第 2 章

線形写像と行列の演算

線形写像と線形性

写像 $f\colon K^n \to K^m$ が与えられたとき、これは K^n の出来事、構造、その他もろもろの情報を K^m に投影していると考えられる。
このとき、その「写り方」にはどのような性質を期待するべきであろうか？

ベクトルには、和とスカラー倍という 2 つの演算が備わっていた。
そして、和とスカラー倍の組み合わせが、線形結合として重要な役割を果たしている。

そのため、写った先でも、ベクトルどうしの和・定数倍に関する関係式が保存されるという状況が望ましい。

def – 線形写像と線形性

写像 $f\colon K^n \to K^m$ が**線形写像**（`linear mapping`）であるとは、次の条件を満たすことをいう。

i. 任意の $c \in K,\ \boldsymbol{v} \in K^n$ に対して、$f(c\boldsymbol{v}) = cf(\boldsymbol{v})$
ii. 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in K^n$ に対して、$f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$

これらの性質を写像 f の線形性という。

また、$m = n$ のとき、線形写像 $f\colon K^n \to K^n$ を K^n の線形変換（linear transformation）という。

f が線形写像であれば、たとえば $c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v}$ を f で写したときに、

$$f(c_1\boldsymbol{u} + c_2\boldsymbol{v}) = c_1 f(\boldsymbol{u}) + c_2 f(\boldsymbol{v})$$

というように、ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を f で写したものに置き換えただけで、線形結合の形はそのまま保たれる。

比例関数の一般化

線形写像のひとつの解釈として、「比例関数の一般化」という考え方もできる。

$m = n = 1$ の場合の線形写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は、単に数と数を対応させているので、（写像というより）関数である。このとき、線形性 (i) から、

$$f(c) = f(c \cdot 1) = c \cdot f(1) \quad (c \in \mathbb{R})$$

が成り立つので、$a = f(1) \in \mathbb{R}$ とおくと、次のように書ける。

$$f(x) = ax$$

⚓ theorem 2.1 - 一次元線形写像と比例関数の同一性

線形写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は、a を比例定数とする比例関数である。

もっとも簡単な関数である比例関数が満たすべき性質を抽象化し、高次元の世界で実現しているのが線形写像だとも考えられる。

線形写像による零ベクトルの像

$f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ を線形写像とするとき、線形性 (i) より、

$$f(0 \cdot \boldsymbol{v}) = 0 \cdot f(\boldsymbol{v})$$

よって、次が成り立つ。

$$f(\boldsymbol{o}) = \boldsymbol{o}$$

⚓ theorem – 零ベクトルの像

零ベクトルは線形写像によって零ベクトルに写される。

局所的な線形写像

線形写像は「局所的には」ありふれている。

たとえば、あらゆる微分可能な関数は、あらゆる場所で「線形写像＋誤差」と局所的に表現される。局所的に線形写像として近似するのが微分ともいえる。

線形写像の記述と行列

K^n の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ は、基本ベクトル（標準基底）の線型結合として次のように書ける。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{j=1}^{n} v_j\boldsymbol{e}_j$$

この $\boldsymbol{v}$ に、線形写像 f を作用させると、f の線形性より、

$$f(\boldsymbol{v}) = v_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + v_n f(\boldsymbol{e}_n) = \sum_{j=1}^{n} v_j f(\boldsymbol{e}_j)$$

ここで、$v_1, \ldots, v_n$ は $\boldsymbol{v}$ の成分なので、f の引数にどんなベクトルを入れるかによって変わる部分である。

$$f(\boldsymbol{v}) = \underbrace{v_1}_{\text{引数}} \overbrace{f(\boldsymbol{e}_1)}^{f\text{ の構成要素}} + \cdots + \underbrace{v_n}_{\text{引数}} \overbrace{f(\boldsymbol{e}_n)}^{f\text{ の構成要素}}$$

よって、f 自体は、基本ベクトルの像 $f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ だけで決まってしまう。

行列：線形写像の簡略記法

f の構成要素（f が表す操作）と f の引数（f の操作対象）を分離して、もっと簡潔に書けないか？ということを考える。

基本ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ が、f によって $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ というベクトルに写るとしよう。すなわち、$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{a}_j$ と書き直して、

$$f(\boldsymbol{v}) = v_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

ここで、基本ベクトルの像 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ を横に並べたものを A とおく。

