

**Università degli studi di Padova**  
**a.a. 2011/2012**

**Relazioni del corso  
Matematiche elementari da un punto di  
vista superiore**



10 febbraio 2012



# Indice

<b>1 “Prematematica” e Matematica antica</b>	<b>1</b>
1.1 Introduzione . . . . .	1
1.2 L’aritmetica . . . . .	2
1.2.1 Contare . . . . .	2
1.2.2 Contare per gruppi . . . . .	2
1.2.3 I sistemi di numerazione simbolici . . . . .	3
1.2.4 Le operazioni . . . . .	5
1.2.5 L’abaco . . . . .	7
1.2.6 I sistemi di numerazione posizionale . . . . .	7
1.2.7 Lo zero . . . . .	8
1.3 La geometria . . . . .	9
1.3.1 Filogenesi e ontogenesi . . . . .	9
1.3.2 Simmetria: i monumenti di Stonehenge . . . . .	11
1.3.3 Similitudine: i disegni di Nazca . . . . .	11
1.3.4 Il pi greco . . . . .	12
1.4 Cosa manca . . . . .	13
1.5 La linea di confine . . . . .	14
<b>2 Le antiche civiltà dell’America e dell’Asia</b>	<b>18</b>
2.1 Le civiltà precolombiane . . . . .	18
2.1.1 I Maya . . . . .	18
2.1.2 Gli Aztechi . . . . .	22
2.1.3 Gli Inca . . . . .	23
2.2 La matematica in Cina . . . . .	26
2.3 La matematica in India . . . . .	52
2.3.1 Il ruolo della matematica . . . . .	54
2.3.2 I <i>Sulvasutra</i> e i <i>Siddhanta</i> . . . . .	55

2.3.3	Opere successive: <i>Aryabhatiya</i> e <i>Brahmasphuta Siddhanta</i>	56
2.3.4	Bhaskara . . . . .	58
2.3.5	Il sistema di numerazione . . . . .	59
2.3.6	Operazioni e notazioni . . . . .	61
2.3.7	Teorema di Pitagora e interesse geometrico . . . . .	63
2.3.8	Estrazione di radici quadrate . . . . .	65
2.3.9	Successioni e potenze . . . . .	67
2.3.10	Il concetto di infinito . . . . .	68
<b>3</b>	<b>La matematica nella Grecia pre-euclidea</b>	<b>70</b>
3.1	Introduzione . . . . .	70
3.2	La Grecia Arcaica . . . . .	72
3.2.1	Civiltà cretese, fenicia e micenea . . . . .	72
3.2.2	L'età buia della Grecia . . . . .	73
3.2.3	Atene e Sparta . . . . .	74
3.2.4	Le guerre persiane e del Peloponneso . . . . .	77
3.3	Premesse per la nascita della scienza in Grecia . . . . .	78
3.3.1	Originalità del pensiero greco nei confronti del sapere orientale . . . . .	80
3.3.2	Il clima di libertà in Grecia . . . . .	81
3.3.3	Scuola medica di Cos e metodo scientifico . . . . .	82
3.3.4	Linee di sviluppo della scienza del VI e V sec. a.C. . . . .	82
3.3.5	Il problema delle fonti . . . . .	83
3.3.6	Le principali scuole del periodo classico . . . . .	85
3.4	Sistemi greci di enumerazione . . . . .	86
3.5	Talete di Mileto . . . . .	89
3.5.1	La vita . . . . .	90
3.5.2	La matematica di Talete . . . . .	92
3.5.3	L'importanza di Talete . . . . .	101
3.6	Pitagora e i pitagorici . . . . .	102
3.6.1	La vita . . . . .	102
3.6.2	La scuola pitagorica . . . . .	104
3.6.3	I Pitagorici e la musica . . . . .	107
3.6.4	Il numero come principio della realtà . . . . .	110
3.6.5	L'aritmogeometria . . . . .	112
3.6.6	Numeri pari e numeri impari . . . . .	117
3.6.7	La numerologia pitagorica . . . . .	118
3.6.8	La geometria pitagorica . . . . .	119

3.6.9	La scoperta dell'incommensurabilità . . . . .	124
<b>4</b>	<b>Zenone, Platone ed Eudosso</b>	<b>131</b>
4.1	Introduzione . . . . .	131
4.1.1	Contesto storico-culturale . . . . .	131
4.1.2	Contesto matematico . . . . .	132
4.2	Zenone di Elea . . . . .	134
4.2.1	Introduzione . . . . .	134
4.2.2	Paradosso della dicotomia . . . . .	135
4.2.3	Paradosso di Achille e della tartaruga . . . . .	136
4.2.4	Paradosso della freccia . . . . .	137
4.2.5	Paradosso dello stadio . . . . .	137
4.2.6	Possibili interpretazioni . . . . .	138
4.2.7	Influsso sulla matematica del tempo . . . . .	142
4.3	Platone . . . . .	143
4.3.1	I solidi platonici e Teeteto . . . . .	146
4.3.2	L'aritmetica e la geometria platoniche . . . . .	148
4.3.3	Influsso sulla matematica del tempo . . . . .	149
4.4	Eudosso . . . . .	150
4.4.1	Teoria delle proporzioni . . . . .	150
4.4.2	Metodo di esaustione . . . . .	152
4.5	Il concetto di infinito nel pensiero greco . . . . .	156
<b>5</b>	<b>Euclide</b>	<b>159</b>
5.1	Contesto storico e filosofico . . . . .	159
5.2	Biografia. . . . .	160
5.3	Opere di Euclide. . . . .	162
5.4	Opere perdute. . . . .	163
5.5	Opere pervenuteci. . . . .	164
5.6	Gli Elementi . . . . .	165
5.6.1	La struttura. . . . .	167
5.6.2	Libro I. . . . .	169
5.6.3	Libro II. . . . .	177
5.6.4	Libri III e IV. . . . .	178
5.6.5	Libro V . . . . .	179
5.6.6	Libro VI . . . . .	180
5.6.7	Teoria dei numeri . . . . .	180
5.6.8	Gli incommensurabili . . . . .	186

5.6.9	Geometria solida . . . . .	188
5.6.10	Conclusioni . . . . .	195
<b>6</b>	<b>Archimede</b>	<b>197</b>
6.1	Vita e morte . . . . .	198
6.2	Archimede, Eudosso ed Euclide . . . . .	199
6.3	Le opere . . . . .	200
6.3.1	Sui corpi galleggianti . . . . .	200
6.3.2	Sulle spirali . . . . .	201
6.3.3	Sulla misurazione del cerchio . . . . .	203
6.3.4	Sulla sfera e sul cilindro . . . . .	204
6.3.5	Sui conoidi e sui sferoidi . . . . .	206
6.3.6	Quadratura della parabola . . . . .	207
6.3.7	Arenario . . . . .	208
6.3.8	Sull'equilibrio dei piani . . . . .	209
6.3.9	Il libro dei lemmi . . . . .	212
6.3.10	Problema dei buoi . . . . .	212
6.3.11	Stomachion . . . . .	212
6.3.12	Il Metodo . . . . .	213
6.4	Archimede inventore . . . . .	219
6.4.1	Vite di Archimede . . . . .	220
6.4.2	Meccanismo di Anticitera . . . . .	221
6.4.3	Macchinari bellici . . . . .	223
6.5	Archimede e le onoreficienze al giorno d'oggi . . . . .	224
6.6	Considerazioni finali . . . . .	226
<b>7</b>	<b>I problemi classici</b>	<b>228</b>
7.1	I problemi geometrici . . . . .	228
7.1.1	I problemi nella geometria di Euclide . . . . .	228
7.1.2	Risolubilità dei problemi geometrici . . . . .	231
7.1.3	Applicazioni alla geometria elementare . . . . .	233
7.2	I tre problemi classici . . . . .	236
7.2.1	La quadratura di un cerchio . . . . .	237
7.2.2	La trisezione di un angolo . . . . .	242
7.2.3	La duplicazione del cubo . . . . .	247

<b>8 La Matematica in Arabia e la nascita dell'Algebra</b>	<b>256</b>
8.1 Introduzione. . . . .	256
8.1.1 Breve Storia dell'Arabia Medievale. . . . .	256
8.2 La Matematica di al-Khwārizmī. . . . .	259
8.2.1 La vita di al-Khwārizmī. . . . .	259
8.2.2 La restaurazione, il completamento, l'equilibrio. . . . .	260
8.2.3 Altri matematici di spicco. . . . .	263
8.2.4 Conclusioni. . . . .	264
8.3 Breve storia dell'infinito e di altri simboli. . . . .	264
8.3.1 I simboli di somma e sottrazione. . . . .	265
8.3.2 I simboli di radice quadrata ed $n$ -esima. . . . .	265
8.3.3 Notazione additiva per le potenze. . . . .	266
8.3.4 Un simbolo riservato all'incognita. . . . .	267
<b>9 Da Tartaglia a Cauchy: nascita e sviluppo del calcolo differenziale</b>	<b>271</b>
9.1 Duelli ed equazioni: la matematica italiana del '500 . . . . .	272
9.1.1 Contesto storico e matematico . . . . .	272
9.1.2 Niccolò Tartaglia . . . . .	273
9.1.3 Gerolamo Cardano . . . . .	275
9.2 La strada per il calcolo infinitesimale; il '600 . . . . .	277
9.2.1 Contesto storico . . . . .	277
9.2.2 René Descartes . . . . .	280
9.2.3 La scuola di Galileo e le dispute con Roberval . . . . .	297
9.2.4 Pierre Fermat . . . . .	299
9.2.5 Isaac Barrow . . . . .	303
9.2.6 Isaac Newton . . . . .	305
9.2.7 Wilhelm Leibniz . . . . .	310
9.3 Prima le foglie, poi le radici: diffusione e sviluppo del calcolo nel '700 . . . . .	316
9.3.1 Contesto storico e matematico . . . . .	316
9.3.2 I fratelli Bernoulli . . . . .	318
9.3.3 Leonhard Euler . . . . .	321
9.3.4 George Berkeley: i problemi delle fondamenta . . . . .	324
9.3.5 Augustin Cauchy . . . . .	325

<b>10 Analisi e Fisica Matematica nell'800</b>	<b>329</b>
10.1 Cenni storici: Analisi . . . . .	329
10.2 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) . . . . .	330
10.3 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) . . . . .	332
10.4 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) . . . . .	333
10.5 Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) . . . . .	335
10.6 Cenni storici: Fisica Matematica . . . . .	337
10.7 Pierre Simon Laplace (1749-1827) . . . . .	337
10.8 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) . . . . .	339
10.9 Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) . . . . .	340
10.10 Carl Friedrich Gauss (1777-1855) . . . . .	341
<b>11 Origini dell'algebra moderna</b>	<b>344</b>
11.1 Introduzione . . . . .	344
11.2 Le equazioni algebriche di grado superiore al quarto . . . . .	346
11.2.1 L'algebra nel XVIII secolo . . . . .	346
11.2.2 Lagrange, Waring e Vandermonde . . . . .	348
11.2.3 Il teorema di Abel-Ruffini . . . . .	352
11.2.4 Gli scarabocchi di Galois . . . . .	354
11.2.5 Le Disquisitiones di Gauss . . . . .	357
11.3 Nuove concezioni dell'algebra . . . . .	361
11.3.1 L'Analytical society . . . . .	361
11.3.2 Peacock . . . . .	362
11.3.3 Hamilton . . . . .	365
11.3.4 L'algebra di Boole . . . . .	371
11.4 Concetto di struttura . . . . .	375
11.4.1 Dedekind . . . . .	375
11.4.2 Kronecker . . . . .	377
11.4.3 I gruppi . . . . .	379
<b>12 Cantor e la teoria degli insiemi</b>	<b>398</b>
12.1 La vita . . . . .	398
12.2 Le opere . . . . .	401
12.3 Serie trigonometriche, numeri reali ed insiemi derivati . . . . .	402
12.3.1 Fourier e Dirichlet: lo sviluppo in serie e il concetto di funzione . . . . .	402
12.3.2 Generalizzazione del teorema . . . . .	403
12.3.3 Weierstrass e Dedekind: aritmetizzazione dell'analisi . . . . .	409

12.3.4	I numeri reali . . . . .	411
12.3.5	Gli insiemi derivati . . . . .	416
12.4	La potenza di un insieme . . . . .	419
12.4.1	L'infinito nel passato . . . . .	419
12.4.2	Breve nota introduttiva . . . . .	421
12.4.3	Maggiore, minore o uguale potenza . . . . .	422
12.4.4	Gli insiemi numerabili . . . . .	423
12.4.5	Relazione numerabile-continuo . . . . .	426
12.4.6	Le principali proprietà del continuo . . . . .	429
12.5	L'insieme delle parti . . . . .	443
12.6	Über unendliche lineare Punktmanigfaltigkeiten . . . . .	445
12.6.1	Articolo2 . . . . .	445
12.6.2	Articolo3 . . . . .	448
12.6.3	Articolo 4 . . . . .	456
12.7	L'infinito . . . . .	464
12.7.1	L'infinito proprio e improprio . . . . .	464
12.8	I numeri ordinali . . . . .	472
12.8.1	Costruzione dei numeri ordinali . . . . .	474
12.8.2	Relazione tra ordinali e cardinali . . . . .	480
12.8.3	Aritmetica degli ordinali . . . . .	482
12.9	L'ipotesi del continuo . . . . .	488
	Bibliografia . . . . .	490
<b>13</b>	<b>I paradossi e la crisi dei fondamenti della matematica</b>	<b>492</b>
13.1	Introduzione . . . . .	492
13.2	I paradossi . . . . .	493
13.3	La crisi dei fondamenti della matematica . . . . .	496
13.3.1	La scoperta della antinomie . . . . .	497
13.3.2	Le reazioni alla scoperta delle antinomie e la fine della crisi . . . . .	500
<b>14</b>	<b>Le geometrie non euclidee</b>	<b>504</b>
14.1	Introduzione . . . . .	504
14.2	Il V postulato di Euclide . . . . .	505
14.2.1	Gerolamo Saccheri . . . . .	505
14.3	Le geometrie non-euclidee . . . . .	511
14.4	I modelli . . . . .	517
14.5	Le geometrie non-euclidee oggi . . . . .	519

14.5.1	Metriche e assoluto . . . . .	520
14.5.2	Angolo tra due rette e parallelismo . . . . .	522
<b>15</b>	<b>Hilbert e il formalismo</b>	<b>526</b>
15.1	Biografia . . . . .	526
15.2	Hilbert ed i Fondamenti . . . . .	529
15.3	Finitismo . . . . .	530
15.4	Hilbert e l'intuizionismo . . . . .	532
15.5	La proposta formalista . . . . .	534
15.6	Dopo Gödel . . . . .	538
<b>16</b>	<b>Logicismo</b>	<b>541</b>
16.1	La nascita della tesi logicista . . . . .	541
16.1.1	L'ambiente filosofico e scientifico del fine '800 . . . . .	541
16.1.2	La nascita della logica matematica . . . . .	543
16.1.3	Aritmetizzazione dell'analisi . . . . .	544
16.2	Gottlob Frege . . . . .	547
16.2.1	Vita, opere, e pensiero . . . . .	547
16.2.2	Ideografia . . . . .	552
16.2.3	I saggi sulla filosofia del linguaggio . . . . .	559
16.2.4	Critiche ai contemporanei . . . . .	563
16.2.5	La definizione di numero naturale . . . . .	565
16.2.6	L'antinomia di Russell . . . . .	570
16.3	Giuseppe Peano . . . . .	575
16.3.1	Vita ed attività scientifica . . . . .	575
16.3.2	Gli assiomi di Peano . . . . .	578
16.4	Bertrand Russell . . . . .	581
16.4.1	Vita, opere e pensiero . . . . .	581
16.4.2	Teoria dei Tipi . . . . .	585
16.4.3	Gli assiomi . . . . .	588
16.4.4	Critiche e risposte . . . . .	591
16.5	Due obiezioni generali al logicismo . . . . .	592
16.5.1	L'obiezione di Quine . . . . .	592
16.5.2	Il primo teorema di incompletezza di Gödel: un colpo mortale per il logicismo? . . . . .	593
16.6	Il revisionismo di Ramsey . . . . .	594
16.7	Teoria di Zermelo–Fraenkel . . . . .	597
16.7.1	Assioma della scelta . . . . .	598

16.8 Neologicismo . . . . .	601
<b>17 L'intuizionismo</b>	<b>603</b>
17.1 Introduzione . . . . .	603
17.2 Luitzen Egbertus Jan Brouwer . . . . .	604
17.2.1 La filosofia di Brouwer . . . . .	605
17.2.2 Matematica e logica . . . . .	606
17.3 Arend Heyting . . . . .	610
17.3.1 Matematica e logica . . . . .	611
<b>18 Kurt Gödel</b>	<b>616</b>
18.1 La vita . . . . .	616
18.1.1 Cenni biografici su Kurt Gödel . . . . .	616
18.2 I teoremi di incompletezza . . . . .	622
18.3 L'aritmetica formale . . . . .	623
18.3.1 La numerazione di Gödel . . . . .	626
18.3.2 Dimostrazione e Sostituzione . . . . .	629
18.3.3 Io non sono dimostrabile . . . . .	630
18.3.4 Il Primo Teorema di Gödel . . . . .	631
18.3.5 Il Secondo Teorema di Gödel . . . . .	633
18.4 Interpretazioni dei teoremi di Gödel . . . . .	635
18.4.1 Interpretazioni postmoderne . . . . .	635
18.4.2 Interpretazione platonista . . . . .	636
18.5 Il Formalismo dopo i Teoremi di Gödel . . . . .	638

# Capitolo 1

## “Prematematica” e Matematica antica

di Davide Poggiali

### 1.1 Introduzione

Gli storici parlano di una differenza fra storia e preistoria, ponendo come linea di demarcazione fra le due la presenza di una testimonianza scritta; non è infatti possibile ricavare conclusioni sicure dall'analisi di oggetti antichi, ma solo ipotesi<sup>1</sup>.

Questa relazione presenta un'indagine sull'evoluzione dei concetti matematici fondamentali attraverso le civiltà preistoriche e antiche, cercando di dare più spazio all'evolversi di tali concetti piuttosto che ai meriti di chi li ha formalizzati<sup>2</sup>. Durante questo percorso ci chiederemo quale scoperta possiamo mettere come spartiacque fra una “prematematica” e la matematica.

---

<sup>1</sup>anche in questa relazione ciò che viene presentato con il modo indicativo, andrebbe al condizionale; in effetti molte delle testimonianze di cui siamo a conoscenza permettono solo di teorizzare in modo più o meno credibile quali fossero le reali conoscenze di cui disponevano gli uomini dell'epoca.

Le note (tante, forse troppe) avranno la funzione di raccogliere alcune idee emerse durante la presentazione, oltre a quella tradizionale di precisare alcuni concetti o esporre curiosità e considerazioni personali.

<sup>2</sup>questo è possibile in quanto proprio la scarsità di fonti ci lascia la libertà di mettere i secondo piano i protagonisti, spesso ignoti, delle scoperte matematiche, e di concentrarci sugli enti matematici esplorati durante queste epoche.

## 1.2 L'aritmetica

### 1.2.1 Contare

Contare è la prima forma di matematica sviluppata dall'uomo<sup>3</sup> e la prima testimonianza di questa attività si ha nella distinzione fra singolare e plurale nelle lingue di tutto il mondo comprese quelle odierne; successivamente si comincia a distinguere 1, 2, 3, 4, 5, poi molti.

Per esempio in alcune comunità aborigene si utilizza il seguente sistema:  
1 = mal, 2 = bulan, 3 = guliba, 4 = bulan-bulan, 5 = bulan-guliba,  
6 = guliba-guliba, che significa anche molti.

Possiamo immaginare che anche in molte civiltà dei nostri antenati non ci fosse l'esigenza di distinguere un elevato numero di oggetti. Tale esigenza nacque nel Paleolitico, quando l'uomo cominciò ad allevare animali, e di conseguenza a contorli. Il problema del censimento veniva a volte risolto con sistemi ingegnosi, come ad esempio far scorrere le pietre da un sacchetto all'altro al passaggio di ogni pecora fino all'esaurimento contemporaneo delle pietre e delle pecore<sup>4</sup>.

### 1.2.2 Contare per gruppi

Successivamente l'uomo imparò a contare gli oggetti per gruppi omogenei, costruendo così dei sistemi di numerazione. Immaginiamo di doverne inventare uno dal nulla: l'uno potrebbe essere un segno, una tacca, per i numeri successivi possiamo aggiungere una tacca per numero (come con i sassi). Tuttavia per riconoscere il numero rappresentato a colpo d'occhio serve un segno di raggruppamento. Per esempio un tacca nella direzione opposta ogni cinque, come fanno i carcerati. I sistemi di numerazione scelti dalle varie popolazioni erano a base 5, 10, 20, o 60; questo perché l'osservazione delle mani e dei piedi aveva reso familiari all'uomo i multipli del cinque. Un esempio molto antico di

---

<sup>3</sup>sappiamo che anche alcuni animali hanno la capacità di discernere il numero di elementi di un insieme fino a un certo numero di elementi (quattro nei corvi, cfr. per es. Boyer, 1.1).

<sup>4</sup>questo semplice strumento di conta, che possiamo immaginare come un primo e rudimentale abaco, mostra l'intuizione del fatto che, in termini moderni, due insiemi  $X$  e  $Y$  hanno la stessa cardinalità se e solo se esiste una biiezione fra i due insiemi; questo metodo rappresenta inoltre un primo passo verso l'astrazione del concetto di numero dagli oggetti che un numero rappresenta. Notiamo infine che vengono ancora utilizzati sistemi simili per la conta, quali il rosario e il contapassi.

come contassero nel Paleolitico è dato dall'osso di Isshago, rinvenuto in Congo.



Figura 1.1: L'osso di Isshago, reperto neolitico risalente a circa il 60 000 a.C.

Si tratta di un osso con sopra incise delle tacche raggruppate e messe su tre righe con questo schema:

9 19 21 11  
19 17 13 11  
7 5 7 10 8 4 6 3

Si nota che le prime due righe danno somma 60 e l'ultima 48. Possiamo quindi immaginare che si tratti di una conta di 168 oggetti o animali in base 60 per scopi di censimento e/o baratto<sup>5</sup>.

### 1.2.3 I sistemi di numerazione simbolici

Quando ci troviamo a dover rappresentare numeri sempre più grandi nasce l'esigenza di trovare nuovi simboli per rappresentare tali quantità. Nascono così i primi sistemi di numerazione simbolica; alcuni, come il sistema egiziano o romano, usano un nuovo simbolo per ogni decina, altri, ad esempio il sistema

---

<sup>5</sup>si possono anche fare altre ipotesi, ad esempio se sia o meno una coincidenza la presenza esclusiva di numeri primi sulla seconda riga.

1		<i>wa</i>	10		<i>mD</i>
2		<i>sn</i>	20		<i>Dwt</i>
3		<i>xmt</i>	30		<i>mabA</i>
4		<i>fdn</i>	40		<i>Hmw</i>
5		<i>dj</i>	100		<i>Sn.t</i>
6		<i>sjs</i>	1000		<i>xA</i>
7		<i>sfx</i>	10,000		<i>Dba</i>
8		<i>xmn</i>	100,000		<i>Hfn</i>
9		<i>psD</i>	1,000,000		<i>HH</i>

Figura 1.2: Il sistema di numerazione egizio

greco, quello ebraico<sup>6</sup>, quello russo e quello cinese, ricorrono alle diverse lettere dei rispettivi alfabeti per indicare un particolare numero.

---

<sup>6</sup>la particolarità del legame fra alfabeto e numeri in questo caso è dovuto alla forte tradizione simbolica e numerologica del popolo di Israele (ad esempio la parola per padre e madre sommate danno la parola per figlio); questo simbolismo include anche a un legame forte con la sfera del religioso. Se oggi è chiara la differenza fra numerologia e matematica quanto quella fra astrologia e astronomia, ai tempi la matematica sembrava qualcosa di soprannaturale. Ciò è probabilmente dovuto sia alla difficoltà di alcuni conti [coloro che sapevano fare i conti, spesso di classe istruita, sacerdotale, cercavano di celare ad arte alcuni trucchi per averne un prestigio sociale (vedi ad esempio i pitagorici, una setta matematica e religiosa)], sia al fatto che i meccanismi matematici funzionano così bene da apparire in una fase iniziale come attribuibili soltanto a qualcosa di soprannaturale.

• 1 = א	• 40 = (א) נ	A B ג D E S ז H פ
• 2 = ב	• 50 = (ב) צ	1 2 3 4 5 6 7 8 9
• 3 = ג	• 60 = (ג) ט	I ק ל מ ה צ ו פ כ
• 4 = ד	• 70 = י	10 20 30 40 50 60 70 80 90
• 5 = ה	• 80 = (ה) ש	ב כ ת ו פ ח ו ו כ
• 6 = ו	• 90 = (ו) צ	100 200 300 400 500 600 700 800 900
• 7 = ז	• 100 = ר	
• 8 = ח	• 200 = ג	
• 9 = ט	• 300 = ש	
• 10 = י	• 400 = נ	
• 20 = (ב) צ		
• 30 = צ		

**Valore** 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 100 1000 10000

**Carattere cinese:** 一二三四五六七八九十二十百千万

Figura 1.3: Sistemi di numerazione ebraico, russo e cinese

#### 1.2.4 Le operazioni

Parallelamente ai sistemi di numerazione, nasce anche l'esigenza di manipolare i numeri per le proprie esigenze<sup>7</sup>, ossia nascono le prime operazioni fondamentali; prime fra tutte somma e sottrazione, che possiamo rendere più facili con l'aiuto di alcuni strumenti (lo vedremo più tardi), e la moltiplicazione, che le popolazioni egizie eseguivano servendosi della proprietà distributiva. Es: 12x12

1	12
2	24
4	48
8	96

allora:  $12 \times (4 + 8) = 48 + 96 = 144$ .

Se somma, sottrazione e moltiplicazione sono operazioni abbastanza naturali<sup>8</sup>, il problema della divisione in parti uguali è di fatto il primo problema inverso

<sup>7</sup>Esempi semplici: se ho 4 capre alla mia sinistra e 5 a destra, quante in tutto? O ancora: ho diviso le mie capre in 3 gruppi da 6...

<sup>8</sup>che dal punto di vista della teoria degli insiemi corrispondono rispettivamente alla cardinalità di  $A \cup B$  ( $A$  e  $B$  disgiunti), di  $A \setminus B$ , e di  $\bigcup_{i=1}^k A_i$  (con  $\{A_i\}$  disgiunti a coppie e della stessa cardinalità) o anche del prodotto cartesiano  $A \times B$ .

della storia<sup>9</sup>.

Il papiro di Ahmes<sup>10</sup> contiene una descrizione del modo di svolgere questa delicata operazione. La strategia da seguire era simile a quale usata per la moltiplicazione, salvo includere nella lista i sottomultipli del denominatore; la notazione usata per indicare  $1/n$  era  $\overbrace{n}$ , che noi indicheremo con  $\bar{n}$ <sup>11</sup>. Vediamo un esempio:  $19/8$

$$\begin{array}{rcc} 2 & 16 \\ \bar{2} & 4 \\ \bar{4} & 2 \\ \bar{8} & 1 \end{array}$$

$$\text{allora: } (16 + 2 + 1)/8 = 2 + \bar{4} + \bar{8}.$$

Come possiamo vedere da questo esempio gli scribi dell'antico Egitto avevano una predilezione per le frazioni unitarie, tanto che cercavano sempre di scomporre tutte le frazioni a frazioni unitarie, ad esempio  $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$  o  $\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ . Non è chiaro perché amassero tanto questa forma e non scrivessero semplicemente  $\frac{2}{5}$  come  $\bar{5} + \bar{5}$ , possiamo supporre che ritenessero la frazione unitaria un concetto particolarmente semplice oltre che comodo da scrivere nella loro notazione<sup>12</sup>.

I Babilonesi risolvevano il problema scrivendo tutti numeri in base 60, compresi i multipli di  $60^{-1}$  e  $60^{-2}$ , esattamente come facciamo attualmente per ore, minuti e secondi o gradi, primi e secondi. Con questo sistema molte divisioni risultavano più semplici, ad esempio  $\frac{35}{24} = 35 * (2 * 60^{-1} + 30 * 60^{-2})$  che scriviamo come  $35 * (0,2,30) = 1,27,30$ . Anche in questo modo non è possibile eseguire tutte le divisioni, comunque questo metodo permette di eseguire le divisioni in molti casi, visto che la base usata ha un grande numero di divisori;

---

<sup>9</sup>anche se il problema si può presentare in molti casi molto semplici, non sembra possibile darne una definizione insiemistica indipendente dalle tre definizioni precedenti (ossia bisogna dare una definizione del tipo: trova  $c$  t.c.  $b \cdot c = a$ ).

<sup>10</sup>o anche papiro di Rhind, è un papiro trascritto dallo scriba Ahmes verso il 1650 a.C. da un papiro più antico (2000-1800 a.C.), fu (a seconda delle fonti) ritrovato/acquistato/trafugato dall'antiquario scozzese Henry Rhind nel 1858.

<sup>11</sup>una notazione simile ( $1/n = n'$ ) era usata dai greci di età ellenistica, la notazione attuale  $\frac{a}{b}$  è stata introdotta da Diofanto nel IV secolo a.C., anche se numeratore e denominatore erano invertiti.

<sup>12</sup>ovviamente non intendiamo indicare i matematici dell'epoca come arretrati o poco intelligenti, dato che il metodo, seppure appaia scomodo e incomprensibile a un matematico odierno, è corretto. Questo è solo un esempio di come la matematica (come tutte le opere umane) tenda più a seguire una tradizione che a interrogarsi sull'ottimalità e sulla coerenza delle scelte compiute; si veda ad es. il caso di Ippaso di Metaponto, condannato a morte dai pitagorici per aver svelato l'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al lato, ossia l'irrazionalità di  $\sqrt{2}$ .

i matematici del tempo avevano inoltre una tabella di inversione delle frazioni.

### 1.2.5 L'abaco

I sistemi di numerazione simbolica non rendevano certo facili i conti: quanto fa  $MCCCXXIV + CMLXXXVIII$ ? Anche se la nostra cultura ci permette di leggere entrambi i numeri non è chiaro a colpo d'occhio quale sia la loro somma. Assistiamo dunque alla nascita di strumenti per facilitare i calcoli, come l'abaco, nato in Cina verso il 2000 a.C. e adottato molto più tardi anche dalla cultura greca e romana<sup>13</sup>, o il quipu, un sistema di nodi usato dagli Inca sia come sistema di rappresentazione sia come strumento di calcolo.

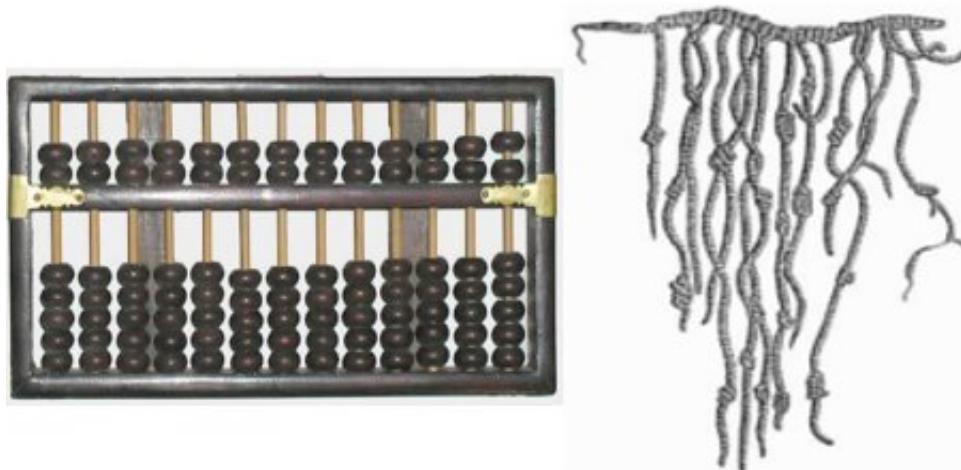


Figura 1.4: Un abaco, invenzione cinese diffusasi presso greci e romani, e un Quipu, strumento usato dalla civiltà Inca per raffigurare numeri ed eseguire calcoli.

### 1.2.6 I sistemi di numerazione posizionale

Idealmente strumenti come l'abaco, in cui non viene fatta distinzione del valore di una pallina se non per la sua posizione, potrebbe aver indotto le popolazioni antiche a utilizzare dei nuovi metodi per rappresentare i numeri<sup>14</sup>,

<sup>13</sup>troviamo l'abaco come strumento di uso commerciale, alternativo alle più costose calcolatrici, anche nella Russia degli anni '50.

<sup>14</sup>ripeto: il filo conduttore qui tracciato puramente ideale, ossia non ci sono prove che le popolazioni Maya o Babilonesi conoscessero l'abaco e avessero di conseguenza adottato un

sistemi in cui il valore di uno stesso segno cambia a seconda della posizione che occupa. Nelle immagini si osservano i diversi sistemi posizionali adottati dalle diverse civiltà.

European (descended from the West Arabic)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arabic-Indic	•	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Eastern Arabic-Indic (Persian and Urdu)	•	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Devanagari (Hindi)	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Tamil		க	ஒ	ஃ	ஔ	ஃ	ஹ	ட	ஜ	ஹ

Figura 1.5: Partendo da in alto a sinistra: i sistemi di numerazione Babilonese, Maya, e diversi sistemi decimali indo-europei, dai quali è nato l'attuale sistema occidentale.

### 1.2.7 Lo zero

Direttamente collegato ai “nuovi” sistemi posizionali nasce un nuovo simbolo, usato per tenere vuota una posizione. I matematici babilonesi inizialmente lasciavano vuota la posizione, per poi inserire due cunei inclinati o un punto, data la difficoltà a distinguere una posizione vuota singola da una doppia; più tardi gli astronomi greci cominciarono ad indicare la nuova cifra con un cerchio vuoto<sup>15</sup>. Tuttavia il concetto di Zero come entità numerica a sé

sistema posizionale; molto più probabilmente la scelta di un sistema posizionale si è imposta grazie alla proprietà distributiva.

<sup>15</sup>mentre i matematici “puri” della Grecia che tutti conosciamo non si ponevano neanche il problema, consideravano infatti l’aritmetica una cosa da mercanti e preferivano occuparsi di geometria astratta.

stante verrà adottato solo dai matematici indiani del VI secolo d.C. e ripreso dalla matematica araba, e poi dalla matematica occidentale nel XIII secolo con Fibonacci<sup>16</sup>.

### 1.3 La geometria



Figura 1.6: Un vaso di età neolitica conservato al Museo Arqueológico Nacional de España, Madrid; si notino le decorazioni di tipo geometrico.

Sebbene esistano reperti paleolitici che testimoniano l'interesse umano verso le forme geometriche, si ritiene che l'uomo abbia maturato una sensibilità di tipo geometrico solo in età neolitica, ossia quando i nostri antenati scoprirono l'agricoltura. Pare infatti che una maggiore attenzione riguardo alla natura abbia condotto l'uomo a sviluppare per astrazione i primi, fondamentali, concetti primitivi. Ma quali sono questi concetti primitivi?

#### 1.3.1 Filogenesi e ontogenesi

Non è un mistero che un bambino, nel suo sviluppo fisico all'interno dell'utero materno, attraversi delle fasi che ricordano da vicino gli stadi evolutivi

---

<sup>16</sup>si veda l'appendice per maggiori approfondimenti

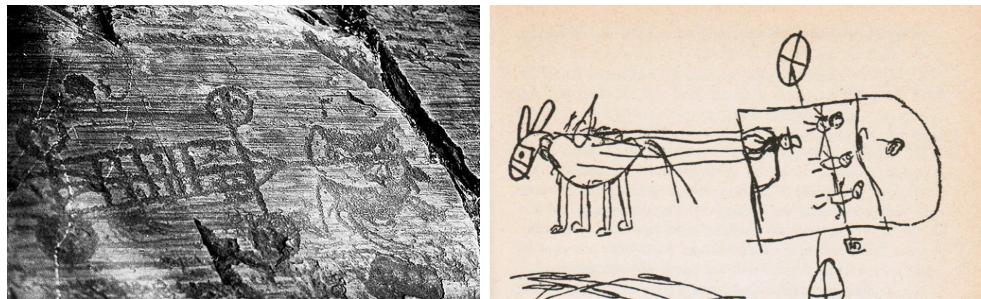


Figura 1.7: Un’incisione rupestre risalente al III millennio a.C. rinvenuta in una grotta a Capo di Ponte (BS) a confronto con il disegno di un bambino di 7 anni.

dell’essere umano. Si dice dunque che l’ontogenesi rispecchia la filogenesi. Nella fig.7 osserviamo la straordinaria somiglianza fra un carretto disegnato nel III millennio a.C. e un oggetto simile disegnato da un bambino di 7 anni. Da esempi come questi possiamo pensare che sia possibile estendere il parallelismo fra filogenesi e ontogenesi agli anni successivi alla nascita e ricavare delle ipotesi su quali fossero i primi concetti di tipo geometrico che l’essere umano ha sviluppato semplicemente osservando la maturazione di concetti topologico-geometrici nelle prime fasi dell’apprendimento infantile<sup>17</sup>. Studi autorevoli<sup>18</sup> indicano come primitivi e fondamentali i seguenti concetti:

- **Ordine**, ad es. dal più grande al più piccolo;
- **Congruenza per traslazione**, un oggetto rimane lo stesso indipendentemente dalla posizione occupata;
- **Simmetria piana**, semplicemente osservando il corpo umano;
- **Similitudine**, le raffigurazioni in scala (opere d’arte, incisioni rupestri, fotografie) ci permettono di riconoscere gli oggetti rappresentati.

Vedremo nelle prossime sezioni due esempi che mostrano come l’uomo avesse assorbito e utilizzato questi concetti già in epoche antiche.

---

<sup>17</sup>con le dovute attenzioni, ad esempio avendo in mente la differenza fra un’intuizione di tipo “matematico” (come l’idea intuitiva di spazio, tempo, moto, numero di oggetti) e la sua formalizzazione matematica rigorosa, che avviene in una fase successiva.

<sup>18</sup>in particolare l’opera di Jean Piaget e le esperienze delle autrici del testo di riferimento di questa sezione, si veda Giacardi, Roero pp.38-40.

### 1.3.2 Simmetria: i monumenti di Stonehenge

Il monumento megalitico di Stonehenge risalente verosimilmente al 2000 a.C.<sup>19</sup> è un esempio di come già in epoca neolitica si concepissero le relazioni fra simmetria geometrica e astronomia: i blocchi di pietra erano infatti disposti in modo da indicare dove sorgeva il sole nei solstizi e negli equinozi. Leggenda vuole che il luogo fosse anche un tempio druidico; possiamo dunque pensare che l'uomo facesse confusione fra le scienze, come astronomia e matematica, e sfere di tipo diverso come magia e religione<sup>20</sup>.



Figura 1.8: Vista del monumento megalitico di Stonehenge, in Inghilterra.

### 1.3.3 Similitudine: i disegni di Nazca

I disegni di Nazca sono enormi figure disegnate sul terreno di un altipiano desertico del Perù meridionale, coprono fino a 200 metri di diametro e sono visibili solo da un aeroplano. Tali disegni, raffiguranti diversi animali, sono

---

<sup>19</sup> molti studi mostrano risultati discordanti: un esame al C14 suggerirebbe che il monumento sia stato eretto intorno al 2200-2400, mentre altri studi ne collocherebbero la costruzione verso il 3000 a.C.

<sup>20</sup> si veda la nota 6 per maggiori chiarimenti.



Figura 1.9: I disegni di Nazca: una scimmia e un ragno.

la prova che i Nazca, una civiltà precedente all'impero Inca<sup>21</sup>, avevano sviluppato la nozione di similitudine fino a poter riprodurre delle figure enormi mantenendo le proporzioni.

Diverse ipotesi sul significato di tali disegni sono state formulate, secondo le quali i disegni potrebbero essere luoghi di culto all'aperto, calendari astronomici, segnali per un ritorno degli dei (figure così grandi sono apprezzabili solo da una divinità), o più probabilmente oggetti legati al culto dell'acqua.

Vi sono anche diverse ipotesi sulla pratica con la quale i disegni siano stati eseguiti: si pensa che i disegni fossero stati dapprima eseguiti su una stele e successivamente riportati in scala sul terreno per mezzo di opportuni reticolati o con strumenti simili al pantografo; inoltre si pensa che non fosse impossibile all'epoca vedere i disegni dalle montagne vicine e quindi dirigere i lavori dall'alto.

#### 1.3.4 Il pi greco

Nell'immagine sottostante si osserva la piramide di Cheope, costruita attorno al 2570 a.C.; il rapporto fra il suo perimetro di base e la sua altezza è circa  $2\pi$ , con un buon grado di approssimazione. Possiamo quindi supporre che non si tratti di una coincidenza e che quindi gli uomini dell'epoca sapessero approssimare il rapporto fra l'area del cerchio e quella del quadrato costruito sul raggio.

---

<sup>21</sup>più precisamente i Nazca sarebbero stati attivi dal I secolo a.C. al VI sec. d.C. e le linee risalgono al periodo 400-650 a.C.



Figura 1.10: La piramide di Cheope, la cui costruzione risale a 4500 anni fa.

Il papiro di Ahmes, una testimonianza più recente ma sicura, mostra come gli scribi egizi approssimassero l'area di un cerchio di diametro 9 con l'area di un quadrato di lato 8. In termini odierni<sup>22</sup> questo equivale a dire:  $(\frac{9}{2})^2 \pi \cong 8^2$  ossia  $\pi \cong (\frac{16}{9})^2 \cong 3,16$ . Non è chiaro se fossero consapevoli o meno che si trattava di un'approssimazione.

Nel XII sec. a.C. i Cinesi utilizzavano un valore di  $\pi \cong 3$ , ricavato sperimentalmente togliendo un cilindro da un cubo di bronzo e confrontando i rispettivi pesi.

La civiltà babilonese considerava  $\pi \cong 3$  o, più tardi  $\pi \cong 3 + \frac{1}{8} = 3,7,30$  in notazione sessagesimale, ossia  $\pi \cong 3,125$ .

## 1.4 Cosa manca

Diversi argomenti potevano essere aggiunti in questa relazione: le equazioni e i sistemi di equazioni (i primi sistemi lineari), i metodi per approssimare la radice quadrata di un numero, le prime soluzioni alle equazioni di secondo e terzo grado, i primi studi sui triangoli e le prime terne pitagoriche utilizzate

<sup>22</sup>nessuna delle popolazioni sotto elencate usava  $\pi$ , ma calcolavano l'area del cerchio rispetto all'area del quadrato costruito sul raggio e il risultato era equivalente a porre  $\pi = \dots$  in notazione moderna.

per costruire triangoli rettangoli e il calcolo di volumi e superfici; tutti questi argomenti non sono ritenuti meno importanti, ma sono stati sacrificati per motivi di tempo.

## 1.5 La linea di confine

Nella discussione che ha seguito l'esposizione abbiamo provato a tracciare il confine fra una Prematematica e la matematica; elenchiamo di seguito i principali confini che sono stati proposti:

- la formalizzazione di un concetto astratto e intuitivo<sup>23</sup>;
- l'adozione di un metodo assiomatico, o di un insieme fissato di regole;
- la scoperta di un modello astratto, distaccato dalla realtà, come il concetto di Numero in sé;
- il metodo dei sassi<sup>24</sup> come astrazione del processo di conta.

Notiamo che nella maggior parte di queste proposte viene messo l'accento sul carattere astratto della matematica, carattere che dunque è ritenuto fondante e fondamentale.

## Appendice: Zero, storia del numero indisciplinato<sup>25</sup>

Come accennato nel paragrafo 1.7, lo zero è nato come un umile “segnaposto”, un simbolo da inserire quando una posizione è vuota, totalmente inutile da scrivere quando non preceduto (o seguito se dopo la virgola) da un numero diverso da zero; nessuno scrive 1 come 00001, 0000. In queste pagine cercheremo di ricostruire sinteticamente le motivazioni dell'avversione verso lo zero<sup>26</sup> da parte dei matematici e la storia dell'introduzione di tale concetto nella matematica occidentale.

Tale avversione si manifesta prima di tutto a livello intuitivo: quando non c'è niente da contare l'operazione di conta non viene neanche effettuata, inoltre

---

<sup>23</sup>si veda la nota 17.

<sup>24</sup>cfr. par 1.1

<sup>25</sup>per questa sezione si fa riferimento principalmente a Seife cap1-4, di cui si consiglia vivamente la lettura.

<sup>26</sup>nonché verso i numeri negativi, apparsi ancora più tardi e per esigenze di contabilità.

aggiungere o sottrarre zero, ammesso che abbia senso, non cambia niente. Ma i problemi più grandi si hanno per la moltiplicazione: mettere cinque mele in fila per zero non ha senso, del resto l'abituale  $5 \times 0 = 0$  sembra quasi suggerire che le mele spariscano<sup>27</sup>.

### Niente, nulla: lo zero presso i Greci

Come già accennato il simbolo di zero comparve presso gli astronomi greci come un cerchio vuoto (con sopra diversi segni, cappelli e coroncine), oppure come omicron, l'iniziale di *οὐδὲν*, ouden, cioè niente. Esso non era considerato un numero, del resto i matematici greci prediligevano la geometria; la moltiplicazione ha il significato geometrico di area, dunque la moltiplicazione per zero non ha senso. Tuttavia i Greci dovettero fare i conti con lo zero che apparve ai loro occhi attraverso il suo fratello gemello: l'infinito, anch'esso temuto e non accettato. Infatti i paradossi di Zenone mostrano, in fondo, che che se la divisione infinita (cioè la divisione reiterata un numero sempre maggiore di volte) di una lunghezza dá sempre un numero come risultato (dunque non zero) il moto non è possibile. Questo mostra quanto i Greci fossero vicini ai concetti di zero, di infinito e di limite, che saranno compresi e sviluppati pienamente solo nella matematica del XIX secolo.

### Problemi di date: il medioevo e lo zero

Nell'anno 2000 tutto il mondo ha erroneamente festeggiato il nuovo millennio. Questo errore è dovuto alla nostra passione per le cifre tonde e al modo in cui è stato introdotto il conteggio degli anni dalla nascita di Cristo.

Nel 525 Dionigi il Piccolo, dovendo compilare delle tavole per la datazione della Pasqua, fissò la data del primo Natale (con un errore di almeno 3-4 anni) e di conseguenza l'“Anno Domini” corrente come 525. Più tardi, nel 731 San Beda il Venerabile nell'estensione di tali tavole adottò tale datazione anche per date precedenti l'avvento di Cristo; infatti il suo libro, una storia dell'Inghilterra, cominciava dal 60 avanti Cristo, senza considerare un “anno zero” (ossia l'anno dopo l'1 a.C. era considerato l'1 d.C).. In questo modo un bambino nato nel 2 a.C. avrebbe compiuto 3 anni nel 2 d.C. invece che 4, come suggerirebbe la differenza fra gli anni passati  $2 - (-2) = 4$ . Il problema in realtà era che si

---

<sup>27</sup>si veda anche l'esempio dell'elastico in Seife, cap.1.

usavano i numeri cardinali e non quelli ordinali per contare gli anni, dunque il bambino del II anno a.C., nel II anno d.C. avrebbe in realtà finito il III anno di età per entrare nel IV.

Ecco dunque perché il secolo si considera dall'anno '01 all'anno '00 successivo e il millennio di conseguenza.

## Dall'oriente lontano a Fibonacci

Se la cultura occidentale respinse lo zero, sia la cultura indiana che cinese accettarono lo zero e i numeri negativi. Brahmagupta, un matematico indiano del VI sec., nel dettare le regole della moltiplicazione e della divisione inserì il *sunya*, ossia vuoto, zero. Cercò quindi di determinare  $1/0$  e  $0/0$ , ponendo  $\frac{0}{0} = 0$  e non dando risposta per  $1/0$ ; i suoi successori dimostrarono che  $\frac{0}{1} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1}$ , ossia trovarono ancora il gemello di zero:  $\frac{0}{1} = \infty$ . Successivamente la nascente civiltà musulmana apprese e fece suo lo zero e un sistema di numerazione posizionale simile a quello indiano.

Qualche secolo dopo, nel '200, Leonardo da Pisa, figlio del mercante Guglielmo dei Bonacci (noto quindi come Fibonacci), reduce da alcuni viaggi in Nordafrica a seguito di suo padre, importò in Italia l'uso dello zero e di un nuovo sistema di numerazione che di fatto è quello attualmente in uso, che da allora si diffusero radicalmente in Europa<sup>28</sup>.

## Una visione più moderna

Anche visto a posteriori, con gli occhi di un matematico moderno, l'inserimento dello zero appare problematico quanto inevitabile: cerchiamo infatti di definire delle operazioni  $+, -, \times, \div$ , ossia delle funzioni  $\varphi : X \times X \rightarrow Y$ , che siano "chiuse", cioè  $\forall x, y \in X \quad \exists \varphi(x, y) \in X$ <sup>29</sup>. Inseriamo allora lo zero e i numeri negativi per avere la chiusura rispetto alla sottrazione; ma proprio lo

---

<sup>28</sup>non senza resistenze, al solito; ad esempio i banchieri del tempo sostenevano che con lo zero un assegno poteva essere truccato molto più facilmente; quanto al sistema decimale posizionale vennero fatte delle gare di contabilità fra abacisti e algebristi, per verificare quale metodo fosse più veloce fra l'abaco e l'aritmetica simbolica.

<sup>29</sup>questa definizione di chiusura è necessaria in quanto vogliamo conoscere le risposte a tutte le domande possibili, ossia vogliamo conoscere il valore di  $\varphi(x, y)$  qualunque siano  $x$  e  $y$  e una volta nota la risposta vogliamo usarla nell'operazione; ovviamente se  $\varphi$  è una funzione la prima condizione è automaticamente verificata.

zero appena inserito impedisce la chiusura di  $\mathbb{Q}$  rispetto alla divisione. Proviamo allora a rinunciare alla chiusura rispetto alla sottrazione lavorando su  $\mathbb{Q}^*$ , chiuso rispetto alla divisione; comunque nella costruzione cantoriana dei reali partendo da  $\mathbb{Q}^*$  lo zero apparirà come limite della successione  $\frac{1}{n}$ . Lo zero è quindi un numero irrinunciabile, anche se è scomodo.

## Bibliografia

- C.B. Boyer, “Storia della matematica”
- L. Giacardi. S.C. Roero, “La matematica delle civiltà arcaiche”
- R. Kaplan, “Zero”
- C. Seife, “Zero, storia di un’idea pericolosa”
- A. Bellos, “Il meraviglioso mondo dei numeri”
- fonte principale delle immagini: Wikipedia

## Capitolo 2

# Le antiche civiltà dell'America e dell'Asia

di Silvia Basso

### 2.1 Le civiltà precolumiane

Spostiamo ora la nostra attenzione lontano dal Medio Oriente e dall'Europa, per allargare lo sguardo su altre civiltà, vissute nel continente americano precolumbiano e, come vedremo nel prossimo capitolo, in Asia.

Il percorso attraverso lo studio della matematica derivante da più popolazioni, lontane nello spazio e nel tempo, mette in evidenza tre aspetti fondamentali della pluralità nella sua evoluzione: in primo luogo la natura universale delle ricerche matematiche di qualsiasi tipo; la possibilità di un'evoluzione indipendente della matematica all'interno di ogni tradizione culturale, con aspetti comuni e soprattutto differenze che hanno portato un popolo ad essere più affermato in una materia piuttosto che in un'altra; infine l'importanza cruciale dei contatti tra una cultura all'altra, che hanno permesso la creazione della matematica moderna come disciplina unitaria.

#### 2.1.1 I Maya

##### Profilo storico

La civiltà maya fiorì a partire approssimativamente dal 1800 a.C., nella zona del centro America che si estende attualmente dal sud del Messico (penisola

dello Yucatan) fino all'Honduras e El Salvador. Purtroppo le testimonianze relative ai primi sviluppi di questa civiltà sono scarse: probabilmente esistettero monumenti e iscrizioni, ma nulla ha resistito al tempo, forse a causa dell'utilizzo di materiali deperibili come legno e stucco. Esaminando i primi documenti lapidari, si può supporre che i Maya abbiano trascorso un *periodo di formazione* in cui si sono distinti dai popoli vicini, sviluppando una cultura propria. Tale periodo è individuato tra il V secolo a.C. e il 292 d.C., anno di datazione del più antico documento maya ritrovato: la stele di Tikal.

Seguì l'*epoca classica*, conclusasi attorno al 925, durante la quale i Maya raggiunsero il loro massimo sviluppo nell'arte, nell'architettura, nel commercio, nella matematica e nell'astronomia. Fra il IX e il X secolo però, una rapida decadenza portò alla fine di questo brillante periodo, le città e i centri rituali furono progressivamente abbandonati e la popolazione si disperse. Molte ipotesi sono state avanzate per spiegare questo fenomeno: epidemie, terremoti, impoverimento del suolo, rivolte. Di certo tra le cause deve essere attribuita grande importanza all'infiltrazione di popolazioni messicane (i toltechi), venute dall'ovest, che durò per circa un secolo. Il periodo che seguì l'*epoca classica* è definito *periodo messicano*: i Maya subirono pesantemente l'influenza dei toltechi, accettando anche alcune loro divinità e assorbendo il loro spirito bellico. La religione, la lingua e gli stessi lineamenti fisici dei Maya cambiarono tanto profondamente che non si può paragonare la vita precedente l'invasione con quella successiva.

Tuttavia, fra il 1200 e il 1540 (anno di inizio dell'invasione spagnola dello Yucatan), vi fu un cambiamento di rotta: i toltechi adottarono lo stile di vita dei Maya, i quali iniziarono a rifiutare la cultura messicana e tutto ciò che ne derivava. Ciò non frenò comunque il decadimento culturale già in atto: all'epoca della conquista spagnola, la decadenza era totale e la maggior parte delle città erano in rovina, inghiottite dalla giungla e ormai dimenticate.

A partire dalla metà dell'800, gli studiosi sono riusciti a delineare le caratteristiche della civiltà maya, utilizzando varie fonti: iscrizioni e monumenti, cronache dei conquistatori spagnoli e scritti, anche se pochissimi, degli stessi indios. È probabilmente alle loro conquiste intellettuali che i Maya devono il loro prestigio e la loro grandezza. Fondamentale fu l'evoluzione della scrittura, di tipo ideografico e fonetico nello stesso tempo, che ancora oggi non è stata decifrata del tutto. Nel campo della matematica, elaborarono una numerazione scritta posizionale che permise loro di maneggiare numeri superiori al centinaio di milioni e introdussero il concetto di zero. Animati probabilmen-

te da preoccupazioni di ordine mistico e divinatorio, progredirono negli studi astronomici, perfezionando un calendario estremamente preciso.

### Calendari e astronomia

I Maya utilizzavano contemporaneamente due calendari. Il primo, chiamato *Tzolkin*, era una calendario rituale, ideato appositamente per predisporre alcune ceremonie religiose. Era composto di 260 giorni divisi in 20 cicli di 13 giorni e basato su una serie di 20 giorni fondamentali, ognuno dedicato ad una particolare divinità. Ciclicamente, variavano il numero del giorno, da 1 a 13, e il giorno della serie fondamentale, ripristinando le corrispondenze dopo 260 giorni. Questo tipo di calendario aveva chiaramente un'utilità limitata per persone come gli agricoltori, che avevano bisogno per il loro sostentamento di conoscere l'alternarsi delle stagioni. Esisteva pertanto anche un calendario solare, chiamato *Haab*, formato da 365 giorni (*kin*) raggruppati in 18 periodi mensili di 20 giorni, più un ulteriore mese composto di 5 giorni, considerato nefasto. Combinando insieme i due calendari, si ottiene un ciclo di 52 anni civili (corrispondenti a 73 anni sacri), il cosiddetto *calendario ciclico*, nel cui andamento una data, costituita dalla combinazione dei due computi paralleli dei giorni, si presenta una volta ogni 52 anni.

I Maya fecero poi un ulteriore progresso, grazie ad un sistema di calcolo del tempo la cui unità base era il giorno e che, per ragioni pratiche, utilizzava l'anno di 365 giorni. Questo sistema, denominato *long count*, permetteva di identificare univocamente una data qualsiasi, attraverso l'introduzione di periodi di tempo più lunghi: oltre al mese (*uinal*) e all'anno (*kun*), periodi di 20 anni (*katun*), di 400 anni (*baktun*) e di 8000 anni (*pictun*).

Tutte le date ritrovate nelle varie incisioni sono contate a partire da un anno zero, che si colloca tra il 3111 a.C. e il 3113 a.C., che rappresenterebbe, secondo alcuni studiosi, una data mitica della nascita degli dei o della creazione del mondo.

Con il tempo, i Maya integrarono il loro calendario con le fasi della Luna e le fasi di Venere: scorrevano così quattro cicli simultaneamente e da ciò risultava un miglior controllo sulla registrazione dei dati.

Riconobbero, inoltre, che tra il loro anno di 365 giorni e l'anno solare c'era una certa differenza: in base ai loro calcoli, la durata effettiva di un anno solare doveva essere, espressa in termini odierni, di 365,242 giorni (la stima attualmente accettata è di 365,242198 giorni). Tale risultato è sbalorditivo ed

è interessante notare che questo valore è più preciso di quello del calendario giuliano e persino di quello gregoriano.

Per valutare pienamente l'importanza di questi risultati, bisogna considerare le condizioni in cui furono ottenuti: la situazione topografica e climatica del territorio, caratterizzata da una fitta giungla, non favoriva l'osservazione dei corpi celesti. Inoltre, i mezzi tecnici a disposizione erano estremamente limitati: l'unico strumento ottico di cui ci si serviva nell'osservazione della volta celeste era un tubo di giadeite, appoggiato su due asticelle di legno incrociate. Malgrado ciò, i Maya riuscirono a definire con grande precisione anche il periodo di rivoluzione della Luna e di alcuni pianeti e furono in grado di prevedere le eclissi del sole. Era chiaramente necessario disporre di notevoli strumenti matematici.

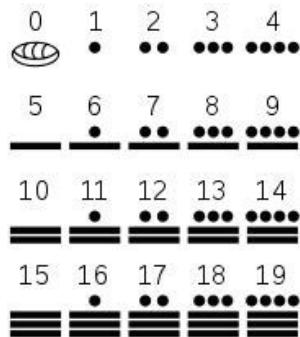
## Matematica

L'importanza della misurazione del tempo promosse l'utilizzo della matematica e lo sviluppo di un buon sistema per la rappresentazione dei numeri per effettuare calcoli complessi.

I Maya utilizzavano un sistema posizionale a base venti (vigesimal), a ragione dell'usanza, comune ai popoli mesoamericani, di contare non solo sulle dita delle mani, ma anche su quelle dei piedi. Un primo modo per scrivere i numeri da 1 a 19 consisteva in una rappresentazione *cefalomorfica*, in cui ciascuno di essi era associato alla testa di una divinità. Tale rappresentazione fu però di uso limitato. I Maya utilizzavano più spesso (si presume a partire dal 400 a.C.), un sistema grafico molto semplice che si riduceva all'impiego di due simboli: un punto (*Frijolito* o *Maisito*, cioè un chicco di mais) e una linea (*Palito* cioè una barretta di legno), che indicavano rispettivamente l'uno e il cinque. Il sistema era basato sul principio additivo, per cui ad esempio il 7 veniva scritto con una linea e due punti.

Si trattava di una numerazione di tipo posizionale: le cifre venivano ordinate verticalmente, con la cifra che rappresentava un valore più alto posta sul livello grafico superiore. La rappresentazione di 84 risultava quindi:

Il sistema possedeva inoltre un segno per lo zero, che indicava l'assenza delle unità di un certo ordine. Il simbolo utilizzato era una conchiglia, che assumeva aspetti diversi a seconda della posizione che occupava. Una delle possibili cause dell'introduzione dello zero nasce da un'esigenza che possiamo definire religiosa, nonché dalla cura estetica che animava gli scultori e modellatori. Le stele maya avevano un carattere rituale e solenne, pertanto nella registrazione



$$\begin{array}{r} \bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \end{array} \quad 4 * 20 = 80$$

$$\begin{array}{r} \bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \end{array} \quad 4$$

delle date l'ordine e l'armonia erano necessari: dovevano comparire tutte le unità di tempo, dal *kin* al *baktun*, nel giusto ordine; pertanto, se un'unità veniva a mancare, diveniva indispensabile riempire il vuoto corrispondente.

Citiamo infine l'utilizzo, forse marginale, di un sistema di numerazione a base mista, cioè una base vigesimale a cui viene premoltiplicato il numero 18, a partire dalla terza potenza di 20: risulta così  $20^0$ ,  $20^1$ ,  $18 \cdot 20^2$ ,  $18 \cdot 20^3$ , .... La ragione di questa curiosa variazione si può ricondurre alla necessità di rendere tra loro compatibili i diversi calendari in uso; dalle testimonianze che abbiamo, questa forma di scrittura serviva solamente alla ristretta élite dei sacerdoti, a cui spettava la responsabilità di eseguire i calcoli astronomici e comporre calendari.

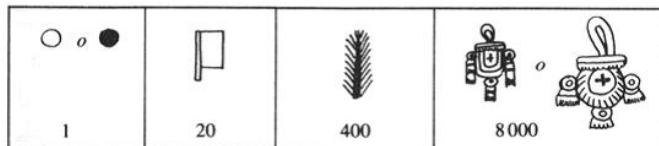
### 2.1.2 Gli Aztechi

Gli Aztechi giunsero in America centrale nel XIII secolo, rimanendo per lungo tempo poveri e senza terra. La loro ascesa iniziò nei primi decenni del XV secolo e comportò un susseguirsi di guerre con saccheggi e massacri. Il primo obiettivo era quello di fornire ai sacerdoti dei prigionieri per i sacrifici, il cui numero raggiungeva una media di 20000 vittime all'anno. Oltre all'aristocrazia militare, vi era un'estesa categoria di artigiani e commercianti. Quando arrivarono gli spagnoli nel 1519, gli Aztechi dominavano senza rivali

la maggior parte del Messico, ma il loro impero venne distrutto dagli invasori europei.

La scrittura di questo popolo era figurativa e, all'epoca della conquista spagnola, era composta da un compromesso tra il sistema ideografico e la notazione fonetica. Ci è nota grazie ad alcuni manoscritti, denominati *codices*, riguardanti sia soggetti religiosi, rituali e di divinazione, sia eventi mitici o storici. Altri costituiscono i registri dei tributi che i funzionali imperiali riscuotevano nelle città assoggettate.

Da questi stessi documenti, si è potuto studiare il sistema di numerazione degli Aztechi: si tratta di un sistema vigesimale, basato sul principio additivo, in maniera simile a quello maya. L'unità era rappresentata con un punto o con un cerchio, la ventina da un'ascia, il numero 400 da una piuma e il numero 8000 da una borsa.



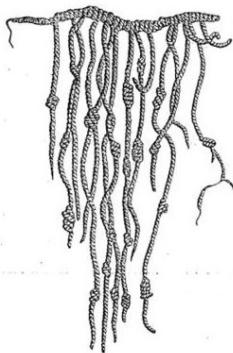
Gli Aztechi utilizzarono il calendario maya, senza notevoli variazioni. L'anno civile, regolato su quello solare, era diviso in 18 mesi da 20 giorni, ai quali si aggiungevano 5 giorni, per raggiungere il numero 365. Il problema delle 6 ore rimanenti veniva risolto intercalando 12 giorni e mezzo ad ogni ciclo di 52 anni.

### 2.1.3 Gli Inca

La civiltà Inca si sviluppò nell'altopiano andino tra il 1200 e il 1500 d.C., giungendo a costruire un vasto impero, ben organizzato, che occupava principalmente il territorio che oggi corrisponde agli stati del Perù, del Cile e dell'Equador. All'epoca della conquista spagnola, era al suo apogeo: dopo aver distrutto ogni traccia delle popolazioni precedenti, gli Inca si erano imposti con violenza, convinti di essere un popolo eletto, destinato a dominare sugli altri. La loro autorità si basava sulla forza, ma fu anche grazie all'abilità nel governare che si assicurarono una stabilità difficilmente incrinabile. Tuttavia gli Inca non conoscevano la ruota, la trazione animale e nemmeno la scrittura,

almeno nella forma in cui noi la intendiamo, e ciò rende ancor più incredibili l'alto livello culturale e la prosperità raggiunti.

È possibile spiegare il fenomeno con l'ingegnosità degli Inca nel tenere precisi archivi, mediante un sistema di cordicelle a nodi. Tale strumento era il *quipu*. Anche i primi concetti matematici di cui abbiamo testimonianza, propri a questa civiltà, sono legati al quipu. Fu creato come strumento mnemonico e risultò molto vantaggioso in quanto facile da maneggiare e comodo da trasportare.

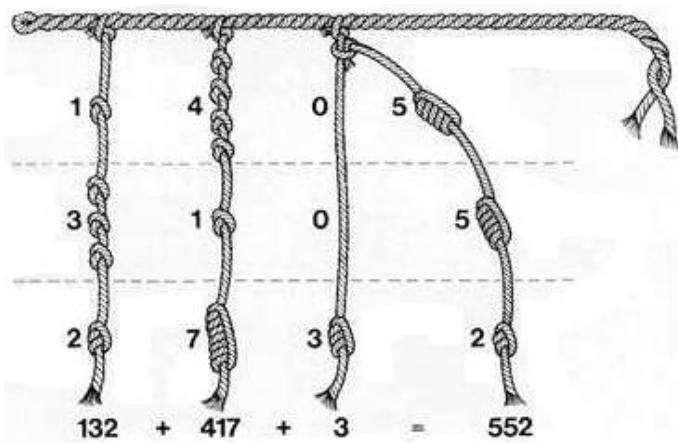
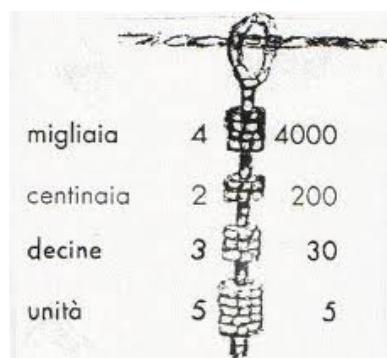


Un quipu era costituito da un groviglio di cordicelle: vi era una corda più spessa che veniva chiamata corda principale, alla quale era legato, come fosse una frangia, un certo numero di altre cordicelle più sottili, riunite in gruppi e di colori diversi. Un quipu vuoto (privo di informazioni) poteva avere solo tre corde o arrivare fino a 2000 corde. Il colore veniva usato principalmente per distinguere diverse informazioni: ogni quipu aveva un sistema di colori codificato per mettere in relazione reciproca alcune corde e allo stesso tempo per distinguerle una dall'altra; da alcuni studi effettuati sembra che anche i colori avessero qualche significato numerico, ma non ne abbiamo la certezza.

Sappiamo invece che la rappresentazione numerica su di un quipu veniva ottenuta tramite nodi. Non c'è dubbio che tale rappresentazione descrivesse un sistema di numerazione decimale; eccone una testimonianza di un conquistadores spagnolo:

“In base alla loro posizione, i nodi assumevano il valore di unità, decine, centinaia, migliaia e, eccezionalmente, centinaia di migliaia, e sono tutti ben allineati sulle loro diverse corde come cifre che un contabile dispone, colonna per colonna, nel suo libro mastro.”

Un numero poteva essere letto contando i numeri dei nodi nel gruppo più vicino alla corda principale, che rappresentava la cifra di valore più elevato; si procedeva poi verso il successivo gruppo di nodi indicante la cifra posizionale successiva, cioè la potenza di 10 di ordine immediatamente inferiore. Quindi in un quipu le potenze di 10 erano individuate dalla posizione lungo il filo e questa posizione risultava allineata con i fili consecutivi. Le cifre nelle posizioni per le potenze di 10 venivano rappresentate da gruppi di nodi semplici, le cifre meno significative invece da un nodo lungo, cioè un nodo con più giri; lo zero era indicato con un lo spazio vuoto nella posizione appropriata. Nelle immagini seguenti vediamo alcuni semplici esempi di quipu.



Il quipu non poteva essere usato come strumento di calcolo, ma serviva soltanto per registrare i risultati delle somme e di altre semplici operazioni aritmetiche che venivano effettuate altrove. La testimonianza di come gli Inca eseguivano tali operazioni ci viene fornita da un sacerdote spagnolo:

“Vederli usare un’altra specie di quipu con chicchi di granoturco è perfetta letizia. Allo scopo di eseguire calcoli molto difficili per i quali un contabile capace avrebbe bisogno di carta e penna, questi invece fanno uso delle loro granaglie. Ne mettono una qua, tre in un altro posto, otto non so dove. Muovono qua e là un chicco e la realtà è che sono capaci di completare i loro calcoli senza fare il più piccolo errore. In realtà nell’esercizio della matematica sono migliori di noi che utilizziamo carta e inchiostro. Se questo non è un ingegno e queste popolazioni sono animali selvaggi, lasciate che lo giudichi chi vuole! Quello che io reputo certo è che in quello che si impegnano a fare sono superiori a noi.”

Numerosi erano gli scopi del quipu: poteva servire come supporto alle rappresentazioni di fatti liturgici, storici o statistici, oppure come mezzo di trasmissione di messaggi. Essenzialmente però fu utilizzato come strumento di contabilità, per affari militari, tributi, conteggio di bestiame, inventari o censimenti.

L’uso del quipu è perdurato nel tempo, tanti che alcuni pastori degli altopiani peruviani li hanno sfruttati fino al secolo scorso. Notiamo, per concludere, che l’impiego delle cordicelle a nodi non è esclusivo di queste zone: si rinvie in epoche e luoghi diversi, ad esempio in Grecia e Persia nel I millennio a.C., in Palestina nel II secolo d.C., in alcune regioni dell’Africa e tra gli indiani d’America.

## 2.2 La matematica in Cina

Le civiltà della Cina e dell’India, che andremo ora a considerare, sono molto più antiche di quelle della Grecia e di Roma, anche se non furono anteriori a quelle sviluppatesi nelle vallate del Nilo e della Mesopotamia.

Non abbiamo notizie precise riguardo ai primi sviluppi del popolo cinese: la tradizione fa risalire l’inizio del primo impero al 2750 a.C., ma secondo un’opinione più prudente tale data dovrebbe essere spostata in avanti di almeno qualche secolo. La difficoltà di datazione è dovuta principalmente a due

cause: l'utilizzo di materiali per la scrittura deperibili e il continuo susseguirsi di dinastie diverse, alcune delle quali ordinarono anche la distruzione di tutte le opere scritte, comprese quelle matematiche.

Ci addentriamo ora nella cultura matematica cinese, cercando di capire il contesto in cui si è sviluppata, le sue motivazioni e i suoi scopi. Analizzeremo le opere principali e accenneremo alle scoperte che questo popolo ha fatto nelle varie branche della matematica.

## Il metodo

Sebbene la matematica sia attualmente diventata un'eredità comune dell'umanità, la nostra comprensione di tale materia si basa principalmente sulla nostra tradizione, che risale agli antichi Greci, e non è quindi universale. Per comprendere la matematica cinese è necessario mettere da parte la nostra visione.

A prima vista, si potrebbe pensare che si tratti di una matematica puramente utilitaristica ed empirica, poiché non contiene definizioni, teoremi e dimostrazioni come siamo abituati a vederli. Ecco perché i primi giudizi sulla matematica cinese sono stati negativi; ciò spiega anche la sorpresa che ha colto gli Occidentali nell'apprendere quali risultati erano stati raggiunti.

I Cinesi preferiscono farsi capire senza dover spiegare troppo, amano la concisione e le allusioni, come dimostra anche la loro scrittura, e preferiscono evitare la pesantezza del ragionamento formale. Non bisogna poi dimenticare il fatto che ciò che è giunto fino a noi è probabilmente in gran parte materiale didattico; sappiamo inoltre che in Cina si dava grande importanza alla tradizione orale e alla memorizzazione di formule in rima.

Inizialmente si può collegare la matematica alla filosofia, che poneva l'accento sull'unità degli opposti, la relatività e il cambiamento. Inoltre la matematica cinese antica era profondamente legata alle speculazioni cosmologiche, tanto che i numeri si diceva fossero usati per "definire e illustrare l'organizzazione dell'universo"; ci si occupava di studiare i principi nascosti dell'Universo tanto quanto ci si preoccupava di questioni di utilità pratica. Si può riconoscere lo stretto legame tra matematici e astronomi anche nel termine *chouren*, che veniva utilizzato per indicare entrambe le categorie. Inoltre una possibile etimologia di tale termine lo collega con il verbo *chou*, che significa coltivare o misurare la terra, in analogia con quanto accade con il nostro termine *geometria*.

Prima della seconda metà del XVI secolo, in Europa non si sapeva quasi nulla riguardo alla matematica cinese. I missionari Gesuiti, che avevano raggiunto la Cina, la consideravano di poco valore, superficiale, a causa proprio della mancanza di un’impostazione assiomatica. Solo successivamente, grazie al contributo di diversi studiosi e grazie anche alla riscoperta, da parte degli stessi Cinesi, di documenti antichi di matematica, sconosciuti per secoli, si è riusciti pian piano a portare alla luce i veri contributi della matematica cinese, e a diffonderne la conoscenza.

Nell’analisi dei risultati della matematica cinese, gli studiosi hanno inizialmente cercato di ricostruire le dimostrazioni utilizzando gli strumenti dell’algebra elementare moderna. Di conseguenza si era giunti alla conclusione che la matematica cinese avesse una natura fondamentalmente algebrica. Successivamente è stato adottato un approccio differente, cercando di considerare il modo di ragionare tipico di quella popolazione, deducendolo dai pochi testi che contengono delle dimostrazioni. Ciò ha portato a rivalutare molti testi prima considerati secondari, riconoscendo la ricchezza delle loro dimostrazioni. In particolare, è stato riconosciuto il ruolo chiave di alcune procedure che formano l’ossatura della matematica cinese, per esempio i calcoli euristici, le manipolazioni grafiche e l’utilizzo di strumenti in cui la posizione degli oggetti fisici rappresentanti i numeri era fondamentale. È quindi divenuto sempre più chiaro che, all’interno della cultura cinese, non è possibile distinguere l’algebra e la geometria, l’aritmetica e l’algebra, come accade nella matematica occidentale, influenzata dall’approccio assiomatico-deduttivo di Euclide.

La maggior parte dei testi cinesi contiene solo risultati e non dimostrazioni, ma ci sono alcuni testi che permettono di capire il loro modo di ragionare e i procedimenti logici: si tratta di testi di commento, in particolare ce ne sono giunti alcuni del *Jiuzhang Suanshu*. Lo scopo di questi testi era quello di

“explain the substance of things using figures in the hope of achieving simplicity while remaining complete and general but not obscure, so that the reader will be able to grasp more than a half.”<sup>1</sup>

Da ciò si può intuire che la concezione della matematica in Cina era piuttosto teorica e nello stesso tempo aveva un dichiarato scopo didattico.

L’attenzione nei testi non si concentrava sul rigore formale: l’autore di questi *commenti* indica esplicitamente la sua volontà di non esplicitare tutti i dettagli del ragionamento allo studente; preferisce suggerire la somiglianza

---

<sup>1</sup>da una traduzione inglese

della soluzione con altre già viste in precedenza, o lasciare da completare le dimostrazioni analoghe ad alcune già fatte. L'obiettivo era quello di convincere il lettore, più che di costruire una teoria completa e rigorosa.

È allora abbastanza naturale la scelta di non costringere gli argomenti in forme rigide e fisse, alla maniera euclidea. Per ogni problema si utilizzava ciò che appariva più adatto al caso e non c'era dunque un metodo di ragionamento fisso. Un altro autore spiega:

“No one has the good method. In this world there are no naturally correct ways, and among methods, non solely good techniques.”

Vediamo alcuni dei possibili metodi di argomentazione usati:

- passaggio dal particolare al generale, sfruttando degli esempi specifici;
- ragionamento per confronto, tra una situazione poco familiare al lettore ed una più comprensibile. Ad esempio, un problema sulla moltiplicazione di frazioni è spiegato richiamando un altro problema riguardante l'acquisto di cavalli;
- metodi empirici. Ad esempio, per mostrare che il lato di un esagono è uguale al raggio della circonferenza circoscritta, si assemblano 6 triangoli equilateri e il risultato “si vede”;
- ricorso a metodi di comunicazione non linguistici, quali figure o calcoli che da soli giustificano il risultato. Notiamo che spesso le figure non sono astratte, ma si riferiscono a oggetti concreti, per rafforzare e facilitare l'interpretazione.

Per quanto riguarda i testi, notiamo che erano comunemente delle raccolte di problemi, divisi principalmente in 4 tipologie:

- problemi reali, applicabili a situazioni specifiche;
- problemi pseudo-reali, che fanno riferimento a situazioni reali ma non sono in realtà plausibili o direttamente utilizzabili;
- problemi modellati su rompicapi o indovinelli, che utilizzano dati della vita reale in modo non realistico e divertente;
- problemi speculativi o puramente matematici, come ad esempio quelli legati alla misura della circonferenza.

### Testimonianze e testi

La testimonianza più antica di una numerazione in Cina si trova attorno al 1500 a.C. e consiste in segni incisi su ossa, chiamate “ossa oracolari”, di cui parleremo in seguito.

La prima fonte scritta giunta fino a noi, invece, è il *Chou Pei Suan Ching*, ovvero *Il libro classico dello gnomone e delle orbite circolari del cielo*. È generalmente considerato il più antico testo classico di argomento matematico, ma la sua datazione è tutt'altro che nota: vi sono diverse opinioni, che differiscono tra di loro di più di un millennio, collocandolo tra il XIII e il I secolo a.C. Secondo l'ipotesi più ragionevole, risalirebbe al IV secolo a.C. e probabilmente racchiude conoscenze di diversi scienziati vissuti in periodi differenti. Quest'opera tratta principalmente di calcoli astronomici, anche se include un'introduzione sulle proprietà del triangolo rettangolo e alcune considerazioni sull'uso delle frazioni con le loro quattro operazioni e dei denominatori comuni. L'opera è redatta in forma di dialogo tra un principe e il suo ministro, il quale afferma che l'arte dei numeri deriva dal cerchio e dal quadrato. Quindi, come per l'Egitto, anche in Cina la geometria era nata dalla misurazione ed era essenzialmente un esercizio di aritmetica. Nella prima parte di tale scritto, viene enunciato il teorema di Pitagora e ne viene fornita una dimostrazione geometrica.

Il successivo testo che merita di essere citato è *Jiuzhang Suanshu*, ovvero *Nove capitoli sulle arti matematiche*, composto tra il 300 a.C. e il 200 d.C.. Tale opera occupa, nella matematica cinese, il posto che occupano gli *Elementi* di Euclide nella matematica greca, non tanto per i contenuti e il modo di esporli, quanto per l'importanza che ha avuto nei secoli successivi: risulta infatti il punto di riferimento per la terminologia e per i metodi di risoluzione di molti problemi; si tratta inoltre di un compendio di tutto il sapere matematico precedente. Questo libro contiene 246 problemi riguardanti l'agrimensura, l'agricoltura, l'ingegneria, il calcolo, le proprietà dei triangoli rettangoli e la soluzione di equazioni e di sistemi lineari, includendo l'uso di numeri negativi. A differenza dei greci di quel periodo, che componevano trattati in cui l'esposizione era sistematica e logicamente ordinata, i Cinesi si limitavano a descrivere le soluzioni per una serie di problemi specifici, ripetendo l'antico metodo di babilonesi ed egiziani. In questa opera colpisce la giustapposizione di risultati piuttosto accurati con altri approssimativi e di procedimenti molto sottili con altri grossolani. Per ogni problema si trova un enunciato, la soluzione numerica e infine una spiegazione rapida del metodo per calcolare la soluzione a partire dai dati, tramite una serie di regole. Non si trovano invece definizioni né vere e proprie dimostrazioni.

Nel 213 a.C., l'imperatore ordinò il rogo di tutti i libri. Evidentemente qualche opera sopravvisse, forse grazie alla riproduzione di copie o alla

trasmissione orale. Le conoscenze matematiche continuaron a prosperare.

Tra il VI e il X secolo, l'insegnamento della matematica si basava principalmente su una serie di 12 testi contemporanei o antichi, attualmente nota impropriamente come *The ten computational canons*. Tra questi testi ricordiamo il *Sunzi suanjing*, ovvero il *Calcolo Classico* di Sunzi, del V secolo, importante per la descrizione dei numerali bacchetta, di cui parleremo più avanti. È un libro semplice e chiaro che si occupa delle operazioni, della misurazione di aree e volumi, delle frazioni e delle radici quadrate e cubiche. Si trova qui la prima testimonianza del teorema cinese del resto, risultato utile per lo studio delle congruenze lineari.

Per quanto riguarda il periodo che va dal X al XII secolo, vi sono scarse documentazioni. La produzione matematica raggiunse il suo apogeo nel XIII secolo. Nel 1247 Qin Jiushao pubblicò *Shushu Jiuzhang*, ovvero *I nove paragrafi di matematica*, testo più sofisticato rispetto ai precedenti. Vi si trovano spiegate le soluzioni numeriche delle equazioni di ogni grado e viene approfondito lo studio dell'analisi indeterminata e vi si trova inoltre per la prima volta in Cina la formula di Erone. Citiamo poi altri due trattati: *Suanxue quimeng*, *Introduzione agli studi matematici*, del 1299, e *Siyuan yujian*, *Lo specchio prezioso dei 4 elementi*, pubblicato nel 1303 da Zhu Shijie. Quest'ultimo rappresenta il punto più alto raggiunto dall'algebra cinese: tratta di equazioni fino al quattordicesimo grado e di sistemi di equazioni risolti utilizzando il “metodo delle schiere rettangolari” o, come le chiamiamo noi oggi, delle matrici. In tale testo si trova anche una disserzione sul triangolo a noi noto come *triangolo di Pascal*.

