# 固有値と固有ベクトル

与えられた線形写像を表現する行列を単純化(<mark>対角化</mark>)する上で、一次元不 変部分空間への直和分解が本質的な役割を果たす

一次元の f 不変部分空間 W の基底 a とは、

 $\delta \lambda \in K$  について  $f(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a}$ 

となるような 0 以外のベクトルだった

■ 固有値と固有ベクトル 体 K 上の線形空間 V 上の線形変換  $f: V \rightarrow V$  に対して、

$$f(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0})$$

となるベクトル  $\alpha \in V$  が存在するとき、このようなスカラー  $\lambda \in K$  を、線形変換 f の固有値という

また、このようなベクトル  $oldsymbol{a}$  を、 $oldsymbol{f}$  の固有値  $oldsymbol{\lambda}$  に属する<mark>固有ベクトル</mark>という

線形変換 f の表現行列を A とすると、これは正方行列であり、 $f(\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$  と表せる

よって、固有値と固有ベクトルの定義は、次のようにも書ける

$$Aa = \lambda a \quad (a \neq 0)$$

となるベクトル  $\boldsymbol{\alpha}$  とスカラー  $\boldsymbol{\lambda}$  が存在するとき、このようなスカラー  $\boldsymbol{\lambda}$  を行列  $\boldsymbol{A}$  の固有値という

ref: 行列と行列式の基

礎 p183~184

ref: 図で整理!例題で

納得!線形空間入門

p178~179

ref: 長岡亮介 線形代数 入門講義 p251~252 また、このようなベクトル  $\boldsymbol{a}$  を、行列  $\boldsymbol{A}$  の固有値  $\boldsymbol{\lambda}$  に属する固有ベクトルという



# 異なる固有値に属する固有ベクトル

 $oldsymbol{\$}$  異なる固有値に属する固有ベクトルの非一致性 異なる固有値  $lpha_i, \, lpha_j \, (lpha_i 
eq lpha_j)$  に属する固有ベクトル  $oldsymbol{p}_i, \, oldsymbol{p}_j$  は異なるベクトルである

ref: 行列と行列式の基 礎 p186~187

ref: 長岡亮介 線形代数 入門講義 p265~266

## ≥ 証明

固有値と固有ベクトルの定義より、

$$\begin{cases}
A \mathbf{p}_i = \alpha_i \mathbf{p}_i \\
A \mathbf{p}_j = \alpha_j \mathbf{p}_j
\end{cases}$$

である

 $\mathsf{t} \cup \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_j \; \mathsf{ask}$ 

$$lpha_i oldsymbol{p}_i = lpha_j oldsymbol{p}_i$$
 $\therefore \quad (lpha_i - lpha_j) oldsymbol{p}_i = oldsymbol{0}$ 

となるが、 $oldsymbol{p}_i$  は固有ベクトルであり  $oldsymbol{0}$  ではないので、 $lpha_i-lpha_j=0$ 

すなわち、

$$\alpha_i = \alpha_j$$

が成立し、これは  $\alpha_i \neq \alpha_j$  に反する よって、 $\boldsymbol{p}_i \neq \boldsymbol{p}_j$  でなければならない  $oldsymbol{\$}$  異なる固有値に属する固有ベクトルの線型独立性 $lpha_1,lpha_2,\ldots,lpha_k$ が行列 A の相異なる固有値であるとすると、それぞれに属する固有ベクトル  $oldsymbol{p}_1,oldsymbol{p}_2,\ldots,oldsymbol{p}_k$  は線型独立である

#### ☎ 証明

固有値の個数 k についての数学的帰納法によって証明する

k=1 のとき、 $m p_1$  は固有ベクトルゆえ m 0 ではないので、 $\{m p_1\}$  は線型独立である

 $k \ge 2$  として、(k-1) 個以下の固有ベクトルについて定理の主張が成り立つと仮定する

このとき、線形関係式

$$c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+c_k\boldsymbol{p}_k=\mathbf{0}$$

を考える

両辺に A をかけると、 $A\mathbf{p}_i = \alpha_i \mathbf{p}_i$  より、

$$c_1\alpha_1\boldsymbol{p}_1+c_2\alpha_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+c_k\alpha_k\boldsymbol{p}_k=\mathbf{0}$$

この等式から、初めの線形関係式の  $\alpha_k$  倍を引いて

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_k) \mathbf{p}_1 + \cdots + c_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k) \mathbf{p}_{k-1} = \mathbf{0}$$

ここで、帰納法の仮定より、 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{k-1}$  は線型独立であるため、係数はすべて 0 でなければならない

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_k) = 0, \ldots, c_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k) = 0$$

