線形代数の整理帳

tomixy

2025 年 6 月 4 日

目次

第 1 章

ベクトル

ベクトルと次元

いくつかの情報の組を並べて書いたものをベクトルという

また、ベクトルに並んだ情報の個数を次元という

ref: 意味がわかる線形代数 p16〜19

線形関係式

線形関係式　ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ に対する等式

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{0}$$

を、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形関係式という

特に、$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$ として得られる線形関係式を自明な線形関係式という

これ以外の場合、つまり $c_i \neq 0$ となるような i が少なくとも 1 つあるならば、これは非自明な線形関係式である

線型独立と線形従属

線形従属なベクトルでは、その中の 1 つのベクトルが、他のベクトルの線形結合で表される

ref: 行列と行列式の基礎 p38〜40

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p31〜32

線形結合によるベクトルの表現　$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in K^n$ を線型独立なベクトルとする

K^n のベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次従属であるとき、

$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表される

すなわち、$c_1, c_2, \ldots, c_m \in K$ を用いて次のように書ける

$$\boldsymbol{a} = c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m$$

証明

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が一次従属であるので、少なくとも 1 つは 0 でない係数 $c, c_1, c_2, \ldots, c_m$ を用いて

$$c\boldsymbol{a} + c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ

もし $c = 0$ だとすると、$c_1, c_2, \ldots, c_m$ のいずれかが 0 でないことになり、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線型独立であることに矛盾する

よって、$c \neq 0$ である

そのため、上式を c で割ることができ、$\boldsymbol{a}$ は

$$\boldsymbol{a} = -\frac{c_1}{c}\boldsymbol{a}_1 - \frac{c_2}{c}\boldsymbol{a}_2 - \cdots - \frac{c_m}{c}\boldsymbol{a}_m$$

という $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表せる ■

非自明な線形関係式の存在と線形従属　ベクトルの集まりは、それらに対する非自明な線形関係式が存在するとき、そのときに限り線形従属である

証明

ベクトルの集まりが線型独立であることは、それらに対する線形関係式はすべて自明であるというのが定義である

それを否定すると、「自明でない線形関係式が存在する」となる ■

線型独立なベクトルの線形結合は一意的である

線型結合の一意性　線型独立性は、線形結合の一意性

$$
\begin{aligned}
c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{a}_k = c'_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c'_k\boldsymbol{a}_k \\
\implies c_1 = c'_1, \ldots, c_k = c'_k
\end{aligned}
$$

と同値である

証明

線型独立性の定義式を移項することで得られる ■

この定理から、

線型独立性は、両辺の係数比較ができるという性質

であるとも理解できる

$k = 1$ の場合に、次の定理が成り立つ

単一ベクトルの線型独立性と零ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 \text{が線型独立} \iff \boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$$

証明

$\Longrightarrow$

$\boldsymbol{a}_1$ が線型独立であるとする

すると、$\boldsymbol{a}_1$ に対する線形関係式

$$c_1 \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$$

が成り立つのは、$c_1 = 0$ のときだけである

ここで、$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$ と仮定すると、$c_1 \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ が成り立つので、

c_1 は任意の値をとることができる

これは、$\boldsymbol{a}_1$ に対する線形関係式が $c_1 = 0$ のときだけ成り立つという線型独立性の定義に反する

よって、$\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$ である ■

$\Longleftarrow$

$\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$ とする

このとき、もし $\boldsymbol{a}_1$ に対する線形関係式

$$c_1 \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$$

が成り立つとしたら、$\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{0}$ なので、c_1 は必ず 0 でなければならない

したがって、$\boldsymbol{a}_1$ に対する線形関係式は $c_1 = 0$ のときだけ成り立つ

これは、$\boldsymbol{a}_1$ が線型独立であることを意味する ■

ベクトルの集合が張る空間

ref: 行列と行列式の基礎 p6〜8

🎓 ベクトルの集合が張る空間　k 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ を与えたとき、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ の線形結合全体の集合を

$$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$$

によって表し、これを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が**張る空間**という

第 2 章

線形写像と行列の演算

行列の導入

長方形に並んだ数の集まりを

ref: 行列と行列式の基礎 1.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

などと書き、行列と呼ぶ

横の数字の並びを行、縦の数字の並びを列と呼ぶ

A は m 個の行と n 個の列をもつ行列である

第 i 行、第 j 列にある数字を a_{ij} と表し、これを (i, j) 成分と呼ぶ

行が m 個、列が n 個の行列は、m 行 n 列の行列、あるいは $m \times n$ 型の行列であるという

$n \times n$ 型の場合、行列は正方形なので n 次正方行列と呼ぶ

A の成分から第 j 列だけを取り出して $\mathbb{R}^m$ のベクトルとしたものが

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq i \leq n)$$

であり、これを A の j 番目の列ベクトルという

A は、これらを横に並べたものという意味で

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$$

と書くことができる

行列とベクトルの積　$m \times n$ 型の行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ と $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ との積を

$$A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

により定める

ここで、v_i は $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である

$A\boldsymbol{v}$ を考えるとき、ほとんどの場合は、A が 1 つ与えられていて $\boldsymbol{v}$ がいろいろ動くという意識が強い

それは、行列 A のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る

$$\text{入力ベクトル } \boldsymbol{v} \longrightarrow \text{出力ベクトル } A\boldsymbol{v}$$

という装置、すなわち写像だとみなすことである

行列のスカラー倍　A を行列、c をスカラーとするとき、A のすべての成分を c 倍して得られる行列を cA とする

行列とベクトルの積の性質　A, B を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$、$c \in \mathbb{R}$ とするとき、次が成り立つ

i. $A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}$
ii. $A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v}$

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p24（命題 1.4.3）]

線形写像の定義

ref: 行列と行列式の基礎 2

線形写像と線形性　写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形写像であるとは、次の 2 つの条件が成立することである

i. $f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$ がすべての $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ
ii. $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ がすべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して成り立つ

これらの性質を写像 f の線形性という

また、$m = n$ のとき、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の線形変換と呼ぶ

線形変換は空間 $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への写像なので、$\mathbb{R}^n$ 内において「ベクトルが変化している」（あるいは f が空間 $\mathbb{R}^n$ に作用している）ニュアンスと

みることができる

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、i より、

$$f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

なので、

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

零ベクトルの像　零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される

$m = n = 1$ のときは、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ は、通常の意味の関数である

このとき、i の性質から、

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R} = \mathbb{R}^1)$$

が成り立つので、$a = f(1) \in \mathbb{R}$ とおくと、

$$f(x) = ax$$

と書ける

比例関数　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ は、a を比例定数とする比例関数である

線形写像の表現行列

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、各基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ の f による像を

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

と書くとする

これらを横に並べることによって、m 行 n 列の行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n)$$

この行列 A を f の表現行列という

特に、$\mathbb{R}^n$ の線形変換の表現行列は n 次正方行列である

$\mathbb{R}^n$ の一般のベクトル $\boldsymbol{v}$ を、基本ベクトルの線型結合として

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{e}_j$$

と書く

このとき、f の線形性より、

$$f(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} v_j f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{a}_j$$

となる

このベクトルの第 i 成分は

$$a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \cdots + a_{in}v_n$$

と書ける

これは $A\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である

したがって、この記法を踏まえて、次のような表記ができる

線形写像とその表現行列の関係

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$$

比例関数が比例定数 a だけで決まるのと同じように、線形写像は表現行列 A が与えられれば決まる

零写像と零行列　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ と定めたものは明らかに線形写像であり、これを零写像と呼ぶ

その表現行列はすべての成分が 0 である行列である

この行列を零行列と呼び、O で表す

$m \times n$ 型であることを明示するために $O_{m,n}$ と書くこともある

また、n 次正方行列の場合は、O_n と書く

恒等写像と単位行列　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ と定めたものは明らかに線形写像である

これを恒等写像と呼び、$f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ と書く

恒等写像の表現行列は、$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j \quad (1 \leq j \leq n)$ より

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを単位行列と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、n 次であることを明示したいときは E_n と書く

線形写像 f から行列 A を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることができる

行列から線形写像を作る　$m \times n$ 型行列 A に対して、

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

によって写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定めれば、f は線形写像である

証明

行列とベクトルの積の性質より、f は線形写像である

また、f の定義から明らかに A は f の表現行列である　■

$\mathbb{R}^2$ の線形変換の例

[Todo 2: ref: 行列と行列式の基礎 p51 - p56]

行列の積

線形写像の合成　$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像 g と、$\mathbb{R}^m$ から $\mathbb{R}^l$ への線形写像 f が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g \colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

は、$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^l$ への線形写像である

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p56 （問 2.2）]

f と g の表現行列をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ とする

A は $l \times m$ 型、B は $m \times n$ 型の行列である

このとき、$f \circ g$ は $l \times n$ 型行列で表現される

それを C と書くことにして、その成分を計算しよう

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい

B を列ベクトルに分解して $B = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ と書くとき、

$$(f \circ g)(\boldsymbol{e}_j) = f(g(\boldsymbol{e}_j)) = f(\boldsymbol{b}_j) = A\boldsymbol{b}_j \quad (1 \leq j \leq n)$$

なので、

$$C = (A\boldsymbol{b}_1, A\boldsymbol{b}_2, \ldots, A\boldsymbol{b}_n)$$

となる

C の (i, j) 成分は $A\boldsymbol{b}_j$ の第 i 成分なので、

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる

つまり、C の (i,j) 成分を計算するときは、A の第 i 行、B の第 j 列だけを見ればよい

$$\begin{pmatrix} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & \displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、A と B の**積**と呼ぶ