Durante la dinastia Sung (900 – 1279) gli studiosi di algebra cinesi avevano compiuto progressi tali che solamente nel XVIII secolo l'Europa riuscì a raggiungere, soprattutto per quanto riguarda la soluzione di equazioni. Successivamente la matematica cinese entrò in una fase di declino; solo alla fine del XVI secolo ricominciò un periodo di effervesienza intellettuale. In particolare fu dato un grosso stimolo alla rinascita dai contatti con l'Occidente, tra il XVII e il XVIII secolo).

Molto dei metodi a cui abbiamo accennato non hanno conosciuto uno sviluppo ulteriore e si sono affermati solo a partire dal XVIII secolo d.C.. Questo ritardo si può ricondurre al fatto che la matematica cinese non ebbe uno sviluppo continuo, anzi fu spesso interrotta da cambi di dinastie e intruzioni forzate.

## Contatti e scambi con l'Europa

Fino al XVI secolo è molto difficile distinguere le conoscenze sviluppate unicamente in Cina da quelle che hanno subito influenze dall'esterno. A partire dal XVI secolo però, grazie al lavoro degli storici e dei missionari, possiamo comprendere meglio ciò che è avvenuto.

In questo secolo la scienza europea iniziò ad essere introdotta in Cina, attraverso traduzioni e adattamenti di alcuni testi. È importante ricordare che in quel periodo la trasmissione della scienza era subordinata alla diffusione della religione cristiana. Non sono da sottovalutare nemmeno i problemi pratici legati alla traduzione, come il trovare i giusti termini per esprimere al meglio i concetti matematici e rendere le giuste corrispondenze tra culture e tradizioni molto diverse.

I matematici cinesi del tempo non si preoccuparono di avere accesso ai testi originali e vennero pertanto a conoscenza solo di quelli tradotti. Soprattutto tra il XVII e il XVIII secolo, la scienza europea, o meglio la scienza gesuita, era percepita dagli studiosi cinesi come fondata sugli *Elementi* di Euclide. Per i missionari, gli *Elementi* avevano il vantaggio di unire la certezza della matematica con la sua applicabilità allo studio della natura e specialmente dell'astronomia, scienza particolarmente importante nel contesto cinese. Non furono però molto apprezzati, a causa degli ornamenti letterari e delle dimostrazioni troppo dettagliate e quindi lontane dallo spirito di concisione e sintesi tipico dei Cinesi. Per questo motivo presero in considerazione soltanto ciò che ritenevano essenziale, in particolare i risultati calcolabili, per poterli confrontare con i loro metodi o per ricavarne nuovi mezzi di calcolo.

Nell'800 un traduttore degli *Elementi*, Li Shanlan, dichiarò assurda la definizione di punto come "ciò che non ha parte", con la motivazione che una macchia di inchiostro, per quanto piccola, ha necessariamente una dimensione. L'idea di un punto ideale, senza un corrispettivo nella realtà, era per lui irrilevante<sup>2</sup>.

Molte innovazioni vennero comunque accettate, come il concetto di logaritmo. L'algebra simbolica incontrò più difficoltà ad entrare rispetto ai calcoli puramente numerici e fu sostanzialmente ignorata fino alla metà del XIV secolo. Soltanto con le traduzioni successive al 1850 si cercò di rispettare i principi dell'algebra europea e venne introdotta una notazione ibrida. Infine, dopo

---

<sup>2</sup>Vedremo nel seguito una definizione analoga a quella di Euclide data da un matematico cinese, ma che non ebbe seguito.

il 1920, venne adottato il simbolismo occidentale e si convenne di scrivere le formule matematiche in orizzontale anziché in verticale.

### Sistema di numerazione

Iniziamo ad analizzare il sistema numerico che fu utilizzato dai Cinesi. Come detto poc'anzi, la testimonianza più antica di una numerazione in Cina si trova attorno al 1500 a.C.: si tratta di iscrizioni su ossa, dette *ossa oracolari*, e gusci di tartaruga, scoperti a partire dal 1899. Probabilmente tali pezzi erano appartenuti ai sacerdoti della corte dei sovrani Shang (una delle prime dinastie cinesi), i quali avevano l'usanza di appellarsi agli spiriti dei loro avi per consultarli sui momenti propizi per viaggiare, mietere, raccogliere, celebrare feste. La scrittura rivelata da questi reperti appare piuttosto evoluta, in quanto non puramente ideografica e già in parte fonetica. I numeri sono rappresentati dai seguenti simboli:

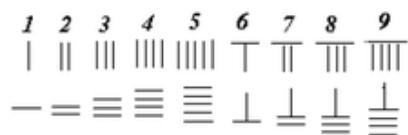
-	=	≡	☰	☱	☲	☱	☲	☱	☲	☱	☲
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000

Il sistema utilizzato era di tipo posizionale e consentiva di rappresentare qualsiasi numero utilizzando solamente 9 simboli base e tre simboli per indicare le decine, le centinaia e le migliaia, secondo il principio moltiplicativo. Notiamo l'utilizzo di un simbolo analogo per l'unità e la decina, ovvero un tratto orizzontale e verticale rispettivamente; la componente posizionale che indicava il 100 era una pigna, le migliaia un simbolo corrispondente a quello di uomo. I numeri cinesi erano, sin dall'inizio, dei "segni-parole", rappresentazione grafica della parola utilizzata per indicare il numero. Si trovano ad esempio numeri come "547 giorni" così scritti: *wu pai ssu hsun chhi jih* ovvero "5 centinaia, 4 decine, 7 di giorni".

La struttura per la numerazione cinese è rimasta sostanzialmente inalterata nel corso dei secoli, nonostante sia stata in parte cambiata la scrittura e le forme per le cifre abbiano subito alcune variazioni. Per indicare potenze di dieci superiori alla terza, si continua ad utilizzare la moltiplicazione, scrivendo ad esempio  $1000000 = 1 \cdot 100 \cdot 10000$ . Talvolta si trovano, in trattati a carattere

scientifico, caratteri particolari per indicare ordini superiori a  $10^4$ , ma non è un sistema di uso corrente.

Nel corso degli anni, le esigenze del commercio, dell'amministrazione e della scienza condussero a uno sviluppo di un sistema per eseguire i conti, testimoniato a partire dal II secolo a.C., ma probabilmente in uso già in precedenza. Si utilizzavano delle bacchette, in origine di bambù o d'avorio, che venivano posizionate in colonne da destra a sinistra, per rappresentare le potenze crescenti di 10. Esistevano due diversi modi per indicare le cifre: con aste in orizzontale, *heng*, o in verticale, *tsung*.



Dal III secolo d.C. queste scritte furono combinate insieme, in modo da avere un efficiente sistema di notazione posizionale: i *tsung* rappresentarono unità, centinaia e decine di migliaia mentre gli *heng* decine, migliaia e centinaia di migliaia. Ecco una testimonianza che spiega questo nuovo sistema di numerazione:

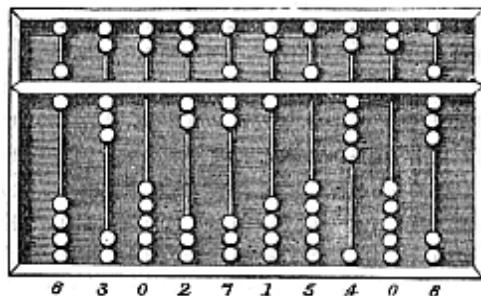
“Per fare i calcoli dobbiamo prima conoscere le posizioni e la struttura. Le unità sono verticali e le decine orizzontali, le centinaia stanno ritte, mentre le migliaia sono distese; migliaia e decine pertanto sembrano uguali, come pure decine di migliaia e centinaia. Quando arriviamo al cinque non allineiamo più (trattini).”

I cinesi riuscivano a fare i conti in modo molto efficiente con l'utilizzo di queste bacchette, tanto che uno scrittore del XI secolo scriveva:

“Le bacchette volano così veloce che l'occhio perde le tracce dei loro movimenti.”

Facciamo una piccola digressione per presentare il *suan pan*, ovvero l'abaco cinese, uno strumento che veniva utilizzato dal popolo cinese per effettuare i calcoli. La prima testimonianza scritta di questo strumento risale al 1513 d.C. ma si suppone che fosse utilizzato, in forme diverse, già da secoli. È formato

da un telaio di legno rettangolare i cui lati più lunghi sono connessi mediante fili metallici che formano una serie di colonne parallele. Su ciascuno dei fili sono infilate sette palline mobili, due delle quali però sono divise dalle altre cinque da una barra trasversale. In generale i fili metallici sono 12, ma ce ne possono essere anche 30 o più. Ciascuna delle palline sopra la sbarra equivale a cinque palline sottostanti, nella stessa colonna, e ciascuna colonna differisce di un fattore 10. Con tale strumento è possibile svolgere le quattro operazioni e anche estrazioni di radici quadrate e cubiche.



### I numeri negativi e lo zero

I matematici cinesi non mostrarono alcuna difficoltà nel considerare e utilizzare anche i numeri negativi e provengono proprio da loro le prime testimonianze di questo concetto. Ciò può sorprendere, dato che i numeri hanno sempre avuto un'accezione molto concreta in Cina; d'altra parte, non bisogna dimenticare la predilezione per l'analisi di qualsiasi tipo di problema in termini di coppie complementari (dualismo *yinyan*, presente in molti contesti).

Nella numerazione a bacchette, i numeri negativi venivano chiaramente distinti dai positivi in vari modi, quali il colore, nero per i primi e rosso per gli altri, o la sezione delle bacchette, triangolare o quadrata. Sottolineiamo il fatto che non si trovano mai, nei testi antichi, problemi con dati negativi o soluzione negativa; compare però l'utilizzo dei numeri negativi nella risoluzione di particolari algoritmi, come dati intermedi.

Per quanto concerne la rappresentazione dello zero, nella numerazione a bacchette veniva semplicemente lasciato vuoto uno spazio nella colonna corrispondente. È da notare che l'alternanza di un numero tsung e uno heng agevolava non poco l'interpretazione di uno spazio vuoto. La questione dello

zero si presentò quando le bacchette furono tradotte in scrittura, dato che gli spazi vuoti non erano più sufficienti a distinguere un numero dall'altro. Inizialmente il problema venne aggirato scrivendo i numeri per esteso, cioè specificando l'ordine della potenza di dieci ( $7064 = 7 \cdot 1000 + 6 \cdot 10 + 4$ ), oppure disponendo le barrette all'interno di una tabella. A partire dall'VIII secolo venne introdotto un simbolo apposito per indicare una posizione vuota, un cerchietto, ma non aveva probabilmente un significato numerico. Si presume sia stato portato in Cina da monaci buddisti indiani, anche se non se ne può avere la certezza.

### Lo studio dei numeri

I cinesi avevano in comune con i greci l'amore per la numerologia e il misticismo legato ai numeri. Al contrario dei greci però, più attratti dall'astrattezza e dalla metafisica, i cinesi avevano una decisa predilezione per il concreto e consideravano i numeri come qualcosa di tangibile. Inoltre, per i Cinesi i numeri erano parte integrante del mondo; non c'era distinzione, nell'antichità, tra gli strumenti usati per i semplici calcoli e quelli necessari per la divinazione. Come abbiamo già detto, il legame tra matematica e astronomia era molto forte: questo potrebbe spiegare il fatto che a volte si utilizzasse 3 come approssimazione di  $\pi$ , poiché 3 era il numero del Cielo e del cerchio, così come il 2 era il numero della Terra e del quadrato.

I numeri pari e dispari venivano associati ai due sessi, come in Grecia; inoltre era diffusa la superstizione che i numeri pari fossero sfortunati e i numeri dispari fortunati. I matematici cinesi si interessarono dello studio dei divisori di un numero e quindi di quelli che noi oggi chiameremmo numeri deficienti, perfetti o abbondanti, che sono cioè rispettivamente maggiori, uguali o minori della somma dei loro divisori. Poi vi sono i cosiddetti numeri amicali, ciascuno uguale alla somma dei divisori dell'altro; per esempio 284 e 220, infatti 220 ha come divisori 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 che sommati danno 284 e 284 ha come divisori 1, 2, 4, 71, 142 che sommati danno 220.

Nei tempi più remoti si cercava sempre di evitare le frazioni, creando un gran numero di unità di misura e di peso sempre più piccole. La matematica cinese invece fin dalle sue prime manifestazioni aveva familiarità con le frazioni e con le operazioni tra frazioni. La somma veniva fatta moltiplicando tutti i denominatori e poi moltiplicando ciascun numeratore per il numero calcolato moltiplicando tutti i denominatori diviso per il proprio denominatore; infine si

sommavano tutti i contributi. La sottrazione si faceva moltiplicando numeratori e denominatori incrociati e quindi sottraendo il più piccolo dal più grande, dividendo il risultato per il prodotto dei denominatori. Determinarono inoltre un metodo per trovare il comun divisore; nel *Jiuzhang Suanshu* si legge:

“Se due numeri possono essere divisi per due divideteli. Abbassate il denominatore sotto il numeratore e sottraete il numero più piccolo da quello più grande. Continuate questo processo finché ottenete il comun divisore.”

49	49	7	7	7	7	7	7
91	42	42	35	28	21	14	7

Il comun divisore (o *teng*) è 7 e la frazione semplificata è 7/13.

Per quanto riguarda il problema dell’irrazionalità, ricordiamo che per i greci un numero irrazionale era qualcosa che non poteva essere espresso come rapporto di due numeri interi e ciò aveva messo in discussione il concetto di numero. I matematici cinesi invece, non sembra siano stati attratti né messi in difficoltà dal considerare i numeri irrazionali, anche se erano consci della loro esistenza separata.

Il fatto che la concezione degli irrazionali, come dei numeri negativi, non presentasse problemi suscita alcuni interessanti interrogativi riguardo alle diversità funzionali tra l’antica matematica cinese e quella greca. Per i Cinesi la principale preoccupazione era il primato delle operazioni matematiche; la nozione di numero in quanto entità atomica e indivisibile, caratteristica della matematica greca antica, non li interessava e pertanto non venivano turbati da certi tipi di concetti.

### Quadrati magici

I Cinesi avevano un predilezione speciale per gli schemi: la prima testimonianza della costruzione di un quadrato magico risale al III secolo a.C. Si tratta di un raggruppamento ordinato di numeri disposti in modo tale che l’addizione di ogni riga, colonna o diagonale principale fornisse lo stesso risultato. Le celle potevano essere riempite con numeri naturali da 1 a  $n^2$ . Ecco un esempio:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

La leggenda, abbastanza diffusa in Cina, sulla nascita del quadrato magico è la seguente: l'imperatore-ingegnere Yu il Grande venne aiutato a governare l'impero da due animali di origine soprannaturale, emersi dalle acque, che egli soltanto era riuscito a controllare, i quali gli offrirono due grafici o diagrammi. Il primo animale fu un cavallo-drago nato dalle acque del Fiume Giallo, che gli regalò il *Ho Thu* (il diagramma del Fiume), scritto in caratteri verdi, mentre il secondo, uscito dal Fiume Lo, era una tartaruga che gli regalò il *Lo Shu* (il diagramma del fiume Lo), scritto in rosso.

I quadrati magici nell'antica Cina attiravano l'interesse di illustri matematici come oggetti di studio stimolanti. Il loro fascino era accresciuto non solo dal richiamo estetico ma anche dall'associazione con la divinazione e l'occulto ed erano impressi sugli arredi sacri come talismani. Avevano anche un forte significato filosofico: l'equilibrio in natura delle due forze complementari rappresentate dai numeri pari e dispari. Infatti il quadrato magico per eccellenza è quello rappresentato nell'esempio soprastante, dove anche la somma tra numeri pari e dispari è uguale (se si esclude il 5).

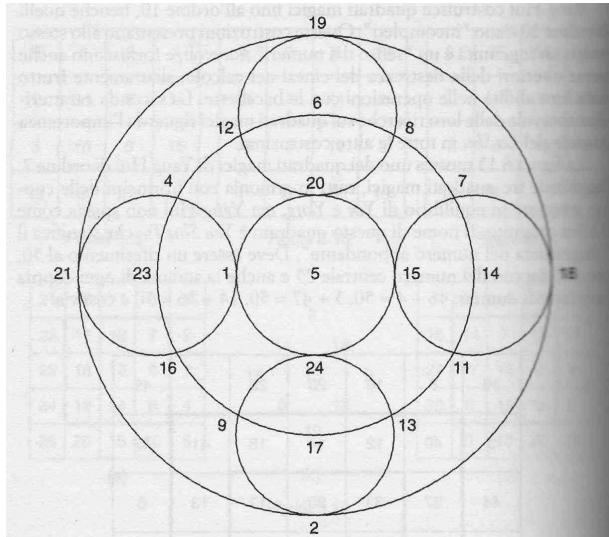
Vennero introdotti in Cina anche i cerchi magici: ogni cerchio deve avere quattro numeri sulla propria circonferenza e un numero al centro e la somma di ogni gruppo deve essere costante.

Interessante e curioso è l'incoraggiamento al lettore presente in un manoscritto in cui viene spiegata la costruzione dei quadrati magici fino all'undicesimo ordine:

“Non rinunciare perché l'ignoranza non si accorda con quest'arte  
... come l'innamorato, non puoi sperare di ottenere successo senza  
un'infinita costanza”.

### Risoluzione di equazioni

Le equazioni di primo grado erano presentavano molte difficoltà nei tempi antichi, in quanto prive di un adeguato simbolismo che aiutasse nei procedimenti. Per risolverle i Cinesi ricorsero ad un metodo piuttosto macchinoso che possiamo leggere all'interno del *Jiuzhang Suanshu*. Questa regola fu trasmessa in Europa grazie agli arabi e venne chiamata *metodo della falsa posizione*.



Il metodo è il seguente: supponiamo di dover risolvere  $ax + b = 0$ ; si fanno due ipotesi sul valore di  $x$ , che chiameremo  $g_1$  e  $g_2$ , quindi si calcolano gli scarti di tali valori, cioè  $f_1 = ag_1 + b$  e  $f_2 = ag_2 + b$ . Se uno dei valori stimati di  $x$  è esatto, lo scarto corrispondente è nullo. Altrimenti, si procede sottraendo  $f_1$  ad  $f_2$ , ottenendo  $a(g_1 - g_2) = f_1 - f_2$ . Moltiplicando  $f_2$  ed  $f_1$  per  $g_1$  e  $g_2$  rispettivamente, si ottiene  $f_1g_2 = ag_1g_2 + bg_2$  e  $f_2g_1 = ag_2g_1 + bg_1$  da cui, sottraendo la seconda dalla prima,  $b(g_2 - g_1) = f_1g_2 - f_2g_1$ . Si assume ora come risultato il rapporto  $-\frac{b}{a}$  che corrisponde a

$$x = \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1 - f_2}.$$

I Cinesi riuscivano inoltre a rappresentare e risolvere un sistema di equazioni di primo grado. Venivano disposte le bacchette in modo tale che ad ogni equazione del sistema fosse associata una colonna in cui venivano rappresentati i coefficienti. Non sussistevano problemi nel considerare coefficienti negativi per risolvere equazioni, ma le eventuali soluzioni negative erano ignorate, come abbiamo già detto.

Il metodo di rappresentazione dei coefficienti di sistemi di equazioni lineari mediante bacchette disposte su una tavola da calcolo portò spontaneamente alla scoperta di metodi semplici di eliminazione. Osserviamo che la disposizione

delle bacchette era analoga a quella dei numeri in una matrice. I matematici cinesi pertanto ebbero ben presto l'idea di sottrarre righe e colonne, come nella semplificazione di un determinante. Questo rimase l'unico metodo fino al XVIII secolo: l'affidamento a queste tecniche di calcolo se da una parte sviluppò regole simili a quelle che si trovano molti anni dopo in Europa, dall'altra non incentivò l'evoluzione di un'algebra astratta, requisito importante per uno studio più avanzato sulle matrici e sui determinanti.

Vediamo un esempio che si trova nel *Jiuzhang Suanshu* in cui viene risolto un sistema di tre equazioni:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

Vengono posizionati i coefficienti in colonna nel seguente modo (ricordiamo che si deve leggere la destra a sinistra):

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Eseguendo poi operazioni in colonna sulla matrice, similmente all'eliminazione di Gauss per colonne, si giunge alla forma triangolare:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

e dunque  $36z = 99$ ,  $5y + z = 24$  e  $3x + 2y + z = 39$ , da cui seguono facilmente i valori per  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Notiamo che questo modo di risolvere i sistemi può essere riconlegato all'interesse per lo studio dei quadrati magici.

Un altro metodo sviluppato in Cina, molto prima che in Europa, è il metodo di Cramer in un caso particolare, presentato in un capitolo del *Jiuzhang Suanshu* sotto il nome di “metodo delle eccedenze e del difetto”. Lo presentiamo a partire da un problema che si trova risolto nel testo citato:

“Un gruppo di persone compra contemporaneamente delle galline. Se ogni persona pagasse 9 wen, rimarrebbero 11 wen dopo

l'acquisto. Se ogni persona desse solamente 6 wen, ci sarebbe un ammanco di 16 wen. Quante persone ci sono nel gruppo e qual è il costo totale delle galline?"

La soluzione proposta è la seguente: ordinate i due tipi di contributi fatti dai componenti del gruppo per l'acquisto delle galline nella prima riga. L'eccesso e il difetto risultanti ordinateli in una riga sotto la prima, che contiene i contributi dei membri. Moltiplicateli diagonalmente tra loro. Sommate i prodotti e chiamate la somma *shih*. Sommate l'eccesso e la mancanza chiamate tale somma *fa*. Se una frazione compare sia in *shih* che in *fa*, fate diventare i loro denominatori uguali. Dividete *shih* per la differenza tra i due contributi per ottenere il costo totale delle galline. Dividete *fa* per la differenza tra i contributi per ottenere il numero delle persone del gruppo.

Espressa in termini algebrici, l'applicazione della regola è semplice: siano i due contributi  $a$  e  $a'$  e l'eccesso e la mancanza  $b$  e  $b'$  rispettivamente, quindi si ha:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ab' & a'b \\ b & b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 144 & 66 \\ 11 & 16 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} ab' + a'b \\ b + b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 210 \\ 27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Di conseguenza il costo totale delle galline è:

$$\frac{shih}{a - a'} = \frac{ab' + a'b}{a - a'} = \frac{210}{3} = 70$$

e il numero delle persone del gruppo è:

$$\frac{fa}{a - a'} = \frac{b + b'}{a - a'} = \frac{27}{3} = 9.$$

Tale problema può essere espresso in forma di sistema di equazioni a due incognite  $x$  e  $y$ , dove  $x$  è il numero di persone e  $y$  il costo totale:  $ax - cy = b$  e  $a'x - c'y = b'$ . Con i valori del problema le equazioni diventano  $9x - y = 11$  e  $6x - y = -16$  che in forma matriciale risultano:

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Applicando la regola di Cramer si ha:

$$x = \frac{bc' + b'c}{ac' - a'c} = \frac{11 + 16}{9 - 6} = 9 \quad y = \frac{ab' + a'b}{ac' - a'c} = \frac{144 + 66}{9 - 6} = 70.$$

Dal momento che  $c = c' = 1$  il risultato è identico alla soluzione fornita nel *Jiuzhang Suanshu*.

### Estrazione di radici

Gli antichi procedimenti per l'estrazione delle radici quadrate e cubiche erano sostanzialmente identici a quelli attuali. Nell'antica Cina ebbero origine da considerazioni geometriche sul quadrato; i matematici della dinastia Han (II secolo a.C.-II secolo d.C.) affinarono le loro tecniche sino a gettare quelle solide fondamenta che consentirono ai grandi algebristi del periodo successivo di risolvere le equazioni numeriche e di introdurre un metodo analogo a quello di Horner (1819) per il calcolo delle radici reali di un polinomio.

In qualche misura questo metodo può essere considerato già implicito nel *Jiuzhang Suanshu*. Per giustificare l'operazione di estrarre radici quadrate, Liu Hui (III secolo) scriveva che il numero A di cui si cerca la radice rappresenta l'area di una superficie quadrata e lo scopo è di trovare il lato del quadrato; per farlo è necessario dividerlo in aree *gialle*, *rosse* e *azzurre*. Cerchiamo di capire il funzionamento di questo procedimento geometrico, punto di partenza per lo sviluppo dell'algoritmo che descriveremo in seguito.

	alpha	beta	gamma
alpha	40000	12000	2 0 8 0
beta		3600	
gamma			64

Si vuole calcolare la radice di 71824: si costruisce un quadrato (giallo) di lato  $\alpha = 200$  e quindi con area pari a 40000. Due sezioni rettangolari supplementari (rosse) ognuna di dimensione  $200 \cdot 60$  danno un'area supplementare

di 24000 e, per completare la figura del quadrato si addiziona un quadrato (ancora giallo) di lato 60 e quindi di area 3600 . L'area del nuovo quadrato risulta pari a 67600, ancora inferiore a 71824; si aggiunge allora un ulteriore contributo con due rettangoli (azzurri) di area  $260 \cdot 8$  e un quadrato di area 64. In questo modo la somma di tutti i contributi risulta proprio essere di 71824.

Calcolare una radice quadrata equivale a risolvere un'equazione del tipo  $x^2 = N$ . I passi da compiere saranno:

- 1) si ponga  $x = h + y$  e si faccia una stima sul valore  $h$ ,  $N = (h + y)^2 = h^2 + 2hy + y^2 = h^2 + y(2h + y)$ ;
- 2) si ottiene  $y$  risolvendo  $\frac{N - h^2}{2h} = \frac{2hy}{2h} + \frac{y^2}{2h}$ ;
- 3) si calcola  $y(2h + y)$  e si sottrae il risultato da  $N - h^2$ . Se il risultato è zero la risposta è corretta e la radice quadrata di  $N$  è  $x = h + y$ , altrimenti si deve determinare un altro valore per  $h$  e ricominciare.

I limiti di questo approccio sono evidenti: non può essere usato per risolvere equazioni di grado superiore al terzo e già quando viene utilizzato per equazioni cubiche risulta complicato.

Vediamo ora nei dettagli l'algoritmo per il calcolo della radice quadrata di 71824, in una delle possibili ricostruzioni del metodo utilizzato nel *Jiuzhang Suanshu*. Si dispongono le bacchette in uno schema formato da quattro righe: la riga in alto contiene il risultato ottenuto ad ogni passo, la seconda riga contiene il numero per eseguire le operazioni successive, la terza riga, chiamata “riga dell'elemento al quadrato”, indica gli aggiustamenti all'elemento della riga precedente durante il procedimento e l'ultima riga viene utilizzata per fissare le posizioni delle cifre lungo il calcolo.

7	1	8	2	4
				1

La procedura si può riassumere in quattro fasi:

- i Si scrive il numero radice di  $N$  come  $\alpha + \beta + \gamma$ , ovvero  $100a + 10b + c$ .
- ii Per prima cosa bisogna ipotizzare il valore della cifra delle “centinaia” della radice quadrata cioè  $\alpha = 100a$ . Nel nostro esempio  $\alpha = 200$  viene

registrato nella prima riga, quella del risultato. Si sposta la bacchetta che riporta la posizione nella colonna che indica le decine di migliaia e si moltiplica quindi l'ultima riga per  $a = 2$ . Si riporta nella riga dell'elemento al quadrato tale risultato, lo si moltiplica per  $a = 2$  e poi si sottrae il risultato dal numero  $N$ . Cioè  $71824 - 2 \cdot 20000 = 31824$ . (Questo corrisponde a  $N - \alpha^2$ ). La tabella si presenterà ora nel seguente modo:

		2		
3	1	8	2	4
2				
1				

- iii Ci si sposta nella colonna delle centinaia, si raddoppia a questo punto il valore di  $a$  per ottenere  $2a$  e questo si registra come nuovo valore al quadrato nella terza riga, nella posizione precedente alla bacchetta di riporto. Si cerca ora il valore per le decine  $\beta$ , calcolando che questo deve essere la radice quadrata del nuovo elemento al quadrato (4000); risulta quindi  $\beta = 60$  ovvero  $b = 6$ . Questi nuovi risultati vengono riportati nello schema:

		2	6	
3	1	8	2	4
	4			
		1		

- iv Si calcola ora il prodotto di  $b$  per la bacchetta che riporta (600), questo viene addizionato all'elemento al quadrato della terza riga (4000) ottenendo così 4600. Si moltiplica  $b$  per il nuovo elemento al quadrato appena calcolato ( $b \cdot 4600$ ) e si sottrae il risultato al numero contenuto nella seconda riga ( $31824 - 27600 = 4224$ ). Si ottiene:

		2	6	
	4	2	2	4
	4	6		
		1		

Continuando con questa linea di ragionamento, si moltiplica per due il risultato  $\alpha + \beta$

		2	6	
4	2	2	4	
	5	2		
	1			

e ancora, si trova la cifra nella posizione delle unità  $\gamma = c = 8$ , la quale, aggiunta alla terza riga e a sua volta moltiplicata per  $\gamma$  ( $528 \cdot 8$ ) dà il nuovo valore del numero al quadrato che si deve sottrarre alla terza riga, ovvero:

		2	6	8
4	2	2	4	
4	2	2	4	
				1

Poichè la sottrazione dà come risultato zero, il procedimento è concluso e si può leggere il risultato corretto nella prima riga.

		2	6	8
				1

Da quanto abbiamo detto, si deduce che per estrarre radici quadrate era fondamentale conoscere  $(a+b)^2$  e analogamente, estendendo i ragionamenti fatti alle radici terze, anche  $(a+b)^3$ , come testimoniato negli scritti di Liu Hui. Si riuscì ad estendere il metodo per estrarre radici quadrate alla risoluzione di equazioni quadratiche e fu in seguito stabilita una connessione tra l'estrazione di radici di grado maggiore di 2 e la soluzione di equazioni dello stesso grado. Svolse certamente un ruolo importante in ciò la tavola di coefficienti binomiali a noi nota come *triangolo di Pascal*.

Riportiamo, come curiosità, un'immagine che rappresenta la notazione cinese di un'equazione di terzo grado come l'avremmo letta a metà del XIII secolo:

In termini moderni:

$$2x^3 + 15x^2 + 166x - 4460 = 0.$$



Si noti che un trattino diagonale interseca una cifra di uno dei numeri: indica che si tratta di un numero negativo. Questo tipo di notazione migliorò il sistema precedente basato sui colori rosso e nero e da allora fu definitivamente adottato.

### Il triangolo di Pascal

Fece la sua comparsa in Cina nella prima metà del XI secolo. La prima testimonianza di tale risultato è una tabella di coefficienti binomiali fino alla sesta potenza con esponenti interi positivi. Attorno al 1303 nel *Siyuan yujian* è presentato un triangolo di Pascal fino all'ottava potenza, con la spiegazione di come è stato costruito e con una descrizione dei suoi possibili utilizzi:

“I numeri nella riga  $(n + 1)$  indicano i coefficienti dell’espansione binomiale di  $(a + b)^n$  con  $n$  naturale. I coefficienti dell’unità lungo le linee oblique all’estrema sinistra e all’estrema destra sono rispettivamente i coefficienti del primo e dell’ultimo termine in ogni espansione. I numeri interni sono i termini interi delle equazioni binomiali di secondo, terzo, quarto grado ecc...”.

Nello stesso testo si trovano anche alcuni esempi di calcolo di sommatorie, ad esempio:

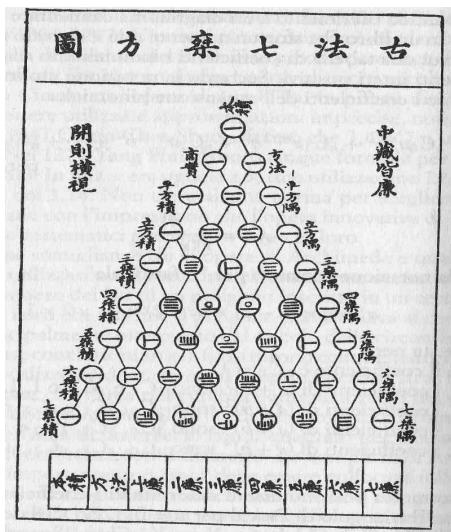
$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

$$1 + 8 + 30 + 80 + \dots + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{3!} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!}$$

Tuttavia non viene data dimostrazione di tali risultati in questo contesto. In altri testi si trovano delle spiegazioni, spesso di natura grafica.

### Analisi indeterminata

L’istituzione di questa materia in Cina e India nacque in collegamento con i calcoli per i calendari e l’astronomia. I problemi erano di due tipi: risoluzione



di sistemi lineari di primo grado di  $n$  equazioni con più di  $n$  incognite e di congruenze simultanee. Per quanto riguarda i popoli della Mesopotamia e i greci, non si trovano significative testimonianze riguardo a questo tipo di problemi, mentre i matematici orientali ne erano affascinati e attratti. Già nel *Jiuzhang Suanshu* troviamo un problema in cui viene richiesto di risolvere quattro equazioni a cinque incognite.

Uno dei tipici problemi di analisi indeterminata che si trovano nei testi matematici antichi è il seguente:

“Abbiamo un certo numero di oggetti, ma non sappiamo esattamente quanti, se li contiamo a tre per volta ne rimangono 2, se li contiamo a 5 per volta ne rimangono 3. Se li contiamo 7 per volta ne rimangono 2. Quanti oggetti ci sono?”

La soluzione a tale problema veniva data cercando di “indagare” sulle proprietà dei numeri che venivano dati dal problema in modo da riuscire a stimare una soluzione accettabile. Per esempio il problema presentato prima fu risolto dal matematico Sun Tzu (circa nel 400 d.C.) considerando i numeri 70, 21, 15 che risultano multipli di  $5 \cdot 7$ ,  $3 \cdot 7$  e  $5 \cdot 3$  e che danno resto uno se divisi rispettivamente per 3, 5, 7. Una soluzione è data dalla somma  $(2 \cdot 70) + (3 \cdot 21) + (2 \cdot 15) = 233$ . Sottraendo a 233 più volte possibile  $3 \cdot 5 \cdot 7$  si ottiene la soluzione minima trovata da Sun Tzu, ovvero 23.

Attualmente scriveremmo questo problema nel modo seguente:

$$x \equiv r_1 \pmod{m_1} \equiv r_2 \pmod{m_2} \equiv r_3 \pmod{m_3} \dots$$

e la risoluzione è chiaramente legata al celebre Teorema cinese del resto, la cui prima testimonianza si trova nel *Sunzi suanjing*, come abbiamo accennato all'inizio.

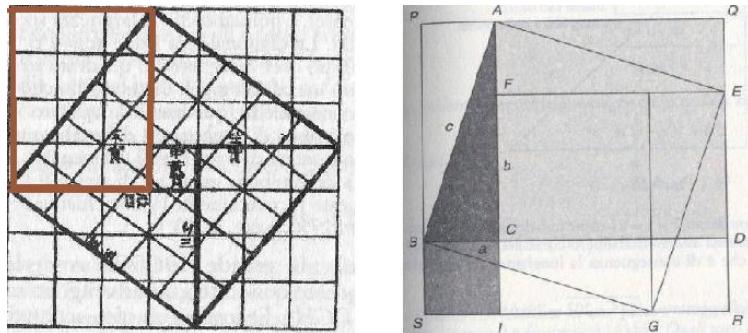
### Geometria

All'apparenza la geometria cinese aveva un carattere intuitivo e non dimostrativo e si preoccupava principalmente di fatti relativi alla misurazione. Non si sviluppò in effetti una geometria teorica di tipo ipotetico-deduttivo, tale da formulare le sue dimostrazioni basandosi esclusivamente su assiomi e postulati, come siamo abituati a concepirla in Europa. Analizzando in profondità alcune opere ci si rende però conto del fatto che contengono ragionamenti elaborati e dimostrazioni perfettamente valide, anche se molto diverse dalle dimostrazioni della geometria euclidea a noi più familiare.

Tra i vari risultati raggiunti dalla geomtria cinese antica, ricordiamo il Teorema di Pitagora che, come abbiamo già accennato, è dimostrato nel libro più antico, il *Chou Pei Suan Ching*. Riportiamo una traduzione del testo originale:

“Dividiamo un rettangolo (diagonalmente) e poniamo che la larghezza sia di 3 unità e la lunghezza di 4 unità. La diagonale tra i due angoli risulterà quindi di 5 unità. Ora, dopo aver disegnato un quadrato su questa diagonale, circoscriviamolo con mezzi rettangoli come quello che è rimasto fuori in modo da formare una tabella quadrata. I quattro mezzi rettangoli esterni che misurano 3 unità di larghezza, 4 di lunghezza e 5 di diagonale, formano in tal modo due rettangoli di area 24; quindi (quando questa viene sottratta dalla tabella quadrata di area 49) il rimanente ha un'area di 25 unità. Questo procedimento viene detto raggruppare rettangoli.”

Una differenza tra la dimostrazione euclidea e quella cinese è che per la dimostrazione euclidea è necessaria una notevole conoscenza delle proprietà geometriche relative ad aree, angoli e triangoli, mentre la dimostrazione cinese permette di comprendere facilmente il teorema e di applicarlo a molti problemi pratici.



Nel *Jiuzhang Suanshu* troviamo un intero capitolo di applicazioni del teorema di Pitagora. Per esempio, il famoso problema della canna che cresce al centro di uno specchio d'acqua: la canna sporge di un piede dalla superficie di uno specchio d'acqua quadrato, che misura 10 piedi di lato; quando viene tirata verso il bordo dello stagno sfiora appena la superficie, nel punto medio di un lato. Partendo da questi dati si chiede la profondità dello stagno. Vi è inoltre il problema del bambù spezzato che forma un triangolo rettangolo naturale: una canna di bambù è alta 10 piedi e la sua cima spezzata tocca il terreno a 3 piedi dalla radice. Trovare l'altezza del punto in cui è spezzata.



È interessante sottolineare come ciascun problema presentato in questo libro è posto solitamente con le parole: *Chin yu*, “ora siamo di fronte a questa situazione”. La soluzione inizia invece con le parole: *Ta yueh*, ovvero “la risposta é”. Ulteriori spiegazioni invece sono introdotte con le parole *shu yueh*, secondo l’arte.

Abbiamo una testimonianza di geometria teoretica derivante del canone

Moista<sup>3</sup>, testo che ebbe pochissima influenza sulla corrente principale della matematica cinese antica. Quest'opera analizza tutte le branche della fisica e presenta alcuni enunciati che trattano di argomenti geometrici. Vediamo per esempio la definizione di punto:

“Il *tuan* (punto) è definito come segue: la linea è divisa in parti, e quella parte che non ha alcuna parte residua (ovvero che non può essere suddivisa in parti ancora più piccole) e forma la parte estrema di una linea è un punto.”

E ancora:

“Ciò che non si può separare in due metà, che non può essere tagliato ulteriormente.”

“Se tagliate continuamente una lunghezza a metà, potrete andare avanti fino a che non raggiungete la posizione in cui la parte mediana non è abbastanza grande da essere ulteriormente suddivisa a metà; avrete allora un punto. Tagliando la parte frontale di una linea e tagliando la parte posteriore, rimarrà un punto nel mezzo. Oppure se continuate a tagliare a metà, arriverete in uno stadio in cui vi è un quasi nulla, e poichè il nulla non può essere ulteriormente dimezzato, non lo si potrà tagliare più.”

Possiamo percepire già in queste definizioni l'assonanza con gli *Elementi* di Euclide, ma anche la grande differenza tra le due opere. In primo luogo le definizioni non sono precise e rigorose come quelle degli *Elementi*; in secondo luogo, quest'opera consiste solo ed esclusivamente di definizioni e non vi è alcun accenno a dimostrazioni o teoremi che sfruttino le definizioni appena enunciate.

In generale, i termini matematici che nella geometria euclidea hanno delle precise definizioni, nella matematica cinese corrispondono a parole prese in prestito dal linguaggio di tutti i giorni. Inoltre, il riferimento al concreto è sempre presente. Ad esempio, un segmento è “la distanza tra un uomo e un albero” oppure “la profondità dell’acqua”, come “il lato del quadrato”, a seconda del contesto. Anche i concetti di perpendicolarità e parallelismo spesso dipendono dalla situazione presa in considerazione. Le stesse figure geometriche non si riferiscono, in generale, a entità astratte, ma a oggetti

---

<sup>3</sup>Mozi fu un pensatore cinese che visse 480 – 390 a.C.

materiali che, manipolati in un modo effettivo o immaginario, possono essere utilizzati per rendere visibili certe proprietà. Spesso le proprietà geometriche stesse venivano riviste e ripetute ogni volta che apparivano e non si faceva invece riferimento ad una regola già fissata e valida in generale.

Questo è uno dei motivi per cui si tende ancora a giudicare la geometria cinese come una semplice raccolta di regole empiriche. Ci sono però come abbiamo detto anche ragionamenti e dimostrazioni ben strutturati e che forse colpiscono proprio perché non hanno eguali in altre tradizioni non euclidee.

L'approccio tipico era quello di raggiungere risultati astratti con mezzi concreti, quindi tramite illustrazioni più che con lunghi discorsi, o attraverso la manipolazione di forme tridimensionali.

Per quanto riguarda, ad esempio, il calcolo di aree e volumi di figure piane e solide, già nel *Jiuzhang Suanshu* si ricorre al metodo di “tagliare” le figure, piane o solide, per ricondursi ad altre più familiari e le cui aree e volumi erano già noti.

### Pi greco

Come le civiltà già affrontate, anche i Cinesi si trovarono di fronte al problema di determinare un valore per esprimere la misura di una circonferenza rispetto al suo diametro; questa esigenza nel popolo cinese fu incentivata, similmente ad altre civiltà, dalle necessità nel campo dell'astronomia e dell'edilizia.

Nei testi cinesi più antichi si legge che il valore di  $\pi$  veniva approssimato a 3. Lo si deduce dalle formule utilizzate per calcolare l'area del cerchio: si considerava che fosse pari a tre quarti del quadrato costruito sul diametro oppure a un dodicesimo del quadrato della circonferenza. Questa approssimazione abbastanza grossolana fu utilizzata per diversi secoli. La prima testimonianza di una stima più precisa la riscontriamo nei primi anni del I secolo. Purtroppo non possediamo nessun testo che ci mostra i passaggi e i procedimenti utilizzati per questa nuova stima; quello che sappiamo è che il valore di  $\pi$  pari a 3,154 è stato calcolato togliendo da un cilindro di bronzo uno spazio cubico.

A questo tentativo ne seguirono molti altri: generalmente il problema era visto come la ricerca del rapporto tra diametro e circonferenza, mentre non si accenna mai all'idea della costante  $\pi$ . Alla fine del III secolo, Liu Hui ottenne il valore di 3,14, utilizzando un poligono regolare di 96 lati; nel V secolo, Zu Chongzhi calcolò  $355/113 = 3,14159$ ; in un'opera del 1635,

si trova un'approssimazione sorprendente:  $3.14159265358979323846 < \pi < 3.14159265358979323847$ .

Di fatto l'approssimazione  $\pi = 3$  venne utilizzata fino al XIX secolo, perché considerata pratica per i calcoli e forse anche per l'importanza simbolica del numero 3.

### Infinito

Dalle definizioni geometriche che abbiamo riportato nel paragrafo precedente sorge spontaneo chiederci se i cinesi avessero qualche concetto di *infinito* e come considerassero questo problema. Tale discussione nacque quando arrivò in Cina, per influenza indiana, una prima idea di infinito.

Leggiamo in questo passo del XII sec d.C. la risposta che i matematici cinesi diedero a tale problema:

“Oggi anche i ragazzi apprendono la matematica dai manuali stampati buddistici che trattano il conteggio di numeri enormi di granelle di sabbia acciocché il loro numero non possa essere conosciuto... Ma come possono i Buddha conoscere le risposte là dove non ci sono numeri definiti e nessun principio preciso? Ciò che è vago ed oscuro non può aver nulla a che fare con questioni riguardanti il numero e la misura. Siano i numeri grandi oppure piccoli, i problemi si possono tutti risolvere e le risposte formulare chiaramente. Solo le cose che vanno oltre la forma o il numero non possono essere indagate. Come può esservi matematica oltre la forma e il numero?”

Questa citazione è probabilmente sufficiente per comprendere come il problema dell'infinito non sussistesse nella cultura cinese.

Concludiamo qui il veloce e non esaustivo percorso sulla matematica cinese, in quanto gli sviluppi successivi di cui abbiamo testimonianza sono dovuti anche alla pesante influenza della matematica indiana e araba.

## 2.3 La matematica in India

Le prime testimonianze di una civiltà indiana risalgono al 3500 a.C.; dai reperti archeologici si può affermare che si trattava di una società con un alto livello di organizzazione, con città rifornite da comunità agricole che coltivavano principalmente orzo e grano e allevavano bestiame. Lo sviluppo urbano era

pianificato e caratterizzato da un’architettura altamente standardizzata. Di questo periodo però non ci sono pervenuti documenti di matematici. Intorno al XX secolo a.C., la penisola venne invasa da popolazioni ariane, che introdussero il sistema delle caste e diedero inizio allo sviluppo della letteratura sanscrita: risalgono a questo periodo le raccolte di testi sacri noti come *Veda*. In questa fase gli Indiani erano dediti soprattutto alla letteratura e al culto religioso, che prevedeva diversi riti e sacrifici.

Le prime tracce di matematica, in particolare di geometria, compaiono tra l’800 e il 600 a.C. nei *Sulvasutra*, che significa “regole della corda”: il termine *sulva* si riferisce alle corde utilizzate per le misurazioni, mentre *sutra* indica una raccolta di regole. Si tratta di testi di appendice ai *Veda* che contengono indicazioni per la costruzione di altari per sacrifici e di pire sacrificali, che dovevano soddisfare precise prescrizioni per quanto riguarda l’orientamento, la forma e l’area; i primi sviluppi della matematica indiana sono quindi legati alla religione. Tuttavia è difficile datare questi documenti e non è chiara l’influenza che hanno esercitato negli studi successivi: ancor più che in Cina, in India i contributi più importanti per la matematica costituiscono episodi isolati ed è difficile riconoscere una continuità. Attualmente sono riconosciuti quattro principali autori dei *Sulvasutra*: Baudhayana (800 a.C.), Manava (750 a.C.), Apastamba (600 a.C.) e Katyayana (200 a.C.). Erano tutti sacerdoti e studiosi, ma certamente non matematici nel senso moderno.

La religione vedica persistette fino al VI secolo a.C., quando la cultura cominciò a trasformarsi: attorno al 500 a.C., in risposta all’eccesso delle pratiche vediche, nacquero il Buddhismo e il Jainismo. Si ebbe un graduale cambiamento anche nella percezione del ruolo della matematica, che passò dall’essere un complemento necessario all’adempimento di pratiche rituali all’imporsi come una disciplina astratta da coltivare autonomamente. In particolare fu l’astronomia a dare la spinta per gli studi matematici: erano richieste tecniche sempre nuove e più precise per effettuare calcoli e dimostrare verità astronomiche. Molti testi jainisti importanti per la matematica non sono ancora stati studiati, pertanto le notizie che abbiamo a riguardo sono principalmente un riflesso dovuto ad alcuni commentatori. Sembra tuttavia certo che abbiano affrontato diversi argomenti, che oggi vanno sotto il nome di teoria dei numeri, aritmetica, geometria, studio di frazioni, equazioni semplici, cubiche e biquadratiche, permutazioni e combinazioni.

Dal 500 d.C. la matematica assunse sempre più un carattere pratico e applicativo. In questo periodo nacque anche un interesse per l’analisi inde-

terminata, che raggiunse un livello avanzato durante il periodo classico della matematica indiana.

Come abbiamo già detto, le testimonianze sulla matematica indiana sono imprecise e discontinue. Queste mancanze sembrano essere determinate dai seguenti fattori:

- il declinare della filosofia vedica e l'estinguersi dei sacrifici causarono un abbandono della ragion d'essere della geometria;
- le idee matematiche venivano sostanzialmente tramandate oralmente; i risultati venivano raccolti nei *sutra*, testi in versi molto sintetici, che facilitavano la tradizione orale ma risultavano sterili e privi di significato;
- vi erano dei testi di commento ai *sutra*, ma la loro conoscenza era a disposizione di una piccola élite di persone.
- gli autori indiani raramente fanno riferimento ai loro predecessori e i metodi utilizzati sono spesso molto differenti, pertanto non è possibile ricostruire per somiglianza la cronologia di alcune scoperte e personaggi.

Analizzeremo ora brevemente la figura del matematico in India e proseguiremo poi considerando i testi principali, in particolare le opere di tre matematici indiani di grande importanza: Aryabhata, Brahmagupta e Bhaskara. Infine vedremo più in dettaglio alcuni importanti risultati.

### 2.3.1 Il ruolo della matematica

I primi matematici erano anche dei sacerdoti e il legame tra matematica e religione era molto forte. Lo scopo dei *Sulvasutra* era puramente religioso e infatti in essi vengono presentati solamente dei dati di fatto, spesso considerati rivelazioni divine, pertanto senza dimostrazioni di alcun tipo. In seguito la matematica iniziò a progredire come disciplina a se stante. Il sistema educativo che si instaurò in India comunque non dava l'opportunità a chi aveva talento di ricevere un'istruzione. L'educazione era infatti relegata all'ambito familiare; in particolare, c'erano alcune famiglie che portavano avanti le tradizioni dell'astronomia, dell'astrologia e della matematica istruendo le nuove generazioni su quanto era stato sviluppato in precedenza.

Queste famiglie possedevano gli scritti antichi e soprattutto vari commenti a questi testi. Le nuove opere prodotte erano principalmente commenti ai commenti stessi e spesso gli stessi matematici commentavano le proprie opere.

Dal momento che non erano richiesti testi didattici da utilizzare al di fuori della famiglia, non si sentiva la necessità di ricercare nuove idee; inoltre le conoscenze astronomiche precedenti non potevano essere modificate, in quanto verità religiose.

Per quanto riguarda le osservazioni astronomiche, erano generalmente imprecise e fatte in modo poco sistematico.

### 2.3.2 I *Sulvasutra* e i *Siddhanta*

I *Sulvasutra*, come abbiamo già accennato, contengono le cosiddette “regole della corda”. Le loro origini sono molto incerte e non è possibile dire se possa esserci una relazione con gli antichi problemi egiziani di agrimensura o con i problemi greci, ad esempio la duplicazione dell’altare cubico. Possono essere datati in un periodo che va dall’VIII secolo a.C. al II secolo d.C.: è difficile basarsi sulle cronologie indiane, tenendo conto del fatto che la loro tradizione rivendica importanti risultati astronomici ottenuti più di 2 milioni di anni fa. Più attendibili sono forse alcuni riferimenti presenti nella letteratura vedica che non sono però confermati da documenti scritti.

Dei *Sulvasutra* esistono tre versioni, tutte redatte in versi; la più famosa è quella che porta il nome di Apostamba e risale forse all’epoca di Pitagora. Vi si trova un’esposizione riguardante la costruzione di angoli retti mediante tre cordicelle le cui lunghezze formano terne pitagoriche. Non è da escludere un influsso della matematica babilonese, anche per quanto riguarda la conoscenza del Teorema di Pitagora. Vi sono però altre regole che presentano una maggiore originalità e ne discuteremo brevemente in seguito.

Il periodo dei *Sulvasutra* si concluse attorno al II secolo d.C. e fu seguito dal periodo dei *Siddhanta* (sistemi di astronomia): conosciamo cinque diverse versioni di quest’opera, ma l’unica pervenutaci integralmente è il *Surya Siddhanta*, scritto verso il 400 d.C.. In questo periodo l’interesse per l’astronomia e quindi la necessità di risolvere certi tipi di calcoli determinò lo sviluppo della trigonometria.

Alcuni studiosi ritengono che le informazioni contenute nel *Siddhanta* derivino dalla cultura ellenistica. A sostegno di ciò si può considerare la stretta analogia con la trigonometria e l’astronomia di Tolomeo o l’approssimazione del valore di  $\pi$ . È da sottolineare però il fatto che anche se gli indiani attinsero le loro conoscenze trigonometriche dall’ellenismo, nelle loro opere tale materiale assunse una nuova forma. Mentre la trigonometria di Tolomeo per esempio si basava sul rapporto tra le corde di un cerchio e gli angoli al cen-

tro sottesi da esse, gli autori dei *Siddhanta* trasformarono tale rapporto nella corrispondenza tra la metà della corda di un cerchio e la metà dell'angolo sotteso. Nacque così probabilmente il concetto che anticipava il moderno seno di un angolo; lo stesso termine “seno” deriva probabilmente dall’indiano *jiva*. Questo rappresenta uno dei maggiori contributi dei *Siddhanta* all’evoluzione della matematica.

Un altro testo probabilmente molto antico è il *Bakhshali manuscript*, ritrovato nel 1881 vicino al villaggio di Bakhshali. Risale forse al 200-400 a.C., ma la datazione è in realtà molto incerta; secondo alcuni potrebbe essere stato scritto nel III secolo d.C.. Si tratta di un manuale di regole ed esempi illustrati con relative soluzioni, riguardanti principalmente algebra e aritmetica, geometria e misurazione solo marginalmente. Ha una struttura piuttosto inusuale per essere un testo indiano: generalmente fornisce l’enunciato di una regola, quindi un esempio a parole e poi in notazione matematica; infine viene data la soluzione dell’esempio e la sua dimostrazione.

### 2.3.3 Opere successive: *Aryabhatiya* e *Brahmasphuta Siddhanta*

Tra il V e il VI secolo d.C visse Aryabhata, considerato il primo dei grandi matematici-astronomi indiani; la sua opera principale, *Aryabhatiya*, può essere considerata la versione indiana degli *Elementi* di Euclide, in quanto raccoglie molti risultati dovuti ad autori precedenti di cui ci sono pervenuti solo piccolissimi frammenti e segna l’inizio di una nuova fase. Le differenze tra le due opere sono comunque molto evidenti: Euclide propone una sintesi sistematica e dotata di un alto grado di astrazione, con una struttura logica chiara e con un’evidente finalità didattica. L’*Aryabhatiya* è invece una breve opera espositiva in versi che intendeva integrare le regole di calcolo utilizzate in astronomia e nella misurazione, senza alcun interesse per il metodo logico o deduttivo.

Copre diversi argomenti, tra i quali l’aritmetica, la trigonometria piana e sferica e le regole per il calcolo di aree e volumi; l’intero volumetto risulta essere un’interessante opera anche se è bene sottolineare che mescola regole semplici e procedimenti complicati, risultati esatti e sbagliati. Si trovano ad esempio la formula corretta per l’area del triangolo, metà della base per l’altezza, ma anche il volume della piramide viene calcolato erroneamente in modo analogo.

Aryabhata usa in quest’opera una numerazione posizionale, pur senza lo zero; descrive il sistema posizionale decimale in questo modo:

“Da una posizione all’altra, ciascuna è dieci volte la precedente.”

Ricordiamo che Aryabhata fornì una tavola per il valore del seno che è di una precisione veramente notevole. Tolomeo aveva già compilato una tavola per i valori delle corde nel II secolo d.C., ma non ci sono prove a sostegno del fatto che la tavola tolemaica potesse essere giunta fino in India. In questo periodo si determinò inoltre l’approssimazione della costante  $\pi$  per definire il rapporto tra circonferenza e diametro. Non si sa con certezza come gli Indiani siano giunti a tali risultati, ma l’ipotesi più accreditata è che questi valori siano stati calcolati attraverso una trattazione intuitiva del calcolo alle differenze finite e dei metodi di interpolazione. In generale, ne deduciamo una matematica intuitiva, simile a quella cinese, in contrapposizione al rigoroso razionalismo della matematica greca.

Accenneremo in seguito ad alcuni risultati presenti in quest’opera, dei quali in nessun caso viene data una spiegazione o giustificazione.

Un altro grande matematico indiano è Brahmagupta, vissuto nel VII secolo d.C.. Di lui citiamo un importante testo di astronomia, il *Brahmasphuta Siddhanta*, che contiene innovativi approfondimenti nel campo dell’astronomia, nonché parecchi capitoli dedicati alla matematica.

Questo testo costituisce la fonte più antica conosciuta (eccettuato il sistema di numerazione maya) di trattazione dello zero come un numero a tutti gli effetti. Sono inoltre enunciate le regole dell’aritmetica sui numeri negativi e sullo zero, piuttosto vicine al modo di ragionare moderno. La principale divergenza è costituita dal tentativo di definire la divisione per zero, che viene invece lasciata indefinita nella matematica moderna. Egli afferma infatti che  $0/0 = 0$ ; non si pronuncia invece sulla questione di  $a/0$ .

Come Aryabhata, anche Brahmagupta giustapponeva risultati buoni e altri approssimativi o errati, ad esempio nel calcolo di aree di figure piane.

Diede invece notevoli contributi all’algebra e allo sviluppo dell’analisi indeterminata: nella sua opera si trovano soluzioni generali alle equazioni di secondo grado, comprendenti due radici anche nel caso che una di esse sia negativa; fu il primo a dare una soluzione generale all’equazione diofantea lineare  $ax + by = c$ , con  $a, b, c$  interi. Perché questa equazione abbia soluzioni intere occorre che il massimo comune divisore di  $a$  e  $b$  divida anche  $c$ ; Brahmagupta sapeva che se  $a$  e  $b$  sono primi fra loro, tutte le soluzioni dell’equazione sono date da  $x = p + mb$ ,  $y = q - ma$ , dove  $m$  è un numero intero arbitrario. Egli suggerì inoltre lo studio dell’equazione diofantea di secondo grado  $x^2 = 1 + py^2$

(a noi nota come equazione di Pell), che venne risolta per alcuni casi particolari da un matematico successivo, Bhaskara.

Osserviamo che molti degli esempi utilizzati da Brahmagupta coincidono con quelli di Diofanto: si può vedere in ciò un influsso della matematica greca, oppure è possibile che entrambi abbiano attinto ad una stessa fonte, forse di origine babilonese.

#### 2.3.4 Bhaskara

Altro matematico degno di essere menzionato, in quanto rappresenta il culmine della conoscenza matematica e astronomica del XII secolo in ambito mondiale, è Bhaskara, vissuto all'inizio del XII secolo. Egli apportò innovazioni nel campo dell'astronomia e risolse molti tipi di equazioni; molti dei suoi risultati sono stati raggiunti in Europa solo molti secoli dopo.

Le sue opere principali furono il *Vija-Ganita* (“Algebra”), il *Siddhanta Shiromani* e il più celebre *Lilavati*. Analizziamo alcuni dei contributi fondamentali.

Nel *Vija-Ganita* Bhaskara affermò che ogni numero diviso per zero dà una quantità infinita e aggiunse che infinito diviso da una qualsiasi quantità rimane infinito. Questo contributo va a colmare la lacuna presente nella trattazione di Brahmagupta. Ecco il passo in cui Bhaskara affronta per la prima volta la problematica della divisione per zero:

“Dividendo 3, divisore 0. Il quoziente è la frazione  $\frac{3}{0}$ . Questa frazione il cui denominatore è zero, viene definita quantità infinita. In questa quantità, consistente in ciò che ha come divisore lo zero, non vi è nessuna alterazione, anche se vi è aggiunto o tolto molto: infatti nessun mutamento ha luogo nell'infinità e immutabilità di Dio.”

Questa affermazione risulta promettente per uno sviluppo ulteriore del concetto di infinito, ma una successiva affermazione di Bhaskara in cui afferma che  $\frac{a}{0} \cdot 0 = 0$  dimostra in realtà la mancanza di una chiara comprensione del problema.

Assieme alla risoluzione dell'equazione diofantea già data anche da Brahmagupta, Bhaskara diede anche una soluzione all'equazione di Pell. Sempre in questo testo si trova per la prima volta l'affermazione che un numero positivo ha due radici quadrate, una positiva e una negativa.

Il *Siddhanta Shiromani* è un trattato astronomico e comprende molte teorie che non si trovano in opere precedenti. Dimostra come Bhaskara avesse una profonda padronanza della trigonometria, incluse la tavola del seno e le relazioni fra le diverse funzioni trigonometriche. In particolare, Bhaskara parve più interessato alla trigonometria di per sé stessa rispetto ai suoi predecessori, che la vedevano solo come strumento per il calcolo. Fra i molti risultati interessanti ottenuti da Bhaskara, compaiono per la prima volta le regole che oggi chiamiamo regole del seno e del coseno per la somma e la differenza di due angoli. Le sue ricerche non erano per nulla inferiori all'opera di Newton di cinque secoli successiva, a parte il fatto che, a quanto pare, Bhaskara non comprese l'utilità delle sue ricerche e perciò molti storici della matematica in genere trascurarono i suoi risultati rilevanti. Lo studio dell'astronomia nelle opere di Bhaskara si basa su un sistema solare eliocentrico, precedentemente proposto da Aryabhata, in cui i pianeti seguono un'orbita ellittica intorno al Sole, e sulla legge di gravità descritta da Brahmagupta nel VII secolo. I contributi di Bhaskara all'astronomia comprendono precisi calcoli basati su questo sistema. Uno di questi è il calcolo dell'anno siderale, ovvero il tempo impiegato dalla Terra per orbitare intorno al Sole, di 365, 2588 giorni; il valore accettato oggi è di 365, 2596, con la differenza quindi di un solo minuto.

Il *Lilavati* è il trattato più noto scritto da Bhaskara; in questa opera sono contenute le soluzioni e alcune considerazioni su diversi problemi tratti da Brahmagupta e da altri matematici precedenti. Gli argomenti sono piuttosto vari: equazioni determinate e indeterminate, progressioni aritmetiche e geometriche, numeri irrazionali, terne pitagoriche; vi è enunciato il teorema del valor medio (teorema di Rolle).

Dopo Bhaskara la matematica in India non fece ulteriori progressi: gli studiosi successivi al 1200 si accontentarono principalmente di riprendere in mano e commentare le opere dei matematici precedenti. L'unica piccola e limitata zona che sembra sfuggire a questa tendenza è il Kerala, stato dell'India meridionale che vide, tra il XIV e il XVII secolo, un forte sviluppo dell'astronomia e della matematica. Attorno al 1600, con l'arrivo degli Inglesi, gli Indiani entrarono infine in contatto con la matematica moderna proveniente dall'Europa.

### 2.3.5 Il sistema di numerazione

I numeri indiani più antichi, chiamati *Kharosthi* si trovano in iscrizioni risalenti al III secolo a.C.: si utilizzava il principio ripetitivo, con simboli

specifici per indicare 4, 10 e 20; i numeri fino al cento erano quindi composti additivamente. Questo sistema venne gradualmente sostituito dalla notazione in caratteri *Brahmi*, diffusa già dal II secolo a.C., e successivamente, attorno al IX secolo, dalla notazione *Gwalior*, chiaramente molto vicina al nostro sistema di numerazione.

Tabella 8.2. Tre tipi di numeri indiani, in ordine cronologico.										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Kharosthi</i>	I	II	III	X	IX	IIX	IIIIXXX	?		
<i>Brahmi</i>	-	=	≡	丫	հ	፩	፻	፻	፻	፻
<i>Gwalior</i>	၁	၂	၃	၈	၄	၅	၆	၇	၉	၁၀

Il primo passaggio che gli Indiani dovettero fare per passare dai numeri Brahmi ad un sistema decimale posizionale fu quello di capire che bastavano 9 cifre per esprimere qualsiasi numero perché in base alla posizione che assumeva una determinata cifra racchiudeva in sé il significato di decina, centinaia ecc... Non sappiamo esattamente quando sia avvenuto tale passaggio; probabilmente è stata un'evoluzione graduale, avvenuta forse nelle regioni di confine con la Cina, dove la numerazione a bastoncini può essere stata un modello di partenza, ma le ipotesi che si possono fare sono in realtà molteplici.

Sottolineiamo il fatto che la base 10 è sempre stata l'unica base utilizzata dal popolo indiano e non si trova in tutta la letteratura indiana alcun riferimento ad altri tipi di base.

Il secondo passaggio verso il sistema moderno di numerazione fu l'introduzione della decima cifra: lo zero. Non sappiamo ben datare la nascita dello zero: in una zona di influenza indiana sono state trovate delle testimonianze sull'utilizzo dello zero risalenti al VII secolo; inoltre, se si ritiene corretta la datazione del manoscritto di Bakhshali che sembra risalire al III secolo, allora si potrebbe affermare che sia questa la testimonianza più antica di un sistema numerico ben consolidato a valore posizionale che utilizza lo zero. Non è da escludere poi che lo zero abbia avuto origine nel mondo greco, forse ad Alessandria, e sia stato importato in India solo successivamente.

In conclusione possiamo dire che il nuovo sistema di numerazione, noto come sistema indiano, deriva dalla combinazione di tre principi fondamentali, tutti di origine antica:

- base decimale

- notazione posizionale
- simboli diversi per ciascuna delle dieci cifre.

Nessuno di questi concetti venne inventato dagli Indiani, ma a loro va probabilmente il merito di aver collegato questi principi per formare l'efficiente sistema moderno.

### 2.3.6 Operazioni e notazioni

I matematici indiani erano affascinati dallo studio dei numeri, sia che questi comportassero le ordinarie operazioni aritmetiche sia che richiedessero la soluzione di equazioni determinate e indeterminate.

Vi erano dei testi molto concisi scritti sotto forma di sutra che esplicavano l'utilizzo e le proprietà del sistema decimale. Vediamone alcuni esempi e le relative spiegazioni e applicazioni, fornite dai commenti che furono fatti a tali testi e che si compongono soprattutto di esempi concreti.

- “Tutti dal nove e l'ultimo dal 10.”

Applichiamo questa regola alla sottrazione in un esempio semplice:  $1000 - 357$ . Si sottraggono da 9 le cifre 3 e 5,  $9 - 3 = 6$ ,  $9 - 5 = 4$ , e l'ultima, 7, dal 10,  $10 - 7 = 3$ . Il risultato è quindi 643. In schema:

$$\begin{array}{r}
 1 \ 0 \ 0 \ 0 \quad - \quad 3 \qquad 5 \qquad 7 \qquad = \\
 \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\
 \text{dal } 9 \quad \text{dal } 9 \quad \text{dal } 10 \\
 \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \\
 = \qquad 6 \qquad 4 \qquad 3
 \end{array}$$

- “Verticalmente e a croce.”

Nel caso della moltiplicazione, si sfrutta l'identità algebrica seguente:  $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd^4$ , dove  $a$  e  $b$  sono le decine e unità del primo numero e  $c$  e  $d$  le corrispondenti per il secondo numero.

Per esempio 36 per 53 risulta:

Un altro metodo è il seguente: sia  $x$  la potenza di 10 più vicina ai due numeri che si vogliono moltiplicare; siano  $a$  e  $b$  le differenze tra  $x$  e i due

---

<sup>4</sup>in questo caso  $x = 10$ , ma si può osservare come questo esempio evidenzi il fatto che ogni numero può essere espresso secondo una notazione posizionale senza che la base sia specificata.

DECINE	UNITÀ
3 5	6 3
$[15][9+30][18]$	
Così $36 \times 53 = 1908$ .	

numeri che devono essere moltiplicati. Quindi si sfrutta  $(x - a)(x - b) = x(x - a - b) + ab$ .

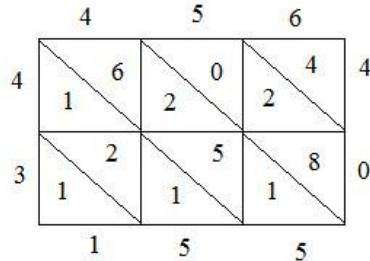
NUMERI	DIFERENZA
88 96	(100) 12 4
$84 \quad   \quad 48$	
Così $88 \times 96 = 8448$ .	

Nell'esempio:  $(100-12)(100-4) = 100(100-12-4)+12*4 = 8400+48 = 8448$ . Questo è noto come metodo per difetto, ed è utile per numeri vicini e inferiori ad una potenza di dieci; se i numeri sono superiori alla potenza più vicina si possono applicare l'analogico metodo per eccedenza o per eccedenza e difetto, rispettivamente:  $(x+a)(x+b) = x(x+a+b)+ab$  e  $(x+a)(x-b) = x(x+a-b)-ab$ .

Non sappiamo con certezza se nell'antichità le operazioni venissero svolte realmente in questo modo. In ogni caso si può notare che questi due metodi fanno intuire una relazione tra algebra e aritmetica, anche se sembra che gli indiani non abbiano approfondito tale questione.

Vediamo un altro metodo utilizzato dagli antichi Indiani, molto simile a quello moderno. Si vuole moltiplicare 456 per 34: il moltiplicando viene scritto al di sopra di un reticolo e il moltiplicatore compare a sinistra (dal basso all'alto). Si svolgono i prodotti parziali, che vanno ad occupare le caselle quadrate; le cifre disposte in diagonale vengono quindi sommate, a partire da

destra. Lungo la base e il lato destro vengono registrati i risultati che vanno a formare poi il risultato finale del prodotto:  $456 \cdot 34 = 15504$ .



Abbiamo già accennato ai contributi dato per quanto riguarda lo zero e lo studio dei numeri negativi. Gli Indiani hanno apportato in particolare un grande contributo per la nascita di una notazione algebrica, fatto di fondamentale importanza per lo sviluppo successivo dell'algebra. È importante ricordare essenzialmente l'introduzione di un segno per i numeri negativi, per la rappresentazione delle frazioni, di un simbolo particolare per denotare l'incognita e successivamente l'utilizzo delle lettere per indicare quantità sconosciute (parametri).

Contrariamente ai greci, gli Indiani non ebbero problemi a considerare numeri irrazionali, forse più per ingenuità che per un profondo intuito matematico; ricordiamo che non distinguevano chiaramente tra risultati precisi e approssimati, pertanto non sorprende il fatto che non considerassero rilevante la differenza tra quantità commensurabili e incommensurabili.

### 2.3.7 Teorema di Pitagora e interesse geometrico

Vi sono scarse tracce in India dei problemi classici della geometria o dello studio di curve diverse dal cerchio; i matematici indiani erano come abbiamo visto, più attratti dallo studio dei numeri.

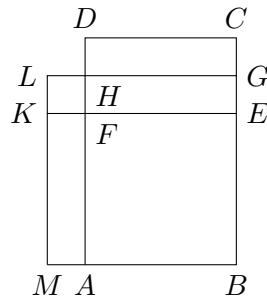
Troviamo comunque anche nella cultura indiana un analogo del teorema di Pitagora, che si può riconoscere in un disegno di un particolare tipo di altare. La descrizione che si legge è la seguente:

“La fune che viene tesa attraverso la diagonale di un quadrato produce un’area di dimensione doppia rispetto al quadrato originale.”

“La fune tesa della diagonale di un rettangolo forma un’area pari alla somma di quella formata dal lato verticale e da quello orizzontale.”

Sembra comunque che la nascita di questo tipo di matematica, strettamente connessa a rituali, non abbia avuto particolare influsso sui matematici indiani successivi. È importante sottolineare ancora che la matematica indiana, ancor più di quella cinese, presenta una sorprendente mancanza di continuità e di tradizione: i contributi più importanti costituiscono fatti episodici separati da lunghi intervalli in cui non si aggiunse nessun nuovo risultato.

Nei *Sulvasutra* troviamo questa regola, che assomiglia ad alcune regole degli *Elementi*, per costruire un quadrato di area uguale ad un rettangolo  $ABCD$ . Si segnino sui lati maggiori le lunghezze dei lati minori in modo che  $AF = AB = BE = CD$ ; si tracci il segmento  $HG$  che di vide a metà  $CE$  e  $DF$ . Si prolunghi  $HG$  fino a  $L$ ,  $EF$  fino a  $K$  e  $AB$  fino ad  $M$  in modo che  $FK = HL = FH = AM$ . Si costruisca il rettangolo avente la diagonale uguale ad  $LG$  e il lato minore pari a  $FH$ : il lato maggiore sarà il lato del quadrato cercato (come si vede infatti dal disegno,  $LG^2 - FH^2 = \text{area di } ABCD$ ).

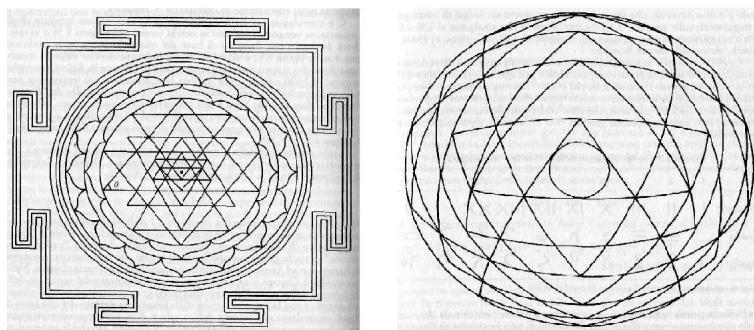


Per quanto riguarda il  $\pi$ , si trova nell’*Aryabhatiya* questa affermazione:

“Aggiungi 4 a 100, moltiplica tale somma per 8 e aggiungi 62000. Il risultato è approssimativamente la circonferenza di un cerchio il cui diametro è 20000.”

Ciò corrisponde al valore  $\pi = 3,1416$ , che è lo stesso valore calcolato da Tolomeo ed è probabile che Aryabhata ne fosse a conoscenza. È interessante notare come Brahmagupta pare non conoscere il risultato di Aryabhata e cita invece come “valore pratico” di  $\pi$  3 e come “valore netto”  $\sqrt{10}$ .

Un ambito particolare in cui troviamo delle figure geometriche che possono aver richiesto lo studio di alcune particolari figure e rapporti riguarda la meditazione. I *Sriyantra* erano una categoria di particolari strumenti atti per le tecniche meditative tipiche del buddhismo: erano solitamente costituiti da un intreccio di triangoli e avevano forme abbastanza complesse. Vediamone un esempio:



In molti di tali disegni si possono riconoscere due rapporti importanti: la sezione aurea e il pigreco. Interessante è anche osservare l'utilizzo dei triangoli sferici nel secondo esempio di sriyantra riportato.

### 2.3.8 Estrazione di radici quadrate

Un'importante conquista della matematica vedica fu la scoperta di un procedimento per calcolare le radici quadrate ad un alto livello di approssimazione. Per esempio essi approssimavano nel modo seguente la radice di 2:

“Aumentate la misura di un suo terzo, e questo suo terzo aumentatelo poi ulteriormente di un suo quarto sottraendo poi la trentaquattresima parte di quel quarto. Questo è il valore con una quantità speciale in eccesso.”

In termini moderni:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} = 1,4142156,$$

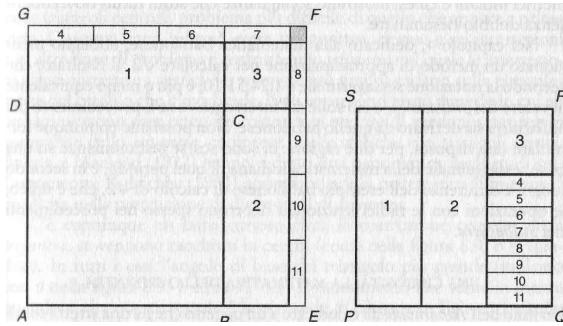
stima che risulta corretta fino alla quinta cifra decimale.

Molti secoli dopo, nel XV secolo, un commentatore dei *Sulvasutra* fornisce un'approssimazione ancora migliore completando la formula con i seguenti due termini:

$$-\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 33} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 34}$$

e questa fornisce una stima corretta fino alla settima cifra decimale.

I *Sulvasutra* non contengono alcun indizio sul modo in cui si giunse a questa approssimazione notevole. Ci sono varie ipotesi ma nessuna di queste documentata da reperti storici. Una delle più plausibili è la seguente: si prendano in considerazione due quadrati,  $ABCD$  e  $PQRS$ , ognuno con i lati di un'unità, come nella seguente figura:



$PQRS$  viene diviso in tre strisce rettangolari uguali, delle quali le prime sono contrassegnate con 1 e 2. La terza striscia viene suddivisa in tre quadrati, il primo dei quali viene contrassegnato con 3. I due quadrati rimanenti vengono divisi ognuno in quattro strisce uguali, da 4 a 11. Queste undici aree sono addizionate al quadrato  $ABCD$  per ottenere un quadrato grande meno un quadrato piccolo sull'angolo  $F$ , di lato  $\frac{1}{3 \cdot 4}$ . Il lato del quadrato aumentato ( $AEFG$ ) è:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}.$$

L'area del quadrato ombreggiato è  $[\frac{1}{3 \cdot 4}]^2$  e l'area del quadrato aumentato  $AEFG$  è più grande della somma delle aree dei quadrati originali di  $[\frac{1}{3 \cdot 4}]^2$ .

Per rendere l'area del quadrato  $AEFG$  approssimativamente uguale alla somma delle aree dei quadrati originali, si immagini di tagliare due strisce molto strette di larghezza  $x$  dal quadrato  $AEFG$ , una dalla parte sinistra e

una dal fondo, in modo che valga:

$$2x[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}] - x^2 = [\frac{1}{3 \cdot 4}]^2.$$

Semplificando l'espressione e ignorando  $x^2$ , in quanto trascurabile, si ha:

$$x \simeq \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

La diagonale di ognuno dei quadrati originali era  $\sqrt{2}$ , che può essere confrontata con il lato del nuovo quadrato di area 2 che è appena stato calcolato:

$$\sqrt{2} \simeq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

### 2.3.9 Successioni e potenze

Ci sono diverse testimonianze che dimostrano come i matematici Jaina sapessero utilizzare semplici regole di permutazione e combinazione, successioni e progressioni aritmetiche e geometriche. Quest'ultimo argomento si sviluppò grazie alla loro teoria filosofica sulle strutture cosmologiche. La loro rappresentazione del cosmo consisteva in innumerevoli anelli concentrici di continenti e oceani che si alternavano con il diametro di ogni anello doppio rispetto al precedente. Se il diametro dell'anello più piccolo era di 1 unità, quello dell' $n$ -esimo anello aveva diametro  $2^{n-1}$  unità.

I Jaina sembra conoscessero in qualche modo le proprietà delle potenze, anche se non avevano una notazione per esprimere; questa ipotesi deriva da una testimonianza che dice:

“La prima radice quadrata moltiplicata per la seconda radice quadrata è il cubo della seconda radice quadrata. La seconda radice quadrata per la terza radice quadrata è il cubo della terza radice quadrata.”

Nella notazione moderna:

$$a^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{1}{4}})^3 \quad a^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{8}} = (a^{\frac{1}{8}})^3.$$

### 2.3.10 Il concetto di infinito

Se la religione vedica diede inizio agli studi matematici con lo scopo di costruire altari, così la filosofia jainista e le relative idee sulla cosmologia portarono allo sviluppo di importanti studi sull'infinito. I Jaina consideravano il tempo come eterno e senza forma; il mondo era per loro infinito, esisteva da sempre e non era stato creato da nessuno.

Lo studio di numeri molto grandi, necessari per le conoscenze astronomiche, li portò ad elaborare precocemente un concetto di infinito che, anche se inizialmente non era strettamente una trattazione a livello matematico, era abbastanza evoluto; tale tipo di studi non fu poi considerato da altri fino all'arrivo di Cantor.

I numeri erano classificati in tre gruppi principali, con ulteriori sottodivisioni:

- numerabili, che partono da 2 per andare all'infinito, e non ce n'è uno massimo;
- non numerabili, divisi in quasi non numerabili, assolutamente non numerabili e innumerabilmente non numerabili;
- infiniti, suddivisi in quasi infiniti, assolutamente infiniti e infinitamente infiniti.

Si determinavano inoltre cinque tipi di infinito: in una direzione, in due direzioni, nell'area, infinito ovunque, infinito in eterno.

I matematici Jaina furono quindi i primi a scartare l'idea che tutti gli infiniti fossero gli stessi e uguali. Inoltre il più elevato numero per i Jaina era  $\aleph_0$ , cioè il numero cardinale dell'insieme infinito degli interi  $1, 2, \dots, N$ . Anche questo concetto fu elaborato poi da Cantor.

# Bibliografia

- [1] Boyer C. B., *Storia della matematica*, Oscar studio Mondadori.
- [2] Gheverghese Joseph G., *C'era una volta un numero*, Il saggiautore editore, 2000.
- [3] Needham J., *Scienza e civiltà in Cina*, Giulio Enaudi editore.
- [4] Frajese A., *Attraverso la storia della matematica*, Le monnier.
- [5] Kaplan R., *Zero*, Rizzoli.
- [6] Ifrah G., *Storia universale dei numeri*, Arnoldo Mondadori editore, 1984.
- [7] Martzloff J.-C., *A history of chinese mathematics*, Springer, 1987.
- [8] O'Connor J., Robertson E.F., articoli in rete.
- [9] George R. Kaye, *Indian Mathematics*, Thacker, Spink and co, 1915.

