読書ノート：線形代数の半歩先

tomixy

2025 年 3 月 22 日

目次

はじめに

数式を眺める視点を、いろいろと

行列にはベクトルをうまく操作するための装置としての役割もある

ベクトルを別のベクトルに変換するものとしての行列、という見方もできる

その先に、関数を別の関数に変換するものを考え、これが行列とつながり、さらに時間発展する系の記述ともつながる…と話は続く

＊　＊　＊

半歩先から見える景色を

線形代数は便利な道具でもあり、世界を捉えるための思考方法でもある

入力に対して出力を対応させるという少し抽象的いな「コト」を、数値がならんだベクトルや行列という具体的な「モノ」で表現する、それを可能にするのが線形代数

関数という「曲がってうねる形」を、具体的な数値のならびに書き下せること、さらには、一つの対象をさまざまに表現できること、線形代数が教えてくれるこれらは、現実世界の問題をどのように数学の言葉で記述して、どのように計算機で処理していくのかを考えるうえで、とても役立つ

「数の集まり」に「演算」を追加

集まるだけでは面白くないので

数学では、要素が集まった集合を考えるのが基本

そこにたとえば足し算の演算を入れると、要素間を行き来できるようになる

実数の集合を考えたとき、$7.4 + 6.4 = 13.8$ のように、二つの要素を足すことで別の要素に移れる

また、関係性まで考えるとさらに応用の幅が広がる

関係性の一つの例は「距離」

ベクトルや行列と同じような「集合・演算・関係性」をもつ対象なら、その類似性を使ってベクトルや行列で扱える

＊　＊　＊

足し算が豊かさを与えてくれる

ベクトルに演算を導入すると、別のベクトルと行き来できるようになる

この演算を入れたものを線形空間という

＊　＊　＊

線形空間の定義

たとえば和を計算したときに、結果として得られた要素が考えている集合からはみ出てしまっては困る

演算で集合の要素を行き来でき、その演算の結果が想定外にならない安全な場所、というのが線形空間

実際には、線形空間 V は以下の性質を満たすものとして定義できる

1. $c\boldsymbol{x} \in V$（スカラー倍しても V からはみ出ません）
2. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$（足し算でもはみ出ません）
3. $(c_1 c_2)\boldsymbol{x} = c_1(c_2\boldsymbol{x})$（スカラー倍は分離できます）
4. $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$（1 というスカラー倍は要素を変えません）
5. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$（足し算の順番は交換できます）
6. $\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}$（前半、後半、どちらを先に計算しても同じ）
7. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}$ となるベクトル $\boldsymbol{0}$ が存在する（零元があります）
8. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = 0$ となるベクトル $\boldsymbol{u}$ が存在し、このベクトル $\boldsymbol{u}$ を $-\boldsymbol{x}$ と書く、すなわち $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = 0$（逆元、つまり負符号もあります）
9. $c_1(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = c_1\boldsymbol{x} + c_1\boldsymbol{y}$（足してからスカラー倍、スカラー倍してから足す、が同じ）

10. $c_1\boldsymbol{x} + c_2\boldsymbol{x} = (c_1 + c_2)\boldsymbol{x}$（スカラー倍だけ先に計算も可能）

一次結合がすべての基本

組み合わせるという視点

演算によってベクトル同士を行き来できるようになると、あるベクトルをほかのベクトルを使って表現できる

スカラー倍と和のみを使った形を一次結合もしくは線形結合という

＊　＊　＊

一次結合の係数を求める方法

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ によって $\boldsymbol{c}$ を書き表すときの係数は、一般には連立方程式を使って求める

$$\boldsymbol{c} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b}$$

から、$\boldsymbol{c}$ の各要素 c_i に対して以下が成り立つ

$$c_i = \lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i$$

ただし、連立方程式の解がない場合もある

＊　＊　＊

分解するという視点

分解できる場合もあれば、できない場合もある

これは、先ほどの「組み合わせる」という視点において、一次結合を作っても一部のベクトルしか再現できない、ということ

＊　＊　＊

空間を生成するという視点

r と s は実数から自由に選べるとすると、$\boldsymbol{x} = r\boldsymbol{a}_1 + s\boldsymbol{a}_2$ でさまざまなベクトル $\boldsymbol{x}$ を表現できる

