0.1　存在定理とテイラー展開

0.1.1　高階微分による近似式

微分の導入として話した、関数の各点での直線による近似に立ち返ろう。

REVIEW

関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

という傾き $f'(x)$ の直線に近似できる。

この式に $x = x_0$ を代入すると、

$$\begin{aligned} & f(x_0) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) \\ & f(x_0) \simeq f(x_0) + f'(x_0) \cdot 0 \\ \therefore\quad & f(x_0) = f(x_0) \end{aligned}$$

となり、たしかに点 x_0 では一致することがわかる。

ここで、両辺を高階微分しても、点 x_0 で一致するような近似式を作りたい。
一階微分が一致するなら点 x_0 でのグラフの傾きが等しく、二階微分が一致するなら点 x_0 でのグラフの曲がり具合が等しい、…といった具合に、高階微分を一致させていけば、どんどん本物の関数 $f(x)$ に近い近似式が得られるからだ。

n 階微分してから $x = x_0$ を代入しても、$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ が成り立つようにするには、近似式の右辺 $f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$ をどのように変更すればよいだろうか？

$f'(x)(x - x_0)$ の n 階微分

右辺を微分した時点で定数項 $f(x_0)$ は消えてしまうので、$f'(x)(x - x_0)$ の微分結果だけが残ることになる。

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left(f'(x)(x - x_0)\right)$$

そこで、$f'(x)(x - x_0)$ の高階微分がどうなるかを探っていく。1 階微分から順に見ていこう。
この計算では、関数の積の微分（ライプニッツ則）を思い出す必要がある。

REVIEW

関数の積の微分（ライプニッツ則）

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

積の各項の微分を計算しておくと、

$$\frac{d}{dx}f'(x) = f''(x)$$
$$\frac{d}{dx}(x-x_0) = \frac{d}{dx}x - \frac{d}{dx}x_0 = 1 - 0 = 1$$

となるので、ライプニッツ則より、1 階微分は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= \underbrace{\boxed{f''(x)}}_{f''(x)\text{ の微分}}(x-x_0) + f'(x)\cdot\underbrace{\boxed{1}}_{(x-x_0)\text{ の微分}} \\ &= f''(x)(x-x_0) + f'(x)\end{aligned}$$

この結果をもう一度微分すると、2 階微分が求まる。

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= \frac{d}{dx}\left(f''(x)(x-x_0) + f'(x)\right) \\ &= \frac{d}{dx}f''(x)(x-x_0) + \frac{d}{dx}f'(x) \\ &= \underbrace{\boxed{f'''(x)}}_{f''(x)\text{ の微分}}(x-x_0) + f''(x)\cdot\underbrace{\boxed{1}}_{(x-x_0)\text{ の微分}} + f''(x) \\ &= f'''(x)(x-x_0) + 2f''(x)\end{aligned}$$

さらにもう一度微分することで、3 階微分が求められる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3}{dx^3}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= \frac{d}{dx}\left(f'''(x)(x-x_0)+2f''(x)\right) \\
&= \frac{d}{dx}f'''(x)(x-x_0)+2\frac{d}{dx}f''(x) \\
&= \overset{f'''(x)\text{ の微分}}{\boxed{f''''(x)}}(x-x_0)+f'''(x)\cdot\overset{(x-x_0)\text{ の微分}}{\boxed{1}}+2f'''(x) \\
&= f''''(x)(x-x_0)+3f'''(x)
\end{aligned}
$$

プライム記号の数が増えてきたので、$f''' = f^{(3)}$ のように書き直して結果をまとめると、

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(2)}(x)(x-x_0)+f^{(1)}(x) \\
\frac{d^2}{dx^2}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(3)}(x)(x-x_0)+2f^{(2)}(x) \\
\frac{d^3}{dx^3}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(4)}(x)(x-x_0)+3f^{(3)}(x) \\
&\vdots \\
\frac{d^n}{dx^n}\left(f'(x)(x-x_0)\right) &= f^{(n+1)}(x)(x-x_0)+nf^{(n)}(x)
\end{aligned}
$$

