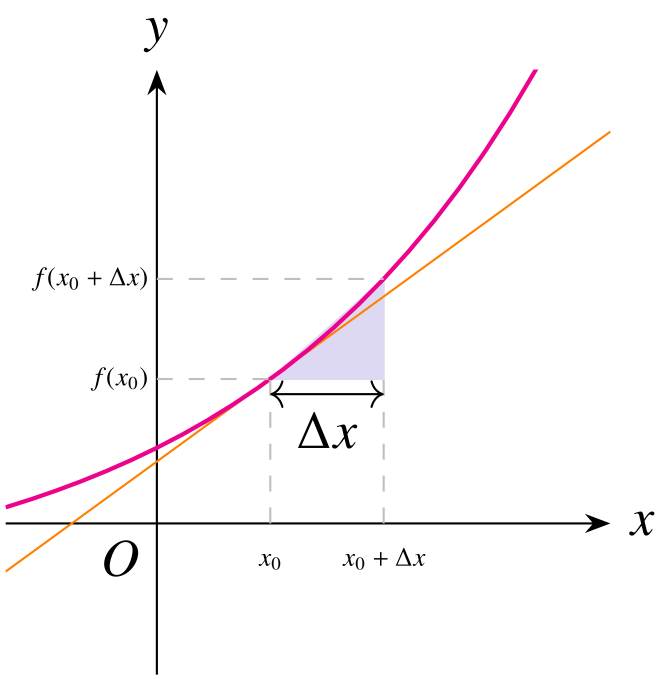
0.1　1 変数関数の微分

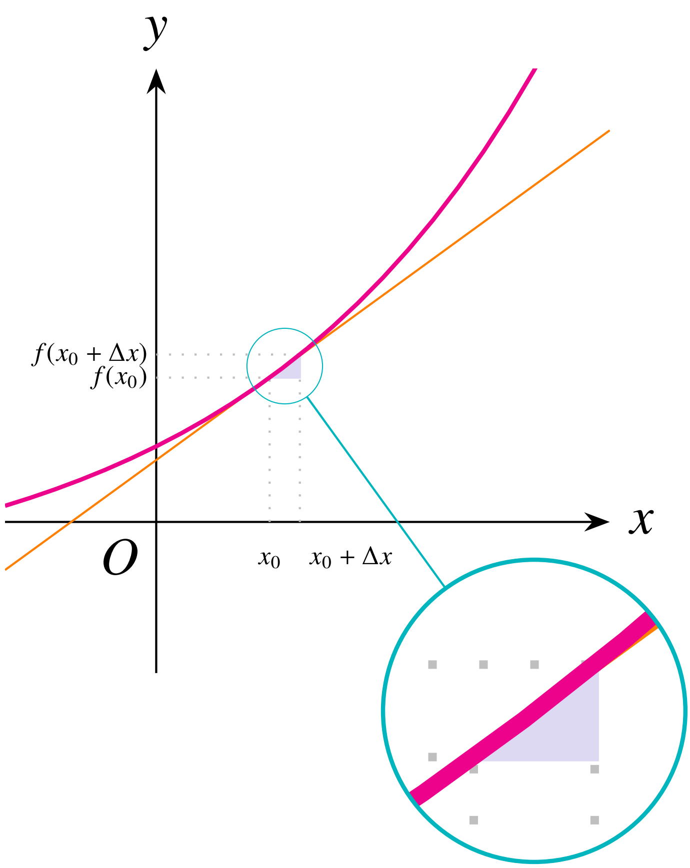
微分とは、複雑な問題も「拡大して見たら簡単に見える（かもしれない）」という発想で、わずかな変化に着目して入力と出力の関係（関数）を調べる手法といえる。

0.1.1　接線：拡大したら直線に近似できる

関数 $y = f(x)$ について、引数の値を $x = x_0$ からわずかに増加させて、$x = x_0 + \Delta x$ にした場合の出力の変化を考える。



このとき、増分の幅 Δx を狭くしていく（Δx の値を小さくしていく）と、$x = x_0$ 付近において、関数 $y = f(x)$ のグラフは直線にほとんど重なるようになる。



このように、関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

$$f(x) \simeq a(x - x_0) + b$$

という直線に近似することができる。

ここで、$f(x_0)$ の値を考えると、

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a(x_0 - x_0) + b \\ &= a \cdot 0 + b \\ &= b \end{aligned}$$

であるから、実は $b = f(x_0)$ である。

一方、a はこの直線の傾きを表す。

そもそも、傾きとは、x が増加したとき、y がどれだけ急に（速く）増加するかを表す量である。

関数のグラフを見ると、急激に上下する箇所もあれば、なだらかに変化する箇所もある。

つまり、ある点でグラフにぴったりと沿う直線（接線）を見つけたとしても、その傾きは場所によって異なる。

そこで、「傾きは位置 x の関数」とみなして、次のように表現しよう。

$$a = f'(x)$$

これで、先ほどの直線の式を完成させることができる。

関数の各点での直線による近似

関数 $f(x)$ は、ある点 x_0 の付近では、

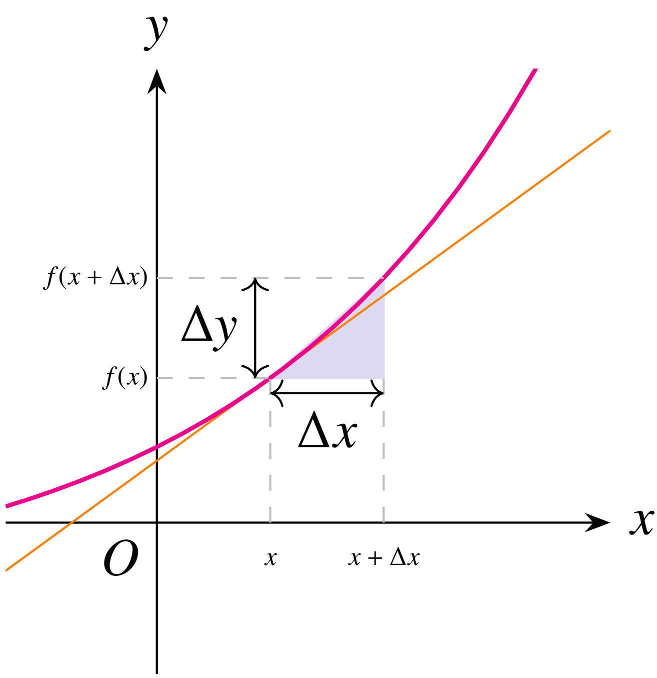
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

