行列式と正則性

行列式は、正則性の判定にも利用できる

ref: 行列と行列式の基礎 p164

ref: 長岡亮介 線形代数入門講義 p132〜133

正則性と行列式の非零性

$$A \text{ が正則行列} \iff \det(A) \neq 0$$

証明

$\Longrightarrow$

A が正則であることから、

$$AA^{-1} = E$$

両辺の行列式をとって、

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det(E)$$

左辺には行列式の乗法性を適用し、右辺は単位行列の行列式の値が 1 であることから、

$$\det(A)\det\left(A^{-1}\right) = 1$$

もし $\det(A) = 0$ だと仮定すると、$0 = 1$ という矛盾した式になる

よって、$\det(A) \neq 0$ でなければならない ■

$\Longleftarrow$

$\det(A) \neq 0$ であることから、行列 A の列ベクトルは線型独立である

そして、A の列ベクトルが線型独立であることと、A が正則であることは同値である ■

この定理の派生として、行列式を次の形で使うことが多い

消去法の原理 A を正方行列とするとき、

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \text{ に非自明解が存在する} \iff \det(A) = 0$$