## Capitolo 3

# La matematica nella Grecia pre-euclidea

di Simone Tonelli

### 3.1 Introduzione

L'attività intellettuale delle civiltà potamiche dell'Egitto e della Mesopotamia si era esaurita molto prima dell'Età cristiana; ma, mentre il sapere andava declinando nelle valli attraversate dal Nilo, dal Tigri e dall'Eufrate e il bronzo cedeva il posto al ferro nella fabbricazione delle armi, vigorose nuove culture sbocciavano un po' ovunque lungo le coste del Mediterraneo. Per indicare questo mutamento dei centri di civiltà, si suole talvolta chiamare l'intervallo di tempo che va dall'800 a.C. all'800 d.C., con il nome di Era talassica (era 'marina'). Non vi fu, naturalmente, nessuna rottura che marcasce la transizione del predominio intellettuale delle valli del Nilo e del Tigri e dell'Eufrate alle coste del Mediterraneo; il tempo e la storia fluiscono con continuità, e le condizioni mutate vanno ricercate in cause precedenti. Scribi egiziani e babilonesi continuarono a produrre papiri e testi cuneiformi ancora per parecchi secoli dopo l'800 a.C.; ma nel frattempo una nuova civiltà si stava rapidamente preparando ad assumere l'egemonia culturale, non soltanto nelle regioni affacciate sul Mediterraneo, ma, alla fine, anche nelle valli dei fiumi citati. Per indicare il luogo dove avrebbe origine questa nuova cultura si suole assegnare al primo periodo dell'Era talassica il nome di Era ellenica; perciò alle culture anteriori si da conseguentemente il nome di pre-elleniche.

L'inizio della storia greca risale al secondo millennio a.C., quando inculti invasori calarono dalle regioni settentrionali; non portavano con sé nessuna tradizione matematica o letteraria, ma furono pronti ad assorbire la cultura degli altri popoli e in breve tempo realizzarono progressi che andavano al di là di ciò che avevano appreso da altre civiltà. Per esempio, essi ereditarono, forse dai fenici, un alfabeto già esistente, consistente soltanto di consonanti, al quale essi aggiunsero le vocali. Sembra che l'alfabeto abbia avuto origine in una regione compresa fra i territori babilonesi e quelli egiziani, forse nella Penisola del Sinai, e sia stato il risultato di un processo di drastica riduzione del numero di simboli cuneiformi o ieratici. Questo nuovo alfabeto si diffuse nelle nuove colonie (greche, romane, cartaginesi) attraverso le attività mercantili. Si presume che alcuni rudimenti del calcolo si siano diffusi attraverso i medesimi canali, ma è probabile che le parti più esoteriche della matematica sacerdotale siano rimaste senza diffusione. Non passò molto tempo perché mercanti, commercianti e uomini dotti provenienti dalla Grecia si aprissero una via diretta verso i centri del sapere in Egitto e in Babilonia. Qui vennero in contatto con la matematica pre-ellenica. Essi, tuttavia, non si limitarono soltanto a far proprie le tradizioni già da lungo tempo consolidate, ma assimilarono le conoscenze matematiche in maniera così profondamente originale che la matematica nel suo complesso assunse ben presto una fisionomia nettamente diversa.

I primi Giuochi Olimpici si tennero nel 776 a.C.; in tale data si era già sviluppata una fiorente letteratura greca, come testimoniano le opere di Omero e Esiodo; sulla matematica greca del tempo, invece, non sappiamo nulla. È presumibile che essa fosse ancora molto arretrata rispetto allo sviluppo delle forme letterarie, poiché queste ultime si prestavano più facilmente a una trasmissione oraria continua. Dovevano, perciò, passare ancora quasi due secoli prima che si potesse parlare di matematica greca. Poi, durante il VI secolo a.C., apparvero due uomini, Talete e Pitagora, che sembra abbiano svolto nel campo della matematica un ruolo simile a quello di Omero e Esiodo nel campo della letteratura. Omero e Esiodo sono figure abbastanza oscure, tuttavia possiamo contare su una coerente tradizione che attribuisce loro certi capolavori letterari che, trasmessi prima oralmente da una generazione all'altra, vennero infine messi per iscritto e conservati per i posteri. Talete e Pitagora sono figure storicamente abbastanza confuse, anche se in minore misura di Omero e Esiodo, ma per quanto riguarda le loro opere scientifiche, non ha più significato il parallelo con Omero e Esiodo. Infatti non ci è stato conservato nessun capolavoro matematico attribuibile all'uno o all'altro, e non si sa neppure con

certezza se Talete o Pitagora ne abbiano mai composto uno. Le loro presunte realizzazioni devono essere ricostruite sulla base di una tradizione non troppo sicura che si è venuta formando intorno a questi due antichi matematici. A loro sono attribuite certe frasi emblematiche, come *Tutto è numero* nel caso di Pitagora, ma nulla di più specifico. Nondimeno, le più antiche esposizioni greche dello sviluppo storico della matematica, ora andate perdute, attribuivano a Talete e Pitagora un certo numero di scoperte matematiche ben definite. L'illustrazione di questi contributi deve quindi tener presente che l'esposizione è basata più su una tradizione largamente persistente che non su documenti storici esistenti di qualsiasi natura.

In questa esposizione, prima di argomentare vita e principali risultati dei due matematici greci sopra citati, consideriamo le premesse che hanno portato allo straordinario sviluppo della matematica in Grecia e, in seguito, al problema legato alle fonti, che non ci permette una perfetta ricostruzione della storia trattata.

## 3.2 La Grecia Arcaica

### 3.2.1 Civiltà cretese, fenicia e micenea

Accanto all'Egitto e alla Mesopotamia altre importanti civiltà sorse nel bacino del Mediterraneo, fin dai tempi antichissimi. Gli scavi archeologici, infatti, hanno portato alla luce importanti documenti, a questo riguardo. Si sa, per esempio, che l'isola di Creta, già nel 2000 e 1500 a.C. fece uso della scrittura e produsse splendide opere d'arte (quali il palazzo di Cnosso, Festo, Mallia..). Inoltre pare che sulle coste della Siria i Fenici del III e II millennio a.C., non solo sapessero costruire navi più robuste e agili degli altri paesi orientali, ma che avessero fatto una delle principali invenzioni della storia: l'alfabeto. I Fenici intrattennero traffici intensi con tutti i popoli del Mediterraneo e fondarono numerose colonie, quali la città di Qart-Hasht (chiamata in seguito Cartagine dai Romani), sulle coste dell'Africa, in Sicilia Palermo e molte altre nelle isole dell'Egeo, in Sardegna, nelle isole Baleari e nella Spagna. I paesi mediterranei per ben due volte, nel 2000 e 1200 a.C., assistettero inermi all'invasione di bellicose popolazioni nomadi, provenienti dalla Russia meridionale. La prima ondata non fu molto imponente: alcune tribù, i Latini, investirono vaste zone dell'Italia, altre occuparono l'Anatolia e altre si stabilirono in Grecia, dividendosi in due gruppi: gli *Achei*, insediati nel Peloponneso, nella Tessaglia e nella Boezia, e gli *Ioni* stabiliti nell'Africa e nell'Eubea.

Grazie alle civiltà cretese e fenicia, anche i popoli della Grecia, a poco a poco, cambiarono il loro modo di vivere, dando luogo alla civiltà micenea, chiamata così in omaggio al suo centro più splendido: Micene.

La vita era allora tutta accentrata intorno ai palazzi reali: là avvenivano gli scambi commerciali e le funzioni religiose. La popolazione era governata da un re e da una potente aristocrazia guerriera, che non tardò ad avanzare le sue mire espansionistiche sulle isole dell'Egeo, in particolare su Creta e su alcune località dell'Asia minore.

Fra le imprese compiute da questi aristocratici, la più celebrata e famosa fu la distruzione di Troia, una ricca città posta in vicinanza dello stretto dei Dardanelli, che godeva perciò di una notevole importanza strategica per i traffici con l'Oriente asiatico. Allo scopo di controllare quella zona, i vari regni micenei strinsero una alleanza occasionale e, dopo una lunga guerra, verso il 1250, la città fu distrutta e rasa al suolo.

Tra il 1200 e il 1100 a.C. si verificò una nuova invasione di popoli nomadi del nord, più massiccia della prima, che incendiò e devastò, le principali città e villaggi greci, ponendo fine alla civiltà micenea. Le nuove tribù, i *Dori*, non si fermarono tutte in Grecia; alcune conquistarono l'impero ittita, altre si spinsero fino all'Egitto, dove furono cacciate dopo anni di lotta. Infine si insediarono probabilmente in Sardegna e nell'Etruria.

Questa invasione provocò una vasta emigrazione greca: i nuovi coloni occuparono in modo pacifico le isole dell'Egeo e le coste dell'Asia minore, dando così luogo ai centri di Chio, Samo, Lesbo, Rodi, Creta, Focea, Clazomene, Colofonte, Mileto, Smirne, Efeso e altri.

### 3.2.2 L'età buia della Grecia

Intorno al periodo successivo, 1200-800 a.C., scarse sono le notizie storiche tramandate; per cui si parla di *età buia* della Grecia. L'organizzazione sociale nelle città subì un profondo mutamento: il re perse gran parte del suo potere, costretto a governare sotto il controllo degli aristocratici e finì per rivestire il ruolo di supremo sacerdote. A poco a poco si faceva strada una nuova forma di vita sociale: la *polis*, che in un primo tempo aveva però un carattere aristocratico. Solo i nobili, piccoli proprietari terrieri, allevatori di bestiame, detentori del potere economico, avevano gli stessi diritti e doveri, potevano riunirsi in assemblea ed eleggere i magistrati, esecutori della volontà comune. Il popolo era invece costituito da piccoli e medi contadini, che lavoravano la loro terra e da semplici braccianti, che non possedevano nulla ed erano perciò

al servizio degli aristocratici.

A queste categorie non era concessa la partecipazione alla vita pubblica.

Nell’VII sec. a.C., con il peggioramento delle condizioni economiche, molti piccoli proprietari terrieri dovettero indebitarsi con i nobili e, a poco a poco, persero la loro proprietà e, a volte, anche la libertà, diventando schiavi di questi ultimi. La crisi agraria fu una delle cause principali di un’altra migrazione del popolo greco verso l’Italia meridionale, la Spagna, la Francia e l’Africa. I Greci emigranti fondarono città che divennero presto ricche e famose, fra le quali Metaponto, Siracusa, Messina, Elea, Agrigento, Reggio, Marsiglia, Malaga e Cirene.

La cultura e la civiltà greca si diffusero così in tutto il Mediterraneo e si intensificarono gli scambi commerciali ed economici.

In patria, invece, i mercanti e gli artigiani, che avevano acquistato una certa indipendenza economica attraverso il commercio, cominciarono a reclamare, insieme ai contadini, una parte di potere.

In molti luoghi alcuni nobili, avvertendo la debolezza della struttura sociale, passarono dall’altra parte e si fecero promotori del malcontento popolare, allo scopo di impadronirsi del potere.

Ecco quindi che tra il VII e VI sec. a.C. ad Atene, a Mileto, Corinto e Samo la *polis* aristocratica cadde nelle mani di un tiranno che si mostrò, in genere, crudele verso i nobili e generoso verso il popolo, favorendo lo sviluppo delle piccole proprietà terriere e seguendo una politica di prestigio. Con la rimozione dei privilegi agli aristocratici ed una più giusta ripartizione delle ricchezze, il popolo prese coscienza del fatto che poteva governarsi da sé, senza bisogno del tiranno, dando così l’avvio alla *democrazia*.

### 3.2.3 Atene e Sparta

Una delle prime città a sperimentare questa forma di governo fu Atene. Anche qui intorno al 700 a.C., spadroneggiava una potente aristocrazia: gli *eupatridi*. A loro soli era consentito di eleggere, nella loro cerchia, i sommi magistrati: gli *arconti*, che avevano il potere di comandare l’esercito, fare applicare le leggi e presiedere alle ceremonie religiose. L’amministrazione della giustizia era invece affidata al *Consiglio dell’Areopago*, costituito dagli arconti che avevano terminato il loro mandato.

Dopo un tentativo miseramente fallito verso il 630 a.C. da parte dell’aristocratico Cilone per instaurare la tirannide, per ovviare alle forti tensioni del popolo, che minacciava la guerra civile, nel 594 a.C. i nobili elessero Solone

arconte unico con il compito di riformare leggi e sistema politico.

La sua prima riforma fu la cancellazione dei debiti, che risolse il problema fondamentale della servitù dei contadini. Egli dispose che nessuno fosse mai più privato della sua libertà per pagare i debiti e fare riscattare tutti gli Ateniesi, venduti come schiavi, fuori dalla patria.

Solone inoltre divise i cittadini in quattro classi, a seconda del reddito delle proprietà agricole; con questa gerarchia regolò anche l'accesso alle cariche pubbliche e all'esercito. Permise poi, a chiunque lo desiderasse, di intentare un'azione legale in favore di chi subiva un torto e istituì l'appello al tribunale del popolo.

Nel 593 a.C. Solone lasciò Atene, per un lungo periodo di tempo, durante il quale sorsero nuovi conflitti, di natura soprattutto economica: gli abitanti della costa, infatti, miravano allo sviluppo del commercio, quelli della pianura ad estendere le loro proprietà terriere, mentre quelli della montagna, che erano i più poveri, rivendicavano semplicemente il diritto al cibo quotidiano.

Quest'ultimo gruppo, capeggiato da un grande aristocratico, Pisistrato, finì per avere il sopravvento, verso il 560 a.C.. Così si impose anche ad Atene la tirannide, che durò complessivamente fino al 510 a.C., sotto Pisistrato e suo figlio Ippia. Essi migliorarono le condizioni dei poveri, degli artigiani e dei mercanti e fecero costruire importanti opere d'arte.

Nel 510 a.C. però, un'altra famiglia aristocratica, guidata da Clistene, rovesciò la tirannide, appoggiandosi militarmente alla città di Sparta. Dopo ciò, Clistene diede l'avvio ad una radicale riforma in senso democratico della *polis* ateniese, trasferendo tutti i poteri politici all'assemblea popolare.

Egli divise i cittadini dell'Attica in dieci tribù, ognuna delle quali era composta da unità della costa, della pianura e della montagna. Le tribù eleggevano una parte dei magistrati, che andavano poi a formare il *Consiglio dei 500*, organo di tipo parlamentare incaricato di eseguire le decisioni dell'assemblea e di proporre le soluzioni da adottare in circostanze particolari. La direzione delle operazioni militari era invece affidata a dieci strateghi, scelti ciascuno in una tribù.

Per stroncare sul nascere qualsiasi reazione aristocratica, Clistene introdusse l'ostracismo, cioè la condanna all'esilio di dieci anni per coloro che attentavano alle leggi della città, condanna che veniva votata a maggioranza dall'assemblea del popolo.

Le riforme di Clistene portarono alla forma più alta di democrazia riscontrabile nell'antichità, ma misero in allarme le *polis* vicine ancora soggette al dominio

degli aristocratici.

Fra queste città la più importante era senza dubbio Sparta che, da tempi antichissimi, era governata da un'oligarchia militare e guerriera.

Il popolo era costituito, per la maggior parte, dagli *ilotti* che, essendo considerati proprietà dello stato, venivano assegnati ai nobili perché coltivassero le loro terre e allevassero il loro bestiame.

Una categoria intermedia fra quella degli aristocratici e quella degli *ilotti*, era formata dai *perieci* o abitanti dei dintorni, che disponevano di una certa autonomia locale, ma dovevano pagare alla città tributi e fornirle truppe per le esigenze militari.

Gli spartani, con la loro potente struttura militare, riuscirono a conquistare, entro breve tempo, ampi territori nelle vicinanze e fra questi la regione della Messenia, i cui abitanti furono ridotti alla condizione di *ilotti*.

La disuguaglianza fra le classi sociali divenne in Sparta sempre più evidente, con il passare degli anni. Nel V sec. a.C., infatti, il piccolo numero degli aristocratici (circa 5000) doveva controllare una vastissima popolazione di *iloti* e *perieci* (circa 250000). Per questo motivo gli Spartani rafforzarono notevolmente la loro casta militare, irrigidendosi sempre di più su posizioni conservatrici: i giovani, fin dall'infanzia, ricevevano un'educazione severissima, tutta incentrata al raggiungimento della potenza fisica e gli adulti trascorrevano insieme la maggiore parte del loro tempo, proprio come in un'accampamento militare.

Il governo spartano era costituito da un consiglio di anziani aristocratici che eleggevano due re e un collegio di cinque *efori*; questi controllavano l'applicazione delle leggi formulate dal *Consiglio*, amministravano la giustizia e sorvegliavano l'educazione dei giovani e la vita pubblica.

Dalla metà del VII sec. in poi, assistiamo ad un notevole mutamento nella politica estera di Sparta: la città, lasciando da parte le mire espansionistiche, cominciò a stringere alleanze con le maggiori *polis* libere del Peloponneso, ad eccezione di Argo e dell'Acaia. Si costituì così una vera e propria lega, denominata dagli storici *lega peloponnesiaca*, i cui membri godevano di una piena autonomia in politica interna, mentre, in caso di guerra, dovevano sottomettersi all'autorità di Sparta.

Forte di questo nuovo accordo, l'oligarchia spartana non tardò a manifestare la sua ostilità verso la democrazia ateniese.

### 3.2.4 Le guerre persiane e del Peloponneso

Con il profilarsi della minaccia persiana le controversie fra queste due grandi città cessarono per un certo periodo.

Ciro il Grande, re dei Persiani, aveva infatti conquistato nel 546 a.C. il regno di Lidia, nell'Asia minore, quindi il regno di Babilonia, la Siria, la Fenicia e la Palestina. Il suo successore, Cambise, aveva esteso l'impero all'Egitto e si era spinto fino alla Cirenaica e all'Etiopia. Dario poi, salito al trono nel 521 a.C., rafforzò l'esercito e continuò l'espansione.

La ribellione greca contro i Persiani scoppì nel 499, ad opera della città di Mileto e si diffuse rapidamente nelle regioni settentrionali (fino al Bosforo) e meridionali (Cipro). Nonostante l'appoggio in un primo tempo di Atene ed Eretria, i rivoltosi, dopo qualche vittoria, non riuscirono a resistere alla dura reazione dei Persiani che nel 494 a.C. rasero al suolo Mileto e ne trucidarono gli abitanti. Solo nel 490 a.C. l'espansionismo dell'impero Persiano venne frenato dall'esercito ateniese, capeggiato da Milziade, che riuscì a sconfiggerli a Maratona.

Dopo la morte di re Dario, Serse, il suo successore si trovò a domare alcune rivolte in Egitto e in Mesopotamia. Nel frattempo ad Atene si era provveduto alla costruzione di una grande flotta e nel 481, a Corinto, le maggiori città greche si erano riunite per decidere una difesa comune. Dopo alcuni scontri, i Persiani decisero di puntare Atene, ma trovarono la città deserta, poiché gli abitanti si erano rifugiati nell'isola di Salamina. Qui infatti i Greci attendevano la flotta persiana, che aveva notevoli difficoltà di manovra nei tratti di mare ristretti. Serse e i suoi uomini, sconfitti, si ritirarono.

Per timore di una nuova invasione si era formata, intanto, nel 477 a.C., una confederazione fra Atene e le città greche dell'arcipelago e della costa asiatica. I membri della lega, chiamata dagli storici la *lega di Delo*, dovevano versare un regolare tributo nel tesoro comune, depositato proprio a Delo.

Col passare degli anni, però, questa alleanza si trasformò in un insieme di città suddite ad Atene; il tesoro della lega fu poi portato ad Atene ed utilizzato per i lavori di ricostruzione dell'acropoli. Iniziava così l'età di Pericle (450-429 a.C.), che è passata alla storia come *l'età d'oro* della Grecia, per la nascita e lo sviluppo dei principali capolavori nel campo culturale ed artistico dell'antichità.

Nel campo politico, Pericle ridusse i poteri dell'*Areopago* e promosse un'espansione dell'area influenzata dagli ateniesi, fornendo agli Spartani il pretesto per l'inizio di nuove guerre, quelle del Peloponneso, che durarono dal 460 al 404

a.C.; le due maggiori città greche quindi videro l’alternarsi di periodi di pace a periodi di lotta.

Fu la città di Atene ad avere la peggio, da un lato a causa di un’epidemia che decimò la popolazione, dall’altro per le crisi interne della stessa democrazia. Il crollo definitivo di Atene si ebbe nel 405 a.C. e la successiva resa nel 404 a.C..

A questo punto, sotto la protezione degli Spartani, prese il potere un gruppo di trenta oligarchici, i *trenta tiranni*, che regnarono però soltanto un anno. Nel 403 a.C. fu nuovamente instaurata una certa democrazia, che però non conobbe più i periodi di splendore dell’età di Clistene e di Pericle.

### 3.3 Premesse per la nascita della scienza in Grecia

Cerchiamo prima di tutto di evidenziare quei fattori che hanno contribuito al progressivo affermarsi della cultura greca come valore in sé’ ed hanno trasformato la matematica da somma di conoscenze empiriche in disciplina assiomatico-deduttiva.

- L’introduzione del ferro’ cambia notevolmente le condizioni economiche. Vengono inventati i primi utensili agricoli con notevole aumento della produttività. Le tecniche di lavorazione del ferro e di altri metalli fanno nascere la figura dell’artigiano; insieme all’artigiano nascono le merci’: beni prodotti non per essere consumati o usati dal produttore ma per essere scambiati con altri beni. Questo rappresenta un primo grado di astrazione nel processo produttivo in quanto si separano due funzioni fino ad allora legate: produzione del bene–consumo ad uso del bene stesso.
- Insieme alle merci si sviluppa il ceto dei mercanti che assume progressivamente nuovo peso economico. Tale ceto fonda la sua ricchezza su un’attività esterna’ alla produzione e dà luogo quindi ad un secondo grado di astrazione.
- Lo sviluppo del commercio pone sempre nuovi problemi circa le modalità di scambio delle merci: si afferma l’uso del denaro metallico e dell’alfabeto in sostituzione della scrittura complessa dell’Antico Oriente come misuratori del valore, successivamente come rappresentante astratto della ricchezza. Il denaro, prima grande astrazione, rivela subito la sua potenza: grande generalità (si usa in tutti gli scambi), notevole semplificazione delle operazioni di scambio.

- Coerentemente con quanto detto prima, la guerra va trasformandosi in metodo per aprire nuovi mercati e per appropriarsi delle ricchezze altrui, comprese le braccia per lavorare': la schiavitù si istituzionalizza.
- Le vecchie organizzazioni gerarchiche non sono più compatibili con il nuovo dinamismo economico. Si sviluppano le polis, vere e proprie città-stato non legate da vincoli politici ma da vincoli economici liberamente scelti. Si conserva l'unità culturale e linguistica. Nelle polis prevale la forma di governo democratica.
- L'accresciuta ricchezza economica da una parte e la forma democratica dall'altra costituiscono le basi per la nascita di un ceto svincolato dagli obblighi della produzione ma allo stesso tempo partecipe del dinamismo complessivo della vita sociale. Infatti:
  1. la larga disponibilità di schiavi unita al fiorire del commercio creano ricchezze a sufficienza per consentire alle classi elevate di vivere senza preoccupazioni.
  2. il governo democratico stimola un continuo dibattito politico e filosofico.
  3. la religione, come tecnica di potere, viene soppiantata dalla filosofia. Si crea un nuovo rapporto cultura-saggezza-potere, ciò favorì da una parte il misticismo, dall'altra la crescita del razionalismo e di una visione scientifica del mondo.

Quali migliori condizioni per decretare la vittoria dell'intelletto sull'esperienza e della deduzione da principi generali sulla somma di casi particolari?

Da queste brevi considerazioni vediamo che il nuovo metodo va affermandosi in maniera del tutto naturale, con un accrescimento di tipo esponenziale, visto che una prima astrazione favorisce nuove e più grandi generalizzazioni.

Osserviamo che parallelamente all'affermarsi di questa nuova filosofia va nascendo una sorta di teorizzazione del rifiuto delle attività materiali che, d'altra parte, ne costituivano la base. Ma a ben rifletterci ci accorgiamo che questo disegno risponde risponde ad esigenze di stabilità sociale, ove si osservi che dare prestigio culturale oltre che economico al lato dei mercanti, avrebbe messo seriamente in discussione la superiorità dei filosofi.

Del resto anche restando all'interno di un discorso strettamente culturale vediamo come fosse del tutto logico per una cultura che tendeva alla perfezione

ed ai valori ideali ed eterni, disprezzare le attività materiali come prigione dell'intelletto.

### 3.3.1 Originalità del pensiero greco nei confronti del sapere orientale

Le forme di matematica pre-ellenica sono strettamente legate ad esigenze pratiche e alla comprensione della realtà. Se si considera il significato più elevato del termine *matematica*, come impianto teorico formalizzato e autonomo, i primi matematici sono i greci. In particolare bisogna riconoscere alla scuola pitagorica il merito di aver dato alla matematica e alla geometria uno status speciale e indipendente, in quanto furono il primo gruppo a trattare concetti matematici e geometrici come astrazioni, e benché Talete avesse già stabilito alcuni teoremi per via deduttiva, essi esplorarono questo procedimento in modo sistematico e rigoroso, distinguendo le teorie della matematica e della geometria dall'attività pratica.

E' fuori dubbio che i Greci assunsero dall'Oriente e più precisamente dalla Mesopotamia e dall'Egitto un vasto patrimonio di conoscenze tecniche, credenze e culti religiosi, manifestazioni artistiche, istituzioni politiche, ma essi operarono quella che alcuni storici, parlando della scienza greca, chiamarono una *svolta* nel pensiero umano. Essi riuscirono ad esprimere in una nuova forma astratta ed oggettiva le verità fondamentali che si erano imposte alla coscienza dei popoli orientali, e che prima avevano trovato possibilità di espressione solo sotto forma di miti. La filosofia, come attività speculativa, dotata di un proprio linguaggio astratto, e la scienza sono un prodotto tipicamente greco. La matematica e la geometria ebbero uno sviluppo notevolissimo, soprattutto presso i Babilonesi, ma mantengono sempre un carattere particolare e non poterono strutturarsi in una teoria razionale fondata su assiomi e dimostrata a partire da questi. Erano pressoché assenti esigenze logico-speculative.

Quelle dell'Egitto e della Mesopotamia erano società dediti all'agricoltura e più tardi al commercio, governate da re di origine divina e da una potente classe di sacerdoti che controllava e manteneva, come base dell'ordine sociale, complessi sistemi religiosi politeistici ed una elaborata mitologia.

La religione, invece di favorire lo sviluppo del pensiero, lo contrastò, sia in Egitto, dove l'interesse era concentrato sulla vita dopo la morte, sia in Mesopotamia dove era invece prevalente la ricerca del benessere in questo mondo: con un complesso di miti e leggende, la religione forniva l'interpretazione ufficiale della natura dell'universo che sarebbe stato empio discutere perché

appunto imposta dall'autorità costituita.

A questo punto si deve aggiungere il fatto che le discipline matematiche, che cominciavano a svilupparsi, erano uno strumento per burocrati o per tecnici specializzati e non patrimonio vivo della cultura di liberi cittadini.

Quindi il pensiero greco assomma all'aspetto speculativo, un carattere nettamente laico e, almeno nelle aspirazioni, libero ed universale. La conoscenza è concepita come una lenta conquista attraverso la ricerca attiva.

Ciò che caratterizza l'uomo greco del VI e V sec. a.C. è un'atteggiamento di fiducia nelle proprie capacità, una prontezza ad innovare senza fare appello all'autorità o alla rivelazione divina: vengono considerate con orgoglio sia le abilità umane che intellettuali. Una delle espressioni più belle di questo modo attivo di collocarsi nel mondo, la troviamo nel *Prometeo* di Eschilo (V sec. a.C.) dove Prometeo è presentato come colui che diede all'umanità, non solo il fuoco, ma anche tutte le arti capaci di assicurare all'uomo un potere sulla natura.

### 3.3.2 Il clima di libertà in Grecia

Gli studiosi hanno spesso posto l'accento sulla libertà che distingue il popolo greco dai popoli orientali tenuti all'obbedienza passiva al potere religioso e politico, solitamente pressoché indifferenziabili o almeno strettamente connessi.

Per quel che riguarda la religione non esisteva una religione ufficiale ed una casta sacerdotale depositaria del dogma.

Dal punto di vista politico, la Grecia postdorica subì notevoli mutamenti: il potere passò dall'aristocrazia in mano ai tiranni ed infine ai cittadini.

Col crearsi della *polis*, tra cittadino e stato non vi fu più antitesi in quanto ogni individuo si considerava cittadino di un determinato stato. La polis greca è strutturata in due parti, la città alta (l'*acropoli*) e la città bassa (l'*astu*), ma costituisce un unico organismo privo di zone chiuse ed indipendenti come invece le città orientali. La presenza dell'agorà, o piazza del mercato e del teatro, permetteva ai cittadini di conoscersi tra di loro e di esercitare la democrazia e realizzare quindi la libertà collettiva del corpo sociale.

In modo particolare furono determinanti nello sviluppo del pensiero greco due fattori politici:

- il nascere degli ordinamenti repubblicani,

- l'espansione verso Oriente e verso Occidente e la formazione delle colonie.

Infatti presso i Greci la cultura è nello stesso tempo frutto e condizione della libertà. Non a caso infatti la filosofia e la scienza si svilupparono nelle colonie dell'Asia minore e poi in quelle dell'Italia meridionale prima che nella madre patria. In primo luogo una certa libertà di movimento, dovuta alla lontananza, permise loro di darsi libere costituzioni prima della Grecia, in secondo luogo città come Mileto, per la loro posizione geografica, furono a contatto con tutto il mondo e le civiltà medio-orientali: la popolazione era quindi frutto di un incrocio di più razze.

Queste circostanze crearono l'ambiente più favorevole e stimolante per l'inventiva e l'originalità.

### 3.3.3 Scuola medica di Cos e metodo scientifico

Molto importanti per comprendere il livello culturale del V sec. a.C. e simbatici di un metodo di indagine strettamente scientifico, sono gli scritti del *Corpo ippocratico* prodotti nell'ambito della scuola medica di Cos il cui maggiore rappresentante è Ippocrate. E' interessante osservare che il medico greco superò i fisici per quel che riguarda il metodo scientifico: in un testo tratto dall'opera sopra citata, in polemica con le costruzioni puramente teoriche, si afferma che la medicina riesce a progredire in quanto già da tempo ha trovato il metodo di indagine. I medici della scuola di Cos evitarono il più possibile di fare ipotesi e, quando le fecero, le sottoposero alla verifica dell'esperienza. Ciò che avvicina i medici ionici alla concezione della scienza moderna molto più dei fisici, è la natura stessa del loro oggetto di indagine ed anche la continua necessità di lottare contro la superstizione popolare di fronte alle malattie.

### 3.3.4 Linee di sviluppo della scienza del VI e V sec. a.C.

Per quanto riguarda la scienza greca, emergono tre direzioni di sviluppo, ciascuna con una problematica ben precisa:

1. Problematica che confluirà nell'opera degli *Elementi* di Euclide caratterizzata da rigore formale, chiarezza dimostrativa. Pitagorici, Ippocrate di Chio, Eudosso (metodo di esaustione), Teodoro di Cirene, Teeteto.
2. Problematica connessa con lo sviluppo delle nozioni infinitesimali: non si sente il bisogno di dimostrazioni rigorose, maggiore spregiudicatezza. Zenone (paradossi), Antifonte, Brisson, Democrito (atomismo).

### 3. Problemi non risolubili con riga e compasso:

- Duplicazione del cubo (Ippocrate di Chio, Archita di Taranto)
- Trisezione dell'angolo (Ippia di Elide)
- Quadratura del cerchio (Ippocrate di Chio, Ippia di Elide)

Questa terza direzione di sviluppo necessita di qualche chiarimento, e ne parleremo con più chiarezza in un'altra relazione; comunque si tratta in realtà di una direzione strettamente legata alla prima. Infatti l'esigenza di rigore, anche formale e di chiarezza dimostrativa giunse, nei più grandi pensatori greci (in particolare nei matematici), a prevalere investendo il problema della stessa esistenza, o meno, di ciò che viene pensato.

Questo problema, di natura essenzialmente filosofica, fu stimato di più grande difficoltà e importanza nella geometria, cioè in quella parte della matematica che, ritenuta dai Greci (dopo Pitagora) trascendere e assorbire in sé l'aritmetica, condiziona la stessa realtà fisica. Il celebre detto *sempre il dio fa geometria* esprime assai bene l'aspirazione del genio greco al possesso di una verità trascendente, da riconoscersi in un complesso di relazioni spaziali, qualitativamente e quantitativamente perfette, fra entità univocamente riconoscibili.

Il problema venne perciò portato a una particolare formulazione che possiamo, con un linguaggio moderno e limitandoci alla geometria piana, presentare così: supponendo assegnati, in un piano, certi enti particolari e precisamente punti, segmenti e circonferenze in numero finito, quali altri enti dello stesso genere è effettivamente possibile costruire? Poiché, in geometria, solo ciò che l'uomo riesce a costruire può dirsi esistente.

Il verbo costruire venne però inteso nel senso più rigoroso e restrittivo: quello derivante dall'uso dei due strumenti più semplici, la riga ed il compasso, uso consistente nell'applicare tali strumenti un numero finito di volte.

#### 3.3.5 Il problema delle fonti

Le fonti della nostra conoscenza della matematica greca sono stranamente meno autentiche e meno attendibili di quelle di cui disponiamo per le molto più antiche matematiche babilonese ed egiziana, perché non ci è pervenuto nessun manoscritto originale dei matematici greci più importanti. Uno dei motivi è che il papiro è deperibile; è vero che anche gli Egiziani usavano il papiro, ma per un caso fortuito alcuni dei loro documenti matematici sono sopravvissuti. Alcune opere greche sarebbero potute giungere fino a noi se le

loro grandi biblioteche non fossero state distrutte.

Le nostre principali fonti per le opere matematiche greche sono codici manoscritti bizantini scritti da 500 a 1500 anni dopo la composizione delle opere originali. Questi codici non sono riproduzioni letterali, ma edizioni critiche, cosicché non possiamo sapere quali cambiamenti potrebbero essere stati introdotti dai curatori. Abbiamo anche traduzioni arabe delle opere greche e versioni latine derivate da quelle arabe. Qui di nuovo non è possibile sapere quali cambiamenti i traduttori possono avere apportato o quanto bene essi abbiano compreso i testi originali. Inoltre, anche i testi greci utilizzati dagli autori bizantini e arabi erano discutibili. Ad esempio, pur non possedendo il manoscritto dell'alessandrino Erone, sappiamo che egli introduceva un certo numero di cambiamenti negli *Elementi* di Euclide. Egli diede dimostrazioni diverse da quelle originali e aggiunse nuovi casi dei teoremi e teoremi inversi. Analogamente, Teone di Alessandria (fine del IV sec. a.C.) ci dice di aver modificato alcune sezioni nella sua edizione degli *Elementi*. Le versioni greche e arabe che possediamo possono provenire da tali riedizioni degli originali. Tuttavia, nell'una o nell'altra forma di queste possediamo le opere di Euclide, Apollonio, Archimede, Tolomeo, Diofanto e di altri autori greci. Molti testi greci scritti durante il periodo classico e durante quello alessandrino non sono giunti fino a noi perché già in epoca greca erano stati soppiantati dagli scritti di questi autori.

I Greci scrissero alcune storie della matematica e della scienza. Eudemo (IV sec. a.C.), membro della scuola di Aristotele, scrisse una storia dell'aritmetica, una storia della geometria e una dell'astronomia. Tranne che per alcuni frammenti citati da autori successivi, queste storie sono perdute. La storia della geometria trattava il periodo precedente a quello di Euclide e avrebbe un valore inestimabile se ci fosse pervenuta. Teofrasto (372-287 c. a.C.), un altro discepolo di Aristotele, scrisse una storia della fisica e anche questa, tranne che per alcuni frammenti, è perduta.

In aggiunta a quanto si è detto sopra, abbiamo due importanti commentari. Pappo (fine del III sec. d.C.) scrisse le *Synagoge* o *Collezione matematica*, che ci è giunta quasi per intero in una copia del XII secolo. Essa è un resoconto di grande parte dell'opera dei matematici greci classici e alessandrini, da Euclide a Tolomeo, corredata da un certo numero di lemmi e teoremi aggiunti da Pappo per aiutarne la comprensione. Pappo aveva anche scritto il *Tesoro dell'analisi*, che era una collezione di opere greche originali. Questo libro è perduto, ma nel libro VII della sua *Collezione matematica* egli ci dice quale

era il contenuto del *Tesoro*.

Il secondo commentatore importante è Proclo (410-485 d.C.), scrittore prolifico. Proclo traeva il suo materiale dai testi dei matematici greci e da commentatori precedenti. Fra le sue opere sopravvissute il *Commentario*, che tratta del libro I degli *Elementi* di Euclide, è quella di valore maggiore. Proclo aveva apparentemente in animo quella di discutere una porzione maggiore degli *Elementi*, ma non vi è nessuna prova che egli lo abbia fatto. Il *Commentario* contiene una delle tre citazioni attribuite tradizionalmente alla *Storia della geometria* di Eudemo, ma tratte probabilmente da una modifica successiva. Proclo ci fornisce anche qualche notizia sull'opera di Pappo. Così, oltre alle successive edizioni di versioni di alcuni dei testi classici greci, la *Collezione matematica* di Pappo e il *Commentario* di Proclo sono le due fonti principali per la storia della matematica greca.

Delle trattazioni originali abbiamo soltanto un frammento di Ippocrate concernente le lunule, citato da Simplicio (prima metà del VI sec. d.C.) e tratto dalla perduta *Storia della geometria* di Eudemo, e un frammento di Archita sulla duplicazione del cubo. E dei manoscritti originali abbiamo alcuni papiri scritti di valore immenso. Ad esempio, i filosofi greci, in particolare Platone e Aristotele, avevano molto da dire sulla matematica e i loro scritti sono sopravvissuti pressapoco nello stesso modo delle opere matematiche.

La ricostruzione della storia della matematica greca, basata sulle fonti che abbiamo descritto, è stata un'impresa enorme e complicata. A dispetto dei grandi sforzi degli studiosi, vi sono ancora delle lacune nella nostra conoscenza e alcune conclusioni sono discutibili. Ciò nonostante i fatti fondamentali sono chiari.

### 3.3.6 Le principali scuole del periodo classico

Il fior fiore dei contributi del periodo classico sono gli *Elementi* di Euclide e le *Sezioni coniche* di Apollonio. Per apprezzare queste opere è necessaria una certa conoscenza dei grandi cambiamenti che esse hanno apportato nella natura stessa della matematica e dei problemi che i Greci affrontarono e risolsero. Inoltre, queste opere perfettamente rifinite danno scarse informazioni sui trecento anni di attività creativa che le precedono o sui problemi che divennero importanti nella storia successiva.

La matematica greca classica si sviluppò in numerosi centri che si susseguirono l'un l'altro costruendo ciascuno sull'opera dei predecessori. In ogni centro un gruppo informale di studiosi portava avanti le sue attività sotto la guida di uno

o più grandi maestri. Questo fenomeno è comune anche nei tempi moderni e la sua ragion d'essere è comprensibile. Anche oggi quando un'uomo di genio si stabilisce in un certo luogo (di solito, l'università) altri studiosi lo seguono, per apprendere dal maestro.

La prima di queste scuole, quella ionica, fu fondata da Talete a Mileto. Non sappiamo in quale misura Talete abbia educato altri studiosi, ma sappiamo che i filosofi Anassimandro (610-547 ca. a.C.) e Anassimene (550-480 ca. a.C.) furono suoi allievi. Anche Anassagora (500-428 ca. a.C.) apparteneva a questa scuola e si suppone che Pitagora (585-500 ca. a.C.) abbia imparato la matematica da Talete. Pitagora fondò poi la sua grande scuola nell'Italia meridionale. Verso la fine del VI secolo, Xenofane di Colofonte in Ionia emigrò in Sicilia e fondò una scuola a cui appartenevano i filosofi Parmenide (V sec. a.C.) e Zenone (V sec. a.C.). Questi ultimi risiedevano a Elea, nell'Italia meridionale, dove si era trasferita la scuola e così il gruppo divenne noto come scuola eleatica. I Sofisti, attivi dalla seconda metà del V secolo in poi, erano concentrati soprattutto ad Atene. Ma la scuola più celebre di tutte è l'Accademia di Platone ad Atene, di cui fu allievo Aristotele. L' Accademia ha avuto un'importanza fondamentale per il pensiero greco. I suoi allievi furono i più grandi filosofi, matematici e astronomi della loro epoca; la scuola conservò la sua preminenza nella filosofia anche dopo che il ruolo guida nella matematica passò ad Alessandria. Eudosso, che imparò la matematica principalmente da Archita di Taranto, fondò la prima scuola a Cizico, una città dell'Asia Minore settentrionale. Aristotele, dopo aver lasciato l'Accademia platonica, fondò un'altra scuola ad Atene, il Liceo, che viene comunemente detto scuola peripatetica. Non tutti i grandi matematici del periodo classico possono essere identificati con una scuola, ma per maggior coerenza si discute l'opera di un matematico nel contesto di una particolare scuola anche se i suoi legami con essa non erano molto stretti.

### 3.4 Sistemi greci di enumerazione

All'interno di ogni comunità nazionale, il linguaggio e i simboli di scrittura cambiano con il tempo; analogamente i sistemi di numerazione si sviluppano e mostrano gli effetti dell'interazione con diverse culture. In generale sembra che in Grecia vi fossero due sistemi di numerazione. Entrambi i sistemi erano in base 10, cioè contavano e scrivevano i numeri raggruppati per decine. La cosa non è casuale: per contare i nostri antenati si sono serviti di parti del loro

corpo, per esempio delle mani. Tutti abbiamo sperimentato che il modo più naturale per contare è quello di chiudere le mani a pugno e quindi sollevare un dito per volta in corrispondenza di ogni oggetto dell'insieme che vogliamo contare. Anticamente essi svilupparono il sistema *erodianico* e successivamente usarono il sistema *ionico* per scrivere i numeri.

Il sistema *erodianico* era basato su un semplice schema iterativo come quello che si riscontra nella più antica numerazione geroglifica egiziana e usava i seguenti simboli per i numeri:  $I=1$  (Iota),  $\Gamma=5$  (Gamma),  $\Delta=10$  (Delta),  $H=100$  (Heta),  $X=1000$  (Chi) e  $M=10000$  (Mi). Gli ultimi cinque simboli sono le iniziali del nome greco dei numeri. Parecchi nomi di numeri nelle lingue moderne riflettono questo sistema. Il simbolo  $\Gamma$  è una forma arcaica per la lettera pi greca maiuscola; essa corrisponde alla nostra p, e le parole pentagono, pentametro, pentathlon derivano tutte dalla parola greca *pente*, cinque. Similmente  $\Delta$ , delta, stava per *deca* (10), da cui derivano decagono e decametro. Parole quali decilitro, decimale e decimetro sono entrate nella lingua parlata dal latino *decem*, ma mostrano anche loro origine greca. Eta, H, stava per *hecaton* (100) da cui ettaro; chi, X, stava per *chilioi* (1000) da cui chilometro e chilogrammo; infine M, mi, stava per *myrioi*, da cui miriade. Le cifre corrispondenti agli altri numeri erano costituite con i simboli sopraelencati in modo additivo, ossia ripetendoli, come in

$$\Delta\Delta\Delta\Delta = 40,$$

in modo moltiplicativo, o con combinazioni più complesse, come ad esempio nelle Figure 3.1, 3.2.



Figura 3.1: Rappresentazione di  $5 \cdot 10 = 50$  e  $5 \cdot 1000 = 5000$



Figura 3.2: Rappresentazione di 2626

Nel sistema ionico, le lettere dell'alfabeto venivano usate come cifre. L'associazione di lettere e cifre era fatta come nella figura 3.3.

$\alpha$ (alfa): 1	$\iota$ (iota): 10	$\rho$ (rho): 100
$\beta$ (beta): 2	$\kappa$ (kappa): 20	$\sigma$ (sigma): 200
$\gamma$ (gamma): 3	$\lambda$ (lambda): 30	$\tau$ (tau): 300
$\delta$ (delta): 4	$\mu$ (mu): 40	$\upsilon$ (upsilon): 400
$\epsilon$ (epsilon): 5	$\nu$ (nu): 50	$\phi$ (phi): 500
$\zeta$ (stigma): 6	$\xi$ (xi): 60	$\chi$ (chi): 600
$\zeta$ (zeta): 7	$\circ$ (omicron): 70	$\psi$ (psi): 700
$\eta$ (eta): 8	$\pi$ (pi): 80	$\omega$ (omega): 800
$\theta$ (theta): 9	$\Omega$ (oppa): 90	$\beth$ (sampi): 900

Figura 3.3: Sistema ionico

Poiché l’alfabeto greco classico conteneva solo 24 lettere, vennero aggiunti tre antichi simboli, in modo da ottenere i 27 simboli necessari (stigma=6, koppa=90, sampi=900).

La scrittura di un numero si otteneva per giustapposizione di questi simboli, con un principio di posizione analogo a quello della numerazione decimale. I numeri venivano formati mediante addizione mantenendo la successione di grandezza e allineando i numeri da sinistra a destra, come nella nostra scrittura, in ordine decrescente.

Con un tale sistema sorsero due problemi: come distinguere i numeri dalle parole e come scrivere i simboli per numeri maggiori di 999. Il primo problema fu risolto tirando delle linee sui numeri, oppure aggiungendo un accento alla fine. Il secondo problema fu risolto in diversi modi, con convenzioni moltiplicative. Una virgola davanti al numero lo moltiplicava per 1000; così: , $\alpha$ =1000, , $\beta$ =2000 e così via. Per numeri ancora più grandi veniva usata la *M* del più antico sistema erodianico, e sopra vi si scriveva il fattore di moltiplicazione.

Sotto l'influenza degli Egiziani, i Greci originariamente scrivevano le frazioni come somma di frazioni unitarie. La notazione era molto semplice: scrivevano il denominatore e lo facevano seguire da un accento per distinguerlo dal numero intero corrispondente. Questa notazione andava bene finché il numeratore era unitario, perché quando non lo era si prestava a facili ambiguità. Per esempio  $\frac{1}{34} = \lambda\delta'$ . Questa espressione poteva venire confusa con quella del numero  $\frac{30}{4}$ . Sarebbe stato il contesto di volta in volta a stabilire la forma più opportuna.

In un secondo tempo essi cominciarono a scrivere una frazione come una coppia di numeri; ciò era fatto in molti modi: qualche volta scrivevano il numeratore contrassegnato da un accento seguito dal denominatore, scritto due volte, e tutte e due le volte contrassegnato da un doppio accento. Per esempio

$$\frac{2}{3} = \beta'\gamma''\gamma''.$$

In un'altra rappresentazione i Greci scrivevano il denominatore sopra il numeratore, ma senza linea di frazione. Così:

$$\frac{2}{3} = \overset{\gamma}{\beta}$$

Il calcolo con le frazioni non era completo e sistematico. I Greci però svilupparono ai massimi livelli quell'aspetto racchiuso nelle frazioni che è il rapporto, sistematizzando una teoria delle proporzioni.

Il motivo per i quali i Greci erano piuttosto arretrati nella scrittura dei numeri e nella pratica del conteggio perché nella loro cultura le arti pratiche, cioè le attività di cui si occupavano gli artigiani e i commercianti, erano considerate attività minori rispetto a quelle prive di fini utilitaristici come la filosofia e la poesia, alla quale si dedicava la classe dirigente.

### 3.5 Talete di Mileto

*« Talete di Mileto fu senza dubbio il più importante tra quei sette uomini famosi per la loro sapienza - e infatti tra i Greci fu il primo scopritore della geometria, l'osservatore sicurissimo della natura, lo studioso dottissimo delle stelle»*  
*Apuleio, Florida, 18*

Miletò rappresentava un grande centro economico e culturale nella quale gli uomini si posero la domanda su quale fosse il principio unitario del tutto. L'essere terre di confine con continui contatti e con credenze e costumi diversi e la diversità, tra le stesse genti di confine, molto probabilmente, contribuirono a fare di queste zone meravigliose e leggendarie luoghi nei quali per gli uomini diventa sempre più pressante la risoluzione di un enigma la cui soluzione è nella risposta ad una domanda: qual è il principio unificatore del tutto?

### 3.5.1 La vita

Un ruolo particolarmente importante nella trasformazione della cultura matematica è sicuramente quello svolto da Talete. Probabilmente, perché tutto ciò che riguarda scoperte e realizzazioni scientifiche attribuitagli non ci viene tramandato da documenti storici, bensì da una tradizione non troppo sicura; neppure sulla sua data di nascita, presumibilmente da collocarsi intorno al 625 a.C., ci sono certezze. Di madre fenicia, Talete nacque nella città ionica di Miletò. Esperto commerciante, intelligente e saggio uomo politico, ebbe certamente la possibilità di frequenti contatti con gli egizi, delle cui conoscenze fece presto tesoro. In un viaggio in Mesopotamia apprese dagli astronomi di Babilonia dei loro studi sulle eclissi. Attento osservatore, intuì che le nozioni acquisite dagli astronomi babilonesi avevano una notevole validità scientifica. Erodoto attribuisce a Talete la previsione dell'eclissi di sole verificatasi il 28 maggio 585 a.C. che avrebbe impressionato talmente i Medi ed i Lidi, in guerra tra loro, da smettere di combattere. In ogni caso le conoscenze astronomiche apprese a Babilonia contribuirono moltissimo a infondere nei greci l'interesse per un'attenta osservazione dei fenomeni naturali.

Aristotele in *Politica* riferisce, che Talete sia stato il primo al mondo ad inventare il monopolio, è infatti, diventò ricco affittando e poi subaffittando ad alto prezzo, i frantoi durante un anno in cui la raccolta delle olive prometteva di essere abbondante. Talete disse che gli astri gli avevano permesso di predire un gran raccolto, per dimostrare che non è vero che la scienza non apporta alcun utile all'uomo, ma i contadini sanno bene che gli ulivi alternano ad anno di abbondante produttività anno di scarsa produttività. Altre leggende dipingono Talete come un mercante di sale, come un contemplatore delle stelle, come un sostenitore del celibato o come saggio statista impegnato politicamente.

Molto famosi sono i seguenti aneddoti:

*À « ...siccome, povero com'era, gli rinfacciavano l'inutilità della filosofia,*

*avendo previsto in base a calcoli astronomici un'abbondante raccolta di olive, ancora in pieno inverno, pur disponendo di poco denaro, si accaparrò tutti i frantoi di Mileto e di Chio per una cifra irrisoria, dal momento che non ve n'era alcuna richiesta; quando giunse il tempo della raccolta, cercando in tanti urgentemente tutti i frantoi disponibili, egli li affittò al prezzo che volle imporre, raccogliendo così molte ricchezze e dimostrando che per i filosofi è molto facile arricchirsi, ma tuttavia non si preoccupano di questo.* »

« [Talete] mentre studiava gli astri e guardava in alto, cadde in un pozzo. Una graziosa e intelligente servetta trace lo prese in giro, dicendogli che si preoccupava tanto di conoscere le cose che stanno in cielo, ma non vedeva quelle gli stavano davanti, tra i piedi. La stessa ironia è riservata a chi passa il tempo a filosofare [...] provoca il riso non solo delle schiave di Tracia, ma anche del resto della gente, cadendo, per inesperienza, nei pozzi e in ogni difficoltà » (Platone, Teeteto, 174 a-174 c)

Il Talete politico viene messo in risalto da Erodoto, secondo il quale per ostacolare la conquista della Ionia da parte di Ciro, Talete avrebbe consigliato gli Ioni di riunirsi in un'unica federazione con capitale Teo, città al centro della Ionia, il progetto di Talete non ebbe successo e Ciro raggiunse l'Egeo. Talete viene inoltre ricordato perché impedì che i Milesi stringessero l'alleanza richiesta da Creso: fu questo che salvò la città quando Ciro ottenne con la vittoria il predominio.

Fu contemporaneo e concittadino di Anassimandro, a sua volta, forse, maestro di Anassimene, gli altri due primi filosofi nella storia della cultura occidentale. Si dice che sia morto assistendo a una gara atletica, al tempo della 58° Olimpiade: a questo proposito Diogene Laerzio lo ricorda con l'epigramma:

« Assistendo un tempo a una gara ginnica, Zeus Elio,  
il sapiente Talete strappasti dallo stadio.  
A bene che tu l'abbia accolto: ormai vecchio,  
dalla terra non vedeva più le stelle ».

e sostiene che la sua tomba recasse il seguente epitaffio:

« Piccola tomba ma di gloria grande come il cielo  
questa di Talete il sapientissimo ».

Purtroppo Talete non ha scritto nulla e le tante notizie che abbiamo sono fornite da Aristotele, Platone ed altri che parlano di un Talete dalle conoscenze profonde padrone del tempo e dello spazio. Ma tutti gli scritti doxografi, non forniscono alcuna certezza sul reale pensiero di Talete e quel che più può crucciarsi e che non vi è alcuna certezza sulla razionalità matematica di questo grande e mitologico uomo.

### 3.5.2 La matematica di Talete

Per quanto riguarda il suo pensiero filosofico, ricordiamo semplicemente che egli, per primo, colse al di là della diversità e della molteplicità delle cose l'esistenza di un elemento unitario che identificò nell'acqua.

La tradizione, Proclo in particolare, attribuisce a Talete i quattro teoremi:

1. Il cerchio è dimezzato dal suo diametro.
2. Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono uguali tra loro.
3. Gli angoli opposti al vertice sono tra loro uguali.
4. Gli angoli iscritti in un semicerchio sono retti.

Inoltre gli viene attribuita la soluzione di due problemi geometrici:

5. Determinare la distanza di una nave dal porto.
6. Determinare l'altezza di una piramide mediante l'ombra da essa proiettata.

Già da questi enunciati si può vedere il salto qualitativo compiuto da Talete nei confronti dei suoi maestri egiziani o caldei.

Analizziamo il teorema 1. Mostrare per sovrapposizione la congruenza dei due semicerchi ottenuti spezzando realmente lungo il diametro una tavoletta circolare esprime la volontà di verificare ricorrendo ad un espediente pratico ciò che intuitivamente sembra vero. Non solo senza questo desiderio preliminare la dimostrazione scientifica non sarebbe mai nata, ma significa che inizialmente il dato empirico aveva un ruolo centrale perché ad esso si demandava la

valutazione definitiva sul dato intuitivo.

Con il teorema 4 risulta superato il procedimento degli egizi per la costruzione dell'angolo retto (creando con una fune un triangolo di lati 3, 4, 5): per ottenere un angolo di  $90^\circ$  basta disegnare una circonferenza e fissare gli estremi A e B di un suo diametro e un punto qualsiasi appartenente alla circonferenza; in quest'ultimo si determina l'angolo retto facendo passare una fune tesa per i tre punti fissati.

Egli non dimostrò i risultati in senso euclideo, cioè con deduzioni logiche strettamente concatenate tra loro, ma probabilmente intuì che per ragioni di simmetria o semplicemente per ragioni estetiche, dovevano sussistere certe relazioni. Talete però non fece semplici constatazioni, ma delle vere e proprie affermazioni universali ponendo così le basi della geometria razionale. Nella formulazione delle prime quattro proprietà, c'è un'evidente correlazione tra ipotesi e tesi; dunque, date certe premesse, si devono avere sempre le stesse conseguenze. Non si considera più un oggetto particolare, ma la classe cui esso appartiene e se ne estraggono razionalmente le proprietà.

Da un pensiero operativo-concreto (Egiziani, Babilonesi) si passa ad un pensiero formalizzato.

I teoremi 1-3 esprimono evidenti proprietà di simmetria piana (rispetto ad un asse), come mostra la Figura 3.4

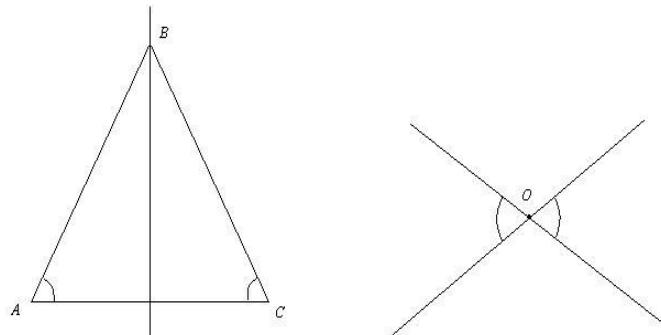


Figura 3.4: Simmetrie

Per quel che riguarda il teorema 4, se noi attribuiamo a Talete la scoperta che gli angoli inscritti in una semicirconferenza sono retti, dobbiamo ammettere che egli conoscesse il valore della somma degli angoli interni di un triangolo (=due retti). Infatti, sia AB il diametro di un cerchio di centro O e C un punto qualunque della circonferenza. L'angolo ACB è retto (per il teorema 4). Congiungendo C con O otteniamo i due triangoli isosceli AOC e COB. Allora (teor. 2) gli angoli A=ACO e B=OCB, da cui, essendo  $ACO+OCB=1$  retto, anche  $A+B=1$  retto.

La somma degli angoli interni di un triangolo è dunque pari a 2 retti. Questo risultato si generalizza immediatamente: infatti un qualunque triangolo può sempredecomporsi in due triangoli tracciando da un vertice la perpendicolare al lato opposto.

Questo però non si accorda con quanto afferma Eudemo, che furono i Pitagorici a scoprire e a dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è pari a due retti.

Talete però potrebbe aver ottenuto il teorema 4 anche senza conoscere la somma degli angoli interni di un triangolo, semplicemente considerando le simmetrie del cerchio rispetto al proprio centro O.

A proposito dei problemi 5 e 6, si possono solo avanzare delle congetture circa il metodo di risoluzione seguito da Talete.

Per il problema 5 (Determinare la distanza di una nave dal porto) si ricostruì una possibilità simile a quella rappresentata in figura 3.5. Supponiamo che la nave sia in un punto S e che l'osservatore sia nel punto W; la distanza richiesta è SW. L'osservatore percorre, lungo la costa, un tratto di lunghezza opportuna, WM, perpendicolare a SW, e pianta un bastone nella sabbia in M, poi continua a camminare nella stessa direzione fino a P, in modo tale che WM sia uguale a MP. Così si trova in P. Infine cammina verso l'entroterra perpendicolarmente a WP, finché non vede la nave in S e il bastone in M allineati; sia Q il punto in cui egli viene a trovarsi, allora PQ è la distanza cercata, che può essere misurata.

Per quel che riguarda il problema 6 (Determinare l'altezza di una piramide) si suggerisce un metodo molto semplice di soluzione. Nel momento in cui un'asta verticale e la sua ombra hanno la medesima lunghezza, la stessa relazione deve valere anche per le piramidi, la cui altezza si può dunque calcolare assai semplicemente (ved. Figura 3.6). In realtà sono necessarie alcune

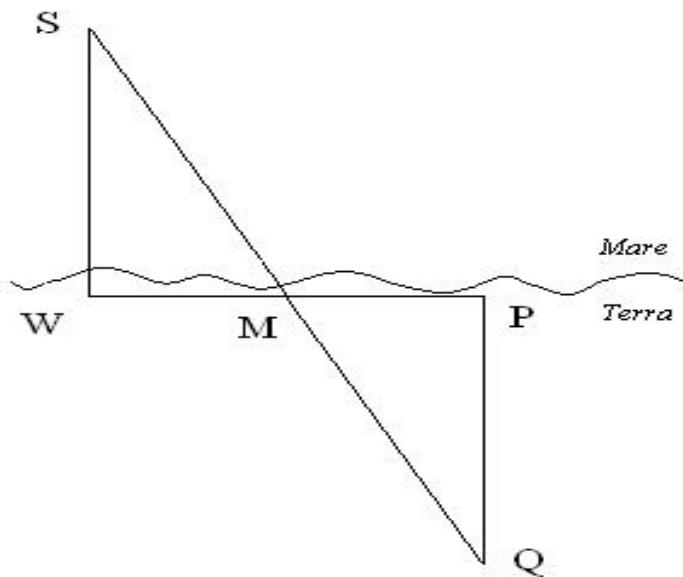


Figura 3.5: Calcolo della distanza di una nave dal porto

conoscenze fisiche: bisogna infatti considerare il momento in cui il raggio di sole batte perpendicolarmente sulla faccia della piramide, ma è possibile che con l'esperienza siano giunti a questo risultato.

Vuole la leggenda, come racconta Plutarco , che Talete viaggiando per l'Egitto in cerca di sacerdoti della valle del Nilo da cui apprendere le conoscenze astronomiche, risalendo il fiume avrebbe sostato nei pressi della Piana di Giza, attratto dalla mole sorprendente della Piramide di Cheope, ove il faraone Amasis, giunto a conoscenza della fama del sapiente, lo sfidò a dargli la misura corretta dell'altezza. Per qualunque persona, anche dotata dei più sofisticati strumenti dell'epoca, si sarebbe trattato di un'impresa che, se non ardua, avrebbe certamente richiesto una notevole quantità di tempo sia per compiere le misure che i calcoli, ma sempre le fonti ci narrano che Talete sapesse già che a una determinata ora del giorno la nostra ombra eguaglia esattamente la nostra altezza; e quindi non avrebbe fatto altro che attendere l'ora propizia e dimostrare le sue doti, sbalordendo lo stesso faraone che si disse:

*«...stupefatto del modo in cui [abbia] misurato la piramide senza il minimo imbarazzo e senza strumenti. Piantata un'asta al limite dell'ombra proiettata dalla piramide, poiché i raggi del sole, investendo l'asta e la piramide formavano due triangoli, [ha] dimostrato che l'altezza dell'asta e quella della piramide stanno nella stessa proporzione in cui stanno le loro ombre. »*

*Plutarco, convivio dei sette sapienti.*

Non sappiamo se Talete abbia realmente dimostrato il teorema che porta il suo nome o se (molto più probabilmente) abbia semplicemente usato la proprietà espressa nel suo enunciato, dopo averla appresa da altri, magari dai Caldei, come sostengono alcuni studiosi; se però si vuole considerare l'aneddoto non infondato, bisogna per forza presumere che avesse buona conoscenza delle proprietà citate e delle implicazioni inerenti ai triangoli simili.

Per renderci conto del procedimento di Talete è necessario considerare il triangolo avente per lati il bastone e la sua ombra: esso è rettangolo e avendo due lati uguali ha uguali anche due angoli. Il triangolo in esame è metà di un quadrato, per cui ciascuno dei due angoli uguali, pari a metà di un angolo retto, ha ampiezza  $45^\circ$ . In altri termini, tale triangolo è isoscele quando i raggi solari hanno un'inclinazione di  $45^\circ$ . Allora, dato che i raggi sono paralleli fra loro, anche il triangolo ideale individuato dall'altezza della piramide e dalla sua ombra è isoscele. Pare comunque che Talete abbia saputo generalizzare il problema, determinando l'altezza della piramide indipendentemente dall'inclinazione dei raggi solari. Considerando infatti triangoli rettangoli con le ipotenuse aventi uguale inclinazione rispetto alle basi, il numero che esprime quante volte l'altezza è contenuta nella base è lo stesso per tutti i triangoli. Se, per esempio, il lato AB è la metà di BC nel triangolo ABC, anche il lato VO è la metà di OM nel triangolo VOM. In termini moderni diciamo che i due triangoli sono simili e che i lati sono proporzionali. Tornando alla piramide risulta allora chiaro il procedimento generale seguito da Talete: se, per esempio, l'altezza AB del bastoncino è metà della sua ombra BC, per avere l'altezza VO della piramide basterà misurare OM (che è metà del lato della piramide più l'ombra da questa proiettata) e prenderne la metà. L'importanza delle osservazioni di Talete non sta tanto nel procedimento seguito per risolvere un problema, quanto nel modo assolutamente nuovo di considerare la figura geometrica.

Si è all'inizio di una evoluzione fondamentale per la geometria: il passaggio dalla materializzazione delle figure, tipica dei geometri egizi, alla loro idealizzata.

zazione. Cioè il segmento, il quadrato, il triangolo non sono più visti come oggetti materiali che rappresentano la distanza tra due paletti o la lunghezza di un argine o la superficie di un campo coltivabile, ma sono considerati enti astratti delle cui proprietà si occupa la geometria razionale. Il fatto, per esempio, che il triangolo individuato dal bastone nella sabbia e dalla relativa ombra abbia due lati uguali quando l'inclinazione del terzo lato è  $45^\circ$ , non è una proprietà di quel particolare triangolo ma, al contrario, vale per qualunque altro abbia un angolo retto e uno di  $45^\circ$ . Poiché è impossibile verificare materialmente questa proprietà, essendo infiniti i triangoli che si trovano in quella situazione, è indispensabile trovare un certo tipo di ragionamento, la dimostrazione, che consenta di generalizzare la proprietà stessa partendo da uno qualunque di questi triangoli.

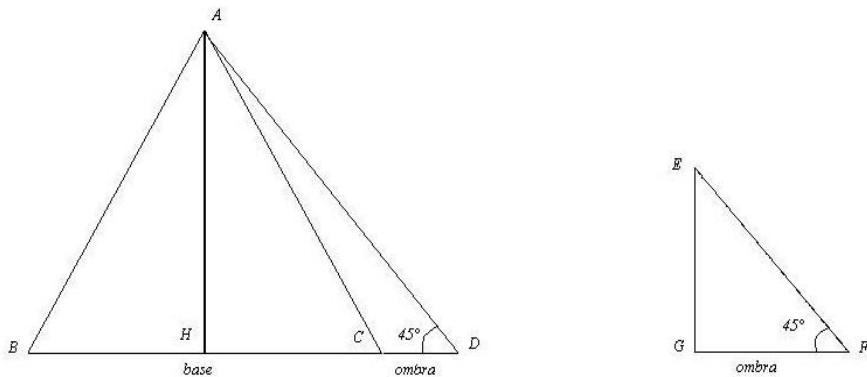


Figura 3.6: Calcolo dell'altezza di una piramide

Anche Plutarco ricorda tale misurazione dell'altezza delle piramidi attribuendo a Talete un calcolo più sofisticato, applicazione diretta della similitudine, sempre tra piramide e bastone (ved. Figura 3.7).

Comunque sia, Talete doveva possedere il concetto di similitudine, non una semplice intuizione di essa; doveva cioè avere chiara coscienza non solo della conservazione della forma delle figure simili, ma anche dell'uguaglianza degli angoli e della proporzionalità dei lati.

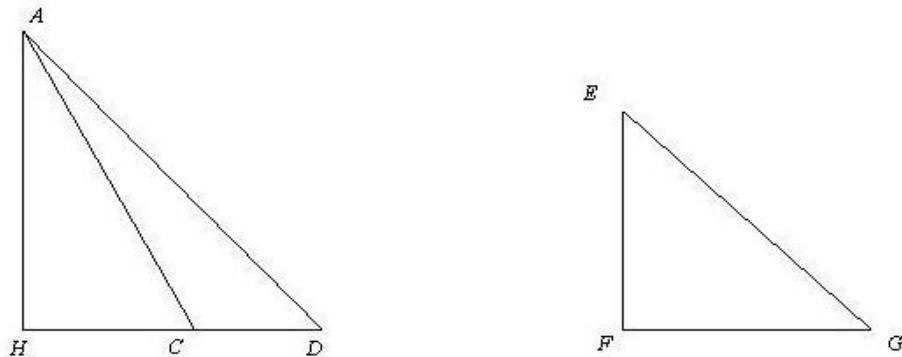


Figura 3.7: Calcolo dell'altezza di una piramide secondo Plutarco:  $\frac{AH}{HC+CD} = \frac{EF}{FG}$

### Il teorema di Talete

In geometria, il teorema di Talete è un teorema riguardante i legami tra i segmenti omologhi creati sulle trasversali da un fascio di rette parallele. L'enunciazione e la dimostrazione sono per tradizione, come vuole il nome, attribuite a Talete di Mileto, anche se gli storici della matematica sono concordi nell'attribuirgliene la conoscenza ma non la reale paternità, in quanto parrebbe che le proprietà di proporzionalità, espresse nel teorema, fossero già note fin dai tempi degli antichi babilonesi; tuttavia la prima dimostrazione di cui si abbia documentazione è quella contenuta negli Elementi di Euclide risalente al III secolo a.C.

Una piccola curiosità: proprio l'attribuzione a Talete di ulteriori teoremi sta alla base della differenza con cui nel mondo anglosassone ci si riferisce col nome di Thales' Theorem al teorema dell'angolo retto inscritto nella semicirconferenza, anch'esso solitamente ascritto dalla leggenda al Primo filosofo.

**Teorema 3.5.1** (Teorema di Talete). *Un fascio di rette parallele intersecenti due trasversali determina su di esse classi di segmenti direttamente proporzionali.*

*Dimostrazione.* Euclide dimostra il teorema di Talete indirettamente, attraverso un mirabile uso delle proporzionalità fra le aree dei triangoli, pertanto potrebbe essere di non così immediata comprensione il legame fra la seguente dimostrazione e il risultato finale, la verifica del teorema in questione.

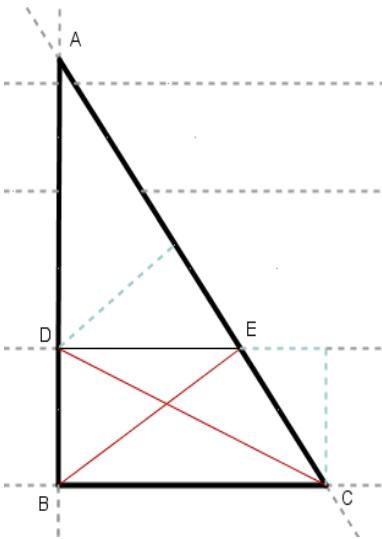


Figura 3.8: prova di Euclide

$\hat{A} \ll$  Se una linea retta è disegnata parallela ad uno dei lati di un triangolo, allora taglia proporzionalmente i lati del triangolo...  $\hat{A} \gg$  Elementi, VI 2 .

Sia dato un triangolo ABC, tagliato da un segmento DE parallelo a uno dei suoi lati (in questo caso BC). Si avrà quindi, secondo la tesi del teorema, che  $BD : AD = CE : AE$ .

Si congiungano gli estremi di DE con gli opposti del lato parallelo, evidenziando così i due triangoli BDE e CDE. Tali triangoli sono equieschesi, hanno cioè la medesima area, in quanto possiedono la stessa base e sono tra le medesime parallele DE e BC. Il segmento DE ha anche creato il triangolo ADE e, siccome a grandezze uguali corrispondono rapporti uguali con la stessa grandezza, il triangolo BDE sta a ADE, esattamente come CDE sta a ADE. Ma il triangolo BDE sta a ADE come BD sta a DA, perché avendo la stessa altezza (nel caso in esempio DE) devono stare l'uno all'altro come le rispettive basi, così come, per la stessa ragione, il triangolo CDE sta a ADE, come CE sta a EA. Per tanto BD sta a DA, come CE sta a EA. Cvd.  $\square$

Come tutta la matematica di Talete, anche questo teorema aveva fortemente un lato applicativo: infatti principalmente veniva utilizzato per dividere

un segmento dato un rapporto fissato, oppure per costruire un segmento di lunghezza equivalente al prodotto di due segmenti di lunghezza data.

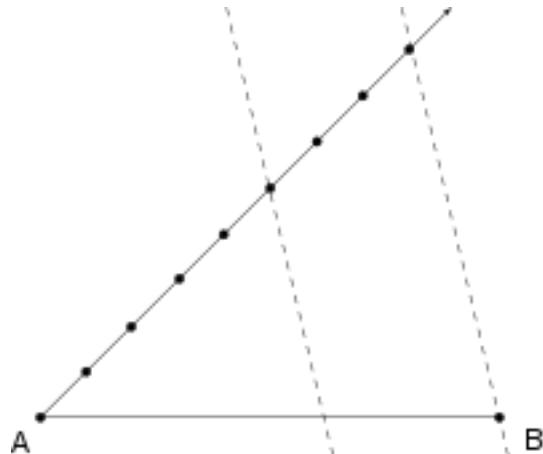


Figura 3.9: divisione di un segmento fissato un rapporto

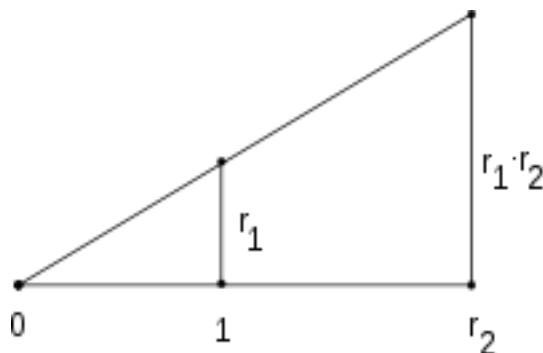


Figura 3.10: prodotto di due grandezze

Infatti come mostra la prima figura (3.9) se dovessimo dividere un segmento in due parti con il rapporto di  $\frac{5}{3}$  allora ci basterebbe prendere un segmento lungo otto unità (e dunque diviso in otto parti uguali), in seguito collegare un estremo di entrambi i segmenti con un angolo a piacere ed infine tracciare le rette, passanti per ciascun punto che divide il segmento nelle otto parti uguali,e

allo stesso tempo parallele alla retta che congiunge gli altri due estremi dei segmenti. In questo modo per il teorema di Talete otteniamo che anche l'altro segmento risulta diviso in otto parti uguali, e dunque è sufficiente prendere rispettivamente cinque parti e tre parti per adempire alla richiesta.

La figura 3.10 invece mostra semplicemente come costruire il prodotto di due grandezze date: è una semplice applicazione del teorema di Talete.

### 3.5.3 L'importanza di Talete

L'importanza di Talete per la matematica consiste principalmente nel fatto che egli cercò una fondazione logica dei teoremi di geometria: non produsse un sistema completo di teoremi e dimostrazioni come noi li concepiamo oggi, ma fu il primo a muovere passi in questa direzione.

Ci sono differenze importanti tra la geometria di Talete e quella degli Egiziani e Babilonesi. Fu il primo a formulare proprietà di figure come enunciati generali: era interessato alle figure geometriche come tali. Egli sentì il bisogno di fondare su basi logiche proprietà anche apparentemente ovvie; inoltre le proprietà che egli trovò interessanti hanno un carattere differente da quelle di cui si interessano Egiziani e Babilonesi: i problemi di questi ultimi implicavano sempre un calcolo di qualcosa (anche se i Babilonesi non sempre calcolavano qualcosa di pratico), mentre l'interessamento di Talete era rivolto alle proprietà geometriche delle figure.

La storia di Talete e delle sue scoperte, giunta fino a noi con testimonianze postume, spesso contraddittorie e soprattutto, come già detto, del tutto prive di qualsivoglia tipo di documentazione storica, non è da considerarsi particolarmente importante per le scoperte in se stesse, quanto per il fatto che a lui si deve, presumibilmente, l'inizio della geometria greca come analisi delle figure private di ogni riferimento materiale. Talete fu certamente un uomo pratico che affrontò e risolse problemi in modo innovativo; tra la geometria esclusivamente pratica degli egizi e la geometria della figura immateriale dei greci, Talete rappresenta un anello di congiunzione. Si può affermare con ragionevole sicurezza che abbia contribuito alla organizzazione razionale della matematica mentre va considerata con molta più cautela l'ipotesi che di lui si possa parlare come del primo vero matematico in quanto fondatore dell'impostazione deduttiva della geometria. In ogni caso l'enorme importanza dei progressi realizzati da Talete in campo matematico era fuori discussione tra i

greci; non a caso Platone, uno dei più grandi filosofi e pensatori dell’antichità, gli riserva un posto fra i saggi della Grecia.

## 3.6 Pitagora e i pitagorici

*«Quanto Pitagora comunicava ai discepoli più stretti, nessuno è in grado di riportare con sicurezza: in effetti presso di loro, il silenzio era osservato con grande cura.» (Porfirio)*

### 3.6.1 La vita

La figura storica di Pitagora, messa in discussione da diversi studiosi, si mescola alla leggenda narrata nelle numerose Vite di Pitagora, composte nel periodo del tardo neoplatonismo e del neopitagorismo dove il filosofo viene presentato come figlio del dio Apollo. Secondo la leggenda, il nome stesso di Pitagora risalirebbe etimologicamente ad una parola che trova il suo significato in annunciatore del Pizio, e cioè di Apollo. Si riteneva infatti che egli, autore di miracoli e profeta, guaritore e mago, fosse figlio del dio stesso.

Pitagora da Samo (575 - 490 ca. a.C.), filosofo e matematico greco, eredita i temi dell’antica tradizione ionica di Talete, Anassimene e Anassimandro e viene a contatto con i culti misterici e con la religione babilonese (è probabile, infatti, che la sua filosofia abbia subito influenze orientali). Non scrive nulla e le notizie sulla sua vita sono lacunose.

Fondatore, inoltre, dell’omonima scuola, testimonianze dicono che fu allievo di Anassimandro e raccontano di viaggi da lui compiuti in Oriente (non vi è certezza storica di questi), nei quali sarebbe venuto in contatto con la sapienza degli egizi, persiani, caldei, ebrei, indiani e dove avrebbe appreso elementi della geometria. Verso i 40 anni lascia Samo ed emigra in Magna Grecia, a Crotone, colonia dorica sulla costa orientale della Calabria; ivi fonda una comunità (una sorta di setta politico-religiosa) e una scuola che avranno grande sviluppo, godendo i favori del governo aristocratico della città, in concomitanza della fioritura della scuola medica di Alcmeone.

Pitagora, secondo la testimonianza di Proclo, avrebbe compiuto delle scoperte matematiche di capitale importanza:

- Il teorema sulla somma degli angoli del triangolo (uguale a due retti);

- Il celebre teorema detto di Pitagora sul triangolo rettangolo (il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti);
- La costruzione dei poligoni regolari;
- I problemi di applicazione delle aree (serie di problemi che traducono geometricamente le equazioni di primo e secondo grado).
- Gli irrazionali

I pitagorici studiarono, con particolare interesse, i poligoni e i solidi regolari; il pentagono e la stella pentagonale a cinque punte pare che avessero affascinato talmente tanto il grande maestro che li pose come simbolo della scuola.

La fama del filosofo si diffuse in tutta la Magna Grecia, fino a Roma. La sua figura divenne leggendaria e venerata dai discepoli come quella di un dio.

Sul piano scientifico, non siamo in grado di attribuire a Pitagora teorie precise. Le dottrine astronomiche della scuola furono forse sviluppate dai suoi discepoli. Il teorema che porta il suo nome si deve ad altri, anche se forse Pitagora ne conosceva il significato.

Legati alla casta sacerdotale, i pitagorici acquistarono un rilevante peso politico nelle polis italiche. La tradizione racconta che, a Crotone, nel corso di una sommossa popolare, venne incendiata la casa dove erano riuniti i maggior esponenti della setta. Riuscirono a salvarsi solo Archippo e Liside. Pitagora si era ritirato a Metaponto, dove era morto prima della rivolta.

Secondo una diversa versione dell'accaduto, egli, assente alla riunione, riuscì a fuggire a Metaponto, dove morì verso il 497-490 a.C.

### **Astensione dalle fave e vegetarismo**

Una versione della morte di Pitagora è collegata alla nota idiosincrasia del filosofo e della sua Scuola per le fave: non solo si guardavano bene dal mangiarne, ma evitavano accuratamente ogni tipo di contatto con questa pianta. Secondo la leggenda, Pitagora stesso, in fuga dagli scherani di Cilone di Crotone, preferì farsi raggiungere ed uccidere piuttosto che mettersi in salvo attraverso un campo di fave. A proposito di questo divieto pitagorico di cibarsi di fave, Giovanni Sole nel libro Pitagora e il tabù delle fave ne dà un'interpretazione fisica e una spirituale. La prima è collegata al favismo che secondo

studi medici era diffuso proprio nella zona del crotonese, mentre la seconda fa riferimento a credenze antiche, messe in luce da Levi Strauss, secondo cui le fave erano considerate connesse al mondo dei morti, della decomposizione e dell’impurità dalle quali il filosofo si deve tenere lontano.

Pitagora è tradizionalmente considerato l’iniziatore del vegetarismo in Occidente grazie ad alcuni versi delle Metamorfosi di Ovidio, che lo descrivono come il primo degli antichi a scagliarsi contro l’abitudine di cibarsi di animali, reputata dal filosofo un’inutile causa di stragi, dato che già la terra offre piante e frutti sufficienti a nutrirsi senza spargimenti di sangue; Ovidio lega inoltre il vegetarismo di Pitagora alla credenza nella metempsicosi, secondo cui negli animali non vi è un’anima diversa da quella degli esseri umani.

### La metempsicosi

Pochi sono gli elementi certi della dottrina pitagorica, tra questi quello della metempsicosi su cui tutte le fonti sono concordi e tra le prime Senofane che la critica aspramente. Derivato dall’orfismo, nella dottrina pitagorica vi è dunque un sicuro aspetto religioso, il quale sosteneva la trasmigrazione delle anime che, per una colpa originaria, erano costrette, come espiazione, ad incarnarsi in corpi umani o bestiali sino alla finale purificazione (catarsi)<sup>1</sup>.

La novità del pensiero di Pitagora rispetto all’orfismo è rappresentato dalla considerazione della scienza come strumento di purificazione nel senso che l’ignoranza è ritenuta una colpa da cui ci si libera con il sapere. Questa particolarità della dottrina è ritenuta dagli studiosi sicuramente appartenente a Pitagora che viene tradizionalmente definito, a partire da Eraclito, come *polymathés* (erudito).

Per questo motivo la matematica di Pitagora non ha più il carattere fortemente pragmatico e applicativo che abbiamo visto in Talete, ma la ricerca del sapere assume un carattere quasi mitologico.

#### 3.6.2 La scuola pitagorica

La scuola pitagorica, appartenente al periodo presocratico, fu fondata da Pitagora a Crotone intorno al 530 a.C., sull’esempio delle comunità orfiche e

---

<sup>1</sup> si può osservare come la mentalità sia completamente opposta a quella cristiana, secondo la quale il peccato originale fu proprio l’atto di cogliere il frutto dall’albero del sapere.

delle sette religiose d'Egitto e di Babilonia, terre che, secondo la tradizione, egli avrebbe conosciuto in occasione dei suoi precedenti viaggi di studio.

