第 1 章

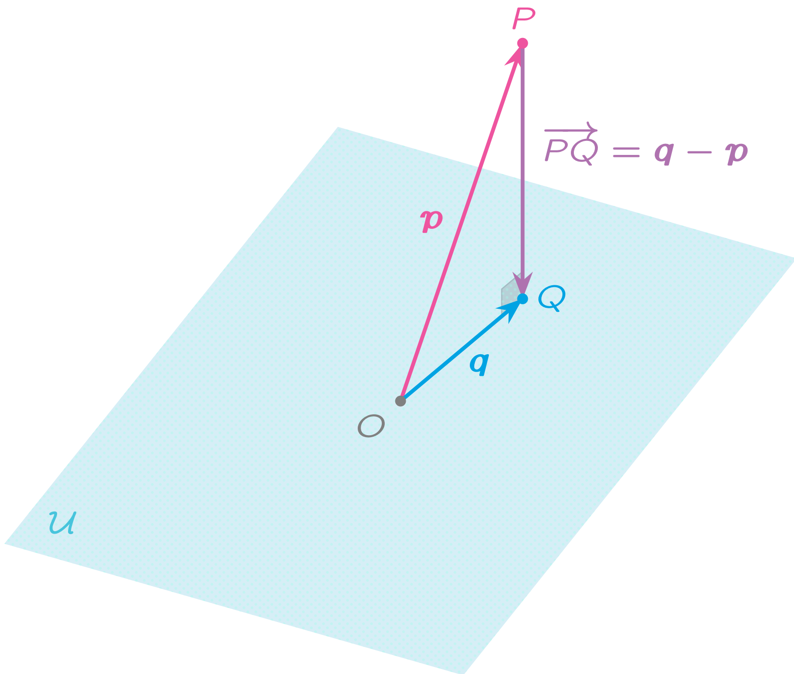
射影行列

直交射影と反射影

$\mathbb{R}^n$ 上の点 P に対して、部分空間 $\mathcal{U}$ 上の点 $Q \in \mathcal{U}$ のうち、$\overrightarrow{PQ}$ が $\mathcal{U}$ に直交するような点 Q を、点 P の $\mathcal{U}$ への直交射影あるいは正射影という

また、$\overrightarrow{QP}$ を点 Q の $\mathcal{U}$ からの反射影という

射影前のベクトルを $\boldsymbol{p}$、射影後のベクトルを $\boldsymbol{q}$ とすると、直交射影とは、$\boldsymbol{q}$ と $\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}$ が直交するように射影することである



このとき、次のような関係が成り立っている

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$
$$\overrightarrow{OQ} \in \mathcal{U}, \quad \overrightarrow{QP} \in \mathcal{U}^{\perp}$$

ここで、$\mathcal{U}^{\perp}$ は部分空間 $\mathcal{U}$ に直交するベクトルの全体であり、$\mathcal{U}$ の直交補空間と呼ばれる

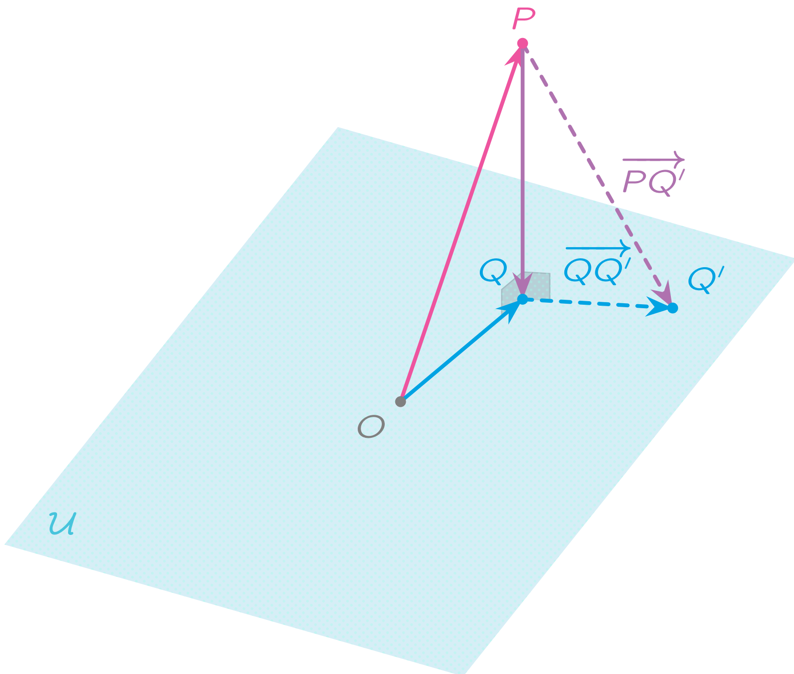
$\mathbb{R}^n$ の部分空間 $\mathcal{U}$ の直交補空間 $\mathcal{U}^{\perp}$ も、$\mathbb{R}^n$ の部分空間となる