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

A は、縦ベクトルを横に並べたものなので、結局は縦横に数を並べたものになっている。このような、縦横に数を並べたものを行列（matrix）という。

そして、次のような演算の規則を定める。

def – 行列とベクトルの積

行列 $A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{v} \in K^n$ との積を次のように定める。

$$A\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + v_n\boldsymbol{a}_n$$

ここで、v_i は $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分である。

行列とベクトルの積を用いると、$f(\boldsymbol{v})$ は次のように簡潔に書ける。

$$f(\boldsymbol{v}) = \overset{\text{操作}}{\boxed{A}}\,\underset{\text{引数}}{\underline{\underline{\boldsymbol{v}}}}$$

このとき、行列 A は線形写像 f の表現行列と呼ばれる。

線形写像 f は基本ベクトルの像 $f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)$ だけで決まるのだから、これらを並べたものとして表現行列 A を定めれば、f は表現行列 A だけで決まることになる。

このことは、比例関数が比例定数 a だけで決まることの高次元版ともいえる。

行列の定義

前節で述べたように、線形写像の簡略記法として生まれたものが、行列である。

ここでは、行列についての用語をいくつか定義する。

行列：縦横に数を並べたもの

縦ベクトルは数を縦に並べたもの、横ベクトルは数を横に並べたものだった。

縦横に数を並べたものは行列といい、たとえば次のように書く。

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & \text{列} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

横の数字の並びを行、縦の数字の並びを列という。

行列の型

A は、m 個の行と n 個の列をもつ行列である。

行が m 個、列が n 個の行列を、m 行 n 列の行列、あるいは $m \times n$ 型行列という。

$m = n$ の場合、すなわち $n \times n$ 型行列は、正方形状に数を並べたものなので n 次正方行列という。

行列の成分

第 i 行、第 j 列にある数を a_{ij} と表し、これを (i, j) 成分という。

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & j & & \phantom{a_{1n}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

行列 A を、a_{ij} 成分の集まりとして、次のように略記することもある。

$$A = (a_{ij})$$

行列の列ベクトル

行列 A から、第 j 列だけを取り出して K^m のベクトルとしたものは、

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

であり、これを A の j 番目の列ベクトルという。

$m \times n$ 型行列 A は、m 次元の列ベクトルを横に n 個並べたものという意味で、

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

と書くこともできる。

行列の行ベクトル

行列 A から、第 i 行だけを取り出して K^n のベクトルとしたものは、

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}$$

であり、これを A の i 番目の行ベクトルという。

$m \times n$ 型行列 A は、n 次元の行ベクトルを縦に m 個並べたものという意味で、

$$A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{pmatrix}$$

と書くこともできる。

行列全体の集合

n 次元数ベクトル全体の集合を K^n と書くのと同様に、$m \times n$ 型行列全体の集合を $M_{mn}(K)$ と書くことがある。

- 実数を縦横に並べた $m \times n$ 型行列の集合は、$M_{mn}(\mathbb{R})$ と表す。

- 複素数を縦横に並べた $m \times n$ 型行列の集合は、$M_{mn}(\mathbb{C})$ と表す。

行列から定まる線形写像

線形写像の記述と行列［第 2 章］では、線形写像 f による像 $f(\boldsymbol{v})$ を、行列 A を用いて次のように表した。

$$f(\boldsymbol{v}) = \overset{\text{操作}}{\boxed{A}} \underset{\text{引数}}{\boldsymbol{v}}$$

このように、行列とベクトルの積 $A\boldsymbol{v}$ を考えるとき、「A が 1 つ与えられていて $\boldsymbol{v}$ がいろいろ動く」と解釈することが多い。

これは、行列 A のことを、ベクトルを与えて別なベクトルを作る装置、すなわち写像だとみなすことである。

$$\text{入力ベクトル } \boldsymbol{v} \xrightarrow{A\times} \text{出力ベクトル } A\boldsymbol{v}$$

次の定理は、この「行列 A を左からかける」という操作が、線形写像であることを示している。

theorem 2.2 - 行列とベクトルの積の性質

A, B を $m \times n$ 型行列、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in K^n$、$c \in K$ とするとき、次が成り立つ。

i. $A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}$
ii. $A(c\boldsymbol{v}) = c(A\boldsymbol{v})$

証明

(i) 和の性質

$$A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} (u_j + v_j)\boldsymbol{a}_j = \sum_{j=1}^{n} u_j \boldsymbol{a}_j + \sum_{j=1}^{n} v_j \boldsymbol{a}_j = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}$$

