単射と全射

ここまで、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ という関係について、次の 2 つの観点で議論してきた

ref: プログラミングのための線形代数 p118〜119

i. 同じ結果 $\boldsymbol{y}$ が出るような原因 $\boldsymbol{x}$ は唯一か
ii. どんな結果 $\boldsymbol{y}$ にも、それが出るような原因 $\boldsymbol{x}$ が存在するか

$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ を方程式と捉えると、(i) は解の一意性、(ii) は解の存在に対応する

単射

(i) は、次のようにも言い換えられる

i. 異なる原因 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'$ が、A で同じ結果に写ることがないか

(i) の条件が成り立つとき、「線形写像 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は単射である」という

全射

(ii) は、次のようにも言い換えられる

ii. 元の空間全体（定義域）を A で写した領域 $\mathrm{Im}\, A$ が、行き先の空間全体（値域）に一致するか

(ii) の条件が成り立つとき、「線形写像 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は全射である」という

全単射

(i) と (ii) の両方が成り立つときは、「線形写像 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ は全単射である」という

零ベクトルと単射性

零写像と射影を除けば、f によってベクトルが「つぶれない」という性質は、次のように表せる

$$\boldsymbol{v} \neq 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{v}) \neq \boldsymbol{o}$$

ref: 行列と行列式の基礎 p65〜66

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p71〜73

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

この条件は、実は線形写像が単射であることを意味している

対偶をとって、次のように表現できる

零ベクトルへの写像による単射性の判定　線形写像 f が単射であることと次は同値である

$$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

証明

i. f が単射
ii. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

零ベクトルの像は零ベクトルであることから、$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ は、

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{o})$$

と書き換えられる

f の単射性により、この式から、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$$

がしたがう ■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ を満たす $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ を考える

このとき、f の線形性から、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) - f(\boldsymbol{v}_2)$$

となる

仮定 (ii) より、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o}$$

がいえるので、$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ が成り立つ

$f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ から $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ が導かれたことで、f は単射であることが示された ■

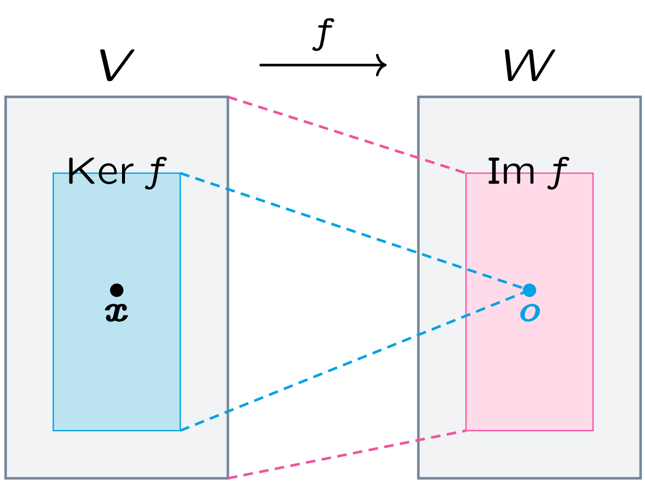
核・像と単射・全射

先ほどの定理で、線形写像 f によって「潰れない」という条件が、単射性と同値であることが示された

ref: プログラミングのための線形代数 p119

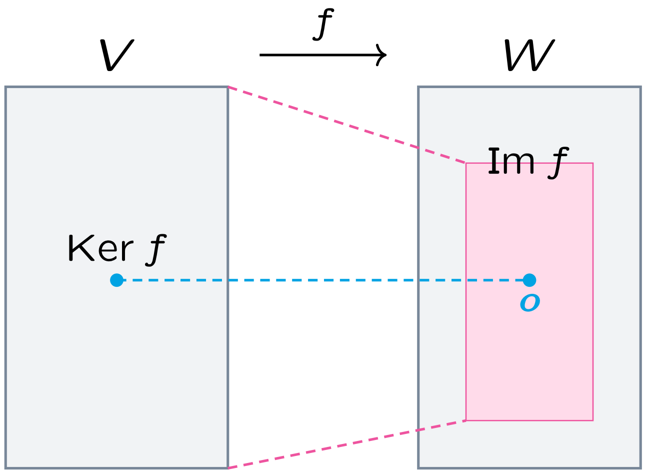
つまり、線形写像 f の核 Ker f が、f の単射性と関係しそうである

また、線形写像 f の像 Im f が値域と一致するかどうかが、f の全射性と関係する



単射となるときの核

線形写像 f が単射であるとは、「潰れない」ということなので、次のような状況である



つまり、$\mathrm{Ker}\, f$ が零ベクトル $\boldsymbol{o}$ のみを含む状態であればよい

線形写像の単射性と核の関係 f を線形写像とするとき、

$$f \text{ が単射} \iff \mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$$

証明

$\mathrm{Ker}\, f$ の定義は

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}\}$$

これを踏まえて、次の 2 つが同値であることを示す

i. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$
ii. $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

