行基本変形と基本行列

基本変形を行列のかけ算によって実現することができる

ref: 行列と行列式の基礎 p85〜86

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p58〜61

基本行列　基本変形 α を単位行列 E に行った結果を E_α とするとき、E_α を α に対応する基本行列と呼ぶ

行基本変形とは、次の 3 種類の操作であった

i. 2 つの行を交換する
ii. ある行に 0 でない数をかける
iii. ある行の定数倍を他の行に加える

これらに対応して、行基本変形を表現する基本行列は、次の 3 種類がある

i. $F(i,j)$: E の i 行と j 行を交換したもの（$i \neq j$）
ii. $G(i;c)$: E の (i,j) 成分を 1 から c に置き換えたもの（$c \neq 0$）
iii. $H(i,j;c)$: E の (i,j) 成分を 0 から c に置き換えたもの（$i \neq j$）

$$F(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$
G(i;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & c & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
H(i,j;c) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \dots & c & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}
$$

行に関する基本変形は、基本行列を左からかけることに他ならない

基本行列による行基本変形の表現　行列 A に行基本変形 α を行って得られる行列を B とすると、

$$
B = E_\alpha A
$$

証明

$\boldsymbol{e}_k$ を k 列目が 1 で他が 0 の横ベクトルとし、A の k 行目の行ベクトルを $\boldsymbol{a}_k$ とする

行の交換

基本行列 $F(i,j)$ の k 行目は、

$$(F(i,j))_{k,*} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_j & (k=i) \\ \boldsymbol{e}_i & (k=j) \\ \boldsymbol{e}_k & (k \neq i,j) \end{cases}$$

よって、$F(i,j)A$ の k 行目は、

$$(F(i,j)A)_{k,*} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_j & (k=i) \\ \boldsymbol{a}_i & (k=j) \\ \boldsymbol{a}_k & (k \neq i,j) \end{cases}$$

となり、i 行目と j 行目が交換されていることがわかる ■

行の定数倍

基本行列 $G(i;c)$ の k 行目は、

$$(G(i;c))_{k,*} = \begin{cases} c\boldsymbol{e}_i & (k=i) \\ \boldsymbol{e}_k & (k \neq i) \end{cases}$$

よって、$G(i;c)A$ の k 行目は、

$$(G(i;c)A)_{k,*} = \begin{cases} c\boldsymbol{a}_i & (k=i) \\ \boldsymbol{a}_k & (k \neq i) \end{cases}$$

となり、i 行目が c 倍されていることがわかる ■

行の定数倍の加算

基本行列 $H(i,j;c)$ の k 行目は、

$$(H(i,j;c))_{k,*} = \begin{cases} \boldsymbol{e}_i + c\boldsymbol{e}_j & (k=i) \\ \boldsymbol{e}_j & (k=j) \\ \boldsymbol{e}_k & (k \neq i,j) \end{cases}$$

よって、$H(i,j;c)A$ の k 行目は、

$$(H(i,j;c)A)_{k,*} = \begin{cases} \boldsymbol{a}_i + c\boldsymbol{a}_j & (k=i) \\ \boldsymbol{a}_j & (k=j) \\ \boldsymbol{a}_k & (k \neq i,j) \end{cases}$$

となり、i 行目に j 行目の c 倍が加えられていることがわかる ■