和空間と直和の次元

ightharpoonup 和空間の次元 $ightharpoonup K^n$ の部分空間 ightharpoonup V, ightharpoonup W に対して、

 $\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$

が成り立つ

ref: 行列と行列式の基

礎 p103

ref: 図で整理!例題で

納得!線形空間入門 p39

 \sim 41

ref: 長岡亮介 線形代数 入門講義 235~236

☎ 証明

 $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ とする

 $V \cap W$ の基底 $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_d\}$ をとる これを基底の延長の定理に基づいて、V の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}\}$$

に延長する

同様に、 $\boldsymbol{\mathcal{V}}$ を \boldsymbol{W} の基底

$$\mathcal{V} \cup \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}\}$$

に延長する

このとき、 $\boldsymbol{u_1},\ldots,\boldsymbol{u_d},\boldsymbol{v_1},\ldots,\boldsymbol{v_{n-d}},\boldsymbol{w_1},\ldots,\boldsymbol{w_{m-d}}$ がV+Wの基底になることを示す

V+W を生成すること

 $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$ とすると、それぞれ基底の線形結合で表す

ことができる

$$egin{align} oldsymbol{v} &= \sum_{i=1}^d a_i oldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j oldsymbol{v}_j \ oldsymbol{w} &= \sum_{i=1}^d c_i oldsymbol{u}_i + \sum_{k=1}^{m-d} d_k oldsymbol{w}_k \end{aligned}$$

V + W の任意の元は、 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ と書けるので、

$$oldsymbol{v} + oldsymbol{w} = \sum_{i=1}^d (a_i + c_i) oldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j oldsymbol{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} d_k oldsymbol{w}_k$$
となり、 $\{oldsymbol{u}_1, \ldots, oldsymbol{u}_d, oldsymbol{v}_1, \ldots, oldsymbol{v}_{n-d}, oldsymbol{w}_1, \ldots, oldsymbol{w}_{m-d} \}$ の線形結合で表せる

線型独立であること

 $oldsymbol{u}_1,\ldots,oldsymbol{u}_d,oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_{n-d}$ 、 $oldsymbol{w}_1,\ldots,oldsymbol{w}_{m-d}$ が線型独立であることを示すために、次のような線形関係式を考える

$$\sum_{i=1}^{d} c_i \boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} c_{d+j} \boldsymbol{v}_j + \sum_{k=1}^{m-d} c_{d+n-d+k} \boldsymbol{w}_k = \mathbf{0}$$

ここで、 $c_i \in K$ はスカラーである

この式を V と W の基底の線型結合として考えると、V の基底 \boldsymbol{u}_i , \boldsymbol{v}_j に関する部分と W の基底 \boldsymbol{u}_i , \boldsymbol{w}_k に関する部分がそれぞれ線形独立であるため、結局どの項においても $c_i=0$ である必要がある

よって、
$$oldsymbol{u}_1,\ldots,oldsymbol{u}_d,oldsymbol{v}_1,\ldots,oldsymbol{v}_{n-d},oldsymbol{w}_1,\ldots,oldsymbol{w}_{m-d}$$
 は線型独立である

以上より、 $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}$ はV+W の基底であることが示された

この基底をなすベクトルの個数(次元)について考えると、

$$\dim(V+W) = d + (n-d) + (m-d)$$
$$= n + m - d$$

となる

CCC, $d = dim(V \cap W)$ CCC,

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$$

と書き換えられ、目的の式が得られた



直和分解に対して和空間の次元定理を適用すると、次のようにまとめられる

$$\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

が成り立つ

証明

直和分解の定義より $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ であるので、

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$$

よって、和空間の次元の式から、 $\dim(W_1 \cap W_2)$ が消えた形にな

る



また、和空間の次元定理の証明過程を、直和分解の場合で考えることで、次の定理が得られる

・ 直和の基底 線形空間 V が部分空間 W_1 , W_2 の直和に分解 されることと、V の基底が W_1 , W_2 の基底を合わせたものになることは同値である

証明

直和分解の場合、 $W_1 \cap W_2 = \{ \mathbf{0} \}$ であるため、和空間の次元定理の証明過程において、 $W_1 \cap W_2$ の基底を考える必要がなくなる

よって、和空間の次元定理の証明と同様にして、 W_1 の基底と W_2 の基底を合わせたものが V の基底になることが示される