} f_A^*(y_i) &= \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} {}^t\boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \end{aligned}$$

とも書ける　■

転置写像の表現行列　A を $m \times n$ 型行列とするとき、基底 $\{y_1, \ldots y_m\}$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ に関する f_A^* の表現行列は ${}^tA$ である

証明

[Todo 1: よくわからない]

表現行列は、基底 $\{y_i\}$ の各元が、写像を通してどのような線形結合で $\{x_j\}$ に写されるかを記述したものである

すなわち、写像 f_A^* の表現行列を求めることは、

$$f_A^*(y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

において、係数 a_{ij} を行列に並べることである

ここで、$f_A^*\colon {}^t\mathbb{R}^m \to {}^t\mathbb{R}^n$ において、

- 定義域の基底は $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset {}^t\mathbb{R}^m$
- 値域の基底は $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset {}^t\mathbb{R}^n$

先ほど示した等式

$$f_A^*(y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (1 \leq i \leq m)$$

より、表現行列の第 i 列が、$f_A^*(y_i)$ の係数ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

を転置して縦ベクトルにしたものになる

. . . .

Zebra Notes

Type	**Number**
todo	1