連立一次方程式の行列表記

未知数 x_1, x_2, \ldots, x_n に関する連立方程式として

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ref: 行列と行列式の基 礎 p22~25

を考える

 a_{ij} などは与えられた定数であり、係数と呼ばれる i 番目の式の x_i の係数を a_{ij} と書いている

ここで、係数だけを集めて行列を作る

$$A = egin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \ & dots & & dots \ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

すると、先ほどの連立方程式は、ベクトル形で

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

と書ける

また、n 個の未知数 x_1, x_2, \ldots, x_n からベクトルを作る

$$oldsymbol{x} = egin{pmatrix} x_1 \ x_2 \ dots \ x_n \end{pmatrix}$$

すると、ベクトル形の方程式の左辺のベクトルを、行列 A とベクトル x の 積と考えて、Ax と表記できる

こうして、もとの連立一次方程式は、行列形の方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に書き換えられる

行基本変形

連立一次方程式を行列によってとり扱うとき、1 つ 1 つの方程式は行列の 行によって表されている ref: 行列と行列式の基 礎 p25

よって、行列の行に関する次のような操作(変形)を考えることは自然である

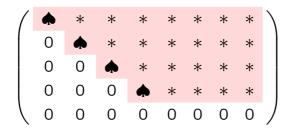
- - i. ある行の定数倍を他の行に加える
 - ii. ある行に O でない数をかける
 - iii. 2 つの行を交換する

原則として上三角型を目指してこのような変形を繰り返すが、いつでも上三角型にできるわけではなく、行階段行列と呼ばれる形を作っていくのが掃き出し法と呼ばれる手法である



行階段行列

掃き出し法では、あるステップで下の成分がすべて 0 になって、



のような形になるのが典型例である

- 0 でない成分を ♠ で、任意の値をもつ成分を * で表した
- 一般には、成分が 0 ばかりの行が下にくる

ref: 行列と行列式の基 礎 p26~28 そのような行を零行という

零行が現れない場合もあるし、複数現れる場合もある

零行でない行に対して、一番左の 0 でない成分 ♠ を主成分と呼ぶ

先ほど示した形では、行の主成分は左上から斜め右下 **45°** 方向にまっすぐ 並んでいるが、一般にはそうできるとは限らない しかし、次のような形には必ずできる

$$\begin{pmatrix}
0 & \spadesuit & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & \spadesuit & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

- - 零行でない行の主成分が、下の行ほど 1 つ以上右にある
 - 零行がある場合は、まとめてすべて下にある

どんな行列も、行基本変形の繰り返しで行階段行列にできる



行列の階数

行階段行列に変形することで、重要な量が読み取れる

ref: 行列と行列式の基 礎 p28~29

変形の結果として得られる行階段行列は 1 通りとは限らないし、変形の途中の掃き出しの手順も 1 通りとは限らないが、階数は *A* のみによって定まる値であることが後に証明できる

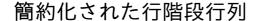
A が $m \times n$ 型ならば、行は m 個なので、 $\mathrm{rank}(A)$ は 0 以上 m 以下 の整数である

行階段行列において、零行でない行の個数は主成分の個数と一致するので、 階数は行階段行列に変形したときの主成分の個数でもある

行基本行列の主成分は各列に高々 1 つなので、主成分の個数は列の個数 n を超えない

したがって、次の重要な評価が成り立つ

$$0 \le \operatorname{rank}(A) \le \min(m, n)$$



必要に応じて、行階段行列をさらに変形して次のような形にする

行の主成分はすべて 1 で、主成分のある列の主成分以外の成分はすべて 0 である

この形を簡約化された行階段行列と呼ぶ

与えられた行列 *A* に対して、行基本変形の繰り返しで得られる行階段行列 は一意的ではないが、簡約化された行階段行列は一意的であることを後に 議論する

そこで、簡約化された行階段行列を A。と書くことにする

ref: 行列と行列式の基 礎 p29~30

変形の過程を

行列 $A \rightarrow$ 行階段行列 \rightarrow 簡約化された行階段行列 A。

と 2 段階にわけるのは、計算の効率以上の意味がある 行階段行列にするところまでで解決する問題(解の存在と一意性など)も あるからである