

付録 A

写像と集合



関数から写像へ

関数は、数を入力すると数が出力される装置であり、入力した数に「対応」する数を決める規則である。

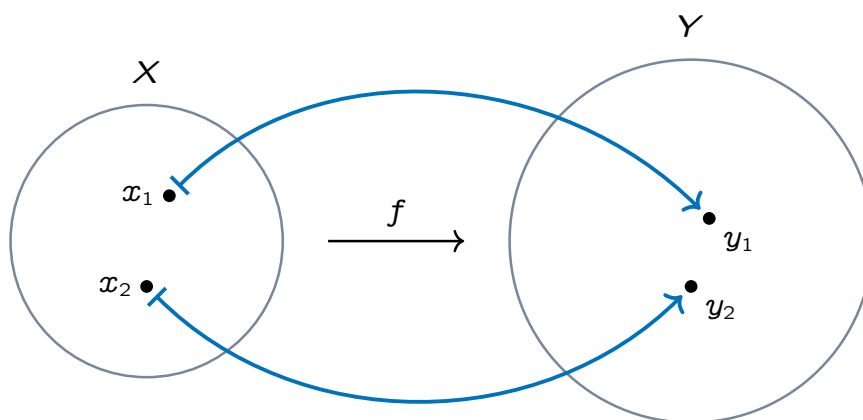
このような「対応」という考え方の対象を「数」に限定せず、「集合の要素（元）」に一般化したものを**写像**という。

def A.1 - 写像

集合 X, Y があったとき、 X のすべての要素 x に対して、 Y のある要素 y をただ一つ対応させる規則 f が与えられたとする。

このとき、 f を X から Y への**写像**といい、次のように表す。

$$f: X \rightarrow Y$$



写像による像

写像 f により、 X の要素 x が Y の要素 y に対応しているとき、

- y は x の f による像である
- f により x は y に写る

というような言い回しが使われる。

このとき、関数と同じように、次のように書くことがある。

$$f(x) = y$$

集合の対応と集合の元の対応

集合の対応を表すには \rightarrow を使い、集合の元の対応を表すには \mapsto を使う。

$x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき、次のように書くことがある。

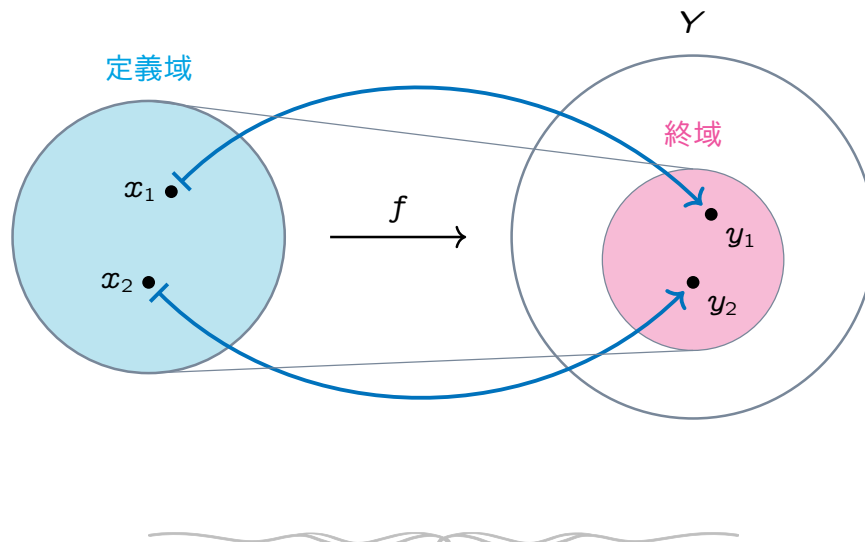
$$\begin{array}{lll} f: & X & \longrightarrow Y \\ & \cup & \cup \\ & x & \longmapsto y \end{array}$$

定義域と終域

写像では、「どの集合からどの集合への対応であるか」を明示しておかなければならない。

🎓 def - 写像の定義域と終域

写像 $f: X \rightarrow Y$ において、集合 X を f の**定義域**という。また、 $x \in X$ に対応する $y \in Y$ の集合は、 Y の部分集合であり、これを f の**終域**という。