単位行列との積　A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$E_m A = A$$
$$A E_n = A$$

零行列との積　A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$O_m A = A O_n = O_{m,n}$$

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は**可換**であるという

一般には、2 つの行列は可換であるとは限らない

つまり、AB と BA は一般には異なる

[Todo 4: ref: 行列と行列式の基礎 p58 （例 2.2.3, 2.2.4）]

行列の和とスカラー倍

$A,\ B$ がともに $m \times n$ 型行列であるとき、それぞれの (i,j) 成分を足すことで行列の和 $A+B$ を定める

⚓ **分配法則**　積が定義できるとき、

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$(B+C)A = BA + CA$$

⚓ **行列の積とスカラー倍の性質**　行列 $A,\ B$ の積 AB が定義できるとき、つまり A の列の個数と B の行の個数が同じであるとき、$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

が成り立つ

⚓ **線形写像の和**　$f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とし、

$$h(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

により写像 $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定めるとき、h も線形写像である

また、f, g の表現行列を A, B とするとき、h の表現行列は $A+B$ である

なお、$h = f + g$ と書き、f, g の和と呼ぶ

証明

[Todo 5: ref: 行列と行列式の基礎 p59 （問 2.5）]

スカラー行列　c をスカラーとするとき、cE の形の行列をスカラー行列という

$$cE = \begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{pmatrix}$$

行列 A にスカラー行列をかけることは、

$$(cE)A = A(cE) = cA$$

のように、スカラー c をかけるのと同じである

行列の積の結合法則

積の結合法則　積 AB, BC がともに定義できるとき、

$$(AB)C = A(BC)$$

写像による証明

A, B, C がそれぞれ $q \times m$, $m \times n$, $n \times p$ 型行列だとする

線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、f, g, h の表現行列をそれぞれ A, B, C とする

一般的な写像の合成の性質として、

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

が成り立つから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう ■

積の計算規則による証明

AB の (i, l) 成分は、

$$(AB)_{il} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \sum_{l=1}^{n} (AB)_{il} c_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj}\end{aligned}$$

i, j はいま固定されているので、和には関係がない

動いているのは k, l だけ

ここで、次の書き換えができる

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} \right) c_{lj} &= \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} c_{lj} \right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kl} c_{lj}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{l=1}^{n}$ の右にある式は l に関する和をとる前のものなので、l は止まっていると考えてよく、単純な分配法則を使っている

また、括弧がなくても、k に関する和を先にとって、その後で l に関する和をとっていると読むことができる

このとき、和の順番は交換してもよいので、

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kl}c_{lj} &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}b_{kl}c_{lj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{n} b_{kl}c_{lj}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(BC)_{kj}\end{aligned}$$

先ほどと同様に、$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}$ の右では k は止まっていると考えている

そして、この結果は、$A(BC)$ の (i,j) である ■

結合法則が成り立つことが示されたので、$(AB)C$ または $A(BC)$ を表すとき、括弧を書かずに単に ABC と書いても問題ない

行列の個数が増えても同様である

また、A が正方行列の場合は、

$$\begin{aligned}A^2 &= AA \\ A^3 &= AAA\end{aligned}$$

などのように書く

行列の区分け

行列を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

のようなブロック型に区分けして計算することがよくある

ref: 行列と行列式の基礎 p64

A が $m \times n$ 型のとき、$m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2$ として、A_{ij} は $m_i \times n_j$ 型である

また、B が $n \times l$ 型で、$n = n_1 + n_2,\ l = l_1 + l_2$ と区分けして

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように A_{ij} などが行列の成分であるかのようにして（ただし積の順序は変えずに）積が計算できる

ここで、A の列の区分けと B の行の区分けの仕方が同じであることが必要である

3 つ以上のブロックに分ける場合も同様である

行列と複素数

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき、

$$aE + bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

という形の行列を**複素数**と呼ぶことにより、複素数の定義ができる

この定義では、通常は $a + bi$ と書かれるものを行列として実現している

[Todo 6: ref: 意味がわかる線形代数 p43〜49]

対角行列

対角成分　正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、a_{ii} を対角成分と呼ぶ

対角行列　対角成分以外の成分がすべて 0 である正方行列を対角行列と呼ぶ

$a_{ii} = c_i \quad (1 \leq i \leq n)$ である対角行列を次のように表す

$$\mathrm{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{pmatrix}$$

対角行列と列ベクトルのスカラー倍　右から対角行列をかけると、各列ベクトルがスカラー倍になる

すなわち、$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とすると、

$$A \cdot \mathrm{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (c_1\boldsymbol{a}_1, c_2\boldsymbol{a}_2, \ldots, c_n\boldsymbol{a}_n)$$

が成り立つ

証明

[Todo 7: ref: 行列と行列式の基礎 p63 （問 2.8）]

トレース

ref: 行列と行列式の基礎 p64

トレース　正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、対角成分の和

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

を A のトレースと呼び、$\mathrm{tr}(A)$ と表す

トレースの性質

i. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
ii. $\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr}(A)$
iii. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

証明

[Todo 8: ref: 行列と行列式の基礎 p64 問 2.9]

第 3 章

連立一次方程式と階数

掃き出し法

連立一次方程式において、文字の個数や方程式の本数が増えた場合にも見通しよく計算を進めるためには、掃き出し法と呼ばれる方法がある

ref: 行列と行列式の基礎 p18～21

掃き出し法の基本方針は、次の形を目指すことである

$$\begin{cases} \star x_1 + * x_2 + * x_3 = * \\ \qquad\quad \star x_2 + * x_3 = * \\ \qquad\qquad\qquad \star x_3 = * \end{cases}$$

- $*$ はどんな数であってもよい（同じ数でなくてもよい）
- $\star$ は 0 でない数を意味する

この形の方程式は上三角形と呼ばれ、いつでもこの形に変形できるわけではないが、1 つの理想形である

連立一次方程式の行列表記

ref: 行列と行列式の基礎 p22～25

未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する連立方程式として

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}\ x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\ x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

を考える

a_{ij} などは与えられた定数であり、係数と呼ばれる

i 番目の式の x_j の係数を a_{ij} と書いている

ここで、係数だけを集めて行列を作る

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

すると、先ほどの連立方程式は、ベクトル形で

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

と書ける

また、n 個の未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ からベクトルを作る

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

すると、ベクトル形の方程式の左辺のベクトルを、行列 A とベクトル $\boldsymbol{x}$ の積と考えて、$A\boldsymbol{x}$ と表記できる

こうして、もとの連立一次方程式は、行列形の方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に書き換えられる

行基本変形

連立一次方程式を行列によってとり扱うとき、1 つ 1 つの方程式は行列の行によって表されている

ref: 行列と行列式の基礎 p25

よって、行列の行に関する次のような操作（変形）を考えることは自然である

行基本変形　行列への次の 3 種類の操作を**行基本変形**という

i. ある行の定数倍を他の行に加える
ii. ある行に 0 でない数をかける
iii. 2 つの行を交換する

原則として上三角型を目指してこのような変形を繰り返すが、いつでも上三角型にできるわけではなく、**行階段行列**と呼ばれる形を作っていくのが**掃き出し法**と呼ばれる手法である

成分を要にして掃き出す

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p76〜81

$$
A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \end{array}
$$

まず、$(1, 1)$ 成分より下の成分が 0 になるように基本変形を適用する

このことを、「$(1, 1)$ 成分を**要**にして、1 列を掃き出す」と表現する

$$
\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \end{array} \to \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1 \end{array} \end{array}
$$

以降のステップでは、第 1 行と第 1 列は変化させない

今度は、$(2,2)$ 成分を要にして掃き出す

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2 \end{array}$$

行階段行列

掃き出し法では、あるステップで下の成分がすべて 0 になって、

ref: 行列と行列式の基礎 p26〜28

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p81〜84

$$\begin{pmatrix} \spadesuit & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

のような形になるのが典型例である

0 でない成分を $\spadesuit$ で、任意の値をもつ成分を $*$ で表した

一般には、成分が 0 ばかりの行が下にくる

そのような行を零行という

零行が現れない場合もあるし、複数現れる場合もある

零行でない行に対して、一番左の 0 でない成分 $\spadesuit$ を主成分あるいは行に関する要と呼ぶ

先ほど示した形では、行の主成分は左上から斜め右下 45° 方向にまっすぐ並んでいるが、一般にはそうできるとは限らない

しかし、次のような形には必ずできる

$$\begin{pmatrix} 0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行階段行列　次の条件を満たす行列を行階段行列という

- 零行でない行の主成分が、下の行ほど 1 つ以上右にある
- 零行がある場合は、まとめてすべて下にある

どんな行列も、行基本変形の繰り返しで行階段行列にできる

行列の階数

行階段行列に変形することで、重要な量が読み取れる

ref: 行列と行列式の基礎 p28〜29

行列の階数　行列 A を行階段行列に変形したとき、零行でない行の個数を A の階数（rank）と呼び、$\mathrm{rank}(A)$ と書く

変形の結果として得られる行階段行列は 1 通りとは限らないし、変形の途中の掃き出しの手順も 1 通りとは限らないが、

> 階数は A のみによって定まる値である

ことが後に証明できる

A が $m \times n$ 型ならば、行は m 個なので、$\mathrm{rank}(A)$ は 0 以上 m 以下の整数である

行階段行列において、零行でない行の個数は主成分の個数と一致するので、階数は行階段行列に変形したときの主成分の個数でもある

行基本行列の主成分は各列に高々 1 つなので、主成分の個数は列の個数 n を超えない

したがって、次の重要な評価が成り立つ

$$0 \leq \mathrm{rank}(A) \leq \min(m, n)$$

簡約化された行階段行列

必要に応じて、行階段行列をさらに変形して次のような形にする

ref: 行列と行列式の基礎 p29〜30
ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p82

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行の主成分はすべて 1 で、主成分のある列の主成分以外の成分はすべて 0 である

