DES MACHINES AUX BIMODULES (*)

par René GUITART

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Les machines de Mealy, avec entrées et sorties des catégories, mises en parallèle ou en série, déterminent une bicatégorie MAC qui est aussi bicatégorie de Kleisli de la bimonade $Cat//\_ = \mathbb{D}$ sur CAT (4).

G.M. Kelly (6) avec les clubs a montré le rôle des catégories Cat//X pour les problèmes de cohérences, et déjà Giraud avait montré le rôle des Ens/X et Ens//X dans l'étude des méthodes de descente.

Dans (5) nous avons, Van den Bril et moi, montré que Cat//X résolvait un problème de lax-cocomplétion. Cela est du reste lié au théorème (à paraître) où j'ai démontré que les (pseudo)-algèbres de la (bi)monade $\mathbb{D}$ sont les 2-catégories lax-cocomplètes, ce qui est à rapprocher du fait que les algèbres de la monade des parties sur Ens sont les ensembles ordonnés complets. Le "dictionnaire" dans l'introduction de (5) présente d'autres arguments suggérants que les machines sont un bon candidat pour être une théorie des relations dans CAT.

(*) U. PARIS VII, avril 1978.

Dans le point de vue de Street (8) les machines jouent plutôt le rôle d'applications partielles, ceci étant basé sur l'idée que dans CAT les fibrations jouent un rôle analogue au rôle des injections dans Ens.

On connaît encore deux candidats au rôle de relations dans CAT : les profoncteurs (aussi appelés distributeurs , couples de catégories d'opérateurs, bimodules - suivant les auteurs), les 2-profoncteurs (ou 2-distributeurs) que j'appellerai ici des <u>bimodules</u>.

Il importe donc de comparer entre elles les trois bicatégories MAC, PROF et BIM.

Puisque le foncteur disc : Ens $\longrightarrow$ CAT a un adjoint à droite et un adjoint à gauche, il commutte à toutes les limites et colimites, et en particulier aux produits et aux conoyaux, et il induit donc un plongement PROF $\longrightarrow$ BIM.

Ici je prouve que l'<u>on a un plongement</u> MAC $\longrightarrow$ BIM. Puisque MAC $\cong$ Kl($\mathbb{D}$), ce résultat contient en particulier une description des lax-colimites en terme de colimites (sur cette question voir aussi Gray (3)).

La preuve résulte de deux idées : la première est de montrer que les <u>lax-cofins cartésiennes</u> (qui sont des animaux universels inductifs) <u>peuvent s'écrire de manière projective si les variables sont séparées</u>, et la seconde est de prouver que <u>les plongements</u> Cat//X $\xrightarrow{j_X}$ $Cat^{X^{op}}$ $\longrightarrow$ Fib X <u>transforment la lax-composition des machines en la lax-composition des bimodules</u> (et ensuite, en tuant les 2-cellules, on passe du niveau "lax" au niveau strict, soit le théorème).

L'existence des plongements Cat//X $\longrightarrow$ Fib X suggère de comparer la solution de J. Celeyrette au problème d'extension de Kan dans Fib X, à la solution du problème d'extension de Kan dans Cat//X que j'avais donnée deux ans avant (voir (4), (5) § 6). Je pense aussi que Fib X pourrait être un outil plus général que Cat//X et les clubs pour les problèmes de cohérence.

Après les bimodules X $\longrightarrow$ $Cat^{Y^{op}}$, un outil plus délicat à mettre au point est donc un calcul de relations plus général, qui prendrait en charge la description et l'analyse des questions de cohérence. A cet effet je propose le calcul des <u>pseudomodules</u> i.e. des pseudofoncteurs $X \longrightarrow \mathrm{Fib}\, Y$. Ces pseudomodules constituent un système multiplicatif plus complexe qu'une bicatégorie, dont je repousse à plus tard l'élucidation complète. Ici je donne une façon explicite de traiter les pseudomodules et plus généralement je pose le problème des <u>hypermodules</u>. C'est surtout en vue de calculs futurs sur les pseudomodules et les hypermodules que je prouve le plongement $\mathrm{MAC} \longrightarrow \mathrm{BIM}$ de façon détaillée, reproduisant, à côté des deux idées clés signalées plus haut, plusieurs points du folklore bien connus.

§ 1. CALCUL DES LAX-COFINS A VARIABLES SEPAREES, FIBRATIONS ET COFIBRATIONS.

La notion générale de lax-cofin cartésienne (voir (2,b) chp. II p.46 et (7) chp. 4, p.34) étend les définitions de (3), et se réduit dans le cas des 2-catégories à la définition de (2,a), dont il faut pour la suite rappeler l'énoncé dual. Soit $S : \underline{A}^{op} \times \underline{A} \longrightarrow \underline{K}$ un 2-foncteur. On appelle <u>lax-cowedge</u> (lcw) de base S et sommet $K \in \underline{K}_o$, la donnée d'une famille $(w_A : SAA \longrightarrow K)$ de 1-flèches et d'une famille $(w_f : w_A . SfA \longrightarrow w_{A'} . SA'f)$ de 2-flèches, telles que $A \in \underline{A}_o$, $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ dans A_1, et $1 : f \longrightarrow f_1 : A \longrightarrow A_1$ dans A_2 on ait :

$$\text{LCW 1 :} \qquad w_{1_A} = 1_{w_A}$$

$$\text{LCW 2 :} \qquad w_{f'.f} = (w_{f'} . SA''f).(w_f . Sf'A')$$

$$\text{LCW 3 :} \qquad w_{f_1} . (w_A . S1A) = (w_{A_1} . SA_1 1) . w_f$$

On appelle <u>modification</u> du lcw (w_A, w_f) de sommet K et base S vers le lcw $(\bar{w}_A, \bar{w}_f)$ de sommet K et base S, la donnée d'une famille $(m_A : w_A \longrightarrow \bar{w}_A)$ de 2-flèches telles que, pour tout $f : A \longrightarrow A'$ dans A_1, on ait

$$\text{MLCW :} \qquad \bar{w}_f . (m_A . SfA) = (m_{A'} . SA'f) . w_f$$

On appelle <u>lax-cofin cartésienne</u> du 2-foncteur $S : \underline{A}^{op} \times \underline{A} \longrightarrow \underline{K}$ un lcw (w_A, w_f) de sommet un objet K de $\underline{K}$ et tel que :

1° Pour tout lcw (w'_A, w'_f) de base S et sommet $K' \in \underline{K}_o$, il existe une unique 1-flèche $h : K \longrightarrow K'$ telle que, pour tout $A \in A_o$ et tout $f : A \longrightarrow A' \in A_1$, on ait

$$h . w_A = w'_A \quad \text{et} \quad h . w_f = w'_f .$$

2° Pour toute modification (m_A) de (w'_A, w'_f) vers $(\bar{w}'_A, \bar{w}'_f)$ il existe une unique 2-flèche $u : h \longrightarrow \bar{h}$ (où h et $\bar{h}$ sont les flèches induites de w' et $\bar{w}'$ suivant le 1°) telle que, pour tout A $\underline{A}_o$ on ait

$$u.w_A = m_A.$$

On écrit alors

$$K = \text{cart-}\overrightarrow{\int}^A SAA.$$

Considérons maintenant une catégorie $\underline{A}$, et regardons-là, pour utiliser la définition ci-avant, comme une 2-catégorie dégénérée où les 2-morphismes sont les seuls $Id_f : f \Longrightarrow f$ avec f 1-morphisme. Soit aussi donné $S : \underline{A}^{op} \times \underline{A} \longrightarrow Cat$ un foncteur. On adopte les conventions suivantes :

Un objet de $S(A',A) = SA'A$ est noté $A' \overset{l}{- - \rightarrow} A$, et un morphisme $l \xrightarrow{i} l'$.
Pour $f : A \longrightarrow A'$ dans $\underline{A}$ on a $SAA \xleftarrow{SfA} SA'A \xrightarrow{SA'f} SA'A'$, et on pose

$$SfA(l \xrightarrow{i} l') = lf^A \xrightarrow{if^A} l'f^A = lf \xrightarrow{if} l'f$$
$$SA'f(l \xrightarrow{i} l') = f_{A'}.l \xrightarrow{f_{A'}.i} f_{A'}.l' = fl \xrightarrow{fi} fl'$$

Pour un B arbitraire de $\underline{A}_o$ on pose $SfB = f^B$, $SAf = f_B$, $SfB(j) = jf^B$, $SBf(k) = f_B k$.

On désigne par $\underline{GS}$ le graphe orienté dont les sommets sont les couples (A, u), $A \in \underline{A}_o$, $u \in SAA$, et dont les arcs sont répartis en deux classes, à savoir les arcs "verticaux" $(A, u) \xrightarrow{(A,\ t)} (A, v)$ avec $u \xrightarrow{t} v \in SAA$, et les arcs "horizontaux" $(A, lf) \xrightarrow{/f, l/} (A', fl)$ avec $A \xrightarrow{f} A' \in \underline{A}$ et $A' \overset{l}{- - \rightarrow} A \in SA'A_o$.
<u>Définition</u>. On appelle <u>glueing de</u> S et on note GS la catégorie engendrée librement par le graphe $\underline{GS}$ ci-avant et par les relations 1 à 5 ci-après :

1 - $/Id_A, u/ \sim Id_{(A,\ u)}$, pour $u \in SAA$.

2 - $(A, Id_u) \sim Id_{(A,\ u)}$, pour $u \in SAA$.

3 - $(A, i)(A, j) \sim (A, i.j)$, pour $u \xrightarrow{j} v \xrightarrow{i} w$ dans SAA.

4 - $(A', fi)/f, l/ \sim /f, l'/(A, if)$, pour $A \xrightarrow{f} A'$ dans $\underline{A}$ et $l \xrightarrow{i} l'$ dans $SA'A$.