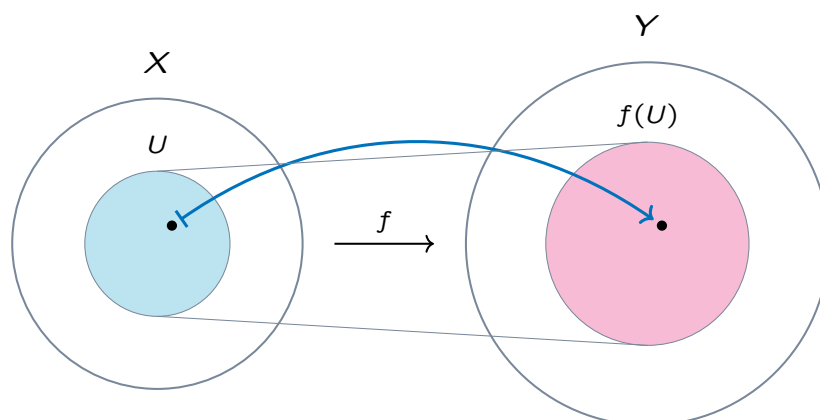


像と逆像

🎓 def - 部分集合の像

写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、 X の部分集合 U に対し、 $x \in U$ を f で写したものの集合を U の**像**という。

$$f(U) = \{f(x) \mid x \in U\} \subset Y$$

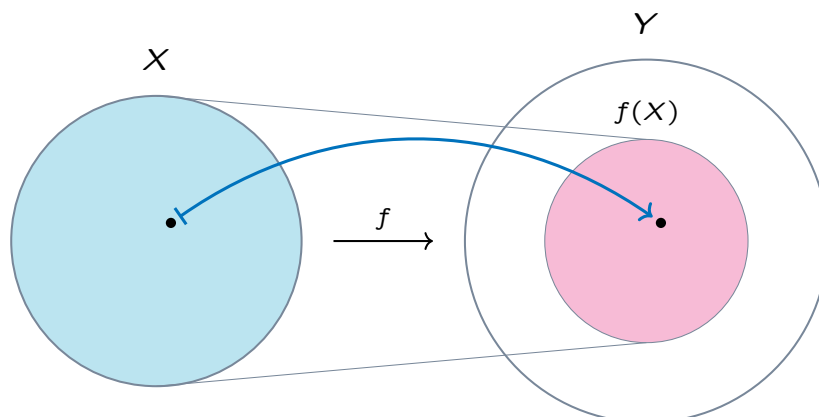


$X = U$ の場合、 X の像は f の像と呼ばれる。

🎓 def - 写像の像

写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、 $x \in X$ を f で写したものの集合を f の像という。

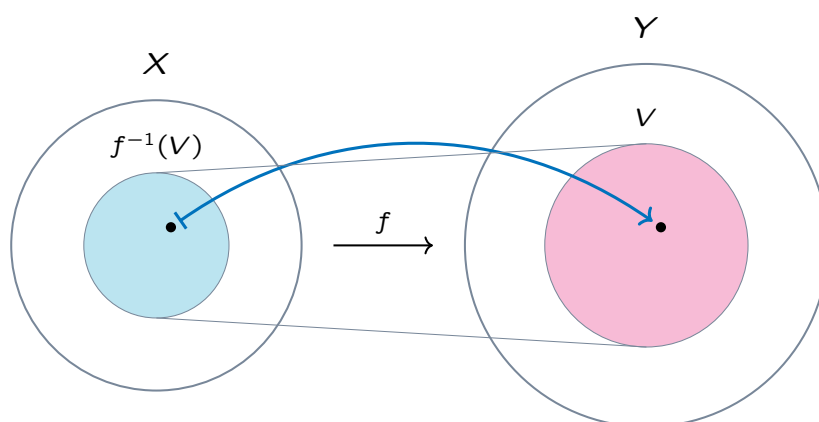
$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$



🎓 def - 部分集合の逆像

写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、 Y の部分集合 V に対し、 f によって V の元に写るような $x \in X$ の集合を V の逆像という。