このとき、$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ が $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ を意味するので、$\mathrm{Ker}\, f$ の元は零ベクトルのみになる

よって、$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$ が成り立つ ■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{o}\}$ であれば、$\mathrm{Ker}\, f$ の元は零ベクトルのみである

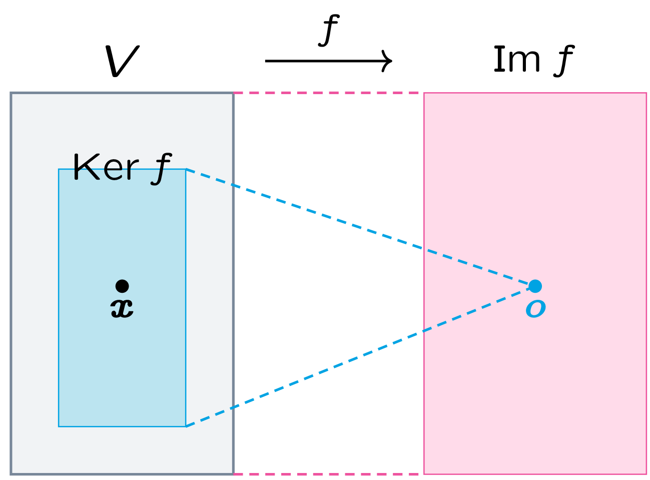
よって、$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ が成り立つとき、$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ が成り立つことになる

すなわち、$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ が成り立つ ■

全射となるときの像

線形写像 f が全射であるとは、$\mathrm{Im}\, f$ が行き先の空間全体を埋め尽くす状態である

このような状態であれば、たしかに $f(\boldsymbol{x})$ が $\mathrm{Im}\, f$ からはみ出してしまうことはない



この状況を式で表すと、線形写像 $f: V \to W$ が全射であるとは、

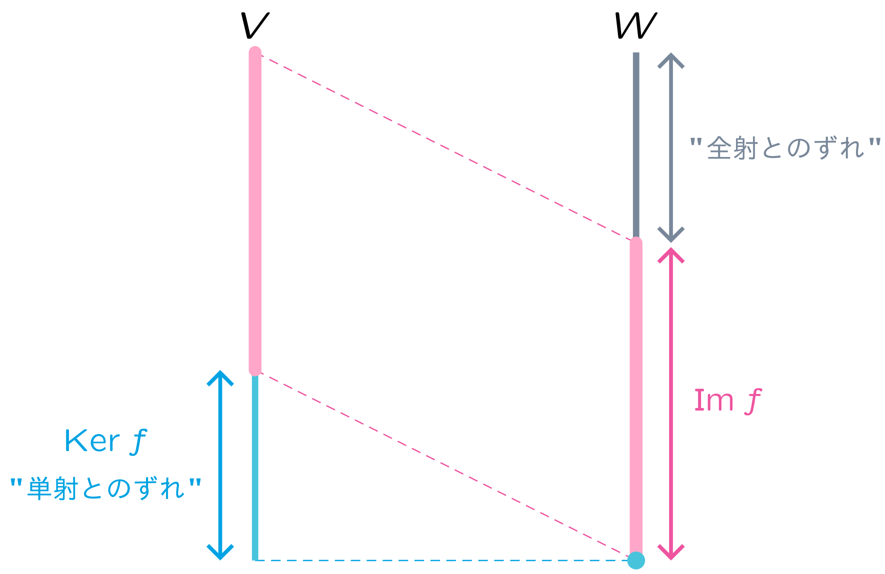
$$\mathrm{Im}\, f = W$$

という条件と同値である

単射・全射との離れ具合

Ker f が零ベクトルの集合に一致するなら f は単射であり、Im f が写り先全体に一致するなら f は全射である

このことから、Ker f と Im f は、それぞれ単射・全射と「どれくらいかけ離れているか」を測る尺度とも捉えられる



. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	1