Chapter 1

論理と集合

数学の理論は、集合という概念で語られる。
そして、集合を構成する条件を考えるために、論理が利用される。
さらに、集合と集合を対応づける概念として、写像がある。

この章で学ぶことは、これから数学の理論を語るための「言葉」として機能するものである。

1.1　論理

数学では「曖昧さ」を取り除いた議論が重要である。
ここでは、文章（表現）の曖昧さを取り除くために、文章の意味を記号化して扱おう、というアプローチを考えていく。

1.1.1　命題：客観的視点に絞る

数学では、多くの問いを立てて、それが正しいかどうかをひとつひとつ確かめていくことになる。
このとき、数学の議論の対象にできるのは、主観を含まない、「真偽を問うことができる」文章である。

たとえば、「数学は面白い」という文章は、私たちにとっては事実かもしれないが、主観を含む（もはや個人的感想に近い）主張である。
このような、人によって回答が分かれるような文章について議論するのは、また別の学問領域に任せてしまおう。

数学の議論の対象とできる文章は、「正しい」か「正しくない」かをはっきりと定められるもので、そのような文章は命題と呼ばれる。

命題
客観的に正しいか正しくないかが判断できる主張を 命題 という。

1.1.2 記号化：解釈を一通りに絞る

数学で扱う命題は、文章ではなく記号で表現されることも多い。どのような記号をどんな意味で使うかを見ていく前に、そもそもなぜ記号化するのか、ということを考えておきたい。

私たちが日常で使う言葉は、表現のパターンがあまりにも多い。英語に比べると、日本語は特にその傾向がある。
たとえば、次の 3 つの文章は、まったく同じことを主張しているものである。

1. パンケーキは太る
2. パンケーキを食べると太る
3. パンケーキを食べたならば、体重が増える

1 つめの文章は、ネイティブの日本人の間では問題なく伝わるが、日本語に慣れていない人には伝わらない可能性がある。
実際にこのような日本語を聞いて、「パンケーキ＝太る」ってどういうこと…？となる外国人は多いらしい。「パンケーキ」と「太る」が「＝」で結ばれているかのように見える時点で、問題がある。

2 つめの文章では、より意味が明確になった。この文章であれば、英語が苦手な私が英訳を試みたとしても、"Pancakes is fat."みたいな奇妙な英文を生み出さずに済むだろう。

3 つめの文章は、少し堅苦しく感じるかもしれない。しかし、これが最も数学らしい表現である。「パンケーキを食べた」と「体重が増える」という 2 つの事象が「ならば」で結ばれていて、論理の構造がはっきりしている。

＊ ＊ ＊

このように、何通りもの表現がある文章は、人によって解釈が異なる可能性がある。

客観的な主張であるはずの命題も、その表し方によって解釈の齟齬が生まれてしまうと、結局正しいか正しくないかが人によって異なる事態に陥ってしまうかもしれない。

解釈を一通りにするには、表し方を統一してしまうのが手っ取り早い。そのために、共通認識として定義された記号を使って文章を表現するのが、数学のアプローチなのである。

1.1.3 真偽値：正しさを値とみなす

ここからは、命題を記号化する具体的なルールを見ていこう。

命題は、主張の内容によって「正しい」か「正しくない」かが決まる。

このとき、「正しい」ことを真と呼び、「正しくない」ことを偽と呼ぶ。

命題の真偽

- 命題が正しいとき、その命題は 真である という。
- 命題が正しくないとき、その命題は 偽である という。

命題は必ず「真」か「偽」のどちらかに決定されるため、この「真」や「偽」を命題が持つ値として考えて、真偽値と呼ぶことがある。

さらに、コンピュータでの応用を見据えて、真偽値を 0 と 1 で表すことがある。

真偽値

- 命題が真であるとき、その命題の真偽値は 1 であるとする。
- 命題が偽であるとき、その命題の真偽値は 0 であるとする。

1.1.4 命題関数

1.2 集合

Under construction...

1.2.1 実数の集合：区間

2 つの実数の間の範囲は、区間と呼ばれる。

区間

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合のうち、$a < b$ である実数 a と b の間にあるすべての実数の集合を 区間 という。

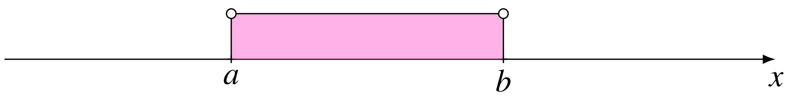
区間は、端点を含むかどうかによって、開区間、閉区間、半開区間に分類される。

開区間

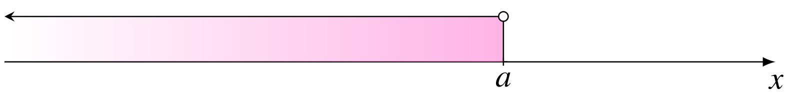
端点を含まない区間を開区間という。

開区間　$a \leq x \leq b$ となる実数 x の集合を 開区間 といい、(a, b) と表す。

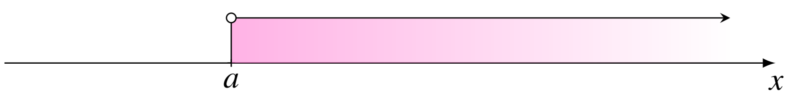
$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid a > x\}$$



閉区間

端点を含まない区間を閉区間という。

閉区間 $a < x < b$ となる実数 x の集合を **閉区間** といい、$[a, b]$ と表す。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$[-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \geq x\}$$

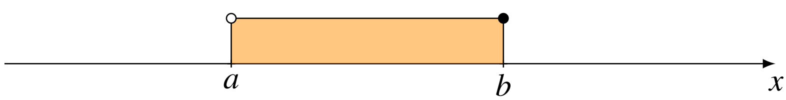
半開区間

一方の端点を含み、他方の端点を含まない区間を半開区間という。

半開区間 次のような集合を **半開区間** という。

- $a \leq x < b$ となる実数 x の集合を、$[a, b)$ と表す。
- $a < x \leq b$ となる実数 x の集合を、$(a, b]$ と表す。

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$