という傾き $f'(x)$ の直線に近似できる。

0.1.2 接線の傾きとしての導関数

傾きは位置 x の関数 $f'(x)$ としたが、この関数がどのような関数なのか、結局傾きを計算する方法がわかっていない。

直線の傾きは x と y の増加率の比として定義されているから、まずはそれぞれの増加率を数式で表現しよう。



この図から、y の増加率 Δy は次のように表せることがわかる。

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

この両辺を Δx で割ると、x の増加率 Δx と y の増加率 Δy の比率が表せる。

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

図では Δx には幅があるが、この幅を限りなく 0 に近づけると、幅というより点になる。
つまり、$\Delta x \to 0$ とすれば、$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は任意の点 x での接線の傾きとなる。
「任意の点 x での傾き」も x の関数であり、この関数を導関数と呼ぶ。

導関数

関数 $f(x)$ の任意の点 x における接線の傾き（増加の速さ）を表す関数を導関数といい、次のように定義する。

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

0.1.3 微分とその関係式

微分　関数 $f(x)$ から、その導関数 $f'(x)$ を求める操作を微分という。

関数のグラフから離れて、微分という「計算」を考えるにあたって、先ほどの導関数の定義式よりも都合の良い表現式がある。

$x \to 0$ とした後の Δx を dx と書くことにして、$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}$ を取り払ってしまおう。

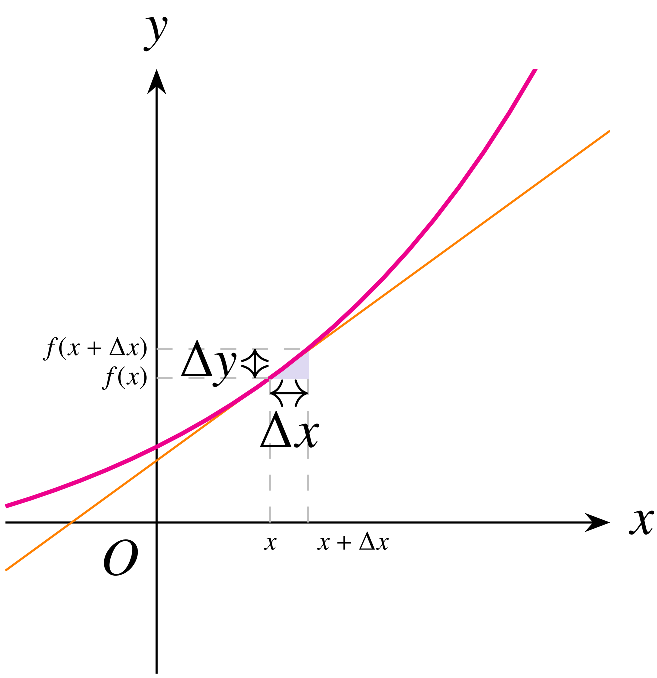
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} && \text{両辺 } \times dx \\ f'(x)dx &= f(x+dx)-f(x) && f(x) \text{ を移項} \\ f'(x)dx + f(x) &= f(x+dx) \end{aligned}$$

微分の関係式

$$f(x+dx) = f(x) + f'(x)dx$$

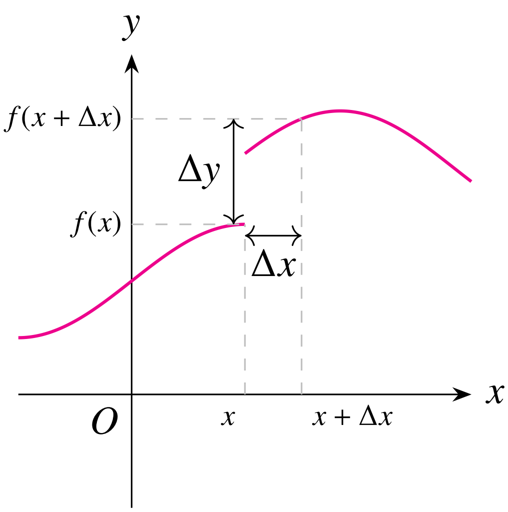
0.1.4 不連続点と微分可能性

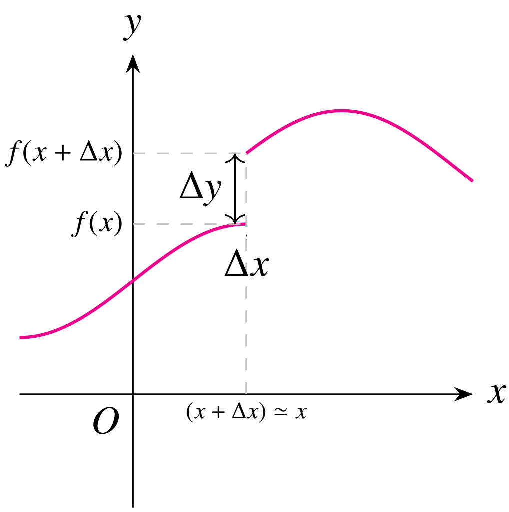
点 x において連続な関数であれば、幅 Δx を小さくすれば、その間の変化量 Δy も小さくなるはずである。