(ii) スカラー倍の性質

$$A(c\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n} (cv_j)\boldsymbol{a}_j = c\sum_{j=1}^{n} v_j\boldsymbol{a}_j = c(A\boldsymbol{v})$$

行列から線形写像を作る

線形写像の記述と行列［第 2 章］で線形写像 f から行列 A を作ったのとは逆に、任意の行列から線形写像を作ることもできる。

theorem 2.3 - 行列から定まる線形写像

$m \times n$ 型行列 A に対して、

$$f_A(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} \quad (\boldsymbol{v} \in K^n)$$

によって写像 $f_A\colon K^n \to K^m$ を定めれば、f_A は線形写像である。

証明

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in K^n$、$c \in K$ とする。

theorem 2.2「行列とベクトルの積の性質」より、

$$f_A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v} = f_A(\boldsymbol{u}) + f_A(\boldsymbol{v})$$
$$f_A(c\boldsymbol{v}) = A(c\boldsymbol{v}) = cA\boldsymbol{v} = cf_A(\boldsymbol{v})$$

が成り立つので、f_A は線形写像である。 ■

行列と線形写像の対応

ここまでの議論をまとめると、行列 A と線形写像 f_A の間には、次のような関係がある。

- 行列 A が与えられれば、線形写像 f_A が定まる
- 線形写像 f_A が与えられれば、行列 A が定まる

このように、行列 A と線形写像 f_A は一対一に対応している。

このことから、

行列 A と線形写像 f_A は「同じ」ものを表す

とみなして議論を進めることも多い。

この同一視の根拠は、行列と A 倍写像の同型［第 12 章］でより厳密に議論する。

行列の積と線形写像の合成

行列の積は、線形写像の 合成写像（def A.5）を表すものとして定義される。

theorem 2.4 – 線形写像の合成

K^n から K^m への線形写像 g と、K^m から K^l への線形写像 f が与えられているとき、これらを合成して得られる写像

$$f \circ g \colon K^n \xrightarrow{g} K^m \xrightarrow{f} K^l$$

は、K^n から K^l への線形写像である。

証明

任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in K^n$ とスカラー $c_1, c_2 \in K$ について、次の合成写像を考える。

$$(f \circ g)(c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b}) = f\big(g(c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b})\big)$$

g の線形性より、

$$g(c_1\boldsymbol{a} + c_2\boldsymbol{b}) = c_1 g(\boldsymbol{a}) + c_2 g(\boldsymbol{b})$$

これを f に適用すると、f の線形性より、

$$\begin{aligned} f\big(c_1 g(\boldsymbol{a}) + c_2 g(\boldsymbol{b})\big) &= c_1 f(g(\boldsymbol{a})) + c_2 f(g(\boldsymbol{b})) \\ &= c_1 (f \circ g)(\boldsymbol{a}) + c_2 (f \circ g)(\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

したがって、

$$(f\circ g)(c_1\boldsymbol{a}+c_2\boldsymbol{b})=c_1(f\circ g)(\boldsymbol{a})+c_2(f\circ g)(\boldsymbol{b})$$

が成り立つことから、$f\circ g\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^l$ は線形写像である。 ■

線形写像の合成の表現行列

f と g の表現行列をそれぞれ $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})$ とする。

A は $l\times m$ 型、B は $m\times n$ 型の行列である。

このとき、$f\circ g$ は $l\times n$ 型行列で表現される。

$$\underset{l\times m}{A}\ \cdot\ \underset{m\times n}{B}\ =\ \underset{l\times n}{AB}$$

同じ

$f\circ g$ の表現行列を C と書くことにして、その成分を計算しよう。

そのためには、基本ベクトルの写り先を見ればよい。

B を列ベクトルに分解して $B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}$ と書くとき、

$$(f\circ g)(\boldsymbol{e}_j)=f(g(\boldsymbol{e}_j))=f(\boldsymbol{b}_j)=A\boldsymbol{b}_j\quad(1\leq j\leq n)$$