この形を簡約化された行階段行列あるいは既約行階段行列と呼ぶ

与えられた行列 A に対して、行基本変形の繰り返しで得られる行階段行列は一意的ではないが、簡約化された行階段行列は一意的であることを後に議論する

そこで、簡約化された行階段行列を $A_\circ$ と書くことにする

変形の過程を

$$\text{行列 } A \longrightarrow \text{行階段行列} \longrightarrow \text{簡約化された行階段行列 } A_\circ$$

と 2 段階にわけるのは、計算の効率以上の意味がある

行階段行列にするところまでで解決する問題（解の存在と一意性など）もあるからである

連立一次方程式を解く

方程式を解くということは、次のような問題に答えることである

ref: 行列と行列式の基礎 p25

A. 解は存在するか？

B. 解が存在する場合、それはただ 1 つの解か？

C. 解が複数存在する場合は、どれくらい多く存在するのか？

D. 解全体の集合を以下にしてわかりやすく表示できるか？

拡大係数行列

A を m 行 n 列の行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とし、線形方程式

ref: 行列と行列式の基礎 p31〜32

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を考える

これは、n 個の文字に関する m 本の連立方程式である

$\boldsymbol{x}$ は未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を成分とするベクトルである

このとき、A は方程式の係数行列と呼ばれる

A の右端に列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を追加して得られる m 行 $(n+1)$ 列の行列

$$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$$

を考えて、これを拡大係数行列という

斉次形

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合、つまり

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の形の線形連立方程式は斉次形であるという

斉次形の場合は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が明らかに解になっていて、これを自明解という

したがって、自明解以外に解が存在するかどうかが基本的な問題である

解の存在条件

まず、一般の $\boldsymbol{b}$ の場合の解の存在（問題 A）について考える

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p110〜111

拡大係数行列 $\tilde{A}$ は A の右端に 1 列追加して得られるので、掃き出しの過程を考えると、$\mathrm{rank}(\tilde{A})$ は $\mathrm{rank}(A)$ と等しいか、1 だけ増えるかのどちらかであることがわかる

また、方程式の拡大係数行列の行に関する基本変形は、元の連立方程式と同値な式への変形であるため、

> 基本変形によって得られる方程式の解は、元の方程式の解と同じ

となる

そこで、$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ の既約行階段形を $(P \mid \boldsymbol{q})$ とし、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の代わりに

$$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$$

を解くことを考える

まず、

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ O \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$$

とおく

ここで、P_1 は $r \times n$ 行列（$r = \mathrm{rank}(P)$）とし、$\boldsymbol{q}_1$ は r 次元列ベクトル、$\boldsymbol{q}_2$ は $m - r$ 次元列ベクトルとする

すると、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ は

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ O \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} P_1\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \end{pmatrix}$$

と表せる

このとき、この方程式が解を持つには、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ でなければならない

たとえば、

$$\boldsymbol{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

だとしたら、

$$\begin{pmatrix} P_1\boldsymbol{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり、$0 = -1$ という矛盾が生じる時点で、この方程式は不能になる

このような $\boldsymbol{q}_2 \neq \boldsymbol{0}$ の場合、拡大係数行列の階数は、係数行列の階数 $+1$

となっている

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(P \mid \boldsymbol{q}) = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

一方、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ であれば、方程式は

$$P_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_1$$

となる

ここで、P_1 は $r = \mathrm{rank}(P)$ 個の行をもち、行数と階数が一致している

ということは、すべての行に主成分が現れていることを意味する

主成分は最も左側にある 0 でない成分なので、係数拡大行列にするために

右に 1 列追加したとしても、主成分の数は増えることがない

すなわち、$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{o}$ の場合は係数行列と拡大係数行列の階数が一致する

以上の考察から、連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在する条件は、

係数行列と係数拡大行列の階数が等しい

ことだとわかる

そして、その階数 r は、係数行列の行数とも一致していたため、次の 2 つの定理が得られる

拡大係数行列と解の存在条件 A を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ とする

$\tilde{A} = (A \mid \boldsymbol{b})$ とおくとき、

$$\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A) \iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

証明

[Todo 9: ref: 行列と行列式の基礎 p31 （定理 1.5.1）]

解の存在条件の系 A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する} \iff \mathrm{rank}(A) = m$$

証明

[Todo 10: ref: 行列と行列式の基礎 p32 （定理 1.5.2, 1.5.3）]

一般解のパラメータ表示

右端の列に主成分がない場合は、一般には無数個の解が存在する

解の集合が直線を成していたり、もっと高い次元の図形になっていることがある

ref: 行列と行列式の基礎 p33〜36

解が 1 つに定まらない場合は、解の全体像を知ることが方程式を「解く」ことになる

係数行列 A の n 個の列が、n 個の変数に対応していることを思い出そう

主変数と自由変数　行列 A を行基本変形により行階段形にしたとき、主成分がある列に対応する変数を**主変数**と呼び、それ以外の変数を**自由変数**と呼ぶ

たとえば、次のような既約行階段形に変形した拡大係数行列を考える

$$
\tilde{A}_\circ = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc|c} 1 & & 3 & 4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\hphantom{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}}_{5} \end{array}
$$

変数を使って方程式の形に直すと、

$$
\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 = -3 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 2x_5 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases}
$$

主成分がある列は $1, 3, 4$ 列なので、主変数は x_1, x_3, x_4 である

それ以外の x_2, x_5 は自由変数となる

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_5 = -3 \\ x_3 + 2x_5 = 1 \\ x_4 + x_5 = 2 \end{cases}$$

において、自由変数を含む項を左辺に移行すれば、

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 2x_2 + x_5 \\ x_3 = 1 - 2x_5 \\ x_4 = 2 - x_5 \end{cases}$$

となる

自由変数の値を自由に選んで、主変数の値をこの等式によって定めれば、方程式の解になる

そこで、

$$x_2 = t_1, \quad x_5 = t_2$$

とおけば、

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 2t_1 + t_2 \\ x_3 = 1 - 2t_2 \\ x_4 = 2 - t_2 \end{cases}$$

すなわち、

$$\begin{cases} x_1 = -3 - 2t_1 + t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 1 - 2t_2 \\ x_4 = 2 - t_2 \\ x_5 = t_2 \end{cases}$$

と書ける

これをベクトル形に直すことで、一般的な解のパラメータ表示を得られる

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

一般化するために、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ を次のように表して考える

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p300〜301

$$(P \mid \boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & q_1 \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{p}_r & q_r \\ \boldsymbol{0} & q_{r+1} \\ \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & q_m \end{pmatrix}$$

ここで、$\boldsymbol{p}_1 \neq \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{p}_r \neq \boldsymbol{0}$ であるとする

このとき、解を持つための条件は、

$$q_{r+1} = q_{r+2} = \cdots = q_m = 0$$

であった

さて、P において、主成分を含む列を $j_1, j_2, \ldots, j_r \quad (r = \mathrm{rank}(P))$ とする

$$(P \mid \boldsymbol{q}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} j_1 & & j_2 & \cdots & j_r & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & \star & 0 & \cdots & 0 & \star & \star & q_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \star & \star & q_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star & \star & q_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \xleftrightarrow{\qquad\qquad n \qquad\qquad} \end{array}$$

すると、主変数 x_{j_i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$ は、次のように表される

$$x_{j_i} + \sum_k \star x_k = q_i \quad (k > j_i \text{かつ } k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\})$$

$$\therefore x_{j_i} = q_i - \sum_k \star x_k$$

ここで、x_k は j_i よりも右にある $\star$ に対応する変数である

既約行階段行列では、j_i 列の主成分以外の要素はすべて 0 であるため、$\star$ に対応する自由変数のみが残る（これが $k \notin \{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ とした意味である）

つまり、$x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ 以外の自由変数 x_k に勝手な数を与えるごとに、主変数 $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$ は定まる

このような自由変数は $n-r$ 個あるので、$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}$ の解は、$n-r$ 個のパラメータを用いて表せる

まとめると、解が存在する場合には、r を行列 A の階数として

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q} + \sum_{i=1}^{n-r} t_i \boldsymbol{u}_i$$

という形の一般解の表示（問題 D の答え）が得られる

ここで、パラメータ t_i をかけた列ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ を連立方程式の基本解と呼ぶ

また、パラメータをかけていない列ベクトル $\boldsymbol{q}$ は、連立方程式の定数項から決まる解であり、これを特殊解と呼ぶ

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p103

解の自由度

連立一次方程式の一般解は、基本解の線形結合と特殊解の和で表された

そして、基本解の線形結合は、基本解の個数の分だけパラメータを用いて表された

ref: 行列のヒミツがわかる！使える！線形代数講義 p113〜114

パラメータの個数は、自由変数の個数でもあり、基本解の個数でもある

このとき、パラメータの個数は、解を表す自由度と考えられる

そこで、解を表すパラメータの個数を**解の自由度**と呼ぶ

$$\begin{aligned}\text{解の自由度} &= (\text{変数の個数}) - \operatorname{rank}(A) \\ &= n - r\end{aligned}$$