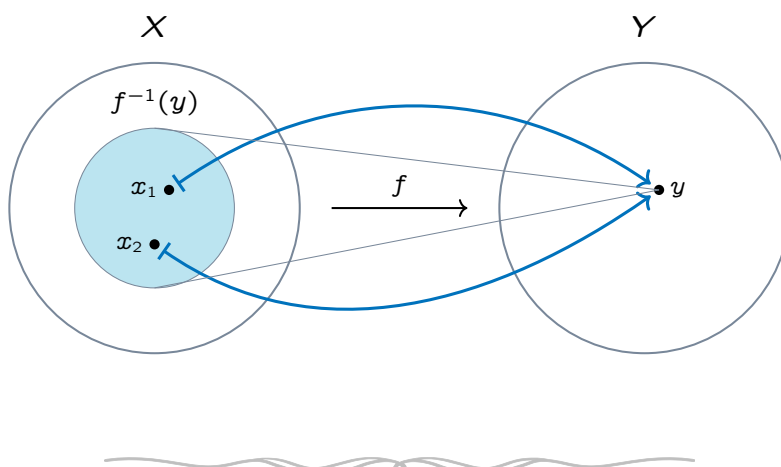
$$f^{-1}(V) = \{x \in X \mid f(x) \in V\} \subset X$$



🎓 def A.2 - 終域の元の逆像

写像 $f: X \rightarrow Y$ が与えられたとき、 Y の元 y に対し、 f によって y に写るような $x \in X$ の集合を y の逆像という。

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \subset X$$



単射と全射

写像の性質として、次の 2 点が重要になる。

- i. 異なる 2 元を写して同じ元になるか？
- ii. 終域のどんな元も、定義域の元になるか？ (y に写るような x があるか？)

これら 2 つの視点から、**単射**と**全射**が定義される。

- i. 「異なる元は異なる元に写る」という性質を満たすとき、写像は**単射**であるという。
- ii. 「どんな y も X の元の像となる」という性質を満たすとき、写像は**全射**であるという。

単射の定義とイメージ

🎓 def A.3 - 単射

写像 $f: X \rightarrow Y$ が**単射**であるとは、 X の任意の要素 x_1, x_2 に対して、次が成り立つことをいう。

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

この条件の対偶をとると、

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

となる。つまり、**単射**であるということは、

異なる元が f によって同じ元に対応することはない



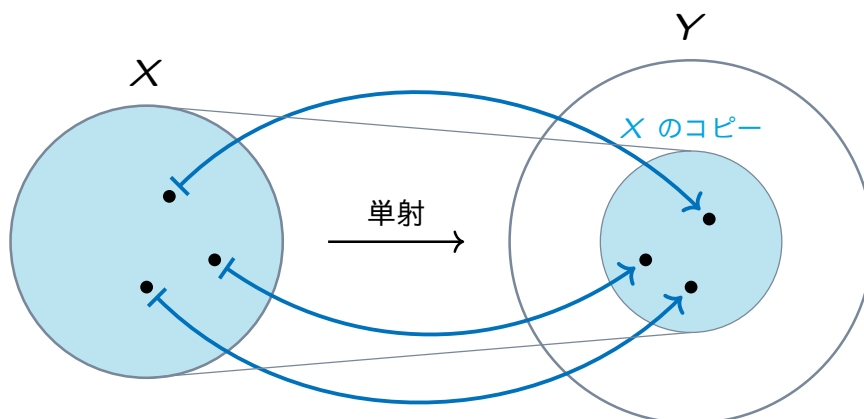
ということにほかならない。

これは、元々の集合の元が、 f で写しても他の元と重なってしまうようなことはない、ということの意味する。情報が失われることなく、すべての元がそのまま写るので、

単射な写像は、定義域を終域の中にそっくり「コピーする」



と考えることができる。



また、単射は **def A.2「終域の元の逆像」** を用いて定義することもできる。

def - 単射（逆像による定義）

写像 $f: X \rightarrow Y$ が**単射**であるとは、任意の $y \in Y$ に対し、逆像 $f^{-1}(y)$ の元の個数が 1 以下であることをいう。