それらを集めると平面が形作られていき、実はこの平面も線形空間になっている

このように一次結合で線形空間を作ることができ、その「もと」となるベクトルのことを生成元という

無駄をはぶく

よい矢印、余分な矢印

ある矢印 $\boldsymbol{x}$ を、他の矢印の一次結合の形で書きたいとき、

- 2 次元系を考えているから 2 つあれば十分、3 つは冗長
- 「平行」なものが 2 つだと不十分

などが言える

無駄なものをはぶく、必要最低限で済ます、線形代数にもそれを表すための概念がきちんと用意されている

＊　＊　＊

したがうことは、お互いさま

一次従属は、線形従属とも呼ばれる

「従属」という言葉からわかるように、何かが何かにしたがっている

たとえば、互いをスカラー倍だけで表現できているベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ を考える

$$\boldsymbol{a}_1 = -\boldsymbol{a}_2, \quad \boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{a}_1$$

自分自身をほかの矢印を使って表現できているので、$\boldsymbol{a}_1$ は $\boldsymbol{a}_2$ にしたがっているし、逆も然り

また、$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の一次結合で表せるベクトル $\boldsymbol{a}_3$ は、この 2 つの矢印 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ にしたがっている

$$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$$

＊　＊　＊

従属は「組」に対する概念

ここで大切なのは、何かしらの「組」を考えたときに「それらが従属の関係にある」かどうかを判断できること

何かが何かにしたがっていれば､逆のことも言える

たとえば、$\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ は、

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{a}_3 - 2\boldsymbol{a}_1$$

とも書ける

ほかをしたがえているように見えて、実は自分がしたがっていて…という関係にある

ベクトルの組を考え、どれか 1 つのベクトルがほかのベクトルの一次結合で表せるときに、それらのベクトルの組は一次従属である、と言う

たとえば、$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\}$ は一次従属である

一次従属であれば、余分なものが含まれている

そこで、次に一次従属ではないものを考える

* * *

従属していなければ独立

線形空間 V に属する N 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ および N 個の実数 $c_1, c_2, \ldots, c_N$ に対して、

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_N\boldsymbol{a}_N = 0$$

が成立するのが $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$ の場合に限られるとき、ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ は一次独立であると言う

一次独立の場合、互いに表現できないため、無駄がないとわかる

* * *

一次独立の定義を噛み砕く

一次独立の定義に出てきた式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_N\boldsymbol{a}_N = 0$$

に対して、たとえば $c_1 \neq 0$ とする

これは一次独立の条件 $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$ を破っている

今は $c_1 \neq 0$ なので、式を

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{c_N}{c_1}\boldsymbol{a}_N$$

と変形できる

すると、$\boldsymbol{a}_1$ をほかのベクトルで表現できてしまっているので、一次従属であることがわかる

c_1 以外が 0 でない場合も同様なので、条件 $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$ を満たすときのみ、このような式変形ができない

これが一次独立の状況である

* * *

「基底」は、必要十分なもの

ベクトルの一次結合を使って空間を過不足なく表現できる「必要十分であるもの」、それが基底

2 次元空間の基底は、平行でない 2 つのベクトルである

3 次元空間に埋め込まれている平面は、2 つの平行でないベクトルの一次結合で表現可能なので、その 2 つのベクトルは、3 次元空間の中にある部分空間の基底となる

基底は、「注目している空間」を過不足なく、必要十分に表現できるもの

余分であれば削る必要がある

また、考えている基底で表現できる空間が、もっと大きな空間の部分空間になっていることもある

* * *

一次独立かどうかが鍵

D 次元空間 $\mathbb{R}^D$ を考えたとき、その部分空間 $V \subset \mathbb{R}^D$ を作り出すベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_D$ を考える