解の自由度は、解全体のなす集合の大きさ、すなわち何次元の空間なのかを表している（問題 C の答え）

解の一意性

ここまでの議論で、問題 B が解決している

ref: 行列と行列式の基礎 p37〜38

⚓ 解の一意性　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するとき、

$$\text{解が一意的である} \iff \operatorname{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

$\Longleftarrow$

$\operatorname{rank}(A) = n$ であれば、解の自由度は $n - n = 0$、すなわち自由変数が存在しないことになる

自由変数がなければ「各変数＝定数」という式に変形できることになるので、解は明らかに一意的である ■

$\Longrightarrow$

対偶 $\operatorname{rank}(A) \neq n \Longrightarrow$ 解が一意的 を示す

$\mathrm{rank}(A) \leq n$ であるので、$\mathrm{rank}(A) \neq n$ は $\mathrm{rank}(A) < n$ を意味する

$\mathrm{rank}(A) < n$ であれば、自由変数が 1 つ以上存在するので解は無数にある

よって、解は一意的ではない ■

斉次形の場合の非自明解の存在問題も解決している

斉次形の非自明解の存在条件　斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において、

$$\text{自明解しか存在しない} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性 $\mathrm{rank}(A) = n$ は、それ以外の解がないということを意味している ■

解のパラメータ表示の一意性

自由変数を $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ とするとき、一般解の表示

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

の j_k 番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる

このことから、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の $n-r$ 個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる

この事実は、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^m$ が線形独立であると表現される

非自明解の存在と有限従属性定理

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の非自明解の存在に対して、次の解釈もできる

ref: 行列と行列式の基礎 p40〜41

斉次形方程式の非自明解の存在と線形従属　$m \times n$ 型行列 A の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ とするとき、

$$\begin{aligned} & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ に自明でない解がある} \\ \iff \quad & \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線形従属} \end{aligned}$$

証明

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は、ベクトルの等式

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

と同じものである

$\Longrightarrow$

もし自明でない解があるならば、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ のうち少なくとも 1 つは 0 ではない

$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ が成り立つもとで、0 でない係数が存在するということは、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形従属であることを意味する ■

$\Longleftarrow$

対偶を示す

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ が線形独立であれば、

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

において、すべての係数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ は 0 でなければならない

よって、0 以外の解（非自明解）は存在しないことになる ■

斉次形方程式に自明でない解が存在することは、$\mathrm{rank}(A) \neq n$、すなわち解の自由度が 0 ではないことと同値であった

一般に、斉次形の線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度は、n を変数の個数とするとき $n - \mathrm{rank}(A)$ なので、次が成り立つ

列ベクトルの線型独立性と階数 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とおくと、

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

このことから、次の重要な結論が導かれる

有限従属性定理 $\mathbb{R}^m$ 内の m 個よりも多いベクトルからなる集合は線形従属である

証明

[Todo 11: ref: 行列と行列式の基礎 p41 （系 1.6.6）]

この結論は、幾何的な直観からは自然だといえる

平面 $\mathbb{R}^2$ 内の 3 つ以上のベクトルがあれば、自動的に線形従属になる

この事実は、次元の概念を議論する際の基礎になる

同じことを線型方程式の文脈に言い換えると、次のようになる

有限従属性定理の線型方程式版　斉次線型方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ において、変数の個数が方程式の個数よりも多いときには、非自明な解が存在する

また、次のようにも言い換えられる

有限従属性定理の抽象版　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ とする $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ に含まれる k 個よりも多い個数のベクトルの集合は線形従属である

証明

[Todo 12: ref: 行列と行列式の基礎 p41 （問 1.14）]

行列の階数と線型独立性

次の事実は、行変形のもっとも重要な性質である

ref: 行列と行列式の基礎 p42〜44

行変形はベクトルの線形関係を保つ　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ に行の変形を施して $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ が得られたとする

このとき、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{0}$$

特に、

$$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n\} \text{ が線型独立} \Longleftrightarrow \{\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n\} \text{ が線型独立}$$

証明

[Todo 13: ref: 行列と行列式の基礎 p42 （命題 1.6.8）]

主列ベクトル　行列 $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を行階段形にしたときに、主成分のある列番号を $i_1, i_2, \ldots, i_r$ とする

ここで、r は A の階数である

このとき、$\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ を主列ベクトルという

主列ベクトルと線型独立性　行列の主列ベクトルの集合は線型独立である

また、主列ベクトル以外の列ベクトルは、主列ベクトルの線形結合である

証明

[Todo 14: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （命題 1.6.11）]

掃き出し法は、行列の列ベクトルの中から、$\mathrm{rank}(A)$ 個の線型独立な列ベクトルを選び出す方法を与えていることになる

列ベクトルの線形従属性と階数　行列 A の列ベクトルから $\mathrm{rank}(A)$ 個よりも多いベクトルを選ぶと、線形従属になる

証明

[Todo 15: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （命題 1.6.12）]

以上によって、行列の階数に関する次の理解が得られたことになる

階数と線型独立な列ベクトルの最大個数　行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ は、A の列ベクトルに含まれる線型独立なベクトルの最大個数と一致する

証明

[Todo 16: ref: 行列と行列式の基礎 p43 （定理 1.6.13）]

「行変形を繰り返して行階段形にしたときの 0 でない段の数」として導入した階数という量の、より本質的な意味がわかったことになる

特に、

> 行変形によって定めた階数が行変形の仕方によらない

という事実がこの定理からしたがう

2 つの行列の階数の和　A, B を同じ型の行列とするとき、

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$

証明

[Todo 17: ref: 行列と行列式の基礎 p44 問 1.15]

第 4 章

線形写像の単射性と全射性

線形写像とベクトルの線型独立性

ref: 行列と行列式の基礎 p65〜66
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p71〜73

線形写像と線形独立性　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする

ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の f による像

$$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$$

が線型独立であるとき、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ も線型独立である

証明

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

を考える

この両辺を f で写すと、f の線形性と零ベクトルの像 $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$

を使って

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

仮定より $f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は線型独立なので、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である

よって、

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_n$ は 0 しかないので、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は線型独立である ■

次の定理は、平行なベクトルを線型写像で写した結果、平行でなくなったりはしないということを述べている

線形写像と線形従属性 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in \mathbb{R}^n$ とする

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線形従属ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ は線形従属である

証明

$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線形従属であるとは、少なくとも 1 つは 0 でないある定数 $k_1, k_2, \ldots, k_n$ が存在して

$$k_1\boldsymbol{v}_1 + k_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

が成り立つことを意味する

この両辺を f で写すと、線形性より

$$k_1 f(\boldsymbol{v}_1) + k_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + k_n f(\boldsymbol{v}_n) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ

よって、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線形従属である ■

たとえば平行四辺形の像が線分や 1 点になったりしないことなどは、「$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線型独立ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線型独立である」と表現できる

単射な線型写像は線型独立性を保つ　線型写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が単射であるとき、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が線型独立ならば、$\{f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)\}$ も線型独立である

証明

$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ の線形結合

$$c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + c_n f(\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0}$$

を考える

f の線形性と零ベクトルの像 $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ より、次のように書き換えられる

$$f(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = \boldsymbol{0} = f(\boldsymbol{0})$$

f は単射だから、上式より

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ

ここで、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線型独立なので、$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ である

よって、$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は線型独立である　■

零写像と射影を除けば、f によってベクトルが「つぶれない」という性質

は、次のように表せる

$$\boldsymbol{v} \neq 0 \Longrightarrow f(\boldsymbol{v}) \neq \mathbf{0}$$

[Todo 18: ref: 行列と行列式の基礎 p55 例 2.1.15]

この条件は、実は線形写像が単射であることを意味している

対偶をとって、次のように表現できる

零ベクトルへの写像による単射性の判定　線形写像 f が単射であることと次は同値である

$$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

証明

i. f が単射
ii. $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

零ベクトルの像は零ベクトルであることから、$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ は、

$$f(\boldsymbol{v}) = f(\mathbf{0})$$

と書き換えられる

f の単射性により、この式から、

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$$

がしたがう ■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ を満たす $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ を考える

このとき、f の線形性から、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = f(\boldsymbol{v}_1) - f(\boldsymbol{v}_2)$$

となる

仮定 (ii) より、

$$f(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$$

がいえるので、$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ が成り立つ

$f(\boldsymbol{v}_1) = f(\boldsymbol{v}_2)$ から $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ が導かれたことで、f は単射であることが示された ■

線形写像の単射性と全射性

線形写像 f の単射性を表現行列 A の言葉で述べる

ref: 行列と行列式の基礎 p67〜68

線形写像の単射性と表現行列 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値

i. f は単射
ii. $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ は自明な解しか持たない
iii. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が単射であることの言い換えは、

$$f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

であり、$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が自明解しか持たないことは、

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

が成り立つということである

$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ であるから、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に自明解しか存在しないことと

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

と同値であることは以前証明済み ■

i は抽象的な概念、ii は方程式論的な言葉、iii は数値的な条件であり、これらは同値な言い換えである

単射性と対比して、全射性の理解も表現行列の言葉で整理する

線形写像の全射性と表現行列　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、次はすべて同値

i. f は全射
ii. 任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解が存在する
iii. $\mathrm{rank}(A) = m$

証明

(i) $\Longleftrightarrow$ (ii)

線形写像 f は、表現行列 A を用いて次のように表せる

$$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

f が全射であることの言い換えは、

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m, \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

であり、これは

$$\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ に解が存在する}$$

と同値である

よって、これらの 2 つの条件は同値である ■

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii)