In base alle testimonianze a noi giunte, non è possibile distinguere la dottrina di Pitagora da quella dei suoi discepoli. Anche Aristotele si riferisce ai cosiddetti pitagorici, senza distinguere tra essi e il fondatore della scuola.

La scuola di Crotone ereditò dal suo fondatore la dimensione misterica ma anche l'interesse per la matematica, l'astronomia, la musica e la filosofia.

L'originalità della scuola consisteva infatti nel presentarsi come setta mistico-religiosa, comunità scientifica ed insieme partito politico aristocratico che sotto questa veste governò direttamente in alcune città dell'Italia meridionale.

La coincidenza dei tre diversi aspetti della scuola pitagorica si spiega con il fatto che l'aspetto mistico nasceva dalla convinzione che la scienza libera dall'errore che era considerato una colpa e quindi, attraverso il sapere, ci si liberava dal peccato dell'ignoranza, ci si purificava e ci avvicinava a Dio, l'unico che possiede tutta intera la verità: infatti l'uomo è filosofo (da *filèin*, amare e *sofia*, sapienza), può solo amare il sapere, desiderarlo ma mai possederlo del tutto.

Infine la partecipazione alla scuola, riservata a spiriti eletti, implicava che gli iniziati che la frequentavano avessero disponibilità di tempo e denaro per trascurare ogni attività remunerativa e dedicarsi interamente a complessi studi: da qui il carattere aristocratico del potere politico che i pitagorici ebbero fino a quando non furono sostituiti dai regimi democratici.

La scuola, che poteva essere frequentata anche dalle donne, offriva due tipi di lezione: una pubblica e una privata. Durante quella pubblica, seguita dalla gente comune, il maestro spiegava nel modo più semplice possibile, così che fosse comprensibile a tutti, la base della sua filosofia basata sui numeri. Quella privata era invece di più alto livello e veniva seguita prevalentemente da eletti iniziati agli studi matematici.

Pitagora infatti aveva diviso i suoi discepoli, in due gruppi:

- I matematici (da *manthanein*, apprendere), ovvero la cerchia più stretta dei seguaci, i quali vivevano all'interno della scuola, si erano spogliati di ogni bene materiale e non mangiavano carne ed erano obbligati al celibato. I matematici erano gli unici ammessi direttamente alle lezioni di Pitagora con cui potevano interloquire. A loro era imposto l'obbligo del segreto, in modo che gli insegnamenti impartiti all'interno della scuola non diventassero di pubblico dominio;

- Gli acusmatici ( dal verbo greco *akouein*, ascoltare), ovvero la cerchia più esterna dei seguaci, ai quali non era richiesto di vivere in comune, o di privarsi delle proprietà e di essere vegetariani, avevano l'obbligo di seguire in silenzio le lezioni del maestro.

Il carattere religioso dogmatico dell'insegnamento è confermato dal fatto che la parola del maestro non poteva essere messa in discussione: a chi obiettava si rispondeva: «*autòs epha*» (l'*ipse dixit* latino), «l'ha detto proprio lui» e quindi era una verità indiscutibile. Gli insegnamenti venivano tramandati oralmente e su di essi si doveva mantenere il segreto.

Nelle sue lezioni, che si tenevano nella Casa delle Muse, un imponente tempio all'interno delle mura cittadine, in marmo bianco, circondato da giardini e portici, Pitagora ribadiva spesso il concetto che la medicina fosse salute e armonia, invece la malattia disarmonia. Quindi l'obiettivo principale della medicina pitagorica era di ristabilire l'armonia tra il proprio corpo e l'universo.

Poiché i pitagorici erano sostenitori delle teorie orfiche dell'immortalità dell'anima e della metempsicosi, ritenevano che per mantenerla pura e incontaminata occorresse svolgere delle pratiche ascetiche, sia spirituali che fisiche. Tra queste, solitarie passeggiate mattutine e serali, cura del corpo ed esercizi quali corsa, lotta, ginnastica e diete costituite da cibi semplici, possibilmente vegetariane, e che abolivano anche l'assunzione di vino, oltre che delle fave.

L'ordine pitagorico, che aveva come simbolo mistico una stella a cinque punte (*pentagramma*, figura 3.11), aveva un carattere mistico e conteneva anche molti argomenti etici, tutti però basati su fatti matematici. Molti degli insegnamenti pitagorici sono, per noi, andati perduti, poiché i membri dell'ordine erano vincolati da un giuramento a non rivelare gli insegnamenti del maestro. Sappiamo tuttavia che il pitagorico Archita divideva la matematica in quattro parti: *musica, aritmetica, astronomia e geometria*; queste discipline, dette il quadrievio, furono più tardi adottate da Platone e Aristotele e divennero in effetti il programma scolastico per secoli, fino al Rinascimento.

Tra i discepoli crotoniati di Pitagora i più noti erano il medico Alcmeone, il poeta Epicarmo e Ippaso, il capo dei matematici, che finì espulso o condannato a morte, forse per aver divulgato uno dei segreti matematici più gelosamente custoditi dalla comunità: la scoperta dell'incommensurabilità. Scuole pitagoriche erano anche quelle di Archippo a Reggio e di Archita a Taranto.

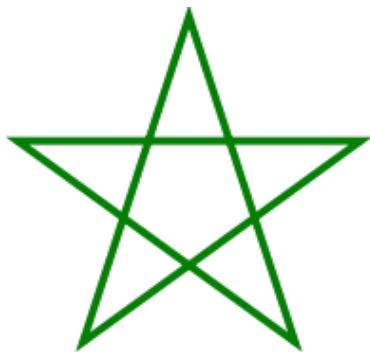


Figura 3.11: pentagramma

Le comunità pitagoriche erano di tendenza aristocratica e godevano dell'appoggio dei governi delle colonie. Questa politica antidemocratica fu forse la causa della loro sconfitta politica e della dispersione delle scuole.

Dopo la cacciata dalle colonie italiche, il pitagorismo, tuttavia, non scomparve. Nuove comunità si formarono a Tebe, per opera di Filolao.

### 3.6.3 I Pitagorici e la musica

Il romano Boezio (VI sec. d.C.) racconta che Pitagora passando davanti al negozio di un fabbro, fu colpito dal fatto che i suoni provocati dal battere di differenti martelli sull'incudine formavano quasi un'armonia musicale. Egli si chiese se il fenomeno fosse dovuto alla forza degli uomini che li manovravano ed entrò in bottega. Domandò loro di scambiarsi i martelli e constatò che l'effetto musicale era lo stesso. Dunque la causa erano i martelli, non gli uomini. Domandò al fabbro di lasciargli pesare i martelli e trovò che i pesi stavano in rapporto tra loro come i numeri 12, 9, 8 e 6. Il peso del quinto martello non aveva un rapporto semplice con quello degli altri. Il quinto martello fu lasciato da parte e si trovò che l'effetto musicale era aumentato. Gli intervalli musicali che Pitagora udì erano quelli che sono detti la quarta, la quinta e l'ottava, contata dalla nota emessa dal martello più pesante. Questo lo portò alla rivelazione che la musica altro non è che il rendere udibile il numero (bisogna ricordare un'importante distinzione: la notazione moderna delle frazioni  $3/2$  indica una suddivisione dell'unità in parti, mentre i greci antichi usavano la

proporzione 3 : 2 a indicare una relazione tra interi non suddivisi).

Non sappiamo quale parte di questa leggenda sia storica. Probabilmente c'è pochissima verità in essa, in quanto il risultato di cui si parla non concorda con la relazione nota tra il peso dei martelli e l'altezza del suono. In ogni caso, questa leggenda è tipica dell'interesse pitagorico per il concetto di numero.

Boezio racconta ancora che Pitagora continuò i suoi esperimenti e studiò la relazione tra la lunghezza di una corda vibrante e il suono che essa produce: se si accorcia una corda a 3/4 della sua lunghezza originale, allora si sente la quarta, cioè il quarto tono, del tono originale; se la si accorcia a 2/3 si sente la quinta e se la si accorcia a 1/2 l'ottava. Se la lunghezza originale della corda vale 12, allora si sente la quarta quando la lunghezza è ridotta a 9, la quinta quando è ridotta a 8 e l'ottava quando è ridotta a 6. Questa parte di racconto è probabilmente più aderente alla verità.

La percezione della relazione tra lunghezza di una corda e l'altezza di un tono è il più antico esempio nella storia di una legge naturale trovata empiricamente. A quei tempi deve essere stato estremamente sorprendente scoprire una relazione tra cose così differenti quali toni musicali e i rapporti tra i numeri. E' comprensibile che i Pitagorici si chiesero quale fosse la causa e quale l'effetto. Essi finirono col supporre che la causa doveva essere identificata con i rapporti tra i numeri, sicché per loro l'armonia divenne una proprietà dei numeri che esiste perché i numeri 6, 8, 9 e 12 sono armonici.

I numeri 6, 8, 9 e 12 sembravano avere una particolarità non solo acustica, ma anche aritmetica. Infatti il numero 9 è esattamente la media aritmetica di 6 e 12 mentre 8 è la media armonica di 6 e 12, cioè:

$$9 = (6+12)/2 \text{ e } 1/8 = (1/6 + 1/12)/2$$

Inoltre 6 sta a 8 come 9 sta a 12 e 6 sta a 9 come 8 sta a 12, cioè:

$$6/8 = 9/12 \text{ e } 6/9 = 8/12.$$

In musica ciò significa che proprio come le corde di lunghezza 12 e 9, così anche quelle di lunghezza 8 e 6 producono un tono e la sua quarta, mentre le corde di lunghezza 9 e 6 producono un tono e la sua quinta.

La *media aritmetica* di due numeri fu definita dai pitagorici come *un numero tale che la media è maggiore del primo numero della stessa quantità di cui il secondo numero è maggiore della media*. Così 9 è la media aritmetica di 6 e

12 poiché  $9-6=12-9$ . In altre parole, la media aritmetica di due numeri può essere definita come la loro semisomma. Così la media aritmetica di 6 e 12 è  $(6+12)/2$ .

La *media geometrica* di due numeri era definita come *un numero tale che la differenza tra la media geometrica e il primo numero, divisa per la differenza tra il secondo numero e la media geometrica vale il primo numero diviso per la media geometrica*; così 6 è la media geometrica di 2 e 18 poiché:

$$(6 - 2)/(18 - 6) = 2/6.$$

Una moderna definizione equivalente è: la media geometrica di due numeri vale la radice quadrata del loro prodotto, cioè:

$$6 = \sqrt{2 \cdot 18}.$$

La *media armonica* di due numeri era definita come *un numero tale che la differenza tra la media armonica e il primo numero divisa per la differenza tra il secondo numero e la media armonica vale il primo numero diviso per il secondo numero*; così 8 è la media armonica di 6 e 12, poiché:

$$(8 - 6)/(12 - 8) = 6/12.$$

Una moderna definizione equivalente della media armonica,  $H$ , di due numeri  $a$  e  $b$ , è

$$1/H = (1/a + 1/b)/2.$$

I numeri 6, 8 e 12 mostravano di godere di particolari proprietà in geometria, oltre che in aritmetica e in musica. Un cubo ha 6 facce, 8 vertici e 12 spigoli. Perciò, secondo i Pitagorici, il cubo era un solido armonico. Il modo di ragionare è curioso: in natura si trova un'armonia musicale: essa sembra essere correlata con i numeri 6, 8 e 12. Tenendo conto di questo fatto, *il carattere armonico è considerato una proprietà di questi numeri, in modo che quando questi numeri capitano da qualche parte (in questo caso nel cubo), anche in questa parte si trova l'armonia peculiare di questi numeri*; quindi il cubo è un solido armonico.

In tal modo il numero forniva non solo una teoria per la musica, ma anche una connessione tra musica e geometria.

### 3.6.4 Il numero come principio della realtà

Fino ad allora i filosofi naturalisti avevano identificato la sostanza attribuendole delle qualità: queste però, dipendendo dalla sensibilità, erano mutevoli e mettevano in discussione la caratteristica essenziale della sostanza: la sua immutabilità.

I pitagorici ritenevano di superare questa difficoltà evidenziando che se è vero che i principi originari mutano qualitativamente essi però conservano la quantità che è misurabile e quindi traducibile in numeri, vero fondamento della realtà. Affermava Filolao: *« Tutte le cose che si conoscono hanno numero; senza questo nulla sarebbe possibile pensare né conoscere. »*

La scoperta delle proporzioni esistenti tra i numeri e di quelli esistenti tra questi e le leggi dell'armonia che governano tutte le cose condussero i Pitagorici a non identificare l'archè con uno degli elementi naturali, come i filosofi ionici, ma con il numero, concepito come sostanza degli enti e struttura fondante del Tutto. L'intuizione di Pitagora nasce dalla considerazione che il numero costituisce la struttura fondante di tutti gli esseri, per cui se fosse tolto dalle cose, perderemo le cose stesse. Tuttavia l'intuizione di unificare la realtà sottoponendola ad un principio di natura quantitativa non significa che i numeri siano la fonte ultima da cui tutto deriva perché le cose hanno origine dall'opposizione fondamentale tra monade e diade, la prima rappresenta l'elemento limitante, finito, che misura; la seconda costituisce il principio infinito e illimitato sopra cui opera la misurazione. Le cose e gli stessi numeri nascono per contrapposizione tra finito e infinito, da una molteplicità illimitata (diade) su cui l'uno (monade) opera quale principio di limitazione e determinazione. Tutte le cose quindi in quanto partecipi di grandezza e quantità possono essere numerate e espresse sotto forma di numero. Così ad esempio la relazione che sussiste tra cose simili può essere formulata secondo un rapporto numerico. Però le cose non solo potevano essere espresse in forma numerica, ma erano esse stesse numeri *perché il numero contiene tutte le altre cose e tutti i numeri sono in rapporto tra loro.*

Tutte le cose derivano dai numeri ma i numeri non sono il *primum assoluto*, ma derivano essi stessi da ulteriori elementi. In effetti i numeri risultano essere una quantità indeterminata che via via si determina o delimita. Due elementi costituiscono il numero: uno determinante o limitante e uno indeterminato. Il numero nasce quindi dall'accordo di elementi illimitati e limitanti e a sua

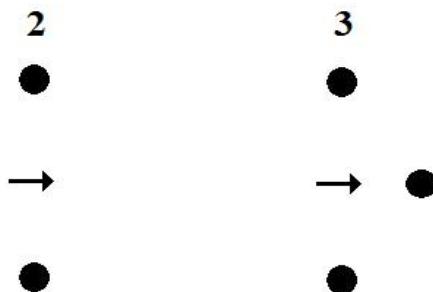


Figura 3.12: La natura limitata dei numeri dispari e quella illimitata dei numeri pari

volta genera tutte le cose. Ma proprio in quanto generati da un elemento indeterminato e da uno determinante, i numeri manifestano una certa prevalenza dell’uno o dall’altro di questi elementi. Infatti se raffiguro un numero con dei punti geometricamente disposti, quando il numero dispari (o impari, come gli chiamavano i pitagorici) viene diviso in due parti, rimane sempre interposta tra esse una unità che pone un limite alla divisione. Al contrario, nei numeri pari, rimane un campo vuoto, senza limite, e la figura risultante è aperta, non determinata. Dal numero 1 deriva sia il finito che l’infinito perché da quello provengono sia il pari che il dispari (figura 3.12).

I numeri pitagorici sono numeri interi, collezioni di più unità, ciascuna rappresentata da un punto circondato da uno spazio vuoto. Caratteristica di questa concezione è la discontinuità: poiché ad ogni grandezza non si può aggiungere qualcosa di più piccolo dell’unità, il suo accrescimento avviene per salti discontinui. Il numero non è una pura astrazione, ma è una grandezza spaziale avente estensione e forma, rappresentato geometricamente mediante una configurazione di punti. Affermare che *tutte le cose sono numeri* significa dire che ogni materia è costituita di punti materiali di piccola ma non nulla grandezza e che dalla figurazione di questi punti fra loro identici e qualitativamente indifferenti dipendono tutte le proprietà e differenze apparenti dei corpi.

Poiché i numeri si dividono in pari e dispari, e poiché i numeri rappresentano il mondo, l’opposizione tra di essi si riflette in tutte le cose. La divisione tra i numeri porta quindi ad una visione dualistica del mondo, e la suddivisione della realtà in categorie antitetiche: l’ordine e la perfezione stanno dalla parte

del dispari, mentre il male, il disordine e l'imperfezione stanno da quella dei pari.

Sono state individuate 10 coppie di opposti, conosciuti come opposti pitagorici:

1. bene e male
2. limite ed illimite
3. dispari e pari
4. rettangolo e quadrangolo
5. retta e curva
6. luce e tenebre
7. maschio e femmina
8. uno e molteplice
9. movimento e stasi
10. destra e sinistra

### 3.6.5 L'aritmogeometria

Per gli antichi greci l'*aritmetica* era lo studio delle proprietà matematiche astratte dei numeri, soprattutto dei numeri naturali, interi positivi. L'aritmetica era oggetto di studio da parte di filosofi e di persone benestanti, mentre la logistica (intesa come la ricerca di soluzioni a problemi che contengono rapporti, proporzioni, frazioni decimali e percentuali) era studiata da mercanti e schiavi. Negli Stati Uniti l'aritmetica degli antichi greci è detta *teoria dei numeri*. La teoria dei numeri figurati fu uno dei loro primi e più estesi sviluppi in questo campo ma mostra anche correlazioni tra aritmetica e geometria.

Uno dei dogmi del Pitagorismo era la concezione secondo cui l'essenza di tutte le cose, sia in geometria, sia nelle questioni pratiche e teoriche della vita umana, era spiegabile in termini di arithmos ossia di proprietà intrinseche dei numeri interi e dei loro rapporti. Non essendo ancora differenziate tra loro aritmetica e geometria era possibile, per questa scuola, percepire alcune affinità fra numeri e figure.

Mentre per noi è naturale associare i numeri alla geometria, in termini di misure o rapporti, per i motivi elencati prima per i pitagorici era spontaneo compiere anche il procedimento opposto: associare ai numeri delle figure. Per questo l'aritmetica e la geometria pitagorica si potevano identificare in un'unico concetto che potremmo definire *aritmogeometria*.

Quindi ai Pitagorici parve naturale associare un punto al numero 1, tre punti o un triangolo, al numero 3 e così via. Con la riunione di più punti unità secondo opportune configurazioni geometriche si rappresentavano i numeri triangolari, quadrati, pentagonali, ecc. Ciò condusse alla seguente serie di figure connesse con i numeri:

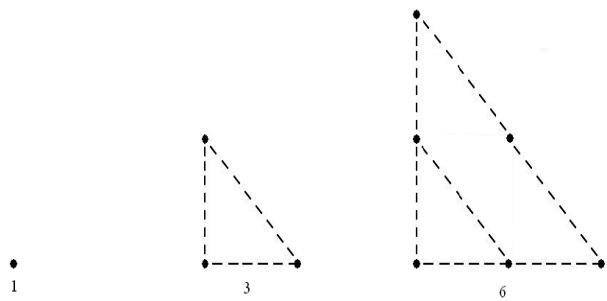


Figura 3.13: Numeri triangolari

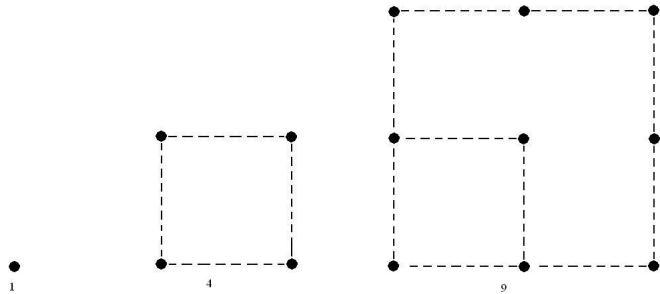


Figura 3.14: Numeri quadrati

Ciascun diagramma, successivo al secondo, per un numero figurato, è costruito nel modo seguente (vedi Figura 3.16):

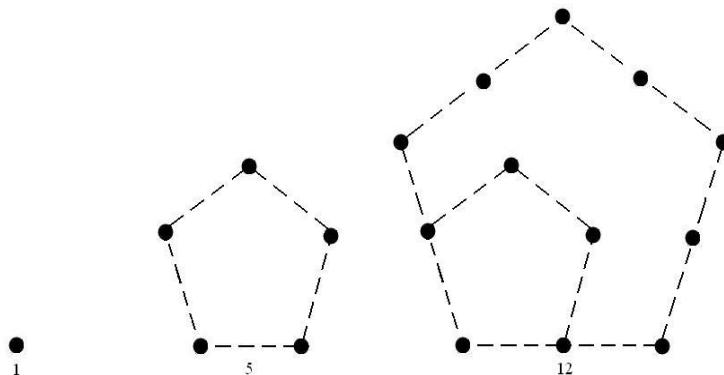


Figura 3.15: Numeri pentagonali

1. E' dato un numero figurato.
2. Si connettano i punti consecutivi sul bordo del poligono formato dai punti.
3. Si scelga un vertice del poligono e si prolunghino i due lati che si intersecano in questo vertice.
4. Si aggiunga un punto a ciascuno di questi prolungamenti.
5. Si disegni un poligono regolare a partire da questi prolungamenti dei lati.
6. Si disegni su ciascun lato del nuovo poligono un numero di punti uguale al numero dei punti che stanno sui lati prolungati al punto 4. Allora il numero figurato è costituito dalla totalità dei punti che risultano.

Secondo la tradizione la scuola pitagorica avrebbe scoperto alcune semplici proprietà relativi a questi numeri; ad esempio un generico numero triangolare  $T$  si ottiene sommando la serie di interi:  $T_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n+1)/n$  e questo dalla visibile configurazione geometrica dei numeri triangolari.

Per questa loro capacità di mescolare numeri e figure probabilmente arrivarono alla conoscenza di formule algebriche più semplicemente di quanto possiamo immaginare, dato che questa loro mentalità di vedere il numero era

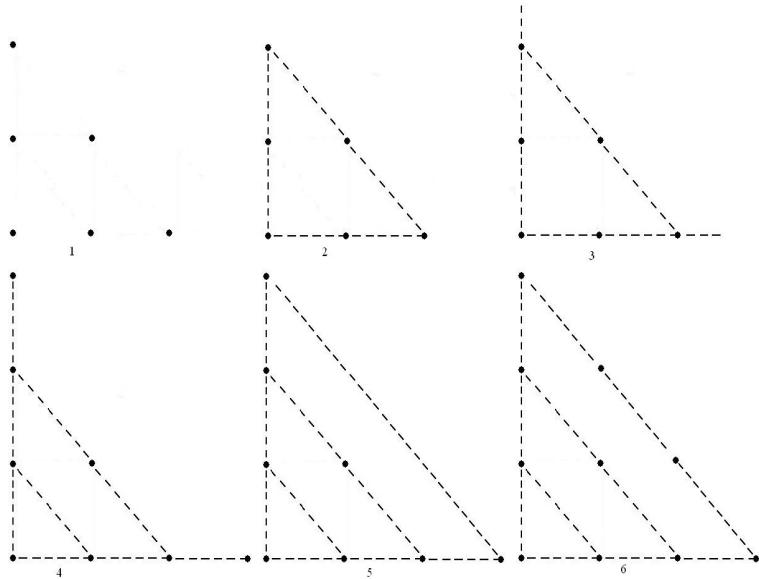


Figura 3.16: Costruzione di un numero figurato

totalmente differente dalla nostra. Probabilmente infatti per loro era quasi banale osservare che un quadrato perfetto poteva scomporsi come somma di due numeri triangolari consecutivi: infatti nella loro rappresentazione con numeri figurati bastava dividerli lungo una diagonale come in figura 3.17; e allo stesso modo che la differenza di due numeri quadrati consecutivi era un numero dispari, come in figura 3.18.

Tra i numeri quadrati e le terne pitagoriche c'è una relazione interessante (ricordo sempre che la notazione che viene usata nel testo non è quella del tempo). I Pitagorici conoscevano bene la formula

$$\left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 + m^2,$$

dove  $m$  è un numero naturale dispari; l'uguaglianza può essere verificata facilmente. La formula fu usata nel modo seguente: sia  $m$  un intero dispari, per

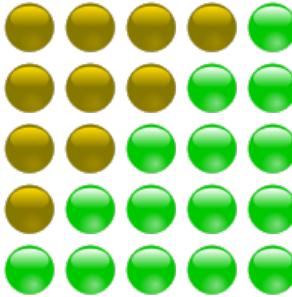


Figura 3.17: Somma di due numeri triangolari consecutivi

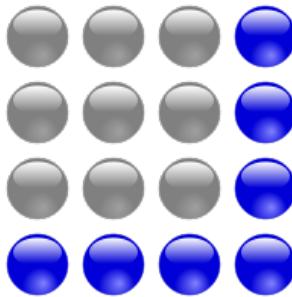


Figura 3.18: Differenza di due numeri quadrati consecutivi

esempio 11; allora:

$$\left(\frac{m^2 + 1}{2}\right) = 61, \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right) = 60,$$

e quindi

$$61^2 = 60^2 + 11^2,$$

cioè (60, 11, 61) è una terna pitagorica.

I Pitagorici dedicarono parecchia attenzione allo studio delle proprietà dei singoli numeri o di classi di numeri; furono studiati i numeri dispari, pari, primi e composti e le loro proprietà furono utilizzate in molti modi. I Pitagorici cercarono inoltre ciò che chiamavano *numeri perfetti*, ossia numeri uguali alla somma dei loro divisori propri: per esempio, 6 è un numero perfetto, poiché  $6=3+2+1$ , e 3, 2 e 1 sono divisori di 6 diversi da 6. Altri numeri perfetti sono

28 e 496. I Pitagorici cercarono anche i *numeri amici*, cioè coppie di numeri le quali godano della proprietà che ciascun numero è la somma dei divisori propri dell'altro (per esempio 284 e 220).

C'è anche un'altro modo in cui furono costruite relazioni tra i numeri e le figure geometriche. Al numero 1 venne associato un punto; una retta è individuata da due punti, perciò al numero 2 venne associata la retta. Continuando in questo modo, al numero 3 si associa un piano, al 4 lo spazio. 1, 2, 3 e 4 divennero i quattro numeri fondamentali della geometria. La rappresentazione del numero triangolare 10, che risultava dalla somma di questi quattro, veniva chiamata *tetrakty* (figura 3.19) aveva un carattere sacro e i pitagorici giuravano su di essa. Era inoltre il modello teorico della loro visione dell'universo, cioè un mondo non dominato dal caos delle forze oscure, ma da numeri, armonia, rapporti numerici.

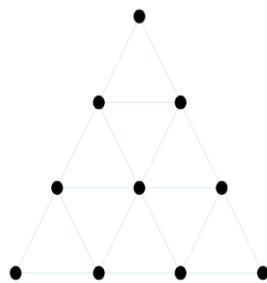


Figura 3.19: Tetrakty

### 3.6.6 Numeri pari e numeri dispari

La parte più sviluppata dell'*aritmetica* era la teoria dei numeri *pari* e *dispari*, che sono quelli che noi oggi definiamo dispari.

Secondo i pitagorici, tutte le opposizioni tra le cose vanno ricondotte a opposizioni tra i numeri. L'opposizione numerica fondamentale è quella tra pari e dispari: pari è quel numero che può essere diviso in due parti uguali, entrambe pari o entrambe dispari; una volta diviso il numero dispari, invece, se una sua parte è pari, l'altra è obbligatoriamente dispari.

I pitagorici collegavano la distinzione tra pari e dispari a quella tra limite e illimitato. Nei numeri pari domina l'illimitato: per questo essi sono imperfetti; in quelli dispari domina il limite: per questo essi sono perfetti.

Si sottrae a questa distinzione l'Uno, che i pitagorici chiamavano parimpari, l'Uno ha in sé sia la natura illimitante che limitante.

Per studiare le proprietà dei numeri, i pitagorici li rappresentavano disponendoli a squadra, in modo da formare un angolo retto. è possibile generare tutti i numeri dispari partendo dall'unità e applicando ripetutamente la squadra, nello stesso modo con cui si costruiscono i numeri quadrati. Nel caso dei numeri pari invece, se i punti vengono disposti in parti uguali lungo i lati, viene a mancare il vertice della squadra, ossia l'elemento divisore. I numeri pari erano considerati *numeri rettangolari*, quelli dispari *numeri quadrati*. Infatti, se disponiamo a squadra attorno al numero uno le unità costituenti i numeri dispari (3,5,7 ecc), otterremo sempre un quadrato. Viceversa, se inquadriamo le unità costituenti i numeri pari (2, 4, 6, ecc) ne risulterà sempre un rettangolo.

Tra gli altri erano noti i seguenti teoremi:

1. La somma di due numeri pari è pari.
2. Il prodotto di due numeri dispari è dispari.
3. Se un numero dispari divide un numero pari, divide anche la sua metà.

Questa teoria, insieme al teorema di Pitagora, condusse i Pitagorici alla scoperta dell'esistenza di numeri irrazionali.

La ricerca dei numeri perfetti è stata portata avanti fino ad oggi e ha portato a un considerevole sviluppo della matematica, così come a qualche problema ancora aperto.

### 3.6.7 La numerologia pitagorica

I pitagorici erano inclini ad attribuire qualità non matematiche a numeri, quali i numeri amici e perfetti; ma non dobbiamo ritenere che questa fosse un'abitudine ingenua e primitiva; al contrario, il pensiero pitagorico sui numeri non aveva solo un carattere intellettuale, ma era anche permeato di misticismo: *il numero è l'essenza delle cose, e come tale ha potere magico*. Probabilmente

in ciò Pitagora fu influenzato dalla cultura babilonese, con cui venne in contatto viaggiando in Asia minore.

Il potere mistico attribuito a un numero è messo più chiaramente in luce da ciò che Filolao, Pitagorico più recente (ca. 450 a.C.), scrive sul numero 10. I Greci usavano il sistema decimale e questa, di per sé stessa, era un'ottima ragione per attribuire al numero 10, o *decade*, una speciale importanza. Esso è il più piccolo numero che contiene tanti numeri composti quanti non-composti (i numeri composti sono 4, 6, 8, 9 e 10, mentre i non composti sono 1 e i numeri primi 2, 3, 5, 7), inoltre è la somma dei numeri 1, 2, 3, 4, i quattro numeri fondamentali della geometria: perciò questo numero notevole deve avere proprietà molto particolari anche al di fuori della matematica.

Il numero era quindi considerato dai Pitagorici come l'elemento fondamentale in molte cose della natura e nella morale. Per esempio, i numeri dispari erano detti *maschili*, e quelli pari *femminili*; la somma del primo numero dispari e del primo numero pari, cioè il 5 o *pentade* ( $=2+3$ ; in questo contesto l'1, essendo il fondamento primo di tutti i numeri, non viene considerato come numero) era il simbolo del matrimonio, e allo stesso tempo essendo il numero del pentagramma rappresentava vita e potere. Un quadrato, la *tetrade*, simbolizzava la *giustizia* (il prodotto dell'uguale per l'uguale). C'erano anche associazioni meno evidenti: il 2, la *diade*, oltre che il principio illimitante rappresentava anche l'opinione in quanto sempre duplice; il 6 era il numero della creazione, il 7 dell'intelligenza e della salute, l'8 dell'amore e dell'amicizia.

Con i Pitagorici, l'universo non viene più visto come ricettacolo di forze oscure, ma diventa comprensibile razionalmente. Pitagora infatti riconduce il carattere che fa della natura qualcosa di oggettivo all'ordine misurabile e riconosce in quest'ordine ciò che da armonia e unità al mondo. Tutti i fenomeni dell'universo sono intellegibili solo in quanto i loro aspetti qualitativi siano riconosciuti nella loro struttura quantitativa e perciò misurabile.

### 3.6.8 La geometria pitagorica

Abbiamo notato in precedenza che i legami tra l'aritmetica e la geometria si fusero nello studio dei numeri figurati. E abbiamo già parlato della relazione tra i numeri 1, 2, 3 e 4 e le nozioni geometriche di punto, retta, piano e spazio. Non abbiamo ancora considerato, però, lo sviluppo della geometria.

Non si sa con certezza quali, delle prime scoperte geometriche greche, debbano essere attribuite a Pitagora stesso e quali ai suoi discepoli. Sappiamo,

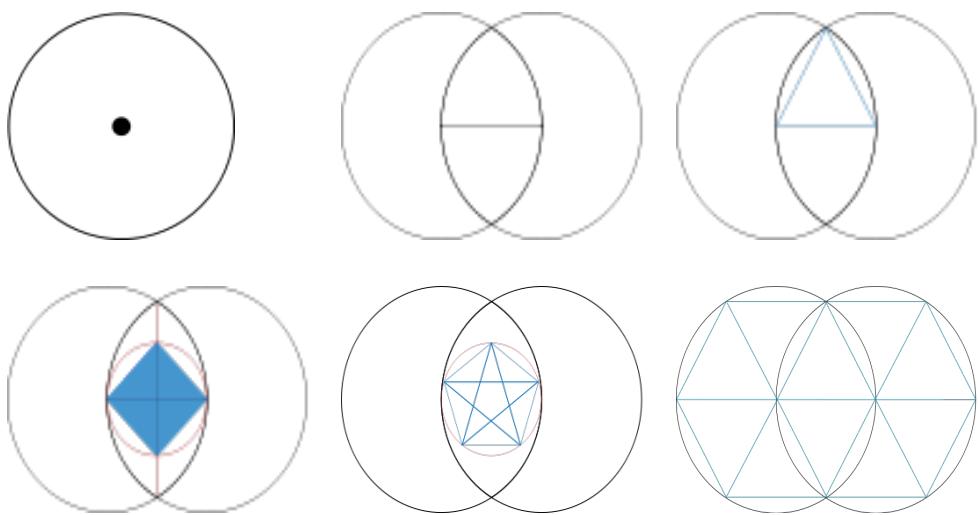


Tabella 3.1: Rappresentazione rispettivamente della monade, diade, triade, tetrade, pentade e decade

comunque, che i Pitagorici studiarono la geometria non limitandosi alle sole relazioni, di cui abbiamo appena parlato, tra geometria e numeri. Nel V sec. a.C. la geometria piana incominciò a svilupparsi nella forma di cui è nota oggi. La geometria non consisteva più in un'accozzaglia di proposizioni per cui l'essere vera o falsa si fondava solo sulle esperienze di ciascuno. Fu sviluppato un sistema di teoremi e ciascun teorema veniva provato servendosi dei precedenti. Conosciamo solo poche cose, ma è certo che, a quel tempo, il teorema di Pitagora apparteneva all'insieme dei teoremi dimostrati. E' da sottolineare il fatto che i Greci non usavano la nostra notazione ma le loro dimostrazioni erano discursivei, cioè, come i Babilonesi e gli Egiziani, cercavano di esplicare a parole i risultati ottenuti.

Probabilmente i Pitagorici studiarono le rette parallele, dimostrarono che la somma degli angoli di un triangolo è uguale alla somma di due angoli retti e svilupparono il metodo di *applicazione delle aree* che porta all'algebra geometrica contenuta nell'opera di Euclide, e probabilmente questo fu uno dei maggiori strumenti che utilizzarono nelle loro dimostrazioni. E' possibile che conoscessero i cinque poliedri regolari, detti, più tardi, *solidi platonici*. Ma, forse, la loro scoperta più importante furono i numeri irrazionali, che trovarono spunto in un ambito geometrico.

È certo che la teoria dell'applicazione delle aree ebbe origine con i Pitagorici se non proprio con Pitagora. Fare dell'algebra geometrica, significa eseguire operazioni algebriche, ragionando su enti geometrici: una qualunque grandezza può essere sempre rappresentata con un segmento; il prodotto di grandezze diseguali con il rettangolo avente per dimensioni i segmenti che le rappresentano ed il prodotto di due grandezze uguali con il quadrato costruito sul segmento ad esse corrispondente. A titolo di esempio vediamo come si possono stabilire geometricamente alcune identità algebriche:

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  (Figura 3.20)
- $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$  (Figura 3.21)
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

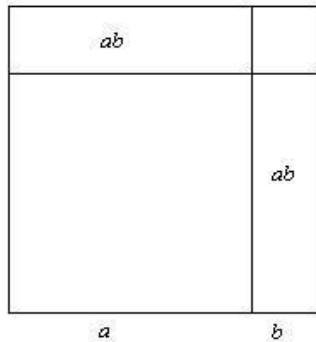


Figura 3.20:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

### Il Teorema di Pitagora

**Teorema 3.6.1** (Il teorema di Pitagora). *In un triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui due cateti.*

Quello che modernamente conosciamo come teorema di Pitagora viene solitamente attribuito al filosofo e matematico Pitagora. In realtà il suo enunciato (ma non la sua dimostrazione) era già noto ai babilonesi, ed era conosciuto anche in Cina e forse in India.

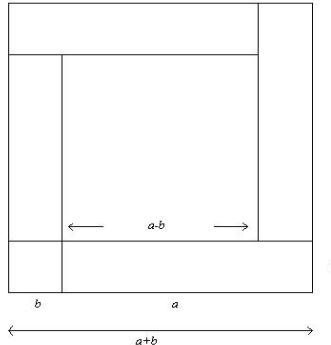


Figura 3.21:  $(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$

La dimostrazione classica del teorema di Pitagora completa il primo libro degli Elementi di Euclide, e ne costituisce il filo conduttore. Dato che richiede il postulato delle parallele, esso non vale nelle geometrie non-euclidiene e nella geometria neutrale. Nel testo di Euclide la dimostrazione del teorema è immediatamente preceduta dalla dimostrazione della costruibilità dei quadrati. L'esistenza stessa dei quadrati dipende infatti dal postulato delle parallele e viene meno nelle geometrie non euclidiene. Questo aspetto del problema è in genere trascurato nella didattica contemporanea, che tende spesso ad assumere come ovvia l'esistenza dei quadrati. Essendo il teorema uno dei più noti della storia della matematica, ne esistono moltissime dimostrazioni, in totale alcune centinaia, opera di matematici, astronomi, agenti di cambio, per esempio un presidente americano James A. Garfield e Leonardo da Vinci. Per questo teorema sono state classificate dallo scienziato americano Elisha Scott Loomis 371 differenti dimostrazioni, che sono state pubblicate nel 1927 nel suo libro: *The Pythagorean Proposition*.

Una leggenda racconta che Pitagora abbia formulato il suo teorema mentre stava aspettando un'udienza da Policlete. Seduto in un grande salone del palazzo di Samo, Pitagora si mise ad osservare le piastrelle quadrate del pavimento, si pensa che ne abbia vista una rottura perfettamente su di una diagonale, così da formare due triangoli rettangoli uguali, ma oltre ad essere 2 triangoli rettangoli erano anche isosceli, avendo i due lati uguali. Pitagora immaginò un quadrato costruito sulla diagonale di rottura della piastrella, un

quadrato avente come lati le diagonali delle piastrelle circostanti (figura 3.22). La dimostrazione è la seguente:

- l'area di ciascuna delle piastrelle adiacenti ai cateti era di: 2 mezze piastrelle (=1 piastrella);
- la somma delle due aree era quindi di: 4 mezze piastrelle (=2 piastrelle);
- l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa (diagonale della piastrella) era di: 4 mezze piastrelle.

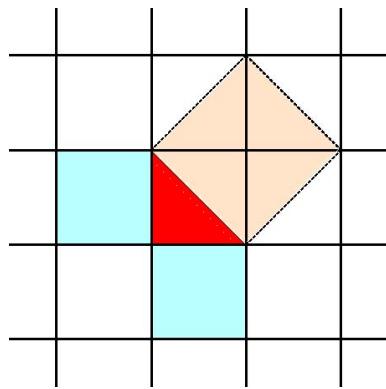


Figura 3.22: Leggenda del teorema

Il *teorema di Pitagora* stesso suggerisce uno dei più semplici e più famosi esempi di algebra delle aree. Un quadrato può essere decomposto nella somma di due quadrati e di due rettangoli uguali (si veda Figura 3.23). I due rettangoli, a loro volta, possono essere decomposti, tracciando la diagonale in due triangoli rettangoli uguali. La somma dei cateti di ciascuno di essi è uguale al lato del quadrato di partenza. Disponiamo ora i quattro triangoli come nella seconda Figura 3.23. Togliendo i quattro triangoli dalla prima figura si ottiene  $a^2 + b^2$ , togliendoli dalla seconda figura si ottiene  $c^2$ . Quindi  $a^2 + b^2 = c^2$ .

Esiste anche una dimostrazione in forma poetica dell'astronomo sir George Airy. In inglese:

*I am, as you can see,  
 $a^2 + b^2 - ab$   
When two triangles on me stand,*

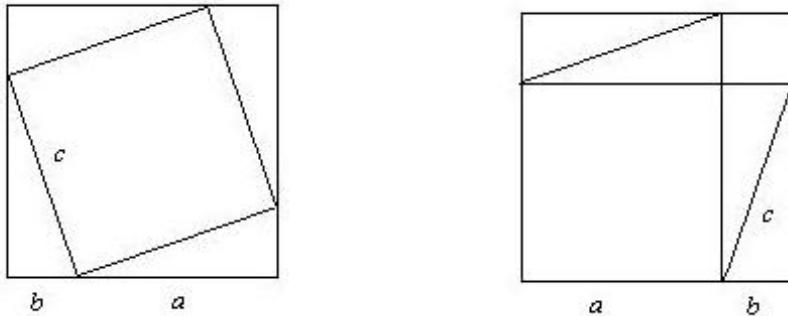


Figura 3.23: Dimostrazione 1

*Square of hypotenuse is plann'd  
But if I stand on them instead  
The squares of both side are read.*

di cui una traduzione letteraria è:

*Come potete vedere, sono  
 $a^2 + b^2 - ab$   
Quando ci sono due triangoli sopra di me  
è rappresentato il quadrato dell'ipotenusa  
Ma se invece sto io sopra di loro  
Si leggono i quadrati dei due lati.*

I versi si riferiscono alla parte bianca: i primi due triangoli sono i due della parte superiore, i secondi quelli della parte inferiore.

Lasciamo nelle note il libro in cui trovare le dimostrazioni esistenti del teorema di Pitagora.

### 3.6.9 La scoperta dell'incommensurabilità

Se per i Pitagorici, il punto geometrico è esteso, allora ogni linea viene considerata come formata da un insieme più o meno numeroso di tali punti materiali, da un insieme più o meno numeroso di tali punti materiali, messo uno dopo l'altro come le perline di una collana, ed ogni superficie come costituita da un certo numero di quelle linee, disposte una accanto all'altra.

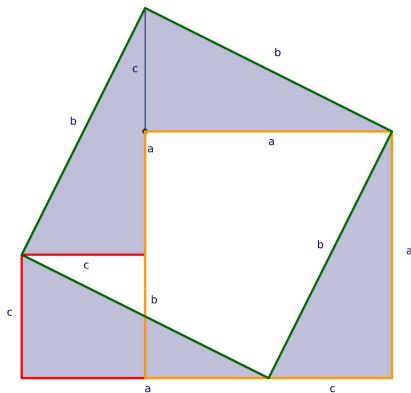


Figura 3.24: Dimostrazione di sir George Airy

Conseguenza diretta di questa concezione materiale del punto è che, considerati due qualsiasi segmenti, essi erano sempre commensurabili.

Infatti, ogni segmento risultava costituito da un numero finito di punti (granellini), tutti eguali fra di loro, per cui se un segmento era, ad esempio, doppio o triplo di un altro, ciò significava che era formato da un numero doppio o triplo di punti rispetto all'altro. Così stando le cose, è evidente che due qualsiasi segmenti dovevano avere sempre come sottomultiplo comune almeno, nel caso più sfavorevole, il punto.

Quindi il quoziente tra il numero dei punti che formava il primo segmento e il numero dei punti del secondo esprimeva il rapporto, in tal modo sempre razionale, tra i due segmenti.

Nonostante il loro motto fosse *Tutto è numero*, i pitagorici scoprirono l'esistenza di grandezze, radicalmente diverse dai numeri ordinari. Considerato il quadrato, la lunghezza della sua diagonale non si può esprimere come multiplo della lunghezza del lato, e nemmeno come sua frazione di numeri interi. Cioè, il lato e la diagonale sono incommensurabili. Nella scheda sotto riportata, descriviamo il ragionamento che dimostra questo fatto, come riportato da Aristotele, ragionamento che porta alla dimostrazione che nessuna frazione può rappresentare la relazione esistente tra la diagonale e il lato di un quadrato, e quindi questa relazione è irrazionale, per usare un termine moderno. Il termine greco originale è più acuto. La parola greca per frazione è *logos*, che significa parola, calcolo, conto, e proviene da una radice che significa raccoglie-

re. Le nuove grandezze vennero chiamate *alogon*, cioè inesprimibili, indicibili. Le grandezze incommensurabili sono conseguenze logiche della geometria, ma sono inesprimibili in termini di numeri ordinari, e i greci posero grande attenzione nell'usare parole diverse per indicare un numero (*arithmos*) piuttosto che una grandezza (*megethos*).

Riportiamo la dimostrazione estremamente geniale e senza dubbio di spirito pitagorico, in quanto basata sulla teoria dei numeri pari e dispari, riferita da Aristotele negli *Analitici primi*.

Prima riportiamo un lemma che i pitagorici conoscevano bene, cercando di effettuare una dimostrazione nel loro stile.

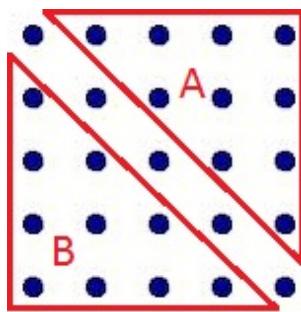


Figura 3.25: Lemma

**Lemma 3.6.2.** *Se  $m^2$  è pari allora anche  $m$  è pari.*

*Dimostrazione.* Dimostrare ciò corrisponde a dimostrare che  $m$  è dispari allora anche  $m^2$  è dispari. Un'ipotesi di come i pitagorici abbiano potuto dimostrare ciò è la seguente: rappresentiamo ovviamente il numero  $m^2$  con un quadrato di lato  $m$  dispari e sia  $a$  l'area del triangolo A (fig. 3.25). Poiché il triangolo B è uguale ad A, la somma delle aree dei due triangoli è  $2a$ . Sommando la diagonale, che è dispari con lo stesso valore del lato, si ottiene un numero dispari che corrisponde all'area del quadrato, che altro non è che  $m^2$ .

□

**Teorema 3.6.3** (La scoperta dell'incommensurabilità).

*Il lato e la diagonale di un quadrato sono due grandezze incommensurabili*

*Dimostrazione.* La dimostrazione fa riferimento alla distinzione tra numeri pari e numeri dispari. Siano  $d$  ed  $l$  la diagonale ed il lato di un quadrato e supponiamo che siano commensurabili, ossia che hanno un sottomultiplo comune  $u$  tale che  $l = mu$  e  $d = nu$  con  $m$  ed  $n$  numeri interi positivi; supponiamo che  $u$  sia il massimo sottomultiplo comune e cioè  $m$  ed  $n$  primi tra loro. Applicando il teorema di Pitagora alla metà del quadrato, e dividendo per  $u^2$  si ottiene:

$$2m^2 = n^2.$$

Il che implica che  $n^2$  sia pari e dunque, per il lemma, anche  $n$  pari. Dunque abbiamo  $n = 2p$  e quindi  $2m^2 = 4p^2$  da cui  $m^2 = 2p^2$  che implica  $m^2$  pari, ed infine per il lemma anche  $m$  pari.

Ma stavamo supponendo che  $m$  ed  $n$  fossero primi tra loro e quindi il fatto che siano entrambi pari porta ad una contraddizione nata dall'assumere che lato e diagonale fossero commensurabili.

□

La tanto discussa diagonale è un segmento ed è li sotto i nostri occhi ma non esiste un numero né intero né fratto che esprima la sua lunghezza. Ecco dunque la scandalosa scoperta: un problema che non si può risolvere con l'aritmetica, viene subito risolto dalla geometria; la geometria prende il sopravvento.

Il teorema di Pitagora, che doveva rappresentare il vanto della scuola pitagorica, si rivelò, invece, colpevole della crisi del pitagorismo.

La scoperta dell'incommensurabile ebbe conseguenze profonde. Da essa, Pappo derivò una distinzione tra gli *interi* (che procedono per gradi, avanzano per addizione indefinitamente partendo da un minimo) e le *quantità continue* (che iniziano con un intero definito e sono indefinitamente divisibili). Se partiamo da una frazione irriducibile ad esempio  $2 : 3$ , possiamo costruire una serie di frazioni equivalenti in maniera molto semplice:  $2 : 3 = 4 : 6 = 6 : 9 = \dots$  Ma se nella serie non esiste la frazione più piccola, allora non ci può essere alcuna frazione che esprima l'intera serie. Le parole di Pappo suggeriscono che fu questo ragionamento ad aprire gli occhi ai pitagorici. Consideriamo ancora una volta il lato e la diagonale di un quadrato. Il tentativo di esprimere entrambi come multipli di una stessa quantità porta a una regressione infinita. Per quanto piccola sia la quantità comune, bisogna prenderla ancora più piccola, e quindi la quantità non esiste.

La sfida che i matematici greci si trovarono ad affrontare fu quella di gestire due mondi matematici incommensurabili, l'aritmetica e la geometria, ognuno regno perfetto di ordine intellegibile, in sé stesso, ma in tensione tra loro.

### Crisi degli irrazionali nella scuola pitagorica

Quando i Pitagorici, avvalendosi del teorema di Pitagora scoprirono che lato del quadrato e diagonale sono segmenti fra loro incommensurabili, essi ne furono sconvolti. Tale scoperta costituì uno dei segreti più gelosamente custoditi dai Pitagorici. E quando un discepolo, probabilmente Ippaso, la rivelò, Pitagora lo cacciò invocando su di lui l'ira degli dei.

In un scolio al X libro degli Elementi di Euclide si legge: *è fama che colui il quale per primo rese di pubblico dominio la teoria degli incommensurabili è perito in naufragio e ciò perché l'inesprimibile e l'inimmaginabile sarebbero dovuti rimanere sempre celati. Perciò il colpevole, che fortuitamente toccò e rivelò questo aspetto delle cose viventi, fu trasportato al suo luogo d'origine e là viene in perpetuo flagellato dalle onde.*

Questa è indubbiamente leggenda, ma essa sta ad esprimere lo sbigottimento e la reazione che dovette provocare quella rivoluzionaria scoperta, che demoliva il concetto pitagorico di punto esteso e recava, quindi, un gravissimo colpo non solo a tutta la geometria pitagorica, fondata su di esso, ma anche al complesso delle dottrine filosofiche di quella Scuola, fondate anch'esse su tale concetto.

I Pitagorici credevano che i corpi fossero costituiti da corpuscoli tutti uguali tra loro e disposti in forme geometriche. Questa convinzione in ambito geometrico portava a ritenere che anche i punti avessero un'estensione. Da ciò deducevano che un segmento dovesse essere formato da un numero finito di punti. Pertanto il rapporto di due segmenti doveva essere uguale al rapporto di numeri interi che esprimevano quante volte il punto era contenuto in ciascuno dei due segmenti. Essi ritenevano che il punto fosse sottomultiplo comune a tutti i segmenti, cioè che tutti i segmenti fossero tra loro commensurabili.

Vediamo quali conseguenze ebbe questa scoperta:

- I Greci non introdussero mai l'irrazionalità tra i numeri. L'irrazionalità per i Greci significò incommensurabilità, cioè incapacità di trovare un sottomultiplo comune a due grandezze: l'aritmetica dunque rimase limitata ai numeri interi e razionali positivi, mentre la geometria poté

accogliere la nuova realtà ed avere nuovi ed importantissimi sviluppi. Per avere i numeri reali irrazionali bisogna aspettare Dedekind (seconda metà del XIX secolo).

- Con la scoperta dell'incommensurabilità il punto non può più essere concepito come occupante una porzione di spazio, ma solo come punto ideale avente sì una posizione, ma privo di estensione e quindi di dimensione. Da ciò segue che la linea è priva di larghezza, la superficie è priva di spessore.
- La scoperta portò al crollo della centralità del concetto di numero. Prima c'era l'illusione di poter riuscire a risolvere i problemi geometrici per via aritmetica, riducendo le proprietà geometriche a proprietà aritmetiche. Tale scoperta causò invece l'espulsione dell'aritmetica dalla geometria.
- La scoperta condusse ad una nuova definizione delle grandezze geometriche, non più come aggregati di monadi, dato che esistono grandezze non aventi un sottomultiplo comune.

Si comprende perciò come dei pensatori successivi (i filosofi della scuola d'Elea), rimettano in discussione tutto il sistema delle monadi: la loro critica, riprendendo e spingendo alle estreme conseguenze il monismo pitagorico, riuscirà da una parte a segnalare le difficoltà di tale principio per la costruzione della fisica, dall'altra a far nascere una geometria veramente razionale, i cui enti sono concepiti per la prima volta come idee, oltrepassanti l'empirico.

# Bibliografia

- [1] Storia della Matematica, Carl B. Boyer, 2009.
- [2] Le radici storiche delle matematiche elementari, Lucas N.H. Bunt, Phillip S. Jones, Jack D. Bedient, Settembre 1983.
- [3] La matematica delle civiltà arcaiche, Livia Giacardi, Silvia Clara Roero, 1979
- [4] Tesi di Laurea: Idee e Metodi della matematica nel loro sviluppo dalla Preistoria all'Ellenismo, Tasca Katia, 1992/1993
- [5] Storia del pensiero matematico, Morris Kline, 1991
- [6] The Pythagorean Proposition, Elisha Scott Loomis, 1927 (Raccolta di 371 dimostrazioni del teorema di pitagora)
- [7] Wikipedia
- [8] Paperino nel mondo della matemagica, Walt Disney, 1959 (cartone animato di divulgazione scientifica)

# Capitolo 4

## Zenone, Platone ed Eudosso

### 4.1 Introduzione

Scopo di questo elaborato è presentare i principali protagonisti della matematica greca che segnarono il passaggio dal pensiero della scuola pitagorica alla stesura di quello che viene considerato il più fortunato manuale di matematica di sempre, ovvero gli *Elementi* di Euclide. Ripercorreremo, dunque, i secoli V e IV a.C., cercando di individuare i maggiori contributi innovativi e rivoluzionari apportati alla matematica dagli studiosi di quegli anni, soffermandoci in particolare su Zenone di Elea, Platone ed Eudosso.

#### 4.1.1 Contesto storico-culturale

Il V secolo a.C. fu un periodo di cruciale importanza per lo sviluppo della civiltà occidentale: esso iniziò con la disfatta degli invasori persiani da parte dei Greci e si concluse con la resa di Atene a Sparta. La vittoria greca non fu solamente una vittoria militare e politica, ma si configurò come la vittoria della visione del mondo occidentale, che si dimostrava capace di pensiero autonomo e costruttore del proprio destino e che, contro la visione statale orientale assolutistica e dispotica, credeva nelle regole del vivere civile e nelle prime forme di democrazia. In particolare, Atene raggiunse il momento più alto della propria storia quando le sorti della città vennero rette da Pericle (ca. 495-429 a.C.), artefice dello sviluppo economico, culturale, e politico della città. Fu infatti con lui che si concretizzò la vera democrazia ateniese. Questa nuova atmosfera attrasse ad Atene scienziati e studiosi da tutto il mondo greco, portando così un grande fermento intellettuale in campo artistico, letterario e scientifico.

Il IV secolo si aprì con la morte di Socrate e vide come suoi protagonisti indiscutibili i filosofi Platone e Aristotele. Fu il secolo delle grandi imprese di Alessandro Magno che, in soli dodici anni, conquistò l'intero Impero Persiano, dall'Asia Minore all'Egitto fino agli attuali Pakistan, Afghanistan e India settentrionale. Le sue vittorie sul campo di battaglia, accompagnate da una diffusione universale della cultura greca e dalla sua integrazione con elementi culturali dei popoli conquistati, diedero l'avvio al periodo ellenistico della storia greca. Il 323 a.C., con la morte improvvisa del grande conquistatore, segnò la fine dell'impero da lui fondato, ma anche la fine di un'era: in tutto il mondo greco il vecchio ordine di cose stava subendo profondi mutamenti, dal punto di vista sia politico sia culturale. Sotto Alessandro si era avuta una graduale fusione di abitudini e mentalità elleniche e orientali e la nuova città di Alessandria, fondata dal grande conquistatore, prendeva il posto di Atene come centro del mondo scientifico e, specificatamente, matematico. E' in questo nuovo contesto che Euclide si ritroverà ad operare, componendo gli *Elementi*, il più fortunato manuale di matematica che sia mai stato scritto.

#### 4.1.2 Contesto matematico

La matematica greca affonda le sue radici nelle cosiddette scuole ionica e pitagorica (VI sec a.C.) e, in particolare, deve molto ai loro fondatori Talete e Pitagora. I principali centri di produzione matematica fino al V secolo a.C. erano dunque situati principalmente in due aree: Mileto e Crotone, sedi delle scuole. Nella seconda metà del V secolo, tuttavia, vi furono testimonianze relative a un gruppo di matematici interessati a problemi di tipo geometrico: l'attività matematica non era più concentrata quasi esclusivamente in due regioni situate agli estremi opposti del mondo greco, ma fioriva un po' dappertutto nelle regioni affacciate sul Mediterraneo.

Per quanto riguarda il V secolo a.C., purtroppo, non ci è giunto alcuno scritto di prima mano concernente la matematica, e quasi altrettanto scarse sono le fonti matematiche dirette risalenti al IV secolo a.C.. Tuttavia, grazie agli scritti platonici e aristotelici, è stato possibile recuperare informazioni riguardanti quei periodi.

Come già annunciato, studieremo la matematica di Zenone, Platone ed Eudosso e le novità da loro apportate, ma prima di fare ciò è necessario inquadrare il contesto matematico antecedente questi pensatori: prima di essi, infatti, predominava la visione pitagorica del mondo. Il pensiero pitagorico può essere ben riassunto dal famoso motto "tutto è numero". Con questa

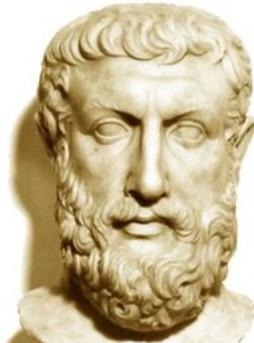
frase i pitagorici intendevano dire che il numero, sempre inteso come numero intero, non è una pura astrazione: è invece un elemento primo costitutivo delle cose, un punto materiale vero e proprio, una unità materiale o “monade”. Ogni materia è composta da tali entità, di grandezza piccola ma non nulla, e dalla configurazione (numero e ordine) di questi punti, fra loro identici e qualitativamente indifferenti, dipendono tutte le proprietà e differenze dei corpi.

Dato questo contesto, risulta dunque facile capire come la scoperta dell'incommensurabilità tra lato e diagonale del quadrato abbia avuto effetti profondi nella visione pitagorica del mondo, tanto che i pitagorici cercarono di tenerla segreta e, come vuole la leggenda, quando Ippaso di Metaponto la divulgò, gli eressero una tomba a vita e attesero la sua morte (che non tardò ad arrivare causa naufragio della nave su cui Ippaso viaggiava). Questa leggenda conferma l'impatto devastante che ebbe la scoperta di grandezze incommensurabili, che demoliva il concetto pitagorico di punto esteso e recava, quindi, un gravissimo colpo non solo a tutta la geometria pitagorica, ma anche al complesso delle dottrine filosofiche di quella scuola, fondati entrambi su tale concetto.

In questa relazione cercheremo dunque di capire come i pensatori successivi (i filosofi della scuola d'Elea), rimettano in discussione tutto il sistema delle monadi: la loro critica, riprendendo e spingendo alle estreme conseguenze le monadi pitagoriche, riuscirà a far nascere una geometria i cui enti sono concepiti per la prima volta come idee, oltrepassanti l'empirico. Alla idealizzazione della geometria è poi profondamente legato il nome di Platone che, con la sua teoria delle idee, astrae la geometria e ne colloca gli oggetti in un altro mondo, parallelo al nostro. Infine considereremo il notevole lavoro di Eudosso che, come vedremo, costruì una nuova teoria dei rapporti, ossia un nuovo modo per confrontare grandezze, indipendente dall'incommensurabilità delle stesse.

## 4.2 Zenone di Elea

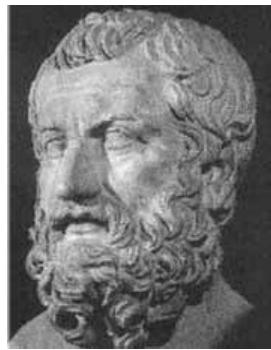
### 4.2.1 Introduzione



Esponiamo qui brevemente il pensiero di Parmenide, maestro di Zenone, del quale quest'ultimo abbracciò la filosofia. Parmenide nacque intorno al 515-510 a.C. ad Elea (nell'odierna Campania), dove poi fonderà la scuola eleatica. Con Parmenide si sviluppò in filosofia l'ontologia, cioè lo studio dell'essere in quanto essere, nelle sue caratteristiche universali; la tesi centrale del suo pensiero è che esiste solo l'essere e il non essere non può esistere, né può essere pensato. Dice infatti Parmenide:

“E’ necessario il dire e il pensare che l’essere sia: infatti l’essere è; il nulla non è.”

Essendo, dunque, l'unica via legittima affermare che l'essere è, Parmenide si pone il problema di definire le caratteristiche essenziali del suo essere, in modo tale che non siano in contraddizione con l'affermazione dell'essere come unica realtà esistente e pensabile. Parmenide, con ragionamento deduttivo, assegna i seguenti attributi all'essere: ingenerato, eterno, immobile, immutabile, unico, omogeneo, finito e sferico. Tra questi, i più importanti per la nostra relazione sono l'unicità e l'immobilità.

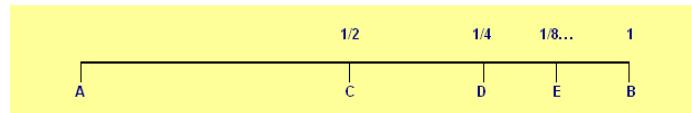


Il principale discepolo di Parmenide fu Zenone, nato ad Elea circa nel 490 a.C.. Egli non fu un vero matematico e sembra che si sia strettamente attenuto agli insegnamenti del maestro, cercando di dimostrare, con sottili argomenti logici, che chiunque si fosse discostato da questi sarebbe caduto in una serie di insanabili contraddizioni. Il metodo seguito da Zenone era dialettico e anticipava Socrate nel modo indiretto di argomentare che, partendo dalle premesse dell'oppositore, le riduceva ad una assurdità (l'odierna dimostrazione per assurdo). La fama di Zenone è comunque ancor oggi dovuta ai suoi celebri paradossi, fra i quali vengono più frequentemente citati quelli relativi al movimento. Cerchiamo dunque di capire cosa siano questi paradossi, di cosa trattino e quali possano essere i significati loro attribuiti dall'autore stesso.

Anzitutto la parola paradosso deriva dalle due parole greche “parà” (contro) e “doxa” (opinione comune), dunque un paradosso è qualcosa che va contro il senso comune, ovvero ciò che comunemente è ritenuto vero. Si noti che nella letteratura greca il termine “doxa” è sempre contrapposto ad “aletheia”, ossia verità pura, ciò che è realmente vero. Risulta dunque naturale chiedersi contro quale credenza comune si stesse scagliando Zenone: si è ipotizzato che i paradossi furono sviluppati contro la concezione pitagorica del tempo e dello spazio, ma, come avremo modo di vedere tra poco, questa è solo una delle tante interpretazioni che gli studiosi attribuiscono ai paradossi.

Ecco dunque i paradossi sul movimento.

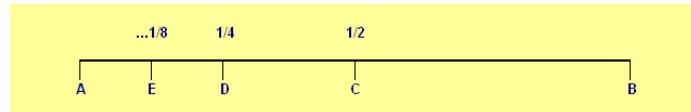
#### 4.2.2 Paradosso della dicotomia



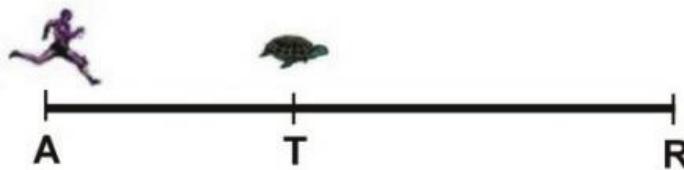
Consideriamo un segmento di estremi  $A$  e  $B$ . Il paradosso dice che per andare da  $A$  a  $B$  bisogna prima passare per il loro punto medio  $C$  e poi per  $D$ , punto medio di  $CB$ , e così via iterando il procedimento all'infinito. Dunque è impossibile andare da  $A$  a  $B$  perchè bisogna passare attraverso infiniti punti.

Inoltre, se si applica il ragionamento al contrario, cioè si considera  $D$  il punto medio di  $AC$ ,  $E$  il punto medio di  $AD$  e così via, non ci si potrebbe neanche muovere, dato che per andare da  $A$  a  $B$  bisogna prima passare per  $C$ , ma prima ancora per  $D$ , ma prima ancora per  $E$  e, come sopra, il ragionamento può essere applicato all'infinito.

Insomma, il corridore che vuole partire deve percorrere un numero infinito di tali suddivisioni in un periodo di tempo finito; ma è impossibile esaurire una collezione di infiniti elementi e pertanto l'inizio del movimento è impossibile.



#### 4.2.3 Paradosso di Achille e della tartaruga



La più antica versione pervenutaci si trova nella Fisica di Aristotele: “Il più lento corridore non sarà mai raggiunto nella sua corsa dal più veloce. Infatti è necessario che l'inseguitore giunga fino al punto da cui è partito il fuggitivo, cosicchè è necessario che il corridore più lento si trovi sempre un po' più avanti.”

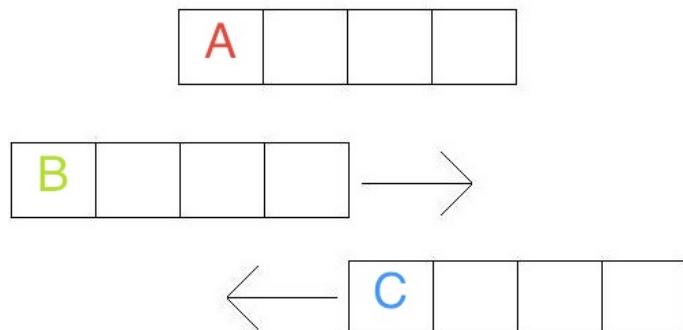
Adesso questo paradosso è conosciuto come una gara di corsa tra il più veloce Achille e la tartaruga, animale lento per antonomasia a cui Achille concede un certo vantaggio alla partenza. Una delle descrizioni più famose del paradosso è quella dello scrittore argentino Jorge Luis Borges: “Achille, simbolo di rapidità, deve raggiungere la tartaruga, simbolo di lentezza. Achille corre dieci volte più svelto della tartaruga e le concede dieci metri di vantaggio. Achille corre quei dieci metri e la tartaruga percorre un metro; Achille

percorre quel metro, la tartaruga percorre un decimetro; Achille percorre quel decimetro, la tartaruga percorre un centimetro; Achille percorre quel centimetro, la tartaruga percorre un millimetro; Achille percorre quel millimetro, la tartaruga percorre un decimo di millimetro, e così via all'infinito; di modo che Achille può correre per sempre senza raggiungerla.”

#### 4.2.4 Paradosso della freccia

Consideriamo una freccia scoccata verso il bersaglio. Mentre vola in aria occupa in ogni istante di tempo uno spazio pari alla sua grandezza, ma ciò che occupa sempre uno spazio uguale a se stesso non è in movimento; pertanto la freccia che vola è in quiete in ogni istante, cosicchè per tutto tempo del suo volo è immobile e il suo movimento è un'illusione.

#### 4.2.5 Paradosso dello stadio



Si considerino tre file: la fila  $A$ , fissa, che rappresenta lo stadio, e le file  $B$  e  $C$ , che si muovono in senso contrario con la stessa velocità  $v$  fino a quando sono allineate con  $A$ .

A			
---	--	--	--

B			
---	--	--	--

C			
---	--	--	--

Qual è la velocità di un punto della fila *C*? Se la si ottiene rispetto ad *A*, allora tale velocità è  $v$ , ma se la si considera rispetto a *B*, la velocità diventa  $2v$  (infatti *C* si è mosso di due quadrati rispetto ad *A* e quattro rispetto a *B*). In questo modo Zenone confuta la tesi di chi riteneva che la velocità fosse un carattere proprio e assoluto del moto. Non è affatto azzardato ipotizzare in questo paradosso il pieno riconoscimento della velocità del moto, tesi sostenuta, tra gli altri, anche da Federigo Enriques.

#### 4.2.6 Possibili interpretazioni

I paradossi di Zenone hanno sempre suscitato stupore e interesse in tutti coloro che si sono impegnati nel ragionamento, citiamo infatti Aristotele: “Quattro sono i ragionamenti di Zenone intorno al movimento, i quali mettono di cattivo umore quelli che tentano di risolverli.” Oltre ad essere stati discussi per secoli dalle più grandi menti, i problemi citati sono ancora attuali, poichè riguardano concetti basilari della scienza matematica e fisica, sui quali non è stato ancora raggiunto un completo accordo fra gli scienziati. Come spesso accade con autori dell’antichità, il cui pensiero ci è pervenuto soltanto attraverso frammenti delle loro opere e testimonianze, filosofi e matematici si sono sbizzarriti a formulare ipotesi su scopi reconditi e significati dei paradossi zenoniani.

Nel corso dei secoli sono state proposte molte interpretazioni anche molto diverse tra loro, vediamone alcune.

- *Paradosso della dicotomia*

Per quanto riguarda il paradosso della dicotomia, una soluzione diffusa per superarlo è dire che basta la conoscenza delle serie, e in particolare di  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ , per vedere che il risultato del processo è 1.

Al tempo dei Greci non erano di certo note le serie, ma non è difficile immaginare che, pur essendo ignari dei rudimenti del calcolo infinitesimale, essi “vedessero” altrettanto bene che ogni somma: un segmento + mezzo segmento + un quarto di segmento + etc. rimane sempre all’interno del segmento doppio. Ed infatti anche lo storico della matematica Attilio Frajese nel suo libro Attraverso la storia della matematica scrive: *È facile mostrare che anche agli albori della scienza matematica dovette essere assai semplice il calcolo della distanza in questione.*

Appare ora evidente che limitarsi a dire che il paradosso della dicotomia era un paradosso perché i greci non avevano criteri per la convergenza di una serie non è corretto; il legame tra la serie e i paradossi è innegabile ma non ne è la soluzione. Lo storico della matematica H. G. Zeuthen ritiene che i primi due paradossi abbiano dato la spinta per il calcolo della somma  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$

- *Paradosso di Achille*

Anche il paradosso di Achille e della tartaruga può essere ridotto a un ragionamento sulle serie. Se consideriamo come dati iniziali quelli proposti da Borges otteniamo che lo spazio  $10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots = 11,1111$ ; se inoltre supponiamo che Achille percorra il tratto iniziale di 10 metri in un secondo otteniamo e il tempo è:  $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots = 1,1111$ . La stessa soluzione si ottiene con un calcolo fisico mettendo a sistema le due equazioni del moto, ma non vale le pena approfondire in quanto non è ciò che Zenone voleva mettere in mostra.

- *Interpretazione di Aristotele*

Un’altra possibile interpretazione consiste nel trasportare il ragionamento da un livello astratto a quello del reale, come fa Aristotele. Egli attacca l’infinita suddivisione di un segmento; dice infatti che nella realtà il ragionamento di Zenone deve fermarsi dopo un numero finito di iterazioni, dato che nel reale vi è un limite alla divisione dello spazio.

- Molti, come ad esempio Carl Boyer, sostengono che lo scopo dei paradossi fosse quello di dimostrare la tesi dell'impossibilità del moto; il loro fine sarebbe dunque quello di dimostrare che accettare la presenza del movimento nella realtà implica contraddizioni logiche ed è meglio quindi, da un punto di vista puramente razionale, rifiutare l'esperienza sensibile ed affermare che la realtà è immobile. Questi paradossi implicano anche il concetto di infinita divisibilità dello spazio ed è questa la ragione per cui hanno ricevuto una notevole attenzione da parte dei matematici.
- Altre interessanti interpretazioni sono date dal guardare i paradossi di Zenone come un confronto tra spazio e tempo. L'idea alla base è che l'intelletto umano non può concepire l'infinita suddivisibilità di un segmento temporale; esso consiste di elementi indivisibili, che vengono denominati istanti, simili ai punti di un segmento spaziale, ma, a differenza dei secondi, i primi appaiono costituiti solamente da un numero finito di istanti. Ciò costringe ad ammettere l'esistenza di un segmento temporale minimo, formato da due soli istanti, uno e il suo successivo. Così, la somma di infiniti segmenti, che coinvolge necessariamente infiniti istanti, non può essere mai un segmento finito. La retta temporale appare formata da istanti separati, ogni istante ha un successivo e un precedente, tra un istante e un altro non si riesce a immaginarne infiniti. Al contrario la retta spaziale è concepita in maniera tale che tra un punto e l'altro ce ne sono sempre infiniti, sicché non c'è alcun modo di introdurre il successivo di un determinato punto. Ossia lo spazio è continuo e il tempo discreto (come sembra indicare il terzo paradosso) e l'intelletto umano scambia l'infinita suddivisibilità dei segmenti della retta spaziale con una corrispondente infinita suddivisibilità degli analoghi segmenti della retta temporale.
- *Interpretazione di Umberto Bartocci*  
Con queste premesse presentiamo l'interpretazione di Umberto Bartocci, ex docente di Storia delle Matematiche presso l'Università degli Studi di Perugia: “Appare impossibile stabilire, per le caratteristiche proprie degli enti coinvolti, una corrispondenza biunivoca tra segmenti di spazio ideale percorso (elaborazioni della pura geometria della retta continua ideale) e associati segmenti di tempo. Ovvero, la nostra mente è costretta a concepire delle posizioni spaziali virtuali che non possono essere

effettive, non possono essere di fatto occupate, non esistendo un istante in cui tale occupazione possa avere luogo. Una coppia ordinata del tipo posizione-istante, o spazio-tempo, è quello che si dice un evento, e potremo allora pure sintetizzare la nostra opinione asserendo che: non ogni posizione spaziale del tragitto di Achille corrisponde a un evento.”

- *Interpretazione di Federigo Enriques*

All’opposto, invece, Federigo Enriques ritiene che i paradossi abbiano una natura solo geometrico-spaziale, senza coinvolgere il tempo: “Il valore dei primi due argomenti ci appare indipendente da ogni considerazione di tempo” e li collega alla critica contro la pluralità dei pitagorici, ossia interpreta i ragionamenti di Zenone non come paradossi contro il moto, ma come una critica contro la tesi monadica dei pitagorici. Scrive infatti che se la linea fosse composta di punti aventi una lunghezza elementare seppur minima, Achille, per raggiungere la tartaruga, dovrebbe percorrere infiniti intervalli, ciascuno dei quali è almeno uguale al minimo di lunghezza, e pertanto lo spazio percorso risulterebbe maggiore di qualunque lunghezza assegnata. Quindi, secondo l’interpretazione di Enriques, Zenone non voleva negare il moto, ma mostrare la sua inconciliabilità con l’ipotesi monadica dello spazio. Ma allora dove è la difesa dell’immobilità dell’essere? Enriques sostiene che la negazione del moto sostenuta da Parmenide (e dunque da Zenone) debba essere intesa nel modo seguente: il moto non significa nulla in sè, è solo una variazione relativa della posizione delle cose; la negazione del moto si riduceva, cioè, alla relatività del moto ed è ciò che il paradosso dello stadio mostra chiaramente. Più in dettaglio, l’interpretazione di Enriques contestualizza l’intera opera della scuola eleatica nella critica alla visione monadica.

Zenone, con ragionamento per assurdo, mostra che, se si ammette che le grandezze geometriche siano costituite di elementi indivisibili ed estesi, allora esse devono essere “piccole fino a non avere grandezza alcuna, grandi fino ad essere infinite”. Inoltre mostra che l’ipotesi della pluralità conduce ad un’altra contraddizione e cioè che una stessa cosa dovrebbe essere allo stesso tempo finita e infinita. Zenone ha dunque demolito la concezione pitagorica e la teoria che deve sostituirla è quella del suo maestro Parmenide. A questo proposito citiamo lo storico della matematica Enrico Rufini nel suo libro *Il metodo di Archimede*. “Nell’opera di Parmenide si afferma per la prima volta il concetto razionale del punto, della

linea e della superficie; la sua critica tende in sostanza a stabilire che gli enti geometrici non possono definirsi che per astrazione, con un processo indefinito di idealizzazione, come limiti del sensibile. Ora questa affermazione costituisce il primo riconoscimento del carattere infinitesimale dei concetti fondamentali della geometria, e quindi può riguardarsi come il primo acquisto dell’analisi infinitesimale.”

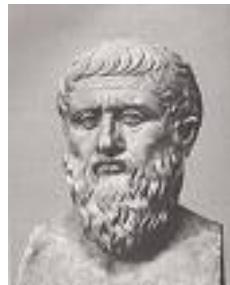
#### 4.2.7 Influsso sulla matematica del tempo

Sembra che le argomentazioni di Zenone abbiano avuto un profondo influsso sulla matematica greca, influsso paragonabile a quello della scoperta delle grandezze incommensurabili, alla quale è possibile che si ricollegassero. Originariamente negli ambienti pitagorici le grandezze venivano rappresentate con sassolini o *calcoli*, ma al tempo di Euclide si era già verificato un completo cambiamento del punto di vista: le grandezze non erano più generalmente associate a numeri o sassolini, ma a segmenti. Negli *Elementi* persino gli stessi numeri interi vengono rappresentati con segmenti. Il regno dei numeri continuava dunque ad avere la proprietà della discontinuità, ma il mondo delle grandezze continue (e ciò comprendeva gran parte della matematica pre-ellenica e pitagorica) costituiva qualcosa di completamente separato dal numero e doveva venire trattato con metodo geometrico. Sembra che fosse la geometria, piuttosto che il numero, a governare il mondo. Non è improbabile che questo grande cambiamento fosse dovuto in larga misura proprio a Zenone.

Oltre agli argomenti trattati è stato importante il metodo utilizzato da Zenone. Egli ha fortemente utilizzato il procedimento di riduzione all’assurdo, che verrà poi sfruttato dai geometri successivi. Per dimostrare una proposizione *A*, si assume come ipotesi che valga la sua negazione, ossia che la proposizione *non-A* sia vera e si trae una serie di conclusioni fino a quando si giunge ad una contraddizione. L’ipotesi che *non-A* sia vera risulta dunque essere falsa e da ciò si conclude che *A* deve essere vera.

Interessante notare come molti argomenti di Zenone furono riscoperti, quasi simultaneamente, dal filosofo cinese del IV secolo a.C. Hui Shi e riportati nell’ultimo capitolo del classico taoista Chuang Tzu, che li critica come parole che non raggiungono il bersaglio, un voler correre più veloci della propria ombra. Uno di questi è praticamente identico al paradosso della dicotomia: “Se ogni giorno si dimezza un bastone lungo un piede, ne rimarrà sempre qualcosa anche dopo diecimila generazioni.”

### 4.3 Platone



Platone, nato ad Atene nel 427 a.C. da famiglia agiata, è stato uno dei pensatori più influenti della storia e a cui dobbiamo buona parte della filosofia occidentale. Fu discepolo di Socrate, compì molti viaggi, soprattutto in Sicilia, e, di ritorno da uno di questi, nel 387 a.C. fondò l'Accademia, la più grande istituzione culturale dell' antica Grecia, che verrà chiusa nove secoli dopo, nel 529 d.C., dall'imperatore Giustiniano.

Sebbene Platone non abbia dato personalmente alcun notevole contributo specifico alla matematica dal punto di vista prettamente tecnico, l'Accademia fu il centro dell'attività matematica di quel tempo, tanto che sulla porta di ingresso della scuola era scritto il motto: "Non entri chi non è geometra". Il suo entusiasmo per la matematica lo rese famoso non come matematico, ma come "creatore di matematici". L'alta considerazione in cui Platone teneva la matematica non gli derivava da Socrate, che di essa si era scarsamente interessato: colui che convertì Platone alla mentalità matematica fu l'amico pitagorico, nonché tiranno di Taranto, Archita.

Platone sosteneva l'esistenza di qualcosa di assoluto ed universalmente valido e che la ragione premesse di coglierlo. Se, infatti, questo qualcosa non esistesse, allora non vi potrebbe essere alcuna conoscenza sicura e non resterebbe che l'opinione sensibile, come sostenevano i sofisti. Noi però abbiamo conoscenza di essenze che non hanno alcun riscontro nella realtà sensibile e che quindi non possono derivare dall'esperienza. Tali sono, ad esempio, i concetti matematici e i giudizi etici. Bisogna perciò ammettere una forma di realtà diversa da quella delle cose sensibili: una realtà immateriale, universale, immutabile ed eterna. Questa realtà è costituita dalle idee (dal greco *eidos*, forma). Emerge dunque una netta distinzione tra il mondo delle idee e il mondo delle cose, chiamato in filosofia dualismo ontologico.