y の逆像は、 f によって y に写るような $x \in X$ の集合である。

この定義でも、同じ y に写るような x がただ一つしかない（もしくは存在しない）ことが**単射**だと述べている。

全射の定義とイメージ

🎓 def A.4 - 全射

写像 $f: X \rightarrow Y$ が**全射**であるとは、 f の像 $f(X)$ が Y に一致することをいう。

$$f(X) = Y$$

X から Y への写像 f が**全射**であるとは、

Y のすべての元が、 X のある元の像となる



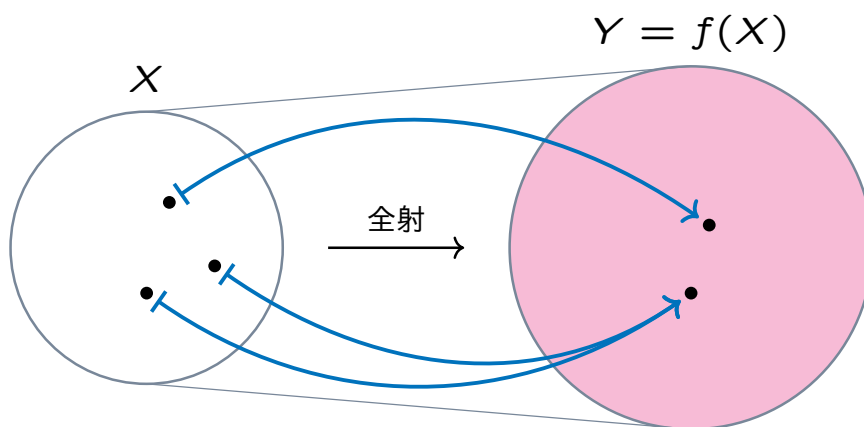
ということを意味する。

つまり、

全射な写像は、定義域の元の像で終域を「埋め尽くす」



と考えることができる。



全単射の定義とイメージ

🎓 def - 全単射

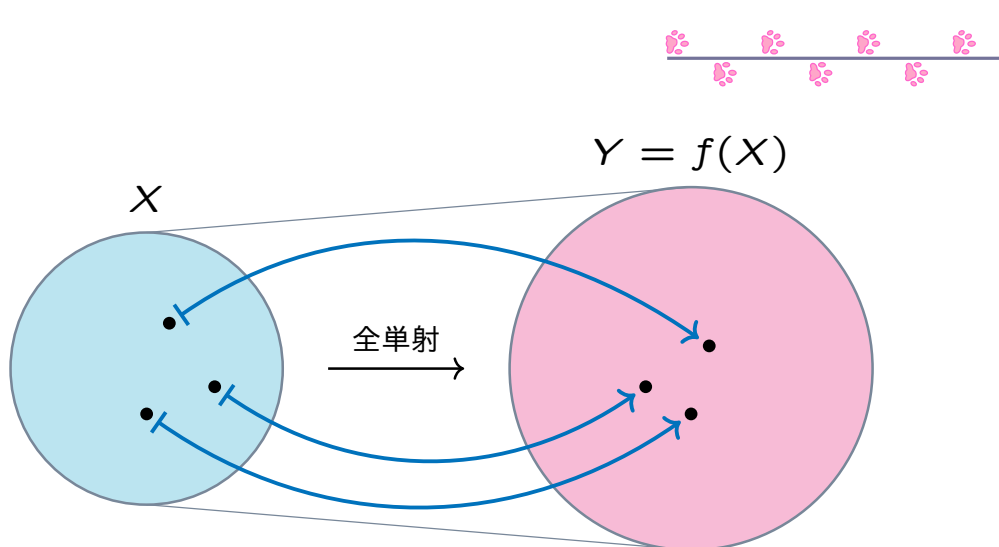
写像 f が**全単射**であるとは、 f が単射かつ全射であることをいう。

単射と全射は、それぞれ次の条件を満たす性質だった。

- **単射** : y に写るような x はただ一つしかない (異なる元は異なる元に写る)
- **全射** : どんな y も X の元の像 x になる (すべての元に漏れなく写る)

これらの両方を満たす性質である**全単射**は、次のような性質だといえる。

どんな y も、 x に対するただ一つの像となる



全単射の一対一対応による同一視

単射は「 X のコピーを Y の中に作る」ことだった。

さらに全射でもあれば、「 X のコピーは Y に一致する」ことになる。

そのため、 X と Y の間の写像 f が**全単射**であれば、 X と Y を**同一視** (identify) する (同じ集合とみなす) という考え方もできる。