しかし、不連続な点について考える場合は、そうはいかない。

下の図を見ると、Δx の幅を小さくしても、Δy は不連続点での関数の値の差の分までしか小さくならない。





このような不連続点においては、どんなに拡大しても、関数のグラフが直線にぴったりと重なることはない。

「拡大すれば直線に近似できる」というのが微分の考え方だが、不連続点ではこの考え方を適用できないのだ。

関数の不連続点においては、微分という計算を考えることがそもそもできない。

ある点での関数のグラフが直線に重なる（微分可能である）ためには、$\Delta x \to 0$ としたときに $\Delta y \to 0$ となる必要がある。

0.1.5 導関数のさまざまな記法

微分を考えるときは、$\Delta x \to 0$ としたときに $\Delta y \to 0$ となる前提のもとで議論する。

$\Delta x \to 0$ とした結果を dx、$\Delta y \to 0$ の結果を dy とすると、ある点 x での接線の傾きは、次のようにも表現できる。

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

この接線の傾きが x の関数であることを表現したいときは、次のように書くこともある。

$$\frac{dy}{dx}(x)$$

これも一つの導関数（位置に応じた接線の傾きを表す関数）の表記法である。

この記法は、どの変数で微分しているかがわかりやすいという利点がある。

導関数のライプニッツ記法

次のような記号はいずれも、関数 $y = f(x)$ の導関数を表す。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$$

特に、$\frac{d}{dx}f(x)$ という記法は、$\frac{d}{dx}$ の部分を微分操作を表す演算子として捉えて、「関数 $f(x)$ に微分という操作を施した」ことを表現しているように見える。

微分演算子

関数を微分するという操作を表現する演算子を微分演算子という。

例えば、次のような記号で表される。

$$\frac{d}{dx}$$

ところで、これまで使ってきた $f'(x)$ という導関数の記法にも、名前がついている。

導関数のニュートン記法

次の記号は、関数 $y = f(x)$ の導関数を表す。

$$f'(x)$$

この記法は、「f という関数から導出された関数が f' である」ことを表現している。

導関数はあくまでも関数 f から派生したものであるから、f という文字はそのまま、加工されたことを表すために $'$ をつけたものと解釈できる。

0.1.6 微分の性質

微分の関係式を使うことで、微分に関する有用な性質を導くことができる。

REVIEW

微分の関係式

$$f(x+dx) = \underbrace{f(x)}_{\text{元の関数}} + \underbrace{f'(x)}_{\text{導関数}} dx$$

関数の一次結合の微分

$\alpha f(x) + \beta g(x)$ において、x を dx だけ微小変化させてみる。

$$\begin{aligned} \alpha f(x+dx) + \beta g(x+dx) &= \alpha \{f(x) + f'(x)dx\} + \beta \{g(x) + g'(x)dx\} \\ &= \underbrace{\alpha f(x) + \beta g(x)}_{\text{元の関数}} + \{ \underbrace{\alpha f'(x) + \beta g'(x)}_{\text{導関数}} \}dx \end{aligned}$$

微分の線形性

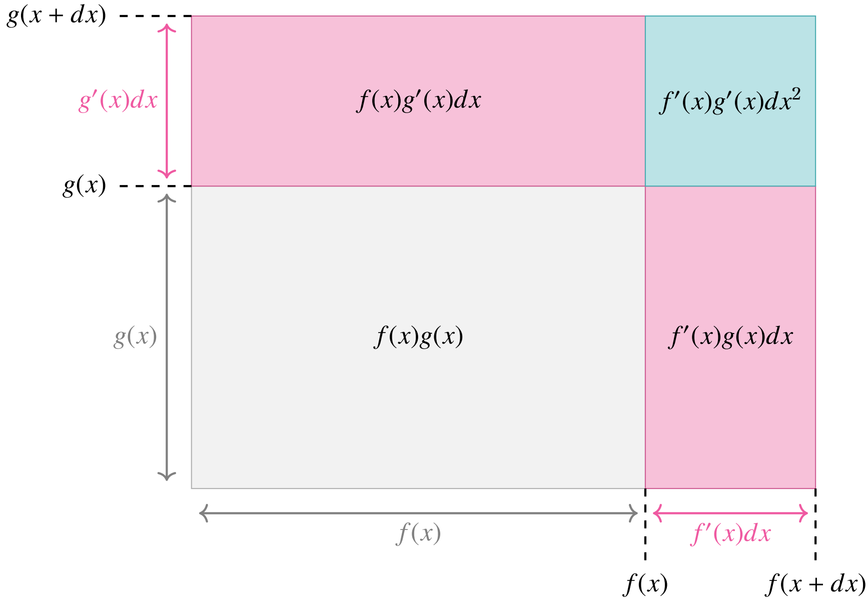
$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

関数の積の微分

$f(x)g(x)$ において、x を dx だけ微小変化させてみる。

$$
\begin{aligned}
f(x+dx)g(x+dx) &= \{f(x)+f'(x)dx\}\{g(x)+g'(x)dx\} \\
&= f(x)g(x)+f'(x)g(x)dx+f(x)g'(x)dx+f'(x)g'(x)dx^2 \\
&= f(x)g(x)+\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx+\overbrace{\boxed{f'(x)g'(x)dx^2}}^{\textbf{2}\text{ 次以上の微小量}}
\end{aligned}
$$

ここで、dx^2 は、dx より速く 0 に近づくので無視できる。
荒く言ってしまえば、dx でさえ微小量なのだから、dx^2 なんて存在しないも同然だと考えてよい。
このことは、次の図を見るとイメージできる。



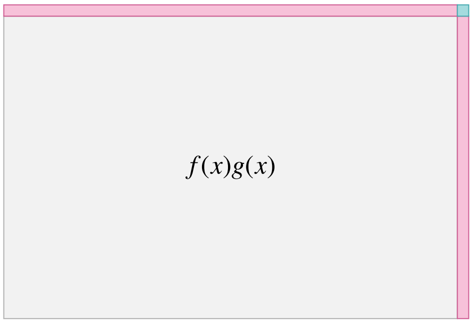
$dx \to 0$ のとき $dy \to 0$ となる場合に微分という計算を定義するのだから、dx を小さくしていくと、dy にあたる $f(x+dx)-f(x)$（これは $f'(x)dx$ と等しい）も小さくなっていく。
同様にして、$g(x+dx)-g(x)$（これは $g'(x)dx$ と等しい）も小さくなっていく。