Le idee non sono uniche e Platone le classifica in tre tipologie:

1. idee che si riferiscono ai valori dell'arte, dell'etica e della politica
2. idee corrispondenti agli enti matematici universali
3. idee di oggetti materiali o artificiali ad esempio albero e tavolo

Una volta introdotto il concetto e la classificazione delle idee, ci si può chiedere che rapporto intercorra tra le idee e le cose. Platone stesso si mostra incerto su questo argomento, ma fornisce comunque tre possibili interpretazioni:

1. Relazione di *mimesi*: le cose imitano le idee. Ad esempio il letto prodotto dall'artigiano è costruito a immagine e somiglianza dell'idea di letto, che risponde al requisito fondamentale di essere il luogo fisico ove riposare durante il sonno.
2. Relazione di partecipazione o *metessi*: le cose sensibili prendono parte in qualche misura alla perfezione del mondo ideale, quindi non sono completamente sciolte da esso. Pertanto è attraverso le partecipazioni alla forma del cerchio che le cose sono circolari e analogamente per tutte le altre forme.
3. Presenza o *parusia* delle idee nelle cose: il mondo sensibile altro non è che una rivelazione o espressione visibile di quello ideale. Nelle cose, dunque, le idee si rivelano e acquistano visibilità: ad esempio nel disegno di un cerchio si rivela l'eterna e perfetta idea di cerchio.

Dopo aver descritto le idee, Platone si chiede come sia possibile la conoscenza, dato che le idee vivono in un mondo parallelo al nostro e che dunque i sensi non permettono di conoscere le idee.

Per rispondere a questa domanda bisogna prima parlare del concetto di anima per Platone. Egli la considera come la parte più importante dell'uomo, dotata di personalità intellettuale e morale. La dottrina dell'anima di Platone dipende dalla tradizione pitagorica per la quale essa è un essere divino e immortale che è esistito prima di incarnarsi in un corpo e che esisterà anche dopo la morte fisica di questo. La caratteristica fondamentale dell'anima umana è dunque l'immortalità che, mentre la disgiunge dal corpo e dai sensi, la congiunge al mondo intellegibile delle idee. Il dialogo che affronta il tema dell'immortalità dell'anima è il *Fedone*; l'anima ha un compito da assolvere nel mondo terreno, ma la sua destinazione è estranea all'effimera consistenza dei corpi umani: essa deriva dal mondo delle idee ed è suo destino ritornare

a quel mondo, l'anima e le idee hanno dunque una natura affine. È in questa somiglianza che Platone trova le risposte alla domanda sulla natura della conoscenza: essa non dipende dai sensi quali la vista, l'udito, l'olfatto, il tatto, ma è sempre conoscenza di idee che soltanto l'anima può raggiungere, essendo della loro stessa natura; solo l'anima conosce.

Ora, però, come è possibile che l'anima ottenga la conoscenza delle verità ideali quando è immersa nel corpo e nella realtà dei sensi? La risposta platonica consiste nel dire che l'anima, ancora prima di incarnarsi, ha vissuto una vita divina nel mondo delle idee e ha potuto conoscere tutti gli esempi perfetti delle cose, ossia le idee, forme eterne e universali. Quando poi si è incarnata in un corpo, ha conservato un ricordo sbiadito di quelle verità, che si risveglia a contatto con le cose sensibili di questo mondo. Questa è la celebre dottrina della reminiscenza, che rappresenta il cuore della teoria platonica della conoscenza. Cerchiamo ora di capire come tutta questa teoria si ripercuota nello studio della matematica.

Platone aveva osservato che i veri oggetti della matematica non sono le figure che i matematici disegnano più o meno precisamente, benché nessuno abbia mai visto un vero cerchio o un vero quadrato; la matematica non tratta delle rappresentazioni più o meno adeguate del quadrato astratto che esse cercano di riprodurre. Scrive infatti Platone nella *Repubblica*: “I matematici usano modelli visibili e costruiscono su di essi delle dimostrazioni, ma l'oggetto dei loro ragionamenti non sono quei modelli bensì le realtà che essi rappresentano. Ad esempio il quadrato e la diagonale in quanto tali, e non il particolare quadrato e la particolare diagonale di un disegno.”

In generale, ciò che accomuna figure dello stesso tipo è la loro forma, l'idea. Poichè, inoltre, le idealizzazioni delle figure geometriche posseggono una perfezione che le loro rappresentazioni concrete non possono avere, si può dedurre che le idee sono indipendenti e che vivono in un mondo parallelo a quello sensoriale, che Platone chiama Iperuranio. Le idee geometriche non sono solamente ciò che diverse rappresentazioni di una stessa figura hanno in comune, esse hanno una loro esistenza indipendente. Nell'iperuranio ad esempio c'è il cerchio astratto di cui i cerchi concreti non sono altro che proiezioni e così per tutte le figure geometriche. Le idee matematiche hanno dunque un rapporto di metessi e parusia con le loro rappresentazioni, ossia un cerchio è tale perché partecipa all'idea di cerchio e, viceversa, l'idea perfetta del cerchio si manifesta nel disegno di un cerchio.

Platone riconosceva notevole importanza alla matematica; incluse aritmeti-

ca e geometria tra le quattro materie da studiare per una formazione completa della persona (le altre due erano astronomia e musica) e, come già ricordato, pose un cartello sulla porta d'entrata dell'Accademia che recitava: “Non entri chi non è geometra”.

Tutto ciò influì sui suoi discepoli, molti dei quali diventarono matematici famosi. Citiamo, ad esempio, Eudosso di Cnido, Amicle di Eraclea, Memecmo, Teudio di Magnesia.

#### 4.3.1 I solidi platonici e Teeteto

Platone descrisse le sue idee concernenti i solidi regolari nel dialogo intitolato il *Timeo*, in relazione alla formazione degli elementi, cui associa un solido regolare ciascuno. Platone sostiene che, essendo fuoco, aria, acqua e terra dei corpi, essi sono dotati di spessore e lo spessore è delimitato da superfici piane, che a sua volta è formata da triangoli. Afferma poi che tutti in triangoli nascono da due soli tipi, entrambi rettangoli:

- il triangolo rettangolo isoscele metà del quadrato,
- il triangolo rettangolo scaleno che ha l'ipotenusa doppia rispetto al cateto minore (raddoppiando il quale si ottiene un triangolo equilatero).

Platone denomina questo secondo triangolo “il triangolo più bello”.

1. L'elemento del *fuoco* è il *tetraedro*: si ottiene combinando 4 volte il triangolo equilatero ottenuto a sua volta da 6 triangoli più belli.
2. L'elemento della *terra* è l'*esaedro* (cubo): si ottiene combinando 6 volte il quadrato ottenuto dal triangolo isoscele.
3. L'elemento dell'*aria* è l'*ottaedro*: si ottiene combinando 8 triangoli equilateri ottenuti come per il fuoco.
4. L'elemento dell'*acqua* è l'*icosaedro*: si ottiene combinando 20 triangoli equilateri ottenuti come per il fuoco.

Insomma, a partire dal triangolo, elemento fondamentale, si costruiscono gli elementi del fuoco, dell'aria, dell'acqua e della terra, la cui combinazione li trasmuta l'uno nell'altro come la combinazione delle figure solide. Ad esempio una molecola d'aria è formata da due molecole di fuoco.

Sembra che Platone sia venuto a conoscenza dei cinque solidi regolari proprio a seguito di uno dei suoi incontri con l'amico pitagorico Archita e non è poi escluso che sia stato proprio il culto pitagorico per la figura geometrica del dodecaedro a indurre Platone a considerare questo quinto e ultimo solido regolare come simbolo dell'universo. Platone considerava il dodecaedro come composto di 360 triangoli più belli, infatti, tracciando le cinque diagonali e le cinque mediane di ciascuna delle facce pentagonali, ognuna di queste risulterà formata da trenta di tali triangoli.

Sebbene il Timeo, probabilmente scritto quando Platone era quasi settantenne, fornisca la prima testimonianza precisa circa l'associazione dei quattro elementi con i solidi regolari, può darsi che gran parte di questa concezione altamente speculativa risalga ai pitagorici. A proposito di ciò le fonti sono discordanti: probabilmente la costruzione delle figure cosmiche è attribuibile a Pitagora oppure a Teeteto, amico di Platone. Sembra comunque verosimile che quest'ultimo abbia studiato più a fondo di ogni altro matematico i cinque solidi regolari e forse è dovuto a lui il teorema secondo cui vi sono cinque e solo cinque poliedri regolari. E' inoltre possibile che a lui vada attribuito il merito di aver calcolato i rapporti tra i lati dei solidi regolari e i raggi delle sfere circoscritte, discussi negli *Elementi* di Euclide. Alcuni riferimenti contenuti in opere storiche antiche indicano che Teeteto fece scoperte nel campo della geometria elementare che vennero poi incorporate negli *Elementi*. Gli scritti di Teeteto sono, però, andati perduti.

Riportiamo qui una dimostrazione moderna del seguente

**Teorema 4.3.1.** *I solidi regolari sono cinque.*

*Dimostrazione.* Soltanto il triangolo equilatero, il quadrato e il pentagono regolare possono essere facce di poliedri regolari; infatti in un vertice di un poliedro devono convergere almeno 3 facce che non stiano sullo stesso piano, quindi la somma dei loro angoli deve essere inferiore a  $360^\circ$ .

- Ogni angolo di un triangolo equilatero misura  $60^\circ$ , quindi è possibile far incontrare in un vertice 3 facce ( $3 \cdot 60 = 180$ ) ottenendo un tetraedro regolare, 4 facce ( $4 \cdot 60 = 240$ ) ottenendo un ottaedro regolare e 5 facce ( $5 \cdot 60 = 300$ ) ottenendo un icosaedro regolare.
- Ogni angolo di un quadrato misura  $90^\circ$ : è quindi possibile far incontrare in un vertice 3 facce ( $3 \cdot 90 = 270$ ) ottenendo un cubo.

- Ogni angolo di un pentagono regolare misura  $108^\circ$ . è quindi possibile far incontrare in un vertice 3 facce ( $3 \cdot 108 = 324$ ) ottenendo un dodecaedro regolare.
- Ogni angolo di un esagono regolare misura  $120^\circ$  e quindi 3 facce che si incontrassero in un vertice risulterebbero sullo stesso piano ( $3 \cdot 120 = 360$ ).

Gli argomenti precedenti dimostrano che non possono esistere altri solidi platonici oltre ai cinque considerati, ma non che quei cinque esistano realmente. Una dimostrazione costruttiva dell'esistenza dei cinque solidi platonici è contenuta nell'ultimo libro degli Elementi di Euclide e costituisce la conclusione dell'opera.  $\square$

#### 4.3.2 L'aritmetica e la geometria platoniche

Probabilmente si deve a Platone la distinzione che veniva fatta nella Grecia antica tra l'aritmetica, nel senso di teoria dei numeri, e la logistica, intesa come insieme di regole di calcolo. Per Platone la prima era una disciplina che si addiceva al filosofo, astratta e utile all'esercizio della mente, mentre la seconda era una disciplina di tipo pratico, utile a chi, come l'uomo di guerra e l'uomo d'affari, doveva fare calcoli.

La concezione platonica del numero è così altamente speculativa da sfociare nel misticismo, tant'è che nella *Repubblica* fa riferimento ad un numero che chiama il signore di migliori e peggiori nascite. Si è molto discusso circa questo numero misterioso e, secondo alcuni, si tratterebbe del numero  $60^4 = 12.960.000$ , che aveva avuto molta importanza nelle numerologia babilonese e che Platone forse aveva conosciuto grazie alla mediazione dei pitagorici.

In maniera simile a quanto aveva sostenuto per l'aritmetica, anche nella geometria Platone abbracciava la causa della matematica pura contrapponendola alle idee materialistiche dell'artigiano o del tecnico. A quanto pare Platone era contrario all'uso di mezzi meccanici nelle dimostrazioni geometriche e può darsi che sia dunque stato il principale responsabile della restrizione, nella matematica greca, a quelle costruzioni geometriche che potevano essere effettuate usando solo riga e compasso. Probabilmente la decisione di tale limitazione risiedeva non tanto nella semplicità degli strumenti usati per costruire rette e cerchi, quanto piuttosto nella simmetria delle configurazioni. Ognuno degli infiniti diametri di un cerchio costituisce una retta di simmetria della figura e ogni punto di una retta di estensione infinita può essere concepito

come centro di simmetria, così come qualsiasi perpendicolare alla retta data è una retta rispetto alla quale la retta data è simmetrica. Chiaramente, nella divinizzazione platonica delle idee, risultava naturale assegnare alla retta e al cerchio un ruolo privilegiato fra tutte le altre figure geometriche. Come già osservato, in maniera simile ciò avveniva per il triangolo.

#### 4.3.3 Influsso sulla matematica del tempo

Il ruolo di Platone nella storia della matematica è ancor oggi oggetto di aspre dispute: alcuni lo considerano un pensatore eccezionalmente profondo e incisivo, mentre altri lo dipingono come un pifferaio che adescò i matematici distogliendoli da problemi concernenti la realtà del mondo e incoraggiandoli ad abbandonarsi a oziose speculazioni. In ogni caso, pochi potrebbero negare che Platone abbia avuto un influsso notevole sullo sviluppo della matematica. L'Accademia platonica di Atene diventò il centro mondiale della matematica e fu da questa scuola che provennero i più eminenti insegnanti e studiosi attivi attorno alla metà del IV secolo a.C. Fra costoro il più grande fu Eudosso di Cnido, che era stato per un certo tempo allievo di Platone e che diventò il più famoso matematico e astronomo del suo tempo.

## 4.4 Eudosso

Eudosso (408-355 a.C.), nato a Cnido (sulla costa dell'odierna Turchia), fu studente di Platone ed è considerato il più famoso matematico e astronomo della sua epoca, infatti gli sono attribuiti risultati di grande importanza, fondamentali per il costituirsi della matematica come scienza. Dato che tutti i suoi lavori sono andati persi, la nostre conoscenze su di lui sono ottenute da fonti secondarie. Sappiamo che si occupò del problema della duplicazione del cubo, di numeri interi e che, inoltre, studiò teoria della musica e medicina. A Cnido costruì un osservatorio astronomico e identificò varie costellazioni.

Eudosso fu senza dubbio il più abile matematico dell'età ellenistica: è probabile che il valore aristotelico della misura della circonferenza terrestre sia a lui dovuto (Archimede riferisce che Eudosso aveva calcolato che il diametro del sole era 9 volte maggiore di quello della Terra). Nel suo schema astronomico egli era riuscito a descrivere mediante una combinazione di movimenti circolari il moto dei pianeti lungo orbite aventi la forma di lemniscata sferica. Matematicamente parlando, ad Eudosso si attribuisce la sistemazione critica della teoria delle proporzioni, indipendente dalla commensurabilità delle grandezze, e il così detto “metodo di esaustione”, che consentì un trattamento rigoroso del calcolo delle aree e dei volumi. Cerchiamo dunque di inquadrare questi due problemi nel loro contesto storico e di capire le soluzioni proposte da Eudosso.

### 4.4.1 Teoria delle proporzioni

I pitagorici erano profondamente convinti che la realtà fosse esprimibile in termini di numeri naturali e loro rapporti. Questo era confortato dalle scoperte in campo musicale e astronomico e, geometricamente, si traduceva nel fatto che, dati due segmenti qualunque, questi fossero tra loro commensurabili, ossia o uno è contenuto un numero intero di volte nell'altro oppure esiste un sottosegmento tale che entrambi i segmenti iniziali siano suoi multipli interi.

La scoperta che il lato e la diagonale di un quadrato non sono due grandezze commensurabili fece crollare la loro filosofia: i numeri interi e i loro rapporti non erano più sufficienti a descrivere la natura. Oltre alla fine della concezione pitagorica del mondo come rapporto questa fu una “scoperta imbarazzante perché in numerose dimostrazioni geometriche essi -i Greci- avevano

supposto che, dati comunque due segmenti qualsiasi, esistesse sempre un'unità di lunghezza ad essi comune” come scrive Niven in *Numeri razionali e numeri irrazionali*. Si poneva dunque il problema di trovare un metodo che consentisse di confrontare rapporti tra grandezze incommensurabili.

Prima della scoperta dell'incommensurabilità tra lato e diagonale del quadrato, i Greci consideravano quattro grandezze in proporzione,  $a : b = c : d$ , se i due rapporti  $a : b$  e  $c : d$  avevano la stessa sottrazione reciproca, cioè, in ciascuno dei due rapporti la quantità più piccola poteva essere sottratta da quella più grande lo stesso numero intero di volte, e il resto in ciascun caso può venire sottratto dalla quantità più piccola lo stesso numero intero di volte e il nuovo resto può venire sottratto dal precedente un numero intero di volte e così via.

Facciamo un esempio con le notazioni moderne e mostriamo che  $6 : 22 = 12 : 44$ . Si può sottrarre 3 volte 6 da 22 e avanza 4. Iterando il procedimento si può sottrarre 1 volta il 4 dal 6 e avanza 2; si può sottrarre 2 volte il 2 dal 4 e non avanza alcuna quantità. Il rapporto  $6 : 22$  si vede, dunque, come la sequenza 3, 1, 2. Svolgendo i conti per  $12 : 44$  si ottiene lo stesso risultato 3, 1, 2. Questo procedimento termina quando le grandezze in esame sono commensurabili. Se, invece, vogliamo considerare il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato il procedimento sopra illustrato non termina mai, proprio perché queste due grandezze sono incommensurabili.

Eudosso risponde alla necessità di un nuovo metodo per confrontare grandezze fornendo la seguente definizione, che ci viene tramandata dal libro V degli *Elementi* di Euclide.

**Definizione 4.1.** Si dice che delle grandezze sono nello stesso rapporto, la prima con la seconda e la terza con la quarta, quando, se si prendono equimultipli qualsiasi della prima e della terza, ed equimultipli qualsiasi della seconda e della quarta, i primi due equimultipli superano ugualmente, o sono uguali, o sono ugualmente inferiori ai secondi equimultipli presi in ordine corrispondente.

Riscriviamo con notazione moderna l'enunciato. Il rapporto tra  $a$  e  $b$  è uguale a quello di  $c$  e  $d$ , ossia  $a : b = c : d$ , se, per qualsiasi coppia di numeri interi  $m$  ed  $n$ , si ha:

$$ma > nb \Rightarrow mc > nd$$

$$ma = nb \Rightarrow mc = nd$$

$$ma < nb \Rightarrow mc < nd.$$

La definizione eudossea di uguaglianza di rapporti non è diversa dal processo di moltiplicazione dei medi e degli estremi che viene usato oggi per le

frazioni, ossia  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  se e solo se  $ad = bc$ , un processo che equivale alla riduzione a comune denominatore. Per mostrare, per esempio, che  $\frac{3}{6}$  è uguale a  $\frac{4}{8}$ , moltiplichiamo 3 e 6 per 4 ottenendo 12 e 24, e moltiplichiamo 4 e 8 per 3, ottenendo la stessa coppia di numeri 12 e 24. Avremmo potuto usare 7 e 13 come moltiplicatori, ed avremmo ottenuto la coppia 21 e 42 nel primo caso, e 52 e 104 nel secondo; e come 21 è inferiore a 52, così 42 è inferiore a 104 (abbiamo qui scambiato l'uno con l'altro il secondo e il terzo termine della definizione eudossea per conformarci alle comuni operazione solitamente usate oggi, ma simili relazioni sussistono nell'uno o nell'altro caso).

Il nostro esempio aritmetico, tuttavia, non dà un'idea adeguata della sottigliezza e dell'efficacia del concetto di Eudosso, giacchè l'applicazione fattane qui ha un aspetto banale. Per poter valutare più a fondo la sua definizione sarebbe meglio sostituire  $a, b, c, d$  con numeri irrazionali, oppure, cosa ancora migliore, considerare  $a$  e  $b$  come sfere e  $c$  e  $d$  come cubi costruiti sui raggi delle sfere. Qui una moltiplicazione dei medi e degli estremi diventa priva di senso e l'applicazione della definizione di Eudosso appare tutt'altro che banale. Bisogna dunque ammettere che la notazione moderna di  $a, b, c, d$  è fuorviante poichè induce a pensare a dei numeri, mentre Eudosso parla sempre di "grandezze", non di "numeri", sta definendo l'uguaglianza di rapporti tra grandezze (segmenti) senza parlare di lunghezze; l'unica cosa di cui parla è il multiplo di segmento.

Detto in altre parole, il problema che affronta non è l'irrazionalità di  $\sqrt{2}$ , ma l'incommensurabilità della diagonale rispetto al lato di un quadrato; benchè a prima lettura possano sembrare la stessa cosa, in realtà sono due cose diverse. Il rapporto tra due grandezze, per i Greci, non è un numero: loro esprimono tutto per mezzo di grandezze e quindi definiscono l'uguaglianza di due rapporti, non il rapporto in quanto tale, proprio perchè il rapporto in quanto tale è un numero.

Eudosso dà una definizione di uguaglianza di rapporti che comprende ciò che noi oggi chiamiamo numeri irrazionali, senza mai definirli; la sua teoria delle proporzioni permette quindi di confrontare tutte le grandezze commensurabili e incommensurabili.

#### 4.4.2 Metodo di esaustione

Abbiamo visto nella sezione precedente come fu possibile affrontare con successo, grazie all'immaginazione di Eudosso, la crisi aperta nelle matematica in seguito alla scoperta di grandezze incommensurabili; ma rimaneva aperto

un altro problema, quello del confronto tra configurazioni rettilinee e curvilinee. Sembra che fino ad allora i matematici avessero suggerito l'idea di inscrivere e circoscrivere figure rettilinee attorno alla figura curva e di continuare a moltiplicare indefinitamente il numero dei lati; ma essi non sapevano come concludere il ragionamento, poiché a quel tempo era ancora sconosciuto il concetto di limite. Secondo le fonti, fu ancora una volta Eudosso a fornire la chiave di volta necessaria per risolvere il problema in questione, infatti Archimede attribuisce ad Eudosso la formulazione della proposizione (talvolta nota come assioma di continuità) che serviva come base per il metodo di esaustione:

**Lemma 4.4.1** (Assioma di continuità). *Date due grandezze aventi un certo rapporto (cioè, nessuna delle quali sia zero) è possibile trovare un multiplo dell'una che superi l'altra grandezza.*

Partendo da questo Eudosso ricavò la seguente

**Proposizione 4.4.2** (Proprietà di esaustione). *Se da una qualsiasi grandezza si sottrae una parte non inferiore alla sua metà, e se dal resto si sottrae ancora non meno della sua metà, e se questo processo di sottrazione viene continuato, alla fine rimarrà una grandezza inferiore a qualsiasi grandezza dello stesso genere precedentemente assegnata.*

*Dimostrazione.* Siano  $AB$  e  $c$  due grandezze disuguali di cui  $AB$  la maggiore. Dico che se da  $AB$  si sottrae una grandezza maggiore della metà e da ciò che resta una grandezza più grande della metà e se questa operazione si ripete successivamente, resterà una certa grandezza che sarà minore di  $c$ .

Infatti, se  $c$  viene moltiplicata, può risultare maggiore di  $AB$ . Si supponga di averla moltiplicata e sia  $DE$  multiplo di  $c$  e maggiore di  $AB$ ; si divida  $DE$  nelle parti  $DF$ ,  $FG$ ,  $GE$  uguali a  $c$ ; da  $AB$  si sottragga  $BH$  maggiore della sua metà; da  $AH$ ,  $HK$  maggiore della sua metà e si ripeta questa operazione continuamente, finché si sia diviso  $AB$  nello stesso numero di parti in cui è divisa  $DE$ .

Siano dunque le parti  $AK$ ,  $KH$ ,  $HB$ , uguali di numero alla parti  $DF$ ,  $FG$ ,  $GE$ ; poiché  $DE$  è maggiore di  $AB$ , se da  $DE$  togliamo  $GE$  e da  $AB$  togliamo  $BH$  più grande della sua metà, ne segue che il resto  $DG$  è maggiore del resto  $AH$ , poiché

$$DE > AB \Rightarrow DG = \frac{2}{3}DE > \frac{1}{2}DE > \frac{1}{2}AB > AH.$$

E poichè  $DG$  è maggiore di  $AH$ , se da  $DG$  togliamo la metà  $GF$  e da  $AH$  togliamo  $KH$  più grande della sua metà, ne segue che il resto  $DF$  è maggiore del resto  $AK$ , poichè

$$DG > AH \Rightarrow DF = \frac{1}{2}DG > \frac{1}{2}AH > AK.$$

Ma  $DF$  è uguale a  $c$ ; dunque anche  $c$  è maggiore di  $AK$ . Quindi  $AK$  è minore di  $c$ . Dunque dalla grandezza  $AB$  resta la grandezza  $AK$  che è più piccola della grandezza minore assegnata  $c$ ; ciò che si doveva dimostrare. [Elementi di Euclide, libro X]  $\square$

Con questo teorema si riuscì a stabilire la misura dell'area di figure curvilinee con sempre maggiore approssimazione; qualsiasi figura non rettilinea poteva infatti essere analizzata attraverso il metodo di esaustione, suddividendo le figure rettilinee ad essa circoscritte o inscritte in intervalli sempre più piccoli, in modo da raggiungere una migliore precisione.

Per illustrare il modo in cui Eudosso probabilmente usava il suo metodo, diamo qui, in notazione abbastanza modernizzata, la dimostrazione del seguente

**Teorema 4.4.3.** *Le aree dei cerchi stanno tra loro come come i quadrati sui rispettivi diametri.*

*Dimostrazione.* Siano i cerchi  $c$  e  $C$ , con diametri  $d$  e  $D$  e aree  $a$  e  $A$ . Si deve dimostrare che  $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ . La dimostrazione viene effettuata procedendo indirettamente ed escludendo le uniche altre possibilità, ossia  $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$  e  $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ . Assumiamo dunque dapprima che  $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ . Deve allora esservi una grandezza  $a' < a$  tale che  $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ . Sia  $a - a'$  una grandezza preassegnata  $\epsilon > 0$ . All'interno dei cerchi  $c$  e  $C$  vengano inscritti poligoni regolari di area  $p_n$  e  $P_n$ , aventi lo stesso numero  $n$  di lati, e si considerino le aree intermedie che si trovano all'esterno dei poligoni, ma all'interno dei cerchi. Se raddoppiassimo il numero dei lati, è evidente che da queste aree intermedie sottrarremmo più della metà. Di conseguenza, in virtù della proprietà di esaustione, è possibile ridurre le aree intermedie attraverso raddoppiamenti successivi del numero dei lati (ossia, aumentando  $n$ ) fino a che  $a - p_n < \epsilon$ . Allora, poichè  $a - a' = \epsilon$ , abbiamo  $p_n > a'$ . Ora, in base a teoremi precedenti, sappiamo che  $\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$ , e poichè avevamo assunto che  $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ , abbiamo  $\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A}$ . Pertanto se  $p_n > a'$ ,

come abbiamo dimostrato, dobbiamo allora concludere che  $P_n > A$ . Dal momento che  $P_n$  è l'area di un poligono inscritto all'interno del cerchio di area  $A$ , è evidente che  $P_n$  non può essere più grande di  $A$ . poichè una conclusione falsa implica una falsa premessa, abbiamo escluso la possibilità che  $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ . In maniera analoga possiamo escludere la possibilità che  $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ , stabilendo così il teorema secondo cui le aree dei cerchi stanno tra loro come i quadrati costruiti sui rispettivi diametri. [*Elementi* di Euclide, libro XII, prop. 2]  $\square$

Sembra che la proprietà appena dimostrata sia il primo esempio di teorema esatto riguardante le grandezze di figura curvilinee. Questo farebbe di Eudosso il fondatore del calcolo integrale, il che costituisce il massimo contributo dato alla matematica da un membro dell'Accademia.

## 4.5 Il concetto di infinito nel pensiero greco

Il termine greco che esprime il concetto di infinito è apeiron (a-non, péiron-limite), che propriamente significa indeterminato, indefinito, illimitato.

Anassimandro (VI sec. a.C.) fu il primo ad introdurre, secondo la tradizione filosofica, il termine archè, ossia principio, che identificò con l'apeiron, cioè con una sorta di infinito indefinito da cui scaturiscono tutte le cose. Il processo di derivazione dall'apeiron consiste in una separazione dei contrari (caldo freddo; umido secco; ...) che Anassimandro chiamò ingiustizia, poichè ogni nascita equivale ad una colpevole separazione dalla sostanza originaria e richiede l'espiazione della morte, per ricongiungersi con essa. L'apeiron è ritenuto elemento divino, in quanto forza immortale ed indistruttibile, che abbraccia e regge l'universo.

Anassagora (V sec. a.C.) scrisse un'opera intitolata *Sulla natura*, in cui sosteneva che nulla si genera dal non-essere, ma che tutto viene dal tutto. Secondo lui, in origine tutto era mescolato, la nascita delle cose avveniva per separazione da altre cose ed esisteva poi un infinito numero di principi.

I pitagorici ammettevano l'infinito, unitamente al finito, come la prima delle dieci coppie di contrari o principi costitutivi delle cose, ma nella coppia finito-infinito il secondo termine designava il non-essere e l'imperfezione.

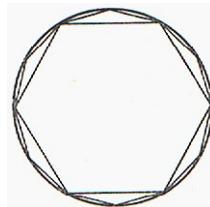
Parmenide aveva considerato l'essere finito e lo aveva descritto come un sfera; il suo discepolo Melisso di Samo giunse invece alla conclusione che l'essere stesso dovesse considerarsi infinito, non dovendo esso ammettere null'altro fuori di sé. Egli si chiese cosa sarebbe successo se una persona avesse potuto raggiungere il bordo della sfera e allungare il braccio all'esterno nel non-essere, e ne dedusse che ciò non poteva accadere. Il terzo grande esponente della scuola di Elea fu Zenone, di cui abbiamo parlato precedentemente. Ricordiamo solo che i suoi paradossi erano basati sull'infinita divisibilità geometrica dello spazio e sull'infinito regresso logico del ragionamento.

Il regresso infinito del ragionamento fu usato dagli scettici per argomentare a favore dell'impossibilità delle dimostrazioni e delle definizioni; Aristotele sostenne, invece, che dimostrava la necessità di assiomi e nozioni primitive.

Gli epicurei furono gli unici filosofi greci che, richiamandosi anche a Democrito, accolsero una concezione a suo modo positiva dell'infinito, in quanto, identificandolo con il vuoto, ne fecero, assieme agli atomi, la condizione originaria dell'universo e del suo divenire.

La tendenza prevalente era, tuttavia, rappresentata dalla teoria della potenza e dell'atto di Aristotele. Secondo questi, infatti, la potenza indicava la

possibilità da parte della materia di subire un cambiamento, ad esempio il legno può diventare sedia. L'atto, invece, indicava l'esistenza stessa dell'oggetto, ossia la cosa nella sua presenza attuale e concreta, ad esempio la sedia su cui adesso sono seduto. Secondo gli aristotelici l'infinito esisteva solo in potenza, non in atto. Prendiamo ad esempio l'insieme dei poligoni iscritti nella circonferenza:



Questo è evidentemente un insieme illimitato, nel senso che per ogni poligono con un numero arbitrariamente grande di lati, esiste un poligono successivo con lati ancora più piccoli che a sua volta non coinciderà con la circonferenza ma ammetterà dopo di sè un ulteriore poligono: è proprio la definizione di Aristotele, l'infinito è qualcosa al di là del quale si trova sempre qualcos'altro. Allo stesso modo in cui l'apeiron, l'illimitato, non ammette alcun termine finale, ma solo un infinito sviluppo, l'insieme dei poligoni non può comprendere un termine conclusivo che coincida con la circonferenza.

Teeteto (V secolo a.C.) fu forse il primo matematico a caratterizzare i numeri naturali. Egli stabilì che, a partire dall'uno, ogni numero ha un unico successore e che ogni successore è ancora un numero. Queste due proprietà sono oggi note come il secondo e il quinto assioma di Peano. Inoltre sapeva che questa serie è infinita e che tutti i numeri sono compresi in questa serie. Il processo di contare è un altro esempio di infinito in potenza, non sarà mai possibile vederlo come processo in atto; lo stesso Aristotele scriveva "Il numero è infinito in potenza, ma non in atto". Euclide riuscì a dimostrare che anche il sottoinsieme dei numeri naturali formato dai numeri primi è infinito ed Eratostene fornì un metodo per trovarli tutti.

I Greci continuarono comunque a rifiutare l'idea di un infinito in atto e a collegare all'infinito un'idea di imperfezione.

# Bibliografia

- [1] Ivan Niven, *Numeri razionali e numeri irrazionali*, Zanichelli 1968.
- [2] F. Enriques e G. De Santillana, *Storia del pensiero scientifico Vol. I*, Treves-Treccani-Tuminelli 1932
- [3] Domenico Massaro, *La comunicazione filosofica*, Paravia 2002
- [4] Paolo Zellini, *Breve storia dell'infinito*, Adelphi 1996
- [5] Richard Courant, Herbert Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Universali Bollati Boringhieri 2000.
- [6] Imre Toth, *Aristotele e i fondamenti assiomatici della geometria*, Vita e Pensiero 1998.
- [7] Enrico Rufini, *Il metodo di Archimede*, Feltrinelli 1926.
- [8] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Feltrinelli 1926.

# Capitolo 5

# Euclide

di Mario Leone

## 5.1 Contesto storico e filosofico

Nel *Prometeo Incatenato*, Eschilo, uno dei tre più grandi scrittori classici, presenta Prometeo come l' eroe che ha consentito agli uomini l' inizio del progresso, insegnando loro l' uso del fuoco e molte altre cose utili. In un passo Prometeo dice “E anche i numeri, la più importante delle scienze, ho inventato per loro”. Queste righe, scritte nel 465 a.C. circa, rendono testimonianza della grande stima che gli antichi Greci avevano per l' aritmetica: la matematica veniva considerata come una dimostrazione di umanità, una manifestazione di cultura e di civiltà superiori.

Gli antichi Greci, specialmente i pitagorici, chiamavano col nome di aritmetica la loro scienza dei numeri, termine che venne esteso anche a tutto ciò che allora aveva carattere algebrico.

Eudemo di Rodi ritiene che i Greci abbiano appreso l' aritmetica dai Fenici, attraverso il commercio. I tassi di cambio di valuta devono aver avuto un ruolo importante nell' economia greca. Il denaro fu introdotto attorno al 600 a.C. e il suo uso si diffuse gradualmente tra le città-stato greche. Gli standard di peso per le monete d' argento erano diversi tra le varie città-stato, e ciò creava la necessità di un meccanismo per cambiare le diverse monete.

Tuttavia il calcolo numerico concreto non era considerato una scienza: si chiamava “logistica”, ed aveva una valutazione inferiore. La matematica greca non volle aver alcun contatto con la pratica: doveva essere esercitata e mantenuta

nell' ambito mentale, doveva essere bandita dal mondo dell' esperienza per aspirare ad essere chiamata scienza. Con ciò venne assicurata la sua validità generale e la sua potenza di generalizzazione.

Non sappiamo, perciò, quanto l' aritmetica di Euclide sia legata al commercio, ma sappiamo che ha alle spalle queste considerazioni filosofiche: ciò che troviamo nei libri di aritmetica di Euclide è matematica fine a sè stessa, come la parte geometrica degli *Elementi*.

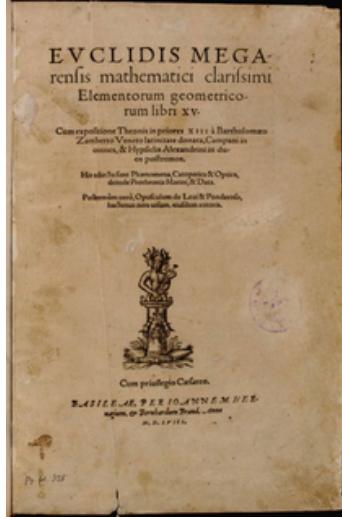
Possiamo aggiungere un' altra considerazione importante: all' inizio dell'epoca alessandrina l' atmosfera culturale del mondo greco richiedeva la fine dello "scandalo della matematica" seguito agli attacchi del genere dei paradossi di Zenone. Per affrontare questo compito c' era soltanto la via tracciata dalla logica di Aristotele: la costruzione di una vera scienza mediante una rigida sistematica, non la trattazione della matematica come una raccolta di argomenti a sè stanti. Tutto doveva elevarsi passo passo, a partire dalle radici, e una verità doveva necessariamente derivare dall' altra. Fu Euclide ad eseguire questo compito. L' esposizione degli *Elementi* è organizzata proprio secondo questi canoni: all' inizio vengono enunciati tutti gli assiomi, poi tutte le definizioni e infine i teoremi concatenati in modo ordinato, a partire dai più semplici fino a quelli sempre più complessi.

L' uso dell' astrazione nel considerare i problemi geometrici ravvicina notevolmente la trattazione di Euclide al metodo algebrico. L'uso di lettere per indicare segmenti ed aree, il fatto che il testo, che pur ricorre all' immagine geometrica, riesce completamente comprensibile anche senza la figura, e il prescindere dai valori numerici particolari per mezzo della simbologia geometrica, conferiscono alla trattazione di Euclide un carattere algebrico. Solo la mancanza di uno strumento algebrico costringe talvolta Euclide a ricorrere ad esempi particolari e a lasciare al lettore il compito della generalizzazione (come accade, ad esempio, per la dimostrazione della proposizione IX.20 sulla quantità dei numeri primi). Neppure i matematici posteriori, come Diofanto e gli Arabi, sono riusciti a superare questo grado dell' astrazione matematica: una più alta generalità si raggiunge appena nel Rinascimento.

## 5.2 Biografia.

Nel 306 a.C., dopo le guerre interne che susseguirono la morte di Alessandro Magno, il controllo della parte egizia dell'impero era ormai saldamente nelle mani di Tolomeo I (367 a.C.-283 a.C.). Tra i suoi primi decreti ci fu

l'istituzione ad Alessandria, centro economico ed intellettuale del mondo ellenistico, di una scuola, nota come *il Museo*, che non aveva pari a quel tempo. Ad insegnare in questa scuola chiamò un gruppo di imminenti studiosi tra cui Euclide. Nonostante la vasta fama degli *Elementi*, le notizie della vita di Euclide sono molto scarse, tanto che, nel Medioevo e nel Rinascimento, fu identificato erroneamente con Euclide di Megara, un allievo di Socrate. L'immagine qui sotto è il frontespizio di un'edizione degli *Elementi* risalente al XVI secolo in cui il matematico alessandrino è confuso con Euclide di Megara.



Non si conosce neanche il luogo di nascita per cui viene identificato come Euclide di Alessandria, dato che fu qui chiamato per insegnare la matematica. Euclide è menzionato in un brano di Pappo (320 d. C.), ma la testimonianza più importante su cui si basa la storiografia che lo riguarda viene da Proclo (412-485), che lo colloca tra i piú giovani discepoli di Platone:

*'Non molto piú giovane di loro Ermotico di Colofone e Filippo di Medma e Euclide; egli raccolse gli Elementi, ne ordinò in sistema molti di Eudosso, ne perfezionò molti di Teeteto, e ridusse a dimostrazioni inconfutabili quelli che suoi predecessori avevano poco rigorosamente dimostrato. Visse al tempo del primo Tolomeo, perché Archimede, che visse subito dopo Tolomeo primo, cita Euclide; e anche si racconta che Tolomeo gli chiese una volta se non ci fosse una via piú breve degli Elementi per apprendere la geometria; ed egli rispose che per la geometria non esistevano vie fatte per i re. Euclide era dunque piú*

*giovane dei discepoli di Platone, ma piú anziano di Eratostene e di Archimede che erano fra loro contemporanei, come afferma in qualche luogo Eratostene. Per le idee Euclide era platonico e aveva molto familiare questa filosofia, tanto che si propose come scopo finale di tutta la raccolta degli Elementi la costruzione delle figure chiamate platoniche”*

(Proclo, Comm. Eucl., II, 68).

Controversa è invece la notizia secondo cui sarebbe stato un platonico convinto. Oggi prevale anzi la tendenza a considerare questo giudizio come privo di fondamento (Heat (1956), Enriques, Neugebauer, Russo (1997)(1998), Migliorato-Gentile, Migliorato) e dettato verosimilmente dal desiderio di Proclo di annettere il più grande matematico dell'antichità alla schiera dei neoplatonici a cui lo stesso Proclo apparteneva. Le leggende lo dipingono come un uomo vecchio e dal temperamento gentile.

Euclide non dava molta importanza agli aspetti pratici della sua disciplina. Si racconta infatti che, quando un allievo gli chiese che utilità avesse lo studio della geometria, Euclide si rivolse al suo schiavo dicendogli di dare all'allievo una monetina perché ha bisogno di trarre guadagno da ciò che impara.



### 5.3 Opere di Euclide.

Euclide e gli *Elementi* vengono spesso considerati come sinonimi anche se in realtà egli è anche autore di una dozzina di trattati concernenti vari argomenti: dall'ottica all'astronomia, dalla musica alla meccanica, sino a un libro sulle sezioni coniche.

Con la sola eccezione della *Sfera* di Autolico (360 a.C.-290 a.C.) le opere



Figura 5.1: Particolare della scuola di Atene di Raffaello del 1509 in cui Euclide è intento ad insegnare.

esistenti di Euclide sono i più antichi trattati matematici greci che ci siano rimasti, nonostante più della metà di ciò che scrisse Euclide sia andato perduto.

## 5.4 Opere perdute.

Tra le opere perdute vi è un trattato sulle coniche in cui Euclide riconosceva grande merito ad Aristeo, un geometra contemporaneo che aveva scritto un trattato sui *Luoghi Solidi* (termine greco utilizzato per indicare le sezioni coniche). Entrambi tali trattati sono andati perduti; la causa di tale perdita può forse essere attribuita al fatto che essi vennero presto sostituiti dall'importante e ampia opera di Apollonio sulle coniche.

Tra le altre opere perdute ci sono una sui *Luoghi superficiali*, un'altra sugli *Pseudaria* (=false conclusioni) e una terza sui *Porismi*. Dalle testimonianze antiche per o non risulta chiaro neppure quale fosse il loro contenuto.

Il trattato sui *Luoghi superficiali* potrebbe riguardare le superficie note agli antichi (la supercie della sfera, del cono, del cilindro, del toro, dell'elissoide di rivoluzione, il paraboloide di rivoluzione e l'iperboloide di rivoluzione a due falde) o forse le curve giacenti su esse. Per quello che ne sappiamo i greci non studiarono altre superfici oltre a quelle dei solidi di rivoluzione. La perdita dei *Porismi* è particolarmente grave; tale opera forse dava l'idea di quanto Euclide si fosse avvicinato alla geometria analitica. Pappo più tardi riferiva che un porisma era qualcosa di mezzo tra un teorema, in cui si propone la dimostrazione

di qualcosa, e un problema, in cui si propone la costruzione di qualcosa. Altri invece hanno descritto un porisma come una proposizione in cui si determina una relazione tra quantità note e quantità variabili o indeterminate, ciò che forse nell'antichità più si avvicina al concetto di funzione. Se un porisma era, come si è pensato, una sorta di equazione verbale di una curva, il libro di Euclide sui *Porismi* differiva probabilmente dalla nostra geometria analitica, in gran parte, per la mancanza di simboli e dell'uso di tecniche algebriche. Lo storico della geometria Michel Chasles (1793-1880) suggeriva come tipico porisma euclideo la determinazione del luogo dei punti per ognuno dei quali è costante la somma dei quadrati delle distanze da due punti prefissati.

## 5.5 Opere pervenuteci.

Cinque sono invece le opere pervenute sino a noi:

- gli *Elementi*
- i *Dati*
- la *Divisione delle figure*
- i *Fenomeni*
- l'*Ottica*

L'opera L'*Ottica* è interessante in quanto è uno dei primi trattati sulla prospettiva, ossia come veniva chiamata dai greci “la geometria della visione diretta”. L'*Ottica* di Euclide è notevole per l'esposizione di una teoria emissiva della visione secondo la quale l'occhio emette raggi che attraversano lo spazio fino a giungere agli oggetti. Tale concezione si opponeva alla dottrina di Aristotele secondo la quale una sorta di azione si trasmetteva attraverso un mezzo in linea retta dall'oggetto all'occhio. Uno degli obiettivi dell'*Ottica* era quello di combattere il concetto epicureo secondo il quale le dimensioni di un oggetto erano quelle che apparivano alla vista, senza tener conto del rimpicciolimento dovuto alla prospettiva.

I *Fenomeni* di Euclide era un'opera simile alla *Sfera* di Autolico, ossia un'opera di geometria sferica ad uso degli astronomi. Un confronto tra i due trattati ci mostra come entrambi gli autori derivassero gran parte del loro materiale dalla tradizione manualistica nota alla loro generazione. È abbastanza probabile che la stessa cosa valga anche per gli *Elementi*, ma in questo caso non ci è rimasta

nessun'altra opera contemporanea con la quale possa essere confrontata.

La *Divisione delle figure* sarebbe andata perduta se non fosse stato per gli arabi. Infatti il testo originale greco è andato perduto, ma prima della sua scomparsa ne fu fatta una traduzione araba (che trascurava alcune delle dimostrazioni originali per la loro “facilità”) la quale fu a sua volta tradotta in latino e infine nelle principali lingue moderne. Tale opera comprende una raccolta di trentasei proposizioni concernenti la divisione di figure piane. Per esempio la Proposizione 1 chiede di costruire una retta che sia parallela alla base del triangolo e divida il triangolo in due aree uguali (e così via).

Abbastanza simile per natura e finalità alla *Divisione delle figure* è l'opera di Euclide intitolata *Dati*, che ci è pervenuta sia nella versione greca originale che nella traduzione araba. Sembra che tale opera sia stata composta per essere usata al Museo come sussidiario ai primi sei libri degli *Elementi*. Doveva servire come guida all'analisi di problemi di geometria al fine di scoprire le dimostrazioni e come un insieme di esercizi per ripassare e applicare gli *Elementi*. Tale trattato si apre con quindici definizioni riguardanti grandezze e luoghi; nel seguito comprende novantacinque proposizioni, le quali ricordano allo studente le implicazioni dei dati contenuti nel problema. Ad esempio le prime due proposizioni affermano che, se sono date due grandezze  $a$  e  $b$ , allora è dato anche il loro rapporto, e che, se sono dati una grandezza e il suo rapporto con una seconda grandezza, anche la seconda grandezza è data. Vi sono oltre venti proposizioni del genere, le quali servono come regole o formule algebriche. Seguono poi semplici regole geometriche concernenti rette parallele e grandezze proporzionali, come ad esempio l'avvertenza che, quando due segmenti hanno un dato rapporto, si conosce allora il rapporto delle aree di figure simili costruite su quei segmenti. Alcune proposizioni costituiscono l'equivalente geometrico della soluzione di equazioni di secondo grado.

## 5.6 Gli Elementi

### Introduzione

La matematica che conosciamo è costituita come un sistema di assiomi, definizioni e proposizioni. Tendiamo a un tale sistema se concepiamo la matematica come un'entità astratta indipendente dalle cose materiali e dalle figure concrete, secondo il suggerimento di Platone. In questo modo, dato che non è più consentita una dimostrazione empirica della verità delle proposizioni, è necessario dimostrare le proposizioni attraverso un ragionamento logico; bi-

sognerà quindi dedurle da proposizioni già dimostrate, procedendo in questo modo a ritroso fino al raggiungimento degli assiomi. Un'altra conseguenza della separazione logica della matematica dal mondo materiale è che il significato di un nuovo concetto non può essere ricavato con il solo aiuto di una figura: per ogni nuovo concetto occorrerà invece dare un'esatta definizione. Questa concezione platonica non influì soltanto su Euclide, ma influì tutta la cultura greca seguente. I greci infatti accettarono l'idea che la conoscenza matematica potesse essere acquisita solo per mezzo del ragionamento e costruirono la geometria su questo principio. Ad un insieme di proposizioni matematiche basate su assiomi essi dettero il nome di *Elementi*; secondo Proclo, un insieme di *Elementi* venne compilato da Ippocrate di Chio circa 100 anni prima di Euclide. Dopo di lui, molti altri matematici greci si dedicarono alla redazione di simili sistemi. In ogni caso però i più antichi *Elementi* il cui contenuto sia giunto sino a noi sono gli *Elementi* di Euclide.

Sebbene non gli siano attribuite importanti scoperte, dalla sua opera possiamo dedurre che egli era un eccellente insegnante; espose infatti i principi della matematica in modo tale che essi sono diventati comprensibili agli studenti di ogni epoca. Gli *Elementi* non erano, come talvolta si è pensato, un riassunto di tutte le conoscenze geometriche del tempo; era invece un manuale introduttivo che abbracciava tutta la matematica elementare. Si noti infatti che l'arte del calcolo non è presente dato che questa era considerata come base inferiore; e neppure lo studio delle coniche o delle curve piane è contenuto in tale compendio, poichè costituiva una branca più avanzata della matematica. Euclide stesso non aveva alcuna pretesa di essere originale, ed è chiaro che egli attinse a piene mani dalle opere dei suoi predecessori, nonostante si ritenga che la disposizione della materia sia opera sua, e presumibilmente qualche dimostrazione fu sviluppata da lui stesso. Quindi il trattato euclideo vuole e si limita a presentare una sobria esposizione, logicamente strutturata, degli elementi fondamentali della matematica elementare.

È probabilmente per la grande utilità degli *Elementi*, che essi sono giunti fino a noi. Tuttavia, come è accaduto per tutte le opere greche, il testo originale è andato perduto. Esso venne copiato innumerevoli volte e vi furono aggiunti commenti esplicativi e modifiche al testo, e tali aggiunte vennero copiate da scrivani posteriori come se facessero parte del testo originale. Per questo motivo non è più possibile ricostruire il testo originale in ogni dettaglio dato che alcune di queste aggiunte compaiono in ognuno dei manoscritti oggi esistenti. Nel Medio Evo gli *Elementi* diventarono noti in Europa occidentale grazie agli

arabi e diventarono i fondamenti della educazione matematica. Si conoscono più di mille edizioni degli *Elementi*; con ogni probabilità essi sono, insieme con la Bibbia, il libro più di uso di tutta la civiltà del mondo occidentale. La prima edizione a stampa degli *Elementi* uscì a Venezia nel 1482 e fu uno dei primi libri matematici stampati, da allora in poi ci furono più o meno un migliaio di edizioni.

Le principali opere matematiche ellenistiche osservavano un ferreo silenzio sulle proprie fonti, poichè ogni trattato generale cancellava qualsiasi traccia di quelli precedenti in quanto ogni nuova e più completa esposizione rendeva superfluo fare delle copie delle altre, inoltre la situazione così favorevole dal punto di vista di diffusione e conservazione delle opere in Alessandria ha garantito il successo degli *Elementi* a discapito di ogni altra opera matematica minore.

### 5.6.1 La struttura.

Euclide cercò di attenersi al principio espresso da Platone secondo cui la conoscenza matematica può essere acquisita solo per mezzo del ragionamento. Perciò, nessuna proprietà può essere dedotta dalla figura; si dovrà invece dare una esatta dimostrazione di ogni proprietà.

Euclide fu però anche influenzato da Aristotele. Secondo Aristotele una scienza deduttiva è basata su due tipi di proposizioni la cui verità è accettata senza dimostrazione (la loro verità doveva essere così manifesta da evitare ogni possibile dubbio):

- Nozioni comuni: verità generali valide in tutte le scienze deduttive; (ad esempio: se quantità uguali vengono sottratte quantità uguali, le restanti risultano uguali).

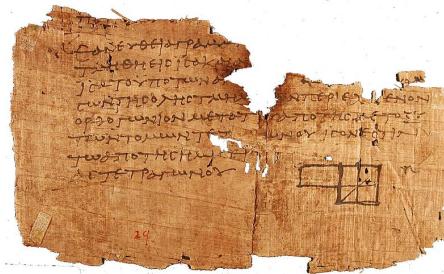


Figura 5.2: Frammento di papiro contenente alcuni elementi della geometria di Euclide.

- Nozioni specie che: verità che sono alla base delle particolari scienze deduttive; (ad esempio: per due punti passa una retta).

Le nozioni specifiche sono di due tipi: quelle che definiscono il significato dei concetti fondamentali e quelle che stabiliscono l'esistenza dei concetti fondamentali.

Aristotele distingue quindi due tipi di concetti: i concetti fondamentali e quelli che sono da essi derivati.

- I concetti fondamentali non possono essere definiti. Le loro proprietà essenziali vengono formulate nell'ambito di nozioni specifiche. Esempi di concetti fondamentali sono: punto, linea, retta, superficie e piano.
- I rimanenti concetti devono essere definiti, partendo dai concetti fondamentali. Dapprima si considera un concetto che sia già noto (il “genus proximum”) a cui si aggiungono dei requisiti specifici(*differentiae specificae*). Ad esempio: “genus proximum”: triangolo; ‘*differentiae specificae*’: due lati sono uguali; → nuovo concetto: triangolo isoscele).

Vedremo che Euclide ha cercato di costruire il suo sistema in accordo con i requisiti precisati da Aristotele.

Gli Elementi sono costituiti da 13 Libri i quali possono essere distinti nel seguente modo:

- Libri I-VI: geometria piana elementare;
- Libri VII-IX: teoria dei numeri;
- Libro X: gli incommensurabili;
- Libri XI-XIII: geometria solida.

Questa relazione verterà sui primi sei libri, i rimanenti libri verranno trattati nella relazione successiva.

### 5.6.2 Libro I.

#### Termini.

Non c'è nessuna introduzione o preambolo all'opera; il Libro I inizia bruscamente con un elenco di ventitré "termini". Termini è la traduzione letterale della parola greca *οποι*, che si può anche tradurre come "concetti" o "definizioni". Non indica però il concetto attuale di definizione in quanto Euclide applica la visione aristotelica secondo la quale ogni scienza deduttiva deve partire da un certo numero di concetti fondamentali e il loro significato deve essere espresso in nozioni specifiche. Perciò le prime sette "definizioni" non sono propriamente definizioni, ma devono essere considerate nozioni specifiche che precisano il significato dei concetti fondamentali che in esse appaiono. Tali concetti fondamentali sono: punto, linea, retta, superficie e piano.

- I** Un punto è ciò che non ha parti.
- II** Una linea è lunghezza senza larghezza.
- III** Le estremità di una linea sono punti.
- IV** Una linea retta è una linea costituita in modo uniforme dai suoi stessi punti.
- V** Una superficie è ciò che possiede solamente lunghezza e larghezza.
- VI** Le estremità di una superficie sono linee.
- VII** Una superficie piana è una superficie che è costituita in modo uniforme dalle sue stesse linee.

La prima Definizione descrive ciò che si deve intendere per punto: un punto viene concepito come qualcosa che non ha dimensione, qualcosa di immateriale.

Dalla seconda Definizione si ricava che anche una linea, è qualcosa di immateriale: essa non è un filo sottile ma "lunghezza senza larghezza" e un analogo ragionamento vale per una superficie. Riporto alcune definizioni alternative di retta:

Platone: "La retta è quella linea di cui la parte media ombreggia gli estremi." Proclo: "La retta è quella linea che rimane immobile quando sono fermi i suoi

estremi.”

Archimede e poi Legendre: “La retta è la linea più breve tra due punti.”

Il significato delle Definizioni IV e VII è vago. Euclide può avere pensato che un’asta è rettilinea se nessun suo punto ne sporge: in tal caso l’asta viene vista di profilo come un punto solo. In modo analogo la Definizione VII potrebbe significare che una superficie piana è vista come una linea retta quando viene osservata di profilo.

Euclide prosegue con una serie di definizioni in cui viene esposto il significato dei concetti derivati.

**VIII** Un angolo piano è la inclinazione reciproca di due linee in un piano che si incontrano e non giacciono in una stessa retta.

**IX** Quando le linee che definiscono l’angolo sono rette, l’angolo è detto rettilineo.

**X** Quando una linea retta che interseca un’altra linea retta determina due angoli adiacenti che sono congruenti tra di loro, ciascuno degli angoli congruenti è retto, e la linea retta che interseca l’altra è chiamata perpendicolare alla retta che interseca.

**XV** Un cerchio è una figura piana contenuta da una linea tale che tutte le linee rette che cadono su di essa, partendo da un punto fra quelli che giacciono dentro la figura, sono tra di loro congruenti.

**XXIII** Si dicono parallele le linee rette che, appartenendo al medesimo piano, prolungate indefinitamente in entrambe le direzioni, non si incontrano reciprocamente in alcuna direzione.

Nella Definizione VIII viene definito l’angolo tra due linee, che non sono necessariamente rette, poiché l’angolo rettilineo è definito solo nella Definizione IX. La Definizione VIII non è però formulata nel modo prescritto da Aristotele. La ‘inclinazione reciproca di due linee’ non è, infatti, un genus proximum che sia già stato precedentemente definito e non è più noto del termine “angolo”. La Definizione IX è la prima che soddisfa i requisiti aristotelici di una definizione. Secondo tale definizione, un angolo rettilineo è un angolo che è formato da due linee rette. Qui angolo è il “genus proximum”; e la ‘differentiae specificae’ che fa dell’angolo rettilineo un caso particolare dell’angolo definito prima è che le due linee che lo costituiscono sono rette.

Anche la Definizione X è in accordo con i requisiti aristotelici. Infatti un

angolo retto è un tipo particolare di angolo rettilineo (*genus proximum*) che possiede la proprietà che le due rette formano due angoli adiacenti che sono congruenti (“*differentiae specificae*”). I successivi termini definiscono l’angolo ottuso ed acuto, il cerchio, il centro ed il diametro di un cerchio, il semicerchio, il poligono e diversi tipi di triangoli e quadrilateri.

L’elenco delle Definizioni termina con la definizione di rette parallele. Si noti che con il termine ‘linea retta’ Euclide si riferisce non ad una linea retta infinita, ma ad un segmento (si veda la Definizione III, dove i punti sono le estremità di una linea). Nella Definizione XXIII egli chiama perciò paralleli due segmenti complanari che non posseggono punti in comune, anche se indefinitamente prolungati. Sembra quindi che la linea illimitata non venga mai concepita nella sua interezza, bensì come linea potenzialmente prolungabile quanto occorre.

Dalla nostra analisi dei termini risulta che le prime definizioni date da Euclide, richiamano concetti mai definiti prima, quali “parte”, ‘lunghezza’, ecc.., mentre le successive definizioni richiamano dei concetti o degli enti già definiti in precedenza. Per chiarire dunque il significato di ‘definizione’ seguiamo la *Critica alla definizione* di F. Enriques.

Egli infatti spiega che esistono due diversi tipi di definizioni: quelle reali e quelle nominali, le prime servono ad introdurre i concetti fondamentali e le seconde vengono introdotte strada facendo. Diremo dunque che la definizione reale non è una definizione logica, ma soltanto una definizione psicologica, cioè un modo per far sorgere un concetto nella mente altrui, per mezzo di immagini opportunamente rievocate ed associate. Pertanto la più precisa e tipica definizione reale è la definizione concreta che si dà del nome di un oggetto, mostrando l’oggetto stesso e pronunziando insieme la parola che lo denota.

### **Postulati e nozioni comuni.**

Dopo le definizioni, Euclide elenca cinque postulati e cinque nozioni comuni. Aristotele aveva fatto una netta distinzione tra assiomi (o nozioni comuni) e postulati: i primi devono essere convincenti di per se stessi e devono essere verità comuni a tutte le scienze, mentre i postulati riguardano soltanto la disciplina in questione. Alcuni autori di epoca posteriore utilizzavano il termine assioma per ciò che era noto o veniva accettato come evidente, e il termine postulato per far riferimento a qualcosa che doveva essere richiesto.

I manoscritti rimastici non sono concordi su questo punto, e in alcuni casi le dieci supposizioni compaiono tutte insieme in un’unica categoria. Oggi i

matematici moderni non fanno alcuna differenza essenziale tra un assioma e un postulato.

### Postulati.

Euclide fonda i suoi Elementi su cinque postulati. Alcuni postulati iniziano con “e”, che significa “si postuli che”.

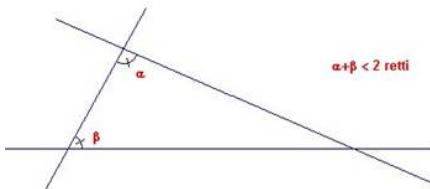
**I** Si postuli quanto segue: di tracciare una linea retta da un punto qualsiasi ad un punto qualsiasi.

**II** E di prolungare una linea retta in modo continuo in una linea retta.

**III** E di descrivere una circonferenza con centro e distanza qualsiasi.

**IV** E gli angoli retti sono reciprocamente congruenti.

**V** E, se una linea retta cade su due linee rette rendendo gli angoli interni da una stessa parte minori di due angoli retti, le due linee rette, se indefinitamente prolungate, si incontrano dalla stessa parte dove si trovano i due angoli minori di due angoli retti.



Il primo Postulato afferma che qualsiasi punto può essere congiunto con qualsiasi altro per mezzo di un segmento rettilineo. Nella moderna terminologia si può tradurre in questo modo: per due punti qualsiasi può essere tracciata una linea retta.

Il secondo Postulato dice che un segmento può sempre essere esteso, e come risultato del prolungamento si ottiene un altro segmento di maggiore lunghezza; quindi il segmento prolungato può essere a sua volta prolungato e così via. Possiamo vedere che il termine linea retta nei Postulati corrisponde al nostro concetto di segmento rettilineo. Il concetto di linea retta, nel senso di un segmento rettilineo infinito, non si trova nei Postulati.

Nella moderna terminologia tale postulato si può tradurre in questo modo:

una linea retta è di estensione infinita. Nel Postulato III si afferma che vi sono circonferenze e che una circonferenza è determinata dal centro e dal raggio. Aristotele aveva scritto che essendo uguali le altre cose è migliore quella dimostrazione che procede da un minor numero di postulati. Euclide evidentemente condivideva questo principio. Infatti il Postulato III viene interpretato in senso strettamente letterale e viene descritto talvolta come l'uso del compasso euclideo (pieghevole), le cui aste mantengono una apertura costante fintanto che le punte toccano la carta, ma si richiudono l'una sull'altra quando vengono sollevate. Ossia, il postulato non viene interpretato nel senso di permettere l'uso di un compasso rigido per segnare una distanza, uguale a un segmento rettilineo, su un altro segmento rettilineo più lungo che non sia contiguo. Successivamente, nelle prime tre proposizioni del Libro I si dimostrerà che quest'ultima costruzione è sempre possibile, anche dando una interpretazione ristretta al Postulato III.

Questi primi tre postulati seguono quindi la visione aristotelica. I primi tre Postulati devono essere considerati come nozioni specifiche nelle quali viene asserita la costruibilità dei concetti fondamentali di segmento rettilineo, retta e circonferenza.

I Postulati IV e V invece differiscono in modo così evidente dai primi tre, che ci si deve chiedere perché Euclide li abbia inclusi tutti in un unico elenco.

I primi tre Postulati sono postulati di esistenza e dunque nozioni specifiche nel senso aristotelico. Ciò non è più vero per i Postulati IV e V. Nel IV Postulato l'esistenza degli angoli retti non è enunciata, ma ci viene richiesto di ammettere che tutti gli angoli retti sono congruenti. Nel V Postulato invece dobbiamo ammettere che due linee rette, che soddisfano certi requisiti, posseggono un punto di intersezione. Questi due postulati non sono quindi totalmente in accordo con la visione aristotelica; infatti i Postulati IV e V non sono nozioni comuni, poichè essi fanno riferimento esclusivamente alla geometria; non si tratta neppure di nozioni specifiche, poichè il loro scopo non è di precisare il significato o di stabilire l'esistenza di taluni concetti fondamentali del sistema geometrico. Se Euclide fosse rimasto aderente alle prescrizioni aristoteliche, avrebbe tralasciato i Postulati IV e V. È naturale quindi chiedersi perché egli gli aggiunse. La risposta è semplice. Egli non vedeva alcun modo di costruire il suo sistema di geometria piana senza accettare i Postulati IV e V; ne vedeva la possibilità di dimostrare la loro veridicità per mezzo di una dimostrazione rigorosa. Così non gli rimase altra scelta che l'accettazione di tali Postulati, e poichè essi sono in modo specifico proprietà geometriche le quali vengono

accettate senza dimostrazione, e ragionevole elencarle insieme con i Postulati. Una delle questioni più celebri dell'intera storia della matematica è il problema della dimostrabilità del quinto postulato di Euclide detto anche “postulato delle parallele”, ovvero la possibilità di provare tale postulato sfruttando esclusivamente gli altri postulati della geometria euclidea. Appare innaturale dubitare della verità di quanto esso afferma, come potrebbe infatti accadere che da un punto esterno ad una retta data sia possibile tracciare ben due distinte rette parallele alla stessa? L'esperienza quotidiana ricondotta al tavolo da disegno sembra impedirlo.

Eppure, dal punto di vista strettamente teorico, centinaia di infruttuosi tentativi, disseminati in due millenni di storia della matematica, portarono ad ammettere che è impossibile dimostrare che la parallela tracciata ad una retta per un punto esterno ad essa è l'unica retta parallela a quella retta condotta per quel punto. Solo nel XIX secolo si giunse alla conclusione che il quinto postulato era indimostrabile e sulla sua negazione furono fondate quelle conosciute come “geometrie non euclideanee”. Riassumendo si possono distinguere i cinque postulati in due specie:

- Postulati di esistenza nei quali si ammette la costruibilità di concetti fondamentali (I,II,III);
- Postulati nei quali si ammette che alcune figure geometriche presentino specifiche proprietà (IV,V).

### Nozioni comuni.

Euclide enuncia ora cinque nozioni comuni che costituiscono la base di tutto il pensiero deduttivo.

**I** cose uguali a una medesima cosa sono uguali anche tra loro;

**II** se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, gli interi sono uguali;

**III** se cose uguali vengono sottratte da cose uguali, i resti sono uguali;

**IV** cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una all'altra;

**V** l'intero è maggiore della parte.

## Proposizioni.

Il primo libro degli *Elementi* contiene 48 proposizioni che hanno per oggetto la congruenza dei triangoli, le rette parallele e le aree. Nelle prime tre proposizioni Euclide si preoccupò di mostrare che anche una interpretazione molto restrittiva del Postulato 3 ammette che si possa usare liberamente il compasso come si fa di solito per riportare le distanze in geometria elementare. Analizziamo tale proposizione e vediamone una dimostrazione letterale data da una versione critica dell'opera (edizione teubneriana dell'Opera Omnia di Euclide), in cui l'autore ha cercato di rimanere fedele alle particolarità del testo greco.

**II** Porre sul punto dato una retta uguale alla retta data.

*Dimostrazione.* Sia il punto dato  $A$  la retta data  $B\Gamma$ : si deve pertanto porre sul punto  $A$  una retta uguale alla retta data  $B\Gamma$ . Sia infatti stata congiunta dal punto  $A$  fino al punto  $B$  una retta  $AB$ , e sia stato costruito su di essa un triangolo equilatero  $\Delta AB$  [Proposizione1], e siano state prolungate in linea retta con  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  rette  $AE$ ,  $BZ$ , e con centro  $B$  e intervallo  $B\Gamma$  sia stato tracciato un cerchio  $\Gamma H\Theta$ , e di nuovo con centro  $\Delta$  e intervallo  $\Delta H$  sia stato tracciato un cerchio  $H\Lambda K$ . Poichè dunque il punto  $B$  è centro del cerchio  $\Gamma H\Theta$ ,  $B\Gamma$  è uguale a  $BH$ . Di nuovo, poichè il punto  $\Delta$  è centro del cerchio  $K\Lambda H$ ,  $\Delta\Lambda$  è uguale a  $\Delta H$ , delle quali  $\Delta A$  è uguale a  $\Delta B$ .  $A\Lambda$  restante è quindi uguale a  $BH$  restante. E fu anche dimostrata  $B\Gamma$  uguale a  $BH$ : una e l'altra delle  $A\Lambda$ ,  $B\Gamma$  è quindi uguale a  $BH$ . E gli uguali allo stesso sono anche uguali tra loro: anche  $A\Lambda$  è quindi uguale a  $B\Gamma$ . Risulta quindi posta sul punto dato  $A$  una retta  $A\Lambda$  uguale alla retta data  $B\Gamma$ : il che si doveva fare.  $\square$

Facendo una traduzione moderna di tale dimostrazione ci viene naturale usare il termine congruente dove invece Euclide parla di uguaglianza. Euclide però non assegna una lunghezza ad un segmento rettilineo o una misura ad un angolo. La nozione di uguaglianza in Euclide deve essere interpretata nel senso che i segmenti rettilinei ed angoli uguali possono essere spostati nel piano fino a quando essi non coincidono.

Si nota però che nelle sue dimostrazioni Euclide spesso fa uso di Postulati non espressi. Nella prima proposizione degli Elementi, per esempio, egli assume, senza dimostrarlo, che due cerchi si intersechino in un punto. Per questo e altri casi simili è necessario aggiungere ai postulati un ulteriore Postulato equivalente al principio di continuità. Inoltre, i Postulati I e II, così come vengono

espressi da Euclide, non garantiscono, ossia non comportano necessariamente, né la unicità della retta che passa per due punti non coincidenti né la sua infinitezza: essi asserisco semplicemente che ce n'è almeno una e che essa non ha termini. Tuttavia Euclide nelle sue dimostrazioni fa uso liberamente della unicità e infinitezza di tale retta.

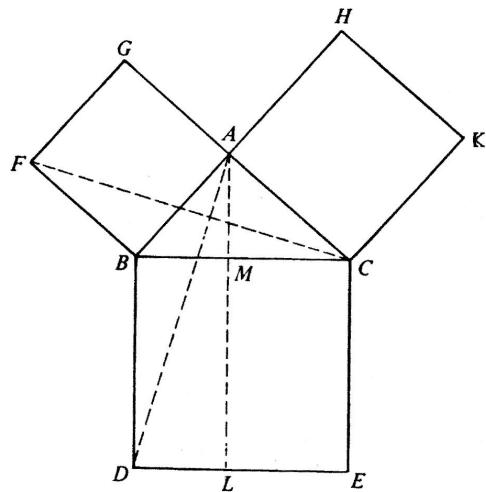
È, naturalmente, facile criticare l'opera alla luce degli sviluppi successivi e dimenticare che i criteri di rigore mutano con i tempi. Al tempo di Euclide gli Elementi costituivano evidentemente la più rigorosa e razionale sistemazione logica della matematica elementare che fosse mai stata elaborata, e avrebbero dovuto passare duemila anni prima che ne venisse effettuata una sistemazione più rigorosa. Per tutto questo lungo periodo la maggior parte dei matematici considerarono la trattazione euclidea soddisfacente dal punto di vista logico e efficace dal punto di vista pedagogico.

Il Libro I si chiude (Proposizioni 47 e 48) con la dimostrazione del teorema di Pitagora e del suo inverso. La dimostrazione del teorema come viene data da Euclide è diversa da quella che si trova solitamente nei manuali attuali, in cui si applicano semplici proporzioni tra i lati dei triangoli formati dall'altezza che viene abbassata sull'ipotenusa che risultano essere simili.

È stata avanzata l'ipotesi che Euclide avrebbe evitato una dimostrazione del genere a causa delle difficoltà implicite nella commensurabilità. Soltanto nel Libro V Euclide espone i fondamenti della teoria delle proporzioni, ma fino a quel punto l'uso delle proporzioni viene evitato nella misura del possibile. Per il teorema di Pitagora Euclide si servì invece di una elegante dimostrazione basata su una figura che viene descritta talvolta come un mulino a vento.

**XLVII** Nei triangoli rettangoli il quadrato sul lato che sottende l'angolo retto è uguale ai quadrati sui lati che comprendono l'angolo retto.

*Dimostrazione.* Sia  $ABC$  il triangolo dove  $\hat{A}$  è un angolo retto. Si costruiscano i quadrati  $AGFB$ ,  $BDEC$ ,  $CKHA$  (Proposizione 46). Si tracci per  $A$  una retta parallela a  $BD$  (Proposizione 31); essa interseca  $DE$  in  $L$  e  $BC$  in  $M$ . Si tracci  $AD$  e  $CF$ . Si deduce che  $\hat{BAC} + \hat{BAG} = \pi$  e quindi  $AG$  è il prolungamento di  $CA$ . Si può quindi dimostrare che i due triangoli  $BCF$  e  $BDA$  sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli. Inoltre per la proposizione 41 (Se un parallelogramma ed un triangolo hanno la stessa base e sono compresi tra le stesse rette parallele, allora il parallelogramma è doppio del triangolo) si ha che  $DBML \doteq 2(DBA)$  e che  $ABFG \doteq 2(CBF)$ . Da cui  $DBML \doteq ABFG$ . In modo simile si può dimostrare che  $ECML \doteq ACKH$ . Segue quindi che  $DBCE \doteq ABFG + ACKH$ .  $\square$



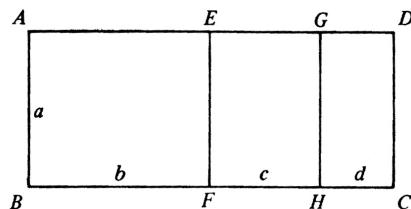
Si nota che Euclide se vuole mostrare che due figure hanno la stessa area, può farlo solamente mostrando che la prima figura può essere divisa in parti tali che, se composte insieme in un determinato modo, esse producono la seconda figura. Egli infatti non indica né le lunghezze dei segmenti rettilinei, né le aree delle figure con dei numeri. A Euclide va attribuito il merito di aver fatto seguire immediatamente al teorema di Pitagora una dimostrazione del suo inverso: “Se in un triangolo il quadrato costruito su uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati, l’angolo compreso tra questi due lati è un angolo retto”. Dopo Euclide, il teorema di Pitagora ha ricevuto molte diverse dimostrazioni, come ad esempio da Leonardo da Vinci, dal matematico indiano Bhāskara e dal matematico inglese Wallis, per questo teorema sono state classificate dallo scienziato americano Elisha Scott Loomis 371 differenti dimostrazioni, che sono state pubblicate nel 1927 nel suo libro *The Pythagorean Proposition*.

### 5.6.3 Libro II.

Il Libro II degli Elementi è breve: contiene soltanto quattordici proposizioni, nessuna delle quali compare oggi nei moderni manuali. Tuttavia al tempo di Euclide questo libro aveva grande importanza. Mentre oggi le grandezze vengono rappresentate da lettere che si intendono come numeri (noti o ignoti) su cui operiamo secondo le regole dell’algebra, al tempo di Euclide le grandezze

venivano concepite come segmenti che soddisfacevano gli assiomi e i teoremi della geometria. Si afferma talvolta che i greci non ebbero l'algebra, ma tale affermazione è chiaramente infondata. Essi avevano il Libro II degli Elementi, che contiene un'algebra geometrica che serve più o meno agli stessi scopi della nostra algebra simbolica. Non c'è alcun dubbio che l'algebra moderna renda enormemente più agevole la trattazione di relazioni fra grandezze, ma seppur l'algebra geometrica degli antichi non era uno strumento ideale, era tutt'altro che inefficace. Vediamone un esempio

**I** Se vi sono due linee rette, una delle quali è divisa in un numero qualsiasi di parti, il rettangolo contenuto dalle due linee rette è uguale in area ai rettangoli contenuti dalla linea indivisa e dalle diverse parti della linea secata.



Questo teorema, che asserisce che  $AB(AE+EG+GD) = AB \cdot AE + AB \cdot EG + AB \cdot GD$ , non è altro che l'espressione geometrica della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:  $a(b+c+d) = ab + ac + ad$ .

Nel secondo libro vengono quindi presentate per via geometrica molte delle proprietà algebriche che noi oggi conosciamo, come ad esempio il quadrato di un binomio o la differenza di quadrati.

#### 5.6.4 Libri III e IV.

Si conviene che il contenuto dei primi due libri degli *Elementi* sia in gran parte un compendio delle nozioni scoperte dai pitagorici.

I libri III e IV, invece, trattano la geometria del cerchio che probabilmente Euclide ha attinto da Ippocrate di Chio. In questo libro vengono presentati teoremi sulle posizioni reciproche tra una retta e un cerchio e tra due cerchi, sulle proprietà delle corde e delle tangenti, sulle relazioni tra angoli e archi e tra angoli al centro e angoli alla circonferenza.

Nella prima proposizione, per esempio, vi è la costruzione del centro di un cerchio; l'ultima proposizione contiene il noto teorema secondo il quale, se da un punto esterno a un cerchio si tracciano una tangente e una secante, il quadrato costruito sulla tangente è uguale al rettangolo formato dall'intera secante e dal suo segmento esterno.

Il Libro IV contiene sedici proposizioni in gran parte ben note agli studenti d'oggi, le quali trattano come inscrivere e circoscrivere ad un cerchio un triangolo, un quadrato, un pentagono regolare e come costruire un esagono e un pentadecagono (15 lati) inscritti in un cerchio.

### 5.6.5 Libro V

Fra i tredici libri degli Elementi, quelli che hanno suscitato l'ammirazione dei matematici sono il V e il X, l'uno concernente la teoria generale delle proporzioni e l'altro la classificazione degli incommensurabili. La scoperta di grandezze incommensurabili aveva minacciato di aprire una crisi che metteva in dubbio dal punto di vista logico ogni dimostrazione che facesse ricorso all'idea di proporzionalità. La crisi era però stata evitata con successo da Eudosso con l'enunciazione dei suoi principi. Nonostante il risultato di Eudosso, i matematici greci tendevano a evitare il ricorso alle proporzioni. Abbiamo visto che Euclide non ne ha fatto uso finché ha potuto: una relazione fra lunghezze quale  $x : a = b : c$  veniva concepita come una uguaglianza delle aree  $cx = ab$ . Prima o poi, però, sarebbe stato necessario usare le proporzioni e perciò Euclide affronta questo problema nel Libro V degli Elementi.

Alcuni commentatori hanno avanzato l'ipotesi che tutto il libro, consistente in venticinque proposizioni, sarebbe opera di Eudosso, ma ciò sembra poco verosimile.

La Definizione 4 è essenzialmente l'assioma di Eudosso e Archimede: Si dice che due grandezze stanno in rapporto l'una con l'altra, quando, se ne sono presi multipli, sono in grado l'una di superare l'altra. La Definizione 5, concernente la uguaglianza di rapporti, è esattamente la definizione eudossea di proporzionalità.

Il V Libro si apre con proposizioni che sono equivalenti alle proprietà distributive sinistra e destra della moltiplicazione rispetto all'addizione, alla proprietà distributiva sinistra della moltiplicazione rispetto alla sottrazione e alla proprietà associativa della moltiplicazione  $(ab)c = a(bc)$ . Seguono poi le regole per le espressioni ‘maggiore di’ e “minore di”, e le ben note proprietà delle proporzioni.

Viene spesso affermato che l'algebra geometrica dei greci non poteva andare al di là del secondo grado nella geometria piana, ne al di là del terzo grado nella geometria solida. Ma le cose non stanno esattamente così. La teoria generale delle proporzioni avrebbe permesso di operare con prodotti di qualsiasi numero di dimensioni: infatti un'equazione della forma  $x^4 = abcd$  è equivalente a una equazione che comporta prodotti di rapporti fra segmenti, come  $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{x} = \frac{c}{x} \cdot \frac{d}{x}$ .

### 5.6.6 Libro VI

Dopo aver sviluppato nel Libro V la teoria delle proporzioni, Euclide ne fa uso per dimostrare teoremi riguardanti rapporti e proporzioni relativi a triangoli, parallelogrammi o altri poligoni simili. Notevole è la Proposizione 31, che rappresenta una generalizzazione del teorema di Pitagora:

**XXXI** Nei triangoli rettangoli, la figura costruita sul lato che sottende l'angolo retto è uguale alle figure simili e similmente costruite sui lati che contengono l'angolo retto.

Proclo attribuisce questa generalizzazione allo stesso Euclide. Questo Libro contiene anche (nelle Prop. 28 e 29) una generalizzazione del metodo di applicazione delle aree: infatti ora l'autore era in grado di usare liberamente il concetto di proporzione.

In questo libro sono contenuti anche i due famosi teoremi di Euclide sui triangoli rettangoli:

- 1º **Teorema di Euclide** In un triangolo rettangolo il cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa.
- 2º **Teorema di Euclide** In un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti relative sull'ipotenusa.

### 5.6.7 Teoria dei numeri

Nei libri VII-VIII-IX vediamo sorgere una teoria generale dei numeri: i temi principali trattati sono la differenza tra numeri primi e numeri composti, le proporzioni, il massimo comune divisore, sequenze di numeri in proporzioni geometriche, la geometria dei numeri (numeri piani e solidi, quadrati e cubi), la dimostrazione della quantità infinita dei numeri primi, e infine la teoria elementare dei numeri pari e dispari.

## Libro VII

Il libro VII inizia con delle definizioni che serviranno per tutto il libro e per i due successivi. Le prime 5 definizioni sono descrizioni dei concetti di base di unità, numero e “misura” di un numero (che per Euclide significava dividere), analoghe alle definizioni di base del primo libro.

DEFINIZIONE VII.1: *Unità è ciò secondo cui ciascun ente è detto uno.*

DEFINIZIONE VII.2: *Numero è una pluralità composta da unità.*

Tale definizione dimostra che per numero intendeva sempre numero naturale maggiore di 1: l’unità non era considerata un numero, in quanto quest’ultimo è una *pluralità* composta da unità. Un numero è una particolare grandezza e può essere rappresentato da un segmento.

