Chapter 1

ε - δ 論法と極限

ここまでのこの本では、極限というものを厳密に定義していなかった。また、微分と積分において、イメージで導出できることを最重視し、厳密な議論を避けた箇所が多くある。

厳密には、極限は ε - δ 論法によって定義され、微分積分の基礎理論は極限の議論に基づいている。ε - δ 論法に踏み込んでいない私たちは、極限というものを語る言葉をまだ持ち合わせていない。

1.1 実数の集合

厳密な理論を展開する上で、知っておくべき言葉の定義を行う。

1.1.1 区間

2 つの実数の間の範囲は、区間と呼ばれる。

区間

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合のうち、$a < b$ である実数 a と b の間にあるすべての実数の集合を 区間 という。

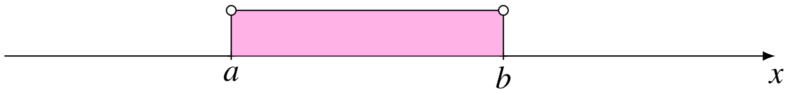
区間は、端点を含むかどうかによって、開区間、閉区間、半開区間に分類される。

開区間

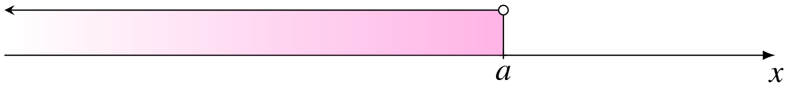
端点を含まない区間を開区間という。

開区間　$a \leq x \leq b$ となる実数 x の集合を **開区間** といい、(a, b) と表す。

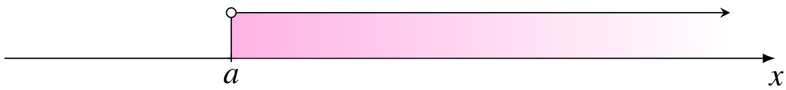
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\}$$



閉区間

端点を含まない区間を閉区間という。

閉区間　$a < x < b$ となる実数 x の集合を **閉区間** といい、$[a, b]$ と表す。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$[-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}$$

半開区間

一方の端点を含み、他方の端点を含まない区間を半開区間という。

半開区間　次のような集合を **半開区間** という。

- $a \leq x < b$ となる実数 x の集合を、$[a, b)$ と表す。
- $a < x \leq b$ となる実数 x の集合を、$(a, b]$ と表す。

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

1.2 数列の極限

微分を定義するには関数の極限を考えるが、関数の極限の諸性質は、数列の極限から導かれる。

まずは、$\varepsilon - \delta$ 論法（数列の場合は $\varepsilon - N$ 論法とも呼ばれる）によって数列の極限を定義し、その性質をひとつひとつ確かめていこう。

1.2.1 ε で「一致」をどう表現するか

「限りなく近づく」という表現では、「限りなく」の部分に無限という概念が含まれてしまう。

有限の値 ε を使って、無限を表現しようとするのが ε - δ 論法である。

* * *

ε - δ 論法で極限を定義する前に、有限値 ε を使った議論の例を見てみよう。

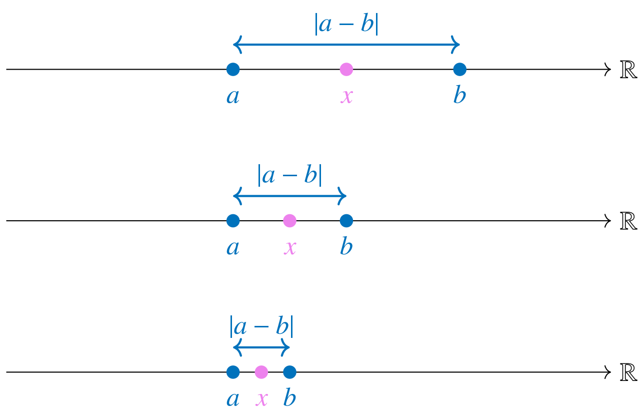
有限値 ε の不等式による一致の表現

a、b を実数とするとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次のことがいえる。

$$|a - b| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

実数は連続である（数直線には穴がない）ため、a と b が異なる実数であれば、a と b の間には無数の実数が存在する。

つまり、a と b が異なる限り、その間の距離 $|a - b|$ は絶対に 0 にはならない。



$|a-b|$ が 0 にならないということは、ここでも実数の連続性によって、$|a-b|$ より小さい実数が存在してしまう。
たとえば、a と b の間の中点 $x = \dfrac{|a-b|}{2}$ は、$|a-b|$ よりも小さい。