$\mathrm{rank}(A) = m$ が、次の条件

$$^\forall \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m,\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ の解が存在する}$$

ことと同値であることは、以前証明済み ■

線形写像の像と核

写像の像や逆像を、線形写像の場合に考える

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p79 〜84

線形写像の像 線形写像 $f\colon V \to W$ に対して、f による V の像 $f(V)$ を、線形写像 f の像といい、$\mathrm{Im}(f)$ と表記する

$$\mathrm{Im}(f) = f(V) = \{f(\boldsymbol{v}) \in W \mid \boldsymbol{v} \in V\} \subset W$$

線形写像による像は、像空間とも呼ばれる

線形写像の核 線形写像 $f\colon V \to W$ に対して、f による $\{\mathbf{0}\}$ の逆像 $f^{-1}(\{\mathbf{0}\})$ を、線形写像 f の核といい、$\mathrm{Ker}(f)$ と表記する

$$\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{\mathbf{0}\}) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}\} \subset V$$

線形写像による核は、核空間あるいはカーネルとも呼ばれる

像空間と全射性

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の全射性は、$\mathbb{R}^m$ の部分集合である像空間 $\mathrm{Im}(f)$ と関係している

ref: 行列と行列式の基礎 p68〜69

> 全射な写像は、定義域の元の像で値域を「埋め尽くす」

ということから、f が全射であることは、$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^m$ と同値だとわかる

核空間と単射性

線形写像 f が単射であることは、次の条件と同値であった

$$f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

この条件は、次のように言い換えることができる

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$$

線形写像の単射性と核の関係　f を線形写像とするとき、

$$f \text{ が単射} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$$

証明

$\mathrm{Ker}(f)$ の定義は

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$$

これを踏まえて、次の 2 つが同値であることを示す

i. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$
ii. $\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

このとき、$f(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$ が $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ を意味するので、$\mathrm{Ker}(f)$ の元は零ベクトルのみになる

よって、$\mathrm{Ker}(f)=\{\mathbf{0}\}$ が成り立つ ■

(ii) $\Longrightarrow$ (i)

$\mathrm{Ker}(f)=\{\mathbf{0}\}$ であれば、$\mathrm{Ker}(f)$ の元は零ベクトルのみである

よって、$f(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$ が成り立つとき、$\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ が成り立つことになる

すなわち、$f(\boldsymbol{v})=\mathbf{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ が成り立つ ■

核空間と解空間

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を A とするとき、

$$\mathrm{Ker}(f)=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n \mid A\boldsymbol{v}=\mathbf{0}\}$$

と定めると、$f(\boldsymbol{v})=A\boldsymbol{v}$ という関係から、$\mathrm{Ker}(f)$ と $\mathrm{Ker}(A)$ は同じものを指す

これは、斉次形の連立線形方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の解空間そのものである

$\mathrm{Ker}(A)$ の元は、$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の基本解を使ってパラメータ表示できる

第 5 章

正則な線形変換と逆行列

線形変換の全単射性

$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像 f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換と呼ぶのだった

ref: 行列と行列式の基礎 p70

一般の線形写像と対比して、線形変換の大きな特徴は次が成り立つことである

線形代数における鳩の巣原理 f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換とし、A を f の表現行列とするとき、次はすべて同値である

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は全単射
iv. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ において、表現行列を A とすると、

$$
\begin{aligned}
f \text{ が単射} &\iff \mathrm{rank}(A) = n \\
f \text{ が全射} &\iff \mathrm{rank}(A) = m
\end{aligned}
$$

であることを以前示した

線形変換は、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の $m = n$ の場合であるので、f が単射であることも、全射であることも、

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

という条件と同値になる

つまり、線形変換は単射かつ全射であり、これは全単射であることも意味する ■

単射と全射は、一般には一方から他方が導かれるわけではない 2 つの性質だが、$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像（線形変換）の場合は同値になる

先ほど示した定理は、いわば線形代数版「鳩の巣原理」である

有限集合 $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ からそれ自身への写像 f に対して、単射と全射は同値である

この事実は鳩の巣原理と呼ばれる

鳩の巣原理は、歴史的には部屋割り論法とも呼ばれ、

n 個のものを m 個の箱に入れるとき、$n > m$ であれば、少なくとも 1 個の箱には 1 個より多いものが中にある

ことを指す

ここで鳩の巣原理と呼んだのはこの命題そのものではないが、その変種と考えてよい

正則行列

ref: 行列と行列式の基礎 p71

正則　線形変換 f は全単射であるとき、正則な線形変換であるという

正則行列　正方行列 A は、それが正則な線形変換を与えるとき、正則行列であるという

「線形代数における鳩の巣原理」から、次のことがいえる

正則の判定と階数　n 次正方行列 A に対して、

$$A \text{ が正則行列} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

この定理は、線形変換 f（もしくは正方行列 A）が正則かどうかについて、階数という 1 つの数値で判定できることを示している

正則の判定と線型独立性　n 次正方行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

に対して、次が成り立つ

$$A \text{ が正則行列} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立}$$

証明

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ が線型独立であることは、

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

と同値であることを以前示した

さらに、先ほど示した定理より、$\mathrm{rank}(A) = n$ は A が正則行列であることと同値である ■

逆行列

写像 f が全単射であれば、逆写像 f^{-1} が存在する

ref: 行列と行列式の基礎 p71〜72

逆写像の線形性 f を $\mathbb{R}^n$ の正則な線形変換とするとき、逆写像 f^{-1} は線形である

証明

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とし、次の 2 つを示せばよい

i. $f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$

ii. $f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$

(i)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}) \\
\boldsymbol{y} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{y}) \\
\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

また、f は線形写像であるから、

$$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{v})$ は、$f(f^{-1}(\boldsymbol{v}))$ を意味する記号なので、

$$f(f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

両辺を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$$

となり、(i) が示された ■

(ii)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x})) \\ c\boldsymbol{x} &= f \circ f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(c\boldsymbol{x})) \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$ の両辺に c をかけた、次も成り立つ

$$c\boldsymbol{x} = cf(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

さらに、f は線形写像であるから、

$$cf(f^{-1}(\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

ここまでの $c\boldsymbol{x}$ の複数の表現により、次式が成り立つ

$$f(f^{-1}(c\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

両辺を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$$

となり、(ii) が示された ■

n 次正則行列 A は、正則な線形変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と対応している

逆写像 f^{-1} が存在し、線形であるから、ある n 次正方行列 B が対応するはずである

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ であり、線形写像の合成は行列の積に対応するから、

$$AB = BA = E$$

が成り立つ

このような B を A の逆行列と呼び、A^{-1} と書く

逆行列の一意性　正方行列 A に対して、A の逆行列が存在するならば、それは一意的である

証明

A の逆行列が B_1 と B_2 の 2 つあるとする

$$AB_1 = B_1A = E \quad \text{かつ} \quad AB_2 = B_2A = E$$

$AB_2 = E$ の両辺に B_1 をかけると、

$$B_1 = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2$$

よって、$B_1 = B_2$ となり、逆行列は一意的である ■

逆行列の計算法と線形方程式

正則行列 A に対して、方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のただ 1 つの解は次で与えられる

ref: 行列と行列式の基礎 p72〜73

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

A^{-1} が計算できれば、行列のかけ算によって線型方程式の解が求められる

正則行列 A の逆行列を計算するために、次の定理に注目しよう

逆行列の計算法の原理　正方行列 A に対して、$AB = E$ を満たす正方行列 B があるならば、A は正則であり、B は A の逆行列である

証明

[Todo 19: ref: 行列と行列式の基礎 p72 命題 2.4.6]

上の定理の証明は、逆行列の計算法のヒントを含んでいる

A の逆行列 B を求めるには、n 個の線形方程式

$$A\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

を解けばよい

A は階数 n の n 次正方行列なので、行変形で A から E に到達することができる

$\boldsymbol{b}_i$ を求めるには、行変形により

$$(A \mid \boldsymbol{e}_i) \to \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_i)$$

とすればよい

i ごとに掃き出し法を何度も実行しないといけないのかと思いきや、一度にまとめられる

$$\begin{aligned}(A \mid E) = (A \mid \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \to \\ \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n) = (E \mid B)\end{aligned}$$

このようにすれば、行変形は 1 通りで十分である

正則行列と対角行列

ref: 行列と行列式の基礎 p74〜75

上三角行列の正則性　対角成分がすべて 0 でない上三角行列は正則である

証明

[Todo 20: ref: 行列と行列式の基礎 p74 命題 2.4.9]

行基本変形と対角行列　正則行列 A に対して、行のスカラー倍以外の行基本変形を繰り返し行って対角行列にできる

証明

[Todo 21: ref: 行列と行列式の基礎 p75 命題 2.4.12]

第 6 章

線形空間

線形部分空間の定義

$\mathbb{R}^n$ の部分集合であって、ベクトル演算で閉じた集合について考える

原点を含み直線や平面などを一般化した概念である

ref: 行列と行列式の基礎 p93〜94、p99

線形部分空間 $\mathbb{R}^n$ のベクトルからなる空集合でない集合 V は、次が成り立つとき**線形部分空間**あるいは簡単に**部分空間**であるという

i. すべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$ が成り立つ
ii. すべての $c \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \in V$ に対して $c\boldsymbol{u} \in V$ が成り立つ

ある $\mathbb{R}^n$ の線形部分空間のことを単に**線形空間**と呼ぶこともある

入れものの空間 $\mathbb{R}^n$ のことはあまり意識せずに、集合 V とそのベクトル演算に着目する考え方である

線形部分空間の例：$\mathbb{R}^n$ 自身

たとえば、$\mathbb{R}^n$ 自身は明らかに $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

