

## 微分しても変わらない不思議な関数

この式をぼんやりと眺めていると、

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

- 左辺における  $\frac{d}{dx}$  という記号に呼応して、右辺では  $n$  が飛び出すというふうにも見える
- 左辺では  $x$  の  $n$  乗だったものが、右辺では  $n-1$  乗になっている

\* \* \*

$x^n$  を  $n$  の階乗で割った  $\frac{x^n}{n!}$  という関数を考える

この関数を微分すると、 $\frac{1}{n!}$  は微分の外に出せる

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dx}x^n\right) = \frac{nx^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

この式では、左辺と右辺で似た形が現れている  
文字は左辺の  $n$  から右辺の  $n-1$  に化けるが、形は同じ

$n$  に具体的な数を入れて確かめてみる

- $n=0$  のとき、 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^0}{0!}\right) = 0$
- $n=1$  のとき、 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^1}{1!}\right) = \frac{x^0}{0!}$
- $n=2$  のとき、 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2!}\right) = \frac{x^1}{1!}$
- $n=3$  のとき、 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3!}\right) = \frac{x^2}{2!}$
- $n=4$  のとき、 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4!}\right) = \frac{x^3}{3!}$
- $n=5$  のとき、 $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5!}\right) = \frac{x^4}{4!}$

微分すると斜め右下にまったく同じ形の式が現れるというパターンが続く

上のリストでは  $n=5$  で止めているが、たとえば  $n=100$  までいっても同じパターンが続く

そこで、 $\frac{x^n}{n!}$  を  $n=0$  から順に全部足すことを考え、それを  $f(x)$  とおく

$$f(x) = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$\frac{d}{dx}f(x) = 0 + \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

下の式は1個右にずれているので、途中で打ち切れば1個足りなくなるが、無限に足すと、上の式と下の式はぴったり一致している

したがって、

$$\frac{d}{dx}f(x) = f(x)$$

が成り立つことがわかる

つまり、関数  $f(x)$  は微分したものが自分自身になっている！

いま無限級数として定義した関数  $f(x)$  を何通りかの記法で表しておく

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$= \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots$$

後にこの関数は、指数関数として  $e^x$  と書くことになる

## ネイピアの数

次の関数に  $x=0$  と  $x=1$  を代入してみる

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

\* \* \*

$x=0$  を代入すると 最初の1だけが残る、

$$f(0) = 1$$

\* \* \*

$x = 1$  を代入すると 1 を何乗しても 1 であるから、

$$f(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

この  $f(1)$  の数値はどのくらいになるだろうか？

1. 第 1 項は 1
2. 第 2 項も 1
3. 第 3 項は 0.5
4. 次は前の項を 3 で割るわけだから 0.166...
5. 次はさらに 4 で割るから 0.041...
6. 次はさらにそれを 5 で割って 0.008...

ここまでの 6 項の和で 2.716... となる

加える項は急速に 0 に近づく

項が 100 個くらいまで進むと、次に加える  $\frac{1}{100!}$  は  
小数点以下に 0 が 150 個以上並ぶくらい小さな数  
になる ( $10^{152} < 100! < 10^{164}$  という不等式より)

このように、無限級数  $f(1)$  は収束がとても速く、

$$f(1) = 2.71828 \dots$$

という数になる

\* \* \*

## ■定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

証明のスケッチ 二項展開を用いて、

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}$$

ここで、 $k = 2$  以降の各項は次のように展開する

$$\begin{aligned} \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot \frac{1}{n^2} &= \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{2!} \cdot \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{1}{n^3} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} \\ &= \frac{1}{3!} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \\ &= \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots \end{aligned}$$

$n$  が大きくなると  $\frac{1}{n}$  は 0 に近づくので、 $1 - \frac{1}{n}$  は 1  
に近づき、

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

となる □

無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  の収束

$n$  を大きくすると  $n!$  は急速に大きくなるので、  
 $x = 1$  のときには無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  が収束  
することは納得できる

では、 $x > 1$  のときもこの無限級数は収束するとい  
えるのだろうか？

\* \* \*

そもそも数列の各項が 0 に近づかないと、その数  
列の総和は収束しないため、まず次の問いを考え  
る（以下では  $x$  を固定しておく）

■問題  $n$  をどんどん大きくしたとき、 $\frac{x^n}{n!}$  は 0 に近づくか？

この問いは、 $x^n$  と  $n!$  の大きさを比べようという問題である

たとえば  $n = 100$  とすると、実は  $100!$  の方が  $10^{100}$  よりも圧倒的に大きくなることをすでに示している

$n = 100$  に限らず、「 $x$  を止めたとき、 $x^n$  と  $n!$  の比である  $\frac{x^n}{n!}$  は、 $n$  を大きくすると分母が圧倒的に大きくなり、比は 0 に近づく」ことが同様の議論で示される

\* \* \*

無限級数の各項が 0 に近づいたとしても、「塵も積もれば山となる」（足し合わせると発散する）ことも起こり得る

では、次の問題はどうか？

■問題 無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  は収束するか？

実はこの無限級数は、等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  よりももっと速く収束する

証明のスケッチ

$x$  は固定して、 $n$  に関する和を考える

整数  $n$  が十分に大きければ、

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

これは、「無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  が等比級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  より速く収束する」という 1 つの表現