> a と b の間の中点というと $\dfrac{a-b}{2}$ だが、正の数 ε と比較するため、絶対値をつけて $\dfrac{|a-b|}{2}$ としている。

$|a-b|$ より小さい実数が存在してしまうと、「任意の」$\varepsilon > 0$ に対して、$|a-b| < \varepsilon$ を成り立たせることができない。
ε はなんでもよいのだから、$|a-b|$ より小さい実数を ε として選ぶこともできてしまう。
しかし、$|a-b|$ より小さい実数を ε としたら、$|a-b| < \varepsilon$ は満たされない。

$|a-b|$ が 0 でないという状況下では、あらゆる実数 ε より $|a-b|$ を小さくすることは不可能である。
したがって、$|a-b| < \varepsilon$ を常に成り立たせるなら、$|a-b| = 0$、すなわち $a = b$ となる。

* * *

ここまでの考察から直観を取り除いて、この定理の数学的な証明をまとめておこう。

Proof: 有限値 ε の不等式による一致の表現

$a \neq b$ と仮定する。

$\varepsilon_0 = \dfrac{|a-b|}{2}$ とおくと、絶対値 $|a-b|$ が正の数であることから、ε_0 も正の数となる。
よって、$|a-b| < \varepsilon_0$ が成り立つので、

$$
\begin{aligned}
|a-b| &< \frac{|a-b|}{2} \quad \text{両辺} \times 2 \\
2|a-b| &< |a-b| \\
2|a-b| - |a-b| &< 0 \\
|a-b| &< 0
\end{aligned}
$$

絶対値が負になることはありえないので、$a \neq b$ の仮定のもとでは矛盾が生じる。
したがって、$a = b$ でなければならない。 ■

なお、$|a-b| < \varepsilon$ の右辺を定数倍し、$|a-b| < k\varepsilon$ などとしても、この定理は成り立つ。

定理「有限値 ε の不等式による一致の表現」は、定数を k として、次のように書き換えることもできる。

$$|a-b| < k\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad a = b$$

この場合、証明で $\varepsilon_0 = \dfrac{|a-b|}{2k}$ とおけば、まったく同様の議論が成り立つからだ。

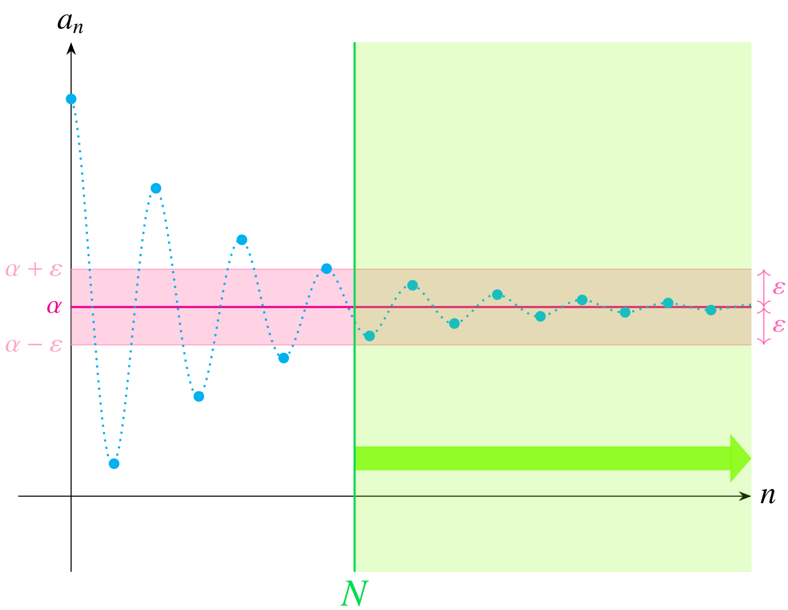
実際に、$|a-b| < 2\varepsilon$ とした場合のこの定理を、後に登場する数列の極限の一意性の証明で使うことになる。