REVIEW

微分の関係式 $f(x+dx)=f(x)+f'(x)dx$ より、

$$f'(x)dx = f(x+dx)-f(x)$$

dx を小さくした場合を図示すると、



2 次以上の微小量

$f'(x)g'(x)dx^2$ に相当する左上の領域は、ほとんど点になってしまうことがわかる。

このように、dx^2 の項は無視してもよいものとして、先ほどの計算式は次のようになる。

元の関数　導関数

$$f(x+dx)g(x+dx) = f(x)g(x) + \{ f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \}dx$$

微分のライプニッツ則

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

0.1.7　冪関数の微分

具体的な関数の導関数も、微分の関係式をもとに考えることができる。
まずは、基本的な例として、冪関数 $y = x^n$ の微分を考えてみよう。

$y = x^2$ の微分

$y = f(x) = x^2$ において、x を dx だけ微小変化させると、y は dy だけ変化するとする。
すると、微分の関係式は $y + dy = f(x+dx) = (x+dx)^2$ となるが、これを次のように展開して考える。

$$y + dy = (x+dx)(x+dx)$$

右辺の $(x+dx)(x+dx)$ からは、

- x^2 の項が 1 つ
- xdx の項が 2 つ
- dx^2 の項が 1 つ

現れることになる。

数式で表すと、

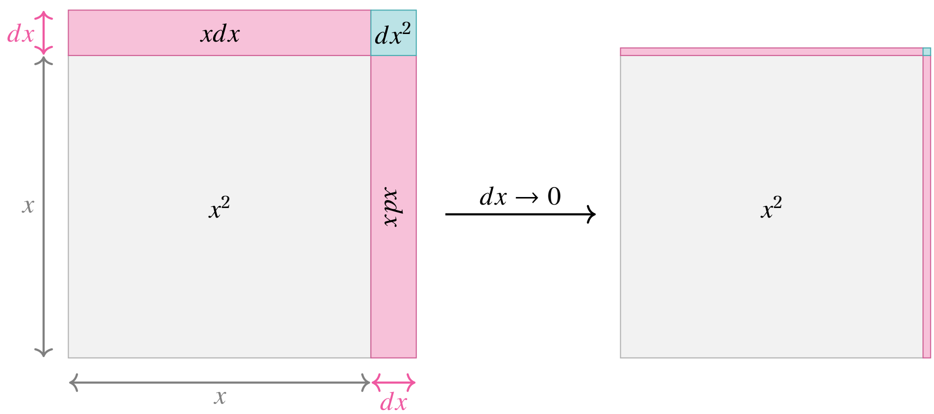
$$\underbrace{\boxed{y}}_{\text{同じ}} + dy = \boxed{x^2} + 2xdx + dx^2$$

ここで $y = x^2$ なので、左辺の y と右辺の x^2 は相殺される。

$$dy = 2xdx + \overbrace{\boxed{dx^2}}^{\text{高次の微小量}}$$

さらに、dx^2 の項は無視することができる。

なぜなら、dx を小さくすると、dx^2 は dx とは比べ物にならないくらい小さくなってしまうからだ。



というわけで、次のような式が得られる。

$$dy = 2xdx$$

よって、$y = x^2$ の導関数は、$y' = 2x$ となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$y = x^3$ の微分

同じように、$y = x^3$ の微分を考えてみよう。

$$y + dy = (x + dx)(x + dx)(x + dx)$$

右辺の $(x + dx)(x + dx)(x + dx)$ からは、

- x^3 の項が 1 つ
- x^2dx の項が 3 つ
- dx^3 の項が 1 つ

現れることになる。

$$\boxed{y} + dy = \boxed{x^3} + 3x^2dx + dx^3$$

同じ

ここで $y = x^3$ なので、左辺の y と右辺の x^3 は相殺される。

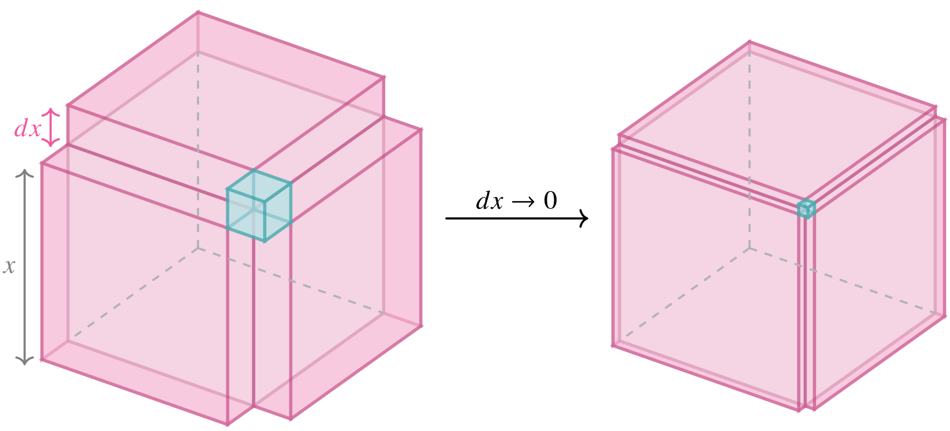
$$dy = 3x^2dx + \overset{\text{高次の微小量}}{\boxed{dx^3}}$$