線形部分空間の例：零ベクトルだけからなる部分集合

零ベクトル $\mathbf{0}$ だけからなる部分集合 $\{\mathbf{0}\}$ も部分空間である

V は空集合でないので、ある $\boldsymbol{v} \in V$ をとるとき、線形部分空間の定義 ii より

$$0 \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0} \in V$$

よって部分空間は必ず $\mathbf{0}$ を含む

線形部分空間の例：ベクトルが張る空間

ベクトルが張る空間は線形部分空間　$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \mathbb{R}^n$ が張る空間 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ は部分空間である

証明

[Todo 22: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.2]

たとえば $\mathbb{R}^3$ において座標を (x, y, z) とするとき、xy 平面は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である

座標部分空間　$\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合 I に対して、$x_i \ (i \in I)$ 以外の座標がすべて 0 である部分集合は $\mathbb{R}^n$ の部分集合である

このようなものを座標部分空間といい、$\mathbb{R}^I$ と書く

$$\mathbb{R}^I = \langle \boldsymbol{e}_i \mid i \in I \rangle$$

と表すこともできる

部分空間の張る空間は部分空間 $V \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ とすると、

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle \subset V$$

証明

[Todo 23: ref: 行列と行列式の基礎 p94 命題 3.1.4]

線形部分空間の例：線形写像の像

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p82

線形写像の像は部分空間 線形写像 $f: V \to W$ の像 $\mathrm{Im}(f)$ は W の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Im}(f)$ とすると、$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}_1)$, $\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{v}_2)$ とおける

よって、f の線形性より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= f(\boldsymbol{v}_1) + f(\boldsymbol{v}_2) \\ &= f(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \end{aligned}$$

となり、$\mathrm{Im}(f)$ は和について閉じている ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(f)$ と $c \in \mathbb{R}$ をとると、$\boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})$ とおける

よって、f の線形性より

$$
\begin{aligned}
c\boldsymbol{u} &= cf(\boldsymbol{v}) \\
&= f(c\boldsymbol{v})
\end{aligned}
$$

となり、$\mathrm{Im}(f)$ はスカラー倍について閉じている ■

線形部分空間の例：線形写像の核

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p71〜72

部分空間の零ベクトルと線形写像　部分空間 V, W の間の線形写像 $f\colon V \to W$ に対して、V の零ベクトルを $\mathbf{0}_V$、W の零ベクトルを $\mathbf{0}_W$ とすると、

$$
f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W
$$

証明

任意の $\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$ に対して、

$$
\begin{aligned}
0 \cdot \boldsymbol{v} &= \mathbf{0}_V \\
0 \cdot \boldsymbol{w} &= \mathbf{0}_W
\end{aligned}
$$

が成り立つ

$f(\mathbf{0}_V)$ は、f の線形性により、次のように変形できる

$$
f(\mathbf{0}_V) = f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})
$$

ここで、$f(\boldsymbol{v})$ は、f による $\boldsymbol{v} \in V$ の像であるので、W に属する

そこで、$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v})$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{0}_V) &= 0 \cdot f(\boldsymbol{v}) \\
&= 0 \cdot \boldsymbol{w} \\
&= \mathbf{0}_W
\end{aligned}
$$

となり、目標としていた式が示された ■

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p82

線形写像の核は部分空間　線形写像 $f\colon V \to W$ の核 $\mathrm{Ker}(f)$ は V の部分空間である

証明

前述の定理の主張 $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ より、零ベクトルは核空間に属する

$$\mathbf{0} \in \mathrm{Ker}(f)$$

和について

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ とすると、$f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ かつ $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ である

よって、f の線形性より

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v}) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

したがって、$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ である　■

スカラー倍について

$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ と $c \in \mathbb{R}$ をとると、$f(\boldsymbol{u}) = \mathbf{0}$ である

よって、f の線形性より

$$\begin{aligned} f(c\boldsymbol{u}) &= cf(\boldsymbol{u}) \\ &= c \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

したがって、$c\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(f)$ である　■

基底と次元

部分空間のパラメータ表示を与えるために基準として固定するベクトルの集合を定式化すると、基底という概念になる

ref: 行列と行列式の基礎 p96、p99〜100
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p33〜35

基底は、座標空間の「座標軸」に相当するものであり、部分空間を生成する独立なベクトルの集合として定義される

基底　V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とする

ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\} \subset V$ は、次を満たすとき V の基底であるという

i. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ は線型独立である
ii. $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$

線形空間 V の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ を 1 つ見つけたら、ベクトルの個数を数えて、V の次元が k であるとする

次元　V を線形空間とする

V の基底をなすベクトルの個数を V の次元といい、$\dim V$ と書く

また、$\dim\{\boldsymbol{0}\} = 0$ と定義する

基底の例：標準基底

たとえば、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であり、これを $\mathbb{R}^n$ の標準基底という

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p35

標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は n 個のベクトルからなるため、$\mathbb{R}^n$ の次元は n である

数ベクトル空間の標準基底　数ベクトル空間 K^n において、基本ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は K^n の基底である

証明

部分空間を生成すること

任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in K^n$ は、次のように表せる

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

したがって、K^n は $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ によって生成される

■

線型独立であること

$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ の線形関係式

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$$

を考える

このとき、左辺は

$$c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と書き換えられるので、これが零ベクトルになるためには、

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad \cdots, \quad c_n = 0$$

でなければならない

よって、$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は線型独立である　■

基底と次元を定義するにあたって、次の保証が必要になる

i. 任意の部分空間に、基底の定義を満たす有限個のベクトルが存在すること（基底の存在）
ii. 任意の部分空間に対して、基底をなすベクトルの個数が、基底の選び方によらず一定であること（次元の不変性）

基底の存在

基底の構成と存在を示すために、次の補題を用いる

ref: 行列と行列式の基礎 p98〜99
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p36〜37

線型独立なベクトルの延長　V を K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間とする

このとき、V の線型独立なベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ と、V に入らないベクトル $\boldsymbol{a}$ は線型独立である

証明

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ が線型従属であるとする

すると、定理「線形結合によるベクトルの表現」より、$\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表され、V に入り、矛盾する

よって、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ は線型独立である　■

この定理は、ベクトルの集合が張る空間の記号を用いると、次のように簡潔にまとめられる

線型独立なベクトルの延長　$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ が線型独立であって、$\boldsymbol{v}_{k+1} \notin \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_{k+1}\}$

は線型独立である

K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間 V の線型独立なベクトルは、V の基底に拡張できる

⚓ **基底の存在**　K^n の $\{\mathbf{0}\}$ でない部分空間 V には基底が存在する

証明

$V \neq \{\mathbf{0}\}$ なので、V には少なくとも 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1 \neq \mathbf{0}$ が存在する

定理「単一ベクトルの線型独立性と零ベクトル」より、$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は線型独立である

このとき、$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subset V$ であるが、もしも $\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle = V$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1\}$ は V の基底である

$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneq V$ ならば、$\boldsymbol{v}_2 \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$ であるベクトルを V から選ぶことができる

補題「線型独立なベクトルの延長」より、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は線型独立である

このとき、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subset V$ であるが、もしも $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = V$ ならば、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ は V の基底である

$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subsetneq V$ ならば、$\boldsymbol{v}_3 \subsetneq \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ であるベクトルを V から選ぶことができる

補題「線型独立なベクトルの延長」より、$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ は線型独立である

以下同様に続けると、$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle = V$ となるまで、V に属するベクトルを選び続けることができる

ここで線型独立なベクトルを繰り返し選ぶ操作が無限に続かないこと（有限値 k が存在すること）は、有限従属性定理により、K^n の中には n 個を超える線型独立なベクトルの集合は存在しないことから保証される ■

基底の存在証明で行った基底の構成をさらに続けることで、次の定理が得られる

ref: 行列と行列式の基礎 p103

基底の延長 V を n 次元の線形空間とし、線型独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ が与えられたとする
このとき、$(n-m)$ 個のベクトル $\boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ を追加して、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底になるようにできる

証明

基底の存在の証明において、線型独立なベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ が得られたところからスタートし、同様の手続きを繰り返せばよい
■

次元の不変性

ref: 行列と行列式の基礎 p99
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p37〜38

次元の不変性　K^n の部分空間 V の基底をなすベクトルの個数（次元）は一定である

つまり、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ と $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_l\}$ がともに V の基底ならば、$k = l$ である

証明

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であり、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_l$ は線型独立であるから、有限従属性定理の抽象版より、$l \leq k$ である

同様にして $k \leq l$ も成り立つので、$k = l$ である　■

線型独立なベクトルと次元

ref: 行列と行列式の基礎 p100

線形独立なベクトルの最大個数と空間の次元　線形空間 V 中の線型独立なベクトルの最大個数は $\dim V$ と等しい

証明

V の基底を $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ とすると、V には k 個の線型独立なベクトルが存在する

また、$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \rangle$ であるため、有限従属性定理の抽象版より、V 中の線型独立なベクトルの個数は k を超えることはない

つまり、k は V に含まれる線型独立なベクトルの最大個数である

■

線形空間を生成するベクトルの最小個数と次元　線形空間 V を張るベクトルの最小個数は $\dim V$ と等しい

証明

[Todo 24: ref: 行列と行列式の基礎 p100 問 3.3]