1.2.2 ε - N 論法による数列の収束

$\varepsilon-\delta$ 論法は、数列の極限に適用する場合、$\varepsilon-N$ 論法と呼ばれることが多い。
「数列が $\{a_n\}$ が α に収束する」ことの $\varepsilon-N$ 論法による表現を、まずはイメージで掴んでみよう。

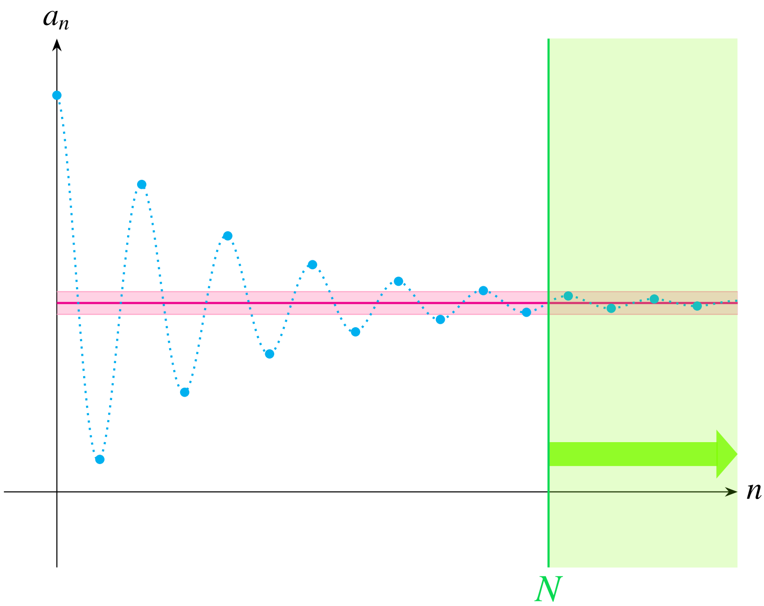
* * *

まず、α の周りに、両側それぞれ ε だけ広げた区間を考える。
ε は正の数ならなんでもよいとすれば、ε を小さな数に設定し、いくらでも区間を狭めることができる。
そして、「ここから先の項はすべて区間内に収まる」といえる位置に、N という印をつけておく。



ε を小さくしていくと、ε による α 周辺の区間に入る項は少なくなる。

それでも、N をずらしていけば、N 以降はこの区間に収まる項だけになる。
これこそが「収束」という現象だと定義するのが、$\varepsilon-N$ 論法の考え方である。



区間幅（の半分）となる ε をどんなに小さくしても、「N 番目以降は区間内に収まる項だけになる」といえるような N を設定できるか？が肝心で、そのような N が存在するなら、数列は収束するといえる。
このことを、数学の言葉でまとめておこう。

数列の収束と極限値

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ と実数 α について、次の条件を考える。

任意の正の数 ε に対して

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つような自然数 N が存在する

この条件が成り立つとき、数列 $\{a_n\}$ は α に **収束** するといい、次のように表す。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{または} \quad a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

このとき、α を数列 $\{a_n\}$ の 極限値 という。

$\varepsilon - \delta$ 論法によるこの定義を用いることで、数列の収束に関する諸性質を証明できるようになる。

1.2.3 数列の極限の一意性

数列が最終的に複数の極限値に散らばるとしたら、それは収束と呼べるだろうか？

$\varepsilon - \delta$ 論法による収束の定義は、そのような状況をきちんと除外するようになっている。

数列が複数の値に収束することはない。このことを示すのが、次の定理である。

数列の極限の一意性

数列 $\{a_n\}$ が収束するならば、その極限値はただ 1 つに定まる。

Proof: 数列の極限の一意性

数列 $\{a_n\}$ が α と β の 2 つの極限値を持つと仮定する。

このとき、任意の正の数 ε に対して、

$$\begin{aligned} n \geq N_1 &\implies |a_n - \alpha| < \varepsilon \\ n \geq N_2 &\implies |a_n - \beta| < \varepsilon \end{aligned}$$