DEFINIZIONE VII.3: *Un numero è parte di un [altro] numero, il minore di quello maggiore, quando esso misuri il maggiore.*

DEFINIZIONE VII.11: *Numero primo è quello che è misurato soltanto dall’unità.*

DEFINIZIONE VII.12: *Numeri primi fra loro sono quelli che hanno soltanto l’unità come misura comune.*

DEFINIZIONE VII.13: *Numero composto è quello che è misurato da qualche numero.*

Le definizioni VII.16-19 riguardano “forme geometriche” dei numeri (“numero piano” è il prodotto di due numeri chiamati “lati”; “numero cubo” è il prodotto di tre “lati”, “quadrato” è il prodotto di due lati uguali; , “cubo” è il prodotto di tre lati uguali). Nella VII.20 è definita la proporzionalità tra numeri:

DEFINIZIONE VII.20: *[Quattro] numeri sono in proporzione quando il primo è lo stesso multiplo, o la stessa parte, o le stesse parti, del secondo, che il terzo rispetto al quarto.*

Tradotto in formule moderne ciò significa che  $a : b = c : d$  se

$$a = kb \quad \text{e} \quad c = kd$$

o

$$a = \frac{1}{n}b \quad \text{e} \quad c = \frac{1}{n}d$$

o

$$a = k \frac{1}{n}b \quad \text{e} \quad c = k \frac{1}{n}d.$$

Ossia per determinare se  $a : b = c : d$  è vera, basta trovare una coppia di numeri  $k$  e  $n$  tali che

$$a = k \frac{1}{n} b \quad \text{e} \quad c = k \frac{1}{n} d.$$

DEFINIZIONE VII.21: *Numeri piani e solidi simili [fra loro] sono quelli che hanno i lati proporzionali.*

Ad esempio, sono *simili* i due numeri piani

$$6 = 2 \cdot 3 \quad \text{e} \quad 24 = 4 \cdot 6,$$

infatti i lati 2 e 3 dell' uno e i lati 4 e 6 dell' altro sono in proporzione:

$$2 : 4 = 3 : 6,$$

e sono *simili* i due numeri solidi

$$24 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \quad \text{e} \quad 192 = 4 \cdot 6 \cdot 8,$$

infatti

$$2 : 4 = 3 : 6 = 4 : 8.$$

Infine nella VII.22 è definito un numero perfetto come somma dei suoi fattori diversi dal numero stesso.

Diversamente dal libro I non ci sono postulati veri e propri, anche se si possono notare alcune proprietà di carattere intuitivo che Euclide non enuncia esplicitamente, ma che assume come valide: esse potrebbero anche indicarsi come postulati inespressi.

1. Se un numero divide altri due numeri, divide anche la loro somma.
2. Se un numero divide altri due numeri, divide anche la loro differenza.
3. Se un primo numero divide un secondo, divide anche qualunque multiplo del secondo.

La prima assunzione, ad esempio, è usata, come vedremo, nella proposizione VII.2, le altre due nella proposizione VII.3. Inoltre la somma è data per scontata con tutte le sue proprietà, così come l' operazione di "misurare", cioè dividere, è considerata nota nella definizione VII.3 (mentre la moltiplicazione è definita nella VII.15).

Dopo le definizioni è presentato il famoso algoritmo di Euclide, che sta alla base della sua teoria dei numeri. Egli lo usa per determinare il massimo comune divisore (o misura comune, nella sua terminologia). L'algoritmo consiste nell' esecuzione ripetuta di divisioni con resto (che Euclide dà per nota):

*Divisione con resto: dati due numeri naturali  $a$  e  $b$  con  $b > a$ , esistono due interi univocamente determinati  $q$  ed  $r$  tali che:*

$$b = qa + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < a.$$

Euclide sviluppò una teoria di quelli che chiamò “i numeri più piccoli tra quelli che hanno lo stesso rapporto tra loro”. Nella seguente proposizione è coinvolto il concetto di “minimo”:

**PROPOSIZIONE VII.20:** *I numeri più piccoli tra quelli che hanno lo stesso rapporto tra loro misurano quelli che hanno lo stesso rapporto lo stesso numero di volte, il più grande (misura) il più grande e il più piccolo il più piccolo.* Chiameremo *minimi* “gli numeri più piccoli tra quelli che hanno lo stesso rapporto”. Euclide dà per nota l’ esistenza e l’ unicità dei minimi in una classe di coppie di numeri con lo stesso rapporto, anche se non parla esplicitamente di nessuna proprietà di ordine.

Nelle proposizioni successive afferma che *numeri primi tra loro sono minimi e i minimi sono primi tra loro*. Solo alla fine della parte dedicata al massimo comune divisore, nella proposizione VII.33, viene spiegato come trovare i minimi, non solo per coppie di numeri, ma per una qualsiasi quantità di numeri. Ciò fa supporre che tale proposizione sia un’ aggiunta successiva alla parte originale.

Nelle proposizioni VII.23-28 indaga come il concetto di essere coprimi per due numeri  $a$  e  $b$  è collegato alla formazione di somme e prodotti. In tal modo ci mostra in un’ esposizione sistematica che occorre investigare come un nuovo concetto è collegato ai concetti e alle operazioni precedenti.

Nell’ ultima parte di questa sezione, le proposizioni VII.29-32 riguardano la scomposizione di un numero in fattori primi; vengono provati due lemmi, la cui combinazione è conosciuta oggi come il teorema fondamentale dell’ aritmetica: *ogni numero  $> 1$  ammette una fattorizzazione unica in numeri primi*. Infine, nell’ ultima sezione del libro VII, viene costruito il minimo comune multiplo di due o più numeri, e vengono investigate le sue proprietà.

## Libro VIII

Nella prima parte del libro VIII vengono trattati i numeri in proporzione continua, cioè gruppi di numeri  $a,b,c,d$  che stanno tra loro nei rapporti:

$$a : b = b : c = c : d,$$

La proposizione VIII.5 si discosta dal tema delle proporzioni continue:

**PROPOSIZIONE VIII.5:** *I numeri piani hanno tra loro il rapporto composto dai rapporti dei loro lati.*

Siano i numeri piani  $a = cd$  e  $b = ef$ , dove  $c, d, e, f$  sono i loro lati. La proposizione afferma che il rapporto  $a : b$  è composto da  $c : e$  e  $d : f$ , che, espresso in notazione frazionaria, è:

$$\frac{a}{b} = \frac{cd}{ef} = \frac{c}{e} \frac{d}{f}.$$

Non c' è nessuna definizione formale negli *Elementi* di composizione. Questo è ciò che Euclide ha fatto di più simile a delle operazioni con le frazioni; non c' è traccia di addizioni di frazioni o rapporti, i rapporti non sono numeri per Euclide.

**PROPOSIZIONE VIII.7:** *Se abbiamo una qualsiasi quantità di numeri in proporzione continua e il primo misura l' ultimo, esso misura anche il secondo.*  
La seconda parte del libro si occupa della geometria dei numeri. Le dimostrazioni sono puramente aritmetiche, ma le idee di base provengono dalla geometria.

Il problema di trovare un medio proporzionale  $m$  per ogni segmento  $a, b$  tale che  $a : m = m : b$  è stato risolto nel libro VI: per ogni segmento  $a, b$  è sempre possibile costruire  $m$ . Tuttavia il problema aritmetico è diverso: per alcune coppie di numeri, come  $a = 4$  e  $b = 12$ , il medio proporzionale non esiste (tra gli interi). Nasce quindi il problema di caratterizzare le coppie di numeri  $a, b$  che hanno un medio proporzionale  $m$ . Euclide lo risolve nelle proposizioni VII.18/21, utilizzando il concetto di “numeri piani simili”, affermando che fra due numeri si può interporre un numero medio proporzionale se e solo se i due numeri sono numeri piani simili. Analogamente spiega che fra due numeri si interpongono due medi proporzionali se e solo se i due numeri sono numeri solidi simili. Tale risultato diventa poi uno strumento per dimostrare proposizioni più avanzate. Nel libro X, ad esempio, per determinare quali sono le terne pitagoriche, Euclide introduce la fattorizzazione dei numeri piani simili per ottenere delle formule che oggi sappiamo essere la parametrizzazione di tutte le terne pitagoriche. Euclide non dice di averle trovate tutte, ma in realtà è quello che ha fatto.

## Libro IX

Non c' è nessuna interruzione nei contenuti tra i libri VIII e IX, ma il libro IX continua a trattare il tema dei numeri in proporzione continua, dei numeri piani simili e dei numeri cubi.

Una sezione riguarda i divisori primi, con risultati che si avvicinano, come

abbiamo notato, al teorema fondamentale dell' aritmetica.

Un' ulteriore sezione è dedicata al numero dei primi. Questa parte consiste di un solo teorema e la sua proposizione, ma è considerata un gioiello della matematica.

**PROPOSIZIONE IX.20:** *I numeri primi sono più di qualsiasi molitudine fissata di numeri primi.*

*Dimostrazione:* Siano  $A, B, C$  i numeri primi proposti; dico che esistono numeri primi in maggior numero che  $A, B, C$ . Infatti, si prenda il minimo comune multiplo di  $A, B, C$  (VII.36)[vi è descritto come trovare il minimo comune multiplo] e sia esso  $K$ ; si aggiunga a  $K$  l' unità  $U$ . Ora, il numero  $K + U$  o è primo o non lo è. Dapprima, sia un numero primo; si sono dunque trovati i numeri primi  $A, B, C, K + U$  che sono in maggior numero che  $A, B, C$ . Ma sia adesso il caso in cui, per ipotesi,  $K + U$  non è primo, per cui esso è diviso da un numero primo (VII.31). Sia diviso dal numero primo  $D$ ; dico che  $D$  non è uguale a nessuno dei numeri  $A, B, C$ . Infatti, se possibile, sia uguale [a qualcuno di essi]. Ma  $A, B, C$  dividono  $K$ , perciò anche  $D$  dividerebbe  $K$ . Ma  $D$  divide pure  $K + U$ ; ossia  $D$  dividerebbe, pur essendo un numero, anche l' unità  $U$  che rimane di  $K + U$ : il che è assurdo. Quindi  $D$  non è uguale a nessuno dei numeri  $A, B, C$ . Ed è, per ipotesi, primo.  $\square$

L' importanza e la bellezza di tale teorema risiedono nel fatto che esso è "semplice" sia nell' idea che nella dimostrazione ed è tuttora altrettanto significativo di quando è stato scoperto.

L' ultima sezione riguarda i numeri pari, dispari e i numeri perfetti (numeri che sono uguali alle loro parti, cioè alla somma dei loro divisori). L' ultima proposizione è la formula per i numeri perfetti, in notazione moderna: se  $S_n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$  è un numero primo, allora  $2^{n-1}(2^n - 1)$  è un numero perfetto. Gli antichi Greci conoscevano i primi 4 numeri perfetti: 6, 28, 496, 8128. Euclide non dà alcuna risposta alla domanda inversa, ossia se la formula fornisca o no tutti i numeri perfetti. Sappiamo oggi che tutti i numeri perfetti pari sono di questo tipo, ma la questione dell' esistenza di numeri perfetti dispari costituisce ancora oggi un problema irrisolto.

Quest' ultima parte ha un notevole interesse storico, perché è un pezzo di matematica pre-euclidea (era una teoria già nota a Platone), conservata integralmente negli Elementi: le proposizioni IX.21-36 presentano un carattere così omogeneo da far pensare che esse costituissero un tempo un sistema mate-

matico in sè concluso, risalente presumibilmente alla prima metà del V secolo a.C.

### 5.6.8 Gli incommensurabili

#### Libro X

Il libro X comprende (complessivamente) un quarto degli *Elementi*. In esso, l' algoritmo di Euclide è applicato a grandezze generiche per ottenere un criterio per la commensurabilità. Viene intrapresa inoltre una classificazione dei tipi di irrazionali: Euclide investiga ogni possibile varietà di linea retta che può essere rappresentata (con la terminologia algebrica moderna) da  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ , dove  $a$  e  $b$  rappresentano due linee rette commensurabili.

La scoperta di grandezze incommensurabili rappresenta uno dei risultati più importanti degli antichi Greci, anche se subito dopo la scoperta degli irrazionali, l'  $\alpha\lambda\omega\gamma\sigma\nu$ , l' inesprimibile, venne ripudiato e respinto. Si disse che ad ogni numero corrispondeva un segmento, ma non viceversa, ma i numeri irrazionali avevano ormai fatto la loro comparsa. Euclide si limita a quelli che noi chiamiamo irrazionali quadratici e biquadratici e alle loro somme e differenze, ma ne dà una esposizione così esatta e chiara che alcuni studiosi considerano questo libro un capolavoro che sorpassa tutti gli altri.

Il libro parte con la definizione di grandezze incommensurabili:

**DEFINIZIONE X.1:** *Sono dette commensurabili quelle grandezze che sono misurate dalla stessa misura, e incommensurabili quelle che non possono avere alcuna misura comune.*

Ossia un segmento  $b$  commensurabile con un segmento  $a$  è della forma

$$b = \frac{m}{n}a$$

con  $m, n$  numeri interi.

In tutti gli *Elementi* Euclide considera il misurare una nozione “primitiva”, di cui non dà dimostrazione. Le grandezze di questo libro sono sempre linee e rettangoli. Il concetto di incommensurabilità è raffinato nella

**DEFINIZIONE X.2:** *Le linee rette sono commensurabili in potenza quando i quadrati costruiti su di esse sono misurati dalla stessa area, e incommensurabili in potenza quando i quadrati costruiti su di esse non possono avere nessuna area come misura comune.*

Cioè un segmento  $b$  commensurabile con  $a$  nella seconda potenza è della forma

$$b = \sqrt{\frac{m}{n}}a$$

dove  $\frac{m}{n}$  non è un quadrato perfetto.

Nella definizione X.3 stabilisce che esistono, in numero infinito, linee rette commensurabili e linee rette incommensurabili, sia in lunghezza soltanto che anche in potenza, con una linea retta preassegnata, e chiama la linea retta preassegnata, e le linee rette con essa commensurabili, sia in lunghezza che in potenza, sia soltanto in potenza, razionali (o esprimibili), e le linee rette con essa incommensurabili, irrazionali (o non esprimibili). Questa definizione introduce, in sostanza, quella che noi chiamiamo unità di misura. Notiamo la differenza della terminologia di Euclide dalla nostra: egli chiama razionale anche una grandezza della forma

$$b = \sqrt{\frac{m}{n}}a$$

dove  $a$  è razionale.

**DEFINIZIONE X.4:** *Il quadrato costruito sulla linea retta assegnata si chiamerà razionale, e le aree con esso commensurabili si chiameranno razionali; mentre si chiameranno irrazionali le aree con esso incommensurabili, e irrazionali le linee rette il cui quadrato è equivalente a quelle aree.*

Così, secondo il linguaggio euclideo, segmenti razionali determinano quadrati razionali, e segmenti irrazionali determinano quadrati irrazionali.

La prima proposizione costituisce il fondamento della comparabilità delle grandezze commensurabili:

**PROPOSIZIONE X.1:** *Assegnate due grandezze disuguali, se dalla maggiore si sottrae una grandezza più grande della sua metà, e da ciò che resta una grandezza più grande della sua metà, e se questa operazione si ripete successivamente, resterà una grandezza che sarà più piccola della grandezza minore assegnata.*

Vediamo quindi che Euclide prende in considerazione classi di grandezze che soddisfano il postulato di Archimede. Questa proposizione sta alla base del metodo di esaustione, che trova un'importante applicazione nelle proposizioni del libro XII.

**PROPOSIZIONE X.2:** *Date due grandezze disuguali, se sottrendo ripetute volte di seguito dalla grandezza maggiore la minore, nessuna delle grandezze che*

*si hanno per resto misura la precedente, le grandezze saranno incommensurabili.*

In altre parole, se questo algoritmo non termina dopo un numero finito di passi, le due grandezze saranno incommensurabili.

In seguito viene spiegato come trovare il minimo comune multiplo, e, successivamente, nelle proposizioni X.5 e X.6, esprime l' equivalenza tra rapporti tra grandezze commensurabili e tra numeri; potremmo esprimere in tal modo:

*Le grandezze  $a$  e  $b$  sono commensurabili  $\Leftrightarrow$  esistono due numeri  $k$  e  $m$  tali che  $a : b = k : m$ .*

Nelle proposizioni X.7 e X.8 viene espresso il viceversa: due grandezze sono incommensurabili se e solo se non hanno fra loro lo stesso rapporto che un numero ha con un altro numero. Questo gruppo di proposizioni fornisce un altro criterio per la commensurabilità di due grandezze. Il procedimento indicato nella proposizione X.2, non avendo un termine, di fatto non permette di stabilire l' incommensurabilità; il secondo procedimento, invece, anche se non permette di stabilire "a priori" se due grandezze sono incommensurabili (in quanto, date due grandezze qualsiasi, per verificare che sono incommensurabili dovremmo verificare che il loro rapporto non è uguale a *nessuno* dei rapporti che un numero ha con un altro numero), consente di determinare se lo sono, a partire dall' ipotesi che altre due grandezze, con cui sono proporzionali, siano incommensurabili. Il libro comprende 115 proposizioni, sebbene in alcune edizioni si trovino anche le proposizioni X.116 e X.117 (probabilmente aggiunte succussivamente al testo originale).

### 5.6.9 Geometria solida

Nei libri XI-XII-XIII Euclide si dedica alla geometria solida, e costruisce anche questa per via sintetica, senza tuttavia trattarla in modo così esauriente come la geometria piana.

Secondo alcuni trattatisti dell' antichità, lo scopo finale dell' opera di Euclide era lo studio dei corpi cosmici, cioè dei poliedri regolari.

### Libro XI

Il libro XI dà inizio alla trattazione della geometria solida, sebbene compaiano ancora alcuni importanti teoremi di geometria piana. Esso si apre con alcune definizioni che serviranno per tutti e tre i libri XI, XII e XIII. Vengono definiti i concetti di solido, piani paralleli, figure solide simili, angolo solido,

piramide, prisma, sfera, cono, cilindro, cubo e altre figure. Tra le più significative, ricordiamo:

DEFINIZIONE XI.1: *Un solido è ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità.*

DEFINIZIONE XI.2: *Limite di un solido è una superficie.*

Questo libro non ha un' impostazione assiomatica vera e propria come il libro I. È stata fatta molta critica su come Euclide ha cercato di far derivare da queste definizioni le sue prime proposizioni, come ad esempio le seguenti

PROPOSIZIONE XI.2: *Tre punti non allineati stanno in un unico piano.*

PROPOSIZIONE XI.3: *Se due piani si intersecano, la loro sezione comune è una retta.*

Le analisi assiomatiche moderne, come quella di Hilbert, hanno affermato che non c' è altra alternativa che prendere queste proposizioni come assiomi di geometria solida. Di questo libro mettiamo in evidenza la proposizione XI.33, che è connessa al famoso problema della duplicazione del cubo:

PROPOSIZIONE XI.33: *I solidi parallelepipedi simili stanno l' uno con l' altro nel rapporto triplice dei loro lati corrispondenti.*

Questa proposizione è l' estensione al caso solido della proposizione VI.20 sui poligoni simili. Nel piano il fattore di similitudine  $k$  per i segmenti dà  $k^2$  per le aree; ora abbiamo il fattore  $k^3$  per i corrispondenti volumi di parallelepipedi simili.

C'è un' affermazione parallela nel libro VIII sui numeri simili solidi (focalizziamo la nostra attenzione sui cubi e non sui parallelepipedi solidi e i numeri solidi in generale; tranne che per qualche piccola modifica le dimostrazioni sono le stesse per il caso speciale e per quello generale):

PROPOSIZIONE VIII.19: *Tra due numeri simili solidi cadono due numeri medi proporzionali, e il solido ha con il solido simile un rapporto triplice di quello che il lato corrispondente ha con il lato corrispondente.*

In terminologia moderna ciò si può spiegare così: siano  $a$  e  $b$  i lati dei cubi, così che i ripetuti numeri (o volumi) cubi sono  $a^3$  e  $b^3$ ; la proposizione afferma che ci sono due medi proporzionali, che implica che i cubi stanno "in rapporto triplice" rispetto ai loro lati. Questo significa:

$$a^3 : a^2b = a^2b : ab^2 = ab^2 : b^3,$$

dove i numeri  $a^2b$  e  $ab^2$  sono i suddetti medi proporzionali. Nel problema della duplicazione del cubo, i numeri  $a^3 = 2$  e  $b^3 = 1$  sono dati, ed  $a = \sqrt[3]{2}$  è il numero cercato. Trasformando il problema originale in uno con due medi proporzionali, esso è stato riportato in una versione che può essere maneggiata coi

metodi tradizionali dei matematici Greci (la riduzione della duplicazione del cubo alla ricerca di due medi proporzionali è stata una scoperta di Ippocrate di Chio). Per le dimostazioni delle proposizioni XI.33 e VIII.19 procede in questo modo: abbiamo due cubi  $A$  e  $B$ , coi loro rispettivi lati  $a$  e  $b$ . Siano  $R$  il quadrato di lato  $a$  ed  $S$  il rettangolo contenuto da  $a$  e  $b$ ,  $C$  il parallelepipedo solido avente per base  $S$  e altezza  $a$ , e  $D$  il parallelepipedo solido avente per base  $S$  e altezza  $b$ . Allora, usando le proposizioni VI.1 (triangoli e parallelogrammi che hanno la stessa altezza stanno l' uno all' altro come le loro basi) e XI.32 (i solidi parallelepipedi che hanno la stessa altezza stanno l' uno all' altro come le loro basi), abbiamo

$$a : b = R : S = A : C,$$

$$a : b = C : D,$$

$$a : b = D : B,$$

e quindi

$$A : C = C : D = D : B$$

e abbiamo così trovato i due medi proporzionali. Naturalmente i Greci non sapevano ancora che non potevano costruire  $\sqrt[3]{2}$  con riga e compasso.

## Libro XII

Il libro XII contiene 18 teoremi sulle aree e i volumi, in particolare di figure curvilinee e di figure limitate da superfici. L' idea dominante del libro è il metodo di esaustione, che proviene da Eudosso. Il termine "esaustione" non era usato dai Greci, ma venne introdotto nel XVII secolo. Tale metodo è rigoroso: non vi è in esso un esplicito processo di passaggio al limite, ma si basa sul metodo di dimostrazione indiretto, evitando così l' uso di un limite. Per una migliore comprensione del metodo prendiamo in considerazione un esempio in tutti i dettagli.

Il libro si apre con la

**PROPOSIZIONE XII.1:** *Poligoni simili inscritti in cerchi stanno l'uno all' altro come i quadrati dei diametri dei cerchi.*

La dimostrazione non presenta alcun interesse particolare. La proposizione cruciale è la

**PROPOSIZIONE XII.2:** *I cerchi stanno l' uno all' altro come i quadrati dei diametri.*

La dimostrazione euclidea per assurdo, probabilmente quella stessa di Eudosso, può essere così schematizzata: dopo avere preliminarmente dimostrato la proposizione XII.1, si prova, applicando la proprietà di esaustione, che il rapporto dei cerchi non può essere né maggiore né minore del rapporto dei poligoni regolari inscritti. Non resta che concludere che il rapporto dei cerchi è uguale al rapporto dei poligoni regolari inscritti e quindi al rapporto dei quadrati dei diametri.

*Dimostrazione.* Siano  $c$  e  $C$  i due cerchi assegnati, rispettivamente di diametri  $d$  e  $D$  e di aree  $a$  e  $A$ . Dobbiamo provare che:

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

per quanto detto sopra dobbiamo escludere entrambe le possibilità:

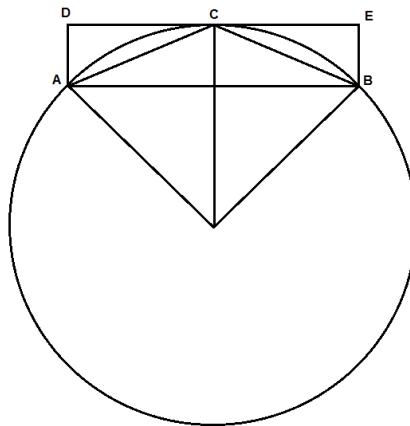
$$\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2} \quad \frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$$

Supponiamo per assurdo che  $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ .

Deve esistere una grandezza  $a' < a$  tale che:  $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ .

Consideriamo la grandezza  $a - a'$  ed i poligoni regolari di  $n$  lati di area  $p_n$  e  $P_n$  rispettivamente inscritti in  $c$  e  $C$ .

Osserviamo che le aree delle parti di piano interne ai cerchi ma esterne ai poligoni inscritti si ridurrebbero a meno della metà se raddoppiassimo il numero dei lati di tali poligoni.



Infatti passando dal segmento circolare di base  $AB$  alla coppia di segmenti circolari congruenti di base  $AC$  e  $CB$ , abbiamo ‘tolto’ dal segmento circolare inizialmente considerato il triangolo isoscele  $ABC$ ; la parte tolta è dunque maggiore della metà del segmento circolare di base  $AB$ , essendo il triangolo  $ABC$  la metà del rettangolo  $ABED$ , il quale a sua volta è maggiore del segmento circolare di base  $AB$  inizialmente considerato.

Pertanto, in base alla proprietà di esaustione, è possibile ridurre tali aree fino a scrivere, con riferimento alla grandezza  $a - a'$  precedentemente introdotta:

$$a - p_n < a - a' \Rightarrow p_n > a'$$

In base alla proposizione XII.1:

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$$

da cui ricordando che  $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$  segue:

$$\frac{a'}{A} = \frac{p_n}{P_n}$$

Se, come sopra provato,  $p_n > a'$ , risulta infine:  $P_n > A$ .

Ma ciò è assurdo, non potendo essere l’area di un poligono inscritto in un cerchio maggiore dell’area del cerchio stesso.

Pertanto è escluso che sia:  $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ .

In modo analogo giungiamo ad escludere anche la possibilità che sia:  $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ . Quindi:  $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ .  $\square$

Questo metodo viene usato per dimostrare anche altri teoremi critici, come le proposizioni riguardanti le piramidi, i coni, i cilindri e le sfere.

### Libro XIII

Il libro XIII, infine, considera le proprietà dei poligoni regolari, e il problema di come inscrivere i solidi regolari in una sfera, ossia di trovare il rapporto tra il lato del solido inscritto e il raggio della sfera circoscritta. Gran parte di questo libro si deve probabilmente a Teeteto (vissuto tra il terzo e il quarto secolo a.C.).

Nella definizione VI.3 un segmento  $PQ$  è detto diviso nel rapporto estremo e medio da un punto  $R$  se

$$PQ : PR = PR : RQ.$$

Nella prima metà del diciannovesimo secolo al segmento  $PR$  è stato dato il nome di “sezione aurea”. Dato il segmento  $PQ$ , il punto  $R$  è già stato trovato due volte, nella proposizione II.1 e nella VI.30.

Le prime sei proposizioni studiano le proprietà della sezione aurea, e costituiscono di fatto dei lemmi per la costruzione dei poliedri regolari, descritta nelle proposizioni finali del libro.

Le proposizioni XIII.1/2 stabiliscono che, dati i punti  $S, P, R, Q$  allineati e tali che  $PQ = 2SP$ ,  $R$  divide  $PQ$  in rapporto estremo e medio  $\Leftrightarrow (SR)^2 = 5(SP)^2$ . Per dimostrare questo fatto ricordiamo che l’equazione che determina la sezione aurea  $x$  di un segmento  $a$  (scritto in formule moderne) è

$$x^2 = a(a - x),$$

cioè

$$a : x = x : (a - x),$$

ossia la sezione aurea (che è la parte maggiore) è media proporzionale tra l’intero segmento e la parte residua. Ponendo  $a = PQ$  e  $x = PR$  le due proposizioni affermano che  $x$  è la sezione aurea del segmento  $a$  se e solo se

$$(x + \frac{a}{2})^2 = 5(\frac{a}{2})^2.$$

Infatti sviluppando si ha:

$$x^2 + ax + (\frac{a}{2})^2 = 5(\frac{a}{2})^2,$$

cioè

$$x^2 + ax = a^2.$$

**PROPOSIZIONE XIII.5:** *Se si divide una linea retta nel rapporto estremo e medio, e si aggiunge ad essa la parte maggiore, la retta che ne risulta è divisa in rapporto estremo e medio, e la parte maggiore ne è la retta assunta inizialmente.*

Questo risultato si vede facilmente per mezzo delle equazioni: esso afferma che

se  $a$  ha la parte aurea  $x$ , allora il segmento somma  $a + x$  ha la parte aurea uguale ad  $a$ , cioè vale

$$a^2 = (a + x)x,$$

che diviene

$$a^2 = ax + x^2,$$

che è vera poiché  $x$  è la sezione aurea di  $a$ .

Nella proposizione XIII.6 Euclide afferma che se un segmento razionale viene diviso nel rapporto estremo e medio, ognuno dei due segmenti risultanti è irrazionale; nella XIII.11 stabilisce che anche il lato di un pentagono equilatero, inscritto in un cerchio di diametro razionale, è irrazionale. Le proposizioni XIII.5 e XIII.6 trovano applicazione, ad esempio, nella costruzione del pentagono regolare.

I cinque solidi regolari (il tetraedro, l' ottaedro, il cubo, l' icosaedro e il dodecaedro) sono l' argomento principale del libro XIII. Di ognuno di questi solidi vengono descritti la costruzione e il modo in cui viene inscritto in una sfera. Alla fine Euclide dimostra che non possono esistere altri solidi regolari (convessi) oltre a questi. Egli indaga inoltre le relazioni tra la lunghezza di un lato del solido e quella del diametro della sfera circoscritta. Le definizioni di questi solidi sono date nel libro XI.

La trattazione dei poligoni regolari di Euclide è importante nella storia della matematica perché contiene il primo esempio di un teorema di classificazione: tale teorema inizia con una definizione (o una descrizione assiomatica) e finisce con una lista di oggetti che soddisfano questa descrizione. Non c' è nessuna definizione ufficiale di solido regolare nella lista di definizioni all' inizio del libro XI, ma ne troviamo di fatto una nell' ultimo teorema degli *Elementi*, che afferma la completezza della precedente lista di poliedri.

**PROPOSIZIONE XIII.18:** *Non può essere costruita nessun' altra figura, oltre alle cinque già dette, che è contenuta da figure equilatere ed equiangolari uguali l' una all'altra.*

Euclide quindi considera un solido regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti. Questa è essenzialmente la definizione attuale, tranne per due omissioni: il requisito che il poliedro sia convesso e la specificazione che i vertici delle figure del poliedro siano congruenti. Euclide probabilmente dava per scontate queste condizioni, e considerava solo poliedri che possono essere inscritti in una sfera. La dimostrazione della proposizione precedente dipende dal teorema XI.21, che afferma che le facce di un angolo solido devono contenere meno di 4 angoli piatti. Se perciò mettiamo insieme dei triangoli equilateri

possiamo avere tre intersezioni in ogni vertice e formare così un tetraedro, possiamo usarne quattro per volta e formare un ottaedro, oppure usarne cinque per formare l' icosaedro (poliedro regolare di 20 facce); sei triangoli equilateri che si incontrino in un vertice darebbero come somma  $360^0$ , e non possono perciò essere usati. Possiamo poi usare tre quadrati per ogni vertice e formare così il cubo, o possiamo usare, infine, tre pentagoni regolari per formare il dodecaedro. Nessun altro poligono regolare può essere usato perché soltanto tre di essi che si incontrino in un punto formerebbero un angolo maggiore o uguale di  $360^0$ .

### 5.6.10 Conclusioni

Proclo afferma che si possono chiamare “elementi” tutte quelle cose “la cui teoria aiuta a penetrare nella comprensione delle altre cose, e a partire dalle quali ci riesce facilitata la risoluzione delle difficoltà insite in queste altre cose”. Ossia, mediante gli elementi saremmo in grado di impadronirci di tutte le altre cose che appartengono alla matematica: essi sono la strada maestra che ci conduce al possesso della matematica. In questo modo sarebbero state poste in eterno, per opera di Euclide, le fondamenta della matematica, profondamente radicate nella logica e nelle leggi dell’ intuizione nello spazio tridimensionale “euclideo”, e di conseguenza noi potremmo solo ingrandire la sua opera, ma non costruirla su altre basi.

In effetti, poiché gli *Elementi* sono la prima fonte sostanziale di conoscenza matematica, usata da tutte le generazioni successive, essi influenzarono il corso della matematica in maniera superiore a qualunque altro libro. Lo stesso concetto di matematica, la nozione di dimostrazione e l’ ordinamento logico dei teoremi vennero appresi dal loro studio e i loro contenuti determinarono il corso del pensiero successivo. La matematica euclidea rimase incontestata fino all’ inizio del XIX secolo.

# Bibliografia

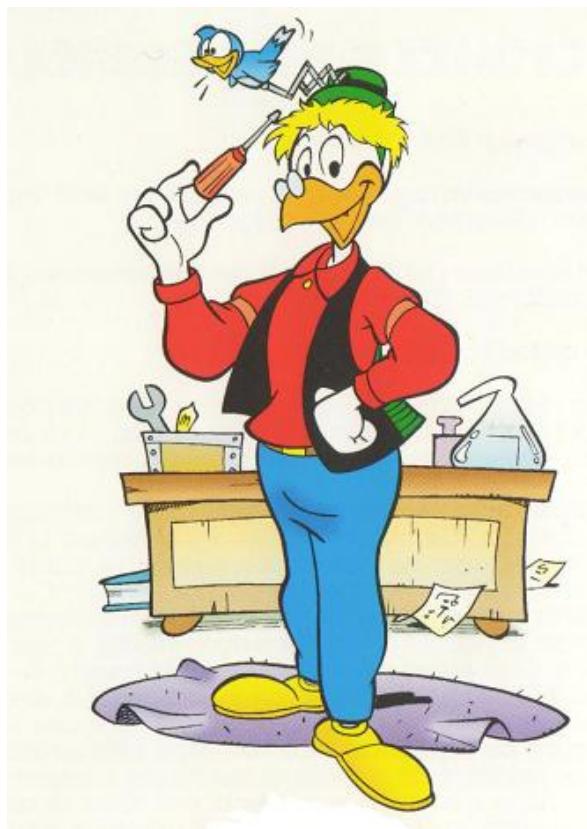
- [1] Benno Artmann, *Euclid-The creation of mathematics*, Springer, New York, 1999.
- [2] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*.
- [3] Egmont Colerus, *Piccola storia della matematica*.
- [4] Federigo Enriques, *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, Zanichelli, Bologna, 1935.
- [5] *Gli Elementi di Euclide*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Unione Tipografico-editrice torinese, 1970.
- [6] Giorgio Tomaso Bagni, *Storia della matematica*.

# Capitolo 6

## Archimede

di Alessandro Crema

Archimede... il primo ricordo di questo nome, mi fa tornare indietro con il tempo e precisamente a quando, da bambino, leggevo “Paperino” e “Topolino”. La Walt Disney, nella persona di Carl Banks, nel 1952 gli dedicò un personaggio dalle fattezze di un gallo antropomorfo e di nome Archimede Pitagorico (nome originale *Gyro Gearloose*). Spero, con questa breve relazione di dare una visione accettabile del valore di Archimede e dell’importanza che molti dei suoi studi e dei suoi risultati, ha avuto per lo sviluppo delle conoscenze matematiche nel susseguirsi dei secoli.



## 6.1 Vita e morte

Non sono molte le notizie certe sulla vita di Archimede. Per esempio non è certa la sua data di nascita che viene fatta risalire al 287 a.C.; questo perché Plutarco (46 d.C. - 127 d.C.) nell'opera *Vita di Marcello*, raccontò che al momento della sua morta avvenuta nel 212 a.C. durante il sacco di Siracusa, Archimede aveva all'incirca 75 anni. Sebbene non ci siano molti documenti storici sulla vita di Archimede, le fonti convergono verso il fatto che fosse figlio dell'astronomo Fidia dal quale avrebbe ereditato l'amore per le scienze matematiche e che abbia vissuto quasi interamente la sua vita a Siracusa che all'epoca era la più importante, ricca e popolosa colonia dorica della Magna Grecia. Inoltre secondo Diodoro Siculo (90 a.C. - 27 a.C.) durante un suo viaggio ad Alessandria, Archimede conobbe Erastotene di Cirene, terzo

bibliotecario della celeberrima *Biblioteca di Alessandria*, al quale avrebbe poi dedicato l'opera *Il Metodo*. La sua morte avvenne durante il *Sacco di Siracusa*. Durante la seconda guerra punica (218 a.C. - 202 a.C.) Siracusa aveva avuto il torto di appoggiare Cartagine contro Roma e per questo la città, venne assediata dai romani dal 214 al 212 a.C.. Al di là dell'aspetto politico, Siracusa rappresentava all'epoca, uno dei centri abitati più ricchi per produzione di olio, grano e vino della Sicilia; ovviamente per Roma era fondamentale poter controllare un porto di siffatta importanza. Secondo scritti di storici greci come Plutarco e Polibio (206 a.C. - 124 a.C.) e di storici romani come Tito Livio (59 a.C. - 17 d.C.), Archimede, sebbene lungi dall'essere un uomo di armi, riuscì con le sue invenzioni (catapulte per lanciare pietre, corde, carrucole e ganci per sollevare e schiantare le navi romane, dispositivi per sviluppare incendi sulle navi) a rallentare la caduta della città. Le versioni raccontate da Plutarco sul motivo preciso dell'uccisione di Archimede sono varie, ma quella più verosimile sembra essere quella per cui un soldato addetto al suo arresto, offeso per l'indifferenza che il "vecchio" aveva avuto nei suoi confronti, concentrato com'era nei suoi studi (con la famosa frase "*Noli turbare circolo meos*", cioè "Non rovinare i miei cerchi"), abbia risposto all'affronto uccidendolo. Il fatto diede rattristò il generale Marcello, che a conoscenza della scienza di Archimede, avrebbe voluto portarlo a Roma per sfruttarne le capacità. Dalle opere ritrovate e dalle varie testimonianze si è constatato che Archimede si dedicò a tutte le branche delle scienze matematiche a lui contemporanee (aritmetica, geometria piana e geometria solida, meccanica, ottica, idrostatica, astronomia ecc.) ottenendo risultati straordinari.

## 6.2 Archimede, Eudosso ed Euclide

Archimede si sentì legato ad Eudosso (408 a.C. - 355 a.C.), il più importante matematico preeuclideo in quanto, a suo dire, li accomunava il rigore delle loro dimostrazioni; inoltre gli attribuì la prima dimostrazione rigorosa dei due teoremi sul volume del cono e della piramide, enunciati da Democrito (460 a.C. - 360 a.C.). Eudosso, aveva sviluppato il *metodo di esaustione* di Antifone, che poi fu usato in modo magistrale da Archimede. Tale metodo è un procedimento utile a calcolare aree di varie figure geometriche piane. Consiste nella costruzione di una successione di poligoni che converge alla figura data. L'area della figura risulta essere quindi il limite delle aree dei poligoni. Il metodo di esaustione ebbe il merito di essere il mezzo mediante il quale la

matematica antica proseguì le ricerche infitesimali e anticipare così il nostro calcolo integrale. Sebbene Archimede avesse studiato sotto la guida dei discepoli di Euclide, egli rimase scevro dagli influssi filosofici che permeavano il pensiero di costui. Dal punto di vista didattico Archimede si staccò dalla metodologia di Euclide; le dimostrazioni di Euclide possono apparire prolisse ma questo perché gli *Elementi* dovevano servire ad educare alla Geometria, mentre in Archimede non vi era tale ambizione. Quindi, mentre Euclide (323 a.C. - 285 a.C.) si rivolgeva a chi aveva bisogno di imparare, Archimede a chi aveva già una conoscenza, possibilmente buona, dell'argomento da lui trattato. Ciò che invece collegava Archimede ad Euclide consisteva nell'impostazione di una trattazione “sintetica” che da postulati presentava i risultati sotto forma di teoremi. Partendo da Proposizioni primitive, ai quali egli diede vari nomi (per esempio *assunzioni* o *lemmi*), Archimede arrivò a risultati sempre più complessi.

### 6.3 Le opere

Vediamo ora alcune delle opere che Archimede scrisse. Si potrà apprezzare la sua grandissima capacità nello spaziare da grandezze infinitesime a grandezze “infinite” e l’acuta genialità nel sapersi destreggiare con enorme successo in problematiche completamente diverse tra di loro.

#### 6.3.1 Sui corpi galleggianti

Nel primo libro è enunciato quello che ancora oggi è noto come il “Principio idrostatico di Archimede” per la legge di equilibrio dei fluidi per cui:

**“Qualsiasi solido più leggero di un fluido, se collocato nel fluido, si immergerà in misura tale che il peso della sua parte immersa sarà pari al peso del fluido spostato.”**

**“Un solido più pesante di un fluido, se collocato in esso, discenderà in fondo al fluido e se si peserà il solido nel fluido, risulterà più leggero del suo vero peso e la differenza di peso sarà uguale al peso del fluido spostato.”**

Perché Archimede aveva deciso di dedicarsi all’idrostatica? Secondo le fonti a noi pervenuteci, il monarca di Siracusa Gerone II (per alcuni testi ami-

co, per altri parente di Archimede), voleva scoprire un inganno perpetrato ai suoi danni da un artigiano. Gerone aveva affidato dell'oro all'artigiano affinché creasse una corona. Temendo che l'artigiano si fosse tenuto per se parte dell'oro, Gerone affidò ad Archimede il compito di smascherare l'inganno. Durante un bagno Archimede ebbe la geniale intuizione sulla correlazione che esiste tra il peso di un corpo e la quantità di fluido da esso spostato una volta immersovi. Pare che Archimede fosse talmente eccitato dalla scoperta che, uscito dalla tinozza, si mise a correre nudo per la casa proferendo il famoso **“Eureka!”** (“Ho trovato!”). Probabilmente quello che Archimede ipotizzò, era che se la corona fosse stata tutta d'oro, pesandola in un liquido con una quantità d'oro pari al peso della corona, la bilancia sarebbe dovuta rimanere stabile, mentre in caso contrario ci sarebbe stato squilibrio tra i due bracci. Ecco, quindi, apparire per la prima volta il concetto di peso specifico. Nel secondo libro, invece, si approfondisce lo studio vero e proprio dei fluidi. Vengono introdotte scoperte più complesse, quali le posizioni di equilibrio di sezioni di parabola immerse, appunto, in un fluido. Da numerosi studi di questo tipo, Archimede dedusse che tale equilibrio è condizionato non solo dal tipo di liquido, ma anche dal peso specifico (argomento introdotto già nel primo libro) del paraboloidi solido immerso. A conferma di ciò, leggiamo le parole di Archimede stesso:

**“Dato un segmento retto di un paraboloidi di rivoluzione il cui asse a sia maggiore di  $3/4p$ , e il cui peso specifico sia inferiore a quello di un fluido, ma abbia rispetto ad esso un rapporto non inferiore a  $(a - 3/4p)^2/a^2$ , se il segmento del paraboloidi viene immerso nel fluido con l'asse inclinato secondo qualsiasi inclinazione rispetto alla verticale, ma in modo che la base non tocchi la superficie del fluido, non resterà in quella posizione, ma ritornerà nella posizione in cui l'asse è verticale.”**

Questi studi avevano, in ogni caso, un risvolto pratico, essendo infatti alla base della progettazione dello scafo delle navi. D'altro canto, Archimede fu anche un grande ingegnere.

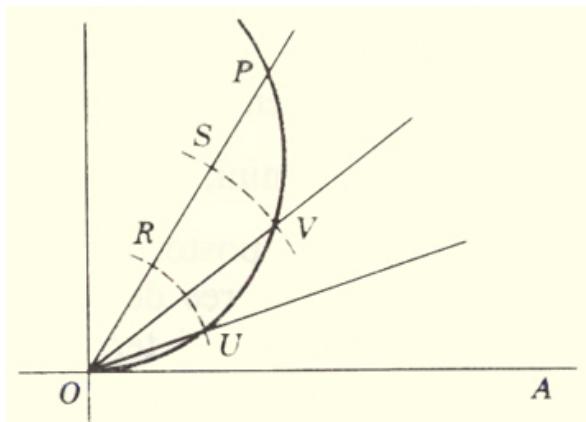
### 6.3.2 Sulle spirali

Fu un'opera molto ammirata, ma poco letta perché considerata troppo difficile, tanto che molti la giudicano il trattato più complesso scritto da Archimede. In questo libro viene definita quella che oggi è nota come *Spirale di*

*Archimede.* Lo studio della spirale di Archimede partiva dalle ricerche fatte in Grecia per la risoluzione dei tre problemi classici della geometria greca:

- la trisezione dell'angolo
- la quadratura del cerchio
- la duplicazione del cubo

In particolar modo la spirale è collegata allo studio del primo dei tre problemi ora citati. La spirale di Archimede si distingue dalla spirale logaritmica per il fatto che i bracci successivi hanno una distanza fissa. Vediamo come Archimede ha sfruttato la spirale per determinare la trisezione dell'angolo.



Bisogna chiarire il concetto di spirale definita come luogo piano di un punto che, partendo dall'estremo di un raggio, si sposta uniformemente lungo questo raggio mentre il raggio a sua volta ruota uniformemente intorno al suo estremo. L'angolo è disposto in modo che il vertice e uno dei lati coincidano con il punto iniziale *O* della spirale e con la posizione iniziale *OA* della semiretta che ruota. Il segmento *OP* dove *P* è il punto di intersezione del lato *OR* con la spirale, viene trisecato nei punti *R* e *S* ove naturalmente  $OR = OP/3$  e  $OS = 2OP/3$ ; poi si tracciano delle circonferenze aventi per centro *O* e per raggi *OR* e *OS*. Intersecando queste circonferenze la spirale nei punti *U* e *V*, le linee *OV* e *OU* trisecheranno allora l'angolo *AOP*.

### 6.3.3 Sulla misurazione del cerchio

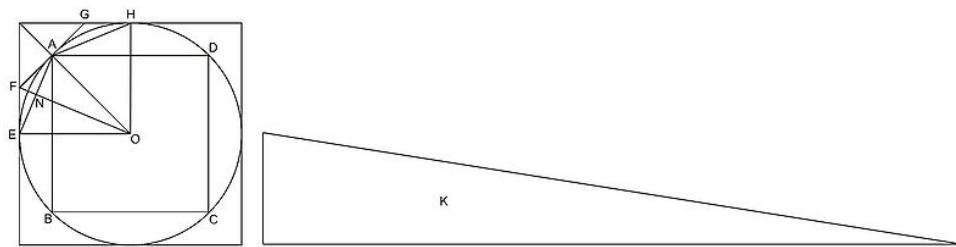
Questo piccolo trattato, che è probabilmente incompleto nella forma in cui ci è pervenuto, comprende solo tre proposizioni:

**“Ogni cerchio è equivalente a un triangolo rettangolo nel quale un cateto è uguale al raggio del cerchio e la base è uguale al perimetro.”**

**“Il perimetro di ogni cerchio è il triplo del diametro, aumentato di un segmento compreso tra un settimo del diametro e i dieci settantunesimi dello stesso.”**

**“Il cerchio ha rapporto con il quadrato del diametro, di undici quattordicesimi (11/14).”**

Vediamo come Archimede è arrivato al primo risultato:



Supponiamo che il cerchio sia più grande del triangolo. Inscriviamo nel cerchio il quadrato  $ABCD$  e dividiamo gli archi (che hanno come corde i lati del quadrato) in due parti uguali; continuiamo la divisione finché la somma dei segmenti del cerchio sia minore della differenza tra l'area del cerchio e quella del triangolo. Il poligono inscritto è allora maggiore del triangolo. Prendiamo il centro  $N$  e abbassiamo la perpendicolare  $NX$ , che risulta essere minore dell'altezza del triangolo; anche il perimetro del poligono è a sua volta minore della base, dato che è minore della circonferenza del cerchio. Di conseguenza, il poligono è minore del triangolo  $E$ , il che genera una contraddizione. Rionando nello stesso modo, supponiamo ora che il cerchio sia più piccolo del triangolo  $E$ , circoscriviamogli un quadrato, dividiamo gli archi in due parti uguali e tiriamo le tangenti ai punti di divisione. L'angolo  $OAR$  è retto, quindi  $OR$  è maggiore di  $MR$ , dato che  $MR$  è uguale a  $RA$ , e il triangolo  $ROP$  è maggiore della metà della figura  $OZAMO$ . Rimangono dunque dei segmenti

come  $PZA$ , la cui somma è minore della differenza tra l'area del triangolo  $E$  e quella del cerchio  $ABCD$ . Il poligono circoscritto è di conseguenza minore del triangolo  $E$ , il che genera una contraddizione. Infatti è maggiore, dato che  $NA$  è uguale all'altezza del triangolo e che il perimetro del poligono è maggiore della base del triangolo. Pertanto il cerchio è equivalente al triangolo  $E$ .

Nel suo calcolo approssimato del rapporto tra circonferenza di un cerchio e diametro, Archimede diede un'ulteriore prova della sua abilità di calcolo. Partendo dall'esagono regolare inscritto, egli calcolò i perimetri dei poligoni ottenuti raddoppiando successivamente il numero dei lati fino a raggiungere novantasei lati. Il procedimento iterativo da lui usato per questi poligoni si ricollegava a quello che viene talvolta chiamato l'algoritmo archimedeo. Si sviluppa la serie  $P_n, p_n, P_{2n}, p_{2n}, P_{4n}, p_{4n}, \dots$ , dove  $P_n$  e  $p_n$  sono i perimetri dei poligoni regolari di  $n$  lati circoscritti ed inscritti. A partire dal terzo termine, si calcola ogni termine in base ai due termini precedenti prendendo alternativamente le loro medie armonica e geometrica. In altri termini:

$$P_{2n} = \frac{2p_n P_n}{(p_n + P_n)}$$

e

$$p_{2n} = \sqrt{p_n P_{2n}}$$

e così via. Il suo metodo per calcolare le radici quadrate, per trovare il perimetro dell'esagono circoscritto e per calcolare le medie geometriche era simile a quello usato dai Babilonesi. Il risultato del calcolo archimedeo relativo alla circonferenza era costituito da un'approssimazione al valore di  $\pi$  espressa dalla diseguaglianza  $3 + (10/71) < \pi < 3 + (10/70)$ , che era un valore migliore di quello ottenuto dagli Egiziani e dai Babilonesi (va tenuto presente che né Archimede, né alcun altro matematico greco fece mai uso della nostra notazione  $\pi$ , per indicare il valore del rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro). Così si esprime Archimede sul valore di  $\pi$ :

**“La circonferenza è uguale al triplo del diametro più una certa porzione del diametro stesso, più piccola dei  $10/70$  e più grande dei  $10/71$  del diametro stesso”.**

#### 6.3.4 Sulla sfera e sul cilindro

Tale opera rappresentò un libro molto importante per Archimede. Egli giunse infatti ad uno dei suoi risultati di maggiore rilievo: l'area e il volume

di una sfera sono nella stessa relazione con l'area e il volume del cilindro circoscritto. In particolare, dimostrò che la sfera equivale ai  $\frac{2}{3}$  del cilindro che la contiene. Archimede fu talmente affezionato a questo risultato che volle scolpita sulla sua tomba (di cui riporto una raffigurazione) una sfera e un cilindro.



Riuscì nel suo intento grazie al metodo di esaustione. Partendo dalla dimostrazione vista poc'anzi secondo la quale la superficie del cerchio equivale a quella del triangolo rettangolo avente come cateti la circonferenza ed il raggio, dedusse che

**“qualsiasi sfera è uguale a quattro volte il cono che ha la base uguale al cerchio massimo della sfera e l'altezza uguale al raggio della sfera.”**

Fu l'ennesima intuizione geniale, ma la dimostrazione risultò tutt'altro che semplice, tanto da impegnare al massimo lo studioso e mettere in risalto ancora una volta la sua eccellente abilità di geometra. L'altro problema risolto fu quello del volume della sfera:

**“Il volume della sfera equivale ai  $\frac{2}{3}$  del cilindro circoscritto.”**

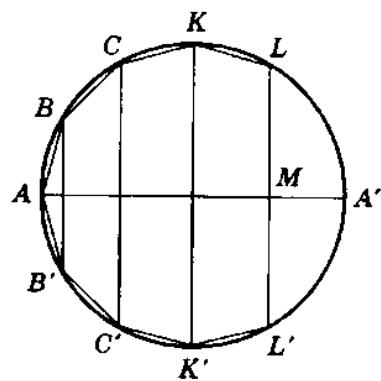
Anche in questo caso fu impiegato il metodo di esaustione. Inoltre sembra Archimede fosse stato il primo a scoprire e a dimostrare che

**“l’area di una qualsiasi sfera è quattro volte l’area del suo cerchio massimo.”**

e che

**“la superficie di una qualsiasi calotta sferica è uguale al cerchio il cui raggio sia uguale al segmento tracciato del vertice della calotta alla circonferenza del cerchio di base della calotta stessa.”**

Vediamo un altro risultato importante considerando la figura:



**“Se in un segmento di cerchio L'AL', viene inscritto un poligono in modo che tutti i suoi lati, esclusa la base, siano uguali e il loro numero sia pari, come LK...A...K'L', ove A è il punto di mezzo del segmento, e se si tracciano le linee BB', CC'..., parallele alla base LL' e congiungenti coppie di punti angolari, allora**

$$(BB' + CC' + \dots + LM) : AM = A'B : BA,$$

**ove M è il punto di mezzo di LL' e AA' è il diametro passante per M.”**

### 6.3.5 Sui conoidi e sui sferoidi

In questo trattato, Archimede calcolò le aree e i volumi delle sezioni di coni, sfere e paraboloidi. Non riuscì mai a calcolare l’area di un singolo seg-

mento di iperbole o ellisse, ma determinò l'area di tutta l'ellisse:

**“Le aree delle ellissi sono come i rettangoli formati dai loro assi.”**

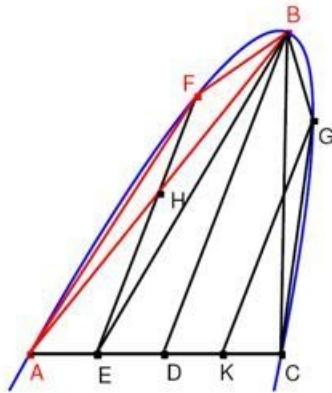
Equivalentemente, l'area dell'ellisse è uguale all'area del cerchio che ha un raggio che è la media geometrica dei semiassi dell'ellisse. Inoltre calcolò il volume dei segmenti determinati da un ellissoide, un paraboloide o un iperboloide di rivoluzione attorno all'asse principale. Per farlo utilizzò quello che oggi è l'analogo del principio di integrazione, che si svilupperà completamente in era moderna solo nel 1600 e verrà reso rigoroso, con il concetto di limite, a partire dal 1800. Ancora una volta, quindi, abbiamo la conferma di quanto la matematica moderna sia debitrice dei metodi di Archimede.

### 6.3.6 Quadratura della parabola

Ecco l'incipit dell'opera, noto anche come “*l'assioma di Archimede*”.

**“L'eccesso per cui la maggiore di due aree disuguali supera la minore può, se sommato a se stesso, diventare superiore a qualsiasi area finita data.”**

Ancora una volta, grazie a questo grande studioso, si riuscì a dare la soluzione ad un problema ancora aperto: la quadratura della parabola (che egli, come i suoi predecessori, chiamava *ortotomo* cioè *sezione di cono retto*) o più precisamente di un segmento di parabola, come mostra la figura sotto) e cioè la determinazione della sua area interna.



Archimede utilizzò con grande finezza, le tecniche geometriche in suo possesso ed in particolare il metodo di esaustione, per dimostrare che l'area di un qualsiasi segmento parabolico equivale ai  $4/3$  dell'area di un triangolo avente la stessa base e uguale altezza ( $ABC$  in figura). Il procedimento si basa sull'utilizzo di una successione di triangoli da aggiungere sui lati di quello di partenza che approssimano sempre più il segmento di parabola. Dato il punto  $D$ , punto medio di  $AC$ , si considerano i punti  $E$  e  $K$  (punti medi rispettivamente dei segmenti  $AD$  e  $DC$ ). Si tracciano le rette ortogonali ad  $AC$  e passanti per  $E$  e  $K$ . Le rette intersecano la parabola nei punti  $F$  e  $G$ . Si può dimostrare che l'area del triangolo  $ABC$  è quattro volte la somma delle aree dei triangoli  $AFB$  e  $CBG$ . Cioè:

$$A_{ABC} = 4(A_{AFB} + A_{CBG})$$

Iterando il procedimento, Archimede dimostrò che:

$$A_{PAR} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{ABC}}{4^n} = \frac{A_{ABC}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} A_{ABC}$$

Si sottolinea comunque il fatto che Archimede non parlò mai di somma della serie infinita in quanto, ai suoi tempi, i processi non finiti venivano disapprovati.

### 6.3.7 Arenario

Potrebbe essere definito un trattato sui grandi numeri. Si tratta di un'opera molto particolare e notevolmente all'avanguardia in quanto il sistema (di

tipo additivo, come quello romano) allora in uso per rappresentare i numeri non era particolarmente adatto a trattare quantità molto grandi. L'opera è dedicata a una delle figure più importanti della vita dello studioso, il già citato Gerone II, come appare anche dall'introduzione:

**“Ci sono alcuni, o re Gerone, che ritengono i granelli di sabbia essere una moltitudine infinita...”.**

Lo scopo dichiarato di Archimede, infatti, era quello di dimostrare che il numero di granelli di sabbia esistenti non è infinito, e di darne anche un limite (valutando quanti se ne dovrebbero impiegare per riempire la sfera celeste, da qui il titolo dell'opera Arenario che significa “*il contatore dei granelli di sabbia*”). Per far ciò, egli citò la teoria di Aristarco di Samo (eliocentrica) sul cosmo. Tale sistema astronomico, avrebbe comportato un mutamento nelle posizioni relative delle stelle fisse, corrispondente allo spostamento della Terra di parecchi milioni di chilometri nel suo moto attorno al Sole. L'assenza di tale spostamento dovuto all'effetto di parallasse, indusse i maggiori astronomi dell'antichità (forse Archimede compreso), a respingere l'ipotesi eliocentrica, sebbene Aristarco avesse giustificato l'assenza di parallasse con l'enorme distanza delle stelle fisse dalla Terra. Archimede discusse le dimensioni della Terra medesima e dell'Universo, cercando di stimare la distanza fra i vari corpi celesti e poi creando un metodo di rappresentazione numerica delle grandi quantità coinvolte in queste valutazioni. Per tale metodo, egli scelse come base della scrittura delle cifre la *Miriade*, che equivale a 10000, considerando poi ordini di potenze successive, fino a numeri dell'ordine di  $10^n$  ove n è un numero con più di 10000 cifre. Con Archimede si ebbe dunque un primo tentativo da parte di uno scienziato di determinare ed esprimere in maniera chiara e semplice una numerazione per cifre così elevate.

### 6.3.8 Sull'equilibrio dei piani

Quest'opera è composta da due libri. Descrive la legge di equilibrio delle leve e determina le aree e il centro di gravità (baricentro) di varie figure geometriche. Potremmo quindi definirlo un trattato di statica. Questo, tuttavia, non è il più antico testo di fisica: Aristotele, infatti, quasi un secolo prima, aveva pubblicato un'opera intitolata appunto *Fisica*. Nonostante ciò, c'è una notevole differenza tra le due opere in quanto, in Archimede, lo sforzo è quello di trattare gli argomenti in maniera matematizzata, aspetto quasi assente

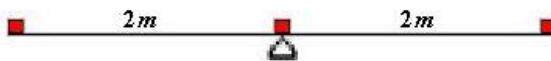
nell'illustre filosofo. Il primo libro si concentra sul principio di equilibrio della leva e sullo studio dei baricentri del triangolo e del trapezio. Archimede non fu certamente il primo studioso a occuparsi di questo strumento (già noto da tempo anche all'epoca) e neanche il primo a enunciarne i principi generali. È sicuro però che il suo punto di vista nello studio di questo oggetto e il suo modo di esprimersi sui risultati ottenuti fu a dir poco unico per il suo tempo. Già in diversi scritti aristotelici si trova il seguente principio:

**“Due pesi posti su una bilancia si trovano in equilibrio quando sono inversamente proporzionali alle rispettive distanze dal fulcro.”**

Aristotele aveva dedotto tale principio da ragionamenti cinematici, Archimede lo dedusse invece da ragionamenti statici; infatti osservò che

**“Corpi a simmetria bilaterale sono in equilibrio.”**

Il suo ragionamento può essere espresso in questo modo: supponiamo che una sbarra ideale lunga 4 metri sostenga tre pesi da 1 kg ognuno (uno al centro e uno per estremo) e sia in equilibrio su un fulcro posto nel centro, come in figura.



Se consideriamo il postulato archimedeo sulla simmetria, il sistema è in equilibrio. Se ora si considera solo la parte destra del sistema, avvicinando i due pesi (distanti 2 metri) nel punto medio del braccio destro, permane l'equilibrio.

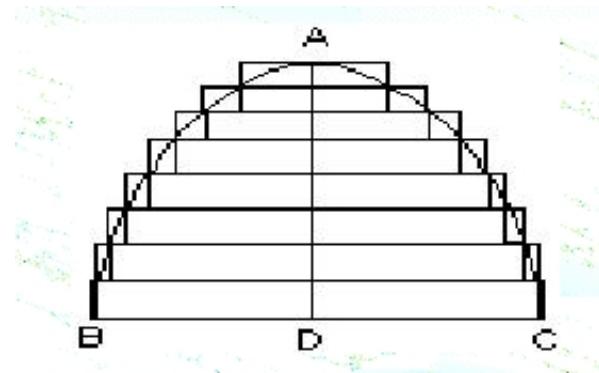


Quindi si deduce che un peso di 1kg sostiene un peso di 2kg nell'altro braccio se il fulcro della leva è a 2 metri dal peso unitario e a 1 metro dall'altro peso.

Archimede rimase in ogni caso molto affascinato dalla leva, tanto da utilizzarla in numerose sue invenzioni e macchine da guerra. Era così sicuro della sua conoscenza di questo strumento che è divenuta celebre la sua massima:

**“Datemi un punto di appoggio e vi solleverò il mondo.”**

Nel Medioevo in fisica verranno uniti i punti di vista statico di Archimede e dinamico di Aristotele, ottenendo così vari risultati dal punto di vista scientifico-matematico. Anche per lo studio del baricentro (concetto già noto anche all'epoca) si deve ad Archimede il contributo necessario a creare una descrizione accurata e scientifica; ciò avviene nel secondo libro, dove il matematico concentra i suoi studi sul centro di massa di una parabola sfruttando il principio di esaustione. Con tale metodo, l'area della parabola si approssima tramite rettangoli che permettono una stima in eccesso e/o in difetto. Dalla successiva figura,



si può notare che all'aumentare del numero di questi rettangoli, migliorerà la precisione con cui l'immagine data dai rettangoli si “avvicina” a quella della parabola. Questo metodo di ragionamento sarà poi ripreso da Leibniz nel 1600 ed è alla base del calcolo degli integrali nel calcolo infinitesimale. Inoltre, Archimede studiò il baricentro di un segmento di parabola e, sempre grazie al principio di esaustione, dimostrò che tale centro è situato sul diametro del segmento e divide questo diametro in segmenti che stanno nel rapporto di 3 a 2.

### 6.3.9 Il libro dei lemmi

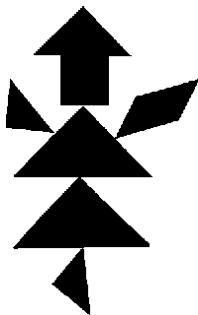
Quest'opera non ci è giunta dall'originale greco, ma da una traduzione araba. Il sospetto è che, come purtroppo spesso avveniva durante le ricopiate, al testo siano state aggiunte osservazioni di altri, come si deduce anche dal fatto che spesso si parla di Archimede in terza persona. Rimane, comunque, un'opera molto importante. Infatti in essa si vede come Archimede, pur essendo interessato a risultati molto generali, fosse affascinato da problemi e strumenti dell'uso quotidiano; vengono descritti e analizzati l'*arbelos* (cioè il coltello del calzolaio) e la saliera, affiancati da problemi molto più complessi quali la trisezione dell'angolo generico. Da queste osservazioni della vita quotidiana, Archimede traeva spunto per inventare le sue ingegnose macchine ed elaborare i suoi metodi di analisi.

### 6.3.10 Problema dei buoi

Anche per quest'opera vi sono dei dubbi sull'autenticità, di certo essa risale a pochi decenni prima della sua morte. Il *Problema dei buoi* era una sfida lanciata ai matematici, cui si chiedeva di risolvere un sistema di equazioni indeterminate a otto incognite; bisognava cioè determinare il numero di buoi e di mucche di quattro colori diversi. Ci fu qualche ambiguità nella formulazione del problema, ma forse servirebbe un volume di oltre 600 pagine per esprimere i valori delle otto incognite contenute in una delle soluzioni possibili.

### 6.3.11 Stomachion

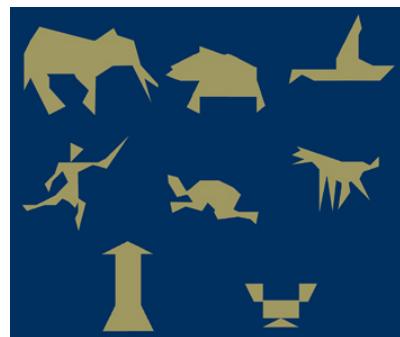
È l'equivalente dell'attuale *tangram* (gioco di origine orientale) che consiste in un puzzle composto da vari pezzi geometrici con i quali comporre varie figure. Anche in questo caso, Archimede partì da quello che può sembrare un semplice gioco per effettuare i suoi studi scientifici. Ne approfittò, infatti, per determinare le aree delle varie parti delle figure. Varie testimonianze indicano, inoltre, che il nostro studioso cercò di capire in quante e quali combinazioni diverse potevano essere assemblati i singoli pezzi di carta per formare un quadrato. Ecco un esempio dell'attuale tangram:



e il corrispettivo stomachion



Per finire alcune figure fatte con lo stomachion



### 6.3.12 Il Metodo

È un'opera, sotto forma di epistole, riscoperta solo nel 1906, dallo studioso danese J.L.Heiberg a Costantinopoli, purtroppo con una parte mancante. È costituita da una serie di lettere inviate ad Eratostene, bibliotecario di Alessandria d'Egitto. Come pretesto, Archimede dapprima mise al corrente il suo

interlocutore su alcuni risultati matematici ottenuti (per esempio aveva proposto che il volume dell'unghia cilindrica è  $1/6$  del volume del cubo):

**“Ti ho precedentemente inviato alcuni dei teoremi da me trovati, scrivendo di essi gli enunciati e invitandoti a trovare le dimostrazioni, che non avevo ancora indicate...”**

Successivamente lo scienziato esprime al bibliotecario il contenuto più profondo della sua opera:

**“Vedendoti poi, come ho detto, diligente ed egregio maestro di filosofia, e tale da apprezzare anche nelle matematiche la teoria che [ti] accada [di] considerare, decisi di scriverti e di esporti nello stesso libro le caratteristiche di un certo metodo mediante il quale ti sarà data la possibilità di considerare questioni matematiche per mezzo della meccanica”.**

In questa opera, Archimede descrisse il metodo d'indagine che gli permise di giungere alle sue maggiori scoperte matematiche e fisiche. È interessante notare che Archimede spiegò esplicitamente, che si devono usare metodi empirici e anche non rigorosi per scoprire i teoremi che poi verranno effettivamente dimostrati con metodi più rigorosi (per esempio il metodo di esaustione). Infatti, per usare il metodo di esaustione, bisogna prima sapere cosa si vuole dimostrare, quindi è necessario che esso sia preceduto da uno studio meno rigoroso, ma più capace di “scoprire come stanno le cose”. Come al solito, anche quest'opera è estremamente ricca. Introduce, infatti, metodi di calcolo integrale ed infinitesimale, che solo nel secolo XVII saranno sviluppati e diverranno patrimonio dell'analisi matematica, ad opera di Newton e Leibniz. Archimede studiò il volume e la superficie delle figure geometriche attraverso l'idea intuitiva di dividerle “in un numero infinito di sezioni infinitamente piccole”. In tal modo egli arrivò a scoprire molte formule per aree e volumi di figure complesse. Vediamo come si articolava il pensiero di Archimede: ogni figura veniva da lui ipotizzata come composta di elementi infinitesimali, linee rette nel caso di figure piane e superfici nel caso di solidi. Dunque il triangolo e il segmento parabolico sono composti da corde parallele, il cilindro, la sfera e il cono da sezioni circolari parallele, e analogamente per altre figure. In ogni figura il numero degli elementi è infinito sebbene Archimede non lo disse

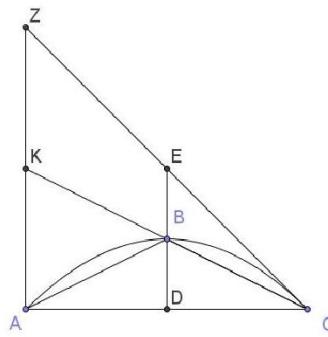
mai esplicitamente. Ora per calcolare la superficie o il volume di una figura  $X$ , piana o solida, si deve scegliere opportunamente un'altra figura  $B$  di cui si conosca la superficie o il volume e la posizione del centro di gravità. Si dispongono a questo punto le due figure in modo tale che i loro diametri o i loro assi giacciono sulla stessa retta, a questo punto anche i loro centri di gravità apparterranno a tale retta. Si segano, quindi, le due figure con piani paralleli e (in generale) perpendicolari all'asse; le sezioni così ottenute sono i loro elementi infinitesimali, e le due sezioni fatte dallo stesso piano nell'una e nell'altra figura si considerano come elementi corrispondenti. Si prolunga di una lunghezza opportuna il diametro o l'asse, e il segmento ottenuto si considera come l'asta di una leva di primo genere. Si tratta ora di stabilire sulla leva l'equilibrio tra gli elementi di  $X$  e di  $B$ , fissato preventivamente il punto d'appoggio  $P$ , o fulcro della leva. Come abbiamo visto precedentemente, Archimede sapeva che due grandezze sospese ai bracci di una leva si fanno equilibrio quando è uguale il prodotto delle loro superficie o volumi per la distanza del loro centro di gravità dal fulcro; in altre parole “quando i loro momenti rispetto al punto d'appoggio sono uguali”. Per determinare il momento di  $X$  si può procedere in questo modo: uno qualsiasi dei piani tra loro paralleli e perpendicolari alla leva abbia da  $P$  la distanza  $d$  e determini nella figura  $X$  la sezione  $v$ , e nella figura  $B$  la sezione  $u$ ; a questo punto  $v \cdot dx$  e  $u \cdot dx$  saranno gli elementi corrispondenti di  $X$  e di  $B$ . Dal momento che  $v : u = x : d$  (relazione che negli esempi trattati da Archimede si riesce a stabilire con facili considerazioni geometriche), si avrà che ogni elemento di  $X$  sospeso dalla leva alla distanza  $d$  da  $P$  farà equilibrio al corrispondente elemento di  $B$  situato al suo posto. Immaginiamo allora che ciascun elemento di  $X$ , sia trasportato e sospeso per il corrispondente centro di gravità nello stesso punto della leva, situato alla distanza  $d$  da  $P$ , dalla parte opposta, rispetto a  $P$ , a quello a cui sono situati gli elementi di  $B$ , i quali rimangono invece al loro posto. Anche in questa posizione ciascun elemento di  $X$  fa da equilibrio al corrispondente elemento di  $B$ . Questo vuol dire che la figura  $X$  sospesa per il suo centro di gravità nello stesso punto in cui si erano sospesi i suoi elementi fa equilibrio alla  $B$  situata al suo posto; i loro momenti saranno dunque uguali. Il momento di  $X$  rispetto a  $P$  è  $Vd$ ; indicando con  $V$  la sua superficie o volume; e considerando  $b$  la distanza nota da  $P$  del centro di gravità di  $B$ , allora  $Ub$  è il suo momento. Quindi,  $Vd = Ub$  da cui  $V = \frac{Ub}{d}$  oppure  $d = \frac{Ub}{V}$ . Possiamo così ricavare rispettivamente la superficie e il volume di  $X$ , o il suo centro di gravità se si conosce  $V$ . Vediamo ora un esempio di tale ragionamento applicato al calcolo dell'area

del segmento parabolico: Dato il segmento parabolico  $ABC$ , si traccino  $CZ$  tangente alla parabola in  $C$ , l'asse della parabola  $DE$ ,  $AZ$  parallela a  $DE$ , e  $CK$  prolungamento di  $CB$ . Archimede aveva già dimostrato che  $AK = KZ$ ,  $DB = BE$  e  $CB = BK$ . Sia ora  $\Delta(PQR)$  l'area del triangolo. Ne conseguono le proprietà dei triangoli su base  $AC$ :

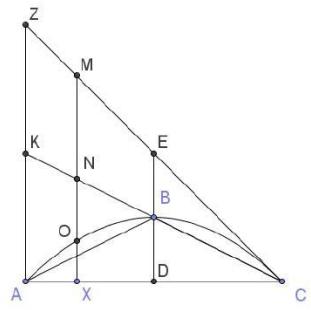
$$\Delta(ACK) = \frac{1}{2}\Delta(ACZ)$$

$$\Delta(ABC) = \frac{1}{2}\Delta(ACK) = \frac{1}{4}\Delta(ACZ)$$

La figura che segue mostra la costruzione grafica del problema.



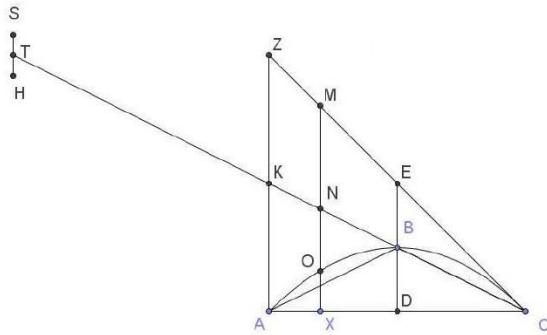
Successivamente Archimede posizionò il punto  $X$  a caso sul segmento  $AC$  e tracciò  $XM$  parallelamente all'asse della parabola. Si noti che  $XM$  interseca la parabola in  $O$  e  $CK$  in  $N$ .



Con le proprietà della parabola Archimede dimostrò che:

$$MX : OX = AC : AX$$

Ora si prolunghi  $CK$  tale che  $KT = CK$  e si “trasporti”  $OX$  in  $T$  ponendo  $SH = OX$  con  $SH$  parallelo a  $OX$  e  $T$  punto medio di  $SH$ .



A causa del parallelismo si ha  $AC : AX = KC : KN$ , quindi  $MX : OX = KC : KN$  ossia  $MX : OX = KT : KN$ . Per finire:

$$MX : SH = KT : KN$$

Archimede considerò i segmenti  $MX$  e  $SH$  come pesi su una bilancia di bracci  $TK$  e  $KN$ . La proporzione gli suggerì che tali pesi stanno in equilibrio. Quindi ogni linea  $MX$  parallela all'asse della parabola, e interna al triangolo  $ACZ$ , è in equilibrio con la sua sezione  $OX$  delimitata dal segmento parabolico  $ABC$  posizionata in  $T$  rispetto al fulcro  $K$ . Il ragionamento vale per ogni  $MX$  e  $OX$ , dunque vale anche se consideriamo tutte le linee insieme. La somma di tutti gli  $MX$  dà il triangolo  $ACZ$ , mentre la somma di tutte le linee  $OX$  dà il segmento parabolico. Il triangolo  $ACZ$  è in equilibrio con il segmento parabolico (posizionato in  $T$ ) rispetto al fulcro  $K$ . Ora dato che la posizione del punto  $X$  e di conseguenza del punto  $N$  (su  $KC$ ) è variabile, dove va posizionato il peso di  $ACZ$ ? Nel baricentro di  $ACZ$ , che si trova sulla mediana  $KC$  a distanza  $1/3KC$  (ossia  $1/3KT$ ) dal fulcro  $K$ . Dato che il braccio di  $ACZ$  è  $1/3$  del braccio  $KT$  e i pesi sono in equilibrio, ne consegue che il peso di  $ACZ$  è triplo del peso del segmento parabolico. Si ha perciò che l'area del segmento parabolico è  $1/3$  dell'area del triangolo  $ACZ$ . Ne consegue che, se indichiamo con  $S(ABC)$  l'area del segmento parabolico, allora:

$$S(ABC) = \frac{1}{3} \Delta(ACZ) = \frac{1}{3} \cdot 4\Delta(ABC) = \frac{4}{3} \Delta(ABC)$$

Lo studioso aveva molta fiducia nel suo metodo “meccanico”, a tal punto che scrisse:

**“Sono convinto che porterà non piccola utilità nella matematica: confido infatti che alcuni dei matematici attuali o dei futuri, essendo stato loro mostrato questo metodo, ritroveranno anche altri teoremi da noi non escogitati.”**

Dato che questo trattato andò perduto (come precedentemente detto ritrovato solo nel 1906) e dato che Archimede non utilizzò questo metodo nelle altre opere a noi note (sfruttò solo il principio di esaustione), nessun altro matematico antecedente alla data del ritrovamento dell’opera, che utilizzò metodi simili, ebbe mai la certezza che tale sistema potesse essere stato adottato prima di lui e addirittura nell’età ellenistica. Nonostante tutto, però, alcuni studiosi avanzarono ipotesi su questa possibilità, anche se non erano in possesso di prove. Tra questi, ricordiamo Evangelista Torricelli, che scrisse:

**“Che questa geometria degli indivisibili sia invenzione del tutto nuova, non oserei affermarlo. Crederei piuttosto che gli antichi geometri si siano serviti di questo modo nell’invenzione dei teoremi più difficili, benché nelle dimostrazioni abbiano seguito un’altra via, sia per occultare il segreto dell’arte, sia per non offrire agli invidi detrattori alcuna occasione per contraddirli.”**

## 6.4 Archimede inventore

Archimede fu un personaggio poliedrico, come abbiamo potuto osservare. Fu un matematico, un fisico, uno scienziato complesso e quindi non ci stupisce che fosse anche un inventore di sorprendente genialità. A lui furono attribuite numerosissime invenzioni fra le quali la vite senza fine (coclea), un planetario, gli specchi ustori e potenti e originali macchine belliche. Ancora una volta è necessario osservare che spesso la leggenda che avvolge lo studioso rende difficile distinguere il mito dalla realtà. È certo, però, che ci sono giunte

diverse testimonianze di storici noti, come Plutarco o Livio, che ci aiutano nel nostro studio. Vediamo alcune delle invenzioni di Archimede.

#### 6.4.1 Vite di Archimede



La “*vite di Archimede*” o “*coclea*” (chiamata così perché la sua forma ricorda una chiocciola) è un macchinario idraulico. Permette di spostare grandi quantità di acqua da un livello più basso a uno più alto (come nel caso dei pozzi). È costituita da un cilindro in cui è situata una massiccia spirale di legno. Veniva collocata inclinata nell’acqua, con le estremità aperte, in modo tale che l’acqua potesse fuoriuscire in alto passando per le volute della spirale; il tutto azionato da una manovella. Nella foto successiva invece vediamo moderne viti di Archimede, sostituite ai mulini a vento impiegati per drenare i polder (tratti di mare asciugati artificialmente attraverso dighe e sistemi di drenaggio dell’acqua), in Olanda.



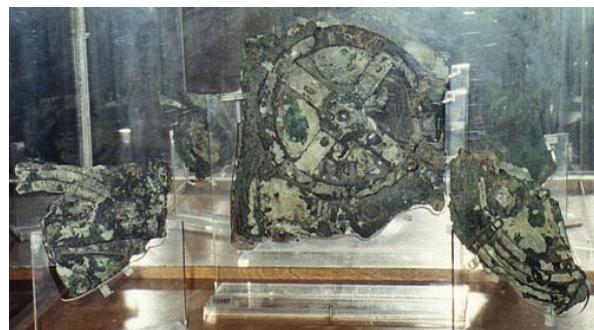
Archimede, inoltre, era anche esperto di ingegneria nautica. Tito Livio narrò il primo incontro tra il re Gerone e lo scienziato. Il re di Siracusa aveva fatto costruire un'immensa nave come dono per il re d'Alessandria. L'imbarcazione, però, era così possente che si temeva di non riuscire a portarla dai cantieri al mare. Archimede, comodamente seduto sulla spiaggia, impartì gli ordini necessari e anche grazie ai macchinari costituiti da corde, carrucole e pulegge da lui inventati, portò a termine il compito senza imprevisti. Infatti:

**“Là dove tutti i siracusani uniti non potevano assolutamente muoverla, Archimede fece sì che Gerone da solo potesse porla in mare.”**

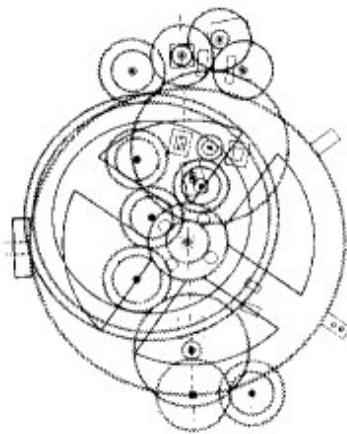
Da quel momento, affascinato da tanto genio, Gerone volle sempre al suo fianco Archimede (come abbiamo visto per esempio nell'aneddoto che portò Archimede alla determinazione del principio idrostatico).

#### 6.4.2 Meccanismo di Anticitera

Con tale invenzione si passa all'astronomia.

