

第 1 章

三次元ベクトルの外積



二つのベクトルに垂直なベクトル

3次元空間における2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して、どちらとも垂直になるベクトル \mathbf{v} を求める問題を考える。

もし \mathbf{a}, \mathbf{b} がどちらも零ベクトルであるなら、零ベクトルは任意のベクトルと垂直であるため、任意のベクトル \mathbf{v} が \mathbf{a}, \mathbf{b} の双方と垂直になる。

そこで、 \mathbf{a}, \mathbf{b} の少なくとも一方が零ベクトルでない場合を考えることにする。

どちらも \mathbf{v} と直交するという条件は、内積を用いて次のように書ける。

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = 0$$

成分を用いて書くと、

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$$

$$b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 = 0$$

ここで、 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = 0$ の両辺に b_1 を、 $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = 0$ の両辺に a_1 をかける。

$$b_1(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = 0$$

$$a_1(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3) = 0$$

それぞれ展開して、

$$a_1b_1v_1 + a_2b_1v_2 + a_3b_1v_3 = 0$$

$$a_1b_1v_1 + a_1b_2v_2 + a_1b_3v_3 = 0$$

辺々を引いた上で整理すると、

$$(a_2b_1 - a_1b_2)v_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)v_3 = 0$$

この式は、次のような内積が 0 となる式として解釈することができる。

$$\begin{pmatrix} a_2b_1 - a_1b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

ここで、2 次元ベクトルについて、次が成り立つことを利用する。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} = xy - xy = 0$$

これより、

$$\begin{pmatrix} a_2b_1 - a_1b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3b_1 - a_1b_3 \\ -(a_2b_1 - a_1b_2) \end{pmatrix} = 0$$

となるので、

$$\begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3b_1 - a_1b_3 \\ -(a_2b_1 - a_1b_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

とおけばよい。

これで v_2, v_3 が求まったので、あとは v_1 を求めればよい。

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ という式


$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$$

において、 $a_1 \neq 0$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{a_2v_2 + a_3v_3}{a_1} \\ &= -\frac{a_2v_2}{a_1} - \frac{a_3v_3}{a_1} \\ &= -\frac{a_2(a_3b_1 - a_1b_3)}{a_1} - \frac{a_3(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1} \\ &= -\frac{a_2a_3b_1}{a_1} + \frac{a_2a_1b_3}{a_1} - \frac{a_3a_1b_2}{a_1} + \frac{a_3a_2b_1}{a_1} \\ &= -\frac{a_2a_3b_1}{a_1} + a_2b_3 - a_3b_2 + \frac{a_2a_3b_1}{a_1} \\ &= a_2b_3 - a_3b_2 \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

 \mathbb{R}^3 における二つのベクトルの外積 3次元空間における2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して、次のように定義されるベクトルを、 \mathbf{a} と \mathbf{b} の外積あるいはクロス積という。


$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$



外積のノルム

外積はベクトルであるから、そのノルムを定めることができる。

そこで重要となるのが、次の定理である。

 ラグランジュの恒等式 任意の2つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して、次が成り立つ。

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2$$

証明

$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2$ を成分表示により計算すると、

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
 &= (a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3) + (a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_3a_1b_3b_1) \\
 &\quad + (a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2) \\
 &= \underbrace{(a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2)}_{(*)} \\
 &\quad - 2 \underbrace{(a_1a_2b_1b_2 + a_2a_3b_2b_3 + a_3a_1b_3b_1)}_{(**)}
 \end{aligned}$$

また、ノルムの定義を用いて $\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2$ を計算すると、


$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\
 &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\
 &\quad + (a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2) \\
 &= \underbrace{(a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2)}_{(\dagger)} + (*)
 \end{aligned}$$

内積の定義を用いて $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
 &= a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2(a_1a_2b_1b_2 + a_2a_3b_2b_3 + a_3a_1b_3b_1) \\
 &= (\dagger) + 2(**)
 \end{aligned}$$

以上より、

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 &= (\dagger) + (*) - (\dagger) + 2(**) \\
 &= (*) - 2(**) \\
 &= \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2
 \end{aligned}$$

となり、目的の等式が得られた。 

ここで、ベクトルのなす角の定義より、内積が

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos \theta$$

と表せることを用いると、外積のノルムは次のように表現できる。

🚢 \mathbb{R}^3 における外積のノルム 任意の 2 つのベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して、次が成り立つ。

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$$

🔪 証明

ラグランジュの恒等式より、

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta)^2 \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta \\ &= (\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta)^2 \end{aligned}$$

両辺の平方根をとることで、

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \theta$$

が得られる。 ■

[Todo 1: 図形的意味]

Zebra Notes

Type	Number
todo	1