5 - $/g, f_{A''} m//f, mg^A/ \sim /gf, m/$, pour $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{g} A''$ dans $\underline{A}$ et $A'' \overset{m}{- - \rightarrow} A$ dans $SA''A$.

On détermine ensuite pour tout $A \in \underline{A}_o$, un foncteur $gS_A : SAA \longrightarrow GS$ par

$$gS_A(u \xrightarrow{t} v) = (A, t)$$

et pour tout $f : A \longrightarrow A'$ une transformation naturelle $gS_f : gS_A.SfA \longrightarrow gS_{A'}.SA'f$ par

$$gS_f(l) = /f, l/.$$

<u>Lemme 1</u> : On a

$$GS \underset{g}{\cong} \text{cart-}\overrightarrow{\int}^A SAA.$$

La vérification est aisée et laissée au lecteur.

Définition. Nous dirons que le foncteur $S : \underline{A}^{op} \times \underline{A} \longrightarrow$ Cat est à variables séparées (cartésiennement) si l'on a un foncteur $P : \underline{A} \longrightarrow$ Cat et un foncteur $Q : \underline{A}^{op} \longrightarrow$ Cat tels que

$$S(A', A) = Q(A') \times P(A).$$

On écrira alors $S = Q \times P$.

Soit $S = Q \times P$ à variables séparées, et $f : A \longrightarrow A'$ dans $\underline{A}$. On a

$$SAA \xleftarrow{SfA} SA'A \xrightarrow{SA'f} SA'A' = QA \times PA \xleftarrow{Qf \times Id_{PA}} QA' \times PA \xrightarrow{Id_{QA'} \times Pf} QA' \times PA'$$

et, si on écrit un l de $SA'A$ sous la forme $l = (l_Q, l_P)$ avec $l_Q \in QA'$ et $l_P \in PA$, on a

$$lf = (l_Q, l_P)f = (l_Q f, l_P) \qquad \text{avec } l_Q f = Q(f)(l_Q),$$
$$fl = f(l_Q, l_P) = (l_Q, fl_P) \qquad \text{avec } fl_P = P(f)(l_P).$$

On désigne par $P \overset{\rightleftarrows}{\diamond} Q$ ou $Q \overset{\leftrightarrows}{\diamond} P$ (lire : "P losange Q") la catégorie dont les objets sont les couples $(A, (q, p))$ où $A \in \underline{A}_o$, $q \in QA$, $p \in PA$, et où un morphisme de $(A, (q, p))$ vers $(A', (q', p'))$ est un triplet (f, n, m) où $f : A \longrightarrow A' \in \underline{A}$, $n : q \longrightarrow q'f \in QA$, $m : fp \longrightarrow p' \in PA'$. La composition dans $P \overset{\rightleftarrows}{\diamond} Q$ est donnée par

$$(f', n', m').(f, n, m) = (f'.f,\ n' f.n,\ m'.f'm)$$

et est schématisée par le dessin

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "q"] & \\ P \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "p'"] \arrow[dr, "p''"'] & A' \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "f'"] & Q \\ & A'' \arrow[ur, "q''"'] & \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} & A \arrow[dd, "f'.f"] \arrow[dr, "q"] & \\ P \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "p''"'] & & Q \\ & A'' \arrow[ur, "q''"'] & \end{tikzcd}$$

En particulier si Q (resp. P) est le foncteur constant sur 1, $P \overset{\rightleftarrows}{\diamond} Q$ est — conformément aux notations de (4) et (5) — noté KP (resp. $K'Q$).

Pour P et Q arbitraires, on a le produit fibré

$$\begin{tikzcd} P \overset{\rightleftarrows}{\diamond} Q \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "="] & K'Q \arrow[d, "k_P"] \\ KP \arrow[r, "k'_Q"'] & \underline{A} \end{tikzcd} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{tikzcd} P \overset{\rightleftarrows}{\diamond} Q \arrow[r] \arrow[d] & 1 \overset{\rightleftarrows}{\diamond} Q \arrow[d] \\ P \overset{\rightleftarrows}{\diamond} 1 \arrow[r] & \underline{A} \end{tikzcd}$$

Des calculs sur K et K' de (4) il faut se rappeler ici que si $Q : \underline{X}^{op} \longrightarrow$ Cat, on a $K'Q = K((-)^{op} \circ Q)^{op}$, et que pour $\underline{J} \xrightarrow{G} \underline{I} \xrightarrow{F}$ Cat on a

$$K(F \circ G) = G^{*}KF$$

i.e. on a les produits fibrés

$$\begin{tikzcd} K(F\circ G) \arrow[r] \arrow[d, "k_{FG}"'] & KF \arrow[r] \arrow[d, dash, "k_F"] & \mathrm{C\hat{a}t} \arrow[d, "k_{\mathrm{Id}_{Cat}} = \varphi"] \\ \underline{J} \arrow[r, "G"] & \underline{I} \arrow[r, "F"] & \mathrm{Cat} \end{tikzcd}$$

Rappelons aussi que le foncteur $K : CAT/Cat \longrightarrow CAT$ est adjoint à gauche au foncteur $D : CAT \longrightarrow CAT/Cat$ associant à une catégorie $\underline{X}$ le foncteur $d_{\underline{X}} : D\underline{X} \longrightarrow Cat : (F,f) \longmapsto F$, la catégorie $D\underline{X}$ ayant pour morphismes les (F,f) où $F \in Cat_1$ et avec la disposition
$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rr, bend left, phantom, "f"] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}.$$

Si on note $i_{\underline{X}} : Cat/\underline{X} \rightarrowtail D\underline{X}$ l'injection canonique, et $d_X^{nat} : Cat/X \overset{i_X}{\rightarrowtail} DX \xrightarrow{d_X} Cat$, on a pour $P : \underline{X} \longrightarrow Cat$

$$Nat(P, \ulcorner X \urcorner) = CAT/Cat(P, d_X^{nat}) = CAT(\varinjlim P, X) ;$$

et comme par ailleurs on avait

$$\text{Quasi-Nat}\,(P, \ulcorner X \urcorner) = CAT/Cat(P, d_X) = CAT(KP, X),$$

on a un morphisme induit par i_X :

$$\text{Lax-}\varinjlim\ P = KP \xrightarrow{\ \bar{I}_P\ } \varinjlim P.$$

<u>Remarque</u> : La construction $P \mathbin{\overset{\to}{\diamond}} Q$ comprend comme cas particuliers aussi bien KP que $K'Q$, i.e. aussi bien les lax-colimites que les colax-colimites. Précisément la proposition suivante montre que $P \mathbin{\overset{\to}{\diamond}} Q$, déterminé de manière projective, a d'autre part une propriété inductive.

<u>Lemme 2</u> : On a

$$P \mathbin{\overset{\to}{\diamond}} Q = \text{cart-}\overrightarrow{\int}^{A} QA \times PA$$

<u>Preuve</u> : En utilisant le lemme 1 il reste à comparer $P \mathbin{\overset{\to}{\diamond}} Q$ et GS (avec $S = Q \times P$). Pour cela on définit une application de comparaison $H : P \mathbin{\overset{\to}{\diamond}} Q \longrightarrow GS$ en associant à $(f, n, m) : (A, (q, p)) \longrightarrow (A', (q', p'))$ l'élément

$$H(f, n, m) = (A', (Id_{q'}, m))./f, (q', p)/.(A, (n, Id_p)).$$

On peut écrire un terme vertical :

$$(A, (i_Q, i_P)) = (A, (Id_{d_1 i_Q}, i_P))./Id_A, (d_0 i_Q, d_1 i_P)/.(A, (i_Q, Id_{d_0 i_P}))$$

et un terme horizontal :

$$/f, (1_Q, 1_P)/ = (A', (Id_{1_Q}, Id_{f1_P}))./f, (1_Q, 1_P)/.(A, (1_Q f, 1_P)),$$

Donc termes horizontaux et verticaux sont de la forme $H(f, n, m)$.

En tenant compte des conditions 4, 5 et 3 pour GS, on vérifie que le composé de deux termes de la forme $H(f, n, m)$ est encore de cette forme, et, GS étant engendrée par les horizontaux et les verticaux (de la forme $H(f, n, m)$), on voit que H est surjectif. Et en fait ce même calcul montre que H est un foncteur. Enfin pour montrer que H est injectif c.a.d. que tout élément de GS admet une unique présentation sous la forme $H(f, n, m)$, il suffit de montrer que les conditions 1 à 5 sur GS sont des conséquences de la formule de composition dans $P \overset{\rightarrow}{\diamond} Q$, dès lors que les éléments verticaux ou horizontaux sont présentés sous leur forme canonique du genre $H(f, n, m)$.

<u>Corollaire</u> : dans la situation
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "F"'] & B \\ & \mathrm{Cat} \end{tikzcd}$$

la quasi-coextension naturelle de F le long de T s'obtient sous la forme

$$\text{Quasi-CoExt.Nat}\,(F)_T(B) = \text{cart-}\overrightarrow{\int}^{A} B(T(-),B)(A) \times FA \;=\; F \overset{\rightarrow}{\diamond} B(T(-), B).$$

§ 2. LAX-COLIMITES, π_o ET COLIMITES DANS CAT, COMPOSITION DES PROFONCTEURS.

Les informations de ce § sont bien connues de tous les catégoriciens, et sont indispensables pour la suite. Comme elles ne sont à ma connaissance mises noir sur blanc que dans des textes diséminés, et partiellement, je montre ici comment on peut les obtenir très rapidement comme conséquence des propriétés des foncteurs $(-) \overset{\rightarrow}{\diamond} (.)$ et $\underline{X} \overset{\rightarrow}{\diamond}(.) = K$ (cf. § 1).

