



線形写像の像と列空間

ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ の張る空間の記号を用いると、ベクトルの張る空間と $\text{Im } A$ に関する考察は次のようにまとめられる。

$$\text{Im } A = \langle \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$$

つまり、 A の列ベクトルが張る空間が $\text{Im } A$ である。

このことから、 $\text{Im } A$ を A の列空間と呼ぶこともある。

ref: 行列と行列式の基礎 p96~97、ref: プログラミングのための線形代数 p135



線形写像の像と表現行列の列空間の一致 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ の像 $\text{Im } f$ は、 f の表現行列の列ベクトルが張る空間である。

証明

線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ の表現行列を $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$ とするとき、 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \dots + v_n\mathbf{a}_n$$

なので、

$$\mathbf{u} \in \text{Im } f$$

$$\iff \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \mathbf{u} = f(\mathbf{v})$$

$$\iff \exists v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \mathbf{u} = v_1\mathbf{a}_1 + \dots + v_n\mathbf{a}_n$$

$$\iff \mathbf{u} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$$

したがって、


$$\text{Im } f = \text{Im } A = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \rangle$$

が成り立つ。 ■

上述の証明の

$$\mathbf{u} \in \text{Im } f \iff \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \mathbf{u} = f(\mathbf{v})$$

という変形に着目すると、この定理は次のように線型方程式の文脈で言い換えられる。

 線形写像の像空間と方程式の解の存在 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$\mathbf{b} \in \text{Im } A \iff \text{方程式 } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ が解を持つ}$$

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ が $\text{Im } A$ に属するかどうかを調べるためには階数による判定条件が使える。




線形写像の像空間の基底

線形写像の像空間は表現行列の列ベクトルによって張られるが、列ベクトルの集合は一般には線型独立ではない。

ref: 行列と行列式の基礎 p96~97

像空間の基底を得るためには、列ベクトルの部分集合を考えるのが自然である。

 主列ベクトルによる像空間の基底の構成 行列 A の主列ベクトルの集合は $\text{Im } A$ の基底である。

 証明



[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p97 定理 3.1.10]

.....

Zebra Notes

Type	Number
todo	1