このとき、これらの生成元が一次独立ならば、$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}'_D\}$ を V の基底と言う

一次従属だと、互いを互いで表現できてしまうので、余分なものがあるとわかる
基底であるかどうかの鍵は、一次独立性があるかどうかである

なお、上の定義において、$D' \leq D$ であることに注意
部分空間として、たとえば 3 次元空間中の平面を考えると、$D' = 2$ および $D = 3$ である
3 次元空間中で考えても必ずしも 3 次元空間すべてを表現する必要はない

基底と呼ぶときには、どのような線形空間を考えているのかにも注意が必要である

方法を決めれば表現は「一つ」

基底が変われば、座標は変わる

ベクトル $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a}_1 + 3\boldsymbol{a}_2$ を、いわゆる「座標」で表現する場合、どのように書くだろうか？
直感的には「右に 2 つ、上に 3 つ」と簡単に捉えて、$[2, 3]^\top$ と考えられる
しかし、これは基底として $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ を考えていたから

一次結合の係数をならべたものが「座標」だが、「座標」というのは使っている基底の情報とセットでないと意味をなさないもの
特定の表現方法、つまり基底を決めてこそ、数をならべたベクトルを作ることができる

これを利用すれば、基底を変えることで目的の計算に便利なベクトルを作ることもできる

＊　＊　＊

表現方法はいろいろでも本質は「一つ」

基底の選び方はたくさんあるが、基底を決めてしまえば表現方法は一つに定まる
つまり、基底が決まれば「座標」は一意に決まる

表現したい矢印やベクトル（本質）は一つ
基底の選び方は表現方法の違いであり、基底を一つに決めれば、表現の仕方は一意に定まる

＊　＊　＊

そもそもどうやって無駄なものを知るの？

基底は無駄をはぶいたものだが、そのためには行基本変形などで一次独立かどうかを調べる必要がある

内積で近さを測る

ベクトル同士の関係性を知る方法

集合だけだと身動きできないが、演算によって互いを行き来できるようになった
ただし、2 つのベクトルを取り出したときに、それらが似ているかどうかを議論するためには道具が少し必要となる
それがベクトルの内積である

矢印で考えた場合、内積は次のように定義された

1. $\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ とする
2. ベクトル $\vec{x}$ の大きさを $|\vec{x}|$、ベクトル $\vec{y}$ の大きさを $|\vec{y}|$ とする
3. $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を $\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}| \cos\theta$ とする

矢印で記述できる場合にはこれでも大丈夫だが、想像できないような 4 次元以上の高次元では、角度 θ から出発するわけにはいかない
そのため、順番を逆にして定義していく

＊　＊　＊

内積はスカラー値を与える関数

内積を「二つのベクトルを引数にとり、スカラー値を返す関数」として捉えてみる

ただし、どんな関数でもよいわけではなく、いくつかの性質を満たす必要がある

2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ を考える

これらは D 次元空間内の矢印だとし、それぞれのベクトルを成分に分けて以下のように書くことにする

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{1,D} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{2,D} \end{bmatrix}$$

1 つ目の添え字はどちらのベクトルかを指定するもので、2 つ目の添字が空間の次元を示す

これら 2 つのベクトルの内積を以下のように定義する

$$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = \sum_{d=1}^{D} a_{1,d} a_{2,d}$$

ベクトルの要素ごとにかけ算をして足し合わせる、というだけ

＊　＊　＊

内積の「書き方」は一つではない

内積の記法はいくつかある

- $\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2$
- $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$
- $\boldsymbol{a}_1^\top \boldsymbol{a}_2$
- $\langle \boldsymbol{a}_1 \,|\, \boldsymbol{a}_2 \rangle$

$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2$ の記法は、本書では今後は使わない

$(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ では括弧が閉じていて、2 つのベクトルを用いていることがわかりやすい