全単射な写像 f により、 X の元と Y の元は**一対一に対応**する



X と Y を同一視するときには、どの対応により X と Y が同じものであると考えているかを明らかにしておく必要がある。



恒等写像と包含写像

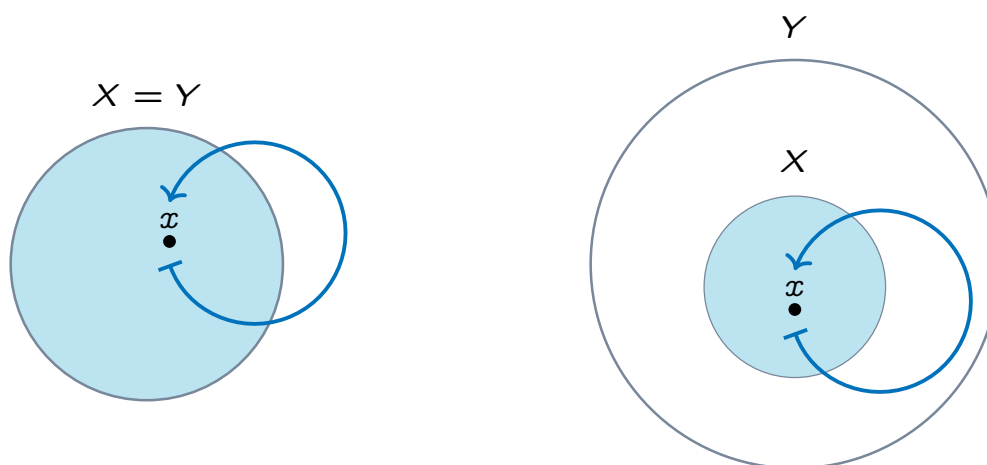
自分自身に対応させる写像は、次のように書ける。

$$f(x) = x$$

この場合、 f によって x が y に変わるようなことはなく、 f は x をそのまま写す（何も変えない）。

任意の $x \in X$ に対して、 $f(x) = x$ が成り立ち、かつ $f(x) \in Y$ を満たすような状況は、次の 2 通りが考えられる。

- $X = Y$ の場合（左図）を**恒等写像**（identity map）という。
- $X \subset Y$ の場合（右図）を**包含写像**（inclusion map）という。



🎓 def A.5 - 恒等写像

集合 X に対して、 X の任意の元 x を $x \in X$ に対応させる X から X への写像を X 上の**恒等写像**といい、 id_X あるいは単に id と表す。

$$\begin{array}{ccc} \text{id}_X: & X & \longrightarrow X \\ & \Downarrow & \\ & x & \longmapsto x \end{array}$$

🎓 def - 包含写像

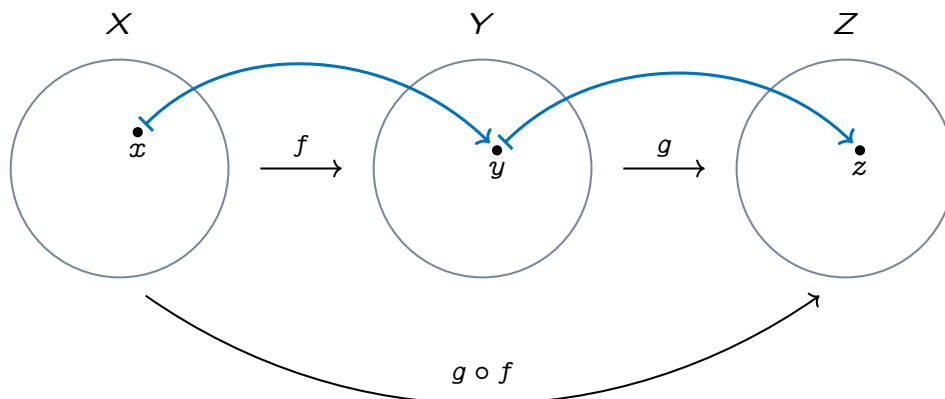
定義域 X が終域 Y の部分集合のとき、 X の任意の元 x を $x \in Y$ に対応させる写像を**包含写像**といい、 ι と表す。

$$\begin{array}{ccc} \iota: & X & \longrightarrow Y \\ & \Downarrow & \\ & x & \longmapsto x \end{array}$$



