Домашняя работа №1

20 февраля 2026 г. 13:04

Задание:

3. **Доказать, что многочлены $1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3$ образуют базис в пространстве многочленов $\mathbb{R}_3[t]$, и найти координаты многочлена $p(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 1$ в этом базисе.**

Решение:

1) Докажем, что вышеописанные векторы образуют базис в пространстве:

Рассмотрим следующую комбинацию:

$$\lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 (t-1) + \lambda_2 (t-1)^2 + \lambda_3 (t-3)^3 = 0$$

Нужно доказать, что линейная комбинация равно нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты перед многочленами равны нулю:

Сделаем замену x = t - 1. Тогда комбинация примет вид:

$$\lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 = 0$$

✓

Из алгебры: $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ - линейно-независимая система. Значит, что линейная комбинация выше равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю:

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 0$$

2) Определим размерность пространства:

Стандартный базис для нашего пространства: $1, x, x^2, x^3$ ✓

Следовательно: $\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$

Из пунктов (1) и (2) следует, что многочлены из условия образуют базис ■

Теперь найдём координаты многочлена:

$$p(t) = t^3 - 2t^2 + 5t - 1 = A_0 + A_1(t-1) + A_2(t-1)^2 + A_3(t-1)^3$$

$$A_0 + A_1(t-1) + A_2(t-1)^2 + A_3(t-1)^3 = A_0 + A_1 t - A_1 + A_2 t^2 - 2A_2 t + A_2 + A_3 t^3 - 3A_3 t^2 + 3A_3 t - A_3$$

$t^3: A_3$

$t^2: A_2 - 3A_3$

$t: A_1 - 2A_2 + 3A_3$

$1: A_0 - A_1 + A_2 - A_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_3 = 1 \\ A_2 - 3A_3 = -2 \\ A_1 - 2A_2 + 3A_3 = 5 \\ A_0 - A_1 + A_2 - A_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 3 \\ A_1 = 4 \\ A_2 = 1 \\ A_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow (3, 4, 1, 1)^T$$ – Координаты многочлена

Задание:

4. **Найти матрицу перехода от базиса $\{e_1', e_2', e_3'\}$ к базису $\{e_1'', e_2'', e_3''\}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, если векторы обоих базисов заданы своими координатами в некотором базисе:**

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3' = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \; e_1'' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, e_2'' = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Матрица перехода T от базиса A к базису B: $B = A \cdot T$

$$\Rightarrow T = A^{-1} \cdot B$$

A — Старый базис

B — Новый базис

$$T = (e_1' \; e_2' \; e_3')^{-1} \cdot (e_1'' \; e_2'' \; e_3'')$$

B – Новый базис

$$T = (e'_1, e'_2, e'_3)^{-1} \cdot (e''_1, e''_2, e''_3)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot (3 - 21) - 2(2-7) + 3(6-3) = 1$$

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} -18 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -27 & -71 & -55 \\ 9 & 20 & 16 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}} \text{ — Ответ}$$

Задание:

5. Является ли линейным подпространством в пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ матриц порядка n подмножество, образованное следующими элементами:

а) матрицами с нулевой первой строкой;

б) нижнетреугольными матрицами;

в) невырожденными матрицами.

Решение:

а) Матрица с нулевой первой строкой.

Пусть W - рассматриваемое подпространство

1) Критерий ненулевого подпространства: Нулевая матрица состоит из всех нулей (первая строка соответственно тоже). Следовательно 0 принадлежит нашему подпространству.
2) Замкнутость относительно сложения: Если у матриц A и B первые строки нулевые, то и у матрицы (A+B) первая строка также нулевая.
3) Замкнутость относительно умножения на число: Если матрица A имеет нулевую первую строку, то тогда и матрица λA будет иметь нулевую первую строку.

Исходя из пунктов 1-3 делаем вывод, что W является подпространством. $\blacksquare$

б) Нижнетреугольные матрицы

Пусть W - рассматриваемое подпространство.

1) Критерий ненулевого подпространства: Нулевая матрица попадает под понятие нижнетрегольной матрицы, так как все элементы ниже диагонали матрицы равны нулю. Следовательно, 0 принадлежит нашему подпространству.
2) Замкнутость относительно операции сложения: Если A и B - нижнетреугольные матрицы, то:

При $i < j: \; a_{ij} = 0, \; b_{ij} = 0 \Rightarrow (A+B)_{ij} = 0 + 0 = 0$

Делаем вывод, что (A+B) также является нижнетреугольной матрицей

3) Замкнутость относительно операции умножения на число: Если A - нижнетреугольная, то:

При $i < j: \; a_{ij} = 0 \Rightarrow (\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot 0 = 0$

Следовательно, λA будет являться также нижнетреугольной:

Исходя из пунктов 1-3 делаем вывод, что W является подпространством $\blacksquare$

в) Невырожденные матрицы

Пусть U - рассматриваемое подпространство.

1) Нулевая матрица: Так как определитель нулевой матрицы равен 0, то эта матрица не принадлежит U.

2) Замкнутость относительно сложения: При сумме двух невырожденных матриц может получится вырожденная матрица. Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \det = 1 \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det B = 1$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A + B) = 0$$

3) Замкнутость относительно операции умножения на число: Если A - невырожденная матрица, то $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. При λ =0 получаем нулевую матрицу (вырожденную).

Из пунктов 1-3 следует, что U не является подпространством. ■