## 線形写像とベクトルの線型独立性

 $oldsymbol{\$}$  線形写像と線形独立性  $f\colon \mathbb{R}^n o \mathbb{R}^m$  を線形写像、 $oldsymbol{v}_1, oldsymbol{v}_2, \dots, oldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$  とする

ベクトル  $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$  の f による像

$$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$$

が線型独立であるとき、 $\{ oldsymbol{v}_1, \ldots, oldsymbol{v}_n \}$  も線型独立である

ref: 行列と行列式の基 礎 p65~66

ref: 図で整理!例題で 納得!線形空間入門 p71

~73

### ≥ 証明

 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$  の線形結合

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0}$$

を考える

この両辺を f で写すと、f の線形性と零ベクトルの像  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  を使って

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

仮定より  $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$  は線型独立なので、 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$  であるよって、

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0}$$

を満たす  $c_1, c_2, \ldots, c_n$  は 0 しかないので、 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$  は線型独立である

次の定理は、平行なベクトルを線型写像で写した結果、平行でなくなった りはしないということを述べている

 $oldsymbol{\$}$  線形写像と線形従属性  $f\colon \mathbb{R}^n o \mathbb{R}^m$  を線形写像、 $oldsymbol{v}_1, oldsymbol{v}_2, \ldots, oldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$  とする $\{oldsymbol{v}_1, \ldots, oldsymbol{v}_n\}$  が線形従属ならば、 $\{f(oldsymbol{v}_1), \ldots, f(oldsymbol{v}_n)\}$  は線形従属である

#### ☎ 証明

 $\{ oldsymbol{v}_1, \ldots, oldsymbol{v}_n \}$  が線形従属であるとは、少なくとも 1 つは 0 でないある定数  $k_1, k_2, \ldots, k_n$  が存在して

$$k_1\boldsymbol{v}_1+k_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0}$$

が成り立つことを意味する この両辺を **f** で写すと、線形性より

$$k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

よって、
$$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$$
 も線形従属である

たとえば平行四辺形の像が線分や 1 点になったりしないことなどは、  $\{m{v}_1, m{v}_2, \dots, m{v}_n\}$  が線型独立ならば、 $\{f(m{v}_1), f(m{v}_2), \dots, f(m{v}_n)\}$  も線型独立である」と表現できる

・ 単射な線型写像と線型独立性 線型写像  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が単射であるとき、 $\{ oldsymbol{v}_1, oldsymbol{v}_2, \dots, oldsymbol{v}_n \}$  が線型独立ならば、 $\{ f(oldsymbol{v}_1), f(oldsymbol{v}_2), \dots, f(oldsymbol{v}_n) \}$  も線型独立である

#### 証明

 $f(\boldsymbol{v}_1)$ ,  $f(\boldsymbol{v}_2)$ , . . . ,  $f(\boldsymbol{v}_n)$  の線形結合

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}$$

を考える

f の線形性と零ベクトルの像  $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  より、次のように書き換えられる

$$f(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_n \mathbf{v}_n) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})$$

f は単射だから、上式より

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_n\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0}$$

が成り立つ

ここで、 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$  は線型独立なので、 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$  である

よって、 $f(\boldsymbol{v}_1)$ ,  $f(\boldsymbol{v}_2)$ , . . . ,  $f(\boldsymbol{v}_n)$  は線型独立である



零写像と射影を除けば、f によってベクトルが「つぶれない」という性質は、次のように表せる

$$\boldsymbol{v} \neq 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$$



「Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

この条件は、実は線形写像が単射であることを意味している 対偶をとって、次のように表現できる

・ 線形写像の単射性 線形写像 f が単射であることと次は同値である

$$f(\boldsymbol{v}) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{v} = 0$$

#### 証明

- i. f が単射
- ii.  $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

## $(i) \Longrightarrow (ii)$

零ベクトルの像は零ベクトルであることから、 $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ は、

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\mathbf{0})$$

と書き換えられる

f の単射性により、この式から、

$$v = 0$$

がしたがう

## $(ii) \Longrightarrow (i)$

 $f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$  を満たす  $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$  を考えるこのとき、f の線形性から、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) - f(\boldsymbol{v}_2)$$

となる

仮定 (ii) より、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$$

がいえるので、 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$  が成り立つ

 $f(oldsymbol{v}_1) = f(oldsymbol{v}_2)$  から  $oldsymbol{v}_1 = oldsymbol{v}_2$  が導かれたことで、f は単

射であることが示された

## 線形写像の単射性と全射性

線形写像 ƒ の単射性を表現行列 A の言葉で述べる

ref: 行列と行列式の基 礎 p67~68

- - i. *f* は単射
  - ii. Ax = 0 は自明な解しか持たない
  - iii. rank(A) = n

≥ 証明

## $(i) \iff (ii)$

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が単射であることの言い換えは、

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

であり、Ax = 0 が自明解しか持たないことは、

$$A\boldsymbol{x} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x} = 0$$

が成り立つということである

 $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  であるから、これらの 2 つの条件は同値であ

る

## $(ii) \iff (iii)$

斉次形の方程式 Ax = 0 に自明解しか存在しないことと

$$rank(A) = n$$

と同値であることは以前証明済み

i は抽象的な概念、ii は方程式論的な言葉、iii は数値的な条件であり、これらは同値な言い換えである



単射性と対比して、全射性の理解も表現行列の言葉で整理する

- - i. *f* は全射
  - ii. 任意の  $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$  に対して、 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$  には解が存在する
  - iii. rank(A) = m

#### ★ 証明

#### $(i) \iff (ii)$

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が全射であることの言い換えは、

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

であり、これは

$$\forall b \in \mathbb{R}^m$$
,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  に解が存在する

と同値である

よって、これらの2つの条件は同値である

#### $(ii) \iff (iii)$

rank(A) = m が、次の条件

$$\forall b \in \mathbb{R}^m$$
,  $Ax = b$  の解が存在する

ことと同値であることは、以前証明済み

## 像空間と核空間

線形写像  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  の全射性は、 $\mathbb{R}^m$  の部分集合である<mark>像空間 Im(f)</mark> と関係している

ref: 行列と行列式の基 礎 p68~69

f が全射であることは、 $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^m$  と同値である



一方、f の単射性と関連して、 $\mathbb{R}^n$  の部分集合

$$\operatorname{Ker}(f) = \{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \}$$

を考え、これを f の核空間あるいはカーネルと呼ぶ

線形写像の単射性は、次のようにも言い換えられる

$$Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$$



核空間 Ker(f) は、実はすでに馴染みのある概念である

\* 核空間と表現行列 線形写像  $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$  の表現行列を A とするとき、

$$\operatorname{Ker}(f) = \{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \}$$

と定めると、

$$Ker(f) = Ker(A)$$

これは、斉次形の連立線形方程式 Ax = 0 の解空間そのものである

Ker(A) の元は、	Ax = 0 の基本解を使ってパラメータ表示できる	

# Zebra Notes

Туре	Number
todo	1