が成り立つような自然数 N_1 と N_2 が存在する。

ここで、$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \geq N$ のとき、N_1 と N_2 の大きい方が n 以下に収まることから、$n \geq N_1$ と $n \geq N_2$ がともに成り立つ。

よって、$n \geq N$ のとき、$|\alpha - \beta|$ を考えると、

$$
\begin{aligned}
|\alpha - \beta| &= |\alpha - \beta + \underbrace{a_n - a_n}_{0}| \\
&= |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)| \\
&\leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| && \text{三角不等式} \\
&= |-(a_n - \alpha)| + |a_n - \beta| \\
&= |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| && |-A| = |A| \\
&< \varepsilon + \varepsilon && n_1 \geq N \text{ と } n_2 \geq N \text{ より} \\
&= 2\varepsilon \\
\therefore \quad |\alpha - \beta| &< 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

したがって、有限値 ε の不等式による一致の表現より、

$$\alpha = \beta$$

これで、数列 $\{a_n\}$ の極限値はただ 1 つに定まることが示された。 ■

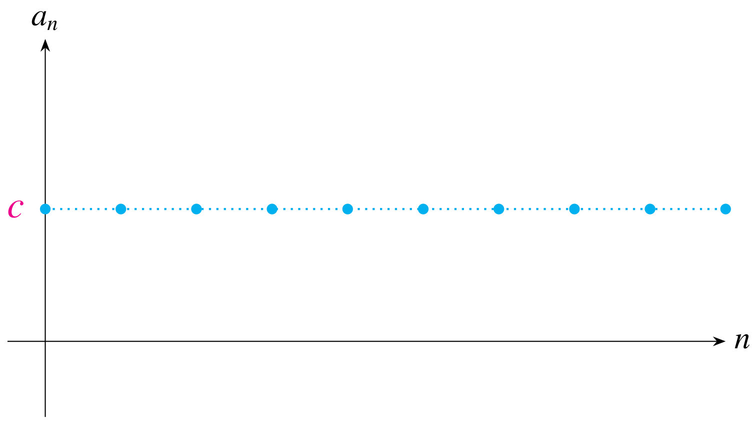
1.2.4 定数数列の極限

最も単純な数列の極限値を、$\varepsilon - N$ 論法で考えてみよう。

ここでは、同じ数だけを並べた数列（定数数列）の極限を考える。

定数数列の極限を考えておくことで、のちに数列の定数倍の極限へと発展させることができる。

定数数列　任意の n に対して $a_n = c$ となる数列 $\{a_n\}$ を定数数列という。



定数 c を並べた数列では、n を大きくしたときの a_n の値も変わらず c なのだから、極限値も当然 c となりそうである。

定数数列の極限

任意の n に対して $a_n = c$ となる定数数列 $\{a_n\}$ は収束し、その極限値は c となる。

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c$$

このような当たり前に聞こえる事実も、$\varepsilon - N$ 論法では「当たり前」という直観を排除して議論できる。

Proof: 定数数列の極限

ε を任意の正の数とする。
a_n は n の値によらず c であるから、任意の n に対して次の式が成り立つ。

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$
$$\therefore \quad |a_n - c| < \varepsilon$$

したがって、

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad |a_n - c| < \varepsilon$$

となるような自然数 N は存在する（というか N はなんでもよい）。
よって、$\{a_n\}$ は収束し、その極限値は c である。 ■

1.2.5 数列の極限の線形性

数列の極限についても、線形性が成り立つ。

数列の極限の線形性

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がともに収束するとき、c を実数とすると、数列 $\{ca_n + cb_n\}$ も収束する。

そして、その極限値は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n + cb_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n + c\lim_{n\to\infty} b_n$$

この線形性の式は、数列の和の極限と、数列の定数倍の極限を組み合わせたものになっている。それぞれ証明することで、この線形性の式が成り立つことを確認しよう。

数列の和の極限

数列の和の極限

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がともに収束するとき、数列 $\{a_n + b_n\}$ も収束する。

そして、その極限値は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$\{a_n\}$ の極限値を α、$\{b_n\}$ の極限値を β とすると、最終的に次のような関係を導くことで、この定理が証明される。

$$n \geq N \quad\Longrightarrow\quad |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$$

