特性多項式と特性方程式

λ が n 次正方行列 A の固有値であることは、

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$$

となるような $\boldsymbol{x} \in K^n$ が存在することである

ref: 行列と行列式の基礎 p184、p188〜191
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p258〜260

ここで、$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ を次のように変形することができる

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{x} - \lambda\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ A\boldsymbol{x} - \lambda E\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \\ (A - \lambda E)\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ という条件により、$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は非自明な解を持つ必要がある

> ⚓ **固有ベクトルの斉次形方程式による定義**　固有値 λ の固有ベクトルとは、斉次形方程式
>
> $$(A - \lambda E)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$
>
> の非自明な解のことである

固有値を求める上で重要となるこの定理は、行列式を使って言い換えることができる

> ⚓ **固有値の方程式による定義**　行列 A の固有値 λ は、x についての n 次方程式
>
> $$\det(A - xE) = 0$$
>
> の K に含まれる解である

証明

λ が A の固有値であることは、斉次形方程式 $(A-\lambda E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が非自明解を持つことと言い換えられる

そして、斉次形方程式が非自明解を持つことは、行列式が 0 になることと同値である

すなわち、

$$\det(A-\lambda E)=0$$

が成り立ち、つまり $x=\lambda$ は方程式 $\det(A-xE)=0$ の解である ■

$A=(a_{ij})$ とおいて、

$$\det(A-xE)=\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

を展開すると、x についての n 次式になる

特に、すべての列（あるいはすべての行）から、x を含む成分をとった場合の積は、

$$(a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$$

であるので、これを展開して現れる項を中心に考察する

n 次の項

$(a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$ の各因子から、$-x$ だけを選んでかけ合わせたものが

$$(-1)^n x^n$$

であり、これが最高次の項となる

$n-1$ 次の項

$(a_{11}-x)(a_{22}-x)\cdots(a_{nn}-x)$ のうち、1 つだけ a_{ii} を選び、残りの因子からは $-x$ を選んでかけ合わせたものが

$$(-1)^{n-1}(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})x^{n-1}$$

である

これは、トレースの定義より、

$$(-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)x^{n-1}$$

とも書き換えられる

$n-2$ 次以下の項

行列式では、各列から 1 つずつ、行に重複がないように成分を選ぶ必要がある

そして、今取り上げている行列式では x を含む成分が対角線上にあるので、$n-1$ 次の場合は、対角成分以外を選ぶことができなかった（対角成分以外から x でない数 a_{ij} を得ようとすると、同じ行もしくは列から 2 つ成分を選ぶことになってしまう）

しかし、$n-2$ 次以下の項では、x を含まない成分を 2 個以上選ぶことができるので、対角成分以外からも成分を選ぶことができる

そのため、$n-2$ 次以下の項は、上の展開式以外からも現れることになり、単純に計算はできない

定数項

定数項は、多項式において $x=0$ とおくことで得られるので、$\det(A-xE)$ に $x=0$ を代入した

$$\det(A)$$

が定数項となる

多項式の最高次の係数に $(-1)^n$ がつくのは面倒なので、$\det(A - xE)$ の代わりに、その $(-1)^n$ 倍である

$$\det(xE - A)$$

を考えることが多い

実際、$\det(xE - A)$ を展開すると、

$$\det(xE - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & x - a_{nn} \end{vmatrix}$$

となり、x の前に (-1) がつかずに済む

特性多項式　A を正方行列、x を変数として、

$$\Phi_A(x) = \det(xE - A)$$

とおく

これを特性多項式あるいは固有多項式と呼ぶ

特性多項式の構造　A を n 次正方行列とすると、特性多項式は、次のような n 次多項式である

$$\Phi_A(x) = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

特性方程式　特性多項式 $\Phi_A(x)$ の根を求める方程式

$$\Phi_A(x) = 0$$

を、特性方程式あるいは固有方程式と呼ぶ

固有値の重複度

ref: 行列と行列式の基礎 p192
ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p270

たとえば、次の方程式

$$(x-2)^3(x-1)=0$$

の解は、$x=2$ と $x=1$ である

ここで、左辺を、

$$(x-2)(x-2)(x-2)(x-1)=0$$

とみなすと、

$$\begin{aligned} x&=2 \\ x&=2 \\ x&=2 \\ x&=1 \end{aligned}$$

というように解が重複していることがわかる

このように、「何回同じ解が現れるか？」を数えたものを重複度という

> **方程式の解の重複度**　多項式 $f(x)$ で表される方程式 $f(x)=0$ において、$f(x)$ が $(x-\alpha)^m$ で割り切れるが、$(x-\alpha)^{m+1}$ では割り切れないような定数 α と自然数 m が存在するとき、α はこの方程式の m 重解あるいは m 重根であるといい、m を α の重複度と呼ぶ