さらにここでは、dx^3 の項を無視することができる。

次の図を見てみよう。

各辺 dx の立方体は、dx を小さくすると、ほぼ点にしか見えないほど小さくなる。

つまり、各辺 dx の立方体の体積 dx^3 は、考慮する必要がない。



というわけで、$y = x^3$ の導関数は、$y' = 3x^2$ となることがわかった。

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$y = x^n$ の微分（n が自然数の場合）

n が自然数だとすると、$y = x^n$ の微分は、$y = x^2$ や $y = x^3$ の場合と同じように考えられる。

$$y + dy = \underbrace{(x + dx)(x + dx) \cdots (x + dx)}_{n\text{ 個}}$$

右辺の $(x + dx)(x + dx) \cdots (x + dx)$ を展開しようすると、次のような 3 種類のかけ算が発生する。

- x どうしのかけ算
- x と dx のかけ算
- dx どうしのかけ算

つまり、右辺からは、

- x^n の項が 1 つ
- $x^{n-1}dx$ の項が n 個
- dx^n の項が 1 つ

という項が現れることになる。
そして、x^n は左辺の y と相殺され、dx^n の項は高次の微小量として無視できる。
すると、残るのは次のような式になるだろう。

$$dy = nx^{n-1}dx$$

この式は、$y = \alpha x$ という直線の式によく似ている。
高次の dx の項 dx^n を無視し、1 次の dx の項だけ残したのは、微分という計算が微小範囲における直線での近似であるからだ。
あくまでも微小範囲での直線の式であることを表すために、x, y を dx, dy として、$dy = \alpha dx$ という形の式になっていると考えればよい。

自然数の冪を持つ冪関数の導関数

n が自然数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$y = x^n$ の微分（n が整数の場合）

指数法則を使うことで、n が負の整数の場合にも拡張することができる。

まずは、$y = x^{-1}$ の微分を考えてみよう。

指数法則より、$y = x^{-1}$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \\ xy &= 1 \end{aligned} \qquad \text{両辺 } \times x$$

微小変化を加えた微分の関係式を作って、次のように展開していく。

$$(x + dx)(y + dy) = 1$$

$$\boxed{xy} + xdy + ydx + \underbrace{\boxed{dydx}}_{\text{高次の微小量}} = \boxed{1}$$

同じ

ここで、微小量の掛け合わせである $dydx$ は無視できるほど小さい。

また、$y = \dfrac{1}{x}$ より、$xy = 1$ なので、左辺の xy と右辺の 1 は相殺される。

すると、残った式は、

$$\begin{aligned} xdy + ydx &= 0 && \text{ydx を移項} \\ xdy &= -ydx && \text{両辺 } \boldsymbol{\nabla}\cdot dx \\ x\frac{dy}{dx} &= -y && \text{両辺 } \boldsymbol{\nabla}\cdot x \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} \end{aligned}$$

y が残ってしまっているので、$y=\dfrac{1}{x}$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{x^2} \\
&= -x^{-2}
\end{aligned}
$$

これは、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$ において、$n=-1$ を代入したものになっている。

n が任意の負の整数の場合も、同様に考えられる。

$y=x^{-n}$ を、$x^n y=1$ として、

$$\underbrace{(x+dx)(x+dx)\cdots(x+dx)}_{n\text{ 個}}\times(y+dy)=1$$

$$
\begin{aligned}
(x^n+nx^{n-1}dx+\overset{\text{高次の微小量}}{\boxed{dx^n}})\times(y+dy)&=1 \\
(x^n+nx^{n-1}dx)\times(y+dy)&=1
\end{aligned}
\qquad \text{高次の微小量を無視}
$$

$$\boxed{x^n y}+x^n dy+nx^{n-1}ydx+\overset{\text{高次の微小量}}{\boxed{nx^{n-1}dxdy}}=\boxed{1}$$

同じ

相殺＆無視

$$x^n dy+nx^{n-1}ydx=0$$

移項してさらに整理すると、

$$
\begin{aligned}
x^n dy &= -nx^{n-1}ydx && \text{両辺 } \nabla\cdot dx \\
x^n\frac{dy}{dx} &= -nx^{n-1}y && \text{両辺 } \times x^{-n} \\
\frac{dy}{dx} &= -nx^{n-1}x^{-n}y && y=x^{-n} \\
&= -nx^{n-1}x^{-n}x^{-n} && \text{指数法則 } x^m x^n = x^{m+n} \\
&= -nx^{-n-1}
\end{aligned}
$$

これもやはり、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$ において、n を $-n$ に置き換えたものになっている。

つまり、自然数（正の整数）だけでなく、負の整数も許容して、次のことがいえる。

整数の冪を持つ冪関数の導関数

n が整数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$y = x^n$ の微分（n が実数の場合）

n が有理数の場合はどうだろうか。実はこれも、指数法則によって拡張することができる。

m と n はどちらも自然数として、$y = x^{\frac{m}{n}}$ の微分を考える。

まず、$y = x^{\frac{m}{n}}$ は、$y^n = x^m$ とまったく同じ式である。

$$\begin{aligned} y^n &= x^m \\ y &= x^{\frac{m}{n}} \end{aligned} \quad \text{両辺 } \frac{1}{n} \text{ 乗}$$

というわけで、$y^n = x^m$ を微小変化させて、展開してみよう。

$$\underbrace{(y+dy)(y+dy)\cdots(y+dy)}_{n\text{ 個}} = \underbrace{(x+dx)(x+dx)\cdots(x+dx)}_{m\text{ 個}}$$

ここで、n と m は自然数なのだから、自然数冪のときと同じように考えて、次のような式が残ることになる。

$$ny^{n-1}dy = mx^{m-1}dx$$

よって、$\dfrac{dy}{dx}$ の式の y を含まない形を目指すと、

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{mx^{m-1}}{ny^{n-1}} \\
&= \frac{mx^{m-1}}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}} && y = x^{\frac{m}{n}} \\
&= \frac{mx^{m-1}}{nx^{m-\frac{m}{n}}} \\
&= \frac{mx^{m}x^{-1}}{nx^{m}x^{-\frac{m}{n}}} && \text{指数法則 } x^{a+b} = x^a x^b \\
&= \frac{mx^{-1}}{nx^{-\frac{m}{n}}} && x^m \text{ で約分} \\
&= \frac{m}{n} \cdot \frac{x^{-1}}{x^{-\frac{m}{n}}} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{-1-(-\frac{m}{n})} && \text{指数法則 } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\
&= \frac{m}{n} \cdot x^{-1+\frac{m}{n}} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}
\end{aligned}
$$