$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)|$ は、$a_n + b_n$ と $\alpha + \beta$ がどれだけ近いか、すなわち $a_n + b_n$ と $\alpha + \beta$ の誤差を表している。そして、この誤差を ε より小さくする必要がある。

そのためには、a_n と α の誤差を $\dfrac{\varepsilon}{2}$ より小さくし、b_n と β の誤差も $\dfrac{\varepsilon}{2}$ より小さくできればよい。

Proof: 数列の和の極限

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおき、ε を任意の正の数とする。

このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \geq N_1 \quad\Longrightarrow\quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$$

同様に、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より、次のような自然数 N_2 が存在する。

$$n \geq N_2 \quad\Longrightarrow\quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで、$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \geq N$ のとき、$n \geq N_1$ と $n \geq N_2$ がともに成り立つ。

$$n \geq N \quad\Longrightarrow\quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

よって、$n \geq N$ のとき、三角不等式より、

$$\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &= |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| \\
&\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon \\
\therefore \quad |(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

という不等式が成り立つことで、$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta$ が示された。 ■

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するということは、$\varepsilon - N$ 論法による数列の収束の定義より、

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

という関係が成り立つということである。

ここでの ε は「任意の」正の数であるから、ε の部分にどんな正の数を当てはめても、この関係が成り立つことになる。

数列の和の極限の証明では、ε の部分に $\dfrac{\varepsilon}{2}$ を当てはめた関係を利用している。

数列の定数倍の極限

数列の定数倍の極限

数列 $\{a_n\}$ が収束するとき、c を実数とすると、数列 $\{ca_n\}$ も収束する。

そして、その極限値は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n$$

$\{a_n\}$ の極限値を α とすれば、ca_n と $c\alpha$ の誤差を ε より小さくする必要がある。
あとから誤差が最大 $|c|$ 倍されても大丈夫なように、a_n と α の誤差は $\dfrac{\varepsilon}{|c|}$ より小さくできればよい。

> c は正の数とは限らない。誤差は任意の正の数 ε と比較するために正の数として評価したいので、絶対値をつけている。

$|c|$ が分母にあるので、$c = 0$ の場合は除外して考える必要がある。
$c = 0$ の場合は、定数数列の極限として考えることで、0 に収束することがわかる。

Proof: 数列の定数倍の極限

$c = 0$ と $c \neq 0$ の場合に分けて証明する。

$c = 0$ の場合

$c = 0$ のとき、右辺は、

$$c\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

また、左辺は、定数数列の極限として考えて、

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

したがって、$c = 0$ の場合は、$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つ。

$c \neq 0$ の場合

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とおき、ε を任意の正の数とする。

このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N が存在する。

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

よって、$n \geq N$ のとき、

$$\begin{aligned} |ca_n - c\alpha| &= |c(a_n - \alpha)| && |AB| = |A||B| \\ &= |c||a_n - \alpha| && |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &< |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

$$\therefore \quad |ca_n - c\alpha| < \varepsilon$$

という不等式が成り立つことで、$\lim_{n\to\infty} ca_n = c\alpha$ がいえる。

以上より、いずれの場合も、数列 $\{ca_n\}$ は $c\alpha$ に収束することが示された。 ■

1.2.6 数列の積の極限

数列の積の極限

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がともに収束するとき、数列 $\{a_n b_n\}$ も収束する。

そして、その極限値は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$\{a_n\}$ の極限値を α、$\{b_n\}$ の極限値を β とすると、最終的に次のような関係を導くことで、この定理が証明される。

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |a_n b_n - \alpha\beta| < \varepsilon$$

$a_n b_n$ と $\alpha\beta$ の誤差 $|a_n b_n - \alpha\beta|$ を、三角不等式で見積もっておこう。

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n b_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| \\ &= |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \\ &\le |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \end{aligned}$$

ここで、$\{a_n\}$ の極限値が α、$\{b_n\}$ の極限値が β であることから、任意の正の数を ε' として、$|a_n - \alpha| < \varepsilon'$、$|b_n - \beta| < \varepsilon'$ という関係を使うことができる。

