第 1 章

表現行列と基底変換

基底に関する座標ベクトル

V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ をその基底とする

V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は、

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i$$

と一意的に書ける

ここで、$\Phi_{\mathcal{V}}$ を座標写像とすると、その定義から、

$$\Phi_{\mathcal{V}}^{-1}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

このベクトルを $\mathcal{V}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の座標ベクトルあるいは成分表示と呼び、

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{V}}$$

と書くことにする

一般の基底に関する表現行列

V, W をそれぞれ次元が n, m の線形空間とし、f を V から W への線形写像とする

また、$\mathcal{V}, \mathcal{W}$ をそれぞれ V, W の基底とする

座標写像が線形同型写像であることは、任意の部分空間が数ベクトル空間と同型であることを意味していた

よって、V から W への線形写像 f は、数ベクトル空間との線形同型写像（座標写像）$\Phi_{\mathcal{V}}, \Phi_{\mathcal{W}}$ を合成すれば、

$$f' = \Phi_{\mathcal{W}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{V}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

として、数ベクトル空間の間の写像と考えることができる

この合成を図で整理して、次のように表す

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "f'"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{W}}"'] \end{tikzcd}$$

このような図を図式という

下辺の矢印は、合成写像

$$\Phi_{\mathcal{W}}^{-1} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{V}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

を表していて、この写像は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像である

左下の $\mathbb{R}^n$ から右上の W への 2 通りの合成写像が一致するという意味で、この図式は可換であるという

数ベクトル空間の間の写像は、行列が定める線形写像であることから、この写像 f は $m \times n$ 型行列 A により表現される

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{W}}"'] \end{tikzcd}$$

座標ベクトルの記法を用いると、写像 f は次で与えられる

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{V}} \mapsto \left(A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{W}}$$

このように、座標写像を用いることで、V から W への線形写像 f から、$m \times n$ 型行列が得られる

この行列 A を、基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する f の表現行列という

つまり、

> 基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ を固定して考えるときは、f を A と同一視できる

ということになり、このとき、

> 表現行列は線形写像の「成分表示」

と解釈できる

表現行列の構成

数ベクトル空間の間の線形写像を定める行列は、各基本ベクトル $\boldsymbol{e}_j$ の f による像

$$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$

を用いて、

$$(f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)) = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = A$$

のように構成された

この表現行列の構成を、部分空間 V, W の基底をそれぞれ $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\mathcal{W} = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ として一般化する

このとき、$\boldsymbol{a}_j$ は座標写像 $\Phi_{\mathcal{W}}$ によって、

$$\Phi_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

のように W に写される

また、$\boldsymbol{e}_j$ は座標写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ によって、

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} e_{ij}\boldsymbol{v}_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

のように V に写されるが、これは $\boldsymbol{v}_j$ そのものである

たとえば、$j = 1$ のときは、

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{e}_1) = \sum_{i=1}^{n} e_{i1}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_1$$

となる

よって、$\boldsymbol{e}_j \mapsto \boldsymbol{a}_j$ という写像は、

$$\boldsymbol{v}_j \mapsto \Phi_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{a}_j)$$

という V から W への写像 f に対応する

（この対応は、可換図式からも明らか）

記号を書き換えると、

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \Phi_{\mathcal{W}}(\boldsymbol{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i$$

となり、右辺はさらに、

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m) \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

と変形できるので、まとめると、

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m)\, A$$

と表せる

線形変換の表現行列

V を n 次元の線形空間とし、f を V の線形変換、すなわち V から V 自身への線形写像とする

V の基底 $\mathcal{V}$ を選ぶとき、次の可換図式によって n 次正方行列 A が定められる

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "A\cdot"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"'] \end{tikzcd}$$

写像の定義される空間と、写す先の空間が同じなので、どちらに対しても同じ基底を用いることができる

もちろん、考える問題によっては別な基底を用いても構わないが、線形変換に対しては 1 つの基底を用いるのが自然である

数ベクトル空間の基底変換行列

$V = \mathbb{R}^n$ とし、標準基底 $\mathcal{E}$ によって行列 A で表現される線形変換を f とする

別な基底 $\mathcal{V}$ によって f を表現する行列を B とするとき、B をどうやって計算すればよいかを考える

B を定める原理は、表現行列の構成で議論したように、

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)B$$

ここで、$\boldsymbol{v}_i$ や $f(\boldsymbol{v}_i)$ は $\mathbb{R}^n$ の元なので、$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$ や $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ は n 次の正方行列であるとみなせる

そこで、

$$P = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$$

とおくとき、次に示すように P は正則行列である

基底変換行列の正則性　基底の変換行列は正則行列である

証明

P の列ベクトルは基底であるため、線形独立である

列ベクトルの線型独立性による正則の判定で示したように、正則行列であることは、列ベクトルが線形独立であることと同値である ■

また、B を決める式

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)B$$

の左辺は、次のように書ける

$$\begin{aligned}(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) &= (A\boldsymbol{v}_1, \ldots, A\boldsymbol{v}_n) \\ &= A(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \\ &= AP\end{aligned}$$

