固有値と固有ベクトル

与えられた線形写像を表現する行列を単純化（対角化）する上で、一次元不変部分空間への直和分解が本質的な役割を果たす

ref: 行列と行列式の基礎 p183〜184
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p178〜179
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p251〜252

一次元の f 不変部分空間 W の基底 $\boldsymbol{a}$ とは、

> ある $\lambda \in K$ について $f(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a}$

となるような $\mathbf{0}$ 以外のベクトルだった

固有値と固有ベクトル　体 K 上の線形空間 V 上の線形変換 $f: V \to V$ に対して、

$$f(\boldsymbol{a}) = \lambda \boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$$

となるベクトル $\boldsymbol{a} \in V$ が存在するとき、このようなスカラー $\lambda \in K$ を、線形変換 f の固有値という

また、このようなベクトル $\boldsymbol{a}$ を、f の固有値 λ に属する固有ベクトルという

線形変換 f の表現行列を A とすると、これは正方行列であり、$f(\boldsymbol{a}) = A\boldsymbol{a}$ と表せる

よって、固有値と固有ベクトルの定義は、次のようにも書ける

行列の固有値と固有ベクトル　正方行列 A に対して、

$$A\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} \quad (\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0})$$

となるベクトル $\boldsymbol{a}$ とスカラー λ が存在するとき、このようなスカラー λ を行列 A の固有値という

また、このようなベクトル $\boldsymbol{a}$ を、行列 A の固有値 λ に属する固有ベクトルという

異なる固有値に属する固有ベクトル

ref: 行列と行列式の基礎 p186〜187
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p265〜266

異なる固有値に属する固有ベクトルの非一致性　異なる固有値 α_i, α_j $(\alpha_i \neq \alpha_j)$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j$ は異なるベクトルである

証明

固有値と固有ベクトルの定義より、

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_i &= \alpha_i \boldsymbol{p}_i \\ A\boldsymbol{p}_j &= \alpha_j \boldsymbol{p}_j \end{cases}$$

である

もし $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_j$ ならば、

$$\begin{aligned} \alpha_i \boldsymbol{p}_i &= \alpha_j \boldsymbol{p}_i \\ \therefore \quad (\alpha_i - \alpha_j)\boldsymbol{p}_i &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

となるが、$\boldsymbol{p}_i$ は固有ベクトルであり $\boldsymbol{0}$ ではないので、$\alpha_i - \alpha_j = 0$ となる

すなわち、

$$\alpha_i = \alpha_j$$

が成立し、これは $\alpha_i \neq \alpha_j$ に反する

よって、$\boldsymbol{p}_i \neq \boldsymbol{p}_j$ でなければならない　■

この定理を発展させて、次のことがいえる

異なる固有値に属する固有ベクトルの線型独立性

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ が行列 A の相異なる固有値であるとすると、それぞれに属する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ は線型独立である

証明

固有値の個数 k についての数学的帰納法によって証明する

$k=1$ のとき、$\boldsymbol{p}_1$ は固有ベクトルゆえ $\mathbf{0}$ ではないので、$\{\boldsymbol{p}_1\}$ は線型独立である

$k \geq 2$ として、$(k-1)$ 個以下の固有ベクトルについて定理の主張が成り立つと仮定する

このとき、線形関係式

$$c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{p}_k = \mathbf{0}$$

を考える

両辺に A をかけると、$A\boldsymbol{p}_i = \alpha_i\boldsymbol{p}_i$ より、

$$c_1\alpha_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\alpha_2\boldsymbol{p}_2 + \cdots + c_k\alpha_k\boldsymbol{p}_k = \mathbf{0}$$

この等式から、初めの線形関係式の α_k 倍を引いて

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_k)\boldsymbol{p}_1 + \cdots + c_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k)\boldsymbol{p}_{k-1} = \mathbf{0}$$

ここで、帰納法の仮定より、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_{k-1}$ は線型独立であるため、係数はすべて 0 でなければならない

$$c_1(\alpha_1 - \alpha_k) = 0, \quad \ldots, \quad c_{k-1}(\alpha_{k-1} - \alpha_k) = 0$$

さらに、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ は相異なる固有値であるため、$\alpha_i - \alpha_k \neq 0 \ (i = 1, \ldots, k-1)$ である

