解の一意性

ここまでの議論から、次のことがいえる。

ref: 行列と行列式の基礎 p37〜38

解の一意性 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解が存在するとき、

$$\text{解が一意的である} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である。

証明

$\Longleftarrow$

$\mathrm{rank}(A) = n$ であれば、解の自由度は $n - n = 0$、すなわち自由変数が存在しないことになる

自由変数がなければ「各変数＝定数」という式に変形できることになるので、解は明らかに一意的である ■

$\Longrightarrow$

対偶 $\mathrm{rank}(A) \neq n \Longrightarrow$ 解が一意的 を示す

$\mathrm{rank}(A) \leq n$ であるので、$\mathrm{rank}(A) \neq n$ は $\mathrm{rank}(A) < n$ を意味する

$\mathrm{rank}(A) < n$ であれば、自由変数が 1 つ以上存在するので解は無数にある

よって、解は一意的ではない ■

斉次形方程式の非自明解の存在

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において、$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ の場合、つまり、

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$$

の形の線形連立方程式は斉次形であるという。

斉次形の場合は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ が明らかに解になっていて、これを自明解という。したがって、斉次形の方程式では、自明解以外に解が存在するかどうかが基本的な問題となる。

斉次形の非自明解の存在条件　斉次形の方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ において、

$$\text{自明解しか存在しない} \iff \operatorname{rank}(A) = n$$

ここで、n は変数の個数である

証明

斉次形の場合は自明解が常に存在するので、解の一意性 $\operatorname{rank}(A) = n$ は、それ以外の解がないということを意味している ■

解のパラメータ表示の一意性

自由変数を $x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-r}}$ とするとき、一般解の表示

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

の j_k 番目の成分は等式

$$x_{j_k} = t_k$$

を意味するので、解が与えられたとき、パラメータの値は直接に読み取れる

このことから、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t_1\boldsymbol{u}_1 + t_2\boldsymbol{u}_2 + \cdots + t_{n-r}\boldsymbol{u}_{n-r}$$

によって解を表示する際の $\boldsymbol{n-r}$ 個のパラメータの値は一意的に定まることがわかる

この事実は、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r} \in \mathbb{R}^m$ が線形独立であると表現される