Soit $(\;)_o : \mathrm{Cat} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ le foncteur associant à une catégorie $\underline{X}$ l'ensemble $(\underline{X})_o = \underline{X}_o$ de ses objets, $\mathrm{diso} : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ son adjoint à gauche. Pour toute catégorie $\underline{X} = (X_2 \longrightarrow X_1 \underset{d_1}{\overset{d_o}{\rightrightarrows}} X_o)$ on a

$$\mathrm{Cat}(X, \mathrm{diso}\, V) = \left\{ f \in \mathrm{Ens}(X_o, V) \;/\; fd_o = fd_1 \right\} = \mathrm{Ens}(\mathrm{coker}(d_o, d_1), V)$$

et en définissant donc

1. $$X_1 \underset{d_1}{\overset{d_o}{\rightrightarrows}} X_o \xrightarrow{\;\mathrm{coker}\;} \pi_o \underline{X}$$

on a

2. $$\pi_o \dashv \mathrm{diso} \dashv (\;)_o .$$

Soit $F : \underline{I} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ un foncteur. Pour tout ensemble V on a la suite de bijections naturelles (résultant de la définition de $\varinjlim$, d'une propriété propre à diso, de la définition de K comme quasi-colimite, de $\pi_o \dashv \mathrm{diso}$) :

$\mathrm{Ens}(\varinjlim F, V) = \mathrm{nat}(F, \ulcorner V \urcorner) = \text{quasi-nat}(\mathrm{diso}\, F, \ulcorner \mathrm{diso}\, V \urcorner) = \mathrm{Cat}(K\mathrm{diso}\, F, \mathrm{diso}\, V)$
$= \mathrm{Ens}(\pi_o\, K\, \mathrm{diso}\, F, V)$.

on a donc

3. $\quad \varinjlim F = \pi_0 K \text{ disc } F.$

Avec $F_i = \underline{I}/i \xrightarrow{proj} \underline{I} \xrightarrow{F} Ens$, on a $\varinjlim F_i = F(i)$, et 3 donne

4. $\quad F(i) = \pi_0 K \text{ disc } F_i.$

Il vient alors successivement :

$$F(i) \cong \pi_0 K \text{ disc } F_i \cong \pi_0 K \text{ disc } (\underline{I}/i \xrightarrow{pr} \underline{I} \xrightarrow{F} Ens) \cong \pi_0(\, pr^* K \text{ disc } F)$$

$$\cong \pi_0((pr^* K \text{ disc } F)^{op}) \cong \pi_0(k^{op}_{\text{disc } F}{}^{*}(\underline{I}/i)^{op}) \cong \pi_0 K \text{ disc}(\underline{I}(-,i).k^{op}_{\text{disc } F})$$

soit

5. $\quad F(i) \cong \varinjlim (\, (K \text{ disc } F)^{op} \xrightarrow{k^{op}_{\text{disc } F}} \underline{I}^{op} \xrightarrow{\underline{I}(-,\, i)} Ens).$

Si $G : (K \text{ disc } F)^{op} \times \underline{I} \longrightarrow Ens$ est défini par $G((j,a),\, i) = \underline{I}(j,\, i)$, on a

$$(K \text{ disc } F)^{op} \times \underline{I} \xrightarrow{G} Ens \quad / \quad (K \text{ disc } F)^{op} \xrightarrow{k^{op}_{\text{disc } F}} \underline{I}^{op} \xrightarrow{Yon_{\underline{I}^{op}}} Ens^{\underline{I}}$$

et, la formule 5 s'écrivant $F(i) = \varinjlim (G(-,\, i))$, pour tout i, il vient

6. $\quad F = \varinjlim((K \text{ disc } F)^{op} \xrightarrow{k^{op}_{\text{disc } F}} \underline{I}^{op} \xrightarrow{Yon_{\underline{I}^{op}}} Ens^{\underline{I}}).$

Ensuite pour $p : \underline{A} \longrightarrow \underline{X}$ on a

$$\varinjlim (Yon_{\underline{X}^{op}} .p^{op})(i) = \varinjlim(\underline{A}^{op} \xrightarrow{p^{op}} \underline{X}^{op} \xrightarrow{\underline{I}(-,i)} Ens) = \pi_0 K \text{ disc } (\underline{I}(-,i).p^{op})$$

$= \pi_0((i/p)^{op}) = \pi_0(i/p)$, soit la formule

7. $\quad \varinjlim (\, Yon_{\underline{X}^{op}}.p^{op}) = \pi_0 \circ(-\,/p).$

Considérons maintenant un profoncteur $d : \underline{Y} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; \underline{X}$, c'est-à-dire une foncteur ordinaire $d : \underline{Y} \longrightarrow Ens^{\underline{X}^{op}}$, ou son transposé $D : \underline{X}^{op} \times \underline{Y} \longrightarrow Ens$; un élément a $D(x,\, y)$ est noté $x \overset{a}{\dashrightarrow} y$. On appelle __joint__ de d (ou de D) la catégorie notée Jd (ou JD) qui est définie comme la surcatégorie du co-produit $\underline{X} + \underline{Y}$ (coproduit dans CAT) schématisée par le graphe multiplicatif $\underline{Jd}$:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} & & \underline{Y} \arrow[ll, "d" description, "|" marking]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, dashed, "a"] & = & y \arrow[d, "g"] \\
x' \arrow[u, "f"] \arrow[rr, dashed, "d(f,g)(a) =: gaf"'] & & y'
\end{tikzcd}$$

La catégorie Jd est donc la catégorie ayant pour objets ceux de $\underline{X}$ et ceux de $\underline{Y}$, et engendrée par les flèches des types f, g et a, et par les relations de la forme $d(f,g)(a) =: gaf$.

Avec K et K' comme définis au § 1, on pose

$$R(d) \;=\; K(\,\underline{Y} \xrightarrow{\;d\;} \mathrm{Ens}^{\underline{X}^{op}} \xrightarrow{\;\;K'\;\;} \mathrm{CAT}).$$

R(d) est le graphe de la relation entre $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ définie par d ; c'est une catégorie bifibrée sur $\underline{X} \times \underline{Y}$, dont les objets sont les triplets $(x,\ x \xrightarrow{a} y,\ y)$ avec $x \in \underline{X}_o$, $y \in \underline{Y}_o$ et $a \in D(x, y)$, et dont les morphismes sont les "quatuors"

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "="] & y \arrow[d, "g"] \\
x' \arrow[r, dashed, "a'"'] & y'
\end{tikzcd}$$

Alors le quintette dans CAT

$$\begin{tikzcd}
K\,d \arrow[r] \arrow[d] & \underline{Y} \arrow[d] \\
\underline{X} \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & J\,d
\end{tikzcd}$$

est à la fois un comma et un co-comma.

On définit la catégorie "des dualités formelles"ou "duels" que l'on **note** $\underline{\mathrm{DUEL}}$ comme la catégorie dont les objets sont les triplets $(\underline{X},\ \underline{X} \overset{d}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+\;} \underline{Y},\ \underline{Y})$ avec $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ des catégories et d un profoncteur de $\underline{Y}$ vers $\underline{X}$,et où les morphismes sont les

$$\begin{tikzcd}
\underline{X}^{op} \times \underline{Y} \arrow[rr, "F^{op} \times G"] \arrow[dr, "D"'] & & \underline{Z}^{op} \times T \arrow[dl, "E"] \\
& \mathrm{Ens} &
\end{tikzcd} \qquad t : D \Rightarrow E \circ (F^{op}\times G)$$

En associant à toute catégorie son foncteur HOM , on détermine une injection

$$\mathrm{HOM} \;:\; \mathrm{CAT} \longrightarrow \mathrm{DUEL}$$

8. On a les adjonctions

$$J \;\dashv\; \mathrm{HOM} \;\dashv\; R\,.$$

Passons maintenant à la description de la bicatégorie PROF dont les objets sont les catégories et dont les morphismes sont les profoncteurs.

Si $d : \underline{Y} \,\not\to\, \underline{X}$ et $e : \underline{Z} \,\not\to\, \underline{Y}$, le composé $d \otimes e : \underline{Z} \,\not\to\, \underline{X}$ est défini par

$$d \otimes e \;=\; \overline{d} \circ e$$

avec $\overline{d} : \mathrm{Ens}^{\underline{Y}^{op}} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{X}^{op}}$ défini pour $V : \underline{Y}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ par $\overline{d}(V) = \varinjlim(d \circ k^{op}_{disc\ V})$

i.e. par extension de Kan inductive.

On a donc , compte tenu de la formule 3,

9. $\quad (d \otimes e)(z)(x) \;=\; \pi_o\, K\,\mathrm{disc}\,(K\mathrm{disc}\; e(z)^{op} \longrightarrow \underline{Y} \xrightarrow{\;d(\,)(x)\;} \mathrm{Ens})$

et donc, en posant, avec les notations du § 1,

10. $\quad \overleftarrow{\curlywedge}(z,x) \;=\; e(z,-) \overleftarrow{\diamond} d(-,x)$

on a le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \bar{\lambda}\, zx & \longrightarrow & \mathrm{Kdisc}\ e(z,-)^{op} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Kdisc}\ d(-,x) & \longrightarrow & \underline{Y} \end{array}$$

et comme (§ 1) $K(F \circ G) = G^{*}KF$, la formule 9 devient

11. $$(d \otimes e)(z)(x) = \pi_0\ \bar{\lambda}\, zx,$$

ce qui (formule 1) se calcul comme conoyau dans Ens :

12. $$\sum_{y,y'} d(y)(x) \times \underline{Y}(y,y') \times e(z)(y') \overset{d_0}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} \sum_{y} d(y)(x) \times e(z)(y) \xrightarrow{coker} \pi_0\, \bar{\lambda} zx\ .$$