なので、基本ベクトルの写り先を並べた行列は次のようになる。

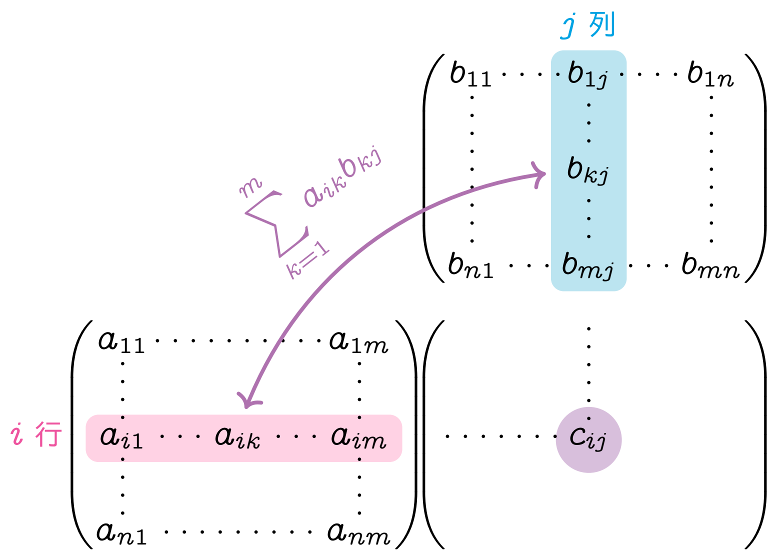
$$C=\begin{pmatrix}A\boldsymbol{b}_1 & \cdots & A\boldsymbol{b}_n\end{pmatrix}$$

これより、C の (i,j) 成分は $A\boldsymbol{b}_j$ の第 i 成分なので、

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{im}b_{mj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$$

により与えられる。

つまり、C の (i,j) 成分を計算するときは、A の第 i 行、B の第 j 列だけを見ればよい。



このようにして得られた $l \times n$ 型行列 C を AB と書き、A と B の**積**と定義する。

行列の積の可換性

2 つの行列の積が順番に依らない場合、2 つの行列は**可換**（`commutative`）であるという。

一般には、2 つの行列は可換であるとは限らない。

つまり、AB と BA は一般には異なる。

[Todo 1: 可換な例と可換でない例を示す]

行列の積の結合法則

次の結合法則により、$(AB)C$ や $A(BC)$ を表すとき、括弧を書かずに単に ABC と書いても問題ない。行列の個数が増えても同様である。

theorem – 行列の積の結合法則

行列の積 AB, BC がともに定義できるとき、次が成り立つ。

$$(AB)C = A(BC)$$

証明

A, B, C をそれぞれ $q \times m$, $m \times n$, $n \times p$ 型行列とする。

このとき、線形写像の合成

$$\mathbb{R}^p \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^q$$

を考え、f, g, h の表現行列をそれぞれ A, B, C とする。

theorem A.1「写像の合成の結合法則」より、

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

が成り立つことから、

$$(AB)C = A(BC)$$

がしたがう。 ■

行列のべき乗

A が正方行列の場合は、A どうしの積を次のように書く。

$$A^2 = AA$$
$$A^3 = AAA$$

零行列と単位行列

[Placeholder 1: 再編予定]

def – 零写像と零行列

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$ と定めたものは明らかに線形写像であり、これを**零写像**と呼ぶ

その表現行列はすべての成分が 0 である行列である

この行列を零行列と呼び、O で表す

$m \times n$ 型であることを明示するために $O_{m,n}$ と書くこともある

また、n 次正方行列の場合は、O_n と書く

theorem - 零行列との積

A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$O_m A = A O_n = O_{m,n}$$

def - 恒等写像と単位行列

$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を、すべての $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ と定めたものは明らかに線形写像である

これを恒等写像と呼び、$f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ と書く

恒等写像の表現行列は、$f(\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_j \quad (1 \leq j \leq n)$ より

$$E = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

であり、これを単位行列と呼ぶ

単位行列は正方行列であり、n 次であることを明示したいときは E_n と書く

theorem - 単位行列との積

A を $m \times n$ 型とするとき、次が成り立つ

$$E_m A = A$$
$$A E_n = A$$

線形変換とその表現行列

特に、線形変換は空間 $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への写像なので、$\mathbb{R}^n$ 内において「ベクトルが変化している」（あるいは f が空間 $\mathbb{R}^n$ に作用している）ニュアンスとみることができる。

$\mathbb{R}^n$ の線形変換の表現行列は、n 次正方行列である。

[Todo 2: $\mathbb{R}^n$ の線形変換の具体例を紹介する]

