特異値と特異ベクトル

スペクトル分解の拡張である特異値分解では、任意の行列がその特異値と特異ベクトルによって表せる

ref: 線形代数セミナー p28〜29

特異値と特異ベクトル　零行列ではない任意の $m \times n$ 行列 A に対して、

$$A\boldsymbol{v} = \sigma \boldsymbol{u}, \quad A^\top \boldsymbol{u} = \sigma \boldsymbol{v}$$

となる正の数 σ を特異値と呼び、

- 左特異ベクトル：m 次元ベクトル $\boldsymbol{u}\,(\neq \boldsymbol{0})$
- 右特異ベクトル：n 次元ベクトル $\boldsymbol{v}\,(\neq \boldsymbol{0})$

を合わせて特異ベクトルと呼ぶ

特異ベクトルと固有ベクトルの関係

特異値と特異ベクトルの関係式

$$A\boldsymbol{v} = \sigma \boldsymbol{u}, \quad A^\top \boldsymbol{u} = \sigma \boldsymbol{v}$$

において、第 1 式の両辺に $A^\top$ を左からかけると、

$$\begin{aligned} A^\top A\boldsymbol{v} &= \sigma A^\top \boldsymbol{u} \\ &= \sigma^2 \boldsymbol{v} \end{aligned} \quad \text{第 2 式を代入}$$

また、第 2 式の両辺に A を左からかけると、

$$\begin{aligned} AA^\top \boldsymbol{u} &= \sigma A\boldsymbol{v} \\ &= \sigma^2 \boldsymbol{u} \end{aligned} \quad \text{第 1 式を代入}$$

得られた結果をまとめると、

$$AA^\top \boldsymbol{u} = \sigma^2 \boldsymbol{u}, \quad A^\top A\boldsymbol{v} = \sigma^2 \boldsymbol{v}$$

ここで、A は任意の長方行列だが、$AA^\top$ と $A^\top A$ は対称行列となる

すなわち、

- 左特異ベクトル $\boldsymbol{u}$ は m 次対称行列 $AA^\top$ の固有ベクトル
- 右特異ベクトル $\boldsymbol{v}$ は n 次対称行列 $A^\top A$ の固有ベクトル

であり、特異値の 2 乗 σ^2 は $AA^\top, A^\top A$ 共通の固有値である

特異ベクトルの正規直交化

A の特異値を $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ とする

ここで、重複があってもよい

対応する r 本の左特異ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ と r 本の右特異ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ は、どちらも対称行列の固有ベクトルであるから、それぞれを正規直交系に選ぶことができる