のように続き、n 階微分の結果が得られる。

$x = x_0$ を代入すると…

これで、$f(x)$ の n 階微分 $f^{(n)}(x)$ は、次のように表せることがわかった。

$$
f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)(x-x_0)+nf^{(n-1)}(x)
$$

ここに、$x = x_0$ を代入してみると、

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0)(\underbrace{x_0-x_0}_{0})+n\overset{\text{定数の微分は }0}{\boxed{f^{(n-1)}(x_0)}} \\
&= f^{(n)}(x_0)\cdot 0+n\cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

というように、右辺の項がすべて消えて、0 になってしまう。
$f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ を成り立たせるには、右辺に項が足りないということになる。

n 階微分して $x = x_0$ を代入しても 0 にならず、$f^{(n)}(x_0)$ として生き残るような項を、元の近似式の右辺に追加する必要がある。

近似式の続きを予想する

具体的にどんな項を加えていけばよいかは、式の規則性から予想していくことにする。

$$f(x) \simeq \underset{\sim\sim\sim}{f(x_0)} + \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{f'(x_0)(x - x_0)}$$

という式を、次のように読み替えてみよう。

$$f(x) \simeq \underbrace{f^{(0)}(x_0)(x - x_0)^0}_{\text{0 次の項}} + \underbrace{f^{(1)}(x_0)(x - x_0)^1}_{\text{1 次の項}}$$

$f(x_0)$ は 0 階微分（微分を 1 回もしていない、そのままの関数）と考えて、$f^{(0)}(x_0)$ と書いた。
また、0 乗は必ず 1 になるので、$f(x_0)$ の後ろには $(x - x_0)^0 = 1$ が隠れていると考えることができる。

このように書き換えた式をみると、なんとなく次のような続きを予想できる。

$$f(x) \stackrel{?}{=} \underbrace{f^{(0)}(x_0)(x - x_0)^0}_{\text{0 次の項}} + \underbrace{f^{(1)}(x_0)(x - x_0)^1}_{\text{1 次の項}} + \underbrace{f^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2}_{\text{2 次の項}} + \underbrace{f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3}_{\text{3 次の項}} + \cdots$$

この式が正しいかどうかはわからないが、この式をベースに調整を加えていくアプローチを試してみよう。

2 次の項を加えた近似式

まず 2 次の項だけ加えた状態で、$f(x)$ の 2 階微分を考えてみる。

$$f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)(x - x_0)^2$$

このとき、元の近似式は 2 階微分すると 0 になってしまうので、元の近似式にあった 0 次の項と 1 次の項は 2 階微分によって消えてしまうことになる。
よって、$f(x)$ の 2 階微分は、2 次の項だけの微分として考えればよい。

$$
\begin{aligned}
f''(x) &\overset{?}{=} \frac{d^2}{dx^2}\Big(\overset{\text{定数なので外に出せる}}{f''(x_0)}\,(x-x_0)^2 \Big) \\
&= f''(x_0) \cdot \frac{d^2}{dx^2}(x-x_0)^2 \\
&= f''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\left\{\frac{d}{dx}(x-x_0)^2\right\} \\
&= f''(x_0) \cdot \frac{d}{dx}\,(2(x-x_0)) \qquad \frac{d}{dx}X^n = nX^{n-1} \\
&= f''(x_0) \cdot 2\frac{d}{dx}(x-x_0) \\
&= f''(x_0) \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 2f''(x_0)
\end{aligned}
$$

$x = x_0$ を代入すると、

$$f''(x_0) = 2f''(x_0)$$

という、微妙に惜しい結果が得られる。

この結果から、2 次の項に $\frac{1}{2}$ をかけておけば、$f''(x_0) = f''(x_0)$ が成り立たせることができるとわかる。

つまり、近似式は次のように修正すればよい。

$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2}_{\text{2 次の項}} + \cdots$$

3 次の項を加えた近似式

3 階微分した場合、先ほど追加した 2 次の項も消えてしまうので、さらに 3 次の項を加える必要がある。

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &\stackrel{?}{=} \frac{d^3}{dx^3}\left(f'''(x_0)(x-x_0)^3\right) \\
&= f'''(x_0)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left((x-x_0)^3\right)\right)\right) \\
&= f'''(x_0)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(3(x-x_0)^2\right)\right) \\
&= f'''(x_0)\cdot\frac{d}{dx}\left(3\cdot 2(x-x_0)\right) \\
&= f'''(x_0)\cdot 3\cdot 2\cdot 1
\end{aligned}
$$