行列のスカラー倍

[Placeholder 2: 再編予定：スカラー行列について書く]

def – 行列のスカラー倍

A を行列、c をスカラーとするとき、A のすべての成分を c 倍して得られる行列を cA とする

theorem – 行列の積とスカラー倍の性質

行列 A, B の積 AB が定義できるとき、つまり A の列の個数と B の行の個数が同じであるとき、$c \in \mathbb{R}$ に対して

$$(cA)B = A(cB) = c(AB)$$

が成り立つ

行列の和

[Placeholder 3: 再編予定]

A, B がともに $m \times n$ 型行列であるとき、それぞれの (i, j) 成分を足すことで行列の和 $A + B$ を定める

⚓ theorem - 分配法則

積が定義できるとき、

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$

⚓ theorem - 線形写像の和

$f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とし、

$$h(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v}) \quad (\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n)$$

により写像 $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を定めるとき、h も線形写像である

また、f, g の表現行列を A, B とするとき、h の表現行列は $A + B$ である

なお、$h = f + g$ と書き、f, g の和と呼ぶ

証明

[Todo 3: book: 行列と行列式の基礎 p59 （問 2.5）]

行列の区分け

行列を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

のようなブロック型に区分けして計算することがよくある

A が $m \times n$ 型のとき、$m = m_1 + m_2$, $n = n_1 + n_2$ として、A_{ij} は $m_i \times n_j$ 型である

また、B が $n \times l$ 型で、$n = n_1 + n_2$, $l = l_1 + l_2$ と区分けして

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

とするとき、

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

のように A_{ij} などが行列の成分であるかのようにして（ただし積の順序は変えずに）積が計算できる

ここで、A の列の区分けと B の行の区分けの仕方が同じであることが必要である

3 つ以上のブロックに分ける場合も同様である

行列の転置

行列 $A=(a_{ij})$ に対し、その成分の行と列の位置を交換してできる行列を転置行列という

def - 転置行列

$A=(a_{ij})$ を $m\times n$ 型行列とするとき、(i,j) 成分が a_{ji} である $n\times m$ 型行列を A の転置行列と呼び、${}^tA$ と表す

文字 t を左肩に書くのは、右肩に書くと t 乗に見えてしまうからである

t 乗と区別しつつ、右肩に書く流儀として、A^T と書く場合もある

ベクトルの転置

特別な場合として、n 次の数ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $n\times 1$ 型行列とみて転置したもの ${}^t\boldsymbol{v}$ は $1\times n$ 型行列となる

すなわち、数ベクトルの転置は横ベクトルになる

このことを利用して、たとえば

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

を ${}^t(v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n)$ と表記することもある

転置の性質

転置は「行と列の入れ替え」であるので、明らかに次が成り立つ

theorem 2.5 - 転置操作の反復不変性

${}^tA$ に対して、転置をもう一度して得られる行列は A と一致する

$${}^t({}^tA)={}^{tt}A=A$$

theorem 2.6 - 転置と行列積の順序反転性

行列 A, B の積 AB が定義できるとき、

$$ {}^t(AB) = {}^tB{}^tA $$

証明

[Todo 4: book: 行列と行列式の基礎 p78 命題 2.5.3]

theorem 2.7 - 行列の和に対する転置の分配性

A と B が同じ型の行列であるとき、

$$ {}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB $$

証明

[Todo 5:]

対称行列と交代行列

正方行列 A が「転置しても元と変わらない」としたら、A の成分は左上から右下にかけての対角線に関して対称（$a_{ij} = a_{ji}$）になっている

def 2.1 - 対称行列

正方行列 A が次を満たすとき、A を対称行列という

$$ {}^tA = A $$

def - 交代行列

正方行列 A が次を満たすとき、A を交代行列という

$$ {}^tA = -A $$

正方行列のトレース

def - 対角成分

正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、a_{ii} を対角成分と呼ぶ

def 2.2 - トレース

正方行列 $A = (a_{ij})$ に対して、対角成分の和

$$ \sum_{i=1}^{n} a_{ii} $$

を A のトレースと呼び、$\mathrm{tr}(A)$ と表す

theorem - トレースの性質

i. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$
ii. $\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr}(A)$
iii. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

証明

[Todo 6: book: 行列と行列式の基礎 p64 問 2.9]

行列と複素数

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき、

$$aE + bI = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

という形の行列を**複素数**と呼ぶことにより、複素数の定義ができる

この定義では、通常は $a + bi$ と書かれるものを行列として実現している

[Todo 7: book: 意味がわかる線形代数 p43〜49]

. . . .

Zebra Notes

Type	**Number**
todo	7
placeholder	3