よって、B を決める式は、

$$AP = PB$$

となり、P は正則である（逆行列が存在する）ので、両辺に左から P^{-1} をかけて、

$$B = P^{-1}AP$$

が得られる

行列 P は、標準基底 $\mathcal{E}$ から基底 $\mathcal{V}$ への基底変換行列と呼ばれる

線形空間の基底変換行列

V を線形空間とし、V の基底 $\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を別な基底 $\mathcal{V}' = \{\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n\}$ に取り替えることを考える

このとき、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V の基底であることから、V の元である $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ は、$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の線形結合で表される

そこで、

$$\boldsymbol{v}'_i = p_{1i}\boldsymbol{v}_1 + p_{2i}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + p_{ni}\boldsymbol{v}_n$$

すなわち、

$$(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)(p_{ij})$$

とおく

このとき、写像 $f\colon V \to V$ を

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_1) & = & \boldsymbol{v}'_1 \\ f(\boldsymbol{v}_2) & = & \boldsymbol{v}'_2 \\ \vdots & & \vdots \\ f(\boldsymbol{v}_n) & = & \boldsymbol{v}'_n \end{cases}$$

を満たすものとして定義する

これはすなわち、基底 $\mathcal{V}$ を構成するそれぞれのベクトルを、基底 $\mathcal{V}'$ を構成するベクトルに順に写す線形変換であり、

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n)$$

を満たすものである

すると、行列 $P = (p_{ij})$ を定める式は、

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)P$$

と書ける

よって、P は基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ を表す線形写像 f の表現行列である

この意味で、P を基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の基底変換行列と呼ぶ

⚓ **線形空間の基底変換行列**　V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$, $\mathcal{V}' = \{\boldsymbol{v}'_i\}_{i=1}^n$ を V の基底とするとき、基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列 P は、

$$(\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n) = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)P$$

により定まる

この行列 P は、座標写像を介して考えると、次の可換図式で定まるものである

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[dd, "P\cdot"'] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] & \\
& V \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{V}}"] &
\end{tikzcd}
$$

つまり、P は、

$$\Phi_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{V}'} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

の標準基底に関する表現行列である

一方、この行列 P はベクトルの成分表示の変換に用いることもできる

座標ベクトルの変換則　基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P とし、ベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ の $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}'$ に関する座標ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ とするとき、

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$$

が成り立つ

証明

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の 2 種類の基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n$ に関する成分

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

を考えると、$\boldsymbol{a}$ の 2 通りの表現

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \\ &= (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= x'_1\boldsymbol{v}'_1 + x'_2\boldsymbol{v}'_2 + \cdots + x'_n\boldsymbol{v}'_n \\ &= (\boldsymbol{v}'_1, \ldots, \boldsymbol{v}'_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\ &= (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)P\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる

どちらも $(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ との積の形、すなわち $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合として表されている

ここで、基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線型独立性から、その線形結合は一意的であるので、係数比較ができて、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ ■

基底変換による表現行列の変化

$f\colon V \to W$ を線形写像とする

$$V \xrightarrow{f} W$$

V の基底 $\mathcal{V}$ と W の基底 $\mathcal{W}$ に関する f の表現行列を A とする

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, "A\cdot"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\Phi_{\mathcal{W}}"'] \end{tikzcd}$$

また、V の基底 $\mathcal{V}'$ と W の基底 $\mathcal{W}'$ に基底を変えるとき、f の表現行列を B とする

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "B\cdot"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{W}'}"] \\
V \arrow[r, "f"] & W
\end{tikzcd}$$

基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P、$\mathcal{W} \rightharpoonup \mathcal{W}'$ の変換行列を Q とするとき、次の可換図式で整理できる

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "B\cdot"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] \arrow[dd, "P\cdot"'] & & & \mathbb{R}^m \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{W}'}"'] \arrow[dd, "Q\cdot"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "A\cdot"] \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{V}}"] & & & \mathbb{R}^m \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{W}}"']
\end{tikzcd}$$

ここで、行列 A によって表現される写像を F_A、他の行列についても同様に表すと、

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "F_B"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{V}'}"] \arrow[dd, "F_P"'] & & & \mathbb{R}^m \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{W}'}"'] \arrow[dd, "F_Q"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "F_A"] \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{V}}"] & & & \mathbb{R}^m \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{W}}"']
\end{tikzcd}$$

このとき、左上の $\mathbb{R}^n$ から右下の $\mathbb{R}^m$ への写像は、

$$F_A \circ F_P, \quad F_Q \circ F_B$$

という 2 通りの表現ができる

すなわち、

$$F_A \circ F_P = F_Q \circ F_B$$

合成写像は行列の積に対応するので、

$$AP = QB$$

ここで、Q は $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ の標準基底に関する表現行列であるから、正則行列である

そこで、左から Q^{-1} をかけて、

$$B = Q^{-1}AP$$

が得られる

⚓ **基底変換に伴う表現行列の変換**　線形写像 $f\colon V \to W$ の基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する表現行列を A とし、同じ線形写像 f の別な基底 $\mathcal{V}', \mathcal{W}'$ に関する表現行列を B とするとき、基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P、$\mathcal{W} \rightharpoonup \mathcal{W}'$ の変換行列を Q とすると、