これは、冪が自然数の場合の冪関数の微分 $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$ において、n を $\frac{m}{n}$ に置き換えたものになっている。

つまり、整数だけでなく、有理数に対しても同様の導関数の式が成り立つ。

ここまで来ると、無理数はどうだろうか？という疑問が生まれるが、無理数への拡張は指数法則では対応できない。

無理数に対しては、極限操作によって同様の導関数の式を導くことができ、実数全体に対して同じ導関数の式が成り立つことが示される。

冪関数の導関数

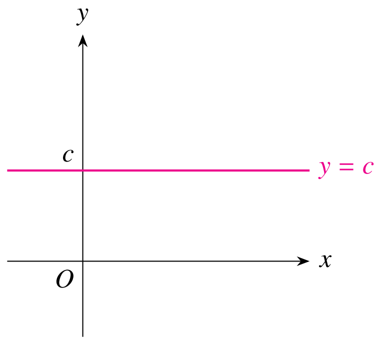
n が実数のとき、$y = x^n$ の導関数は次のようになる。

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

0.1.8 定数関数の微分

常に一定の値 c を返す定数関数 $f(x) = c$ の微分はどうなるだろうか。

関数のグラフを描いて考えてみよう。



定数関数のグラフは、x 軸に対して平行な直線であり、この直線の傾きは見るからに 0 である。実際、導関数の定義に従って計算することで、定数関数の導関数は 0 になることを確かめられる。

REVIEW

導関数の定義

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

どの点 x においても $f(x)$ が c を返すということは、$f(x + \Delta x)$ も c であるため、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、定数関数 $f(x) = c$ の微分の結果は c に依存せず、常に 0 になる。

定数関数の微分

常に定数 c の値をとる定数関数 $f(x) = c$ は、微分すると 0 になる。

$$\frac{d}{dx} c = 0$$

0.1.9　合成関数の微分

合成関数の微分の一般的な式は、いろいろな関数の微分を考える上で重要な公式である。

関数の微小変化量

関数 $f(x)$ において、変数 x を dx だけ微小変化させた式は、これまで何度も登場した。

$$f(x+dx) = f(x) + \underbrace{\boxed{f'(x)dx}}_{}$$

増えた分

この式は、「x を dx だけ微小変化させることで、関数 f の値は $f'(x)dx$ だけ増加した」と捉えることもできる。

言い換えれば、関数 f の微小変化量は $f'(x)dx$ だということだ。

変化量という観点で眺めるには、次のように移項した式がわかりやすいかもしれない。

$$\overset{\text{区間 } dx \text{ での変化}}{\boxed{f(x+dx) - f(x)}} = \overset{\text{変化量}}{\boxed{f'(x)dx}}$$

関数 f の微小変化量 $f'(x)dx$ を、df と表すことにしよう。

合成関数の微分の関係式

今回はさらに、$t = f(x)$ を関数 $g(t)$ に放り込むことを考える。

$g(t)$ についても、次のような微分の関係式が成り立つはずだ。

$$g(t+dt) = g(t) + g'(t)dt$$

合成関数 $g(f(x))$ を作るため、$t = f$（引数 (x) を省略して書いた関数 $f(x)$）を代入する。

$$g(f+df) = g(f) + g'(f)df$$

f を $f(x)$ に、df を $f'(x)dx$ に書き戻すと、

$$g(f(x) + f'(x)dx) = g(f(x)) + g'(f(x))f'(x)dx$$

となり、左辺の $g()$ の中身 $f(x) + f'(x)dx$ は $f(x+dx)$ と書き換えられるので、次の式を得る。

$$g(f(x+dx)) = \overset{\text{元の関数}}{\boxed{g(f(x))}} + \overset{\text{導関数}}{\boxed{g'(f(x))f'(x)}}\,dx$$

合成関数の微分（ニュートン記法による表現）

合成関数 $g(f(x))$ の微分は、次の式で表される。

$$(g(f(x)))' = f'(x)g'(f(x))$$

連鎖律としての表現

ニュートン記法による表現はなかなかに覚えづらい式に見えるが、ライプニッツ記法を使って書き直すと、実は単純な関係式になっている。

- $(g(f(x)))'$ は、$g(f(x))$ を x で微分したもの：$\dfrac{d}{dx}g(f(x))$
- $f'(x)$ は、$f(x)$ を x で微分したもの：$\dfrac{d}{dx}f(x)$
- $g'(f(x))$ は、$g(t)$ を t で微分したもの $\dfrac{d}{dt}g(t)$ に、$t = f(x)$ に代入したもの：$\dfrac{d}{df}g(f(x))$

として書き直すと、

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{df}g(f(x))$$

さらに、引数を省略して書くと、

$$\frac{dg}{dx} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dg}{df}$$

これは、df を約分できると考えたら、当たり前の式になっている。

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\cancel{df}}{dx} \cdot \frac{dg}{\cancel{df}}$$

合成関数の微分（連鎖律：ライプニッツ記法による表現）

$y = f(x)$、$z = g(y)$ という関係があるとき、次の式が成り立つ。

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

これは、x が微小変化すると y も微小変化し、さらに連鎖して z も微小変化するという関係から、連鎖律と呼ばれる。

0.1.10　逆関数の微分

関数 $y = f(x)$ の逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の微分も、ライプニッツ記法で考えると、ごく当たり前の式として導出できる。

ネタバレすると、次の式がそのまま逆関数の微分を表すものになっている。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