Enfin, si l'on considère le bi-foncteur $Szx : \underline{Y}^{op} \times \underline{Y} \longrightarrow Ens$ définit par

$$Szx(y', y) = d(y)(x) \times e(z)(y')$$

on a, par définition, en notant $\underline{Y}^{\wedge}$ la catégorie co-subdivision de $\underline{Y}$ et $Szx^{\wedge}$: $\underline{Y}^{\wedge} \longrightarrow Ens$ le foncteur induit par Szx ($Szx^{\wedge}(y \leftarrow f \rightarrow y') = Szxyy \xleftarrow{Szxfy} Szxyy' \xrightarrow{Szxy'f} Szxy'y$)
que $\int^{y} Szx(y,y) = \underrightarrow{\lim}\ Szx^{\wedge} = \pi_0 KdiscSzx^{\wedge}$.
Or $KdiscSzx^{\wedge} = \bar{\lambda}\ zx^{\wedge}$ et puisque $\pi_0(\underline{X}^{\wedge}) = \pi_0(\underline{X})$ pour toute catégorie $\underline{X}$, on a

13. $$(d \otimes e)(z)(x) = \int^{y} d(y)(x) \times e(z)(y).$$

Si maintenant $P : \underline{I} \longrightarrow Cat$, d'après $disc \dashv (\ )_o$ on a un morphisme universel $u_P : disc.(\ )_o.P \longrightarrow P$, et d'après $\pi_o \dashv disc$ on a un $v_{Kdisc(\ )_oP}$ de $Kdisc(\ )_oP$ vers $disc\pi_o Kdisc(\ )_oP$; et si l'on considère le morphisme canonique (§ 1) $\bar{l}_P : KP \longrightarrow \underrightarrow{\lim}\ P$, on a une somme fibrée dans Cat :

$$\begin{array}{ccc} K\ disc\ (\ )_o\ P & \xrightarrow{K\ u_P} & KP \\ {\scriptstyle v_{Kdisc(\ )_oP}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \bar{l}_P} \\ dic\pi_o K\ disc\ (\ )_o\ P & \longrightarrow & \underrightarrow{\lim}\ P \end{array}$$

offrant un calcul des colimites dans Cat à partir des lax-colimites.
Plus généralement nous allons passer maintenant à la description des manières de composer les 2-profoncteurs ou bimodules.

§ 3. LES DEUX COMPOSITIONS DES BIMODULES.

Un <u>bimodule</u> $d : \underline{Y} \twoheadrightarrow \underline{X}$ est un foncteur ordinaire $d : \underline{Y} \longrightarrow Cat^{\underline{X}^{op}}$.
On introduit Jd et Rd d'une manière analogue à celle employée au § 2 pour les profoncteurs. Ainsi, on pose

$$R(d) = K\ (K'{}_\circ d)$$

de sorte que les objets de Rd sont les triplets $(x, x \overset{a}{\dashrightarrow} y, y)$ où $x \in X_o$, $y \in Y_o$, $a \in d(y)(x)_o$, et les morphismes se notent $(f,t,g) : (x,a,y) \longrightarrow (x',a',y')$ et se représentent sous la forme

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, dashed, "a"] \arrow[d, "f"'] & y \arrow[d, "g"] \arrow[dl, bend right, "t"'] \\
x' \arrow[r, dashed, "a'"'] & y'
\end{tikzcd}$$

Le joint Jd sera une 2-catégorie engendrée par le 2-graphe multiplicatif $\underline{Jd}$:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} & & \underline{Y} \arrow[ll, "d"', "\shortmid\shortmid" marking] \\
x \arrow[rr, dashed, "a"] & & y \arrow[d, "g"] \arrow[dl, bend right, "t"'] \\
x' \arrow[u, "f"] \arrow[rr, dashed, "b"'] & & y'
\end{tikzcd}$$

avec, dans $d(y')(x')$, $t : d(f,g)(a) \twoheadrightarrow b$.

On note $d_X(f,t,g) = f$ et $d_Y(f,t,g) = g$, et on obtient le span associé à d de sommet $R(d)$ noté $\mathrm{Span}(d)$:

$$\mathrm{Span}(d): \quad \begin{tikzcd}
& K'(K_o d^{op}) \cong R(d) \cong K(K'_o d) \arrow[dl, "k'_{K_o d^{op}}"'] \arrow[dl, "d_X"] \arrow[dr, "d_Y"'] \arrow[dr, "k_{K'_o d}"] & \\
X & & Y
\end{tikzcd}$$

La composition lax

Avec les notations déjà introduites, pour d et e bimodules on définit le composé "lax" $d \diamondtimes e : \underline{Z} \overset{\shortmid\shortmid}{\longrightarrow} \underline{X}$ comme le bimodule défini par -au choix (vu les calculs du § 1 et en particulier le lemme 2)- l'une des formules suivantes :

Lemme 3 :
$$\begin{aligned}
(d \diamondtimes e)(z)(x) &= d(-)(x) \overrightarrow{\diamond} e(z)(-), \\
&= \mathrm{cart}\text{-} \overrightarrow{\int}^y e(z)(y) \times d(y)(x), \\
&= K(d(-)(x)_o k'_{e(z)(-)}) = K'(e(z)(-)_o k^{op}_{d(-)(x)}).
\end{aligned}$$

Donc $R(d \diamondtimes e)$ s'obtient comme produit fibré

$$\begin{tikzcd}
& & R(d \diamondtimes e) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dlll, bend right, "(d\diamondtimes e)_X"'] \arrow[drrr, bend left, "(d\diamondtimes e)_Z"] & & \\
& Rd \arrow[dl, "d_X"] \arrow[dr, "d_Y"'] & & Re \arrow[dl, "e_Y"] \arrow[dr, "e_Z"'] & \\
\underline{X} & & \underline{Y} & & \underline{Z}
\end{tikzcd}$$

Grâce aux formules sur les lax-cofins doubles et lax-cofins avec paramètres (voir (2) et (7)) ou tout simplement ici grâce à la manipulation des spans associés on obtient

$$(d \diamondtimes e) \diamondtimes f \cong d \diamondtimes (e \diamondtimes f)$$

mais l'opération $\diamondsuit\!\!\!\otimes$ est trop "lax" pour être unitaire.

A l'aide des calculs du § 2 on voit que si $d : \underline{Y} \nrightarrow \underline{X}$ et $e : \underline{Z} \nrightarrow \underline{Y}$ sont des profoncteurs, et si l'on note

$$(\mathrm{disc}\ d)(y)(x) = \mathrm{disc}(d(y)(x)) \quad \text{et} \quad (\mathrm{disc}\ e)(z)(y) = \mathrm{disc}(e(z)(y))$$

on a, pour tout z, x, $(d \otimes e)(z)(x) \cong \mathcal{K}_o(\ (\mathrm{disc}\ d \diamondsuit\!\!\!\otimes \mathrm{disc}\ e)(z)(x)\ )$, soit :

$$d \otimes e = \mathcal{K}_o(\mathrm{disc}\ d \diamondsuit\!\!\!\otimes \mathrm{disc}\ e).$$

La composition stricte

En tant que 2-profoncteurs ou CAT-profoncteurs, les bimodules d et e peuvent être composés suivant la formule de cofin (non lax) dans Cat :

$$\begin{aligned}(d \otimes e)(z)(x) &= \int^{y} e(z)(y) \times d(y)(x) \\ &= \underrightarrow{\lim}\ (e(z)(-) \times d(-)(x))^{\wedge}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $(d \otimes e)(z)(x)$ est la colimite dans Cat du systéme

$$\left((ezy \times dyx) \xleftarrow{ezf \times Id} (ezy' \times dyx) \xrightarrow{Id \times dfx} (ezy' \times dy'x)\right)_{f : y \to y' \in \underline{Y}} .$$

Autrement dit on a un conoyau dans Cat :

$$\sum_{y,\ y'} d(y)(x) \times Y(y,y') \times e(z)(y') \overset{d_o}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} \sum_{y} d(y)(x) \times e(z)(y) \xrightarrow{coker} (d \otimes e)(z)(x).$$

La formule du conoyau exhibe $(d \otimes e)(z)(x)$ comme quotient de $\left\{ \left(x \overset{a}{\Downarrow} y\ ;\ y \overset{b}{\Downarrow} z \right) \right\}$ par la relation d'équivalence bicompatible engendrée par les équivalences élémentaires

$$(\ x \overset{u}{\Downarrow} y\ ;\ y \xrightarrow{g} y' \overset{v}{\Downarrow} z\ ) \rightsquigarrow (\ x \overset{u}{\Downarrow} y \xrightarrow{g} y'\ ;\ y' \overset{v}{\Downarrow} z\ )$$

si bien qu'en notant $b \otimes a$ la classe de (b, a) on a

$$v\,g \otimes u = v \otimes g\,u.$$

Mais en fait si on revient (§ 1) à la propriété universelle des lax-cofins il est aisé de voir comment les cofins s'en déduisent : on a ici la propriété que $\int^{y} e(z)(y) \times d(y)(x)$ est la catégorie des fractions strictes de la lax-cofin cart-$\vec{\int}^{y} e(z)(y) \times d(y)(x)$ par la sous-catégorie

$$\vec{\int}^{y} \mathrm{disc}(e(z)(y) \times d(y)(x))_o$$

et on a donc une somme fibrée (généralisant celle de la fin du § 2) :

$$
\begin{tikzcd}
\overrightarrow{\int}^{y} \mathrm{disc}(e(z)(y) \times d(y)(x))_o \arrow[r] \arrow[d] & \overrightarrow{\int}^{y} e(z)(y) \times d(y)(x) \arrow[d] \\
\mathrm{disc}\,\pi_o \overrightarrow{\int}^{y} \mathrm{disc}(e(z)(y) \times d(y)(x))_o \arrow[r] & (d \otimes e)(z)(x)
\end{tikzcd}
$$

Ainsi grâce à l'écriture de $d \otimes e$ à l'aide de cofins, au lemme 2, et au lemme 3, il vient :

<u>Lemme 4</u>. On a

$$d \otimes e = \left[d \diamondtimes e \right]\left[\mathrm{disc}(d)_o \diamondtimes \mathrm{disc}(e)_o\right]^{-1}$$

Cette formule exhibe $(d \otimes e)(z)(x)$ comme quotient de $\left(\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & y \arrow[d, "f"] \\ x \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "u"] & y' \end{tikzcd} ; \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr] & \\ y' \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "v"] & z \end{tikzcd} \right)$

par la relation d'équivalence bicompatible engendrée par les équivalences élémentaires

$$\left(\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & y \arrow[d, "f"] \\ x \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "="] & y' \end{tikzcd} ; \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] y \arrow[d, "f"'] \arrow[dr] & \\ y' \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "="] & z \end{tikzcd} \right) \rightsquigarrow \mathrm{Id}_{(x \longrightarrow y \,;\, y \longrightarrow z)}.$$

On comparera à la description par conoyau de la page précédente.

