線形同型写像と部分空間の線形同型

線形同型は、部分空間が「同じ」であることを述べた概念である

ref: 行列と行列式の基礎 p101
ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p91〜92

線形同型写像　V, W を線形空間とし、線形写像 $f: V \to W$ が全単射であるとき、f は線形同型写像あるいは単に線形同型であるという

このとき、同型を表す記号 $\cong$ を用いて、

$$f: V \xrightarrow{\cong} W$$

と書くこともある

部分空間の線形同型　V と W の間に線形同型写像が存在するとき、V と W は線形同型であるといい、

$$V \cong W$$

と書く

線形同型の性質

ここでは、線形同型写像の恒等写像、逆写像、合成写像との関係を述べる

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p93〜94

線形同型と恒等写像

恒等写像の線形同型性　恒等写像は線形同型写像である

証明

恒等写像は明らかに全単射であり、線形写像でもあるため、線形同型写像である ■

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

部分空間の自己同型性　部分空間 V は V 自身と線形同型である

すなわち、

$$V \cong V$$

線形同型と逆写像

線形同型写像の逆写像　線形同型写像の逆写像は線形同型写像である

証明

[Todo 1: ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p93～94]

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

線形同型性の対称性　部分空間 V が部分空間 W と線形同型なら、W は V と線形同型である

すなわち、

$$V \cong W \implies W \cong V$$

線形同型と合成写像

線形同型写像の合成　線形同型写像の合成は線形同型写像である

証明

[Todo 2: ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94]

この事実は、部分空間の線形同型に関して次のように言い換えられる

線形同型性の推移性　部分空間 V が部分空間 W と線形同型で、W が部分空間 U と線形同型ならば、V は U と線形同型である

すなわち、

$$V \cong W \land W \cong U \implies V \cong U$$

ここまでで登場した、部分空間の線形同型に関する性質をまとめると、

線形同型の同値関係としての性質

i. $V \cong V$
ii. $V \cong W \Longrightarrow W \cong V$
iii. $V \cong W \land W \cong U \Longrightarrow V \cong U$

となり、これらは、

> 同型 $\cong$ が等号 $=$ と同じ性質をもつ

ことを意味している

線形同型写像と基底

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94

線形同型写像による基底の保存　線形同型写像 f によって、部分空間の基底は基底に写る

証明

単射な線型写像は線型独立性を保つことから、f の単射性により、基底の線型独立性が保たれる

また、f の全射性により、基底の生成性も保たれる

よって、f によって基底は基底に写る　■

座標写像

ref: 行列と行列式の基礎 p101

ref: 図で整理！例題で納得！線形空間入門 p94～95

座標写像　V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする

このとき、K^n から V への線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}}\colon K^n \to V$ を

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{x} \in (x_i)_{i=1}^{n} \in K^n)$$

を $\mathcal{V}$ で定まる座標写像と呼ぶ

このように定めた線形写像が座標写像と呼ばれる背景は、この座標写像が線形同型であることを示し、それがどんな意味を持つのかを考えることでわかる

線形空間の基底によって定まる線形同型写像　V を線形空間とし、$\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とする

このとき、K^n から V への線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}}\colon K^n \to V$ を

$$\Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \quad (\boldsymbol{x} \in (x_i)_{i=1}^{n} \in K^n)$$

と定めると、これは線形同型写像である

証明

線形写像 $\Phi_{\mathcal{V}}$ が全単射であることを示す

単射であること

基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の線型独立性は、

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

で表される線形結合が、$x_i = 0$ を満たすことを意味する

$\Phi_{\mathcal{V}}$ の定義をふまえると、この条件は、

$$\mathrm{Ker}(\Phi_{\mathcal{V}}) = \{\boldsymbol{0}\}$$

と書ける

よって、線形写像の単射性と核の関係より、$\Phi_{\mathcal{V}}$ は単射である ■

全射であること

基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が V を生成することは、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} \in V &\iff \boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle \\ &\iff \exists (x_i)_{i=1}^{n} \in K^n \ s.t. \ \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{v}_i \\ &\iff \exists \boldsymbol{x} \in K^n \ s.t. \ \Phi_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u} \\ &\iff \boldsymbol{u} \in \mathrm{Im}(\Phi_{\mathcal{V}}) \end{aligned}$$

という言い換えにより、

$$V = \mathrm{Im}(\Phi_{\mathcal{V}})$$

を意味する

よって、像空間と全射性の関係により、$\Phi_{\mathcal{V}}$ は全射である

■

この定理を部分空間の線形同型に関して言い換えると、次のような主張になる

⚓ **有限次元部分空間と数ベクトル空間の線形同型性**　任意の部分空間は次元の等しい数ベクトル空間と線形同型である

つまり、

> 和とスカラー倍だけに着目すれば、
>
> どんな部分空間も数ベクトル空間と「同じ」

ということを意味する

この同型により、部分空間に座標を与えることができる

そしてその座標によって、ベクトルの成分表示が得られる

. . . .

Zebra Notes

Type	Number
todo	2