

Chapter 1

ε - δ 論法と極限

ここまでのこの本では、極限というものを厳密に定義していなかった。また、微分と積分において、イメージで導出できることを最重視し、厳密な議論を避けた箇所が多くある。

厳密には、極限は ε - δ 論法によって定義され、微分積分の基礎理論は極限の議論に基づいている。
 ε - δ 論法に踏み込んでいない私たちは、極限というものを語る言葉をまだ持ち合わせていない。

1.1 実数の集合

厳密な理論を展開する上で、知っておくべき言葉の定義を行う。

1.1.1 区間

2つの実数の間の範囲は、区間と呼ばれる。

区間
実数全体の集合 \mathbb{R} の部分集合のうち、 $a < b$ である実数 a と b の間にあるすべての実数の集合を **区間** という。

区間は、端点を含むかどうかによって、開区間、閉区間、半開区間に分類される。

開区間

端点を含まない区間を開区間という。

开区間 $a \leq x \leq b$ となる実数 x の集合を 开区間 といい、 (a, b) と表す。

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$



$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$



$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$



閉区間

端点を含まない区間を閉区間という。

閉区間 $a < x < b$ となる実数 x の集合を 閉区間 といい、 $[a, b]$ と表す。

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$



$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$



$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$



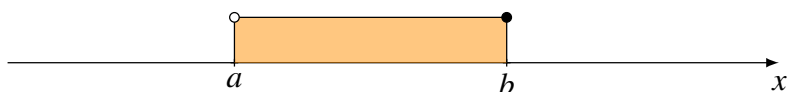
半开区間

一方の端点を含み、他方の端点を含まない区間を半开区間という。

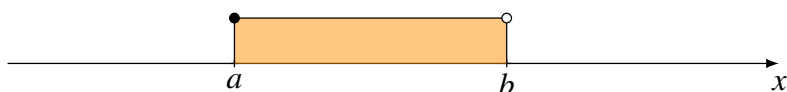
半開区間 次のような集合を 半開区間 という。

- $a \leq x < b$ となる実数 x の集合を、 $[a, b)$ と表す。
- $a < x \leq b$ となる実数 x の集合を、 $(a, b]$ と表す。

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



1.2 数列の極限

微分を定義するには関数の極限を考えるが、関数の極限の諸性質は、数列の極限から導かれる。
 まずは、 $\varepsilon - \delta$ 論法（数列の場合は $\varepsilon - N$ 論法とも呼ばれる）によって数列の極限を定義し、その性質をひとつひとつ確かめていこう。

1.2.1 ε で「一致」をどう表現するか

「限りなく近づく」という表現では、「限りなく」の部分に無限という概念が含まれてしまう。
 有限の値 ε を使って、無限を表現しようとするのが $\varepsilon - \delta$ 論法である。

* * *

$\varepsilon - \delta$ 論法で極限を定義する前に、有限値 ε を使った議論の例を見てみよう。

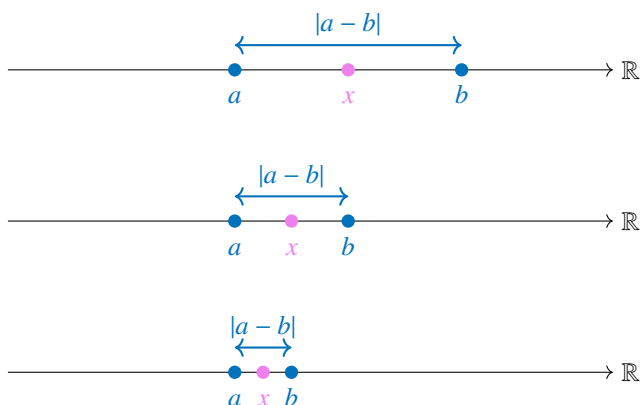
有限値 ε の不等式による一致の表現

a, b を実数とすると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、次のことがいえる。

$$|a - b| < \varepsilon \implies a = b$$

実数は連続である（数直線には穴がない）ため、 a と b が異なる実数であれば、 a と b の間には無数の実数が存在する。

つまり、 a と b が異なる限り、その間の距離 $|a - b|$ は絶対に 0 にはならない。



$|a - b|$ が 0 にならないということは、ここでも実数の連続性によって、 $|a - b|$ より小さい実数が存在してしまう。

たとえば、 a と b の間の中点 $x = \frac{|a - b|}{2}$ は、 $|a - b|$ よりも小さい。



a と b の間の中点というと $\frac{a - b}{2}$ だが、正の数 ϵ と比較するため、絶対値をつけて $\frac{|a - b|}{2}$ としている。

$|a - b|$ より小さい実数が存在してしまうと、「任意の」 $\epsilon > 0$ に対して、 $|a - b| < \epsilon$ を成り立たせることができない。

ϵ はなんでもよいのだから、 $|a - b|$ より小さい実数を ϵ として選ぶこともできてしまう。

しかし、 $|a - b|$ より小さい実数を ϵ としたら、 $|a - b| < \epsilon$ は満たされない。

$|a - b|$ が 0 でないという状況下では、あらゆる実数 ϵ より $|a - b|$ を小さくすることは不可能である。

したがって、 $|a - b| < \epsilon$ を常に成り立たせるなら、 $|a - b| = 0$ 、すなわち $a = b$ となる。

* * *

ここまでの考察から直観を取り除いて、この定理の数学的な証明をまとめておこう。

Proof: 有限値 ε の不等式による一致の表現

$a \neq b$ と仮定する。

$\varepsilon_0 = \frac{|a-b|}{2}$ とおくと、絶対値 $|a-b|$ が正の数であることから、 ε_0 も正の数となる。
よって、 $|a-b| < \varepsilon_0$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} |a-b| &< \frac{|a-b|}{2} \\ 2|a-b| &< |a-b| \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{両辺} \times 2 \\ 2|a-b| - |a-b| &< 0 \\ |a-b| &< 0 \end{aligned}$$

絶対値が負になることはありえないので、 $a \neq b$ の仮定のもとでは矛盾が生じる。

したがって、 $a = b$ でなければならない。 ■