<u>Remarque</u> : si en fait les bimodules d et e sont des profoncteurs (i.e. à valeurs dans Ens au lieu de Cat), alors ce lemme 4 redonne la formule de la fin du paragraphe sur la composition lax.

On désignera par BIM la bicatégorie dont les objets sont les catégories et dont les morphismes sont les bimodules, la composition étant définie par $\otimes$, et on désignera encore par

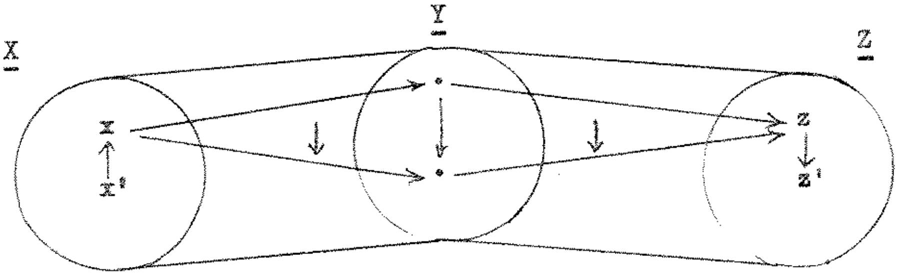
$$\mathrm{disc} : \mathrm{PROF} \longrightarrow \mathrm{BIM}$$

le plongement induit par

$$\mathrm{disc} : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Cat}.$$

<u>Remarque</u> : BIM est bien une bicatégorie, avec donc isomorphismes d'associativité, etc., à cause du lemme 4 et de l'associativité de la loi lax $\diamondtimes$.

<u>Remarque</u> : Le lemme 4 et la forme (cf. § 1) de $\diamondtimes$ permettent de visualiser la composition $\otimes$ de BIM ainsi



§ 4. FIN DE LA PREUVE DU THEOREME ET ILLUSTRATION.

A– <u>Le bimodule associé à une machine</u>.

Si $\underline{Y}$ et $\underline{Z}$ sont des catégories on pose, avec les notations du § 1,

$$(\underline{Z}, \underline{Y}) = (-)^{\underline{Z}} \circledast \underline{Y}^{(-)}$$

où $(-)^{\underline{Y}} : Cat \to Cat$ et $\underline{X}^{(-)} : Cat^{op} \to Cat$.

En particulier, avec les notations de (4) et (5) on a

$$(\emptyset, \underline{Y}) = D\,\underline{Y} = Cat//\underline{Y} \quad \text{(la catégorie des diagrammes sur } \underline{Y}\text{)},$$
$$(1, \underline{Y}) = \dot{D}\,\underline{Y} \quad \text{(la catégorie des diagrammes pointés sur } \underline{Y}\text{)}.$$

Donc $D\,\underline{X}$ a pour objets les foncteurs $p : \underline{A} \to \underline{X}$ avec $\underline{A} \in Cat$, et pour morphismes de p vers p' les couples (F,f) où $F : \underline{A} \to \underline{A}'$ est un foncteur, et $t : p \to p'.F$ une transformation naturelle. On désigne par $j_{\underline{X}} : D\,\underline{X} \to Cat^{\underline{X}^{op}}$ le foncteur

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "p"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\lambda}{\to}"] & B \arrow[dl, "q"] \\ & \underline{X} & \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} \underline{X}^{op} \arrow[d, bend right=50, "(-)/p"'] \arrow[d, bend left=50, "(-)/q"] \arrow[d, phantom, "\overset{t}{\to}"] \\ Cat \end{tikzcd}$$

avec t la transformation naturelle associant à $y \xrightarrow{f} x \in \underline{X}$ le carré commutatif

$$* \qquad \begin{tikzcd} x/p \arrow[r, "f/p"] \arrow[d, "t_x"'] \arrow[dr, phantom, "="] & y/p \arrow[d, "t_y"] \\ x/q \arrow[r, "f/q"'] & y/q \end{tikzcd}$$

où x/p est la catégorie comma $\begin{tikzcd} x/p \arrow[r] \arrow[d] & \underline{A} \arrow[d, "p"] \\ 1 \arrow[r, "x"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & \underline{X} \end{tikzcd}$, et où t_x est le foncteur

$$\left(\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h'"] & \\ pa \arrow[rr, "p\alpha"'] & = & pa' \\ a \arrow[rr] & & a' \end{tikzcd}\right) \overset{t_x}{\longmapsto} \left(\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "h'"] & \\ pa \arrow[rr, "p\alpha"'] \arrow[d, "a"'] & = & pa' \arrow[d, "a'"] \\ qFa \arrow[rr, "qF\alpha"'] & = & qFa' \\ Fa \arrow[rr, "F\alpha"'] & & Fa' \end{tikzcd}\right)$$

On a donc le carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "U_{\underline{X}}"] \arrow[d, "Yon_{\underline{X}}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & D\,\underline{X} \arrow[d, "j_{\underline{X}}"] \\ Ens^{\underline{X}^{op}} \arrow[r, "diso^{\underline{X}^{op}}"'] & Cat^{\underline{X}^{op}} \end{tikzcd}$$

où l'on voit que $j_{\underline{X}}$ est un prolongement de $Yon_{\underline{X}}$.

Inversement, soit $t : (-)/p \longrightarrow (-)/q$ une transformation naturelle donnée par, pour tout f, un carré $\ast$; on pose

$$t_{pa}(pa,\ Id_{pa},\ a) \quad = \quad (pa,\ \lambda_a : pa \longrightarrow qFa,\ Fa).$$

Il s'ensuit pour tout a et $h : x \longrightarrow pa$ que

$$t_x(x,\ h : x \longrightarrow pa,\ a) \;=\; (x,\ \lambda_a . h \;:\; x \longrightarrow qFa,\ Fa)$$

et puis pour $\alpha : a \longrightarrow a' \in \underline{A}$ on définit $F\alpha$ par

$$t_{pa}\left(\begin{tikzcd}[row sep=small] & pa \arrow[dr, "p\alpha"] & \\ pa \arrow[ur, equal] \arrow[rr, "p\alpha"'] & & pa' \\ a \arrow[rr, "\alpha"'] & & a' \end{tikzcd}\right) = \left(\begin{tikzcd}[row sep=small] & pa \arrow[dl, "\lambda_a"'] \arrow[dr, "p\alpha . \lambda_{a'}"] & \\ qFa \arrow[rr, "qF\alpha"'] & & qFa' \\ Fa \arrow[rr, "F\alpha"'] & & Fa' \end{tikzcd}\right).$$

On vérifie ensuite que F est un foncteur, que λ est naturelle, et que le passage de t à (F, λ) ainsi décrit est l'inverse de la transformation donnée par $j_{\underline{X}}$.

Regardons enfin ce qui se passe sur les 2-morphismes :

$$\begin{tikzcd} \underline{A} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "G"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow u"] \arrow[dr, "p"'] & & \underline{B} \arrow[dl, "q"] \\ & \underline{X} \arrow[u, phantom, "\varphi \; \gamma"] & \end{tikzcd} \quad \longmapsto \quad \begin{tikzcd} & \underline{X}^{op} \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ (-)/p \arrow[rr, bend left, "t"] \arrow[rr, bend right, "s"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow m"] & & (-)/q \\ & Cat & \end{tikzcd}$$

avec

$$\gamma = (qu).\varphi \qquad \text{et} \qquad (f/q).m_x \;=\; m_y.(f/p).$$

On voit aisément que la donnée de m modification équivaut à la donnée de u naturelle telle que $\gamma = (qu).\varphi$, la correspondance entre u et m s'écrivant

$$u_a \;=\; m_x(h,a).$$

on a donc prouvé :

<u>Lemme 5</u>. Pour toute catégorie $\underline{X}$ le 2-foncteur

$$j_{\underline{X}} \;:\; \mathbb{D}\,\underline{X} \longrightarrow \mathbb{C}at^{\underline{X}^{op}}$$

est injectif, plein et 2-plein, autrement dit est un plongement.

<u>Remarque</u>: si à ce lemme on ajoute que la restriction $(-)^{\S} : Cat/\underline{X} \longrightarrow Cat^{\underline{X}^{op}}$ de $j_{\underline{X}}$ admet (voir Gray (3)) pour adjoint $K' : Cat^{\underline{X}^{op}} \longrightarrow CAT/\underline{X}$, on peut inversement regarder $Cat^{\underline{X}^{op}}$ comme sous-catégorie de $CAT//\underline{X}$. On a donc <u>une spirale</u>

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & \cdots CAT//\underline{X} & \\ & Cat//\underline{X} \arrow[dl] & & & CAT/X \arrow[ul] \\ Cat^{\underline{X}^{op}} \arrow[dr] & & Cat/X \arrow[ul] & & \\ & \cdots \arrow[ur] & Fib\ \underline{X} \arrow[uurr] & & \end{tikzcd}$$

Soit maintenant $m = (P, S)$ une machine de $\underline{X}$ vers $\underline{Y}$ au sens de (4), soit un foncteur $P : \underline{X} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ et un foncteur $S : K\,P \longrightarrow \underline{Y}$ (avec le **foncteur K** rappelé au § 1) ; on a donc un span

$$\underline{X} \xleftarrow{\;k_P\;} K\,P \xrightarrow{\;S\;} \underline{Y}\,.$$

On lui associe par l'adjonction $K \dashv D$ de (4) un foncteur

$$\underline{X} \xrightarrow{\;m^+\;} D\,\underline{Y}$$

par

$$(x \xrightarrow{f} x') \longmapsto \begin{tikzcd} Px \arrow[rr, "Pf"] \arrow[dr, "i_x"'] & \arrow[d, phantom, "\alpha_f"] & Py \arrow[dl, "i_y"] \\ & KP \arrow[d, "S"] & \\ & \underline{Y} & \end{tikzcd}$$

avec $\alpha_f(u) = (f.u,\ f,\ u)$, où $f.u =: P(f)(u)$.