これは数学でよく使う

$\boldsymbol{a}_1^\top \boldsymbol{a}_2$ は、すでに行列について学んだ人にはわかりやすい表記

ただし、本書では先にこの記法を導入しておく

縦向きにならんだベクトルを横向きに転置した $\boldsymbol{a}_1^\top$ を左側に置き、右側のベクトル $\boldsymbol{a}_2$ とならべて書いたときに、「要素ごとの積の総和」を意味することにする

$\langle \boldsymbol{a}_1 \,|\, \boldsymbol{a}_2 \rangle$ の記法は物理学、特に量子力学の分野でよく用いられるもの

＊　＊　＊

内積の「定義」ですら一つではない

実は内積と呼ばれる量はこれだけに限らない

たとえば物理学の一般相対性理論では曲がった空間を考える

すると、ベクトル同士の関係性が、空間の曲がり方によって変わる

内積は関係性を議論するための道具なので、曲がった空間には曲がった空間なりの関係性、つまり内積が定義される

形式的な定義を与えたとき、その具体的な可能性はいろいろとあり得るのが数学のよいところ

答えや手段が一つに決まらないのは不安かもしれないが、逆に言えば、たくさんの可能性のなかから目的にあったものを選び取れるということ

＊　＊　＊

内積の形式的な定義

ここでは $\mathbb{R}$ 上の線形空間 V を考える

このとき、2 つのベクトルを引数にとり、実数を返す関数 $(\cdot, \cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ として、次の性質を満たすものを内積と呼ぶ

なお、ここでは $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$、$c \in \mathbb{R}$ とする

1. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$
2. $(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = c\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
3. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$
4. $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = 0$

1 番目は対称性を意味しており、順番を変えても結果が変わらない

2 番目と 3 番目の性質は双線形性と呼ばれるもの

4 番目は、自分自身との内積は負の値にならないことを意味している

＊　＊　＊

線形代数という言葉にも使われている線形性についても触れておこう

関数 $f : V \to \mathbb{R}$ が線形であるとは、以下の 2 つの性質を満たす場合を言う

ここでは $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$、$c \in \mathbb{R}$ とする

1. $f(c\boldsymbol{u}) = cf(\boldsymbol{u})$
2. $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$

つまり、スカラー倍や和などの演算をしてから f に入れるのと、先に f に入れてから演算をするのは同じ、ということ

関数を使うタイミングと演算をするタイミングを入れ替えられるので、計算がとても楽になる

先ほどの双線形性は、引数が 2 つの場合なので「双」がつく

＊　＊　＊

これらを満たせばすべて内積なので、今後、内積を使った議論が出てきた場合には、自分好みの内積を定義して当てはめることができる

＊　＊　＊

ブラケット記号は「閉じた」形

縦方向に数が並んだベクトルに対応する記号として $|\boldsymbol{a}_1\rangle$ を導入する

これをケットベクトルと呼ぶ

本書では単にケットと呼ぶこともある

たとえば以下のようなもの

$$|\boldsymbol{a}_1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad |\boldsymbol{a}_2\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

そしてこれらを横倒しに転置したものがブラベクトル

$$\langle \boldsymbol{a}_1| = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \langle \boldsymbol{a}_2| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

本書では単にブラと呼ぶこともある

英語で括弧のことをブラケット（bracket）と言う

左側に来る $\langle \boldsymbol{a}_1|$ などがブラ（bra）、右側に来る $|\boldsymbol{a}_2\rangle$ がケット（ket）、つなぎとしてアルファベットの c を追加してあげれば、「bracket」の完成

この表記だと括弧が閉じるので、ブラベクトルとケットベクトルがセットになることもわかりやすい

内積はスカラー、つまり単なる数を与えるので、$\langle \boldsymbol{a}_1 | \boldsymbol{a}_2 \rangle$ が出てきたらスカラーとして扱える

今は具体的なベクトルを考えたが、記法を変えたのでもう少し抽象的なものとして捉えることができる

「無限個の数字がならんだベクトル」を扱うときに、この表記が便利

大きさ、距離、さらなる解釈

自分自身の大きさは自分自身との内積

ほかのベクトルとの関係性を見る前に、自分自身との関係性を見てみよう

つまりベクトルの大きさである

ベクトルの大きさは、要素ごとの 2 乗を計算し、和をとって、その平方根をとったもの

D 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ の場合には、

$$\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 + \cdots + a_{1,D}^2} = \sqrt{\sum_{d=1}^{D} a_{1,d}^2}$$

