第 1 章

逆行列と正則性

線形変換と逆問題

$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ という形の式は、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の次元が同じならば、連立一次方程式として捉えることができた。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

そして、このような形の連立方程式を解くことは、「$\boldsymbol{y}$ から $\boldsymbol{x}$ を推定する」という逆問題を解くことに相当する。

一方、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ という式は、線形写像を表す式とみることもできる。
特に、$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像 f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換と呼ぶのだった。

言い換えると、表現行列 A で表される線形写像 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ が線形変換と呼べるのは、$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の次元が同じ場合である。
このように、線形変換と連立一次方程式を関連づけて考えることができる。

逆行列

「写り先 $\boldsymbol{y}$ から元の点 $\boldsymbol{x}$ を答える」という写像に対応する行列を逆行列といい、A^{-1} と表す。

ref: プログラミングのための線形代数 p43〜44

この行列 A^{-1} は、

- どんな $\boldsymbol{x}$ を持ってきても、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ ならば $A^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$
- どんな $\boldsymbol{y}$ を持ってきても、$A^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

となるような行列である。

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{x} \arrow[r, bend left, "A"] & \boldsymbol{y} \arrow[l, bend left, "A^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

別の言い方をすると、

- A して A^{-1} したら元に戻る
- A^{-1} して A したら元に戻る

となるような行列 A^{-1} を逆行列として定義する。

逆行列　正方行列 A に対して、次式を満たす行列 X を A の逆行列といい、A^{-1} と表す。

$$AX = XE = E$$

正則性と全単射性

A の逆行列は、いつでも存在するとは限らない。

正則（行列の言葉で）　正方行列 A の逆行列が存在するとき、A は正則であるという。

A の逆行列が存在するには、A が表す写像が全単射である、つまり A によって「潰れない・はみ出さない」ことが必要である。

- 潰れてしまえば、元の $\boldsymbol{x}$ はわからない（単射でない場合）
- はみ出してしまえば、元の $\boldsymbol{x}$ は存在しない（全射でない場合）

正則（写像の言葉で）　線形変換 f が全単射であるとき、f は正則であるという。正方行列 A が正則な線形変換を与えるとき、A は正則行列であるという。

逆写像と逆行列の対応

一般に、写像 f が全単射であれば、逆写像 f^{-1} が存在する。

ref: 行列と行列式の基礎 p71〜72

逆写像の線形性　f を $\mathbb{R}^n$ の正則な線形変換とするとき、逆写像 f^{-1} は線形である

証明

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とし、次の 2 つを示せばよい

i. $f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$
ii. $f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$

(i)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$\boldsymbol{x} = f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{y} = f \circ f^{-1}(\boldsymbol{y})$$
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$$

また、f は線形写像であるから、

$$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

$f \circ f^{-1}(\boldsymbol{v})$ は、$f(f^{-1}(\boldsymbol{v}))$ を意味する記号なので、

$$f(f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y}))$$

両辺を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f^{-1}(\boldsymbol{x}) + f^{-1}(\boldsymbol{y})$$

となり、(i) が示された ■

(ii)

$f \circ f^{-1}$ は恒等写像であるから、

$$\boldsymbol{x} = f \circ f^{-1}(\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$$
$$c\boldsymbol{x} = f \circ f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = f(f^{-1}(c\boldsymbol{x}))$$

$\boldsymbol{x} = f(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$ の両辺に c をかけた、次も成り立つ

$$c\boldsymbol{x} = cf(f^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

さらに、f は線形写像であるから、

$$cf(f^{-1}(\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

ここまでの $c\boldsymbol{x}$ の複数の表現により、次式が成り立つ

$$f(f^{-1}(c\boldsymbol{x})) = f(cf^{-1}(\boldsymbol{x}))$$

両辺を f^{-1} で写すと、

$$f^{-1}(c\boldsymbol{x}) = cf^{-1}(\boldsymbol{x})$$

となり、(ii) が示された ■

n 次正則行列 A は、正則な線形変換 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ と対応している。
逆写像 f^{-1} が存在し、線形であるから、ある n 次正方行列 B が対応するはずである。