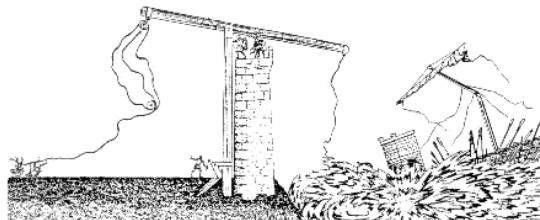


Questa volta la testimonianza ci giunge da Cicerone; narrò che il console Marcello, di ritorno dall'assedio di Siracusa, portò con sé un macchinario che riproduceva la sfera celeste e i pianeti, l'equivalente dei nostri planetari. Per diverso tempo si pensò che anche questo facesse parte della leggenda, fino a che non fu scoperto, nel 1902, il “*Meccanismo di Anticitera*”, così chiamato perché ritrovato nel relitto di una nave vicino all’isola Anticitera. È costituito da diversi ingranaggi con ruote dentate e serve a calcolare (lo si capì verso il 1950) il sorgere del Sole, le fasi lunari, gli equinozi, i mesi e i giorni della settimana, nonché il moto dei pianeti e il tutto con estrema precisione. Rappresenta il più antico calcolatore meccanico finora conosciuto ed è attualmente custodito presso il Museo Nazionale di Atene. Vediamo uno schema degli ingranaggi della macchina:



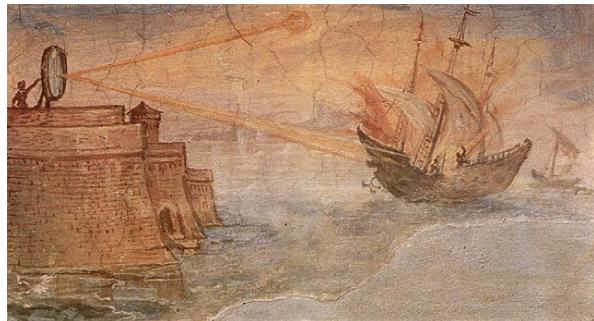
#### 6.4.3 Macchinari bellici

Archimede, sebbene mai si sia vantato dei suoi risultati in questo campo, è noto anche per le sue macchine da guerra che permisero ai siracusani di dare del filo da torcere al potente esercito romano durante il famoso “*Sacco di Siracusa*”. L'esito della battaglia tra romani e siracusani, sarebbe stata scontata e rapida senza l'aiuto dello studioso. L'assedio, che sarebbe dovuto durare 5 giorni, in realtà si prolungò di molti anni. I romani, che attaccavano sia via terra che via mare, possedevano fionde, balestre e la “*sambuca*” (una torre di legno che, posta sulle navi a ridosso delle città, permettevano di scavalcare le mura cittadine). I siracusani, però, riuscirono a contrastarli, grazie a potenti macchine quali la “*catapulta*”, perfezionata da Archimede e munita di ruote, con la quale scagliavano enormi pesi per affondare le navi, anche se molto lontane. Massi di spropositata grandezza venivano lanciati dalla sommità delle colline grazie ad appositi sistemi di leve per annientare l'esercito di terra. Abbiamo una testimonianza diretta dell'efficacia di queste potentissime macchine da guerra, lasciataci da Plutarco nella “*Vita di Marcello*”. Gli assediati gettavano, sui nemici romani, proiettili di ogni sorta, dalle pietre all'olio bollente. Ad Archimede si attribuiscono altri due macchinari bellici: la “*Manus Ferrea*” e gli “*specchi ustori*”. Il primo consisteva in un artiglio meccanico in grado di ribaltare le imbarcazioni nemiche e spezzarle al centro.



I secondi erano grandi lamine concave di bronzo che erano in grado di concentrare i raggi solari e bruciare a distanza le navi romane. L'idea alla base della costruzione degli specchi ustori è quella di usare una superficie riflettente che raggruppa in un punto (detto fuoco) i raggi che raggiungono l'intera area (concetto anche alla base delle centrali solari). Tutto ciò permetterebbe di incendiare un materiale infiammabile posto esattamente nel fuoco. La forma

più semplice per tali specchi è un paraboloido di rotazione ottenuto facendo ruotare una parabola attorno ad un suo asse. Questa conica, infatti, è dotata di un fuoco tale che i raggi paralleli all'asse (come possono essere considerati i raggi solari, essendo il Sole molto distante da noi), passano tutti per il fuoco stesso. Il fuoco dipende dalla curvatura, quindi se si vuole bruciare lontano, lo specchio deve essere relativamente piatto. Capiamo, quindi, quant'è elaborata la costruzione di questo strumento ed è difficile credere che all'epoca sia stato possibile realizzarlo. Nonostante tutti i dubbi e gli esperimenti condotti finora, un professore del MIT (Massachusetts Institute of Technology), prestigioso istituto statunitense, ha dimostrato che l'inventore siracusano avrebbe potuto realmente ideare un tale strumento. Nella foto successiva, una raffigurazione di come potesse essere utilizzato uno specchio ustore.



## 6.5 Archimede e le onoreficienze al giorno d'oggi

1. Nella Medaglia Fields, massima onorificenza per matematici, vi è nel verso della medaglia il ritratto di Archimede.



2. Il 14 marzo si festeggia in tutto il mondo il *pi greco day*, in quanto nei paesi anglosassoni, corrisponde al 3/14. In quel giorno vengono organizzati concorsi di matematica e ricordati anche i contributi di Archimede, che del  $\pi$  diede la prima stima accurata.
3. In onore di Archimede sono stati nominati sia il cratere lunare *Archimede* che l'asteroide 3600 *Archimede*.
4. È in fase di realizzazione il *Progetto Archimede*, una centrale solare presso Priolo Gargallo che utilizza una serie di specchi per produrre energia elettrica.
5. “*Archimedes*” fu uno dei primi personal computer con processore RISC immessi sul mercato dalla fine degli anni ottanta.
6. Il motto dello stato della California è *Eureka!*, con chiaro riferimento allo scienziato.
7. A Siracusa, nei pressi del parco archeologico della Neapolis, è stato allestito permanentemente un parco tecnologico denominato “*Tecnoparco Archimede*”. In una superficie espositiva di  $1700m^2$ , sono ospitate repliche (a grandezza naturale o in scala) di macchine da guerra utilizzate nel III secolo a.C. ed autentici strumenti tecnologici ideati dal genio di Archimede quali gru, argani, ruote dentate, baliste, viti di Archimede, orologi ad acqua, specchi ustori, corobate ed altro ancora.
8. Il 9 dicembre 2011 è stato inaugurato da una società privata a Siracusa l’ “*Archimedion*” un museo che raccoglie tutte le famose invenzioni di Archimede approntate dagli scienziati del CNR

## 6.6 Considerazioni finali

L'opera di Archimede rappresenta certamente il culmine della scienza antica. In essa, la capacità di individuare insiemi di postulati utili a fondare nuove teorie si coniuga con la potenza e originalità degli strumenti matematici introdotti, l'interesse per questioni che oggi si definirebbero "fondazionali" con attenzione agli aspetti applicativi. Archimede, più che essere matematico, fisico e ingegnere, è stato il massimo esponente di una scienza che ignorava le divisioni che l'odierna terminologia spinge a considerare inevitabili. Archimede, almeno a giudicare dalle opere rimaste, non ebbe nell'antichità eredi a lui confrontabili. La crisi che colpì la scienza rese poco comprensibili le sue opere che, non a caso, anche quando si sono conservate sono state trasmesse da una tradizione manoscritta estremamente esile. Lo studio delle opere di Archimede, che impegnò a lungo gli studiosi della prima età moderna (ad esempio Piero della Francesca, Francesco Maurolico, Simone Stevino, Galileo Galilei) costituì un importante stimolo alla rinascita scientifica moderna. L'influenza di Archimede negli ultimi secoli (ad esempio sullo sviluppo di un'analisi matematica rigorosa) è oggetto, anche ai giorni nostri, di valutazioni discordi da parte degli studiosi.

# Bibliografia

- [1] Carl B. Boyer, *Storia della Matematica*, Ed. Italiana, Milano, 2010, Mondadori.
- [2] I. Grattan - Guinness, *The rainbow of mathematics. A history of the mathematical sciences*, Norton & C., 2000
- [3] M. Geymonat, *Il grande Archimede*, Sandro Teti Editore, 2008
- [4] relazione di Maria Chiara Bertolini e Jessica Dalla Torre
- [5] siti vari su Internet
- [6] fonte principali delle foto: Wikipedia

# Capitolo 7

## I problemi classici

di Anna Boscolo

### 7.1 I problemi geometrici

#### 7.1.1 I problemi nella geometria di Euclide

Gli *Elementi* di Euclide sono senza dubbio il testo di geometria più letto e studiato nella storia. Quest'opera si può considerare la summa della geometria del tempo: essa elabora, organizza e sistematizza i risultati ottenuti dai matematici greci dando alla teoria un'impostazione assiomatica-deduttiva. La geometria degli *Elementi* si può definire come la geometria della riga e del compasso; i primi tre postulati infatti riguardano le operazioni elementari eseguibili con i due strumenti:

1. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta.
2. La linea retta si può prolungare indefinitamente.
3. Dato un punto  $P$  e un segmento  $r$  esiste sempre la circonferenza con centro in  $P$  e raggio  $r$ .

A partire dai postulati e dalle definizioni Euclide costruisce la sua teoria geometrica, che si articola in *problemi* e *teoremi*; i primi sono legati a costruzioni geometriche eseguibili con i due soli strumenti: riga non graduata e compasso collassabile. Vengono spiegate le costruzioni di tutte le figure o enti geometrici analizzati nell'opera; si tratta di descrizioni di procedimenti che hanno

ormai assunto un carattere ideale ma che conservano la forza dell'intuizione. In questo modo si viene a garantire l'“esistenza” degli oggetti di cui si discute. I teoremi sono invece proposizioni che esprimono le proprietà degli enti geometrici che vanno dimostrate a partire dalle definizioni e dai postulati o da altri teoremi dimostrati in precedenza.

La tradizione ci tramanda alcuni problemi che non hanno trovato soluzione nell'antica Grecia né nei secoli successivi (dove per trovare la soluzione si intendeva trovare la costruzione). I più famosi, denominati i “tre problemi classici” sono: la trisezione di un angolo, la duplicazione del cubo e la quadratura del cerchio. La necessità di trovare una costruzione per questi problemi e la ragione per cui i matematici per così tanti secoli hanno cercato una soluzione si comprende se, come abbiamo fatto, si inquadra la questione nel contesto della matematica degli *Elementi*.

### **Le operazioni con riga e compasso**

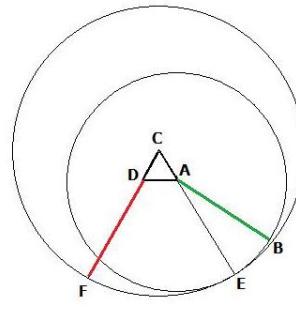
Vogliamo sottolineare come la riga e il compasso fossero anche degli strumenti di calcolo, ogni problema riguardante grandezze continue veniva tradotto in linguaggio geometrico e saper fare il conto equivaleva a saper costruire il segmento la cui lunghezza rappresentava la soluzione del problema. La scelta di questi due strumenti comporta due vantaggi notevoli: un errore di precisione relativamente piccolo e la facilità di riprodurlo anche con dati iniziali diversi. Cerchiamo di capire praticamente come si eseguono le operazioni con la riga e il compasso.

Una prima cosa da notare è che il compasso collassabile non conserva la misura di un segmento una volta che sia staccato dal foglio. Quindi per riportare una lunghezza in un'altra parte del piano, operazione necessaria in molte costruzioni, bisogna seguire un certo procedimento. Descriviamo la costruzione: dato il segmento  $AB$ , si tracci la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AB$  e si scelga un punto  $C$  (da questa scelta dipenderà la posizione del segmento trasportato). Si disegni la retta che sega i punti  $A$  e  $C$  e si segni il punto  $E$  di intersezione della retta con la circonferenza. Si disegni ora la circonferenza di raggio  $CE$  e centro  $C$  e si individui un particolare raggio di tale circonferenza, precisamente quel raggio che è il prolungamento del lato del triangolo equilatero costruito sul lato  $AC$ . Il segmento  $DF$  è lungo quanto  $AB$ .

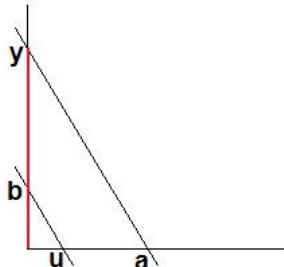
Fissiamo ora un segmento  $u$  come unità di misura. A partire da  $u$ , servendoci di riga e compasso, possiamo facilmente verificare che è possibile costruire:

- un qualsiasi numero un naturale  $n$  (basta riportare il segmento unitario  $n$  volte su una retta);
- la somma e la differenza di due numeri costruibili  $a$  e  $b$  (per la somma basta riportare consecutivamente i due segmenti e per la differenza basta sovrapporli in modo che abbiano un vertice in comune);
- il prodotto di due numeri  $a$  e  $b$ : Consideriamo i due numeri (positivi)  $a$  e  $b$  come lunghezze di segmenti, si disegni un triangolo che abbia due lati di misura  $b$  e  $u$ , nella Fig. 1 si è considerato un triangolo rettangolo, ma la costruzione vale per qualunque triangolo. Si prolunghi il lato unitario finché non abbia lunghezza  $a$  e si disegni il triangolo simile a quello di partenza con il lato  $a$  corrispondente al lato  $u$ . Questo triangolo ha il cateto corrispondente al lato  $b$  di lunghezza  $ab$  come risulta facilmente dalla similitudine tra i due triangoli;
- il quoziente di due numeri  $a$  e  $b$  (Per costruire il quoziente si procede in modo analogo al prodotto con un procedimento inverso, Fig. 2).

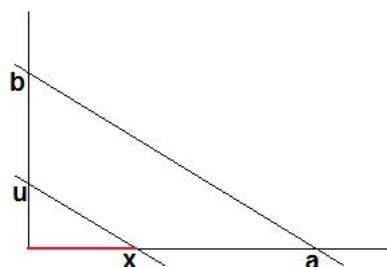
Quindi con riga e compasso si possono costruire tutti gli elementi del campo di razionalità definito dalle coordinate dei punti dati,  $K = [1, a, b, c, \dots]$ .



**Costruzione A**



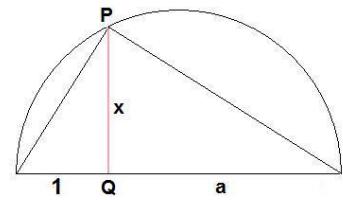
**Fig 1**



**Fig 2**

Vediamo ora come è possibile costruire, a partire da un segmento di lunghezza unitaria e uno di lunghezza arbitraria  $a$ , un segmento di lunghezza pari alla radice quadrata di  $a$ :

Disegniamo la circonferenza di diametro  $1 + a$ . Detto  $Q$  un punto sul diametro che dista 1 da una delle due estremità dello stesso, si tracci la perpendicolare al diametro passante  $Q$ . Detto  $P$  il punto di intersezione della perpendicolare con la circonferenza, la lunghezza  $x$  del segmento  $QP$  è la radice quadrata cercata.



Infatti, per il secondo Teorema di Euclide

$$1 : x = x : a \Rightarrow x = \sqrt{a}.$$

### 7.1.2 Risolubilità dei problemi geometrici

Se cerchiamo di risolvere i problemi della geometria in un contesto più ampio di quello degli *Elementi* possiamo affermare con sicurezza che la classe dei problemi risolubili con riga e compasso è molto ristretta rispetto alla categoria dei problemi di cui si conosce una soluzione. Grazie agli sviluppi dell'algebra e della geometria analitica è stato possibile caratterizzare con precisione i problemi risolubili con riga e compasso. Nel corso del XIX secolo lo studio delle equazioni risolubili per radicali unito allo sviluppo della geometria analitica ha fatto luce sui problemi della geometria elementare.

Per affrontare l'argomento è necessario introdurre una teoria dell'algebra relativamente moderna: “la teoria dei campi di razionalità”. Si dice campo

di razionalità un insieme di numeri che contiene ogni numero che si può ottenere dai numeri stessi mediante operazioni razionali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione). Tale campo può essere esteso o ampliato con l'aggiunta di un elemento che non ne faccia parte: il nuovo campo conterrà allora tutti i risultati delle operazioni razionali eseguite sugli gli elementi del campo primitivo e sull'elemento aggiunto, oppure si può ampliare aggiungendo una determinata operazione.

L'esame delle costruzioni che si possono ottenere con determinati strumenti comporta due stadi, uno di pertinenza della geometria analitica, uno dell'algebra. La geometria analitica permette di tradurre in linguaggio algebrico problemi geometrici, ogni operazione geometrica trova riscontro in un'operazione analitica. Perciò una prima analisi si deve soffermare nell'individuare quale sia l'operazione analitica a cui corrisponde una costruzione eseguita con un determinato strumento (ad esempio riga o compasso ect..); poi spetta all'algebra esaminare ciascuna delle equazioni a cui conduce il problema proposto.

Cerchiamo quindi di rispondere alla domanda *Quali problemi geometrici sono risolubili con riga e compasso?*

I dati del problema così come i risultati saranno rette, circonferenze e punti di intersezione, ma possiamo operare una semplificazione considerando al posto di una retta due punti che sono segati da questa, al posto di una circonferenza il suo centro e la lunghezza del suo raggio; con ciò il nostro problema si riduce a: dato un numero finito di punti costruire un punto che abbia con quelli determinate relazioni. Per tradurre sotto forma analitica il problema, riferiamo i punti dati e il punto incongnito in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali. Se il problema è determinato, le relazioni in esso contenute dovranno tradursi alla fine in equazioni che hanno per incognite le coordinate del punto da costruirsi.

Concentriamoci sui problemi risolubili con la riga, enunciamo il seguente risultato:

“ Condizione necessaria e sufficiente affinché un problema geometrico sia risolubile con la sola riga, è che le equazioni da cui il problema dipende, siano lineari ed abbiano i coefficienti appartenenti al campo di razionalità determinato dalle coordinate dei punti che costituiscono i dati del problema.” Quindi un punto è costruibile con la riga se le sue coordinate appartengono al campo di razionalità delle coordinate dei dati.

Vediamo ora quale contributo porta l'uso del compasso aggiunto alla riga: “Condizione necessaria e sufficiente affinché un problema geometrico possa

risolversi con la riga e il compasso è che ciascuna delle equazioni da cui il problema dipende sia algebrica razionale intera con coefficienti appartenenti al campo di razionalità formato coi dati, e che inoltre ciascuna delle equazioni sia di grado minore o uguale a due, o risolubile mediante risoluzione di una successione di equazioni di secondo grado”

Pertanto un punto è costruibile se le sue coordinate si possono ottenere effettuando sulle coordinate dei dati operazioni razionali e successive estrazioni di radici quadrate.

In breve possiamo dire:

“I problemi risolubili con la riga e il compasso sono i problemi di primo e secondo grado e quei problemi di grado superiore la cui risoluzione si può far dipendere dalla risoluzione di una successione di problemi di grado minore o uguale a due.”

Possiamo concludere dicendo che un problema è risolubile elementarmente quando sono state discusse le seguenti due questioni:

- Decidere se il problema è algebrico, cioè se dipende da un’equazione algebrica a coefficienti razionali;
- decidere se una data equazione algebrica sia risolubile con operazioni razionali ed estrazioni di radicali quadratici, in un dato campo di razionalità a cui appartengono i coefficienti dell’equazione.

### 7.1.3 Applicazioni alla geometria elementare

Discutiamo ora, come applicazione della teoria appena esposta, un problema della geometria elementare che riguarda la possibilità o meno della costruzione dei poligoni regolari.

Il problema della costruzione del poligono di  $n$ -lati si riconduce al problema della divisione del cerchio in  $n$  parti uguali, dove si può supporre che siano dati il centro  $O$  del cerchio e un punto di divisione  $A$ . È lecito assumere la distanza dei due punti dati, cioè il raggio del cerchio, come unità. Sotto questa forma il problema, i cui dati sono punti, è ricondotto alla ricerca di  $n-1$  punti (di divisione) che, insieme ad  $A$  costituiscono i vertici di un  $n$ -*gono* regolare.

Ciascuno di questi punti individua con  $A$  un arco, che moltiplicato per  $n$  dà un multiplo intero del cerchio:  $\frac{2\pi r}{n}$  (si può prendere  $r \leq n$ ). Riferiamoci a due assi coordinati ortogonali, prendendo  $O$  come origine ed  $OA$  che individua l’asse  $x$ . Il punto  $A$  abbia coordinate  $(1,0)$ ; i punti incogniti avranno coordinate

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_{n-1}, y_{n-1})$ , soddisfacenti l'equazione  $x^2 + y^2 = 1$ . Immaginiamo le coordinate dei punti come la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso e rappresentiamo i punti nel piano di Gauss:

$$z = x + iy$$

A ciascun numero  $z$  è associato il modulo, la distanza assoluta del punto dall'origine:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e un argomento, l'angolo che la congiungente del punto con l'origine forma con l'asse  $x$ :

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}$$

Sicché si ha

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

La moltiplicazione di due numeri complessi  $z = x + iy$ ,  $z' = x' + iy'$  si può effettuare algebricamente secondo le usuali regole di calcolo ponendo:

$$Z = zz' = (xx' - yy') + i(xy' - x'y)$$

Oppure geometricamente determinando il punto che ha come coordinate polari:

$$P = \rho\rho' = \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \Theta = \theta + \theta' = \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{y'}{x'},$$

cioè facendo il prodotto dei moduli e la somma degli argomenti. Applicando questa regola per formare le potenze di un generico punto incognito

$$z_s = x_s + iy_s = \cos \frac{2\pi r}{n} + i \sin \frac{2\pi r}{n}$$

ogni sua potenza avrà modulo uguale a 1 e argomento  $\frac{2\pi rh}{n}$ , per  $h = 0, \dots, n-1$ . In particolare per  $h = n$ , il punto  $z_s^n$  coinciderà con  $A = (1, 0)$ , quindi  $z_s^n = 1$ . Viceversa: si abbia un punto  $z$  diverso da  $A$ , tale che

$$z^n = (x + iy)^n = 1,$$

il modulo  $\rho$  di questo punto deve quindi soddisfare  $\rho^n = 1$ , ma essendo un numero reale  $\rho = 1$ . Inoltre  $z$  deve avere un argomento  $\theta$  che sommato  $n$  volte

deve dare un multiplo intero di  $2\pi$ , per cui:  $\theta = \frac{2\pi r}{n}$ . Di conseguenza  $z$  è uno dei punti  $z_1, \dots, z_n$  che vogliamo costruire.

In conclusione: il problema della costruzione di un  $n$ -gono regolare dipende dall'equazione:

$$z^n = 1,$$

e precisamente dalla ricerca delle radici di essa diverse da  $z = 1$ , cioè dalla risoluzione dell'equazione:

$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + 1 = 0 \quad (7.1)$$

Se  $n = p$  primo si dimostra che l'equazione (12.15) è irriducibile nel campo dei razionali. Ora, affinché il poligono di  $p$  lati sia costruibile con riga e compasso l'equazione (12.15) deve essere risolubile per radicali quadratici. Perciò  $p - 1$  deve essere una potenza di due, e quindi:

$$p = 2^n + 1.$$

Ne deduciamo che non sono costruibili i poligoni con un numero di lati pari a 7, 11, 13, 19, etc. Cerchiamo di capire quali sono i poligoni con un numero primo di lati che possiamo costruire. Dimostriamo che ogni numero primo della forma  $p = 2^n + 1$  è un numero della forma  $p = 2^{2^m} + 1$ . Basta notare che se  $n$  ammette qualche divisore dispari:  $n = h(2k + 1)$  allora il numero

$$2^n + 1 = 2^{h(2k+1)} + 1$$

non può essere primo. Infatti è divisibile per  $2^h + 1$ . Mostriamolo in questo modo, consideriamo il binomio:

$$x^{2k+1} + 1$$

si annulla per  $x = -1$  e perciò è divisibile per  $x + 1$ :

$$x^{2k+1} + 1 = (x + 1)p(x)$$

Sostituendo:

$$x = 2^h$$

Si ha appunto che  $2^{h(2k+1)} + 1$  è divisibile per  $2^h + 1$ . Alla luce di questo risultato vediamo quali sono i poligoni costruibili per  $m = 0, 1, 2, 3, 4$ , sono i poligoni di 3, 5, 17, 257, 65537 lati. Generalizziamo al caso di un poligono

con un numero arbitrario  $n$  di lati, prima di tutto consideriamo il caso  $n = pq$  dove  $p$  e  $q$  sono numeri interi. Dato l' $n$ -gono regolare si costruiscono subito il  $p$ -gono e il  $q$ -gono, infatti dato l'arco di cerchio  $\frac{2\pi}{n}$  moltiplicandolo per  $q$  si ottiene:

$$\frac{2\pi q}{n} = \frac{2\pi}{p}$$

per cui riesco a costruire l' $n$ -gono se so costruire il  $p$ -gono. Ora sia  $n$  scomposto nei suoi fattori primi:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

Affinché la costruzione dell' $n$ -gono sia possibile, deve essere possibile la costruzione dei poligoni regolari di  $p_1^{\alpha_1}$ ,  $p_2^{\alpha_2}$ , ...,  $p_r^{\alpha_r}$  lati. La costruzione di un poligono regolare di  $p^\alpha$  lati dipende dalla risoluzione dell'equazione:  $z^{p^\alpha} = 1$ ; si dimostra che il polinomio:

$$\frac{z^{p^\alpha} - 1}{z^{p^{\alpha-1}} - 1}$$

è irriducibile. Quindi l'equazione è risolubile per radicali quadratici solo quando il suo grado:  $p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p - 1)$  è una potenza di due. Di conseguenza quando:  $\alpha = 1$  e  $p = 2^n + 1$ , ma essendo  $p$  un primo, come visto prima,  $p = 2^{2^m} + 1$ . Possiamo alla fine concludere affermando che un poligono regolare di  $n$  lati è costruibile con riga e compasso quando:

$$n = 2^m(2^{2^{m_1}} + 1) \dots (2^{2^{m_s}} + 1)$$

## 7.2 I tre problemi classici

Abbiamo già nominato i tre problemi geometrici più conosciuti che hanno stimolato i matematici per molti secoli, sono: la quadratura del cerchio, la trisezione di un angolo e la duplicazione del cubo. In questo capitolo tratteremo di questi problemi da più punti di vista, forniremo la dimostrazione dell'impossibilità della loro risoluzione con riga e compasso e illustreremo anche alcune costruzioni che utilizzano altri strumenti. Il grande interesse suscitato dalla difficoltà, o meglio noi diremmo impossibilità, di certe costruzioni con la riga e il compasso ha generato una vastissimo repertorio di costruzioni ottenute attraverso curve diverse da rette e cerchi, disegnate in alcuni casi grazie a strumenti meccanici.

### 7.2.1 La quadratura di un cerchio

Il problema della quadratura del cerchio consiste nel costruire un quadrato che abbia la stessa area di un dato cerchio. Questo problema nasce come estensione del problema di trovare un quadrato di area uguale ad un qualsiasi poligono dato. Gli studiosi di geometria dell'antica grecia erano in grado di costruire un quadrato di area uguale alla somma delle aree di due quadrati assegnati. Essi potevano anche costruire un quadrato di area uguale a quella di un triangolo rettangolo assegnato ed infine anche un triangolo rettangolo di area uguale a quella di un assegnato triangolo. Dunque, poiché ogni poligono può essere decomposto in triangoli, essi potevano combinare tali costruzioni per ottenere la quadratura di un qualsiasi poligono. Il problema della quadratura del cerchio affianca anche il problema della rettificazione della circonferenza che consiste nel costruire, con riga e compasso, un segmento di lunghezza pari alla circonferenza del cerchio.

Mostriamo innanzitutto perché non è possibile: trovare una soluzione al problema della quadratura del cerchio richiederebbe la costruzione di un segmento di lunghezza  $\sqrt{\pi}$ , infatti l'area del cerchio è  $\pi r^2$  e quindi un quadrato con area  $\pi r^2$  deve avere lato pari a  $r\sqrt{\pi}$ . Abbiamo mostrato come i greci costruivano la radice quadrata di un numero reale positivo  $a$  (a sua volta costruibile), ma non è possibile costruire un segmento lungo  $\pi$ . Infatti  $\pi$  è un numero trascendente, ovvero non-algebrico, quindi non costruibile. Il problema non è risolubile perché il problema non è algebrico. La trascendenza di  $\pi$  fu dimostrata da Ferdinand von Lindemann nel 1882, ossia ben più di due millenni più tardi. Essa chiude l'era dei tentativi infruttuosi rivolti a cercare, per via elementare, la quadratura del cerchio, mostrando che il problema non è risolubile né elementarmente, cioè mediante rette e cerchi, né con l'utilizzo di curve algebriche più elevate.

Analogamente, trovare una soluzione al problema della rettificazione della circonferenza richiede la costruzione di un segmento di lunghezza  $\pi$  infatti, la circonferenza del cerchio è  $2\pi r$ , e quindi si dovrebbe costruire un segmento di lunghezza  $2\pi r$  che come prima non si può fare. Questi due problemi, come dimostrò Archimede<sup>1</sup>, sono strettamente legati fra loro infatti, esprimendoli in forma algebrica:

- Rettificazione della circonferenza:  $C = 2\pi r$ ;
- Quadratura del cerchio:  $A = \pi r^2 = \frac{1}{2}r \cdot C$ ;

---

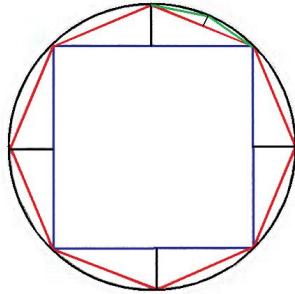
<sup>1</sup>Archimede, "Sulla misurazione del cerchio, Proposizione 1

si osserva che trovare una soluzione dell'uno implicherebbe risolvere anche l'altro. Infatti dalla seconda formula si ha che l'area del cerchio equivale all'area di un triangolo avente come base il raggio e come altezza la circonferenza. Dunque, se si riuscisse a costruire con riga e compasso, a partire dal raggio, un segmento di lunghezza equivalente alla circonferenza, ossia a rettificare in modo elementare la circonferenza, si potrebbe allora costruire il suddetto triangolo e poi trasformarlo con facilità, sempre facendo uso della riga e del compasso, in un quadrato equivalente. Viceversa, se mediante una costruzione elementare si potesse trasformare il cerchio in un quadrato equivalente, trasformando poi questo in un triangolo di ugual area avente come base il raggio, si potrebbe ottenere mediante una costruzione elementare la rettificazione del cerchio.

### **Antifonte di Atene**

Antifonte di Atene (480-411 a.C. circa), sofista e contemporaneo di Socrate, tentò di realizzare la quadratura del cerchio inscrivendo nel cerchio un poligono regolare (triangolo equilatero o quadrato) e disegnando su ogni lato del triangolo o quadrato inscritto, un triangolo isoscele avente come base il lato del poligono di partenza e il vertice sull'arco di cerchio più piccolo fra i due archi sottesi da tale lato.

Con questa costruzione si ottiene un poligono regolare inscritto nel cerchio, con un numero di lati doppio rispetto al poligono di partenza. Ripetendo la costruzione con il nuovo poligono si ottiene un poligono regolare con il quadruplo dei lati. Antifonte pensava che iterando il processo, si sarebbe potuta esaurire l'area del cerchio ottenendo un poligono regolare inscritto nel cerchio i cui lati, data la loro piccolezza, sarebbero potuti coincidere con la circonferenza del cerchio.



Essendo poi sempre possibile costruire un quadrato di area equivalente ad un poligono dato, Antifonte riteneva di aver risolto il problema.

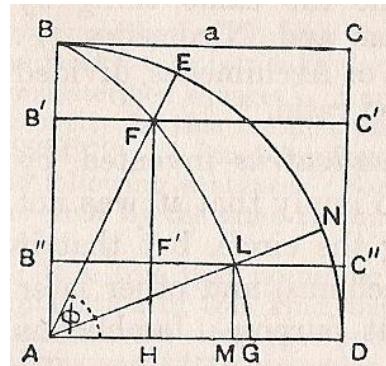
Ma, come spiega Eudemo, il ragionamento di Antifonte viola il principio che le grandezze siano divisibili illimitatamente. Essendo l'area del cerchio divisibile illimitatamente, con il processo descritto da Antifonte, non si arriverà mai al risultato esaurendo l'intera area, cioè a far assumere ai lati del poligono la posizione della circonferenza in esame.

In realtà Euclide utilizza esattamente la stessa costruzione in XII, 2 esprimendo soltanto la conclusione in modo diverso, egli dice che se il procedimento viene ripetuto abbastanza a lungo, le parti rimaste misureranno, insieme, meno di ogni data area. La soluzione proposta da Antifonte è interessante perché richiama il concetto moderno di limite; la sua procedura si può riesprimere: il cerchio è il 'limite' di un certo poligono inscritto quando il suo numero di lati viene aumentato all'infinito.

### La quadratrice di Ippia di Elide e la quadratura del cerchio

Ad Ippia di Elide (443-399 a.C.) si attribuisce l'introduzione nella matematica della prima curva oltre al cerchio e alla retta: la *quadratrice* (oppure *trisettrice*) di Ippia; con questa curva, che sottolineiamo non è possibile tracciare con riga e compasso, si riesce a quadrare il cerchio ed a trisecare un angolo. Vediamo innanzitutto come si costruisce questa curva. Sia  $ABCD$  un quadrato, e l'arco  $BD$  un quarto del cerchio di centro  $A$ .

Supponiamo che un raggio di questo cerchio si muova uniformemente dalla posizione  $AB$  alla posizione  $AD$  e che, contemporaneamente, il lato  $BC$  si muova uniformemente dalla posizione  $BC$  alla posizione  $AD$ , rimanendo parallelo alla posizione iniziale, con l'estremo  $B$  che si muove lungo  $BA$ . Allora nella loro posizione finale, il segmento e il raggio che si muovono, coincidono entrambe con  $AD$  e ad ogni precedente istante durante il moto, la loro intersezione determina un punto, come  $F$  o  $L$ .



Il luogo geometrico descritto da questi punti è proprio la *quadratrice* (nella seguente figura è rappresentata dalla curva passante per  $B$ ,  $F$ ,  $L$  e  $G$ ). La proprietà di questa curva è che:

$$B\hat{A}D : E\hat{A}D = \text{arc}(BD) : \text{arc}(ED) = AB : FH.$$

L'applicazione della *quadratrice* per la quadratura del cerchio è più complessa rispetto alla trisezione dell'angolo, la dimostrazione che riportiamo di seguito è probabilmente dovuta in parte a Dinostrato (390-320 a.C.). Pare infatti che questa curva sia stata inventata da Ippia di Elide con il proposito di quadrare il cerchio ma che non sia stato lui a fornire una dimostrazione.

Dinostrato, servendosi di questa cuva riuscì a rettificare la circonferenza e risolse il problema quadrando il triangolo rettangolo di cateti il raggio e la circonferenza.

Assumendo che la *quadratrice* intersechi  $AD$  in  $G$ , iniziamo dimostrando la proposizione che ci permette di calcolare la lunghezza dell'arco  $\text{arc}(BD)$  e perciò la lunghezza della circonferenza del cerchio.

**Proposizione 7.2.1.**

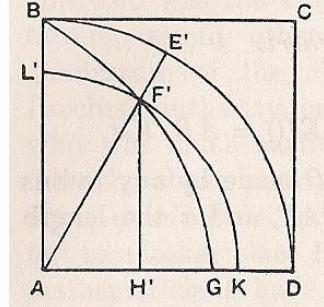
$$\text{arc}(BED) : AB = AB : AG \quad (7.2)$$

*Dimostrazione.* Questa proposizione si prova per esclusione. Se il precedente rapporto non fosse uguale a  $AB : AG$ , deve essere uguale ad  $AB : AK$  dove  $AK$  è o più grande o più piccolo di  $AG$ . Mostriamo come nessuna delle due possibilità sia vera. Supponiamo che  $AK$  sia più grande di  $AG$ .

Con  $A$  come centro e  $AK$  come raggio, disegniamo il quarto di cerchio  $KL'$  che interseca la *quadratrice* in  $F'$  e  $AB$  in  $L'$ . Si congiunga  $A$  con  $F'$  e si prolunghi tale segmento intersecando l'arco  $BD$  in  $E'$  e si disegni  $F'H'$  perpendicolare ad  $AD$ . Ora per ipotesi

$$\text{arc}(BD) : AB = AB : AK = \text{arc}(BD) : \text{arc}(L'K)$$

perciò  $AB = \text{arc}(L'F'K)$ .



Ma, per la proprietà della *quadratrice*, si ha:

$$AB : F'H' = \text{arc}(BD) : \text{arc}(E'D) = \text{arc}(L'K) : \text{arc}(F'K)$$

quindi, avendo provato che  $AB = \text{arc}(L'F'K)$ , si ha  $F'H' = \text{arc}(F'K)$ , ma questo è impossibile perché ogni arco di cerchio è maggiore della corda da esso sottesa. Perciò  $AK$  non può essere più grande di  $AG$ . Analogamente si dimostra che  $AK$  non può essere minore di  $AG$ .

Quindi se  $AK$  non è né più grande né più piccolo di  $AG$  questi due segmenti devono essere uguali e

$$\text{arc}(BD) : AB = AB : AG$$

ossia

$$\frac{1}{4} \text{circonferenza} = \text{arc}(BD) = \frac{AB^2}{AG}.$$

dove con "circonferenza" si intende la circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AB$ .  $\square$

Per procedere con la dimostrazione della quadratura del cerchio dobbiamo sfruttare il seguente risultato:

*L'area di un cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo in cui l'altezza è uguale al raggio e la base è uguale alla circonferenza del cerchio.*

Dimostriamo dunque come rettificare il cerchio utilizzando la proposizione.

Si tracci la retta  $BG$  passante per il vertice del quadrato  $B$  e per il punto  $G$  di intersezione tra la *quadratrice* e il lato  $AD$  del quadrato. Si disegni ora il segmento parallelo a  $BG$  e passante per  $D$  e si chiami  $N$  il punto di intersezione di tale segmento con il prolungamento di  $AB$ . Ora, poiché i triangoli  $ABG$  e  $AND$  sono simili si ha

$$NA : AD = AB : AG$$

e poiché  $AD = AB$  abbiamo che

$$NA = \frac{AB^2}{AG} = \text{arc}(BD) = \frac{1}{4} \text{ circonferenza}$$

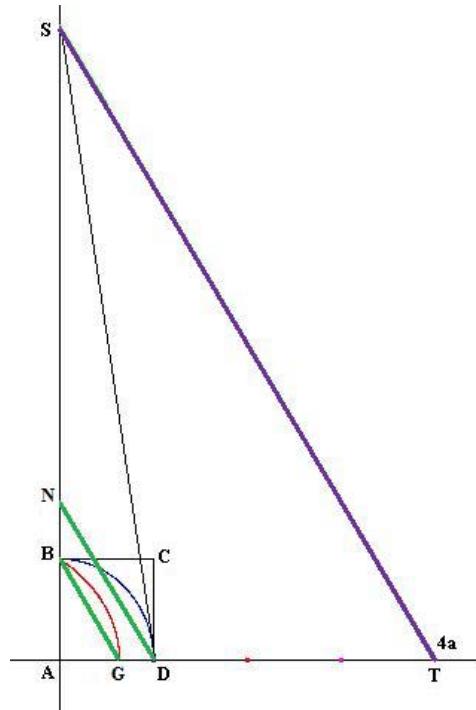
Si disegni  $AT$  pari a 4 volte  $AD$  e si tracci il segmento passante per  $T$  parallelo a  $ND$  e si chiami  $S$  l'intersezione di esso con la retta passante per  $A$  e  $B$ .

Ora, poiché i triangoli  $ABG$  e  $AST$  sono simili si ha

$$AS : AT = AB : AG$$

e poiché  $AT = 4 \cdot AB$  abbiamo che

$$AS = \frac{4 \cdot AB^2}{AG} = 4 \cdot \text{arc}(BD) = \text{circonferenza}$$

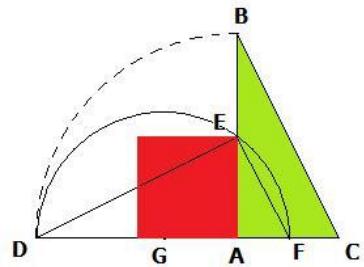


Quindi se si considera il triangolo rettangolo  $ASD$ , esso ha come altezza la circonferenza e come base il raggio, dunque, per quanto visto precedentemente,

la sua area è uguale a quella del cerchio. A questo punto è facile trovare un segmento tale che il quadrato costruito su esso abbia area uguale a quella del cerchio di centro  $A$  e raggio  $AB$ . In generale per costruire con riga e compasso un quadrato di area uguale a quella di un triangolo rettangolo dato si procede:

Sia  $ABC$  il triangolo da quadrare. Si disegni  $DA = AB$  puntando il compasso in  $A$  e con raggio  $AB$ . Ora si bisechi  $AC$  individuando il punto  $F$  e si bisechi a sua volta il segmento  $DF$  producendo il punto  $G$ . Si punti in  $G$  e con raggio  $DG$  si disegni il semicerchio  $DEF$  che interseca  $AB$  in  $E$ .

Allora  $EA$  è il lato del quadrato (rosso) di area uguale al triangolo di partenza (verde). Infatti:



$$\text{Area triangolo } ABC = \frac{AC \cdot AB}{2}$$

mentre

$$\text{Area quadrato rosso} = EA^2$$

ma sappiamo che  $DA = AB$ ,  $DA : EA = EA : AF$  da cui  $EA^2 = DA \cdot AF$  e poiché per costruzione  $AF = \frac{AC}{2}$  si ha

$$\text{Area quadrato rosso} = EA^2 = DA \cdot AF = DA \cdot \frac{AC}{2} = AB \cdot \frac{AC}{2} = \text{Area triangolo } ABC.$$

### 7.2.2 La trisezione di un angolo

Vediamo innanzitutto come gli antichi greci costruivano angoli di diverse misure ricavandadoli ad esempio dalla costruzione di poligoni regolari. Iniziando dalla costruzione di pochi angoli fondamentali, come quello di  $60^\circ$ : l'angolo di un triangolo equilatero, di  $90^\circ$ : l'angolo di un quadrato, e  $108^\circ$  l'angolo di un pentagono regolare, erano poi in grado di costruire altri angoli applicando uno o più fra i seguenti procedimenti:

1. sommare due angoli dati,
2. sottrarre un angolo dato da un altro,
3. bisecare un angolo assegnato.

È naturale quindi che cercassero anche un metodo generale per costruire un angolo che sia la terza parte di un *qualsiasi* angolo dato. Un' ipotesi sull'origine di questo problema potrebbe anche essere che dopo essere riusciti a costruire molti poligoni regolari, come il pentagono, i Greci speravano di poter continuare la costruzione di poligoni regolari. La trisezione di un angolo può essere utilizzata per costruire un poligono regolare di 9 lati, o ogni multiplo di 9.

La dimostrazione dell'impossibilità di tale costruzione risale al 1837 ad opera di Wantzel. Dato un angolo  $\phi$ , il problema consiste nel trovare la sua terza parte:  $\frac{\phi}{3}$ . Sfruttiamo il seguente risultato della trigonometria:

$$\tan \phi = \frac{3 \tan \frac{\phi}{3} - \tan^3 \frac{\phi}{3}}{1 - 3 \tan^2 \frac{\phi}{3}} \quad (7.3)$$

e perciò ponendo:  $\tan \phi = a$  e  $\tan \frac{\phi}{3} = x$ , abbiamo:

$$a = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \quad (7.4)$$

da cui:

$$x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0 \quad (7.5)$$

che si dimostra essere in generale irriducibile, e siccome non è di grado una potenza di due non è risolubile per radicali quadratici. Di conseguenza la terza parte di un angolo non è costruibile con riga e compasso.

C'è un'importante differenza tra il problema di trisecare un angolo e gli altri due problemi classici greci: non si può quadrare nessun cerchio con riga e compasso, non si può duplicare nessun cubo con riga e compasso, ma esistono alcuni angoli particolari per cui la trisezione è possibile con riga e compasso. La trisezione è possibile in alcuni casi particolari, ad esempio l'angolo retto e  $\frac{\pi}{4}$

Infatti, dato un angolo retto, si tracci una circonferenza con centro in  $A$  e raggio  $r$  qualsiasi; essa taglia la semiretta passante per  $A$  in  $B$ . Ora si tracci una seconda circonferenza con centro in  $B$  e raggio  $r$ ; essa intersecherà la prima circonferenza in  $D$ .

Il triangolo  $A\hat{B}D$  è equilatero, infatti  $AB = AD = BD = r$ . Quindi  $A\hat{B}D = \frac{\pi}{3}$  e, per differenza,  $D\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$ . Di conseguenza è possibile trisecare l'angolo  $C\hat{A}B$ .

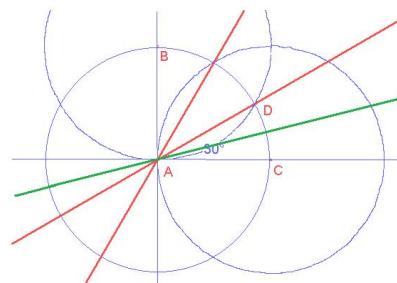
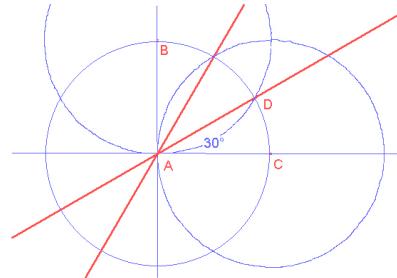
Per trisecare un angolo di  $\frac{\pi}{4}$  è sufficiente, dopo aver trisecato un angolo retto, bisecare l'angolo di  $\frac{\pi}{6}$  che si ottiene. Con questa tecnica si possono trisecare (col solo uso di riga e compasso) gli angoli la cui ampiezza sia:

$$\varphi = \frac{m\pi}{2^k} \quad k \in \mathbf{N}, m \in \mathbf{Z}$$

Come per gli altri due problemi, i tentativi degli antichi di risolvere questo problema con altri “strumenti” sono stati assai utili, sia per i diversi strumenti ingegnosi inventati, sia soprattutto per le nuove teorie geometriche a cui diedero origine. Cominciamo con una osservazione che riduce il terreno di studio:

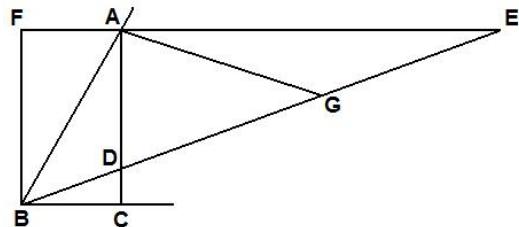
*“È sufficiente occuparsi solamente del caso in cui il dato angolo da trisecare sia acuto, dato che, come abbiamo visto, un angolo retto può essere facilmente trisecato con riga e compasso.”*

Infatti, dato che abbiamo visto che i matematici greci sapevano sommare due angoli dati, la trisezione di un angolo ottuso  $\theta$  si ridurrebbe a sommare  $\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}(\theta - \frac{\pi}{2})$ .



### Riduzione del problema di Pappo

Sia  $A\hat{B}C$  un generico angolo, e sia  $AC$  la perpendicolare a  $BC$  disegnata. Si completi il rettangolo  $ACBF$  e si prolunghi il lato  $FA$ . Supponiamo che  $E$  sia un punto tale che, se si congiungono  $B$  ed  $E$  con una retta che interseca  $AC$  in  $D$ , il segmento  $DE$  è uguale a  $2AB$ . Si bisechi  $DE$  individuando il punto  $G$ , e si colleghi  $A$  con  $G$ .



Allora  $DG = GE = AG = AB$ . Quindi, dato che  $FE$  e  $BC$  sono parallele

$$A\hat{B}G = A\hat{G}B = 2A\hat{E}G = 2D\hat{B}C.$$

Quindi

$$D\hat{B}C = \frac{1}{3}A\hat{B}C$$

e l'angolo  $A\hat{B}C$  è trisecato da  $BE$ .

In questo modo il problema è ridotto a disegnare  $BE$  da  $B$  che tagli  $AC$  e  $AE$  in modo che il segmento  $DE = 2AB$ .

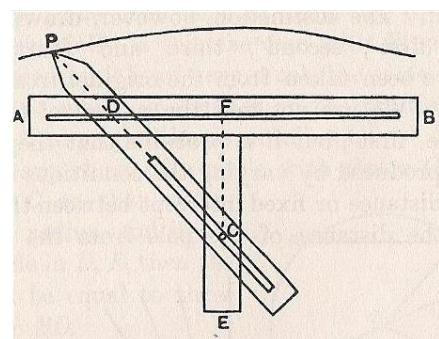
### La concoide di Nicomede

Nicomede (280-210 a.C.) inventò una curva per risolvere il problema della trisezione dell'angolo: la concoide.

Egli costruì questa curva utilizzando un dispositivo meccanico che potrebbe essere descritto nel seguente modo.

Sia  $AB$  un righello con una fessura parallela alla sua lunghezza.

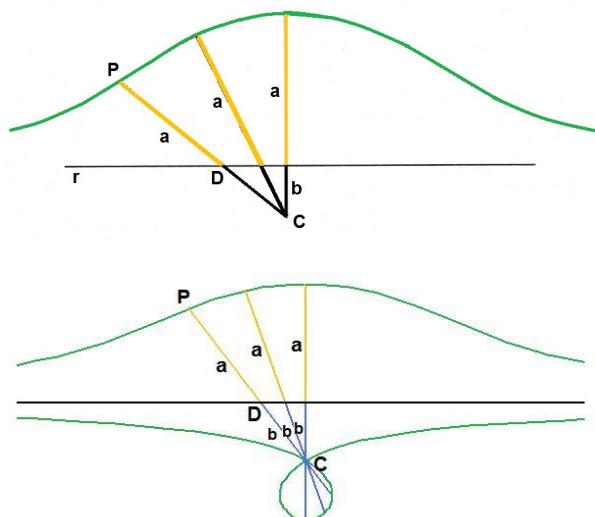
Sia  $FE$  un secondo righello fissato perpendicolarmente al primo attraverso un piolo fissato in  $F$ . Sia  $PC$  un terzo righello puntato in  $P$ , con una fessura parallela alla sua lunghezza, che gli permette di muoversi intorno al piolo  $C$ . Sia  $D$  un piolo fissato su  $PC$  che può scorrere lungo la fessura del righello  $AB$ . Se poi il righello  $PC$  si muove così che il piolo  $D$  descriva la lunghezza della fessura in  $AB$ , l'estremità  $P$  del righello descrive la curva che è chiamata concoide o cocloide.



Nicomede chiamò la retta  $AB$  il *righello* o la *base* (*κανών*), il punto fissato  $C$  il *polo* (*πόλος*), e lunghezza costante  $PD$  la *distanza* (*διάστημα*).

La proprietà fondamentale di questa curva è che, se si disegnano dei raggi vettore da  $C$  alla curva, come per esempio  $CP$ , la distanza, sul raggio vettore, che intercorre fra la curva e la retta  $AB$  è costante ( $a$  è costante).

Allora, chiaramente, se lungo ogni raggio vettore disegnato passante per il polo, misuriamo  $b$  dal *righello* ( $r$ ) verso il polo, otteniamo un'altra curva conoidale dalla parte del *righello* verso il polo.

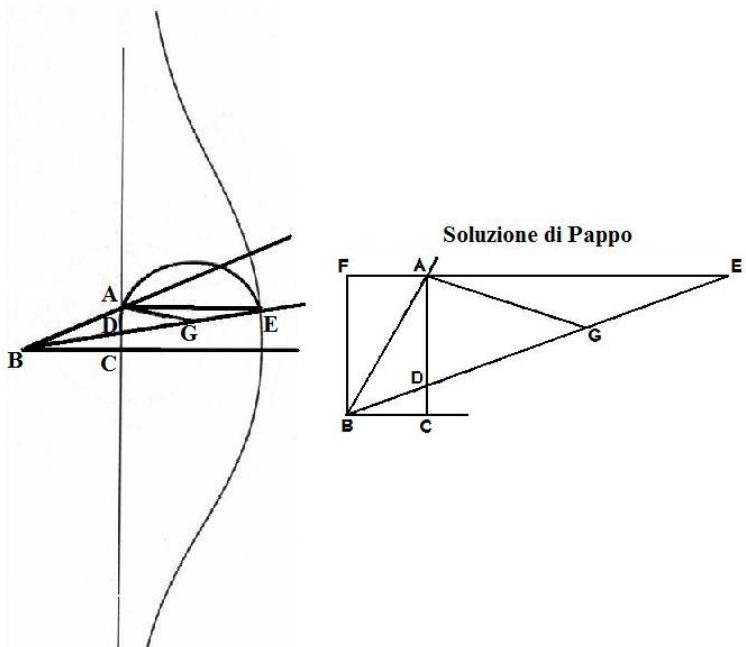


L'equazione in coordinate polari (non nota ai matematici greci) di questa curva è:

$$r = a + b \sec\theta.$$

Questa curva può assumere tre diverse forme a seconda che  $a$  sia più grande o uguale o più piccolo di  $b$  e in entrambe i casi l'asintoto è sempre il *righello*, solo che nel primo dei tre casi la curva ha un cappio come quello mostrato nella figura precedente, nel secondo caso ha una cuspide in corrispondenza del polo, nel terzo caso invece non ha punti doppi.

Vediamo come la concoide ci permette di trisecare un angolo: nella figura della sezione si vede come la concoide permette di disegnare il punto  $E$  tale che  $DE = 2 AB$ , in questo caso la concoide da usare ha  $B$  come polo,  $AC$  come righello e  $a = 2 AB$  come distanza.  $E$  si trova immediatamente come intersezione della concoide con il prolungamento del segmento  $FA$ .



### 7.2.3 La duplicazione del cubo

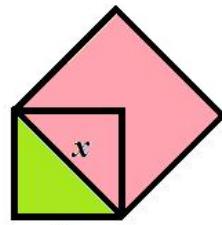
*Il problema della duplicazione del cubo consiste nel costruire, un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo di spigolo dato.*

Fa parte di quei problemi che cercano di estendere alle figure solide i risultati ottenuti per le figure piane, si tratta infatti di un'estensione del problema che richiede di costruire un quadrato di area doppia rispetto ad un quadrato dato.

Ai matematici greci era noto come risolvere questo secondo problema ed è lo stesso problema che Socrate pone allo schiavo nel famoso passo del Menone. Il quadrato, avente area doppia rispetto a quella del quadrato dato, è quello costruito sulla sua diagonale. Infatti, detto  $a$  il lato del quadrato dato, abbiamo che

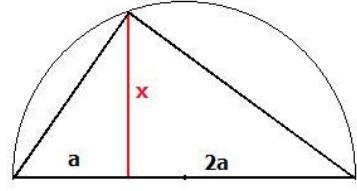
$$\text{Area quadrato rosa} = x^2 = (\sqrt{2}a)^2 = 2a^2 = 2 \cdot \text{Area quadrato } a$$

dove  $a$  è il lato del quadrato da duplicare. Questa equazione è equivalente alla proporzione



$$a : x = x : 2a$$

ossia il lato del quadrato richiesto può essere costruito come la media proporzionale tra segmenti rettilinei di lunghezza  $a$  e  $2a$ , operazione facilmente eseguibile con riga e compasso come mostra la figura a lato.



In modo simile, per ottenere la duplicazione di un cubo di spigolo  $a$  dato, si deve costruire un cubo il cui spigolo  $x$  sia tale che

$$x^3 = 2a^3.$$

Senza perdita di generalità possiamo considerare il caso  $a = 1$ :

$$x^3 = 2. \quad (7.6)$$

Quest'equazione è irriducibile nel campo di razionalità dei dati. Dimostriamolo partendo da un caso più generale:

**Proposizione 7.2.2.** *Sia  $\frac{n}{m}$  un numero razionale con  $n$  e  $m$  interi e  $(n, m) = 1$  allora l'equazione*

$$x^3 - \frac{n}{m} = 0 \quad (7.7)$$

*se  $n$  e  $m$  non sono entrambi cubi di numeri interi è irriducibile nel campo dei razionali.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che l'equazione sia riducibile, si deve avere:

$$x^3 - \frac{n}{m} = (x - b)(x^2 + cx + d) \quad (7.8)$$

dove  $b, c, d$  sono numeri razionali. Da cui si deduce che  $x = b$  è una radice razionale dell'equazione (12.14), ponendo  $b = \frac{p}{q}$ , con  $(p, q) = 1$ , si ha:

$$\frac{p^3}{q^3} = \frac{m}{n} \quad (7.9)$$

e perciò  $p^3 = m$ , e  $q^3 = n$  □

In particolare l'equazione  $x^3 = m$ , dove  $m$  è un numero intero, è irriducibile nel campo dei razionali se  $m$  non è il cubo di un altro numero intero. L'equazione da cui dipende il problema ha grado 3 che non è una potenza di due ed

essendo irriducibile non è risolubile mediante una successione di equazioni di grado due. Possiamo quindi concludere che il problema della duplicazione del cubo non è risolubile con la riga e il compasso.

Il problema della duplicazione del cubo è stato tramandato nel mito. Giovanni Filopono (visse nel VI d.C. ad Alessandria d'Egitto) narra infatti di una epidemia che imperversava nell'isola di Delo e del ricorso degli abitanti all'oracolo di Delfi per sapere fino a quando la pestilenza li avrebbe afflitti. La risposta dell'oracolo fu "Raddoppiate l'ara di Apollo se volete placare le ire divine".

Nel commentario sull'opera di Archimede, *Sulla Sfera e sul Cilindro*, Eutocio di Ascalona ha raccolto una preziosa collezione di soluzioni di questo problema, fra cui quella di Eratostene. Il testo è in forma epistolare, in una finta lettera che Eratostene avrebbe scritto a Tolomeo III si racconta quali, secondo la tradizione siano le origini del problema e la storia dei tentativi di soluzione fino al tempo di Eratostene. Nella lettera viene riportato l'epigramma:

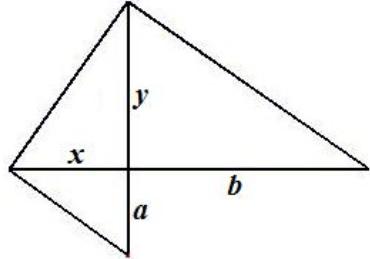
"Non cercare di compiere la difficile impresa col cilindro di Archita, o tagliare in tre parti il cono come Menecmo, o disegnare una tale linea curva come è descritto dal timorato di dio Eudosso."

Riguardo le origini del problema la lettera narra di un antico poeta che in una tragedia scrisse del re Minosse (il mitico re di Creta vissuto tre generazioni prima della guerra di Troia) al cospetto del sepolcro in costruzione per il figlio Glauco. La tomba aveva forma cubica e si racconta che, quando Minosse osservò che misurava solamente 100 piedi, disse: "piccolo sepolcro per un re: lo si faccia doppio conservandone la forma; si raddoppino, pertanto, tutti i lati". la lettera attribuisce all'errore dell'autore il merito di aver stimolato i matematici che si misero allora alla ricerca del procedimento per ottenere un volume doppio.

### Ippocrate di Chio

Ippocrate di Chio, discepolo di Pitagora, vissuto tra il 460 a.C. e il 380 a.C., sembra sia stato il primo a cercare di risolvere il problema della duplicazione del cubo.

Presso i Pitagorici era noto come trovare un segmento  $x$  medio proporzionale tra due segmenti  $a$  e  $b$ , ovvero era noto come costruire il segmento che soddisfa la proporzione  $a : x = x : b$ . Non era nota, invece, l'estensione al caso dell'inserzione di due segmenti  $x$  e  $y$ , medi proporzionali tra due segmenti dati, in modo che valga la proporzione  $a : x = x : y = y : b$ .



Si attribuisce ad Ippocrate di Chio l'aver capito che il problema della duplicazione del cubo è equivalente al problema di disegnare due segmenti medi proporzionali, problema che, in un linguaggio più moderno, si può così enunciare: dati due segmenti  $a$  e  $b$ , costruirne altri due  $x$  e  $y$  che, con  $a$  e  $b$  presi come termini estremi, formino una catena di rapporti uguali, ovvero

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Da questa catena di rapporti uguali deriva

$$\begin{cases} x = \frac{ab}{y} \\ x^2 = ay \end{cases}$$

da cui

$$x^3 = a^2b.$$

Il segmento  $x$  è quindi lo spigolo di un cubo equivalente ad un parallelepipedo rettangolo a base quadrata di spigolo  $a$  e avente altezza  $b$ . In particolare, se si scrive  $b = ma$  ( $m \in \mathbf{Q}$ ), si ottiene:

$$x^3 = ma^3$$

cioè un cubo di spigolo  $x$  equivalente ad  $m$  volte un cubo di spigolo  $a$ . Allora ponendo  $m = 2$ , cioè  $b = 2a$ , si ottiene

$$x^3 = 2a^3$$

e si ricade nel problema della duplicazione del cubo poiché  $x$  è il lato di un cubo avente volume doppio rispetto a quello di lato  $a$ .

Dunque Ippocrate dimostrò che il problema della duplicazione del cubo equivale a trovare  $x$  tale che, detto  $a$  il lato del cubo dato, soddisfi

$$a : x = x : y = y : 2a.$$

La difficoltà era soltanto cambiata di forma e non si era conseguito altro vantaggio che quello di presentare la questione primitiva come un problema di geometria piana, anziché solida.

### Archita di Taranto

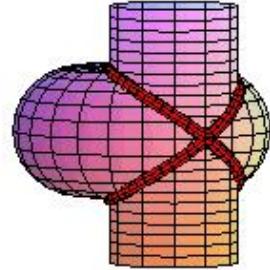
La soluzione di Archita di Taranto (428-347 a.C.) è la più notevole fra tutte, specialmente quando si considera la sua data (prima metà del IV secolo a.C.), poiché non è una costruzione piana ma una costruzione in tre dimensioni. Si determinano i punti necessari alla costruzione tramite l'intersezione di tre superfici di rivoluzione, un cono retto, un cilindro e un toro. Il risultato raggiunto da Archita appare ancora più straordinario se si tiene presente che egli giunse alla sua soluzione per via sintetica, senza l'aiuto delle coordinate cartesiane.

L'intersezione del cilindro e del toro descrive una certa curva detta *curva di Archita* (che è una curva con doppia curvatura), e il punto cercato il punto in cui il cono incontra questa curva.

Supponiamo che  $AC$ ,  $AB$  siano i due segmenti fra cui si devono trovare i due medi proporzionali; sia  $AC$  il diametro di un cerchio e  $AB$  una sua corda.

Si disegni un semicerchio con  $AC$  come diametro, ma in un piano ortogonale al piano del cerchio  $ABC$ , e si immagini questo cerchio ruotare attorno alla retta passante per  $A$  perpendicolare al piano di  $ABC$  (così si descrive metà di un toro con diametro interno nullo).

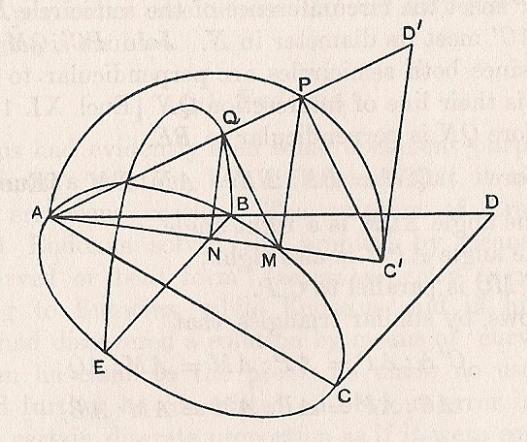
Si disegni poi metà cilindro retto sul semicerchio  $ABC$  come base, questo taglierà la superficie del mezzo toro individuando una certa curva. Questa curva, detta *curva di Archita* è mostrata in rosso nella figura a lato. In questa dimostrazione viene considerata solo una parte di questa curva: quella che risulta dall'intersezione del mezzo toro con la superficie di metà cilindro.



Inoltre sia  $CD$ , la tangente al cerchio  $ABC$  nel punto  $C$ , che interseca la retta  $AB$  in  $D$  e supponiamo il triangolo  $ADC$  ruotare attorno all'asse  $AC$ . Questo genera la superficie di un cono circolare retto; il punto  $B$  descrive un

semicerchio  $BQE$  perpendicolare al piano di  $ABC$ , di diametro  $BE$  perpendicolare ad  $AC$ ; e le rette del cono incontreranno in un certo punto  $P$  la curva che è intersezione del mezzo-cilindro e del mezzo-toro.

Sia  $AC'$  il semicerchio  $AC$  che genera il mezzo-toro ruotato di un certo angolo,  $AC'$  incontri la circonferenza  $ABC$  in  $M$ . Disegnando  $PM$  perpendicolare al piano di  $ABC$  notiamo chedeve appartenere al cilindro di base  $ABC$ .  $AP$  incontri la circonferenza del semicerchio  $BQE$  in  $Q$ , e  $AC'$  intersechi il suo dia-metro in  $N$ . Tracciamo ora le rette  $PC'$ ,  $QM$  e  $QN$ . Allora, dato che entrambi i semicerchi sono perpendicolari al piano  $ABC$ , anche la loro linea di intersezione  $QN$  sarà perpendicolare al piano  $ABC$  [Euclide XI. 19].



Perciò  $QN$  è perpendicolare a  $BE$ . Quindi  $QN^2 = BN \cdot NE =^2 AN \cdot NM$ , in questo modo si vede che l'angolo  $AQM$  è retto. Ma anche l'angolo  $APC'$  è retto (perché è un angolo alla circonferenza costruito sul diametro), perciò  $MQ$  è parallelo a  $C'P$ . Quindi i triangoli  $APC'$ ,  $APM$  e  $AMQ$  sono simili, per cui:

$$C'A : AP = AP : AM = AM : AQ,$$

cioè

$$AC : AP = AP : AM = AM : AB,$$

ossia  $AB$ ,  $AM$ ,  $AP$ ,  $AC$  sono in continua proporzione e quindi  $AM$  e  $AP$  sono i due medi proporzionali richiesti.

### Diocle e la cissoide

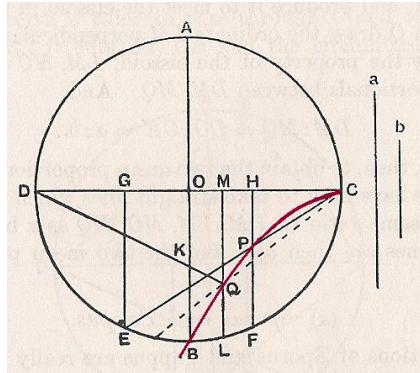
Diocle (240-180 sec. a.C.) costruì una curva particolare per risolvere il problema della duplicazione del cubo: la cissoide. Nel rinascimento, questa curva venne studiata da diversi matematici: Fermat e Roberval (1634) costruirono la tangente alla cissoide; Huygens e Wallis (1658) trovarono che l'area compresa tra la curva e il suo asintoto è di  $3\pi r^2$ . Secondo alcuni moderni studiosi

---

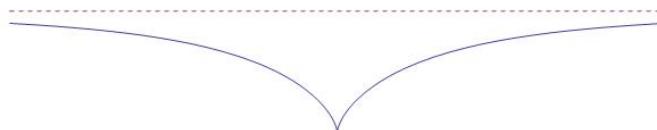
<sup>2</sup>Euclide III. 35= “se in un cerchio due corde si tagliano fra loro, il rettangolo compreso dalle parti dell'una è uguale al rettangolo compreso dalle parti dell'altra.”

(Morris Kline), originariamente Diocle, nel suo libro “*Sugli specchi ustori*” costruì la curva nel seguente modo.

Siano  $AB$  e  $CD$  due diametri perpendicolari della circonferenza. Sia  $E$  un punto sull’arco di circonferenza  $\text{arc}(BD)$  e sia  $F$  il punto sull’arco  $\text{arc}(BC)$  tale che  $\text{arc}(BE) = \text{arc}(BF)$ . Si traccino i segmenti  $EG$  e  $FH$  perpendicolari a  $DC$ , dove  $G$  e  $H$  sono rispettivamente i punti di intersezione di  $DC$  con tali due segmenti. Si disegni il segmento  $CE$ , e sia  $P$  il punto di intersezione fra  $CE$  ed  $FH$ . La cisoide è il luogo geometrico di tutti i punti  $P$  corrispondenti a diverse posizioni di  $E$  sul quadrante  $BD$  e di  $F$  ad una uguale distanza da  $B$  sul quadrante  $BC$ .



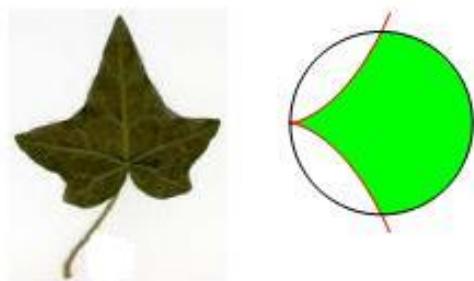
Nell’immagine precedente abbiamo rappresentato in rosso una parte di questa curva che in generale ha il seguente andamento:



Con la precedente costruzione ovviamente non è possibile generare l’intera curva in quanto vengono tracciati solo i rami contenuti all’interno della circonferenza.

Tuttavia questa costruzione spiegherebbe l’origine del nome cisoide (dal greco *kissos* = edera e *oeides* = a forma di), poichè la parte delimitata dalla curva e dalla circonferenza, ricorda la forma di una foglia di edera.

Le porzioni di curva che stanno al di fuori della circonferenza sarebbero frutto di successive generalizzazioni.



L’equazione in coordinate cartesiane di questa curva è

$$x(x^2 + y^2) = 2ry^2.$$

Diocle utilizzò la cисоide per risolvere il problema della duplicazione del cubo dimostrando che se  $P$  è un punto trovato con la precedente costruzione, allora  $HF$  e  $HC$  sono i due medi proporzionali in continua proporzione tra  $DH$  e  $HP$ , ossia

$$DH : HF = HF : HC = HC : HP.$$

*Dimostrazione.* È chiaro dalla costruzione (nella pagina precedente) che  $EG = FH$ ,  $DG = HC$  e quindi  $CG : GE = DH : HF$ .

E, dato che  $FH$  è il medio proporzionale fra  $DH$  e  $HC$ ,

$$DH : HF = HF : CH.$$

Ma poiché i triangoli  $GCE$  e  $HCP$  sono simili, abbiamo

$$CG : GE = CH : HP.$$

Da questo segue che

$$DH : HF = HF : CH = CH : HP,$$

ossia  $HF$  e  $HC$  sono i medi proporzionali tra  $DH$  e  $HP$ . □

# Bibliografia

- [1] T. Heath, *A history of Greek Mathematics*, Dover Publications, Vol. 1, (1981), pp. 218-270.
- [2] F. Enriques, *Questioni riguardanti la Geometria Elementare*, Zanichelli, (1900), pp.415-532.
- [3] F. Enriques, *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari*, Zanichelli, (1987), pp.329-416, pp.509-574.
- [4] Lucas N.H. Bunt, Phillip S.Jones, Jack D. Benedient, *Le radici storiche delle matematiche elementari*, Zanichelli, (1987), pp. 99-138.
- [5] J. Gow, *Greek mathematics*, Chelsae Publishing Company, (1968), pp. 160-172, 180-183.
- [6] G.T. Bagni, *Storia della matematica*, Pitagora, Vol. 1, (1996), pp. 218-270.
- [7] H. Eves, *An introduction to the history of mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, (1969), pp. 77-111.
- [8] L.Giacardi, S.C.Roero, *La matematica delle civiltà arcaiche*, Edizioni Stampatori, (1979).
- [9] C.B.Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, (2009).
- [10] Informazioni trovate in rete.

## Capitolo 8

# La Matematica in Arabia e la nascita dell’Algebra

di Fosco Loregian

### 8.1 Introduzione.

#### 8.1.1 Breve Storia dell’Arabia Medievale.

Si può senza tema di smentita affermare che la storia dell’Arabia come siamo abituati a pensarla inizi nel 622 d.C. con l’Egira, la fuga di Maometto a Medina dopo la quale si fonda lo stato che lo vede come capo. Lungi dall’essere un processo lento e indolore, un tale allontanamento dalla società del tempo, organizzata su base tribale, significava una aperta rottura dei vincoli con le suddette tribù, che esponeva a gravissimo rischio tutti coloro che a qualsiasi titolo avessero abbandonato nella Penisola araba il loro gruppo. Per sfuggire all’eventualità di ritorsioni di questo tipo, Maometto approfittò dell’offerta fatta ai suoi fedeli dai clan dell’oasi-città di Yathrib (che poi verrà rinominata Medina) che si offrivano di dargli un comando *politico* oltre che spirituale sui suoi fedeli.

Nel 632 d.C. Maometto muore, ma la sua nazione si prepara a far guerra a *Bisanzio*: si tratta di una vera guerra-lampo, con la quale nel giro di pochi giorni si espugnano Gerusalemme e Damasco, e dopo un’ avanzata inarrestabile viene espugnata *Alessandria*.

È aneddoto comune che di fronte all'immensa biblioteca il generale dell'esercito di Maometto (tal 'Omar ibn al-Khaṭṭāb) propose di bruciare tutti i libri, dacché

... se contengono cose in accordo al Corano, essi sono superflui, e  
se contengono cose che lo contrastano esso sono empi.

In realtà oggi sappiamo bene che a quell'epoca poco era rimasto dei circa 40.000 libri che la popolavano appena due secoli prima, a causa di precedenti invasioni che l'avevano spopolata. Soprattutto alla luce del fatto che, al suo

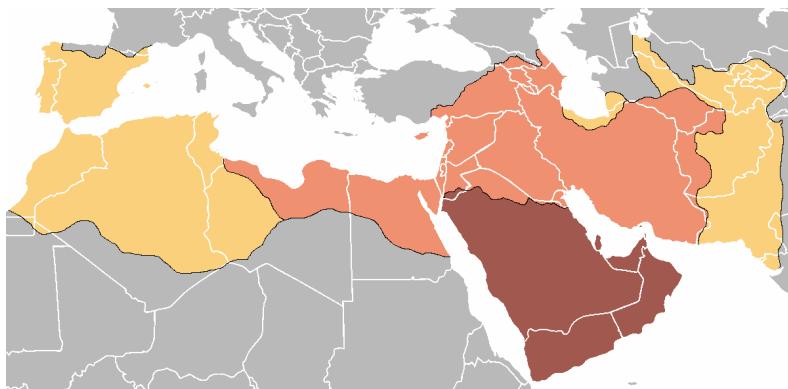


Figura 8.1: L'impero arabo al suo apogeo

apogeo, l'impero islamico parte dal Portogallo e taglia in due il continente fino a lambire i confini indiani, non è storicamente corretto parlare di “una sola” cultura araba. Si può piuttosto affermare che a partire da un nucleo compatto iniziale, le varie regioni si siano sempre più distaccate dal potere centrale e, analogamente a quanto successe a Roma quando essa entrò in Grecia, gli Arabi conquistatori (ma dalla povera cultura nomade) *assorbono in fretta il sapere delle civiltà dominate*, rendendosi sempre più culturalmente indipendenti da quale che sia la capitale dell'impero.

In quest'ottica, sia per motivi geografici che storici, è soprattutto il califfato di Baghdad a diventare in fretta lo snodo di commerci e scambi culturali, importando testi di astronomia, alchimia, medicina, dai quattro angoli del mondo occidentale e orientale: quasi a volersi redimere dall'aver contribuito a distruggere la biblioteca di Alessandria, tutto questo sapere nella *Bayt al-Hikma* (Casa della Sapienza) la più grande Biblioteca della storia dell'impero

islamico (si parla di circa 500.000 volumi, in lingua greca, siriaca, persiana, sanscrita... !)

In questo ambiente così culturalmente vivo e vitale nasce il protagonista principale della nostra storia, *al-Khuwarizmi*.

## 8.2 La Matematica di al-Khwārizmī.

### 8.2.1 La vita di al-Khwārizmī.

Abū Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, quello che verrà chiamato in seguito l’“Euclide arabo”, nasce nel 780 d.C. circa; non molto è noto della sua vita: in effetti non è neppure certo dove al-Khwārizmī sia nato. Il suo nome fa pensare che potrebbe essere originario del Khwārezm, il nome Persiano della regione in cui sorgeva Baghdad (questa parte del suo nome sarebbe quindi un locativo): non è improbabile che, dopo la conquista islamica delle regioni mesopotamiche e persiane al-Khwārizmī si trasferì in questa città come fecero molti mercanti e scienziati arrivati persino dalla Cina e dall’India. Non è certo nemmeno quante e quali opere egli abbia effettivamente composto: la storiografia ne attesta sei, che spaziano dall’Astronomia alla Matematica vera e propria (prevalentemente opere su Aritmetica e Geometria). Una sola di queste ci è pervenuta in latino: si tratta del *De numero indorum*, la cui traduzione si deve alla solerzia del matematico britannico Adelardo di Bath nel 1126.

È opinione comune che al-Khwārizmī abbia in gran parte tradotto una precedente opera dell’indiano Brahmagupta sullo stesso argomento, dato che in essa descrive il sistema di numerazione decimale e posizionale a tutt’oggi in uso in (quasi) tutto il mondo. In più, al-Khwārizmī dice chiaramente di *non* essere l’inventore di questo sistema, dovuto alla inventiva indiana in fatto di aritmetica.

Egli è però talmente completo e preciso nell’esporme le regole che la

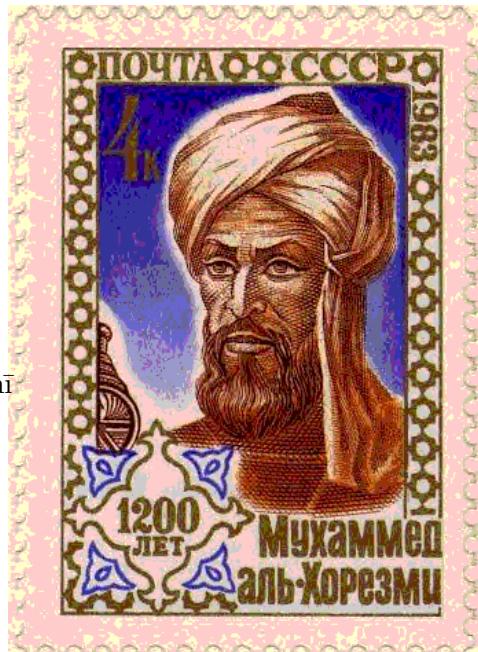


Figura 8.2: Abū Ja'far Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī in un francobollo emesso dall’unione sovietica nel 1983, a (circa) 1200 anni dalla sua nascita.

scoperta è stata attribuita a lui (forse anche a causa di un faintendimento da parte di Adelardo di Bath); c'è però di più: questo faintendimento arriva al punto da confondere il nome dell'opera con il suo autore, nel senso che dopo che il *De Numero Indorum* si diffonde, *con il nome di “algorismi” si comincia a chiamare qualsiasi regola di manipolazione dei numeri decimali.*

La fortuna di questa curiosa metonimia è palese nel momento in cui si osserva il processo di inserzione del nuovo termine nella lingua occidentale:

$$\text{al-Khwārizmī} \xrightarrow{\text{latino}} \text{algorismus} \xrightarrow{*} \text{algorythmus}$$

dove  $*$  è molto probabilmente un tentativo di giustificazione etimologica che parte dalla radice greca “arythmos” ( $\alpha\rho\iota\theta\mu\circ\varsigma$ ), numero... cosa curiosa è che “algos” ( $\alpha\lambda\gamma\circ\varsigma$ ) significa dolore!

Con ciò l'opera completa, confusi autore e titolo, diventa “Algoritmi de numero indorum”, e noi stessi ad oggi con *algoritmo* indichiamo una sequenza, possibilmente finita, di operazioni elementari volte a ottenere, mediante la manipolazione formale di simboli, un risultato esprimibile in termini dei simboli stessi.

### 8.2.2 La restaurazione, il completamento, l'equilibrio.

L'opera più famosa di al-Khwārizmī prende il nome di *al-Kitāb al-mukhtaṣar fī hisāb al-jabr wa l-muqābala*, ovverosia *Trattato sulla restaurazione, il completamento e l'equilibrio*.

Si narra che il califfo al-Ma'mun, allora capo della Casa della Sapienza, aveva invitato al-Khwārizmī a comporre “... una breve opera sulle regole del calcolo mediante completamento [al-jabr, la regola per cui  $a + b = c \iff a = c - b$ ] ed equilibrazione [muqābala, la regola per cui  $x + y = z + y \iff x = z$ ], di cui costantemente si fa uso nei casi di eredità, distribuzioni di terra, sentenze e commerci.”

Non è eccessivo pensare che i problemi di eredità e spartizioni di proprietà cui si accenna siano stati, da soli, ottime ragioni per far progredire le conoscenze nel campo della risoluzione di equazioni: una grossa spinta allo studio di equazioni algebriche è probabilmente stata data dall'urgenza di problemi legali, sorti a causa delle intricatissime leggi arabe in materia di eredità.

### Struttura dell'*al-jabr*.

L'opera si apre con una esposizione del sistema posizionale dei numeri; procede a studiare *sei tipi di equazioni*, di grado al massimo due, che coinvolgono cioè le tre specie di grandezza: il numero, la radice (l'incognita  $x$ ), il quadrato (l'incognita  $x^2$ ).

- Nel capitolo “dei quadrati uguali a radici” si studiano le equazioni  $x^2 = 5x$ ,  $x^2/3 = 4x$ ;
- Nei due capitoli successivi si trattano “quadrati uguali a numeri” e “radici uguali a numeri”
- Nei successivi si trattano equazioni di 2<sup>o</sup> grado a tre termini: si risolvono tra le altre  $x^2 + 10x = 39$ ,  $x^2 + 21 = 10x$ .

