実二次形式の標準化

A が実対称行列であることから、A は適当な直交行列 P を用いて対角化できる

ref: 行列と行列式の基礎 p210
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p298〜299

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

与えられた二次形式 $Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対して、$\boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x}$、すなわち $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ という変数の変換を行うと、

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} &= {}^t(P\boldsymbol{y})A(P\boldsymbol{y}) \\ &= {}^t\boldsymbol{y}{}^tPAP\boldsymbol{y} \\ &= {}^t\boldsymbol{y}(P^{-1}AP)\boldsymbol{y} \\ &= {}^t\boldsymbol{y}B\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

直交行列の定義 ${}^tP = P^{-1}$

となるので、変数 $\boldsymbol{y}$ に関する係数行列は $B = P^{-1}AP$ である

B の形から、実際に ${}^t\boldsymbol{y}B\boldsymbol{y}$ を計算してみると、

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{y}B\boldsymbol{y} &= \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2 \end{aligned}$$

となり、交叉項 $y_iy_j\ (i \neq j)$ が現れない形に書き換わったことがわかる

このような交叉項のない形を実二次形式の標準形という

> ⚓ **実二次形式の直交対角化と標準形**　実二次形式 $Q(\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ に対して、A を対角化する直交行列 P による座標変換 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$ を行えば、
>
> $$Q(\boldsymbol{x}) = \alpha_1 y_1^2 + \cdots + \alpha_n y_n^2$$
>
> という、変数 $\boldsymbol{y}$ に関する交叉項のない形（実二次形式の標準形）

にできる

ここで、$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は重複を含めて A の固有値と一致する