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ

実用上は $V = W$ である場合が特に重要で、この場合には $P = Q$ とすることができるので、

$$B = P^{-1}AP$$

が成り立つ

⚓ **基底変換に伴う表現行列の変換（線形変換の場合）**　線形変換 $f\colon V \to V$ の基底 $\mathcal{V}$ に関する表現行列を A とし、同じ線形変換 f の別な基底 $\mathcal{V}'$ に関する表現行列を B とするとき、基底変換 $\mathcal{V} \rightharpoonup \mathcal{V}'$ の変換行列を P とすると、

$$B = P^{-1}AP$$

が成り立つ

相似変換

「ある種の操作を行ったら同一のものになるもの」を「互いに相似」と呼ぶ

たとえば、二つ以上の図形が「相似」であるとは、平行移動、回転、反転、拡大縮小などの操作を行うとそれら図形をぴったり重ねることができるという意味だった

行列に対する「相似」は、次のように定める

行列の相似　正方行列 $A,\ B$ に対して、正則行列 P が存在して、

$$B = P^{-1}AP$$

が成り立つとき、A と B は相似であるという

このような変換を相似変換と呼ぶ

A と B が相似であるとき、A と B は 1 つの線形変換 f を異なる基底によって表現して得られた行列であるという関係にある

線形写像の階数標準形

線形写像に対して、うまく基底を選ぶと、表現行列を階数標準形にできる

線形写像の階数標準形　線形写像 $f\colon V \to W$ に対し、$r = \mathrm{rank}(f)$ とするとき、V, W のある基底に関する f の表現行列が次の形になる

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

証明

V の基底を次のように分けて構成する

i. $\mathrm{Ker}(f)$ を張るベクトル（これは f によって零に写る）
ii. $\mathrm{Ker}(f)$ に属さないが、f によって像を生成するベクトル（これは f によって非零に写る）

V, W の次元をそれぞれ n, m とすると、線形写像の次元定理より、$\mathrm{Ker}(f)$ の次元は $n-r$ である

そこで、$\mathrm{Ker}(f) \subset V$ の基底を $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ とする

さらに、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V$ を、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ が V の基底になるように選ぶ（基底の延長）

このとき、

$$\boldsymbol{w}_i = f(\boldsymbol{v}_i) \quad (i = 1, \ldots, r)$$

とおくと、$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ は線形独立である

実際、線形関係式

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{w}_i = \mathbf{0}$$

があるとすると、f は線形写像なので、

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{r} c_i f(\boldsymbol{v}_i) = f\left(\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i\right) = \mathbf{0}$$

より、

$$\left(\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i\right) \in \mathrm{Ker}(f)$$

この線形結合で表されるベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i$$

すると、$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ より、$\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{Ker}(f)$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ の線形結合でも表すことができる

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{u}_j$$

したがって、$\boldsymbol{v}$ の 2 通りの表現から、次の等式が成り立つ

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{u}_j$$

ここで、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ は V の基底なので、線型独立である

よって、等式

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{u}_j = \mathbf{0}$$

が成り立つには、各係数が 0 でなければならない

$$\begin{aligned} c_i &= 0 \quad (i = 1, \ldots, r) \\ d_j &= 0 \quad (j = 1, \ldots, n-r) \end{aligned}$$

したがって、$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r$ は線形独立である

$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r$ はすべて $\mathrm{Im}(f)$ に属するので、これは $\mathrm{Im}(f) \subset W$ の基底となる

そこで、この基底を延長して、$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{w}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{w}_m$ を W の基底とする

このように構成した V と W の基底に関する線形写像 f の表現行列を考える

$\mathrm{Ker}(f)$ を張るベクトル $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ は f によって零に写ることと、$\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r$ の定義より、

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i & (i = 1, \dots, r) \\ f(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{0} & (j = 1, \dots, n-r) \end{cases}$$

よって、基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_{n-r}\}$ における f の表現行列は、

$$\begin{aligned} &(f(\boldsymbol{v}_1), \dots, f(\boldsymbol{v}_r), f(\boldsymbol{u}_1), \dots, f(\boldsymbol{u}_{n-r})) \\ &= (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{0}, \dots, \boldsymbol{0}) \\ &= (\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_r) \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

として定まる ■

このように、線形空間 V, W の任意の基底変換を許すと、線形写像 f の表現行列をとても単純な形

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

にできる

これを f の階数標準形という

基底変換に伴う表現行列の変換の原理を用いて、先ほどの定理を行列の言葉で表すことができる

線形写像 $f\colon V \to W$ の基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する表現行列を A とし、同じ線形写像 f の別な基底 $\mathcal{V}', \mathcal{W}'$ に関する表現行列を階数標準形を B とする

このとき、正則行列による階数標準形の構成より、それぞれの基底変換行列 P, Q は行変形、列変形に対応する正則行列である

表現行列の階数標準形　$m \times n$ 型行列 A に対し、それぞれ n, m 次の正則行列 P, Q が存在して、

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となる

ここで、$r = \mathrm{rank}(A)$ である