$\dfrac{dy}{dx}$ を $f'(x)$ と表記するなら、

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

である。この発想を納得するために、もう少し詳しく見ていこう。

* * *

$y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は、ライプニッツ記法では $\dfrac{dy}{dx}$ と表記される。

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

ライプニッツ記法 $\dfrac{dy}{dx}$ には、「y で表される関数を x で微分する」という意味がこめられている。

ならば、逆関数 $x = f^{-1}(y)$ の導関数は、「x で表される関数を y で微分する」という意味で、$\dfrac{dx}{dy}$ と表記できる。

$$\frac{dx}{dy} = (f^{-1})'(y)$$

ここで、$\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ という式から、次の等式も成り立つと考えられる。

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

これは逆関数の導関数になっているが、逆関数が y の関数なのだから、その導関数 $\dfrac{dx}{dy}$ も y の関数であってほしい。

そこで、x を消すために $x = f^{-1}(y)$ を代入することで、逆関数の導関数を完成させる。

$$\frac{dx}{dy} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}$$

逆関数の微分

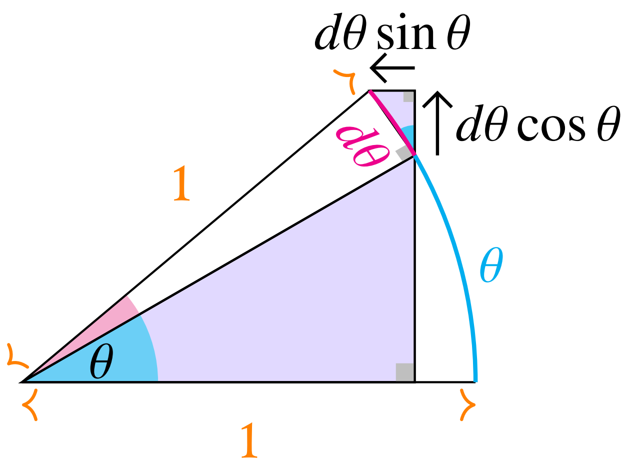
逆関数の導関数は、元の関数の導関数の逆数になる。

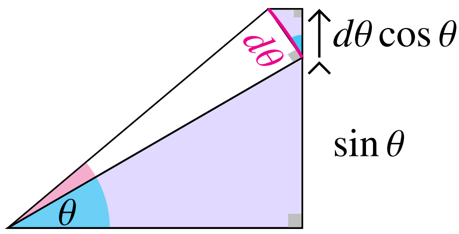
$$\frac{dx}{dy} = \left.\frac{1}{f'(x)}\right|_{x=f^{-1}(y)}$$

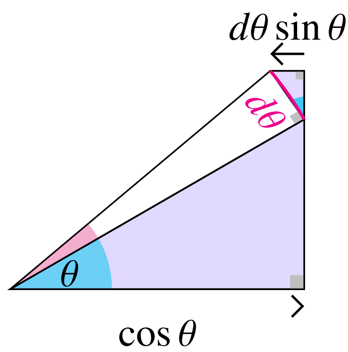
ここで、$\Big|_{x=f^{-1}(y)}$ は、その直前の式を計算した後に、$x = f^{-1}(y)$ を代入することを意味する。

0.1.11　三角関数の微分

角度 θ を $d\theta$ だけ微小変化させたときの、三角形の高さの変化が $\sin\theta$ の微小変化であり、底辺の長さの変化が $\cos\theta$ の微小変化である。







sin の微分

三角形の高さは、$d\theta\cos\theta$ だけ増えているので、

$$\sin(\theta + d\theta) = \underbrace{\sin\theta}_{\text{元の関数}} + \underbrace{\cos\theta}_{\text{導関数}}\, d\theta$$

sin 関数の微分

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$$

cos の微分

三角形の底辺の長さは、$d\theta\sin\theta$ だけ減っているので、

$$\cos(\theta + d\theta) = \cos\theta - \sin\theta d\theta$$

$$\cos(\theta + d\theta) = \underbrace{\cos\theta}_{\text{元の関数}} + (\underbrace{-\sin\theta}_{\text{導関数}})d\theta$$

cos 関数の微分

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$

0.1.12　ネイピア数

指数関数を定義した際に、「どんな数も 0 乗したら 1 になる」と定義した。

つまり、指数関数 $y = a^x$ において、$x = 0$ での関数の値は 1 である。

ここでさらに、$x = 0$ でのグラフの傾きも 1 となるような a を探し、その値をネイピア数と呼ぶことにする。

ネイピア数（自然対数の底）

指数関数 $y = a^x$ において、$x = 0$ での接線の傾きが 1 となるような底 a の値をネイピア数と呼び、e と表す。

この定義では、「$x = 0$ では関数の値も傾きも等しく 1 になる」という、$x = 0$ での振る舞いにしか言及していない。

だが、実はネイピア数を底とする指数関数は、「微分しても変わらない（すべての x において、関数の値と傾きが一致する）」という性質を持つ。

0.1.13　ネイピア数を底とする指数関数の微分

指数関数 $y = e^x$ の微分は、導関数の定義から次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot e^{\Delta x} - e^x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \cdot (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
&= e^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}
\end{aligned}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ は x によらない定数であり、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{0+\Delta x} - e^0}{\Delta x}$$

というように、これは $x = 0$ における傾き（導関数に $x = 0$ を代入したもの）を表している。

そもそも、ネイピア数 e の定義は「$x = 0$ での e^x の傾きが 1」というものだったので、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

となり、「e^x は微分しても変わらない」という性質が導かれる。

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

ネイピア数を底とする指数関数の微分

ネイピア数を底とする指数関数は、微分しても変わらない関数である。

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

指数が定数倍されている場合

$y = e^{kx}$ のように、指数が定数倍（k 倍）されている場合は、合成関数の微分の公式を使って計算できる。

$t = kx$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dt}{dx} \cdot \frac{dy}{dt} \\
&= \frac{d}{dx}(kx) \cdot \frac{d}{dt}(e^t) \\
&= k\frac{\cancel{dx}}{\cancel{dx}} \cdot e^t \\
&= ke^t \\
&= ke^{kx}
\end{aligned}$$