先ほどと同じように考えて、3 次の項に $\frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}=\frac{1}{3!}$ をかけておけば、$f'''(x_0)=f'''(x_0)$ が成り立たせることができる。

これで、近似式は次のようになる。

$$
f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \underbrace{\frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3}_{3\text{ 次の項}} + \cdots
$$

$2! = 2\cdot 1 = 2$ なので、2 次の項の係数も階乗で書き直している。

0 次の項と 1 次の項についても、$0! = 1$、$1! = 1$ を使って書き換えれば、次のような規則的な式になっていることがわかる。

$$
f(x) \simeq \underbrace{\frac{1}{0!}f^{(0)}(x_0)(x-x_0)^0}_{0\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{1!}f^{(1)}(x_0)(x-x_0)^1}_{1\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2}_{2\text{ 次の項}} + \underbrace{\frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3}_{3\text{ 次の項}} + \cdots
$$

これで、n 次の項まで加えていった一般形が想像つくようになったのではないだろうか。

無限に項を加えた近似式：テイラー展開

同じような考え方で、n 次の項まで加えた近似式を作ることができる。

$$
f(x) \simeq \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n
$$

$n \to \infty$ とした場合のこの近似式には、テイラー展開という名前がつけられている。

テイラー展開

関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で何回でも微分可能であるとき、関数 $f(x)$ が x_0 の付近で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

と表せるなら、この式を関数 $f(x)$ の $x = x_0$ 周りにおける テイラー展開 という。

特に、$x_0 = 0$ の場合のテイラー展開には、マクローリン展開という別な名前がつけられている。

マクローリン展開

関数 $f(x)$ が $x = 0$ で何回でも微分可能であるとき、関数 $f(x)$ が 0 の付近で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

と表せるなら、この式を関数 $f(x)$ の マクローリン展開 という。

0.1.2 存在定理としてのテイラーの定理

先ほどは、テイラー展開の式を手探りで導いたが、この式に数学的な証明を与える場合、その源流（もととなる理論や定理）はどこにあるのだろうか。

まず、テイラー展開の原理となるテイラーの定理を見ておこう。

先ほど示したテイラー展開の式の右辺は、必ずしも左辺の関数 $f(x)$ に一致するとは限らないことを述べておく必要がある。

実際、テイラーの定理では、右辺にさらに余分な項（剰余項）が現れた形になっている。

テイラーの定理

関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ の区間で何回でも微分可能であるとき、

$$f(b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

となる c が a と b の間に存在する。

このとき、最後の項を 剰余項 と呼び、次のように表す。

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

この定理の式において、a と b は最初に与えられた数なので、最後の項（剰余項）以外は計算できることになる。

ところが、最後の項に現れる c は、a と b の間に「存在する」としか述べられておらず、実際の値はわからない。

このような、存在だけを保証する定理は存在定理と呼ばれる。

この未知の値 c を含む剰余項を消すことができれば、実際に計算可能なテイラー展開の式が得られることになる。

テイラー展開可能

テイラーの定理において、剰余項が項を増やせば増やすほど小さくなる、すなわち

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

が成り立つとき、関数 $f(x)$ は テイラー展開可能 であるという。

項の数を増やせば増やすほど剰余項が小さくなるということは、項の数を増やすほど再現の精度が上がるということである。

剰余項とはいわば、近似式と実際の関数との誤差を表しているといえる。

* * *

テイラーの定理は一種の存在定理であり、この定理を証明するには、さらにいくつかの存在定理の力を借りる必要がある。
微分に関する存在定理をいくつか辿った上で、最終的にテイラーの定理を証明することを目指そう。

0.1.3 ロルの定理

ロルの定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であり、開区間 (a, b) で微分可能であるとき、

$$f(a) = f(b) \quad \Longrightarrow \quad f'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

となる c が少なくとも 1 つ存在する。

0.1.4 平均値の定理

0.1.5 テイラーの定理の証明