よって、

$$c_1 = 0, \quad \ldots, \quad c_{k-1} = 0$$

が成り立つ

この結果を初めの線形関係式に代入すると、

$$c_k \boldsymbol{p}_k = \mathbf{0}$$

が残るが、$\boldsymbol{p}_k$ は固有ベクトルであり $\mathbf{0}$ ではないため、$c_k = 0$ も成り立つ

以上より、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ は線型独立である ■

固有ベクトルによる行列の対角化

一次元不変部分空間に関する議論で見たように、

$$f(\boldsymbol{a}_i) = \lambda_i \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

となるような $\boldsymbol{a}_i$ を基底として用いると、線形変換 f は次のような対角行列で表現できた

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

そして、このような $\boldsymbol{a}_i$ を固有ベクトル、λ_i を固有値として定義したため、

> 行列 A の固有ベクトルからなる基底が存在すれば、
>
> A は対角化できる

と言い換えられる

ref: 行列と行列式の基礎 p184〜185

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p264〜265、p267

線形変換 f の表現行列を A とすると、A は正方行列である

たとえば基底を A の固有ベクトルに変換した際に、この線形変換 f の表現行列が $P^{-1}AP$ に変化するとして、この行列 $P^{-1}AP$ が対角行列となる場合が、A が対角化できるということである

対角化可能　与えられた正方行列 A が適当な正則行列 P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & O \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と変形できるとき、A は**対角化可能**であるという

行列 A の固有ベクトルからなる基底が存在すれば、A は**対角化可能**である、ということを定式化しよう

対角化可能性と固有ベクトルの線型独立性　n 次元正方行列 A が対角化可能であるための必要十分条件は、線型独立な n 個の A の固有ベクトルが存在することである

証明

線型独立な A の固有ベクトルが存在 $\Longrightarrow$ A は対角化可能

A の固有ベクトルを $\boldsymbol{a}_i\,(i = 1, \ldots, n)$、それに対応する固有値を α_i とすると、固有値と固有ベクトルの定義より、次式が成り立つ

$$f(\boldsymbol{a}_i) = \alpha_i \boldsymbol{a}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

仮定より $\boldsymbol{a}_i$ は線型独立であり、一次元部分空間 $\{c\boldsymbol{a}_i \mid c \in K\}$ は $\boldsymbol{a}_i$ によって張られる空間である
よって、$\boldsymbol{a}_i$ を基底として用いることができるので、一次元不変部分空間に関する議論で見たように、A は対角行列で表現できる　■

A は対角化可能 $\Longrightarrow$ 線型独立な A の固有ベクトルが存在

A が対角化可能であることから、ある正則行列 P が存在して、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成り立つので、両辺に P をかけて、

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ

ここで、P を n 個の列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ を横に並べたもの、すなわち、

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n)$$

とみなせば、上の等式は、

$$\begin{cases} A\boldsymbol{p}_1 = \alpha_1\boldsymbol{p}_1 \\ A\boldsymbol{p}_2 = \alpha_2\boldsymbol{p}_2 \\ \qquad\vdots \\ A\boldsymbol{p}_n = \alpha_n\boldsymbol{p}_n \end{cases}$$

という関係を意味する

これはすなわち、$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ がそれぞれの固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ に属する A の固有ベクトルであることを意味する

さらに、P は正則であるため、その列ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は線型独立である ■

この定理と、異なる固有値に属する固有ベクトルの線型独立性から、次の定理が得られる

⚓ **固有値の相異性と対角化可能性**　n 次正方行列 A が異なる n 個の固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ をもつならば、A は対角化可能である

すなわち、ある n 次正則行列 P によって、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ

証明

n 個の異なる固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_n$ は線型独立である

よって、固有ベクトルの線型独立性より、対角化可能性が導かれる

■

ただし、この定理の逆は成立しない

つまり、n 次正方行列 A が n 個の異なる固有値を持たなくても、対角化できることがある

実際、A がすでに対角行列になっているなら、最も単純な場合として $A = E$ をとると、A の固有値は 1 だけであるが、任意の正則行列 P に対して $P^{-1}EP$ は対角行列 E になる

よって、対角化のために本質的なのは、n 個の異なる固有値ではなく、

> n 個の線型独立な固有ベクトル

であるといえる