



ベクトルが張る空間

$m \times n$ 型行列 A で写れる範囲を $\text{Im } A$ として定義した。

\boldsymbol{x} を n 次元ベクトルとすると、 $\text{Im } A$ は次のようなものといえる。

\boldsymbol{x} をいろいろ動かしたときの、

$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ が動ける範囲が $\text{Im } A$



ここで、 A を列ベクトルを並べたもの $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)$ として書き、

\boldsymbol{x} も成分 x_1, \dots, x_n で書けば、

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n$$

つまり、

数 x_1, \dots, x_n をいろいろ動かしたときの、

$x_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n \boldsymbol{a}_n$ が動ける範囲が $\text{Im } A$



であり、この線形結合が動ける範囲を「ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n$ の張る空間」という。

🎓 ベクトルが張る空間 k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$

を与えたとき、 $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k \rangle$$

あるいは

$$\text{span}\{\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_k\}$$

ref: 行列と行列式の基礎 p6~8、ref: プログラミングのための線形代数 p135

によって表し、これを $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ が張る空間という。

ベクトルが張る空間は部分空間

📌 ベクトルが張る空間は部分空間 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle$ は部分空間である

🔪 証明



[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.2]

📌 部分空間の張る空間は部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in V$ とすると、

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle \subset V$$

🔪 証明



[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.4]


ベクトルが張る空間の幾何的解釈

ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ の張る空間 $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$ は、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ で定まる平面の一般化といえる。(ここで、点は 0 次元平面、直線は 1 次元平面と考える。)

- $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ がすべて \mathbf{o} なら、 \mathbf{o} ただ一点が $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$
- $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ がすべて一直線上にあれば、その直線が $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$

- $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ がすべて平面上にあれば、その平面が $\langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$

たとえば \mathbb{R}^3 において座標を (x, y, z) とするとき、 xy 平面は \mathbb{R}^3 の部分空間である。

 座標部分空間 $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合 I に対して、 x_i ($i \in I$) 以外の座標がすべて 0 である部分集合は \mathbb{R}^n の部分集合である。

このようなものを座標部分空間といい、 \mathbb{R}^I と書く。

$$\mathbb{R}^I = \langle \mathbf{e}_i \mid i \in I \rangle$$

と表すこともできる。

Zebra Notes

Type	Number
todo	2