$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ であり、線形写像の合成は行列の積に対応するから、

$$AB = BA = E$$

が成り立つ。

このように、逆写像の性質から、逆行列の定義式を導くこともできる。

逆行列の一意性

逆行列は、存在するとしてもただ 1 つしか存在しない。

逆行列の一意性　正方行列 A に対して、A の逆行列が存在するならば、それは一意的である。

証明

A の逆行列が B_1 と B_2 の 2 つあるとする。

$$AB_1 = B_1A = E \quad \text{かつ} \quad AB_2 = B_2A = E$$

$AB_2 = E$ の両辺に B_1 をかけると、

$$B_1 = B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = EB_2 = B_2$$

よって、$B_1 = B_2$ となり、逆行列は一意的である。 ■

逆行列による連立一次方程式の解

正則行列 A に対して、方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のただ 1 つの解は次で与えられる。

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

これが「ただ 1 つ」の解といえるのは、係数行列 A が与えられれば、その逆行列 A^{-1} は一意的に定まるからである。

つまり、A が正則行列であり、その逆行列 A^{-1} が求まれば、行列のかけ算によって連立一次方程式の解が求められる。

行列の演算と逆行列

逆行列の逆行列

「A の取り消し」を取り消すには、A すればよい。

ref: プログラミングのための線形代数 p46

逆行列に対する逆行列　正則行列 A の逆行列 A^{-1} は正則であり、その逆行列は A である。

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

証明

A の逆行列が A^{-1} であることから、

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

この式は、A^{-1} が正則であり、その逆行列が A であることを示す式でもある。 ■

行列の積の逆行列

「B して A したもの」を元に戻すには、まず A を取り消してから B を取り消す必要がある。

ref: プログラミングのための線形代数 p46

正則行列の積に対する逆行列 正則行列 A, B の積 AB は正則であり、その逆行列は次のようになる。

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

証明

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} \\ &= AEA^{-1} \\ &= E\end{aligned}$$

であり、同様に

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B \\ &= B^{-1}EB \\ &= E\end{aligned}$$

であるので、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ。 ■

転置行列の正則性

ref: 行列と行列式の基礎 p88

正則行列の転置の正則性　正則行列 A に対して、その転置行列 ${}^tA$ も正則である。

証明

A が正則であることから、その逆行列 A^{-1} が存在し、

$$A^{-1}A = E$$

両辺の転置をとると、右辺の単位行列は転置しても単位行列であり、左辺には正則行列の積に対する逆行列の公式を用いて、

$$^t(A^{-1}A) = {}^tA^t(A^{-1}) = E$$

この等式より、${}^tA$ の逆行列は ${}^t(A^{-1})$ であることがわかる。 ■

三角行列の正則性

ref: 行列と行列式の基礎 p74

上三角行列の正則性　対角成分がすべて 0 でない上三角行列は正則である。

証明

[Todo 1: ref: 行列と行列式の基礎 p74 命題 2.4.9]

正則な上三角行列の逆行列　正則な上三角行列は、その逆行列も上三角行列である。

証明

[Todo 2:]

正則な上三角行列と関連して、次の事実が成り立つ。

行基本変形と対角行列　正則行列 A に対して、行のスカラー倍以外の行基本変形を繰り返し行って対角行列にできる。

証明

[Todo 3: ref: 行列と行列式の基礎 p75 命題 2.4.12]

正則行列と対角行列

[Todo 4: ref: プログラミングのための線形代数 p46〜47]

ref: 行列と行列式の基礎 p74〜75

ブロック対角行列の正則性　次のようなブロック対角行列 M

において、対角ブロック $A,\ B$ が正則であれば、M も正則である。

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overleftrightarrow{\quad l \quad} & \overleftrightarrow{\quad n-l \quad} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow l \\ \updownarrow n-l \end{array}$$

証明

A と B が正則であるから、逆行列 A^{-1} と B^{-1} が存在する。

それらを用いて、次のような積を考える。

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} AA^{-1} & O \\ O & BB^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_l & O \\ O & E_{n-l} \end{pmatrix} \\
&= E_n
\end{aligned}$$