$\overrightarrow{OP}$ は $\mathbb{R}^n$ の任意のベクトルを表すことから、$\mathbb{R}^n$ のベクトルは、$\mathcal{U}$ への射影 $\overrightarrow{OQ}$ と、$\mathcal{U}$ からの反射影 $\overrightarrow{QP}$ の和として表されることがわかる

このような表し方は一意的であり、$\overrightarrow{OP}$ の $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}^{\perp}$ への直和分解という

直交射影と最短距離

点 Q を $\mathcal{U}$ 上の別の点 Q' に移動した場合を考える



このとき、三平方の定理より、

$$\|\overrightarrow{PQ'}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QQ'}\|^2 > \|\overrightarrow{PQ}\|^2$$

となるから、

直交射影した点 Q は、

点 P から最短となる $\mathcal{U}$ 上の点

であることがわかる

射影行列

ベクトルの射影の概念は、射影行列を用いて表現できる。

任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ は、$\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$、$\boldsymbol{u}^\perp \in \mathcal{U}^\perp$ を用いて

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^\perp$$

と一意的に分解できる（直和分解）。

ここで、$\boldsymbol{x}$ の $\mathcal{U}$ への射影を表すのは、$\boldsymbol{u}$ である。

つまり、$\mathcal{U}$ への射影とは $\boldsymbol{x}$ のうち、$\mathcal{U}$ に含まれる成分 $\boldsymbol{u}$ だけを取り出す操作といえる。

そこで、部分空間 $\mathcal{U}$ へ射影する写像を $P_{\mathcal{U}}$ とすると、

$$P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$$

という、「$\boldsymbol{x}$ に $P_{\mathcal{U}}$ を作用させると $\boldsymbol{u}$ だけが残る」という形で書ける。

部分空間への射影

このとき、$\boldsymbol{x}$ がもともと $\mathcal{U}$ の元である場合は、$\boldsymbol{u}^{\perp} = \boldsymbol{o}$ の場合と考えて、

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}$$

つまり、射影しても変わらないので、

$$P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U})$$

である。

一方、$\boldsymbol{x}$ が $\mathcal{U}$ の直交補空間 $\mathcal{U}^{\perp}$ の元の場合は、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$ の場合と考えて、

$$P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{o} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp})$$

となる。

以上をまとめると、次のように書ける。

$$P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{o} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp}) \end{cases}$$

同様に、直交補空間 $\mathcal{U}^{\perp}$ へ射影する写像を $P_{\mathcal{U}^{\perp}}$ とした場合、

$$P_{\mathcal{U}^{\perp}}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{o} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^{\perp}) \end{cases}$$

とまとめられる。

射影行列の展開

$\mathbb{R}^n$ が $\mathcal{U}$ と $\mathcal{U}^{\perp}$ の直和に分解されることから、$\mathbb{R}^n$ の基底は $\mathcal{U}$ の基底と $\mathcal{U}^{\perp}$ の基底を合わせたものになる。

そこで、部分空間 $\mathcal{U}$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ を選ぶと、これを $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ に拡張できる。

ここで、$\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は $\mathcal{U}^\perp$ の正規直交基底になる。

このとき、

$$P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{o} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