Et puis en transposant le composé $j_{\underline{Y}}.m^+$ en un foncteur $m^- : \underline{Y}^{op} \times \underline{X} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ on a donc

$$m^-(y,x) \quad = \quad y/(S.i_x).$$

On en déduit par un petit calcul que $R(m^-) = \underline{Y}/S$ et que $\mathrm{Span}(m^-)$ est isomorphe à $(p_m\ ,\ q_m)$ dans la figure

$$\mathrm{Span}(m^-) \simeq \bar{m} \qquad \begin{tikzcd} & & \underline{Y}/S \arrow[dll, "p_m"'] \arrow[d, "r"] \arrow[ddr, "q_m"] & \\ & & K\,P \arrow[dll] \arrow[d, "S"'] \arrow[r, phantom, "\text{comma}"] & {} \\ \underline{X} & & \underline{Y} \arrow[r, equal] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

B– Lax-composition des machines et lax-composition des bimodules.

Si l'on considère un carré comma
$$\begin{tikzcd} \underline{R} \arrow[r] \arrow[d, "V'"'] & \underline{L} \arrow[d, "V"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] \\ \underline{K} \arrow[r, "S"'] & \underline{Y} \end{tikzcd}$$
, alors $V' = k_r$ avec

$r : \underline{K} \longrightarrow \mathrm{Cat} : u \longmapsto r(u) = V^*(\underline{Y}/S(u) \longrightarrow \underline{Y})$.

Si de plus on a un $k_P : \underline{K} \longrightarrow \underline{X}$, alors $k_P.k_r = k_g$, avec $g = K_{\underline{X}}.D\,r.1_P$ (voir (4) p.13, lemme 2), c'est-à-dire avec

$$g(x) = K(P(x) \xrightarrow{\;i_x\;} K\,P = K \xrightarrow{\;r\;} \mathrm{Cat}) \;=\; i_x^*(k_r).$$

On a par suite une lax-composition $(Q, T) \otimes (P, S) = (g, T_\circ S^-)$:

$$\begin{tikzcd} & & \underline{R} \arrow[dl, "k_r"'] \arrow[dr, "S^-"] & & \\ & K\,P \arrow[dl, "k_P"'] \arrow[dr, "S"'] \arrow[rr, phantom, "\text{comma}"] & & \underline{K}\,Q \arrow[dl, "k_Q"] \arrow[dr, "T"] & \\ \underline{X} & & \underline{Y} & & \underline{Y} \end{tikzcd}$$

Lemme 6. Soit $m = (P, S) : \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ et $n = (Q, T) : \underline{Y} \longrightarrow \underline{Z}$ deux machines ; avec les définitions de la page précédente on a

$$\overline{n \diamondtimes m} = \overline{n} \diamondtimes \overline{m}.$$

Preuve : cela se voit en décrivant explicitement un élément du produit fibré de $\underline{Y}/S \longrightarrow \underline{Y}$ et $\underline{Z}/T \longrightarrow \underline{Y}$, et avec la définition de $\overline{n \diamondtimes m}$.

Remarque : dans la lax-composition des machines on obtient une machine $\underline{X} \xleftarrow{\;k_g\;} \underline{R} \longrightarrow \underline{Z}$ avec $k_g = k_P \cdot k_r$, et dans la composition ordinaire (par produits fibrés) il vient une machine $\underline{X} \xleftarrow{\;k_w\;} \underline{D} \longrightarrow \underline{Z}$, avec $k_w = k_P \cdot (S^{*} k_Q)$.

Pour comparer ces modes de composition des machines, on peut comparer les cofibrations k_g et k_w ; on obtient :

$$\begin{tikzcd}
w(x) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & \underline{D} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & K\,Q \arrow[d, "k_Q"] \\
P(x) \arrow[r, "i_x"'] & K\,P \arrow[r, "S"'] & \underline{Y}
\end{tikzcd}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{tikzcd}
g(x) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "pb"] & \underline{R} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{comma} \swarrow"] & K\,Q \arrow[d, "k_Q"] \\
P(x) \arrow[r, "i_x"'] & K\,P \arrow[r, "S"'] & \underline{Y}
\end{tikzcd}$$

Pour la suite on pose

$$P_x = (\; w(x) \rightarrowtail \underline{D} \longrightarrow K\,Q \xrightarrow{\;T\;} \underline{Z} \;).$$

C- Composition des machines et composition des bimodules.

Considérons avec les notations ci-dessus le composé $n \otimes m$ des machines n et m (défini par produit fibré, et représenté par $\underline{D}$) et le composé "lax" $n \diamondtimes m$ (défini par comma, et représenté par $\underline{R}$).

On a donc $(n \otimes m)^{\sim} : \underline{Z}^{op} \times \underline{X} \longrightarrow \mathrm{Cat}$ qui vaut

$$(n \otimes m)^{\sim}(z, x) = z/P_x ,$$

et un morphisme de cette catégorie se dessine donc sous la forme

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "g"] \arrow[d, equal] & P_x(\bar{o}) \arrow[d, "P_x(\bar{t})"] \\
z \arrow[r, "g'"'] & P_{x'}(\bar{o}')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bar{o} \arrow[d, "\bar{t}"] \\
\bar{o}'
\end{tikzcd}
\qquad \text{avec } \bar{t} \in w(x), \text{ soit } k_w(\bar{t}) = \mathrm{Id}_x.$$

En détaillant (avec $\bar{o} = (o_P, o)$, $S(o_P) = k_Q(o)$, $o = (y, v)$, etc...), on arrive à associer à cette donnée un élément de $(n^{\sim} \diamondtimes m^{\sim})(z, x)$, à savoir

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[dd, "S(t_P)"] \arrow[dr, "{(\mathrm{Id}_y,\, v_P)}"] \arrow[dd, phantom, shift left=8ex, "\Downarrow t_P"] & \\
z \arrow[ur, "{(g, v)}"] \arrow[dr, "{(g', v')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow t"] & & x \\
 & y' \arrow[ur, "{(\mathrm{Id}_{y'},\, v'_P)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ceci détermine un foncteur injectif $i_{z,x} : (n \otimes m)^{\sim}(z, x) \longrightarrow (n^{\sim} \diamondtimes m^{\sim})(z, x)$.

En composant avec (lemme 4) le foncteur de passage aux fractions strictes par les horizontaux :

$$F_{z,x} : (n^{\sim} \otimes m^{\sim})(z, x) \longrightarrow (n^{\sim} \otimes m^{\sim})(z, x)$$

on obtient un foncteur de comparaisons

$$C_{z,x} = F_{z,x} \cdot i_{z,x} : (n \otimes m)^{\sim} (z, x) \longrightarrow (n^{\sim} \otimes m^{\sim})(z, x).$$

On tient alors compte des égalités

$$\begin{tikzcd}
& y \arrow[dr, "{(\beta,u)}"] \arrow[d, "g"] \arrow[d, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow t"] \arrow[d, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \theta"] & \\
z \arrow[ur, "{(\gamma,v)}"] \arrow[r, "{(\gamma',v')}"'] \arrow[dr, "{\beta'.(\gamma',v')}"'] & y' \arrow[r, "{(\beta',u')}"'] \arrow[d, "\beta'"] & x \\
& Sxu' \arrow[ur, "{(Id_{Sxu'}, \overline{u'})}"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& y \arrow[dr] \arrow[dd, "\beta' g"] \arrow[dd, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow \beta' t"] \arrow[dd, phantom, shift left=4ex, "\Downarrow \theta"] & \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & x \\
& Sxu' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& y \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "{(\beta,u)}"] & \\
z \arrow[ur, "{(\gamma,v)}"] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \beta' t"] & Sxu \arrow[r] \arrow[d, "Sx\theta"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow \theta"] & x \\
& Sxu' \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

et avec

$$G = \begin{tikzcd}
& y \arrow[dr, "{(\beta,u)}"] \arrow[dd, "g"] \arrow[dd, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow t"] \arrow[dd, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \theta"] & \\
z \arrow[ur, "{(\gamma,v)}"] \arrow[dr, "{(\gamma',v')}"'] & & x \\
& y' \arrow[ur, "{(\beta',u')}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
S_{z,x}(G) = \begin{tikzcd}
& Sxu \arrow[dr, "{(Id_{Sxu},u)}"] \arrow[dd, "Sx\theta"] \arrow[dd, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow \beta' t"] \arrow[dd, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \theta"] & \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & x \\
& Sxu' \arrow[ur, "{(Id_{Sxu'},u')}"'] &
\end{tikzcd}$$

on a, vu la définition de $F_{z,x}$ (voir lemme 4) :

$$F_{z,x} = F_{z,x} \circ S_{z,x}.$$

Cela prouve que $C_{z,x}$ est injectif sur l'image de $F_{z,x}$.