上の定義は難しく聞こえるが、「ちょうど m 回だけ $(x-\alpha)$ がかかっている」ということの言い換えにすぎない

たとえば、

$$(x-2)^3(x-1)$$

を $(x-2)^3$ で割ると、

$$(x-1)$$

として割り切れるが、$(x-2)^4$ で割ると、

$$\frac{(x-2)^3(x-1)}{(x-2)^4}=\frac{x-1}{x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

というように部分分数分解できるので、余りが出ていることがわかる（多項式の割り算における**余り**とは、$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$ の $r(x)$ のことである）

つまり、$f(x)$ に因数 $(x-\alpha)$ が m 個含まれている場合、$f(x)$ は $(x-\alpha)^m$ で割り切れるが、m 個以上は含まれていないので、$(x-\alpha)^{m+1}$ で割ると余りが出てしまう

これはすなわち、「ちょうど m 回だけ $(x-\alpha)$ がかかっている」ということである

ここまでの議論を応用して、固有値の**重複度**を定義する

固有値の重複度　特性多項式を因数分解して、

$$\Phi_A(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}\cdots(x-\alpha_s)^{k_s}$$

とする

ここで、$\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ は相異なるものとする

k_i は 1 以上の整数であり、これを固有値 α_i の**重複度**と呼ぶ

$\Phi_A(x)$ は n 次多項式であるから、

$$\sum_{i=1}^{s}k_i=n$$

が成り立つ

相似な行列の特性多項式

行列式の乗法性により、正方行列 A, B が、ある正則行列 P に対して

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p269〜271
ref: 行列と行列式の基礎 p190〜191

$$B = P^{-1}AP$$

となる（A と B が相似である）ならば、次のように A と B の特性多項式は一致する

$$\begin{aligned}
\det(xE - B) &= \det\left(xE - P^{-1}AP\right) \\
&= \det\left(xPP^{-1} - P^{-1}AP\right) \\
&= \det\left(P^{-1}P(x - A)\right) \\
&= \det\left(P^{-1}P(xE - A)\right) \\
&= \det(E(xE - A)) \\
&= \det(E)\det(xE - A) \\
&= \det(xE - A)
\end{aligned}$$

⚓ **相似な行列の特性多項式**　相似な行列の特性多項式は一致する

この事実は、すなわち次の事実を意味する

⚓ **相似な行列の固有値**　相似な行列の固有値は重複度も含めて一致する

n 次元正方行列 $A = (a_{ij})$ の特性多項式が、

$$\Phi_A(x) = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

であることを思い出すと、次のことがいえる

⚓ **相似な行列のトレースと行列式**　A と B が相似ならば、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A) &= \mathrm{tr}(B) \\ \det(A) &= \det(B) \end{aligned}$$

さらに、A が対角化可能であるときには、

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

という行列 B と A が相似であるので、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A) &= \mathrm{tr}(B) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \\ \det(A) &= \det(B) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \end{aligned}$$

であることがわかる

つまり、

- 行列 A のトレースは A の固有値の和
- 行列 A の行列式は A の固有値の積

となるのである

さて、A と B が相似であるとき、A と B は 1 つの線形変換 f を異なる基底によって表現して得られた行列であるという関係にある

このとき、A と B の特性多項式が一致するということは、次のように言い換えられる

⚓ **特性多項式の基底不変性**　線形空間 V の線形変換 f に対して、V のある基底に関する表現行列 A の特性多項式 $\Phi_A(x)$ は、

基底の選び方によらず f のみによって決まる

また、n 次正方行列が異なる n 個の固有値をもつとき、A は対角化可能であった

ここで、「異なる n 個の固有値をもつ」ということは、特性多項式が次のように因数分解できることと言い換えられる

$$\Phi_A(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

この形は、固有値の重複度の定義において、$k_i = 1$ とした形だが、

$$\sum_{i=1}^{s} k_i = n$$

という条件があることから、k_i がすべて 1 でないと、n 個の異なる α_i は得られないからである

よって、A が対角化可能であるときのトレースと行列式に関する考察と合わせて、次のようにまとめられる

⚓ **固有値とトレース・行列式の関係**　A の特性方程式を

$$\Phi_A(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

とするとき、

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A) &= \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \\ \det(A) &= \alpha_1 \cdots \alpha_n \end{aligned}$$