# 余因子展開

3 次正方行列において、第 1 列を次のようにとらえる

ref: 行列と行列式の基礎 p142〜144、p166〜169
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p133〜139

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

これをふまえて、3 次行列式を、第 1 列に関する線形性を用いて、次のような和に分解してみる

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

ここで、たとえば、

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

をどのように表せるかを考える

まず、$(1, 1)$ 成分を要にして第 1 行の掃き出しを行えば、

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

が得られる

そこで、

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

とおき、

$$F(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)\cdot\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

とみなす

ここで、

$$F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1$$

であるから、結局、

$$\begin{vmatrix}1&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

が得られる

2 項めの行列式も同様に、掃き出し法によって、

$$\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\1&0&0\\0&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

これを、

$$\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{32}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}a_{13}\\a_{33}\end{pmatrix}$$

の関数 $F(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ とみなす

交代性より、

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}&=\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3)\\&=-\det(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=-1\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{vmatrix}0&a_{12}&a_{13}\\1&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

最後の項の行列式も同様にして、

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

と表せる

以上より、3 次行列式は、次のような 2 次行列式の和に分解できる

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\qquad = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

このような行列式の展開を一般化したものが、余因子展開である

**余因子**　$n$ 次正方行列 $A = (a_{ij})$ から、第 $i$ 行と第 $j$ 列を取り除いて $(n-1)$ 次の正方行列 $\Delta_{ij}$ を作り、その行列式に符号 $(-1)^{i+j}$ をかけたものを、$A$ の $(i, j)$ 余因子と呼び、$\tilde{a}_{ij}$ と書く

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\Delta_{ij})$$

**余因子展開**　$\det(A)$ は次のように余因子展開できる

第 $j$ 列に関する展開

$$\det(A) = \tilde{a}_{1j}a_{1j} + \tilde{a}_{2j}a_{2j} + \cdots + \tilde{a}_{nj}a_{nj}$$

第 $i$ 行に関する展開

$$\det(A) = \tilde{a}_{i1}a_{i1} + \tilde{a}_{i2}a_{i2} + \cdots + \tilde{a}_{in}a_{in}$$

証明

列に関する展開だけを示せば、行の方は行列式の対称性よりしたがう

行列 $A$ を $A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ のように列ベクトル表示する

すると、

$$\boldsymbol{a}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n$$

なので、行列式の多重線形性を用いて、

$$\begin{aligned} \det(A) &= |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}_1, \ldots, a_{ij}\boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| \end{aligned}$$

$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n|$ に対して、$(i, j)$ 成分を要にして第 $i$ 行を掃き出す操作を行うと、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

さらに、$i$ 行目を 1 つ上の行と順に交換して 1 行目まで移動し、次に $j$ 列目を 1 つ左の列と順に交換して 1 列目まで移動する

行や列の交換から生じる符号の変化は、$(i-1)+(j-1)$ の交換を行っているので、$(-1)^{i+j-2} = (-1)^2(-1)^{i+j} = (-1)^{i+j}$ となる

よって、次のような形が得られる

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ここで現れる行列式は、第 1 行・第 1 列に移動させた第 $i$ 行・第 $j$ 列を取り除いた $(n-1)$ 次正方行列の行列式である

よって、符号の部分も合わせて、余因子の定義より、次のように書ける

$$|\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n| = \tilde{a}_{ij}$$

したがって、行列 $A$ の行列式は、

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{a}_{ij}$$

と書けることが示された ■