線形写像の核空間と基底

斉次形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解の自由度を d とすると、基本解 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d \in \mathrm{Ker}(A)$ が存在して、任意の $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Ker}(A)$ に対して

ref: 行列と行列式の基礎 p94〜95

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + c_d\boldsymbol{u}_d$$

を満たす $c_1, c_2, \ldots, c_d \in \mathbb{R}$ が一意的に定まる

このことは、基底の言葉で言い換えると次のようになる

斉次形方程式の基本解と核空間の基底　A を $m \times n$ 型行列とし、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の基本解とするとき、$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ は $\mathrm{Ker}(A)$ の基底である

線形写像の像空間と列空間

次の定理が成り立つことから、$\mathrm{Im}(A)$ を A の列空間と呼ぶこともある

ref: 行列と行列式の基礎 p96〜97

線形写像の像と表現行列の列空間の一致　線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の像空間 $\mathrm{Im}(f)$ は、表現行列の列ベクトルが張る空間である

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の表現行列を $A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とするとき、$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + v_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

なので、

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(f) \\ \iff & \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t.\ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v}) \\ \iff & \exists v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R} \ s.t.\ \boldsymbol{u} = v_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n \\ \iff & \boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle \end{aligned}$$

したがって、

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(A) = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$$

が成り立つ　■

上述の証明の

$$\boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \ s.t.\ \boldsymbol{u} = f(\boldsymbol{v})$$

という変形に着目すると、この定理は次のように線型方程式の文脈で言い換えられる

線形写像の像空間と方程式の解の存在　$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(A) \iff \text{方程式 } A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ が解を持つ}$$

$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ が $\mathrm{Im}(A)$ に属するかどうかを調べるためには階数による判定条

件が使える

一方、後に論じるように、

> ある線形写像の核空間として像空間をとらえる

こともできる

扱う問題によってはそのような見方が有効になる

線形写像の像空間は表現行列の列ベクトルによって張られるが、列ベクトルの集合は一般には線型独立ではない

像空間の基底を得るためには、列ベクトルの部分集合を考えるのが自然である

主列ベクトルによる像空間の基底の構成　行列 A の主列ベクトルの集合は $\mathrm{Im}(A)$ の基底である

証明

[Todo 25: ref: 行列と行列式の基礎 p97 定理 3.1.10]

部分空間の共通部分

与えられた部分空間から、新しく部分空間を作ることができる

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p22

⚓ **線形部分空間の共通部分は部分空間**　V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき、**共通部分** $V \cap W$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V \cap W$ とすると、共通部分の定義より、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ はどちらも V と W の両方に属していることになる

つまり、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ かつ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ である

V も W も部分空間なので、部分空間の定義より、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &\in V \\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} &\in W \end{aligned}$$

$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ が V と W の両方に属していることから、$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ は $V \cap W$ に属する

よって、$V \cap W$ は和について閉じている　■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in V \cap W$ と $c \in \mathbb{R}$ をとる

共通部分の定義より、$\boldsymbol{a}$ は V と W の両方に属しているので、部分空間の定義より

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{a} &\in V \\ c\boldsymbol{a} &\in W \end{aligned}$$

よって、$c\boldsymbol{a}$ は $V \cap W$ に属するため、$V \cap W$ はスカラー倍について閉じている　■

部分空間の和

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p22〜23

⚓ **線形部分空間の和は部分空間**　V, W を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とするとき、和空間

$$V + W := \{\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{w} \in W\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の部分空間である

証明

和について

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in V$, $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \in W$ とする

V と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 \in V, \quad \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 \in W$$

一方、和空間の定義より、$\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2$ はそれぞれ $V + W$ の元である

これらの元の和をとったときに、その和も $V + W$ に属していれば、和空間は和について閉じているといえる

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1) + (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{b}_2) = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2) + (\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2) \\ \in V + W\end{gathered}$$

上式で、和空間は和について閉じていることが示された ■

スカラー倍について

$\boldsymbol{a} \in V$, $\boldsymbol{b} \in W$ と $c \in \mathbb{R}$ をとる

V と W は部分空間なので、部分空間の定義より

$$c\boldsymbol{a} \in V$$
$$c\boldsymbol{b} \in W$$

一方、和空間の定義より、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ は $V+W$ の元である

この元をスカラー倍したときに、そのスカラー倍も $V+W$ に属していれば、和空間はスカラー倍について閉じているといえる

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) &= c\boldsymbol{a}+c\boldsymbol{b} \\ &\in V+W \end{aligned}$$

上式で、和空間はスカラー倍について閉じていることが示された ■

部分空間を生成するベクトルを用いて、部分空間の和を表せる

部分空間の和と生成ベクトル　K^n の 2 つの部分空間 $V=\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$ と $W=\langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$ に対して、和空間 $V+W$ は

$$V+W=\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

となる

証明

和空間 $V+W$ は

$$V+W=\{\boldsymbol{x}\in K^n \mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v}\in V,\ \boldsymbol{w}\in W\}$$

と定義される

また、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$ の張る部分空間は

$$H=\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k \rangle$$

である

これらが等しいことを示せばよい

$V+W \subseteq H$

任意の $\boldsymbol{x} \in V+W$ に対し、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$（$\boldsymbol{v} \in V$, $\boldsymbol{w} \in W$）と書ける

すなわち、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_m\boldsymbol{v}_m \qquad (a_i \in K) \\ \boldsymbol{w} &= b_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + b_k\boldsymbol{w}_k \qquad (b_j \in K) \end{aligned}$$

よって、

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j \in H$$

$H \subseteq V+W$

任意の $\boldsymbol{x} \in H$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{v}_i + \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j$$

と書ける

ここで

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} a_i\boldsymbol{v}_i \in V,$$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{j=1}^{k} b_j\boldsymbol{w}_j \in W$$

とすれば、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \in V+W$$

以上より、$V+W \subseteq H$ と $H \subseteq V+W$ が成り立つので、$V+W = H$ が示された ■

部分空間の和の次元

ref: 行列と行列式の基礎 p103

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p39〜41

部分空間の和の次元　K^n の部分空間 V, W に対して、次が成り立つ

$$\dim(V+W) = \dim V + \dim W - \dim(V\cap W)$$

証明

$\dim(V) = n, \dim(W) = m$ とする

$V\cap W$ の基底 $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d\}$ をとる

これを基底の延長の定理に基づいて、V の基底

$$\mathcal{V}\cup\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}\}$$

に延長する

同様に、$\mathcal{V}$ を W の基底

$$\mathcal{V}\cup\{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}\}$$

に延長する

このとき、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{n-d}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{m-d}$ が $V+W$ の基底になることを示す

$V+W$ を生成すること

$\boldsymbol{v}\in V, \boldsymbol{w}\in W$ とすると、それぞれ基底の線形結合で表すことができる

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} a_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{j=1}^{n-d} b_j\boldsymbol{v}_j$$

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{d} c_i\boldsymbol{u}_i + \sum_{k=1}^{m-d} d_k\boldsymbol{w}_k$$

$V+W$ の任意の元は、$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ と書けるので、

$$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\sum_{i=1}^{d}(a_i+c_i)\boldsymbol{u}_i+\sum_{j=1}^{n-d}b_j\boldsymbol{v}_j+\sum_{k=1}^{m-d}d_k\boldsymbol{w}_k$$

となり、$\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}\}$ の線形結合で表せる ■

線型独立であること

$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}$ が線型独立であることを示すために、次のような線形関係式を考える

$$\sum_{i=1}^{d}c_i\boldsymbol{u}_i+\sum_{j=1}^{n-d}c_{d+j}\boldsymbol{v}_j+\sum_{k=1}^{m-d}c_{d+n-d+k}\boldsymbol{w}_k=\boldsymbol{0}$$

ここで、$c_i\in K$ はスカラーである

この式を V と W の基底の線型結合として考えると、V の基底 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{v}_j$ に関する部分と W の基底 $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{w}_k$ に関する部分がそれぞれ線形独立であるため、結局どの項においても $c_i=0$ である必要がある

よって、$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}$ は線型独立である ■

以上より、$\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_d,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{n-d},\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_{m-d}$ は $V+W$ の基底であることが示された

この基底をなすベクトルの個数（次元）について考えると、

$$\begin{aligned}\dim(V+W)&=d+(n-d)+(m-d)\\&=n+m-d\end{aligned}$$

となる

ここで、$d=\dim(V\cap W)$ なので、

$$\dim(V+W)=\dim V+\dim W-\dim(V\cap W)$$

と書き換えられ、目的の式が得られた ■

線形写像の階数

行列の階数のさらに本質的な意味を明らかにするのが次の結果である

ref: 行列と行列式の基礎 p100

行列の階数と像空間の次元の一致　行列の階数は像空間の次元である

すなわち、A を $m \times n$ 型行列とするとき、

$$\operatorname{rank}(A) = \dim \operatorname{Im}(A)$$

証明

定理「主列ベクトルによる像空間の基底の構成」より、A の主列ベクトル $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ は $\operatorname{Im}(A)$ の基底を成す

よってその個数 $r = \operatorname{rank}(A)$ は $\operatorname{Im}(A)$ の次元である ■

この定理は、A の階数が行変形の仕方によらずに決まることを念押しするような定理である

列ベクトルの言葉で階数の解釈を与える定理「階数と線型独立な列ベクトルの最大個数」よりも一段と抽象性が高くなっている

より抽象性を上げて、次の定義をする

線形写像の階数　線形写像に対して、像空間の次元をその階数と定める

つまり、$f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とするとき、f の階数を

$$\operatorname{rank}(f) = \dim \operatorname{Im}(f)$$

と定義する

次元定理

ref: 行列と行列式の基礎 p101

⚓ 線形写像の次元定理　$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とすると、次が成り立つ

$$\mathrm{rank}(f) = n - \dim \mathrm{Ker}(f)$$

証明

A を f の表現行列とし、$\mathrm{rank}(f) = r$ とする

このとき、$\mathrm{Ker}(f)$ の次元は $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間の自由度 $n - r$ と一致するため、