合成写像

対応づける操作を続けて行うことは、写像の**合成**として定義される。



def A.6 - 合成写像

2つの写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ が与えられたとき、 X の元に対して Z の元を対応させる X から Z への写像を f と g の**合成写像**といい、 $g \circ f$ と表す。

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

写像の合成の性質

theorem A.1 - 写像の合成の結合法則

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

証明

$f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z, h: Z \rightarrow W$ とする。

任意の $x \in X$ に対して、

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

一方で、

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

したがって、任意の $x \in X$ について両辺が一致するので、

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が成り立つ。 ■

単射な写像の合成

[Todo 1: 単射な写像の合成は単射である]

全射な写像の合成

[Todo 2: 全射な写像の合成は全射である]

逆写像と可逆な写像

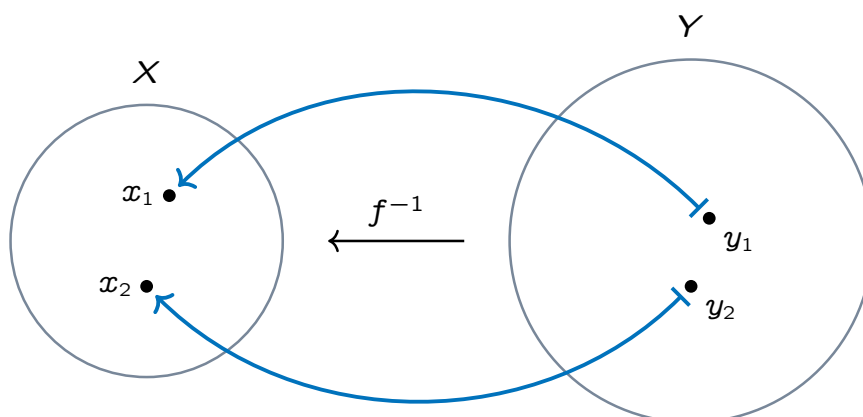
全単射な写像では、終域のどんな元も、定義域のただ 1 つの元の像となっている。
 そのため、終域の元からその像になるような定義域の元をただ 1 つ決めることができる。
 この対応は、元々の写像の終域から定義域への写像となり、逆写像と呼ばれる。

🎓 def A.7 - 逆写像

写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であるとき、任意の $y \in Y$ に対して、 $f(x) = y$ となる $x \in X$ がただ一つ存在する。

このとき、 Y の元 y に対して、 $f(x) = y$ となる x を対応させる写像を f の逆写像 (inverse mapping) といい、次のように表す。

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$



🎓 def - 可逆

写像 $f: X \rightarrow Y$ の逆写像が存在するとき、 f は**可逆** (invertible) であるという。

逆写像を定義する上での前提は、写像が全単射であることだったため、

可逆な写像とは、**全単射**な写像



のことをいう。

また、逆写像は**恒等写像**によって定義することもできる。

そのための議論を次に行う。

左逆写像と右逆写像

f で写した後に g を適用すると元に戻るとき、 g は f の**左逆写像**と呼ばれる。

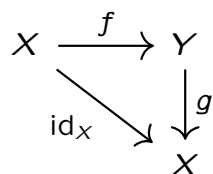
🎓 def - 左逆写像

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在して、

$$g \circ f = \text{id}_X$$

を満たすとき、 g は f の**左逆写像**であるという。

集合レベルでの左逆写像



要素レベルでの左逆写像

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} x$$

g で戻した後に f を適用すると元に戻るとき、 g は f の**右逆写像**と呼ばれる。

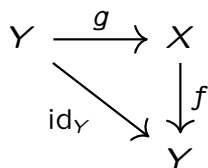
def - 右逆写像

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在して、

$$f \circ g = \text{id}_Y$$

を満たすとき、 g は f の右逆写像であるという。

集合レベルでの右逆写像



要素レベルでの右逆写像

$$y \xrightarrow{g} g(y) \xrightarrow{f} y$$

全単射の特徴づけ

theorem - 全単射と逆写像の存在

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、次の 2 つは同値である。

- i. f は全単射である
- ii. f の左逆写像であり、右逆写像でもある写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在する

証明

[Todo 3: book: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p62]

逆写像は、次のように定義することもできる。

def A.8 - 逆写像（恒等写像による定義）

写像 $g: Y \rightarrow X$ が写像 $f: X \rightarrow Y$ の逆写像であるとは、次が成り立つことをいう。

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{かつ} \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