となり、e^{kx} 自体は変わらず、指数の係数 k が e の肩から「降りてくる」形になる。

ネイピア数を底とする指数関数の微分（指数が定数倍されている場合）

k を定数とし、指数が k 倍されている場合は、微分すると全体が k 倍される。

$$\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx}$$

指数が関数の場合

指数が関数になっている場合 $y = e^{f(x)}$ の微分も、合成関数の微分を使って考えればよい。

$t = f(x)$ とおくと、

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \\
&= \frac{d}{dt}e^t \cdot \frac{d}{dx}f(x) \\
&= e^t \cdot f'(x) \\
&= e^{f(x)} \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

ネイピア数を底とする指数関数の微分（指数が関数の場合）

$$\frac{d}{dx}e^{f(x)} = f'(x)e^{f(x)}$$

0.1.14　一般の指数関数の微分

指数関数の底の変換公式より、a を底とする指数関数の微分は、ネイピア数 e を底とする指数関数の微分（指数が定数倍されている場合）に帰着できる。

REVIEW

指数関数の底の変換公式

$$a^x = b^{(\log_b a)x}$$

指数関数の底の変換公式において、$b = e$ の場合を考えると、

$$a^x = e^{(\log a)x}$$

となるので、指数が $\log a$ 倍された、e を底とする指数関数の微分として考えればよい。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}a^x &= \frac{d}{dx}e^{(\log a)x} \\ &= (\log a)e^{(\log a)x} \\ &= (\log a)a^x\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}e^{kx} = ke^{kx}$$

$$e^{(\log a)x} = a^x$$

指数関数の微分

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x(\log a)$$

0.1.15 対数関数の微分

自然対数の微分（底がネイピア数の対数の微分）

底がネイピア数である対数は、自然対数と呼ばれる。

自然対数

底がネイピア数 e である対数関数を 自然対数 といい、次のように底 e を省略して表記する。

$$\log x$$

$y = \log x$ は $x = e^y$ の逆関数であるから、e^y の微分 e^y の逆数を考えればよい。

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

自然対数の微分

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x}$$

0.1.16　対数微分法

真数が関数である自然対数の微分

$y = \log f(x)$ の微分は、対数微分法と呼ばれる微分テクニックの原理となる。
この微分は、$t = f(x)$ として合成関数の微分を考えることで計算できる。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log f(x) &= \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \\
&= \frac{d}{dt}\log t\cdot\frac{d}{dx}f(x) \\
&= \frac{1}{t}\cdot f'(x) \\
&= \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x) \\
&= \frac{f'(x)}{f(x)}
\end{aligned}$$

真数が関数である自然対数の微分

$$\frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

ここで、この式を $f'(x) = \ldots$ の形に直してみよう。

$$f'(x) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}\log f(x)$$

関数 $f(x)$ の微分 $f'(x)$ は、log を取ってから微分したもの $\frac{d}{dx}\log f(x)$ に、元の関数 $f(x)$ をかけることでも計算できることがわかる。

対数微分法の原理

log を取ってから微分したものに元の関数をかける操作は、微分することと同じになる。

$$f'(x) = f(x)\cdot(\log f(x))'$$

この原理によって、$f(x)$ の微分計算を、$\log f(x)$ の微分計算に置き換えることが可能になる。

対数を取ることで、対数の性質が使えるようになるため、微分が簡単になることがある。そんなときにこの原理が役に立つ。

対数微分法でライプニッツ則（関数の積の微分）を導く

$f(x)g(x)$ の微分を、対数経由で計算してみよう。

まず、$\log(f(x)g(x))$ の微分は、「積の対数が対数の和になる」という対数の性質を用いて、次のように計算できる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log(f(x)g(x)) &= \frac{d}{dx}(\log f(x)+\log g(x))\\ &= \frac{d}{dx}\log f(x)+\frac{d}{dx}\log g(x)\\ &= \frac{f'(x)}{f(x)}+\frac{g'(x)}{g(x)}\\ &= \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}\end{aligned}$$

対数微分法の原理より、この式に $f(x)g(x)$ をかけたものが、$f(x)g(x)$ の微分になる。

$$\begin{aligned}(f(x)g(x))' &= f(x)g(x)\cdot\frac{d}{dx}\log(f(x)g(x))\\ &= \cancel{f(x)g(x)}\cdot\frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{\cancel{f(x)g(x)}}\\ &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

これは、関数の積の微分公式である、ライプニッツ則の式に一致している。

対数微分法で分数関数の微分（関数の商の微分）を考える

続いて、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の微分も対数微分法で計算してみよう。

$\log\dfrac{f(x)}{g(x)}$ の微分は、「商の対数が対数の差になる」という対数の性質を用いて、次のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{d}{dx}(\log f(x) - \log g(x)) \\
&= \frac{d}{dx}\log f(x) - \frac{d}{dx}\log g(x) \\
&= \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}
\end{aligned}
$$

対数微分法の原理より、この式に $\frac{f(x)}{g(x)}$ をかけたものが、$\frac{f(x)}{g(x)}$ の微分になる。

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{d}{dx}\log\frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \frac{\cancel{f(x)}}{g(x)} \cdot \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\cancel{f(x)}g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
\end{aligned}
$$

分数関数の微分

$$
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}
$$

関数の積・商の微分の比較

対数を取ってから微分すると、ライプニッツ則と分数関数の微分の違いがシンプルに表現される。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\log(f(x)g(x)) &= \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} \\
\frac{d}{dx}\log\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f'(x)}{f(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}
\end{aligned}
$$

あとは、これらに $f(x)g(x)$ や $\frac{f(x)}{g(x)}$ をかけることで、元の関数の微分の式が導ける。