対称行列のランクと固有値

n 次対称行列 A の列の任意の線形結合

ref: 線形代数セミナー p19

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = A\boldsymbol{c}$$

を考える

A の n 個の固有値のうち、0 でないものの個数を r とすれば、A のスペクトル分解の式において、$\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n = 0$ とおいて、

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{c} &= \lambda_1\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^\top\boldsymbol{c} + \cdots + \lambda_r\boldsymbol{u}_r\boldsymbol{u}_r^\top\boldsymbol{c} \\ &= \lambda_1(\boldsymbol{u}_1^\top\boldsymbol{c})\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \lambda_r(\boldsymbol{u}_r^\top\boldsymbol{c})\boldsymbol{u}_r \end{aligned}$$

すなわち、A の列の任意の線形結合は、互いに直交する $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ の線形結合で書ける

互いに直交するベクトルは線型独立であることから、

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ の張る部分空間（線形結合の集合）の次元は r である
- n 本の列のうち、r 本しか線型独立ではない

ということがいえる

行列 A の n 本の列のうち、線型独立なものの個数を A のランクあるいは階数というので、次のことがいえる

> ⚓ **todo**　A を対称行列とするとき、$\mathrm{rank}(A)$ は、A の非零の固有値の個数に等しい

> 行列 A のランク r は、非零の固有値の個数に等しい

A は対称行列であるから、行についても同じことがいえる

スペクトル分解による対称行列の対角化

スペクトル分解の式を用いることで、対称行列の対角化について簡潔に議論できるようになる

ref: 線形代数セミナー p19〜20

対称行列 A のスペクトル分解の式

$$A = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^\top + \cdots + \lambda_n \boldsymbol{u}_n \boldsymbol{u}_n^\top$$

は、次のように書き換えられる

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \lambda_n \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^\top \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_n^\top \end{pmatrix} \\ &= U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^\top \end{aligned}$$

ここで、

$$U = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \cdots & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix}$$

は、列が正規直交系をなすことから直交行列である

そして、U が直交行列であれば、その転置 $U^\top$ も直交行列である

それゆえ、直交行列の行も正規直交系をなす

A の式の両辺に左から $U^\top$、右から U をかけると、

$$U^\top A U = U^\top U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^\top U$$

直交行列の定義 $U^\top U = E$ より、

$$U^\top A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

として、対称行列 A は、直交行列 U によって対角化できることがわかる