正確には、 $8x^2 + 1$  より大きいすべての自然数  $n$  に対して、

$$\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

が成り立つ

このことがいえれば、 $8x^2$  より大きい整数  $N$  に対して、無限級数  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  は次のように等比級数

$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  より速く収束する

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n} \\ &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^N} \end{aligned}$$

上の計算のうち、 $\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{2^n}$  では、次のような三角不等式を利用している

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_m| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|$$

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|$$

そこで、無限級数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  を、 $n = N$  までの有限和と、 $n = N + 1$  からの無限級数に分けて考える

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

このように考えると、左辺の無限級数が、右辺の有限和に収束することがわかる

不等式  $\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$  の証明

一般に  $A \leq 0$  のとき、 $n > 2A^2 + 1$  ならば、

$$A^n < n!$$

という不等式が成り立つことを示す

$A = 2|x|$  の場合  $(2|x|)^n < n!$  が、 $\frac{|x|^n}{n!} < \frac{1}{2^n}$  となる

$n$  が偶数 ( $= 2m$ ) の場合、 $n > 2A^2$  の  $n$  を  $2m$  に置き換えることで、 $m > A^2$  となり、

$$\begin{aligned} n! &= (2m)! = 2m \cdot (2m-1) \cdots 2 \cdot 1 \\ &> m \cdot m \cdots m = m^m = m^{\frac{n}{2}} \\ &> (A^2)^{\frac{n}{2}} = A^n \end{aligned}$$

が成り立つ

$n$  が奇数の場合、 $n-1$  は偶数なので、偶数の場合の結果から  $(n-1)! > A^{n-1}$  がいえる

さらに、 $n > 2A^2 + 1 > A$  なので、

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1)! \\ &> n \cdot A^{n-1} \\ &> A \cdot A^{n-1} = A^n \end{aligned}$$

となり、いずれの場合も  $A^n < n!$  が成り立つ □

## 関数等式

無限級数  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  に  $x+y$  を代入し、 $f(x+y)$  を計算してみる

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \end{aligned}$$

\* \* \*

**2重和** 何かを算出したいとき、一旦小計を取ることがある

小計を取ってから、小計を足し合わせて総計を取るのが **2重和**

小計として何を選ぶかには自由度がある

たとえば、1ヶ月の支出を計算するときに、

- 食費や本代などの品目ごとの小計をを取り、それを足し合わせる
- 日々の支出を計算し、それを足し合わせる

どちらの方法を選んでも、まったく同じ総額が得られる

一般の2重和の計算においても、何を小計として選んでも総和は同じになる

多重積分における累次積分の計算法は、2重和  $\sum \sum$  を一般化したものになっている

\* \* \*

$f(x+y)$  で現れる2重和は、そもそも全体として何を算出しようとしているのか？

$a, b$  という自然数 (0 を含む) を固定して、 $x^a y^b$  という項が  $f(x+y)$  の2重和の中にどのように出現しているのか探す

$$f(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right)$$

この式において、

- $x^k y^{n-k}$  が  $x^a y^b$  となるのは、 $a = k, b = n - k$  の場合

- $(k, n)$  の組は  $a, b$  によって  $k = a, n = a + b$  とただ 1 つ定まる
- このとき  $0 \leq k \leq n$  を満たしている ( $\sum_{k=0}^n$  より)

まとめると、 $(a, b) = (k, n - k)$  すなわち  $(k, n) = (a, a + b)$  という等式の下で、組  $(a, b)$  と組  $(k, n)$  が 1 対 1 に対応している

そのため、 $x^a y^b$  は、 $f(x + y)$  の 2 重和の中で、

$$\frac{x^a}{a!} \cdot \frac{y^b}{b!} = \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

という形で現れることがわかる

また、

- $a = 0, 1, 2, \dots$  かつ  $b = 0, 1, 2, \dots$
- $n = 0, 1, 2, \dots$  かつ  $0 \leq k \leq n$

という数の範囲の条件も、1 対 1 に対応している

このことから、 $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n$  を  $\sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty}$  に書き換えることができる、

$$\begin{aligned} f(x + y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) \\ &= \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^a}{a!} \frac{y^b}{b!} \end{aligned}$$

が成り立つ

このように書き換えると、2 重和の計算の順序は入れ替えてもよいことがわかる

\* \* \*

ここでさらに、かけ算の分配法則（有限個の場合と同様に、和がきちんと収束すれば分配法則が成

り立つ）を使って書き直すと、

$$\begin{aligned} f(x + y) &= \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{x^a}{a!} \frac{y^b}{b!} \\ &= \left( \sum_{a=0}^{\infty} \frac{x^a}{a!} \right) \left( \sum_{b=0}^{\infty} \frac{y^b}{b!} \right) \end{aligned}$$

$f(x)$  の定義式  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  より、

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

$f(x + y)$  を二項展開を使って 2 重和として書き表し、「小計の取り方を変えても、結局は同じ総和が計算できる」という 2 重和のトリックを使うと、 $f(x)f(y)$  という積になった

\* \* \*

■定理 無限級数  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  は次の関数等式を満たす

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

\* \* \*