Ensuite on voit que $S_{z,x}$ est un foncteur et que si G est horizontal, $S_{z,x}(G)$ est une identité. D'après le lemme 4 on a donc un unique $\bar{S}_{z,x}$ tel que

$$\bar{S}_{z,x} \circ F_{z,x} = S_{z,x}.$$

Enfin on a $S_{z,x} \circ i_{z,x} = Id$, de sorte que $\bar{S}_{z,x} \circ (F_{z,x} \circ i_{z,x}) = S_{z,x} \circ i_{z,x} = Id$; et on a vu plus haut que $F_{z,x} \circ i_{z,x} \circ S_{z,x} = F_{z,x}$, soit $(F_{z,x} \circ i_{z,x}) \circ \bar{S}_{z,x} \circ F_{z,x} = F_{z,x}$, d'où $(F_{z,x} \circ i_{z,x}) \circ \bar{S}_{z,x} = Id$. Ainsi $\bar{S}_{z,x}$ et $F_{z,x} \circ i_{z,x}$ sont inverses l'un de l'autre, et on a établi le

<u>Lemme 7</u>. Soit $m : \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ et $n : \underline{Y} \longrightarrow \underline{Z}$ deux machines. On a :

$$\overline{n \otimes m} = \bar{n} \otimes \bar{m}.$$

Pour achever la preuve du théorème annoncé (introduction) il suffit alors de joindre à ce lemme 7 le lemme 5 et le théorème 1 de (4), afin d'observer que l'on a bien un plongement au niveau des 2-morphismes. On conclut :

THEOREME. <u>On a un plongement</u> MAC $\longrightarrow$ BIM <u>induit par les</u> $j_{\underline{X}}$.

<u>Observation</u> : en fait, au cours de la démonstration nous avons montré bien plus, à savoir que la compatibilité de MAC $\longrightarrow$ BIM avec les compositions $\otimes$ est un corollaire d'un phénomène plus fin i.e. la compatibilité au niveau lax (avec les

compositions $\diamondsuit$). C'est un peu comme si au lieu d'énoncer une propriété globale d'un groupe on énonçait une propriété d'un système générateur bien précis du groupe qui soit telle que la propriété envisagée pour le groupe s'en déduise trivialement. En effet les compositions lax sont des moyens 2 dimensionnels d'engendrer, d'analyser les compositions 1 dimensionnels. Probablement dans le futur il sera indispensable de maîtriser le calcul 2 dimensionnel.

D- Illustration : itération infinie de calculs.

Afin de comprendre ce qui suit, il importe de retenir que machines et bimodules portent bien leurs noms, en ce sens que les machines formalisent bien les machines calculatrices et les automates, et que les bimodules généralisent effectivement les modules et bimodules classiques de l'algèbre linéaire, la composition $\otimes$ étant bien "le" produit tensoriel. Dans cette perspective le théorème apparaît comme une procédure de linéarisation, du style du passage, pour un groupe G donné, des G-actions aux A(G)-modules . Par ce type de construction on peut donc espérer pouvoir étudier les problèmes d'algorithmique par des méthodes d'algèbre linéaire "généralisée". A titre d'exemple je vais maintenant expliquer tout à fait élémentairement comment une algèbre tensorielle décrit un calcul infiniement itéré.

Considérons le cas particulier d'une machine $(P, S) = m : \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$, où $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ sont des monoïdes, i.e. des catégories à un seul objet (noté x , resp . x'). On a alors que $\overline{m}$ est un $(\underline{X}, \underline{Y})$ - bimodule d'ensemble sous-jacent $m^{-}(x,x') = M$. On pose $E = P(x)$.
En fait M est une catégorie ayant pour classe d'objets $\underline{Y} \times E_o$, et où un morphisme de (y_1, u_1) vers (y_2, u_2) est un $z : u_1 \longrightarrow u_2 \in E$ tel que $S(x, z).y_1 = y_2$.
Supposons de plus que E soit un ensemble (catégorie discrète) ; alors M est un ensemble et on a

$$M \simeq Y \times E \quad ;$$

la loi de $(\underline{X}, \underline{Y})$-bimodule sur M est donnée par les actions

$$(y, u).y' = (y.y', u),$$
$$x.(y, u) = (S(x, u).y, x.u).$$

Quand, plus particulièrement encore $\underline{X} = \underline{Y} = \underline{I}$, de sorte que la machine m est complètement déterminée par un monoïde $\underline{I}$, un ensemble E, une action $a : \underline{I} \times E \rightarrow E$ de $\underline{I}$ sur E, et une opération de sortie i.e. un foncteur $S : \underline{I} \times_a E \longrightarrow \underline{I}$, on dit que m est un calculateur.

A titre d'exemple, voici comment à une machine de Turing se trouve associé un calculateur au sens ci-avant.

Soit T une machine de Turing dont l'ensemble des cases ou ruban est identifié à $\mathbb{Z}$, dont l'ensemble des états est E, l'ensemble des symboles à inscrire sur le ruban ou alphabet est A. Une telle machine est donc la donnée des ensembles finis A et E, d'un élément $o \in A$, d'un élément $o \in E$, et de trois applications

$$A \times E \xrightarrow{T_A} A, \quad A \times E \xrightarrow{T_E} E, \quad A \times E \xrightarrow{T_3} 3$$

avec $3 = \{-1, o, +1\}$, et pour tout $a \in A$, $T_A(a,o)=a$, $T_E(a,o)=o$, $T_3(a,o)=o$.
On désigne par $A^{(\mathbb{Z})}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Z} \to A$ a support fini, et pour $e \in E$, $n \in \mathbb{Z}$, $f \in A^{(\mathbb{Z})}$, on définit $f_{e,n}(p) = f(p)$ si $p \neq n$, $f_{e,n}(n)=T_A(f(n),e)$.

On pose

$$- \ d(e, n, f) = T_E(f(n),e)$$
$$- \ s(e, n, f) = (n + T_3(f(n), e), f_{e,n}).$$

Comme on sait le fonctionnement de la machine est décrit ainsi :

(a) au temps initial t le ruban porte le mot f, on observe la case n qui porte la lettre $f(n) = a$ et la machine est dans l'état e.

(b) entre le temps t et t+1 la machine <u>agit</u> en inscrivant dans la case n la lettre $T_A(a, e)$ à la place de la lettre a, en se plaçant dans l'état $T_E(a, e) = e'$, et en introduisant face à l'observateur la case $n + T_3(a, e) = n'$.

(c) au temps t + 1 le ruban porte le mot $f_{e,n} = f'$, on observe la case n' qui porte la lettre $f'(n') = a'$ et la machine est dans l'état e'.

(d) la machine s'arrête lorsqu'elle se trouve dans l'état o.

Si au temps t = o la machine est mise dans un état $e_o \neq o$ et que l'on observe la case n = o où est inscrit un symbole $\neq o$, et si est inscrit sur le ruban un mot f_o, le mot inscrit sur le ruban lorsque la machine s'arrêtera sera appelé $T_{e_o}(f_o)$, et on dira que (T,e_o) calcul la fonction $f_o \longmapsto T_{e_o}(f_o)$.
Le fonctionnement de notre machine de Turing T est donc décrit par la fonction

$$(e, (n, f)) \longmapsto (e', (n', f')) = (d(e, n, f), s(e, n, f))$$

et <u>la machine</u> T <u>s'identifie au calculateur</u> $(\mathbb{Z}\times A^{(\mathbb{Z})}, E, d, s)$.

Si nous revenons à un calculateur quelconque m, on définit de même la fonction que calcul m, en composant indéfiniement la machine m avec elle-même. Soit $\bar{m}$ le bimodule associé par le théorème à la machine m. L'algèbre tensorielle de $\bar{m}$ est

$$T(\bar{m}) = Id \oplus \bar{m} \oplus (\bar{m}\otimes\bar{m}) \oplus (\bar{m}\otimes\bar{m}\otimes\bar{m}) \oplus \dots = \bigoplus_{n \geqslant o} \bar{m}^{\otimes n} .$$

Alors $T(\bar{m})$ représente l'itération successive de $\bar{m}$, l'itérée infinie étant décrite comme $\lim_{\infty \leftarrow p} \left(\bigoplus_{k \geqslant p} \bar{m}^{\otimes k} \right)$. On espère ultérieurement caractériser les fonctions calculables par des conditions "de finitude" sur l'algèbre $T(\bar{m})$ d'une machine calculant une telle fonction.

§ 5. VERS LES HYPERMODULES.

A- Laxmodules.

Je ne sais pas a qui il faut attribuer la définition de lax-foncteur ; personnellement je l'ai apprise dans l'article de Street intitulé "Two constructions on lax functors" (Cahiers Top. Géo. Dif. XIII,3 (1972) p.217), et j'emploierai donc ses notations.

Définition : Soit $\underline{X}$ une catégorie et C une 2-catégorie ; un lax-foncteur

$$(W, w) : \underline{X} \dashrightarrow C$$

est la donnée de :

1) Pour tout $X \in \underline{X}_0$, un objet $W(X)$ de C.
2) Pour tout $f : X \longrightarrow Y \in \underline{X}$, un 1-morphisme $W(f) : W(X) \longrightarrow W(Y)$ de C.
3) Pour tout $X \in \underline{X}_0$, un 2-morphisme $w(X) : Id(W(X)) \Longrightarrow W(Id(X))$ de C.
4) Pour tout couple de flèches composables de $\underline{X}$, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, un 2-morphisme $w(g,f) : W(g).W(f) \Longrightarrow W(g.f)$.