ここまでで得られた不等式において、$|a_n|$ の部分も $|\alpha|$ に置き換えたいが、このときに a_n と α の誤差 ε' を考慮する必要がある。

$$\begin{aligned} |a_n| - |\alpha| \le |a_n - \alpha| < \varepsilon' \\ |a_n| < |\alpha| + \varepsilon' \end{aligned}$$

これを使うことで、

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &\le |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \\ &< (|\alpha| + \varepsilon')|b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \\ &= (|\alpha| + \varepsilon')\varepsilon' + |\beta|\varepsilon' \\ &< |\alpha|\varepsilon' + \varepsilon'^2 + |\beta|\varepsilon' \\ &= (|\alpha| + |\beta| + \varepsilon')\varepsilon' \end{aligned}$$

また、ε' は任意の正の数であるが、結局はどんどん小さな数に狭めていくものなので、最初から 1 未満に設定して $0 < \varepsilon' < 1$ としてもよい。

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &< (|\alpha| + |\beta| + \varepsilon')\varepsilon' \\ &< (|\alpha| + |\beta| + 1)\varepsilon' \end{aligned}$$

以上の考察を、次のような証明として落とし込む。

Proof: 数列の積の極限

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおき、ε を任意の正の数とする。

極限を考えるので、$0 < \varepsilon < |\alpha| + |\beta| + 1$ としてもよい。
そこで、

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$$

とおくと、$0 < \varepsilon' < 1$ である。

このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon'$$

同様に、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より、次のような自然数 N_2 が存在する。

$$n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad |b_n - \beta| < \varepsilon'$$

ここで、$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \geq N$ のとき、$n \geq N_1$ と $n \geq N_2$ がともに成り立つ。

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon' \quad \text{かつ} \quad |b_n - \beta| < \varepsilon'$$

よって、$n \geq N$ のとき、三角不等式と $0 < \varepsilon' < 1$ より、

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - \alpha\beta| &\leq |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \\
&< (|\alpha| + \varepsilon')\varepsilon' + |\beta|\varepsilon' \\
&= (|\alpha| + |\beta| + \varepsilon')\varepsilon' \\
&< (|\alpha| + |\beta| + 1)\varepsilon' \\
&= \varepsilon \\
\therefore \quad |a_n b_n - \alpha\beta| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

という不等式が成り立つことで、$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \alpha\beta$ が示された。 ■

1.2.7 数列の商の極限

数列の逆数の極限

数列 $\{a_n\}$ がともに収束し、$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ のとき、数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ も収束する。

そして、その極限値は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

$\{a_n\}$ の極限値を α とすると、最終的に次のような関係を導くことで、上の式は証明される。

$$n \geq N \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| < \varepsilon$$

ここでも、$\dfrac{1}{a_n}$ と $\dfrac{1}{\alpha}$ の誤差 $\left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{\alpha}\right|$ を、三角不等式で見積もっておく。

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| &= \left|\frac{\alpha - a_n}{a_n\alpha}\right| \\ &= \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n\alpha|}\end{aligned}$$

ここで、$0 < \varepsilon' < \dfrac{|\alpha|}{2}$ とすると、

$$\begin{aligned}|a_n - \alpha| < \varepsilon' &< \frac{|\alpha|}{2} \\ \therefore \quad |a_n - \alpha| &< \frac{|\alpha|}{2}\end{aligned}$$

また、三角不等式より、

$$\begin{gathered}||a_n| - |\alpha|| \leq |a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2} \\ -\frac{|\alpha|}{2} < |a_n| - |\alpha| < \frac{|\alpha|}{2} \\ |\alpha| - \frac{|\alpha|}{2} < |a_n| \\ \frac{2|\alpha|}{2} - \frac{|\alpha|}{2} < |a_n| \\ \therefore \quad \frac{|\alpha|}{2} < |a_n|\end{gathered}$$

が成り立つことを利用して、

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\alpha}\right| &< \frac{|a_n-\alpha|}{|a_n\alpha|} \\ &< \frac{|a_n-\alpha|}{\frac{|\alpha|}{2}\cdot|\alpha|} \\ &= \frac{2}{|\alpha|^2}|a_n-\alpha|\end{aligned}$$

このような不等式から、次のように証明を組み立てる。

Proof: 数列の逆数の極限

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおき、ε を任意の正の数とする。

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n-\alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$$

