双対基底

$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ に対して、

$$\phi_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, ..., n)$$

を満たす線形写像 $\phi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を考える

ref: 行列と行列式の基礎 p120〜121

ref: テンソル代数と表現論 p58〜59

このとき、任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{v}_j$$

とおくと、

$$\phi_i(\boldsymbol{v}) = \phi_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \phi_i(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{ij} = a_i$$

となるから、ϕ_i は基底 $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ に関する第 i 座標を表す関数である

任意の線形関数 $\phi \in {}^t\mathbb{R}^n$ は、座標関数の線型結合として一意的に表現できるから、次が成り立つ

⚓ ${}^t\mathbb{R}^n$ の双対基底の存在　$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, ..., \boldsymbol{v}_n\}$ に対して、$\phi_i(\boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$ によって $\phi_i \in {}^t\mathbb{R}^n$ を定める

このとき、任意の $\phi \in {}^t\mathbb{R}^n$ を $\phi_1, ..., \phi_n$ の線形結合

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(\boldsymbol{v}_i)\phi_i$$

として一意的に書くことができる

すなわち、$\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ は ${}^t\mathbb{R}^n$ の基底である

証明

$\phi_1, \ldots, \phi_n$ が線型独立

線形関係式

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j = 0$$

があるとすると、

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j\right)(\boldsymbol{v}_i) &= 0 \\
&\Downarrow \ \phi \text{ の線形性} \\
\sum_{j=1}^{n} c_j \phi_j(\boldsymbol{v}_i) &= 0 \\
&\Downarrow \ \phi_j(\boldsymbol{v}_i) = \delta_{ij} \\
\sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{ij} &= 0
\end{aligned}$$

左辺の和は、δ_{ij} の定義より、$j = i$ の項のみ生き残って、

$$c_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

が得られる ■

$\langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle = {}^t\mathbb{R}^n$

任意の $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$$

と書く

$\psi \in {}^t\mathbb{R}^n$ を任意にとると、ψ と ϕ の線形性により、

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{v}) &= \psi\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \psi(\boldsymbol{v}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\boldsymbol{v})\psi(\boldsymbol{v}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \psi(\boldsymbol{v}_i)\phi_i(\boldsymbol{v}) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \psi(\boldsymbol{v}_i)\phi_i\right)(\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

よって、

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} \psi(\boldsymbol{v}_i)\phi_i$$

上式で、任意の $\psi \in {}^t\mathbb{R}^n$ を $\phi_1, \ldots, \phi_n$ の線形結合で書けることが示せたので、$\langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$ は ${}^t\mathbb{R}^n$ を張ることがわかる ■

$\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に対して、上の定理で定まる ${}^t\mathbb{R}^n$ の基底 $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ を**双対基底**という