線形写像の階数標準形

線形写像に対して、うまく基底を選ぶと、表現行列を階数標準形にできる

ref: 行列と行列式の基礎 p115〜117

⚓ 線形写像の階数標準形　線形写像 $f\colon V \to W$ に対し、$r = \mathrm{rank}(f)$ とするとき、V, W のある基底に関する f の表現行列が次の形になる

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

証明

V の基底を次のように分けて構成する

i. $\mathrm{Ker}(f)$ を張るベクトル（これは f によって零に写る）
ii. $\mathrm{Ker}(f)$ に属さないが、f によって像を生成するベクトル（これは f によって非零に写る）

V, W の次元をそれぞれ n, m とすると、線形写像の次元定理より、$\mathrm{Ker}(f)$ の次元は $n-r$ である

そこで、$\mathrm{Ker}(f) \subset V$ の基底を $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ とする

さらに、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r \in V$ を、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ が V の基底になるように選ぶ（基底の延長）

このとき、

$$\boldsymbol{w}_i = f(\boldsymbol{v}_i) \quad (i = 1, \ldots, r)$$

とおくと、$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ は線形独立である

実際、線形関係式

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{0}$$

があるとすると、f は線形写像なので、

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{w}_i = \sum_{i=1}^{r} c_i f(\boldsymbol{v}_i) = f\left(\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i\right) = \boldsymbol{0}$$

より、

$$\left(\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i\right) \in \mathrm{Ker}(f)$$

この線形結合で表されるベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i$$

すると、$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ より、$\boldsymbol{v}$ は $\mathrm{Ker}(f)$ の基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ の線形結合でも表すことができる

$$\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{u}_j$$

したがって、$\boldsymbol{v}$ の 2 通りの表現から、次の等式が成り立つ

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{u}_j$$

ここで、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ は V の基底なので、線型独立である

よって、等式

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{v}_i - \sum_{j=1}^{n-r} d_j \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{0}$$

が成り立つには、各係数が 0 でなければならない

$$\begin{aligned} c_i &= 0 \quad (i = 1, \ldots, r) \\ d_j &= 0 \quad (j = 1, \ldots, n-r) \end{aligned}$$

したがって、$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ は線形独立である

$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ はすべて $\mathrm{Im}(f)$ に属するので、これは $\mathrm{Im}(f) \subset W$ の基底となる

そこで、この基底を延長して、$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{w}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ を W の基底とする

このように構成した V と W の基底に関する線形写像 f の表現行列を考える

$\mathrm{Ker}(f)$ を張るベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}$ は f によって零に写ることと、$\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r$ の定義より、

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{w}_i & (i = 1, \ldots, r) \\ f(\boldsymbol{u}_j) = \boldsymbol{0} & (j = 1, \ldots, n-r) \end{cases}$$

よって、基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-r}\}$ における f の表現行列は、

$$\begin{aligned} &(f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_r), f(\boldsymbol{u}_1), \ldots, f(\boldsymbol{u}_{n-r})) \\ &= (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}) \\ &= (\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_r) \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

として定まる ■

このように、線形空間 V, W の任意の基底変換を許すと、線形写像 f の表現行列をとても単純な形

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

にできる

これを f の階数標準形という

基底変換に伴う表現行列の変換の原理を用いて、先ほどの定理を行列の言葉で表すことができる

線形写像 $f\colon V \to W$ の基底 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ に関する表現行列を A とし、同じ線形写像 f の別な基底 $\mathcal{V}', \mathcal{W}'$ に関する表現行列を階数標準形を B とする

このとき、正則行列による階数標準形の構成より、それぞれの基底変換行列 P, Q は行変形、列変形に対応する正則行列である

表現行列の階数標準形 $m \times n$ 型行列 A に対し、それぞれ n, m 次の正則行列 P, Q が存在して、

$$Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

となる

ここで、$r = \mathrm{rank}(A)$ である