直和分解

ref: 行列と行列式の基礎 p113〜114

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p233〜235

ref: テンソル代数と表現論 p6〜7

直和分解　線形空間 V の部分集合 W_1, W_2 に対して、任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \boldsymbol{w}_2 \in W_2$ によって

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$$

と一意的に表されるとき、V は W_1 と W_2 の直和である（直和に分解される）といい、

$$V = W_1 \oplus W_2$$

と書く

この定義は、次のように言い換えることができる

直和分解の同値条件　線形空間 V の部分集合 W_1, W_2 に対して $V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つことと、

i. $V = W_1 + W_2$
ii. $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$

の両方が成り立つことは同値である

証明

(i), (ii) $\Longrightarrow V = W_1 \oplus W_2$

$\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_1' \in W_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_2' \in W_2$ とする

仮定 (i) と和空間の定義より、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}'_1 + \boldsymbol{w}'_2$$

この等式は、移項によって次のように変形できる

$$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}'_1 = \boldsymbol{w}'_2 - \boldsymbol{w}_2$$

部分空間は和に閉じているため、左辺は W_1 に、右辺は W_2 に属する

よって、このベクトルは $W_1 \cap W_2$ に属する

仮定 (ii) より、$W_1 \cap W_2$ の元は零ベクトルであるので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}'_1 &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{w}'_2 - \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

したがって、

$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}'_1, \quad \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{w}'_2$$

となり、$\boldsymbol{v}$ の表現の一意性が示された ■

$V = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow$ (i), (ii)

和空間の定義をふまえると、(i) は直和分解の定義に含まれる

(ii) を示すため、$\boldsymbol{v} \in W_1 \cap W_2$ とする

$\boldsymbol{v}$ は零ベクトルを用いて、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{v}$$

と表せるが、直和分解の定義より、$\boldsymbol{v}$ の表現は一意的であるので、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

を得る

よって、$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ が成り立つ ■

直和分解の一意性を表す条件

3 つ以上の部分空間による直和を考えるにあたって、直和分解の定義に含まれていた「一意性」を表す条件を定式化する

部分空間の和における表現の一意性　和空間 $\sum_{i=1}^{k} V_i$ の元 $\boldsymbol{v}$ を、部分空間 $V_1, \ldots, V_k$ の元 $\boldsymbol{v}_i \in V_i$ の和として

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{v}_i \in V_i)$$

と書くとする

このとき、次の条件が成り立てば、和に使われる $\boldsymbol{v}_i$ は $\boldsymbol{v}$ により一意的に定まる

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

証明

仮に、$\boldsymbol{v}$ が 2 通りの和で表せるとする

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{v}'_i \quad (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}'_i \in V_i)$$

このとき、

$$\sum_{i=1}^{k} (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}'_i) = \boldsymbol{0}$$

となるが、ここで $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}'_i$ は V_i に属する

そこで、$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}'_i \in V_i$ とおき、

$$\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{0}$$

という条件を満たすとすると、$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0}$ より、

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}'_i \quad (i = 1, \ldots, k)$$

が導かれる

したがって、$\boldsymbol{v}$ の和に使われる $\boldsymbol{v}_i$ は一意的に定まる　■

この一意性の条件を用いて、複数の部分空間による直和を次のように定義する

直和　線形空間 V と、その部分空間 $V_1, \ldots, V_k$ が与えられたとき、$\boldsymbol{v}_i \in V_i$, $\boldsymbol{v} \in \sum_{i=1}^{k} V_i$ に対して、

$$\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{v}_1 = \cdots = \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{0}$$

が成り立つとき、$\displaystyle\sum_{i=1}^{k} V_i$ は V の直和であるといい、

$$\bigoplus_{i=1}^{k} V_i$$

と書く