このとき、$n \geq N_1$ ならば、三角不等式より次のような不等式が成り立つ。

$$\frac{|\alpha|}{2} < |a_n|$$

よって、$n \geq N_1$ とすると、$a_n \neq 0$ である。
このとき、次のような不等式も得られる。

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\alpha}\right| &< \frac{|a_n-\alpha|}{|a_n\alpha|} \\ &< \frac{2}{|\alpha|^2}|a_n-\alpha|\end{aligned}$$

一方、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_2 も存在する。

$$n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad |a_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{\frac{2}{|\alpha|^2}}$$

ここで、$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおくと、$n \geq N$ のとき、$n \geq N_1$ と $n \geq N_2$ がともに成り立つ。

よって、$n \geq N$ のとき、

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| &< \frac{2}{|\alpha|^2}|a_n - \alpha| \\ &< \frac{2}{|\alpha|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\frac{2}{|\alpha|^2}} \\ &= \varepsilon \\ \therefore \quad \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| &< \varepsilon\end{aligned}$$

という不等式が成り立つことで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ が示された。 ■

今示した数列の逆数の極限と、数列の積の極限を組み合わせることで、数列の商の極限も求めることができる。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

数列の商の極限

数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ がともに収束し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ のとき、数列 $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$ も収束する。

そして、その極限値は次のようになる。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n}$$

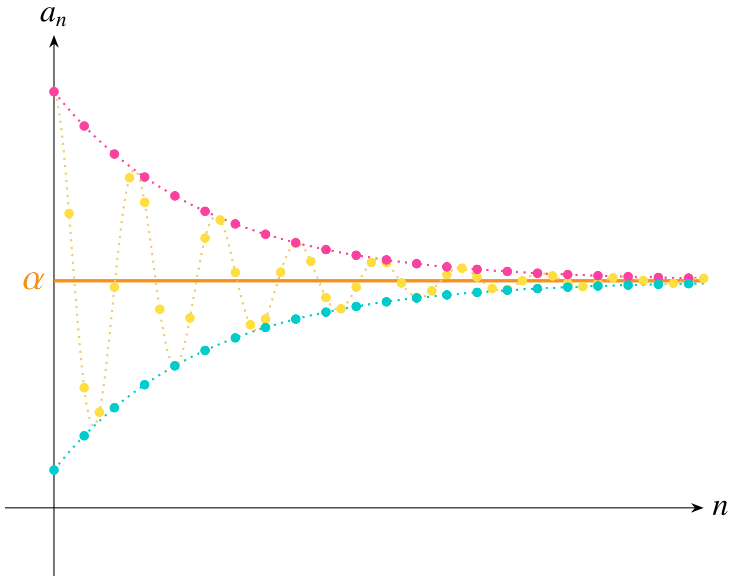
1.2.8 はさみうちの定理

はさみうちの定理（はさみうちの原理）は、

> ある数列が 2 つの数列に挟まれていて、その 2 つの数列の極限値が同じなら、挟まれた数列の極限値も同じになる。

という内容の定理である。

この定理により、直接極限を求めにくい数列でも、簡単な数列で挟むことで極限値を求めることが容易になる。



数列の極限に関するはさみうちの定理

数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$、$\{c_n\}$ が、ある自然数 n_0 について、

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n \geq n_0)$$

という関係が成り立つとする。このうち、$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が収束し、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$$

が成り立つならば、$\{c_n\}$ も収束し、

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

が成り立つ。

すべての自然数 n に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ である必要はない。

たとえば、5 以上の n に対して $a_n \leq c_n \leq b_n$ が成り立つ場合（$n_0 = 5$ の場合）にも、はさみうちの定理は適用できる。

Proof: 数列の極限に関するはさみうちの定理

ε を任意の正の数とする。

このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ より、次のような自然数 N_1 が存在する。

$$n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

同様に、$\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ より、次のような自然数 N_2 が存在する。

$$n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad |b_n - \beta| < \varepsilon$$

ここで、$N = \max\{N_1, N_2, n_0\}$ とおくと、$n \geq N$ のとき、$n \geq n_0$、$n \geq N_1$、$n \geq N_2$ がすべて成り立つ。
よって、$n \geq N$ のとき、

Under construction...