この等式は、M の逆行列の存在を示している。

$$M \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix} = E_n$$

つまり、対角ブロックがそれぞれ正則であれば、それらの逆行列を並べることで全体の逆行列が構成できる。

このようにして、M が正則であることがわかる。 ■

線形代数における鳩の巣原理

[Note 1: 「解の一意性」の後に移動予定]

ref: 行列と行列式の基礎 p70

一般の線形写像と対比して、線形変換の大きな特徴は次が成り立つことである

線形代数における鳩の巣原理　f を $\mathbb{R}^n$ の線形変換とし、A を f の表現行列とするとき、次はすべて同値である

i. f は単射
ii. f は全射
iii. f は全単射
iv. $\mathrm{rank}(A) = n$

証明

線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ において、表現行列を A とすると、

$$
\begin{aligned}
f \text{ が単射} &\iff \mathrm{rank}(A) = n \\
f \text{ が全射} &\iff \mathrm{rank}(A) = m
\end{aligned}
$$

であることを以前示した

線形変換は、線形写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ の $m = n$ の場合であるので、f が単射であることも、全射であることも、

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

という条件と同値になる

つまり、線形変換は単射かつ全射であり、これは全単射であることも意味する　■

単射と全射は、一般には一方から他方が導かれるわけではない 2 つの性質だが、$\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像（線形変換）の場合は同値になる

先ほど示した定理は、いわば線形代数版「鳩の巣原理」である

有限集合 $X = \{1, 2, ..., n\}$ からそれ自身への写像 f に対して、単射と全射は同値である

この事実は鳩の巣原理と呼ばれる

鳩の巣原理は、歴史的には部屋割り論法とも呼ばれ、

n 個のものを m 個の箱に入れるとき、$n > m$ であれば、少なくとも 1 個の箱には 1 個より多いものが中にある

ことを指す

ここで鳩の巣原理と呼んだのはこの命題そのものではないが、その変種と考えてよい

階数による正則判定

[Note 2: 「解の一意性」の後に移動予定]

ref: 行列と行列式の基礎 p71

「線形代数における鳩の巣原理」から、次のことがいえる

正則の判定と階数　n 次正方行列 A に対して、

$$A \text{ が正則行列} \iff \mathrm{rank}(A) = n$$

この定理は、線形変換 f（もしくは正方行列 A）が正則かどうかについて、階数という 1 つの数値で判定できることを示している

列ベクトルの線型独立性による正則の判定　n 次正方行列

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$$

に対して、次が成り立つ

$$A \text{ が正則行列} \iff \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \text{が線型独立}$$

証明

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbb{R}^n$ が線型独立であることは、

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

と同値であることを以前示した

さらに、先ほど示した定理より、$\mathrm{rank}(A) = n$ は A が正則行列であることと同値である ■

逆行列の計算法

[Note 3: 「基本変形と基本行列」の章で扱う定理と被るので、削除予定]

ref: 行列と行列式の基礎 p72〜73

正則行列 A の逆行列を計算するために、次の定理に注目しよう

逆行列の計算法の原理　正方行列 A に対して、$AB = E$ を満たす正方行列 B があるならば、A は正則であり、B は A の逆行列である

証明

[Todo 5: ref: 行列と行列式の基礎 p72 命題 2.4.6]

上の定理の証明は、逆行列の計算法のヒントを含んでいる

A の逆行列 B を求めるには、n 個の線形方程式

$$A\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{e}_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

を解けばよい

A は階数 n の n 次正方行列なので、行変形で A から E に到達することができる

$\boldsymbol{b}_i$ を求めるには、行変形により

$$(A \mid \boldsymbol{e}_i) \to \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_i)$$

とすればよい

i ごとに掃き出し法を何度も実行しないといけないのかと思いきや、一度にまとめられる

$$\begin{gathered}(A \mid E) = (A \mid \boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \to \\ \cdots \to (E \mid \boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n) = (E \mid B)\end{gathered}$$

このようにすれば、行変形は 1 通りで十分である

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	5
note	3