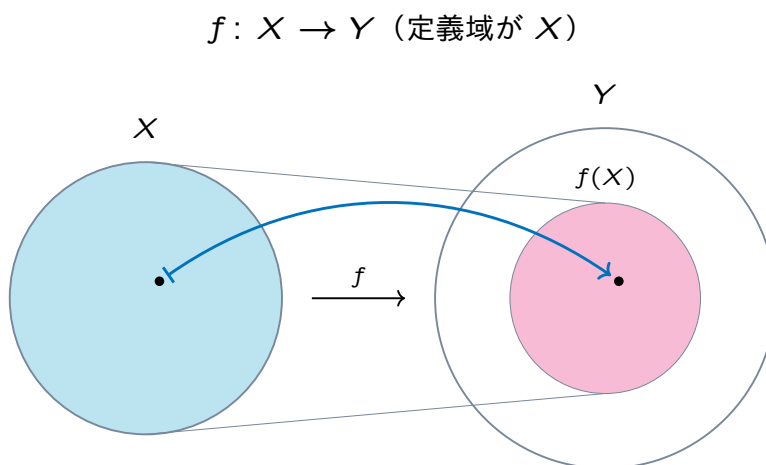
写像の制限

定義域を一部分に限定する、すなわち写像の定義域をその部分集合に取り替えることを、写像の制限 (restriction) という。

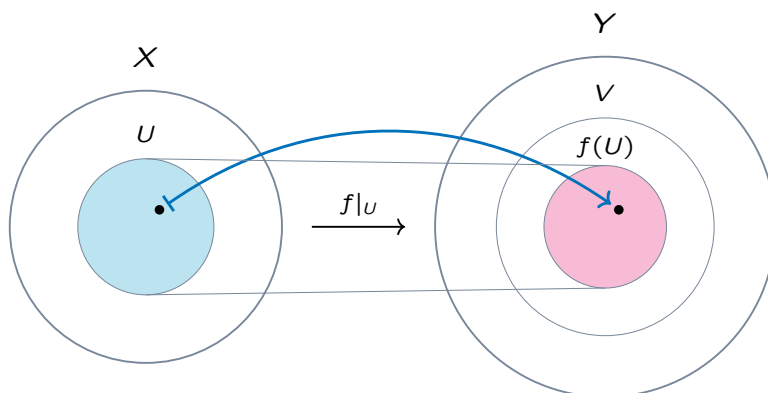
🎓 def A.9 - 写像の制限

写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、部分集合 $U \subset X$ と $V \subset Y$ が $f(U) \subset V$ を満たすとき、 $x \in U$ に対して $f(x) \in V$ を対応させる写像 $U \rightarrow V$ を写像 f の U への制限といい、 $f|_U$ と表す。

$$\begin{array}{ccc} f|_U: & U & \longrightarrow & V \\ & \psi & & \psi \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$



$f|_U: U \rightarrow V$ (定義域を U に制限)



直積集合

直積集合とは、2つの集合からそれぞれ要素を取り出してつくったペアをすべて集めた集合である。

	b_1	b_2	\cdots	b_n
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	\cdots	(a_1, b_n)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	\cdots	(a_2, b_n)
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
a_m	(a_m, b_1)	(a_m, b_2)	\cdots	(a_m, b_n)

ただし、ペアには順序があり、たとえば、 (a, b) と (b, a) は異なるものとみなす。このような順序を考慮したペアを**順序対**という。

直積集合は、順序対の集合である。

def A.10 - 直積集合

2つの集合 A, B に対して、 A と B の**直積集合**は次のように定義される。

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

直積集合の例：座標平面 \mathbb{R}^2

たとえば、2次元平面内の各点は、2つの実数の組 (x, y) で表すことができる。

このとき、 x 座標と y 座標はそれぞれ実数の集合 \mathbb{R} の要素であり、平面上の点 (x, y) を集めたものが、直積集合 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ となる。

この $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ を、 \mathbb{R}^2 と表記することが多い。

2 次元平面を \mathbb{R}^2 と表記していたのは、このような直積集合の考え方が背景にある。

.....

Zebra Notes

Type	Number
todo	3