という式は、$P_{\mathcal{U}}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する。

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{o}, \ldots, \boldsymbol{o}\}$$

同様に、

$$P_{\mathcal{U}^\perp}\boldsymbol{x} = \begin{cases} \boldsymbol{o} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}) \\ \boldsymbol{x} & (\boldsymbol{x} \in \mathcal{U}^\perp) \end{cases}$$

という式は、$P_{\mathcal{U}^\perp}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底

$$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

を、それぞれ次のように写像することを意味する。

$$\{\boldsymbol{o}, \ldots, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$$

ゆえに、正規直交基底による表現行列の展開より、$P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^\perp}$ は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{U}} &= \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_r\boldsymbol{u}_r^\top \\ P_{\mathcal{U}^\perp} &= \boldsymbol{u}_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1}^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n^\top \end{aligned}$$

$P_{\mathcal{U}}$ と $P_{\mathcal{U}^\perp}$ をそれぞれ、部分空間 $\mathcal{U}$、およびその直交補空間 $\mathcal{U}^\perp$ への射影行列と呼ぶ。

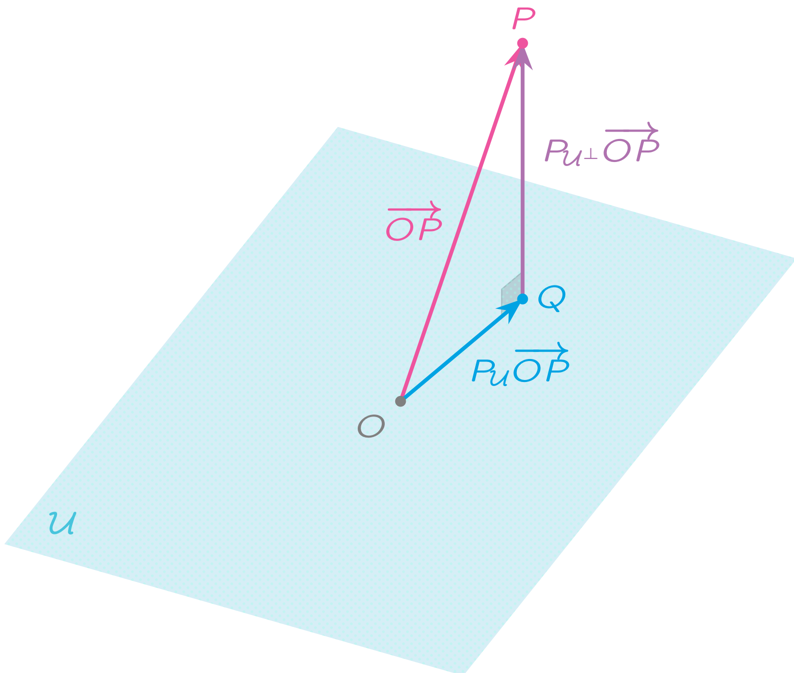
単位行列の射影行列への分解

直交射影と反射影の章で示した、

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$$
$$\overrightarrow{OQ} \in \mathcal{U}, \quad \overrightarrow{QP} \in \mathcal{U}^\perp$$

という関係は、射影行列を用いて、次のようにも表せる

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= P_{\mathcal{U}}\overrightarrow{OP} + P_{\mathcal{U}^\perp}\overrightarrow{OP} \\ &= (P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp})\overrightarrow{OP}\end{aligned}$$



$\mathbb{R}^n$ 内のすべての点 P に対して、$\overrightarrow{OP} = (P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp})\overrightarrow{OP}$ が成り立つことから、

$$P_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}^\perp} = E$$

が成り立っている

これはすなわち、単位行列 E が、部分空間 $\mathcal{U}$ その直交補空間 $\mathcal{U}^\perp$ への射影行列の和に分解できることを意味する

$$E = \underbrace{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_r\boldsymbol{u}_r^\top}_{P_{\mathcal{U}}} + \underbrace{\boldsymbol{u}_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1}^\top + \cdots + \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n^\top}_{P_{\mathcal{U}^\perp}}$$

