対角化可能性

ref: 行列と行列式の基礎 p193〜194
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p186〜188
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p271〜273

次の定理は、

> 各固有値の固有空間が「可能な限り大きい」

ときに限り、対角化可能であると述べている

固有空間次元と重複度の一致による対角化可能性　A の固有値を α_i、その重複度を k_i とする
A が対角化可能であることは、次と同値である

$$\dim W(\alpha_i) = k_i \quad (1 \leq i \leq s)$$

証明

対角化可能 $\Longrightarrow$ 固有空間の次元と重複度が一致

A が対角化可能であるので、正則行列 P により $P^{-1}AP$ が対角行列になる
このとき、P の列ベクトルからなる A の固有ベクトルの集合には、固有値 α_i を持つものが k_i 個含まれる

各 i に対して、k_i 個の線型独立なベクトルが $W(\alpha_i)$ に含まれることになるため、

$$\dim W(\alpha_i) \geq k_i$$

がいえる

一方、固有空間の次元と固有値の重複度の不等式より、

$$\dim W(\alpha_i) \leq k_i$$

したがって、

$$\dim W(\alpha_i) = k_i$$

が成り立つ ■

固有空間の次元と重複度が一致 $\Longrightarrow$ 対角化可能

$\dim W(\alpha_i) = k_i$ が成り立つとし、$W(\alpha_i)$ の基底 $\mathcal{V}_i$ をとる

$\mathcal{V}_i$ は k_i 個の元からなり、これらは $W(\alpha_i)$ の基底であることから、線形独立な固有ベクトルである

さらに、異なる固有値に対応する固有ベクトルは線形独立であるから、$i \neq j$ とし $\mathcal{V}_i$ と $\mathcal{V}_j$ のベクトルは互いに線形独立である

そこで、すべての $\mathcal{V}_i$ を併せた集合

$$\mathcal{V} = \bigcup_{i=1}^{s} \mathcal{V}_i$$

を考えると、$\mathcal{V}$ のベクトルは線型独立である

このとき、$\mathcal{V}$ の元の個数は

$$\sum_{i=1}^{s} k_i = n$$

である

したがって、線型独立な n 個の固有ベクトルが存在するため、A は対角化可能である ■

次の補題をもとに、対角化可能性を特性方程式の言葉で述べることができる

特性方程式の単根性と固有空間の次元　特性方程式 $\Phi_A(x)$ において α_i が単根ならば、すなわち $k_i = 1$ ならば、

$$\dim W(\alpha_i) = 1$$

証明

α_i は固有値なので、$\alpha_i \neq \mathbf{0}$ より、$W(\alpha_i) \neq \{\mathbf{0}\}$ がいえる

これはつまり、

$$\dim W(\alpha_i) \geq 1$$

ということだが、固有空間の次元と固有値の重複度に関する不等式より、

$$\dim W(\alpha_i) \leq k_i = 1$$

も成り立つ

したがって、

$$\dim W(\alpha_i) = 1$$

である ■

特性方程式の単根性と対角化可能性　特性方程式 $\Phi_A(x)$ が重根を持たなければ、A は対角化可能である

証明

重根を持たないということは、各固有値の重複度 k_i は 1 である

よって、

$$\dim W(\alpha_i) = 1$$

となり、k_i と $\dim W(\alpha_i)$ が一致するので、A は対角化可能である ■