と書ける

ここで、$\|\boldsymbol{a}_1\|$ の記号はノルムと呼ばれる

わざわざ新しい言葉を導入したのは、今後を見すえて概念を広く捉えるため

また、上式の形のノルムを特に $\|\boldsymbol{a}_1\|_2$ と書くこともある

要素ごとの 2 乗を考えているので右下添字として 2 をつけた、と捉えられる

ちなみに、上式を次のように書き換えられる

$$\|\boldsymbol{a}_1\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}_1 \,|\, \boldsymbol{a}_1 \rangle}$$

内積を使って、ノルムを定義できるということになる

＊　＊　＊

ノルムの定義も一つではない

以下の 3 つの性質を満たすものはすべてノルム

1. $\|\boldsymbol{u}\| \geq 0$ であり、また $\|\boldsymbol{u}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{u} = 0$
2. $c \in \mathbb{R}$ に対して $\|c\boldsymbol{u}\| = |c|\|\boldsymbol{u}\|$（$|c|$ は通常の絶対値）
3. $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$

1 番目は、「大きさがゼロのベクトルは、ゼロベクトル」であることを意味している

＊　＊　＊

互いがどれだけ離れているかを測る

ここで導入する関係性は距離

距離としては、離れているものほど大きな値を、近いほど小さな値を返すような関数を考えればよい

また、負の距離というのは不自然なので、ゼロ以上の値を返してほしい

イメージをもつために矢印で考えると、ベクトル $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2$ の大きさが、まさに距離としての性質を備えている

$$d(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \|\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2\|$$

このノルムで定義された関数 $d(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ が、2 つのベクトルの距離を与える

もし自分自身との距離を考えると、距離がゼロになることもわかる

ノルムの性質から負の値を返さないこともわかる

＊　＊　＊

距離もやはり…

以下の性質を満たすような集合 V 上の関数 $d : V \times V \to \mathbb{R}$ はすべて距離である

なお、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ とする

1. $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq 0$、また、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ ならば $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$（距離はゼロ以上、また、同じベクトルであれば距離はゼロ）
2. $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$（対称性があり、どちらから測っても距離は同じ）

3. $d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) \geq d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})$（三角不等式：三角形の 2 辺の長さを足すと、もう 1 辺の長さと等しい、もしくは大きくなる）

＊　＊　＊

内積、ノルム、距離はすべて必要？

距離の概念を一般化した位相空間の議論もある

本書では集合のあとで演算を導入したが、演算はさておき、集合に対していくつかの性質を満たす開集合を定義することで、位相を導入できる

この位相は距離の概念と関係する

さらに、もっとも近いもの、つまり「同じ」ものも、こちらで決められる

何をしたいのかに応じて、一見違うものを同一視してしまう、これが数学のすごさである

＊　＊　＊

内積のいろいろな見方

1. $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$：内積は…2 つの「ベクトル」を引数にとる関数？
2. $\boldsymbol{a}_1^\top \boldsymbol{a}_2$：内積は…「ベクトルの転置」とベクトルのかけ算？
3. $\langle \boldsymbol{a}_1 | \boldsymbol{a}_2 \rangle$：内積は…状態を「測定」するもの？

今回はわかりやすさのために、「互いの関係性」という形で内積を紹介した

1 つ目の見方は、2 つのベクトルを引数にとって、その関係性を返す関数

2 つのベクトルは同等で、どちらが特別ということはない

2 つ目の見方では、右側の $\boldsymbol{a}_2$ は数が縦方向にならんだ列ベクトル

本書では列ベクトルを基本とするため、基本的なベクトル $\boldsymbol{a}_2$ と、もう一つ別のベクトル $\boldsymbol{a}_1$ を使った、という見方ができる