この式により、単位行列 E 自体を、空間全体 $\mathbb{R}^n$ への射影行列と考えることもできる

射影行列とノルム

$P_{\mathcal{U}}\overrightarrow{OP}$ と $P_{\mathcal{U}^\perp}\overrightarrow{OP}$ は直交するから、三平方の定理より、

$$\|\overrightarrow{OP}\|^2 = \|P_{\mathcal{U}}\overrightarrow{OP}\|^2 + \|P_{\mathcal{U}^\perp}\overrightarrow{OP}\|^2$$

がいえる

ゆえに、任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{OP}$ に対して、

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|P_{\mathcal{U}}\boldsymbol{x}\|^2 + \|P_{\mathcal{U}^\perp}\boldsymbol{x}\|^2$$

が成り立つ

射影行列の冪等性と対称性

「一度射影した点をもう一度射影しても変化しない」という性質は、次のような数式として表現できる

射影行列の冪等性　射影行列 $P_{\mathcal{U}}$ は冪等である

$$P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$$

証明

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{U}}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top\right)\left(\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{u}_j^\top\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{u}_j^\top \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{u}_i (\boldsymbol{u}_i^\top \boldsymbol{u}_j) \boldsymbol{u}_j^\top \\
&= \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} \delta_{ij} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_j^\top
\end{aligned}$$

ここで、δ_{ij} を含むことから、$i = j$ の場合のみ項が残り、

$$P_{\mathcal{U}}^2 = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top = P_{\mathcal{U}}$$

が得られる ■

この $P_{\mathcal{U}}^2 = P_{\mathcal{U}}$ という式は、一般の（必ずしも直交射影でない）射影の定義として用いられる

次の性質は、射影が直交射影であることを示すものである

射影行列の対称性　射影行列 $P_{\mathcal{U}}$ は、対称行列である

$$P_{\mathcal{U}}^\top = P_{\mathcal{U}}$$

証明

$$P_{\mathcal{U}}^\top = \left(\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top \right)^\top$$

和の転置は転置の和であることを用いて、

$$P_{\mathcal{U}}^\top = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top)^\top$$

また、積の転置は転置の積だが、積の順序が入れ替わることに注意して、

$$P_{\mathcal{U}}^\top = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{u}_i^\top)^\top \boldsymbol{u}_i^\top$$

転置の転置をとると元に戻るので、

$$P_{\mathcal{U}}^\top = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i^\top = P_{\mathcal{U}}$$

が得られる　■

射影行列は冪等かつ対称であるが、その逆も成り立つ

対称性と冪等性による射影行列の特徴づけ　対称かつ冪等な行列は、ある部分空間への射影行列となる

証明

n 次対称行列 P は、n 個の実数の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を持つ

これらに属する固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ とすると、$\boldsymbol{u}_i$ は互いに直交する

固有値と固有ベクトルの関係から、

$$P\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$$

両辺に左から P をかけると、

$$P^2\boldsymbol{u}_i = \lambda_i P\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \cdot \lambda_i \boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$$
$$\therefore \quad P^2\boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$$

ここで、P は冪等なので、$P^2 = P$ が成り立つ

$$P^2\boldsymbol{u}_i = P\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$$

これを用いると、

$$\lambda_i \boldsymbol{u}_i = \lambda_i^2 \boldsymbol{u}_i$$

固有ベクトル $\boldsymbol{u}_i$ は零ベクトルではないので、

$$\lambda_i = \lambda_i^2$$

よって、

$$\begin{aligned} \lambda_i^2 - \lambda_i &= 0 \\ \lambda_i(\lambda_i - 1) &= 0 \\ \lambda_i &= 0, 1 \end{aligned}$$

すなわち、固有値は 0 か 1 のいずれかである

そこで、

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 1$$
$$\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

とおくと、

$$P\boldsymbol{u}_i = \begin{cases} \boldsymbol{u}_i & (i = 1, \ldots, r) \\ 0 & (i = r+1, \ldots, n) \end{cases}$$

よって、P は $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r\}$ の張る部分空間への射影行列である ■

超平面

[Todo 1:]

射影長

[Todo 2:]

Zebra Notes

Type	Number
todo	2