さらに、 $lpha_1,lpha_2,\ldots,lpha_k$  は相異なる固有値であるため、 $lpha_i-lpha_k 
eq 0 <math>(i=1,\ldots,k-1)$  であるよって、

$$c_1=0, \ldots, c_{k-1}=0$$

が成り立つ

この結果を初めの線形関係式に代入すると、

$$c_k \boldsymbol{p}_k = \mathbf{0}$$

が残るが、 $oldsymbol{p}_k$  は固有ベクトルであり  $oldsymbol{0}$  ではないため、 $oldsymbol{c}_k = 0$  も成り立つ

以上より、 $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_k$  は線型独立である



# 固有ベクトルによる行列の対角化

一次元不変部分空間に関する議論で見たように、

$$f(\boldsymbol{a}_i) = \lambda_i \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

となるような  $oldsymbol{a}_i$  を基底として用いると、線形変換 f は次のような対角行列で表現できた

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

そして、このような  $\mathbf{a}_i$  を固有ベクトル、 $\lambda_i$  を固有値として定義したため、

行列 A の固有ベクトルからなる基底が存在すれば、

A は対角化できる

と言い換えられる



線形変換 f の表現行列を A とすると、A は正方行列である

たとえば基底を A の固有ベクトルに変換した際に、この線形変換 f の表現行列が  $P^{-1}AP$  に変化するとして、この行列  $P^{-1}AP$  が対角行列となる場合が、A が対角化できるということである

ref: 行列と行列式の基 礎 p184~185

ref: 長岡亮介 線形代数 入門講義 p264~265、

p267

★ 対角化可能 与えられた正方行列 A が適当な正則行列 P に より

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と変形できるとき、A は対角化可能であるという



行列 *A* の固有ベクトルからなる基底が存在すれば、*A* は<mark>対角化可能</mark>である、ということを定式化しよう

**・** 対角化可能性と固有ベクトルの線型独立性 n 次元正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は、線型独立な n 個の A の固有ベクトルが存在することである

証明

## 線型独立な A の固有ベクトルが存在 $\Longrightarrow$ A は対角化可能

A の固有ベクトルを  $oldsymbol{a}_i$  ( $i=1,\ldots,n$ )、それに対応する 固有値を  $oldsymbol{lpha}_i$  とすると、固有値と固有ベクトルの定義より、次 式が成り立つ

$$f(\boldsymbol{a}_i) = \alpha_i \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

仮定より  $\boldsymbol{a}_i$  は線型独立であり、一次元部分空間  $\{c\boldsymbol{a}_i\mid c\in K\}$  は  $\boldsymbol{a}_i$  によって張られる空間である

よって、 $oldsymbol{a}_i$  を基底として用いることができるので、一次元不変部分空間に関する議論で見たように、 $oldsymbol{A}$  は対角行列で表現

A が対角化可能であることから、ある正則行列 P が存在して、

$$P^{-1}AP = \left( \begin{array}{ccc} lpha_1 & & O \\ & lpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & lpha_n \end{array} 
ight)$$

が成り立つので、両辺に P をかけて、

$$AP = P \left( \begin{array}{ccc} lpha_1 & & & O \\ & lpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & lpha_n \end{array} \right)$$

が成り立つ

ここで、P を n 個の列ベクトル  $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$  を横に並べたもの、すなわち、

$$P = (p_1, p_2, ..., p_n)$$

とみなせば、上の等式は、

$$\left\{egin{array}{l} Aoldsymbol{p}_1 = lpha_1oldsymbol{p}_1 \ Aoldsymbol{p}_2 = lpha_2oldsymbol{p}_2 \ dots \ Aoldsymbol{p}_n = lpha_noldsymbol{p}_n \end{array}
ight.$$

という関係を意味する

これはすなわち、 $m{p}_1,m{p}_2,\dots,m{p}_n$  がそれぞれの固有値 $lpha_1,lpha_2,\dots,lpha_n$  に属する A の固有ベクトルであることを意味する

さらに、P は正則であるため、その列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$  は線型独立である

この定理と、異なる固有値に属する固有ベクトルの線型独立性から、次の定理が得られる

 固有値の相異性と対角化可能性 n 次正方行列 A が異なる n 個の固有値  $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$  をもつならば、A は対角化可能である すなわち、ある n 次正則行列 P によって、

$$P^{-1}AP = \left( egin{array}{cccc} lpha_1 & & O \ & lpha_2 & & \ & & \ddots & \ O & & lpha_n \end{array} 
ight)$$

が成り立つ

### 証明

n 個の異なる固有値  $lpha_1,\ldots,lpha_n$  に属する固有ベクトル $oldsymbol{p}_1,\ldots,oldsymbol{p}_n$  は線型独立である

よって、固有ベクトルの線型独立性より、対角化可能性が導かれる