Ces données sont assujetties aux axiomes

L 1) Pour tout $f : X \longrightarrow Y \in \underline{X}$, $w(f,1).(W(f)\ w(X)) = w(1,f).(w(Y)\ W(f)) = id.$

L 2) Pour tout triplet de flèches composables $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T$,

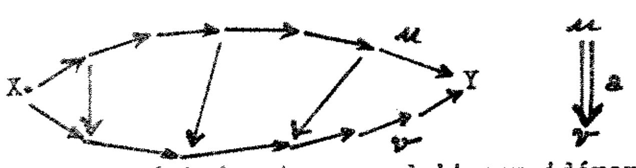
$$w(h,gf)(W(h)\ w(g,f)) \quad = \quad w(hg,f)(w(h,g)\ W(f)) \ .$$

Proposition (Van den Bril). Pour toute catégorie $\underline{X}$ il existe une 2-catégorie $\Delta\underline{X}$ et un lax-foncteur $\int_{\underline{X}} : \underline{X} \longrightarrow \Delta\underline{X}$ tels que la composition avec $\int_{\underline{X}}$ induise un isomorphisme de 2-catégories

$$\text{LAXFONC}\ (\underline{X},\ C) \quad = \quad \text{2-FONC}(\Delta\underline{X},\ C).$$

Preuve : En fait le résultat vient aisément de considérations générales, et il peut s'obtenir par exemple en travaillant avec les esquisses de catégories et de 2-catégories, et, "entre" les deux, l'esquisse de lax-foncteur. Mais le mérite de la preuve de Van den Bril est de donner une description très simple tout à fait explicite, qui permettra ultérieurement des calculs commodes pour les hypermodules. Voici donc sa description de $\Delta\underline{X}$:

Les objets de $\Delta\underline{X}$ sont ceux de $\underline{X}$, les 1-morphismes sont les chemins dans $\underline{X}$ de la forme $X \longrightarrow \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow \ \cdots \ \cdot \longrightarrow \cdot \longrightarrow Y$, et les 2-morphismes sont les "patching" de la forme



Pour décrire cette idée précisément, on doit considérer le foncteur d'oubli $V : \text{CAT} \longrightarrow \text{GRAPHE}$, son adjoint $L : \text{GRAPHE} \longrightarrow \text{CAT}$, et le cotriple des chemins sur CAT, induit par $L \dashv V$, noté (S, η , ν), avec

$\underline{SX} = LV\,\underline{X} =$ Chemins sur $\underline{X}$, avec $\eta_{\underline{X}} : \underline{SX} \to \underline{X}$ identité sur les objets et défini par la composition sur les morphismes, et avec $\nu_{\underline{X}} : \underline{SX} \longrightarrow S^2\underline{X}$ décrit par $(\ )_X \longmapsto (_2\ \ )_{2\,X}$ et $(u_p, \dots, u_1) \longmapsto (\,(u_p), \dots , (u_1)\,)$.

Alors Van den Bril observe que

$$\blacktriangle\,\underline{X} = \left[\begin{tikzcd} S^3\underline{X} \arrow[r, "S\eta S\underline{X}"] & S^2\underline{X} \arrow[r, shift left, "\eta S\underline{X}"] \arrow[r, shift right, "S\eta\underline{X}"'] & \underline{SX} \arrow[l, bend left, "\nu_{\underline{X}}"] \end{tikzcd}\right]$$

est une catégorie dans CAT, et c'est précisément la 2-catégorie $\blacktriangle\underline{X}$ cherchée. Ainsi $(\blacktriangle\underline{X})_{o1} = \underline{SX}$ et $(\blacktriangle\underline{X})_{o2} = S^2\underline{X}$. Un 2-morphisme de u vers v est donc un $a \in S^2\underline{X}$ tel que $\eta SX(a) = u$ et que $S\eta\,X(a) = v$ (l'effacement des parenthèses dans a donne u et en effectuant les parenthèses dans a on obtient v).

Les pseudo-foncteurs sont les lax-foncteurs où les 2-morphismes w(X) et w(g,f) sont des inversibles ; ils se représentent donc par les 2-foncteurs de Psd $\underline{X}$ vers C, où Psd $\underline{X}$ est une 2-catégorie de 2-fractions strictes convenable de $\blacktriangle\underline{X}$.

Définition. On appelle laxmodule (resp. pseudomodule) de $\underline{Y}$ vers $\underline{X}$ un élément de 2-FONC($\blacktriangle\underline{Y}$, 2-FONC($\blacktriangle\underline{X}^{op}$, Cat)) (resp. de 2-FONC(Psd $\underline{Y}$, 2-FONC(Psd $\underline{X}^{op}$, Cat))).

Le problème de la composition des laxmodules (resp. des pseudomodules) est d'abord celui de l'extension de la construction de Grothendieck (noté K et K' au § 1) du cas des foncteurs au cas des lax (resp. pseudo) foncteurs, i.e. il s'agit de décrire les lax-cofins de lax-foncteurs (resp. les lax-cofins de pseudo-foncteurs) et les cofins de lax-foncteurs (resp. et les cofins de pseudo-foncteurs). Ce qui promet d'être pénible dans l'état actuel des choses, et que je ne traiterai pas ici. Une voie d'accès possible à ces techniques est aussi de décrire une sorte de loi distributive entre $\blacktriangle$ et LAXFONC (resp. entre Psd et PSFONC).

B- Construction de bicatégories exactes.

La construction ci-après est due à Bozapalides, et encore inédite.

Etant donnée une catégorie $\underline{X}$, on construit une bicatégorie exacte PROF($\underline{X}$), dont les objets sont les pseudo-foncteurs de $\underline{X}^{op}$ vers PROF, en prenant pour morphismes de $p : \underline{X}^{op} \to$ PROF vers $q : \underline{X}^{op} \to$ PROF les transformations diagonales $d : p \dashrightarrow q$ une transformation diagonale d étant la donnée de

i - pour chaque $f : x \to x' \in \underline{X}$, une profoncteur $d(f) : q(x') \longrightarrow p(x)$, ii - pour chaque couple de flèches composables de $\underline{X}$, (f,g), un couple de morphismes de profoncteurs

$$p(g)\otimes d(f) \xrightarrow{d_{*}(f,g)} d(gf) \xleftarrow{d^{*}(f,g)} d(g)\otimes q(f)$$

ces données i et ii étant assujetties à des axiomes de cohérence par rapport à la composition et aux unités de $\underline{X}$.

Enfin la composition dans PROF($\underline{X}$)de $d : p \dashrightarrow q$ avec $e : q \dashrightarrow r$ est décrite par un conoyau

$$\coprod_{cba = f} d(a)\otimes q(b)\otimes e(c) \overset{d_o}{\underset{d_1}{\rightrightarrows}} \coprod_{ba = f} d(a)\otimes e(b) \longrightarrow (e\otimes d)(f)$$

avec
$$d_o.in_{(c,b,a)} = in_{(c,ba)}.\ d^{*}(a,b)\otimes e(c),$$
$$d_1.in_{(c,b,a)} = in_{(cb,a)}.\ d(a)\otimes e_{*}(b,c).$$

On construit les adjoints $\underline{\mathrm{Hom}}(d,\ )$ et $\overline{\mathrm{Hom}}(d,\ )$ à $(\ )\otimes d$ et à $d\otimes(\ )$comme dans le cas de PROF, par des formules de noyau, utilisant, respectivement, les $\overline{\mathrm{Hom}}$ et $\underline{\mathrm{Hom}}$ de PROF.

La construction de PROF($\underline{X}$)peut se généraliser au cas où $\underline{X}$ est une bicatégorie queconque $\mathbb{X}$, où PROF est remplacée par une bicatégorie exacte $\mathbb{B}$, et où p et q sont des morphismes de bicatégories ; on obtient alors une nouvelle bicatégorie exacte $\mathbb{B}(\mathbb{X})$.

C- Algorithme de relaxation (projet).

On conclut en utilisant d'un coup les deux idées séparées aux §§ 5.A et 5.B pour décrire très rapidement un principe générale de relaxation.

Supposons donnée une bicatégorie de base $\mathbb{B}^o$, et un morphisme $P : \mathbb{B}^o \longrightarrow$ BICAT (par exemple,en 5.A,B = CAT et P = Δ ou P = Psd) ; alors pour chaque $X \in \mathbb{B}^o_o$ on construit, comme en 5.B, $\mathbb{B}^o(PX)$ qui est une bicatégorie, et on définit la première relaxation de $\mathbb{B}^o$par P comme une bicatégorie $\mathbb{B}^1$ dont les homs sont donnés par
$$\mathbb{B}^1(X,Y) = \mathbb{B}^o(PY^{op})(PX),$$
les objets étant ceux de $\mathbb{B}^o_o$.

On définit de même les $\mathbb{B}^{n+1}$ à partir de $\mathbb{B}^n$, et $\mathbb{B}^{\infty}(X,Y) = \lim_n \mathbb{B}^n(X,Y)$.

Les éléments de $\mathbb{B}^{\infty}$ sont des P-hypermodules. Leur théorie générale qui reste à élaborer devrait décrire une part importante des propriétés de cohérence de P.

REFERENCES

(1) J.Bénabou, Les distributeurs, Rapport n°33, Séminaire de Maths.Pures, Louvain-la-neuve, 1973.

(2) S.Bozapalidès, a) Les fins cartésiennes, C.R.A.S. Paris, t 281, Série A,

p.597, Oct. 1975.
b) Théorie formelle des bicatégories, thèse Paris 7, mars 1976, Esq.math. n°25, Amiens 1976.

(3) J.W.Gray, Formal Category Theory : Adjointness for 2-categories, L.N.391, Springer (1974).

(4) R.Guitart, Remarques sur les machines et les structures, Cahiers Top. Géo. Dif. XV,2 (1974) p.113.

(5) R.Guitart & L.Van den Bril, Décompositions et lax-complétions, Cahiers Top. Géo. Dif. XVIII,4, (1977), p.333-407.

(6) G.M.Kelly, On clubs and doctrines, L.N. 420, p.181, Springer (1974).

(7) J.M.Sirot, Les fins cartésiennes, thèse Paris 7, juin 1975, Esq. Math. n°26, Amiens 1976.

(8) R.Street, Fibrations and Yoneda's lemma in a 2-category, L.N. 420, p.104, Springer (1974).

(9) M.Thiébaud, Self dual structure-semantics and algebraic categories, thèse, Halifax, 1971.

Université Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tours 45-55-5$^{\text{ème}}$ étage
2, Place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05
FRANCE