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Ker}(f) &= n - r \\ &= n - \mathrm{rank}(f) \\ \therefore \quad \mathrm{rank}(f) &= n - \dim \mathrm{Ker}(f) \end{aligned}$$

となり、定理が成り立つ ■

線形同型写像と部分空間の線形同型

線形同型は、部分空間が「同じ」であることを述べた概念である

ref: 行列と行列式の基礎 p101

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p91～92

線形同型写像　V, W を線形空間とし、線形写像 $f\colon V \to W$ が全単射であるとき、f は**線形同型写像**あるいは単に**線形同**

型であるという

このとき、同型を表す記号 $\cong$ を用いて、

$$f : V \xrightarrow{\cong} W$$

と書くこともある

部分空間の線形同型　V と W の間に線形同型写像が存在するとき、V と W は線形同型であるとい、

$$V \cong W$$

と書く

線形同型の性質

ここでは、線形同型写像の恒等写像、逆写像、合成写像との関係を述べる

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p93～94

線形同型と恒等写像

恒等写像の線形同型性　恒等写像は線形同型写像である

証明

恒等写像は明らかに全単射であり、線形写像でもあるため、線形同型写像である　■

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

部分空間の自己同型性　部分空間 V は V 自身と線形同型である

すなわち、

$$V \cong V$$

線形同型と逆写像

線形同型写像の逆写像　線形同型写像の逆写像は線形同型写像である

証明

[Todo 26: ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p93～94]

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

線形同型性の対称性　部分空間 V が部分空間 W と線形同型なら、W は V と線形同型である

すなわち、

$$V \cong W \implies W \cong V$$

線形同型と合成写像

線形同型写像の合成　線形同型写像の合成は線形同型写像である

証明

[Todo 27: ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94]

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

線形同型性の推移性　部分空間 V が部分空間 W と線形同型で、W が部分空間 U と線形同型ならば、V は U と線形同型である

すなわち、

$$V \cong W \wedge W \cong U \Longrightarrow V \cong U$$

ここまでで登場した、部分空間の線形同型に関する性質をまとめると、

線形同型の同値関係としての性質

i. $V \cong V$
ii. $V \cong W \Longrightarrow W \cong V$
iii. $V \cong W \wedge W \cong U \Longrightarrow V \cong U$

となり、これらは、

同型 $\cong$ が等号 $=$ と同じ性質をもつ

ことを意味している

線形同型写像と基底

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94

線形同型写像による基底の保存　線形同型写像 f によって、部分空間の基底は基底に写る

証明

単射な線型写像は線型独立性を保つことから、f の単射性により、基底の線型独立性が保たれる

また、f の全射性により、基底の生成性も保たれる

よって、f によって基底は基底に写る ■

座標写像

ref: 行列と行列式の基礎 p101

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94〜95

座標写像　V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする

このとき、K^n から V への線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}}: K^n \to V$ を

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{x} \in (x_i)_{i=1}^{n} \in K^n)$$

を $\mathcal{V}$ で定まる座標写像と呼ぶ

このように定めた線形写像が座標写像と呼ばれる背景は、この座標写像が線形同型であることを示し、それがどんな意味を持つのかを考えることで

わかる

線形空間の基底によって定まる線形同型写像 V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする

このとき、K^n から V への線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}} \colon K^n \to V$ を

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{x} \in (x_i)_{i=1}^{n} \in K^n)$$

と定めると、これは線形同型写像である

証明

線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ が全単射であることを示す

単射であること

基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ の線型独立性は、

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

で表される線形結合が、$x_i = 0$ を満たすことを意味する

$\Phi_{\mathcal{V}}$ の定義をふまえると、この条件は、

$$\mathrm{Ker}(\Phi_{\mathcal{V}}) = \{\boldsymbol{0}\}$$

と書ける

よって、線形写像の単射性と核の関係より、$\Phi_{\mathcal{V}}$ は単射である ■

全射であること

基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V を生成することは、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} \in V &\iff \boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle \\ &\iff \exists (x_i)_{i=1}^n \in K^n \ s.t. \ \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n x_i \boldsymbol{v}_i \\ &\iff \exists \boldsymbol{x} \in K^n \ s.t. \ \Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u} \\ &\iff \boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(\Phi_{\mathcal{V}})\end{aligned}$$

という言い換えにより、

$$V = \mathrm{Im}(\Phi_{\mathcal{V}})$$

を意味する

よって、像空間と全射性の関係により、$\Phi_{\mathcal{V}}$ は全射である

■

この定理を部分空間の線形同型に関して言い換えると、次のような主張になる

⚓ **有限次元部分空間と数ベクトル空間の線形同型性**　任意の部分空間は次元の等しい数ベクトル空間と線形同型である

つまり、

> 和とスカラー倍だけに着目すれば、
> どんな部分空間も数ベクトル空間と「同じ」

ということを意味する

この同型により、部分空間に座標を与えることができる

そしてその座標によって、ベクトルの成分表示が得られる

線形代数における鳩の巣原理

ref: 行列と行列式の基礎 p102〜103

線形代数における鳩の巣原理の抽象版　V, W を同じ次元の線形空間とするとき、線形写像 $f\colon V \to W$ に関して、次はすべて同値である

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は線形同型
iv. $\mathrm{rank}(f) = \dim V = \dim W$

証明

$\mathcal{V}, \mathcal{W}$ をそれぞれ V, W の基底として、線形写像の合成

$$g\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{V}}} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{W}}^{-1}} \mathbb{R}^n$$

を考える

このとき、g は $\mathbb{R}^n$ の線形変換である

f が単射（全射）であると仮定すると、座標写像は全単射であるので、f との合成写像 g も単射（全射）となる

逆に、g が単射（全射）であると仮定した場合について考える

f は g を用いて次のように表現でき、

$$f = \Phi_{\mathcal{W}} \circ g \circ \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}$$

座標写像は全単射であるので、g との合成写像 f も単射（全射）となる

以上より、f が単射（全射）であることと、g が単射（全射）であることは同値である

線形変換 g に対して、線形代数における鳩の巣原理より、

$$g \text{ が単射} \iff g \text{ が全射} \iff g \text{ が全単射}$$

が成り立つが、g の単射性・全射性は f についても成り立つことがわかったので、

$$f \text{ が単射} \iff f \text{ が全射} \iff f \text{ が線形同型}$$

がいえる

最後に、階数に関する条件を示す

像空間と全射性の関係により、f が全射であることは、$\operatorname{Im}(f) = W$ と同値であるから、

$$\dim \operatorname{Im}(f) = \dim W$$

より、

$$\operatorname{rank}(f) = \dim W = \dim V$$

が得られる ■

次元による部分空間の比較

次の事実は、数の一致で空間の一致が結論できる有用な結果である

ref: 行列と行列式の基礎 p102

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p41

⚓ **次元の一致による部分空間の一致判定** 2 つの線型空間について、$V \subset W$ ならば、

$$\dim V = \dim W \Longrightarrow V = W$$

証明

$\boldsymbol{v} \in V$ をそのまま W の元と考えることで得られる写像を $\iota\colon V \to W$ とする（包含写像）

この包含写像は、V の元 $\boldsymbol{v}$ を W の中にそのまま「埋め込む」操作を表しているため、$\iota(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ 自身である

$$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$$

特に、$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ そのものを意味する

$$\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \iff \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

したがって、零ベクトルへの写像による単射性の判定より、ι は単射である

また、ι が単射であることと、仮定 $\dim V = \dim W$ を合わせると、線形代数における鳩の巣原理の抽象版より、ι は全射であることがわかる

よって、全射の定義より、すべての $\boldsymbol{w} \in W$ に対して $\iota(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ となる $\boldsymbol{v}$ が存在する
すなわち、W の元はすべて V の元であり、$V \subset W$ もふまえると、これは $V = W$ を意味する ■

次元による部分空間の比較　K^n の部分空間 V, W について、$V \subseteq W$ ならば、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ
等号が成立するのは、$V = W$ のときに限る

証明

$V \subseteq W$ であることから、基底の延長により、V の基底を延長して W の基底にできるので、

$$\dim V \leq \dim W$$

が成り立つ

等号が成立する場合については、前述の次元の一致による部分空間の一致判定を参照 ■

核空間・像空間の次元

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p83～84

⚓ 線形写像の単射性と核の次元　線形写像 $f : V \to W$ について、

$$f \text{ が単射} \iff \dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$

証明

線形写像の単射性と核の関係より、f が単射であることは次と同値である

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$$

次元の定義より、$\{\mathbf{0}\}$ の次元は 0 であるので、

$$\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$$

が成り立つ ■

線形写像の全射性と像の次元　線形写像 $f\colon V \to W$ について、

$$f \text{ が全射} \iff \dim \operatorname{Im}(f) = \dim W$$

証明

線形代数における鳩の巣原理の抽象版の主張そのものである ■

第 7 章

内積と直交変換

[Todo 28: ref: 行列と行列式の基礎 2.5]

第 8 章

行列式

連立方程式の解の判別式としての行列式

Zebra Notes

Type	Number
todo	28