L'opera ha uno stile profondamente *retorico*, non c'è traccia di un calcolo simbolico (persino i numeri vengono scritti in lettere!), né di abbreviazioni, molto comuni in Brahmagupta e in Diofanto (che sappiamo essere molto letto in ambiente arabo anche grazie ad una sua traduzione in lingua): soprattutto quest'ultimo fatto è strano, perché l'*al-jabr* è per altri aspetti molto vicino a entrambe le opere.

Proprio in base a questo, al-Khwārizmī è considerato come punto di collegamento tra la matematica greca, di spirito squisitamente geometrico, e quella indiana, predisposta ad una impostazione astratta e simbolica: per molti versi egli è figlio del suo tempo, e pure in quell'immenso bacino di attrazione culturale che era la Bagdad del tempo egli conserva molte delle caratteristiche dell'impostazione “volta alle applicazioni” nella soluzione dei problemi. Egli rifiuta per esempio lo zero come radice di una equazione e rifiuta soluzioni negative; tuttavia, pur limitato dalla mancanza di un formalismo conciso e dall'insindibile legame fisico, è anche capace di avere intuizioni profonde e assolutamente non-banali: riesce per esempio ad osservare che in una equazione di secondo grado, un discriminante negativo (oggi diremmo  $\Delta < 0$ ) impedisce l'esistenza di soluzioni (oggi diremmo di soluzioni reali).

*De facto*, l'intento di al-Khwārizmī è di ricondurre una generica equazione di secondo grado a uno dei sei *tipi particolari* che espone come casi paradigmatici. Queste esauriscono davvero ogni possibilità, ed è quindi adeguato l'appellativo di “padre dell'algebra” che gli è stato dato.

Nessun uomo, e ancor meno nessuno scienziato è però un'isola. Come già accennato, è *ineleggibile* che al-Khwārizmī abbia attinto profondamente a

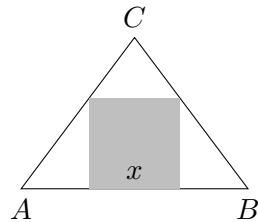
tutta tradizione precedente: si apprezza nitidamente il suo essere un abitante dell'Arabia cosmopolita medievale se si notano nell'*al-jabr*

- *Influenze orientali* nella impostazione rigorosamente numerica (non spaziale) dei problemi proposti, come da tradizione babilonese e (soprattutto) indiana;
- *Influenze greche*, se si procede nella lettura dopo il sesto capitolo:

... Per quanto riguarda i numeri [...] è ora necessario *dimostrare geometricamente* la verità degli asserti che li coinvolgono.

Al-Khwārizmī *ridimostra* tutti i procedimenti usati per risolvere gli esempi, con opportune costruzioni geometriche. L'idea che non esista un concetto di numero se non come rappresentazione di una grandezza geometrica (una lunghezza, un rapporto tra segmenti,...) è paleamente greca!

**Un esempio dell'“algebra geometrica” nell'*al-jabr*.** Uno dei problemi geometrizzati da al-Khwārizmī è curiosamente identico a quello proposto da Erone (è quasi certo che lo mutuò dalla traduzione araba di una delle sue opere): per “giustificare” l'equilibrazione di  $x^2 - 10x + 48 = x^2$  egli immagina di avere un triangolo isoscele di base 12; va trovato il lato di un quadrato che possa esservi inscritto, come nella seguente figura



$$\frac{48}{\text{area tr.}} - x(6 - x/2) - x(4 - x/2) = \frac{x^2}{\text{area q.}}$$

oppure (come appare nell'originale, in cui è evidente lo stile prettamente discorsivo dell'esposizione)

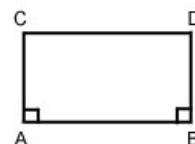
### 8.2.3 Altri matematici di spicco.

Anche data la sua posizione di primo piano all'interno dell'ambiente scientifico dell'epoca, non è difficile credere che al-Khwārizmī non sia stato l'unico matematico talentuoso del suo tempo. Ottimo contrappunto alla sua genialità può essere la persona di Thabit ibn-Qurra: Se al-Khwārizmī può essere pensato l'Euclide arabo, quest'ultimo infatti non ha nulla da invidiare a Pappo, sia per fama che per competenze.

La sua prova d'artista come matematico consiste nell'aver così generalizzato il teorema di Pitagora come nella figura 2. Il paragone con Pappo non è poi azzardato sulla base del fatto che Thabit era a capo di una scuola di traduttori, cui dobbiamo la conoscenza delle *Coniche* di Apollonio nella loro (quasi) interezza.

Possiamo poi accorpare molti altri nomi, studiosi dalla biografia incerta, che non furono figure di primo piano solo perché troppo eclettici per essere chiamati *matematici* nel senso stretto con cui oggi si intende la parola:

- *Abu'l-Wafa (Muhammad ibn Muhammad ibn Yahya ibn...)*, circa un secolo dopo Thabit, traduce l'*Arithmetica* di Diofanto: si occupa di trigonometria (scopre le formule di duplicazione e il teorema dei seni) e della soluzione di equazioni della forma  $ax^{2n} + bx^n = c$  (!).
- Ad *al-Hazan (ibn al-Haytham...)* si deve il primo trattato di ottica che cerca di spiegare i processi della visione e della propagazione della luce. Gli si deve anche un tentativo, curiosamente analogo a molti di quelli fatti in Europa secoli dopo, di derivare *il quinto postulato di Euclide* dagli altri; al-Hazen costruisce un quadrangolo identico a quello di Lambert (con tre angoli retti e uno acuto) e cerca di dimostrare che questo non può esistere.
- Un suo successore, *Omar Khayyam* (anche filosofo e poeta: nelle sue *Quatraine* spossa la filosofia del carpe diem e un certo vago pessimismo), riprende questo studio e curiosamente riscopre il quadrangolo di Saccheri:



#### 8.2.4 Conclusioni.

Pure se è storicamente più plausibile pensare che al-Khwārizmī abbia “solo” riordinato idee già note, la matematica mediorientale ha considerato (non a torto) il trattato *al-jabr* la summa delle conoscenze di quel tempo in fatto di equazioni algebriche.

Da al-Khwārizmī in poi, chiunque era autorizzato, una volta ricondotta una equazione ad uno dei casi studiati nell’*al-jabr*, a concludere “si operi ora secondo le regole dell’*algebra* e dell’*almucabala*”: Pacioli (il matematico che compare nella copertina di una vecchia edizione della *Storia della Matematica* di Boyer) scrive nella sua *Arte Maggiore* che lo scopo dell’Algebra è *ristorare gli estremi de’ diminuti* e quello dell’Almucabala è *di levare da li extremi li superflui*, e accetta come postulato (“*verità di commune scienzia*”) il preccetto per cui *si æqualibus æqualia addas, tota æqualia sunt; si ab æqualibus æqualia auferas, sunt quae restant æqualia*.

È ora facile osservare che la vittoria della impostazione astratta di cui al-Khwārizmī è padre non è stata gratuita. La conditio sine qua non perché la sua opera potesse efficacemente diffondersi e servire da punto di partenza a una nuova teoria, fu lo svilupparsi una *notazione* adatta a sostituire la forma della sua esposizione, verbale e retorica. Eccezion fatta per l’adozione del sistema posizionale, agli arabi mancò sempre la capacità di fare questo passo.

Viene allora da chiedersi:

- Quanto influisce sulla capacità di capire, creare e diffondere nuove idee (matematiche) l’avere da parte una “buona” *notazione*? Certamente molto, ma è possibile essere più precisi?
- In che misura, in quest’ottica, la *cultura* di riferimento di una persona influisce sul suo modo di intendere le entità matematiche, sulla sua capacità di astrarle, interconnettendole ad altre?

### 8.3 Breve storia dell’infinito e di altri simboli.

Per evitare di parlare a lungo del nulla, è d’uopo informarsi (almeno) su *come* e *quando* si sono diffuse alcune delle notazioni che usiamo a tutt’oggi, magari senza pensarci o ritenerendoli simboli sempre esistiti, universali. La storia dei singoli simboli è in effetti a volte parecchio antica rispetto all’epoca che stiamo analizzando ora.

### 8.3.1 I simboli di somma e sottrazione.

Persino gli Egizi riservavano un simbolo particolare alla operazione di addizione: si tratta di un paio di “gambe”, disegnate come  $\Delta$ , che camminano nella stessa direzione in cui procedeva il testo (destra o sinistra a seconda del testo stesso: la scrittura egizia era spesso bustrofedica).

Dopo un periodo (piuttosto lungo) in cui ogni autore usa abbreviazioni e simboli personali (Diofanto usa il simbolo “/” per indicare la somma, e una sorta di “7” per indicare la sottrazione), nell’europa del XV secolo si diffondono, grazie all’opera di *Luca Pacioli* “Summa de arithmeticā, geometriā, proportioni et proportionalitā” del 1494, l’abitudine piuttosto intuitiva di indicare le operazioni di somma e sottrazione rispettivamente con una *P* e una *M* sbarrata.

Questa notazione resiste per breve tempo, per lasciare il posto ad una, differente e quasi coeva, che dimentica le lettere e ricorda le sbarre: Johannes Widmann, matematico boemo chiamato a tenere la contabilità di un emporio, indica con “ $4c - 5L$ ” una cassa da 4 centner (=quintali) cui mancano 5 libbre, e con “ $4c + 5L$ ” una stessa cassa che pesa 5 libbre di più.

È curioso come sia i simboli di addizione che di sottrazione, che il simbolo di uguaglianza (inventato da Robert Recorde, 1510 - 1558) fossero orizzontalmente *molto* estesi sulla pagina:

$$14.\cancel{2}.\cancel{-}+15.\cancel{9}=\underline{\hspace{2cm}}=71.\cancel{9}.$$

Nelle parole di Recorde,

There be other 2 signes in often use of which the first is made thus + and betokeneth more: the other is thus made – and betokeneth lesse.” e “to auoide the tedioufe repetition of these woordes ’is equalle to’ I will fette as I doe often in woorke vfe, a paire of parallels [...] bicause noe two thynges, can be moare equalle.

### 8.3.2 I simboli di radice quadrata ed $n$ -esima.

L’introduzione del simbolo che oggi conosciamo (ma senza l’overline verticale sul radicando) è attribuita a Christoph Rudolff (1499 - 1545); si crede che il simbolo sia nato distorcendo la forma di una *r* minuscola: non è così azzardata l’ipotesi se si pensa che la notazione precedente indicava l’operazione di estrazione di radice (non solo quadrata) con l’abbreviazione di “radix”, *R*:

così, per esempio,  $R.4^{120}$ . voleva dire “radice quarta di 120”; diffuso in tutto il '400 era anche l'indicare con “R.cuba.” la radice terza, e con “R.R.cuba.” la radice sesta.

### 8.3.3 Notazione additiva per le potenze.

Oggi siamo abituati a considerare “normale” la regola  $a^n a^m = a^{n+m}$  (siamo abituati a trattare con i gruppi ciclici), dimenticando sempre che per molto tempo si è dibattuto su quale notazione adottare; la qual cosa non è stupefacente, data la varietà di notazioni scorrelate tra loro, per indicare potenze diverse di una stessa incognita! Si passa da intuizioni incredibilmente vicine alla nostra notazione, a considerazioni che legano ancora incognite e parametri a grandezze “fisiche”.

- *Nicole d'Oresme* (1323 - 1382), personalità molto eclettica del Medioevo francese, inventa la notazione qui riportata:

Oresme expresses  $2^{\frac{1}{2}}$  by the symbolism  
 $\boxed{\frac{1.p}{2.2}}$  and reads this *medietas [proportionis] duplae*; he expresses  
 $(2\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$  by the symbolism  $\boxed{\frac{1.p.1}{4.2.2}}$  and reads it *quarta pars [proportionis]*  
*duplae sesquialterae*. The fractional exponents  $\frac{1}{2}$  and  $\frac{1}{2}$  are placed to the  
left of the ratios affected.

(l'immagine viene da [Caj]). La base della potenza sta sotto  $p$ , l'esponente alla sua sinistra. Curiosità storico-tecnica: questa notazione permette a Nicole d'Oresme di trattare potenze con esponenti frazionari e gli suggerisce una prefigurazione del temperamento equabile della scala musicale (che si basa su numeri irrazionali, al contrario della scala pitagorica).

- *Simon Stevin*, circa 250 anni dopo, sposa una notazione vicinissima a quella odierna: scrive l'esponente di una base come un numero accanto ad esso, chiuso in un cerchio:

$$3@ = 9, \quad 2@ = 32, \dots$$

Tale notazione è “naturalmente additiva”. Calcola con questo metodo il numero  $3@7@8@ = 356.874.190.848$ .

L'Italia sembra insensibile a queste innovazioni: nell'opera “Pratica d'Arithmetica” (1521!) *Francesco Galigai* usa le notazioni seguenti:

139. Ghaligai's *Pratica d'arithmetica*<sup>1</sup> appeared in earlier editions, which we have not seen, in 1521 and 1548. The three editions do not differ from one another according to Riccardi's *Biblioteca matematica italiana* (I, 500–502). Ghaligai writes (fol. 71B):  $x = cosa = c^o$ ,  $x^2 = censo = \square$ ,  $x^3 = cubo = \square\square$ ,  $x^5 = relato = \square$ ,  $x^7 = pronico = \square\square$ ,  $x^{11} = tronico = \square\square\square$ ,  $x^{13} = dromico = \square\square\square\square$ . He uses the  $m^o$  for “minus” and the  $\bar{p}$  and  $e$  for “plus,” but frequently writes in full *piu* and *meno*.

(l'immagine viene da [Caj]).

#### 8.3.4 Un simbolo riservato all'incognita.

Per l'uso di simboli per le incognite e le potenze delle incognite bisogna attendere gli inizi del XVI secolo, quando gli autori si riferivano all'incognita chiamandola “radix”, “res” (cosa in latino), cosa, o *coss* (cosa in tedesco) per cui l'algebra prese il nome di “Ars cossica”.

*Cardano*, nell'*Ars magna*, chiama l'incognita “rem ignotam”, la  $x^2$  “q[ua]dratu” e il termine noto “numero” quindi un'equazione di II grado, ad es.  $x^2 = 4x + 32$ , diventava “q[ua]dratu aequaetur 4 rebus p:32”.

È curioso (almeno per la nostra intuizione del concetto) osservare che le potenze dell'incognita erano spesso indicate con dei simboli che non avevano nulla a che vedere con l'incognita stessa. Il cambiamento più significativo da questo punto di vista è stata l'opera di *Francois Viète*. Fu infatti lui il primo ad utilizzare le lettere anche come coefficienti generali: si rese conto che studiare un'equazione generale, cioè nella nostra scrittura  $ax^2 + bx + c = 0$ , voleva dire studiare un'intera classe di problemi e non solo un esempio numerico. Nella sua notazione, la potenza terza di un binomio  $(a + b)$  si espandeva come

a cubis + b in a quadr. 3 + a in b quadr. 3 + b cubo æqualia a  
+ b cubo.

من جانبين عشرة عشرة والرابعة عشر  
 دلاغ في جوهر الرحمن مربعة كم كل جانب من جوانب المربعة فما يس  
 ذلك ان تعرف عبود المثلثة وهو اذ تزهيب نصف المربعه وهو سبع  
 وعشرين اى كوب مائة وثلاثين فان تعمقها من احد المثلثين الآخرين من وسا  
 في مثله وهو ما يزيد بسبعين كوبه وستون كوب وجدرها ثمانية وهو العدد  
 ونكترو هامانيه واربعون دلاغ او صوبه الموردي نصف المربعه  
 وهو سبع كوب اخذ جوانب المربعة سبعة اى خمسين دلاغ في مثله فضار ما لا  
 يخففها الا ثم على اذ يجيئنا من حيث ان عن جدب المربعة ومن ثم في قيام  
 فاما للنواب عن جدب المربعة فصيام امتيازات ومحرومها واحد على  
 زاوية قابيمه فنكترو هان ذكره يساوي سبة الانصف يعني يكتب  
 اشها الانصف ما اذ هو نكترو المثلثين جمعاً الى المثلثين عن جدب المربعة  
 واثا الصداق نكترو هان ذكره مائة عرش وهم العود في صفيحة كذلك لرواية  
 الانصف الاجماع نكترو المربعة ما اذ نكترو المثلثين عشرة اشها الامال  
 في جبرناه بالالمربعة فضار عشرين اشها اما ووحده بعد ذلك يزيد واربعين باليه فنكترو المثلثة  
 العقلاني فالاشياء الواجب من ذلك ازيد واربعين اخوات دلاغ ذكرها كل جانب من المربعة ذلك

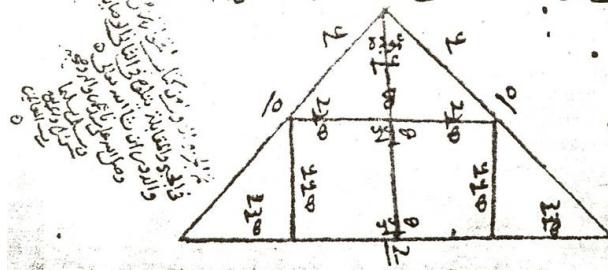


Figura 8.3: Una pagina dell'*al-jabr*.

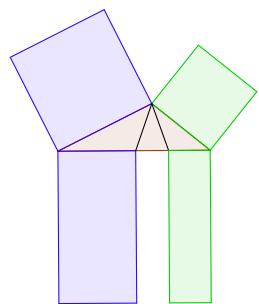


Figura 8.4: Il Teorema di Pitagora generalizzato da Thabit ibn-Qurra. La somma delle aree dei quadrati verde e blu equivale alla somma delle aree dei rettangoli verde e blu; il triangolo è scaleno e non ci sono ipotesi sugli angoli. Chiaramente nel caso di un triangolo rettangolo si riottiene il vecchio teorema di Pitagora.

# Bibliografia

- [Boy] Carl B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, 2000.
- [Caj] Cajori, F. (1993) [1928-1929]. *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications.
- [Cas] L. Casalino e R. Cavina, *Storia del Simbolismo in Matematica*, reperibile a <http://www.itis-molinari.eu/studenti/progetti/scienza/cartesio9/simbolis.htm>

## Capitolo 9

# Da Tartaglia a Cauchy: nascita e sviluppo del calcolo differenziale

di Davide Poggiali

### Introduzione e avvertenze

Succedeva sempre che a un certo punto uno alzava la testa...e la vedeva. È una cosa difficile da capire. Voglio dire...Ci stavamo in più di mille, su quella nave, tra ricconi in viaggio, e emigranti, e gente strana, e noi...Eppure c'era sempre uno, uno solo, uno che per primo...la vedeva. Magari era lì che stava mangiando, o passeggiando, semplicemente, sul ponte...magari era lì che si stava aggiustando i pantaloni...alzava la testa un attimo, buttava un occhio verso il mare...e la vedeva. Allora si inchiodava, lì dov'era, gli partiva il cuore a mille, e, sempre, tutte le maledette volte, giuro, sempre, si girava verso di noi, verso la nave, verso tutti, e gridava (piano e lentamente): l'America. Poi rimaneva lì, immobile come se avesse dovuto entrare in una fotografia, con la faccia di uno che l'aveva fatta lui, l'America.

Alessandro Baricco, *Novecento*

La presente relazione è essenzialmente un *mélange* di precedenti relazioni, opportunamente riarrangiate, adattate e tagliate, a cui abbiamo provveduto ad aggiungere la parte relativa al '500, diversi esempi e note a piè di pagina, l'opera di diversi matematici, che in tali relazioni non sono inclusi<sup>1</sup>. Lo scopo della presente relazione è offrire una storia dello sviluppo della matematica in Europa fra il XVI e il XVIII secolo, con particolare attenzione alla scoperta delle tecniche di calcolo note come “calcolo differenziale”; abbiamo voluto inoltre focalizzare il nostro sguardo sui protagonisti di tali scoperte, ossia coloro che per primi, nella nave dei matematici, hanno gridato America<sup>2</sup>.

## 9.1 Duelli ed equazioni: la matematica italiana del '500

Coloro che vincono, in qualunque modo vincono, mai non ne riportano vergogna.

Nicolò Machiavelli, *Istorie fiorentine*

### 9.1.1 Contesto storico e matematico

Con la morte nel 1492 di Lorenzo dei Medici detto il Magnifico, si ruppe improvvisamente l'equilibrio politico che garantiva stabilità alla penisola italica; nel 1509 le truppe di Luigi XII, re di Francia conquistarono i territori della Repubblica di Venezia, ponendo fine all'indipendenza della Serenissima, che perdurava da quasi otto secoli. Sempre nel 1492 avviene la scoperta del continente americano da parte della civiltà europea, che lanciò nella colonizzazione delle Nuove Indie Paesi come Francia, Inghilterra, Spagna e Portogallo, escludendo per motivi geografici Paesi fino ad allora protagonisti del commercio e della cultura come le attuali Germania e Italia. In ambito religioso, si assistette al secondo grande scisma delle Chiese Cristiane: nel 1517 il teologo tedesco Martin Lutero diede il via alla riforma protestante, a cui aderirono principalmente i paesi anglosassoni e a cui seguirono guerre e rivolte sanguinose, che terminarono nel 1555, con la Pace di Augusta, con la quale venne

<sup>1</sup>per tutto questo materiale aggiuntivo si fa riferimento principalmente a [4], salvo ove specificato.

<sup>2</sup>vedremo anche come non sempre è uno solo che grida ad una nuova scoperta e cosa succede quando due persone gridano in contemporanea.

sancito il principio del *cuius regio, eius religio*, ossia che la confessione religiosa seguita dal principe locale determinava la confessione di tutto il suo territorio. Nonostante i numerosi terremoti politici e religiosi, continuò il periodo storico noto come Rinascimento, il commercio e le arti fiorirono, e con essi lo sviluppo delle conoscenze matematiche. In molte città vennero create scuole d'abaco, e di conseguenza nacque la figura del matematico come insegnante; per provare la bravura dei diversi maestri si usava indire dei duelli pubblici di carattere matematico: lo sfidante e lo sfidato si proponevano a vicenda un certo numero di problemi, ed era dichiarato vincitore chi risolveva, prima, meglio o il maggior numero di problemi. Una vittoria o una sconfitta determinavano spesso la carriera dei matematici, e dato il carattere pubblico della competizione, spesso le disfide degeneravano in pubblici insulti e piccole risse. Se nel primo Rinascimento i matematici non fecero altro che riscoprire e rispolverare i testi antichi di matematica<sup>3</sup>, proprio nel '500 cominceranno a fiorire nuovi risultati originali, prima fra tutti la protagonista della nostra storia: la soluzione dell'equazione di terzo grado.

### 9.1.2 Niccolò Tartaglia

Nel 1535 Tartaglia, a Venezia come maestro d'abaco, venne sfidato da Antonio Maria Fior su 30 quesiti, in palio l'onore e diversi banchetti in taverna. I problemi posti da Fior erano tutti riconducibili a equazioni del tipo  $x^3 + px = q$  oppure  $x^3 = px + q$ , problemi considerati irrisolvibili. Sorprendentemente Tartaglia riuscì in poche ore a risolvere tutti i problemi posti da Fior, mentre il suo sfidante neanche uno. Interrogato sul come conoscesse le risposte ai problemi che egli stesso aveva posto<sup>4</sup>, Fior rispose di averle apprese da un *gran mathematico* suo maestro, ma che non sapeva la formula generale. Formula generale che invece il Tartaglia conosceva perfettamente, e che per la prima volta mostrava di conoscere. Nel 1537 Tartaglia pubblicò la *Nova Scientia*, in cui era contenuta la prima trattazione matematica del moto di una palla di cannone, ma non la nuova sensazionale scoperta. Bisogna capire che al tempo una nuova invenzione non veniva pubblicata subito, poteva far comodo tener-

---

<sup>3</sup>i libri più in uso erano gli *Elementi* di Euclide, il *Liber Abaci* di Fibonacci (pubblicato nel 1202) e, più recente, la *Summa* di Frate Luca Pacioli, un'encyclopedia matematica scritta nel 1494.

<sup>4</sup>la regola delle disfide impediva di porre problemi dei quali non si conoscessero le soluzioni; tuttavia molti matematici mettevano problemi insolubili, sperando di guadagnare dei punti nel caso che l'avversario non chiedesse la soluzione.



Figura 9.1: Niccolò Fontana, detto il Tartaglia (1499-1557). Si noti la folta barba, fatta crescere per coprire le cicatrici.

la segreta per nuove disfide. Tartaglia memorizzò la formula nella seguente poesia: *Quando che'l cubo con le cose appresso [  $x^3 + px$  ]*

*Se agguaglia à qualche numero discreto [ = q ]  
Trovan dui altri differenti in esso. [  $u - v = q$  ]*

*Dapoi terrai questo per consueto  
Che'llor prodotto sempre sia eguale [  $uv =$  ]  
Al terzo cubo delle cose neto, [  $(\frac{p}{3})^3$  ]*

*El residuo poi suo generale  
Delli lor lati cubi ben sottratti [  $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$  ]  
Varrà la tua cosa principale. [ = x ]*

ossia proponeva di risolvere l'equazione  $x^3 + px = q$  trovando due numeri  $u$  e  $v$  tali che  $u - v = q$  e  $uv = (\frac{p}{3})^3$  con i quali ottenere la soluzione  $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ . Si tratta quindi di risolvere un'equazione di secondo grado, che un matematico del tempo sapeva trattare perfettamente.

### 9.1.3 Gerolamo Cardano

A questo punto della storia dobbiamo presentare un nuovo personaggio, un matematico e un medico, ma anche un astrologo<sup>5</sup> e un giocatore d'azzardo: Gerolamo Cardano, figlio illegittimo del giurista e matematico dilettante Fazio. Nel 1537 Cardano era uno dei medici più stimati di Milano, ed era in procinto di pubblicare un libro di matematica basato sulla *Summa* di fra' Luca Pacioli, nel quale avrebbe trattato le equazioni di primo e di secondo grado, convinto del impossibilità di risolvere equazione di grado superiore ipotizzata da Pacioli. Quando venne a sapere dell'incredibile scoperta del matematico bresciano, contattò immediatamente Tartaglia per avere la formula. All'inizio recalcitrante, ma poi sedotto dalle insistenze e dalle offerte di Cardano, nel 1539 Tartaglia cedette la poesia. In cambio Cardano gli presentò il potente Marchese di Avalos, e giurò di non divulgare né pubblicare mai la formula. Anni dopo nel 1545 cardano pubblica l'*Ars Magna*, considerato l'atto di nascita della matematica moderna. In questo libro erano pubblicate la formula generale per la risoluzione di equazioni generali di terzo grado, da lui ricavate a

---

<sup>5</sup>ancora il limite fra matematica e magia non era chiaro all'epoca; egli fu anche costretto dal tribunale della Santa Inquisizione ad abiurare molti suoi scritti blasfemi, fra cui un articolo in cui calcolava l'oroscopo di Gesù di Nazaret...



Figura 9.2: Gerolamo Cardano (1501-1576), medico, matematico, astrologo e giocatore d'azzardo

partire dalla formula del Tartaglia, e la formula per la risoluzione di equazioni di quarto grado, scoperta dal suo allievo bolognese Ludovico Ferrari a partire dalla soluzione di un'equazione di terzo grado. Cardano si sentì libero di pubblicare quel libro in quanto aveva ritrovato il taccuino di un bolognese che anni prima di Tartaglia aveva già risolto l'equazione di terzo grado, Scipione dal Ferro, il *gran mathematico* maestro di Antonio Maria Fior.

Alla pubblicazione del libro seguirono accuse di spergiuro da parte di Tartaglia, ingiurie reciproche e proposte di pubbliche disfide che coinvolsero anche Ferrari. Tuttavia la pubblicazione del libro era già avvenuta, e una volta scoperte le nuove formule Cardano si sentì libero di disprezzare la formula di Tartaglia, per ottenere la quale anni prima aveva pianto, implorato e promesso.

## 9.2 La strada per il calcolo infinitesimale; il '600

Né alcuno dirà questa sij imperfettione del Racconto, e deformatà di questo mio rozzo Parto, a meno questo tale Critico non sij persona affatto diggiuna della Filosofia: che quanto agl'huomini in essa versati, ben vedranno nulla mancare alla sostanza di detta Narratione. Imperciocché, essendo cosa evidente, e da verun negata non essere i nomi se non puri purissimi accidenti...

Alessandro Manzoni, *I promessi sposi*

### 9.2.1 Contesto storico

<sup>6</sup> Elenchiamo brevemente i principali avvenimenti che caratterizzarono il XVII secolo, in modo da poter contestualizzare il lavoro dei matematici di cui tratteremo.

#### - Affermazione dell'Assolutismo

Si affermò l'Assolutismo nella maggior parte degli Stati europei, come ad esempio la Russia e la Francia.

#### - Guerra dei trent'anni (1618-1648)

La guerra dei trent'anni fu costituita da una serie di conflitti armati che dilaniarono l'Europa dal 1618 al 1648. I combattimenti si svolsero inizialmente e soprattutto nei territori dell'Europa centrale appartenenti al Sacro Romano Impero Germanico, ma coinvolsero successivamente la

---

<sup>6</sup>questa sezione è ripresa da [6].

maggior parte delle potenze europee, con le eccezioni di Regno Unito e Russia. Durante questi trent'anni la guerra cambiò gradualmente natura e oggetto: iniziata come conflitto religioso tra cattolici e protestanti, si concluse in lotta politica per l'egemonia tra la Francia e gli Asburgo.

- **Guerra civile inglese (1642-1660)**

Alla fine di tale guerra, anche se la monarchia riuscì a sopravvivere, grazie al potere che il Parlamento aveva rivendicato, l'Inghilterra non vide mai più sovrani assolutisti sul proprio trono.

- **Rivoluzione scientifica**

Dal punto di vista scientifico-culturale, il XVII secolo fu una fase di straordinario sviluppo. Infatti con il termine “rivoluzione scientifica” si fa riferimento al periodo compreso tra l’anno di pubblicazione del capolavoro di Copernico *De revolutionibus orbium coelestium* (1543) e quello dell’opera di Newton *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687). Questa rivoluzione scientifica, che a sua volta aveva avuto alcune sue basi nell’Umanesimo rinascimentale e nell’opera di geni come Leonardo da Vinci, getterà poi le basi culturali per la successiva rivoluzione industriale.

- **Razionalismo**

In filosofia trionfava il razionalismo, corrente di pensiero secondo cui, partendo da principi fondamentali individuabili sperimentalmente o intuitivamente, come gli assiomi della geometria o i principi della meccanica e della fisica, si può arrivare tramite un processo deduttivo ad ogni altra forma di conoscenza.

**Contesto matematico**

Nel XVII secolo la matematica europea ricevette un forte impulso. Sebbene non esistesse ancora nessuna organizzazione ufficiale che coordinasse le attività dei matematici di professione, in alcuni stati europei si erano formati spontaneamente alcuni gruppi scientifici, come ad esempio l’Accademia dei Lincei in Italia, la Royal Society in Inghilterra e l’Académie Française in Francia. Inoltre furono istituite le prime cattedre di Matematica nelle università.

Tutto ciò favorì indubbiamente lo sviluppo delle tecniche matematiche. In ogni caso, nel secondo trentennio del XVII secolo, la Francia divenne il centro indiscusso dell'attività matematica del tempo. La nascita della Geometria analitica (come risoluzione geometrica di problemi algebrici o, viceversa, come risoluzione algebrica di problemi geometrici) ha principalmente dovuto ai matematici francesi René Descartes (1596-1650) e Pierre De Fermat (1601-1665). Grazie soprattutto al lavoro di questi due pensatori, la Francia diventa nel secondo trentennio del XVII secolo il centro indiscusso dell'attività matematica. Si tratta di una matematica attiva che si sviluppa più per una sua logica interna, che per sollecitazioni di forze economiche, sociali o tecnologiche, ma che non tarderà tuttavia ad alimentare poi un vastissimo campo di applicazioni nei settori più svariati. Cartesio e Fermat fondarono la geometria analitica contemporaneamente, ma separatamente, spinti entrambi, anche se per motivazioni diverse, da un desiderio di ritorno al passato, all'età d'oro della geometria, ai problemi classici dei matematici greci. Cartesio prende le mosse dalla constatazione della gran diversità dei procedimenti in uso nelle ricerche scientifiche. Ebbene, egli pensa che per porre fine a questo stato caotico non vi è che un mezzo: scoprire un fondamento assoluto, superiore a qualsiasi dubbio, da cui siano derivabili tutte le verità della scienza. La geometria analitica riuscirebbe, per l'appunto, a risolvere il problema ora accennato, per lo meno nell'ambito della matematica. La geometria analitica, chiamata anche geometria cartesiana, è lo studio della geometria attraverso il sistema di coordinate oggi dette cartesiane, ma già studiate nel Medio Evo da Nicola d'Oresme.

Ogni punto del piano cartesiano o dello spazio è determinato dalle sue coordinate su due piani: ascisse ( $x$ ) e ordinate ( $y$ ), che determinano un vettore rispettivamente del tipo  $(x, y)$  oppure  $(x, y, z)$ . Gli enti geometrici come rette, curve, poligoni sono definiti tramite equazioni, disequazioni o insiemi di queste, detti sistemi. Le proprietà di questi oggetti, come le condizioni di incidenza, parallelismo e perpendicolarità, vengono anch'esse tradotte in equazioni e quindi studiate con gli strumenti dell'algebra e dell'analisi matematica.

I temi più importanti della geometria analitica sono:

- lo spazio vettoriale
- definizione di piano
- problemi sulla distanza
- il prodotto scalare per ottenere la proiezione fra due vettori



Figura 9.3: René Descartes (1596 - 1650), matematico e filosofo francese

- il prodotto vettoriale per ricavare un vettore perpendicolare a due vettori conosciuti
- problemi di intersezione

### 9.2.2 René Descartes

7

#### La vita

René Descartes, meglio conosciuto come Cartesio, nacque a La Haye nel 1596 in una famiglia di piccola nobiltà potendo così ricevere un'educazione completa entrando a 8 anni nel collegio dei Gesuiti La Fleche. Nel 1618 intraprese la carriera militare, partecipando alla Guerra dei Trent'anni ma i periodi di servizio furono sempre intervallati da lunghi periodi di studio e viaggi in Europa. Nella notte del 10 Novembre 1619 fece un sogno durante il quale gli si

---

<sup>7</sup>questa sezione è ripresa da [7].

presentò il metodo della matematica grazie al quale intuisce una nuova concezione della realtà e un modo per pervenire alla verità, compresa la matematica stessa. Trascorse la sua vita fino al 1628 a Parigi e in Olanda dal 1629 al 1649. Nel 1649 fu invitato a Stoccolma dalla regina Cristina di Svezia, col compito di istruirla. L'11 febbraio 1650, dopo breve malattia, morì di polmonite.

### **La filosofia di Descartes**

La finalità della filosofia di Cartesio è la ricerca della verità attraverso la filosofia, intesa come strumento di miglioramento della vita dell'uomo. Su questa via egli intende ricostruire il sapere, fondare la scienza. Cartesio ritiene che criterio basilare della verità sia l'evidenza, ciò che appare semplicemente e indiscutibilmente certo, mediante l'intuito. Il problema nasce dall'individuazione dell'evidenza, che si traduce nella ricerca di ciò che può essere soggetto al dubbio. Pertanto, poichè la realtà tangibile può essere ingannevole, in quanto soggetta alla percezione sensibile e al contempo la matematica e la geometria(che esulano dal mondo sensibile) si rivelano fasulle nel momento in cui si ammette che un'entità superiore faccia apparire come reale ciò che non lo è, l'unica certezza che rimane all'uomo è che perlomeno dubitando, egli ha la certezza di esistere. A partire da ciò Cartesio cerca di individuare i principi fondamentali che possono essere conosciuti con certezza. Per individuare tali principi si serve del metodo noto come “scetticismo metodologico”: rifiutare come falsa ogni idea che può essere revocata in dubbio. Egli ritiene che i pensieri di cui possiamo essere certi sono evidenze primarie della ragione. Evidente è l'idea chiara e distinta che si manifesta all'intuito nella sua semplicità e certezza, senza bisogno di dimostrazione. Ne sono esempi i teoremi di geometria euclidea, che sono dedotti in base alla loro stessa evidenza, ma allo stesso tempo verificabili in modo analitico mediante vari passaggi.

Cartesio prese le mosse dalla constatazione della gran diversità dei procedimenti in uso nelle ricerche scientifiche. Sulle discipline matematiche osserva come esse non costituiscano un sistema logicamente coerente, e come le loro dimostrazioni appaiono “superficiali” e i loro risultati scoperti in modo casuale. Egli rileva anche l'eccessiva frammentazione dei diversi settori disciplinari. Allo stesso tempo è attratto dalla matematica perché con le sue dimostrazioni basate su assiomi arriva a delle certezze. Inoltre sosteneva che la matematica non era una disciplina contemplativa ma una scienza costruttiva e utile: non aveva una grande stima per la matematica pura e definiva coloro che coltivavano la matematica di per sé stessa come “ricercatori pigri dedito a un vano gioco

dello spirito”. Al contrario riteneva che la logica era sterile in quanto “serve a comunicare quanto già si conosce” e quindi non era in grado di fornire le verità fondamentali mentre la filosofia forniva soltanto i “mezzi per discorrere con un’apparenza di verità su tutti gli argomenti”. Quindi era proprio la matematica quella che “spiega tutte le scienze che sono legate alla forma, la misura e l’ordine”. Inoltre secondo la visione che Descartes aveva di Dio, “l’idea di perfezione che abbiamo in mente può essere ottenuta soltanto da un essere perfetto e quindi Dio esiste. Poiché è impossibile che Dio voglia ingannarci, possiamo essere certi che gli assiomi della matematica e le deduzioni che ne deriviamo sono verità. Dio ha quindi stabilito la natura in accordo con le leggi matematiche”. Egli è quindi convinto che le conoscenze matematiche abbiano un grado di certezza e evidenza superiori a quello conseguito dalla filosofia e dalle altre scienze e merita di essere assunta come modello di rinnovamento di tutto il sapere, rimuovendone i difetti.

Egli osserva come le scienze matematiche abbiano un elemento che le accomuna: ciascuna di esse studia i rapporti di quantità o proporzionalità intercorrenti tra gli oggetti che vi sono compresi. Con il suo metodo si proponeva di trovare un fondamento assoluto a tutto il sapere mediante due argomentazioni: una negativa, cioè la critica al tipo di istruzione ricevuta, fondata sul principio di autorità e sulla persuasività della tradizione. Egli infatti rifiuta la matematica dei Greci perché “artificiosa e incapace di farci scoprire nuove verità” e critica le indagini geometriche degli antichi perché erano svolte con procedimenti diversi, facendo uso di artifici variabili da un caso all’altro, non di rado oscuri e ambigui. Se da un lato siamo in grado di seguire passo passo le argomentazioni controllandole l’indubbia coerenza, dall’altro non riusciamo a capire perché in un caso si fa ricorso a un tipo di dimostrazione e in un altro caso a un altro tipo. Restiamo quindi disarmati di fronte a un qualsiasi problema nuovo, dovranno procedere per tentativi. La seconda argomentazione è positiva, ovvero è la proposta di un nuovo metodo per farci cogliere con chiarezza ogni verità, compresa la matematica.

## Il metodo cartesiano

Il metodo si fonda su quattro regole che vengono isolate nelle *Regulae ad directionem ingenii* opera scritta nel 1628 e pubblicata più tardi.

- **Regola dell’evidenza:** l’indicazione del criterio di verità; devono essere accolte solo quelle idee che si presentano alla nostra mente come chiare

e distinte. Chiarezza di un'idea significa che essa è colta dalla mente in forma esaustiva e compiuta senza che nessuno dei suoi aspetti, resti nell'oscurità. Distinzione significa che l'idea è ben delimitata rispetto alle altre.

- **Regola dell'analisi:** suggerisce di dividere ogni asserzione complessa in tante parti fino a giungere agli elementi ultimi che la costituiscono
- **Regola della sintesi:** necessità di disporre i principi in ordine che proceda da una minore a una maggiore complessità per scoprire in quale maniera si colleghino tra loro
- **Regola dell'enumerazione:** fare rassegne complete dei passi del proprio ragionamento e ripercorrerle con movimento continuo sino a essere sicuri di abbracciarle tutte in un unico sguardo senza omettere nulla.

Queste seppur non con questi nomi precisi, sono le regole che seguiamo nel momento in cui siamo di fronte ad una dimostrazione matematica. Descartes riteneva veramente importante il suo metodo e come vedremo, lo applicò anche alla geometria.

### La Géométrie

Il principale contributo dato da Descartes alla matematica fu l'elaborazione dei fondamenti della geometria analitica, esposti poi nel trattato *La Géométrie* del 1637, che costituisce un'appendice al *Discours de la methode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* (*Discorso sul metodo per ragionare bene e per cercare la verità delle scienze*). E' da notare che il Discorso è concepito come introduzione metodologica ai tre testi di argomento fisico-matematico insieme ai quali è stato pubblicato, testi il cui contenuto non poteva essere scoperto senza adottare il metodo proposto nel discorso.

La *Géométrie* è composta di tre libri:

- I. I problemi che si possono costruire solo con cerchi e linee
- II. Sulla natura delle linee curve
- III. La costruzione dei problemi solidi o più che solidi.

Non entrando nei dettagli che riguardano la trattazione di questi libri poniamo l'attenzione su come Descartes applicava il suo metodo alla geometria. Descartes criticava la geometria degli antichi perché ogni dimostrazione richiedeva sempre nuovi e ingegnosi ragionamenti: *Era un'arte confusa e oscura*. Criticava inoltre l'algebra del suo tempo perché era troppo soggetta a regole e a formule:...*ne risultava un'arte piena di confusione calcolata per mettere in imbarazzo invece che una scienza atta a migliorare la mente*. Egli si propose di prendere il meglio da entrambe e quindi il suo scopo diventava duplice: egli faceva uso dell'algebra nella geometria per la risoluzione di problemi di luoghi geometrici e allo stesso tempo si proponeva di tradurre le cinque operazioni algebriche (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e estrazione della radice quadrata) nel linguaggio della geometria. Egli mostrava che le cinque operazioni aritmetiche corrispondono a semplici costruzioni effettuate con riga e compasso giustificando così l'introduzione di termini aritmetici nella geometria. Esaminiamo almeno la prima costruzione che egli presenta. Sia data una linea AB rappresentante l'unità e occorra moltiplicare BD per BC. Disposti BA e BD su una stessa semiretta e BC su una semiretta qualsiasi di origine B, si traccia CA e poi DE parallela a CA. Il semplice esame della figura mostra come la linea BE sia quella richiesta. Infatti, la similitudine dà  $AB : BD = BC : BE$ . Da questa proporzione deduciamo che  $AB \cdot BE = BD \cdot BC$ . Ma se assumiamo AB come unità dei segmenti sarà lecito porre  $AB \cdot BE = BE$ . Ed ecco dunque come la reinterpretazione della Proposizione 12 del Libro VI degli *Elementi* consente di costruire il segmento prodotto di due segmenti. Ma la stessa Proposizione è anche la chiave interpretativa per la divisione. BC è infatti il risultato della divisione di BE per BD. L'estrazione di radice quadrata si compie con una reinterpretazione della Proposizione 13, nel modo ben noto (in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa). Se Descartes criticava l'algebra del suo tempo ne vedeva però anche in generale la sua potenza rispetto ai metodi geometrici per risolvere i problemi: essa rende infatti meccanici i ragionamenti e rende minimo il lavoro necessario per risolvere i problemi. Si propone quindi di dare ad essa una struttura perfettamente razionale che faccia uso solo di verità chiare ed evidenti. Per attuare la propria riforma ha bisogno di una unità di misura, di un fondamento assoluto. Introduce l'uso sistematico degli assi coordinati che permettono di rappresentare i punti con coppie o terne di numeri e le relazioni geometriche fra punti con relazioni algebriche. Così i problemi geometrici possono venire tradotti in problemi algebrici e risolte con le

regole, in un certo senso automatiche, dell'algebra. Questa traduzione presenta due notevoli vantaggi: rende pressoché uniforme la trattazione di tutte le questioni geometriche; fa scomparire le differenze inessenziali tra figura e figura permettendo così di raggiungere risultati di ampia generalità. In tal modo la geometria diviene una scienza essenzialmente analitica in cui ogni problema ben fondato, se di grado non superiore al quarto, diviene automaticamente risolubile.

La geometria analitica traducendo in termini algebrici le nozioni di punto, retta, piano e le relazioni intercorrenti fra essi, è in grado di rendere chiara e uniforme la trattazione di tutti i problemi geometrici e rappresenta una tappa nuova rispetto ai greci (che non avevano saputo indicare una via per risolvere tali problemi, limitandosi a risolverli caso per caso, con accorgimenti ingegnosi ma di portata circoscritta). La molla che spinge Cartesio ad “inventare” la geometria analitica è la stessa che lo ha spinto alla fondazione della nuova metafisica, si tratta cioè di superare la frammentazione del sapere scientifico degli antichi e allo stesso tempo ostacolare una analogia tendenza alla perdita di unità presente nella filosofia moderna.

E' importante ricordare che la geometria cartesiana aveva come intento una costruzione geometrica: “Tutti i problemi di geometria si possono facilmente ridurre a tali termini, che in seguito per costruirli basta conoscere la lunghezza di alcune rette e non il ricondurre la geometria all'algebra”.

Il metodo generale che consentiva l'applicazione dell'algebra alla geometria si fondava sull'idea di associare delle equazioni algebriche alle curve e alle superfici e prende appunto il nome di geometria analitica o geometria delle coordinate. Il procedimento è così sintetizzabile: si parte da un problema geometrico, lo si traduce in un linguaggio di un'equazione algebrica e infine, dopo aver semplificato l'equazione quanto più possibile, si risolve tale equazione geometricamente. Nell'affrontare un dato problema Descartes diceva di seguire questi passi:

1. dare dei nomi a tutte le linee che sembrano necessarie per la costruzione del problema, sia a quelle ignote che a quelle note,
2. guardare in che modo tali linee sono in rapporto tra loro fino a che non si sia trovato un modo di esprimere una medesima quantità in due maniere diverse: quello che si chiama un'equazione in una incognita,
3. il grado di questa equazione algebrica finale determina i mezzi geometrici con cui si poteva eseguire la costruzione geometrica richiesta: per

equazioni di secondo grado bastano rette e cerchi, per quelle di terzo e quarto grado erano adatte le sezioni coniche.

Oltre a questo metodo a Descartes va il merito di aver sviluppato il formalismo algebrico al punto che *La géometrie* è il più antico testo matematico che uno studente di algebra odierno potrebbe leggere senza incontrare difficoltà nella notazione. Descartes usava le prime lettere dell'alfabeto per indicare i parametri e le ultime per indicare le incognite, utilizzava i simboli '+' e '-' e una particolare notazione esponenziale per le incognite (potenza e radice quadrata). C'è però una importante differenza concettuale: mentre noi concepiamo i parametri e le incognite come numeri, Descartes li concepiva come segmenti. Egli però rompeva con la tradizione greca in questo aspetto: infatti invece di considerare, per esempio  $x^2$  e  $x^3$  come un'area e un volume rispettivamente, li interpretava anche essi come segmenti.

### **La costruzione geometrica delle radici di equazioni di secondo grado**

Nel I libro, Descartes fornisce dettagliate istruzioni sul modo di costruire geometricamente le soluzioni delle equazioni di secondo grado. Infatti una volta che nella risoluzione di un problema si è giunti ad un'equazione, poi si può ancora dare alla soluzione un'interpretazione geometrica.

Per l'equazione  $z^2 = az + b^2$ , per esempio, dall'algebra si sa che

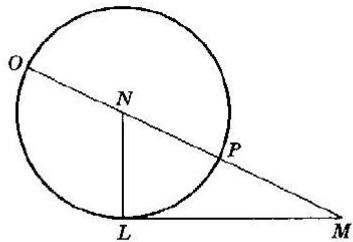
$$z = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2\right]}.$$

Descartes procedeva con il dare la costruzione per  $z$  nel modo seguente:

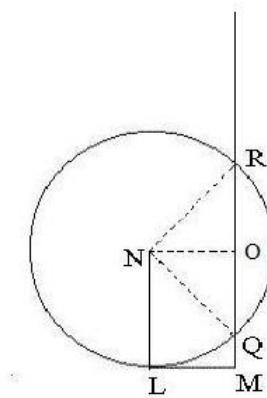
tracciava un segmento  $LM$  di lunghezza  $b$  e da  $L$  innalzava un segmento  $NL$  uguale ad  $\frac{a}{2}$  e perpendicolare a  $LM$ . Con centro in  $N$  costruiva un cerchio di raggio  $\frac{a}{2}$  e tracciava la retta passante per  $M$  e  $N$  e intersecante il cerchio nei punti  $O$  e  $P$ . Si notava quindi il triangolo rettangolo  $LMN$  dove  $MN$  per il Teorema di Pitagora è uguale a  $MN = \sqrt{(LN^2 + LM^2)} = \sqrt{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2\right]}$ .

Quindi  $z = OM = ON + MN = \frac{a}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2\right]}$  era il segmento cercato che rappresentava geometricamente la soluzione. (Descartes trascurava la radice  $PM$  dell'equazione perché era "falsa" cioè negativa).

Costruzioni simili venivano fatte per le equazioni  $z^2 = az - b^2$  e  $z^2 + az = b^2$  le sole altre di secondo grado con radici positive.



Per l'equazione  $z^2 = az - b^2$  sapendo che le soluzioni erano  $z = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2\right]}$  e trascurando la radice negativa, procedeva invece in questo modo: tracciava un segmento LM di lunghezza  $b$  e da L innalzava un segmento NL uguale ad  $\frac{a}{2}$  e perpendicolare a LM. Con centro in N costruiva un cerchio di raggio  $\frac{a}{2}$ . Considerava poi il rettangolo LMON e indicava con Q e R le intersezioni della retta per M e O con la circonferenza. Tracciava inoltre i raggi NQ e NR: si notava quindi il triangolo rettangolo NOR dove OR per il Teorema di Pitagora è uguale a  $OR = \sqrt{(NR^2 - NO^2)} = \sqrt{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2\right]}$ . Si nota che  $z = MR = MO + OR = \frac{a}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2\right]}$  era il segmento cercato ovvero rappresentava geometricamente la soluzione.



## L'associazione curve-equazioni

Fin qui potremo dire che Descartes si preoccupava della risoluzione dei problemi geometrici determinati, ovvero quelli che portano ad un'unica soluzione. Nel II libro viene invece esposta la risoluzione dei problemi geometrici indeterminati, cioè problemi in cui ci possono essere molte lunghezze che possono servire da soluzione. Ed è in questo libro che vi sono i risultati più vicini alla concezione moderna della geometria analitica: qui compare, e soltanto di passaggio, la scoperta che le equazioni indeterminate in due incognite corrispondono a luoghi geometrici. Con il suo metodo per la risoluzione dei problemi geometrici Descartes affronta il problema di Pappo arrivando ad un'equazione in due incognite.

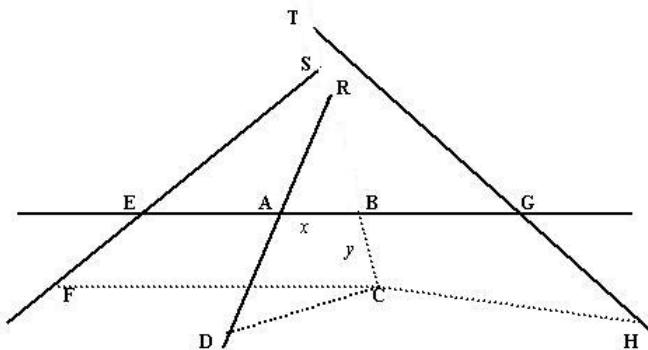
Il problema di Pappo si può così formulare:

*Date tre, quattro o più linee rette in un piano, trovare la posizione dei punti (luogo) da cui si possono costruire un ugual numero di segmenti, uno per ciascuna retta data, che formino un angolo noto con ciascuna delle rette date e tali che il rettangolo formato da due dei segmenti così costruiti stia in un rapporto dato con il quadrato del terzo segmento costruito se le rette sono tre; invece se vi sono quattro rette, che stia in un rapporto dato con il rettangolo formato dagli altri due. Oppure, se le rette sono cinque o sei, che il parallelepipedo costruito con tre di esse stia in un rapporto dato con il parallelepipedo costruito con le altre. In tal modo il problema può estendersi a un qualsiasi numero di linee.*

Pappo aveva risolto il problema nel caso delle tre rette:

*Date tre rette complanari e un punto  $P$  appartenente al piano, si considerino le distanze di  $P$  dalle tre rette; trovare il luogo dei punti tali che il prodotto di due delle distanze sia uguale.*

Egli si interessò in particolare del problema di Pappo nel caso di quattro rette. Le rette date sono AG, GH, EF e AD. Consideriamo un punto C e le quattro rette condotte da C alle quattro rette date in modo che formino con ciascuna di esse un angolo pure dato che può essere diverso da retta a retta e tali che il prodotto di una parte di queste linee sia uguale al prodotto delle rimanenti o che l'uno (di questi prodotti) stia all'altro in un rapporto dato. Denotiamo



queste quattro rette con  $CB$ ,  $CD$ ,  $CF$  e  $CH$ . Si richiede di trovare il luogo dei punti  $C$  tali che  $CB \cdot CF = CD \cdot CH$ .

Dopo aver esposto il problema Cartesio inizia a risolverlo. Qui il matematico espone la sua visione delle coordinate su un piano.

*Innanzi tutto suppongo il problema come già risolto e per liberarmi dalla confusione di tutte queste linee, considero una delle rette date e una di quelle che bisogna trovare, per esempio  $AB$  e  $CB$ , come le principali, e a queste cerco di riferire tutte le altre. Il segmento  $AB$  sia chiamato  $x$  e  $BC$   $y$  e siano poi prolungate tutte le altre linee date fin quando non intersechino queste due.*

Descartes chiama  $AB$  con  $x$  e  $CB$  con  $y$  e prolunga tutte le altre finché non le interseca. Mediante delle costruzioni geometriche ottiene i valori delle altre rette in termini di quantità note e così esprime in tali termini  $CB \cdot CF = CD \cdot CH$  giungendo all'equazione generale

$$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$$

dove  $a, b, c$  e  $d$  sono numeri reali dipendenti dalle quantità date. Descartes osserva inoltre che, scegliendo un qualsiasi valore di  $x$ , si ottiene un'equazione di secondo grado in  $y$  che può essere risolta rispetto ad  $y$  e che quindi  $y$  può essere costruita geometricamente come aveva spiegato nel libro I. Se, quindi, si hanno infiniti valori di  $x$ , si hanno infiniti valori di  $y$  che sono le coordinate di infiniti punti  $C$  il cui luogo è la curva descritta dall'equazione precedente. Descartes specificò poi le condizioni cui dovevano soddisfare i coefficienti perché la conica fosse una retta, una parabola, un'ellisse o un'iperbole. Sapeva inoltre che con una opportuna scelta degli assi e dell'origine si poteva ottenere

la forma di equazione più semplice, ma non formulò nessuna delle forme canoniche che conosciamo (cosa che in seguito farà Fermat).

Descartes utilizzava un sistema di coordinate oblique, quindi non sempre ortogonali, e solo con ascisse e ordinate positive, per cui tracciava solo le porzioni delle curve che giacevano in quello che noi chiamiamo primo quadrante. Delle coordinate negative sapeva solo che erano orientate in senso inverso rispetto a quelle positive ma non fece mai uso di tali coordinate. Egli era così poco interessato a tracciare curve che non comprese a pieno il significato delle coordinate negative. In Cartesio non c'è alcuna formula per la distanza o per l'angolo formato da due rette; non c'è il grafico di alcuna curva nuova tracciata direttamente a partire dalla sua equazione. Si potrebbe dire quindi che *La géométrie*, pur essendo dedicata interamente alla interazione tra algebra e geometria, è ben lontana dalla geometria analitica in uso oggi.

Sempre nel secondo libro è presente una classificazione delle curve in base al grado e questo rappresenta un passo avanti rispetto ai greci che non avevano ammesso come legittime costruzioni che facevano uso di curve diverse da rette o circonferenze. Nella prima classe Descartes raggruppò i problemi che portavano a equazioni di secondo grado e che potevano perciò essere costruiti con riga e compasso; nella seconda classe riunì quelli che portavano a equazioni di terzo e quarto grado, le cui radici potevano venire costruite per mezzo di sezioni coniche...in generale la costruzione delle radici di un'equazione di grado  $2n$  o  $2n-1$  era un problema della classe n.

Descartes sottopose ad esame critico le distinzioni fatte dai greci tra curve piane, solide e lineari. C'era la convinzione che fossero legittime soltanto le curve costruibili con riga e compasso. I matematici greci dividevano le curve in tre categorie:

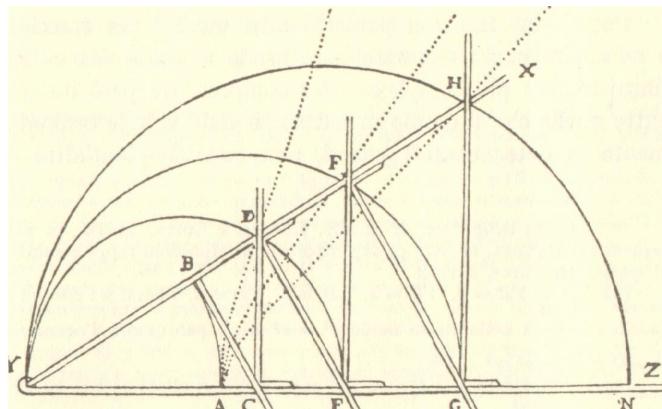
- i luoghi piani, formati da tutte le rette e da tutti i cerchi;
- i luoghi solidi , formati da tutte le sezioni solide;
- i luoghi lineari, che comprendevano indistintamente tutte le altre curve.

Il fatto stesso Apollonio, il più grande studioso di geometria dell'antichità, non sia giunto a sviluppare una geometria analitica, era probabilmente dovuto più ad una povertà di curve che non ad una povertà di pensiero. Descartes invece con il suo metodo di associare ad ogni curva un'equazione algebrica, ampliò il

campo di oggetti matematici concepibili dal nostro pensiero, considerando come curve ammissibili (riconobbe loro un posto di pieno diritto nell'ambito della geometria) anche la concoide e la cisoide. Per lui erano curve geometriche quelle che potevano essere espresse da un'unica equazione algebrica; le altre, da lui chiamate "curve meccaniche", le esclude dal campo della geometria in quanto le immaginiamo descritte da due movimenti separati che non hanno tra loro alcun rapporto che si possa misurare esattamente. Grazie a Descartes viene quindi eliminata la costruibilità come criterio di esistenza per le curve: si esce dal mondo chiuso degli antichi Greci e si offre il metodo di associare alle curve delle equazioni, un metodo generale che si applica a tutte le curve.

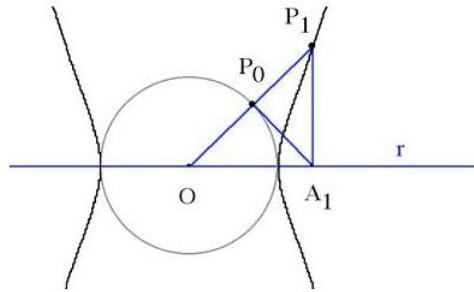
**Il compasso cartesiano** Interessante è l'invenzione di Descartes di una macchina ideale capace di realizzare delle curve meccaniche definite da polinomi di grado alto quanto si vuole: il **compasso cartesiano**. Si tratta di un processo iterativo che, passo dopo passo, costruisce attraverso un movimento meccanico una curva algebrica la cui equazione ha un grado che aumenta di quattro unità alla volta.

Potremo considerare YZ fisso. Quando YX coincide con YZ e quindi quando



il compasso è chiuso, i punti B, C, D, E, F, G, H coincidono con A. Poi, man mano che lo si apre il regolo BC perpendicolare a YX spinge CD verso Z e in maniera simile CD spinge DE e così via e in questo modo il punto D descrive la curva che si vede tratteggiata e così anche F e H ecc...Si potrebbe dare la dimostrazione di tale procedimento iterativo:

La curva iniziale è una circonferenza. Prendiamo un punto  $P_0$  variabile su una circonferenza di centro  $O$  e raggio 1. Fissiamo una retta  $r$  passante per il centro della circonferenza. Per ogni punto  $P_0$  consideriamo la semiretta  $OP_0$ ,



la retta  $P_0A_1$  perpendicolare a  $OP_0$  e la retta  $A_1P_1$  perpendicolare a  $r$ . Il luogo dei punti  $P_1$  descrive una curva la cui equazione, scegliendo come origine il centro della circonferenza come asse delle  $x$  la retta  $r$  e come unità il raggio della circonferenza, si determina immediatamente: sia  $x = OA_1$  e  $y = A_1P_1$ . Per il Teorema di Pitagora si ha  $x^2 + y^2 = OP_1^2$  ma, per il Teorema di Euclide  $OP_1 \cdot OP_0 = OA_1^2$  ed, essendo  $OP_0 = 1$ , si ricava  $OP_1 = x^2$  e quindi l'equazione della curva è di quarto grado

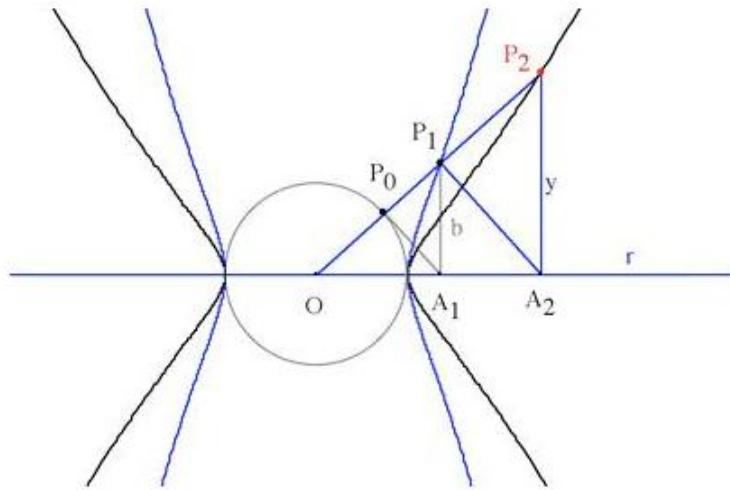
$$x^2 + y^2 = x^4.$$

Iteriamo ora il procedimento. Per ogni punto  $P_1$  di coordinate  $(a, b)$  della curva ottenuta, costruiamo la retta  $OP_1$ , la sua perpendicolare  $P_1A_2$  e la perpendicolare a  $r$ ,  $A_2P_2$ . Il luogo descritto da  $P_2$  è una nuova curva la cui equazione si calcola a partire dall'equazione precedente. Sia ora  $x = OA_2$  e  $y = A_2P_2$  ed essendo simili i triangoli  $OP_1A_1$  e  $OP_2A_2$  si ha che  $bx = ay$  ovvero

$$bx - ay = 0.$$

Consideriamo ora il triangolo rettangolo  $P_1A_2P_2$ , risulta  $P_1A_2^2 = by$  per il Teorema di Euclide e d'altra parte, guardando al triangolo rettangolo  $OP_1A_2$ ,  $P_1A_2^2 = x(x - a)$ . Otteniamo quindi

$$ax + by = x^2$$



e ricaviamo dalle due equazioni  $a$  e  $b$  in funzione di  $x$  e  $y$ :

$$\begin{cases} a = \frac{x^3}{x^2+y^2} \\ b = \frac{x^2y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

Sostituiamo questi valori nell'equazione della curva  $a^2 + b^2 = a^4$ . Troviamo così l'equazione del secondo luogo cioè  $(x^2 + y^2)^3 = x^8$  che è di grado 8.

In generale le equazioni dei vari luoghi sono

$$x^2 + y^2 = x^4, (x^2 + y^2)^3 = x^8, (x^2 + y^2)^5 = x^{12}, (x^2 + y^2)^7 = x^{16}, \dots$$

Ognuna di queste equazioni rappresenta una curva che si può ottenere con uno strumento meccanico (se pure ideale): il compasso cartesiano!

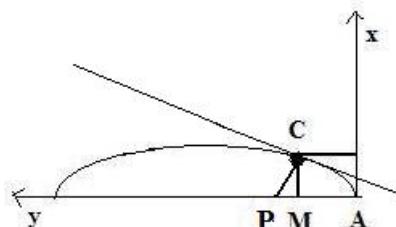
**Rette normali e rette tangenti** Descartes utilizzava il metodo di associare curve ad equazioni più per costruzioni geometriche che non in quanto innovazione fine a sè stessa. Fra i risultati più importanti ottenuti da Descartes e contenuti nel II libro dell'opera, merita una particolare menzione la determinazione generale della normale ad una qualsiasi curva algebrica piana in un suo generico punto e la conseguente determinazione della tangente. Per

trovare la normale ad una curva algebrica in un determinato punto C di una curva algebrica, Descartes procede in questo modo.

*Sia CE la curva e per il punto C occorra tracciare una retta che formi con essa angoli retti. Suppongo tutto già compiuto e assumo CP come linea cercata, linea che prolungo fino a P dove incontra la retta GA, che suppongo essere quella a cui debbono riferirsi tutti i punti della linea CE. Così ponendo MA o CB = y, CM o BA = x, otterrò una certa equazione che esprime la relazione che sussiste tra x e y. [...]*

Con un linguaggio e un formalismo per noi familiare, Descartes proseguiva spiegando che se si poneva per il cerchio incognito  $PC=s$  e  $PA=v$ , osservando che il triangolo PMC era rettangolo, si aveva  $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$ , da cui si poteva ricavare la x (o equivalentemente la y) e sostituirla nell'equazione della curva data. Poi, “dopo aver trovato [tale equazione] invece di servircene per conoscere le quantità x o y [...] che sono già date poiché il punto C [nel quale dobbiamo determinare la normale alla curva] è dato, dobbiamo usarla per trovare v o s che determinano il punto P richiesto [centro del cerchio cercato]. A tal fine bisogna considerare che se questo punto P è come lo desideriamo il cerchio di cui sarà il centro e che passerà per C vi toccherà la curva CE senza intersecarla”. Descartes quindi dava prima un metodo generale e poi studiava vari esempi tra cui quello di una particolare ellisse che qui presento. Egli stesso dice che in questo modo il metodo di trovare la tangente ad una curva resta più impresso.

Questa ellisse ha equazione, in base ad un teorema di Apollonio (qui non approfondito)  $x^2 + \frac{r}{q}y^2 - ry = 0$ . Si fissa nel piano un sistema di coordinate come in figura.



I parametri  $r$  e  $q$  dell'equazione sono particolari invarianti geometrici dell'ellisse (che qui non vengono precisati). Le coordinate del punto C sono dunque  $x = |CM|$  ed  $y = |MA|$ . Poiché Descartes non dava significato alle coordinate negative, nel disegno compare solo la metà superiore dell'ellisse, ossia l'insieme

dei punti che hanno entrambe le coordinate non negative. La tangente all'ellisse nel punto C è determinata una volta che è stata trovata la perpendicolare a questa nel punto C, quella che viene detta normale all'ellisse nel punto C. Descartes vuole costruire quest'ultima, e ne cerca il punto P di intersezione con l'asse maggiore dell'ellisse. Chiama s e v le lunghezze dei segmenti PC e PA rispettivamente, e poi applica il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PMC, ottenendo l'equazione:

$$x^2 + (v - y)^2 = s^2.$$

Essa mette in relazione s e v con le coordinate (x,y) del punto C. Descartes ne ricava l'espressione di  $x^2$  in termini di y, s e v. Poi sostituisce questa espressione al posto di  $x^2$  nell'equazione dell'ellisse. Ovvvero

$$x^2 = -(v - y)^2 + s^2$$

e sostituendo ciò nell'equazione dell'ellisse si ottiene

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 + \frac{r}{q}y^2 - ry = 0 \quad (9.1)$$

La nuova equazione ottenuta contiene solo y, s, v: essa permette quindi di determinare, a partire dall'ordinata y del punto C, la relazione esistente fra i valori di s e v. Per determinare questi valori è necessaria un'altra condizione. Questa si ricava nel modo seguente: si impone che il cerchio di centro il punto P e raggio s di equazione

$$(y - v)^2 + x^2 = s^2$$

intersechi l'ellisse nel solo punto C. Dal punto di vista algebrico, ciò equivale a richiedere che il discriminante di una certa equazione di grado due sia nullo<sup>8</sup>. Si mette poi a sistema tale condizione con quella in 9.1 e si arriva a determinare il punto P e quindi poi la normale in C (vista come retta passante per due

---

<sup>8</sup>si noti che questo procedimento si può estendere a tutte le curve polinomiali  $F(x, y)$ ; più tardi ci si accorse che trovare la tangente era più semplice, infatti bastava impostare all'equazione della curva le coordinate di una generica retta per il punto di tangenza  $(x_0, y_0)$ , impostare alla formula così ricavata un contatto doppio nel punto di tangenza, ossia  $P(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ , con  $Q(x)$  polinomio a coefficienti incogniti e mediante il principio di identità dei polinomi ricavare tutti i coefficienti, fra cui quello della retta. Notiamo che i conti potevano essere molto lunghi, ma che arrivava sempre a destinazione (ma solo nel caso polinomiale!).

punti) e la tangente. Significativo è notare come con questo procedimento ci si riduca in pratica al caso di determinare la tangente ad una circonferenza. La geometria cartesiana palesò subito i suoi vantaggi, non solo perché consentì uno studio più sistematico delle coniche, ma anche perché forniva chiara definizione delle curve di ordine superiore. Mentre è possibile agevolmente rappresentarsi in modo intuitivo le curve corrispondenti a equazioni di secondo grado; per le curve di grado superiore ci si doveva affidare a metodi più complessi che sfuggono alla nostra capacità di immaginazione e rendono i matematici restii a trattarli come enti geometrici. Con ciò si allargava il campo della geometria e si lasciava il posto a una trattazione organica e unitaria.

Riassumiamo i suoi contributi più importanti:

- Introduce cambiamenti significativi nella notazione: Cartesio scrive formule matematiche leggibili senza sforzo alcuno anche oggi. Usa un simbolo per l'uguaglianza, diverso dall'= $\equiv$ , ma non più la scritta latina *aequalis*; con le prime lettere indica costanti, con le ultime incognite come è anche oggi. Usa il simbolo di potenza e di radice quadrata. Per lui, come per noi,  $a^2$  è un numero e non un'area.
- Usa un sistema di coordinate che noi chiamiamo oblique, quindi non sempre ortogonali, e solo con ascisse e ordinate positive, per cui traccia solo le porzioni delle curve che giacciono nel primo quadrante. Però sceglie gli assi di riferimento in modo che l'equazione sia il più semplice possibile.
- Associa alle equazioni indeterminate curve nel piano ampliando così il concetto di curve ammissibili, sia accettando curve in precedenza rifiutate, sia introducendone alcune completamente nuove.
- Trasforma problemi geometrici in intersezioni di curve quali rette, coniche e altre ancora, ma non risolve problemi di intersezione col calcolo algebrico, bensì mediante la costruzione geometrica delle curve.
- Classifica le curve in base al grado dell'equazione, cioè modifica la classificazione dei greci in piane, lineari, solide.

Nell'esposizione della geometria analitica di Cartesio si nota quanto è lontana la mentalità del suo autore dalle considerazioni pratiche che oggi spesso

intervengono nell'uso delle coordinate. Egli non stabilì un sistema di coordinate allo scopo di localizzare dei punti né concepiva le coordinate come coppie di numeri. Era una teoria priva di utilità pratica, come erano state le *Coniche di Apollonio*. L'uso di coordinate oblique era quasi identico in entrambi i casi: ciò confermava che la moderna geometria analitica aveva le sue origini nell'antichità.

### Osservazioni su *La Géométrie*

*La Géométrie* non è un libro facile da leggere<sup>9</sup>. Molte delle oscurità sono volute; Descartes vantava infatti che pochi matematici in Europa avrebbero capito la sua opera. Egli indicava le costruzioni e le dimostrazioni, lasciando ai lettori il compito di completarne i dettagli. Uno dei motivi della propria oscurità è ad esempio il desiderio di non privare i suoi lettori del piacere di ritrovare da soli i risultati. Diceva che non si soffermava a “spiegare minuziosamente” tutte le questioni, solo per lasciare ai posteri la soddisfazione di “apprenderle da sè”. Diceva anche: “Non ho omesso nulla inavvertitamente, ma ho previsto che certe persone che si vantano di conoscere ogni cosa non si sarebbero lasciata sfuggire l’opportunità di dire che io non avevo scritto nulla che essi già non conoscessero qualora mi fossi reso sufficientemente intellegibile da permettere loro di capirmi”.

#### 9.2.3 La scuola di Galileo e le dispute con Roberval

Altri risultati interessanti e originali riguardo ai problemi della retta tangente e della quadratura di figure piane arrivarono da alcuni discepoli pisani di Galileo: Cavalieri e Torricelli.

Bonaventura Cavalieri pubblicò nel 1635 un libro dal titolo *Geometria indivisibilis continuorum*, nel quale spiegava il suo metodo degli indivisibili per la quadratura; questo metodo diceva che se tutte le linee parallele (gli indivisibili) che attraversano due figure le tagliano in segmenti di rapporto costante, allora anche il rapporto fra le aeree segue tale rapporto. Per esempio prendiamo un’ellisse di semiassi  $a$  e  $b$  e una circonferenza di raggio  $a$ ; risulta che tracciando rette parallele fra le due figure esse hanno un rapporto costante pari a  $b/a$ ; allora la superficie dell’ellisse è  $\frac{b}{a} \cdot 2\pi a^2 = 2\pi ab$ . Dell’originalità

---

<sup>9</sup>anche la lingua usata, il francese ne ha impedito l’iniziale diffusione, avvenuta solo dopo il 1649, quando l’opera viene tradotta in latino.



Figura 9.4: Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 - 1647) ed Evangelista Torricelli (1607 - 1647)

di questo metodo neanche il Cavalieri era sicuro, di fatto si tratta di un sistema molto simile ai metodi di esaustione utilizzati dai matematici della Grecia antica; osserviamo però che dietro a questa regola si cela è un'idea intuitiva del tutto nuova di area come somma (infinita) di segmenti, che porterà alla nozione moderna di integrale.

Utilizzando questo principio Torricelli, fa una scoperta incredibile e paradossale: come in Fisica scopre il vuoto atmosferico, in matematica riesce a trovare un oggetto infinito, ma dal volume finito. Infatti, in termini odierni, il volume del solido di rotazione ottenuto ruotando un'iperbole equilatera  $y = \frac{1}{x}$  presa in  $(a, +\infty)$  è pari a:

$$\sum_{\Delta x} \pi r^2 \Delta x = \pi \int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{\pi}{2x}\right)|_a^\infty = \frac{\pi}{2a}$$

ossia che possiamo (idealmente) costruire una spada lunga fino all'infinito con una quantità finita di materiale<sup>10</sup>. Inoltre Torricelli riesce a quadrare l'area sottostante la cicloide, pari a tre volte la superficie della circonferenza generatrice.

---

<sup>10</sup>discrepanze come questa fra analisi matematica e mondo fisico se ne incontrano spesso; si veda ad esempio il Teorema di Banach-Tarski.

Un altro risultato di Torricelli fu il metodo cinematico per determinare la tangente ad una curva: la soluzione proposta era di scrivere la curva in modo parametrico, calcolare le velocità su ogni asse e ricavarne la tangente. Ad esempio prendiamo una parabola di equazioni  $(x, y) = (at, bt^2)$ , scriviamo le velocità  $(v_x, v_y) = (a, 2bt) = (a, 2\sqrt{by})$ ; sia  $s$  la sottotangente<sup>11</sup>, allora risulta che:  $s : a = y : 2\sqrt{by}$  dunque  $s = a\frac{t}{2} = \frac{x}{2}$ . Le velocità era nota a Torricelli secondo questa regola: se l'equazione oraria del moto di un punto è  $s \sim t^n$  allora la sua velocità è  $v \sim nt^{n-1}$ .

Successivamente Roberval, un matematico francese entrò in disputa con i due pisani, ritenendo sue le scoperte degli indivisibili e della quadratura della cicloide, risultati scritti da un libro che fu pubblicato solo nel 1664 da Mersenne, un frate francese che teneva corrispondenza con la grande maggioranza dei matematici del suo tempo. La generazione successiva di matematici assegnò la paternità di questi risultati a Cavalieri e a Torricelli, che non essendo possibile sapere con certezza quando il francese ebbe tali idee, ed essendo quest'ultimo un “attaccabrighe accademico”; non era infatti la prima o l'ultima volta che Roberval gridava al plagio.

#### 9.2.4 Pierre Fermat

12

##### La vita

Fermat nacque in Francia a Beaumont-de-Lomagne, vicino a Tolosa. Era figlio di un mercante di cuoio. Studiò legge e divenne avvocato al Parlamento di Tolosa dove si trasferì nel 1631. Lavorava duramente e scrupolosamente ma nonostante ciò nel tempo libero si occupava di letteratura (compose persino alcuni versi), e soprattutto di matematica. Per questo Fermat è chiamato “il principe dei dilettanti”. In effetti è stupefacente come Fermat, pur dedicandosi alla matematica solo nel tempo libero, sia stato un matematico di così grande importanza. Pubblicava le sue idee molto raramente e per lo più sappiamo delle sue scoperte grazie alla corrispondenza scambiata con altri matematici come Mersenne o Pascal. Per questo motivo spesso il suo lavoro fu imputato ad altri. Nel 1648 divenne Consigliere del Re al Parlamento di Tolosa e mantenne

---

<sup>11</sup>la distanza fra punto di intersezione della tg con l'asse delle ordinate e il punto  $(x_0, 0)$ , dove  $(x_0, y_0)$  è il punto di tangenza

<sup>12</sup>questa sezione è ripresa da [7].

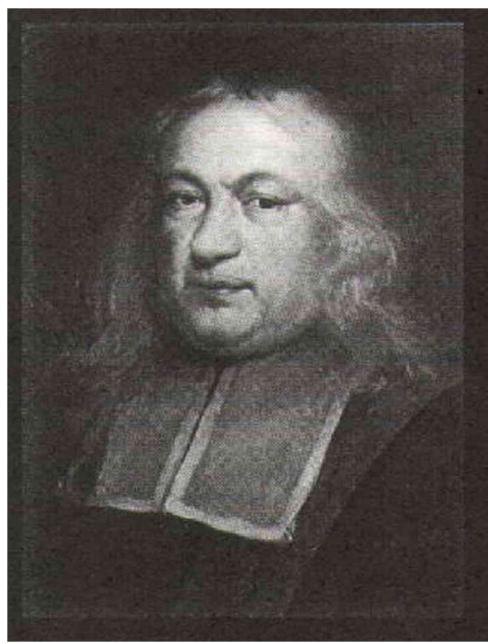


Figura 9.5: Pierre de Fermat (1601 - 1665), magistrato e matematico francese

tale carica per i successivi diciassette anni. Morì nel 1665 a Castres, sempre vicino Tolosa.

### La matematica di Fermat

Fermat a partire dal 1629 cominciò a fare una serie di scoperte di importanza fondamentale nel campo della matematica. In quell'anno prese parte a una delle attività agonistiche favorite di quel tempo: la ricostruzione di opere dell'antichità andate perdute, sulla base delle informazioni contenute in trattati classici pervenuti. Fermat si occupò della ricostruzione dei *Luoghi piani di Apollonio*. Mentre era impegnato in questa impresa scoprì, non più tardi del 1636, il principio fondamentale della geometria analitica:

*Ogniqualvolta in un'equazione finale compaiono due quantità incognite si ha un luogo, l'estremità dell'una descrivendo una linea retta o curva.*

Fermat scoprì i principi fondamentali della geometria analitica indipendentemente da Descartes. L'enunciato sopra citato fu scritto un anno prima della pubblicazione di *La Géométrie*, e anche in questo caso l'uso di coordinate nasceva dall'applicazione dell'algebra a problemi della geometria antica. Tuttavia il punto di vista di Fermat non coincideva completamente con quello di Descartes: Fermat poneva l'attenzione sull'importanza di abbozzare soluzioni di equazioni indeterminate, invece della costruzione geometrica delle radici di equazioni algebriche determinate.

Fermat scrisse un breve trattato intitolato *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introduzione ai luoghi piani e solidi) e si dedicò allo studio dei luoghi più semplici. Mentre Descartes non partì mai da un'equazione per costruire una curva, Fermat partì da un'equazione lineare e scelse un sistema di coordinate arbitrario nel quale rappresentarla. Così Fermat rappresentò l'equazione lineare, espressa in latino con *D in A aequetur B in E* (ossia usando il simbolismo moderno,  $Dx \simeq By$ ). La rappresentazione grafica era naturalmente una retta passante per l'origine delle coordinate, o piuttosto una semiretta avente come estremo l'origine: Fermat, infatti, come Descartes, non faceva uso di ascisse negative. Fermat da' poi varie equazioni algebriche in A ed E e dice quali curve esse descrivono. Così scrive l'equazione *B quad.-A quad. aequetur E quad* (nella nostra notazione,  $B^2 - x^2 = y^2$ ) rappresenta un cerchio. Analogamente (nella nostra notazione)  $a^2 - x^2 = ky^2$  rappresenta un'ellisse;  $a^2 + x^2 = ky^2$  e  $xy + a$  rappresentano iperboli, e  $x^2 = ay$  rappresenta una parabola. A

equazioni di secondo grado più generali, in cui comparivano parecchi termini di secondo grado, Fermat applicava una rotazione degli assi per ridurle alle forme precedenti.

L'interpretazione della geometria analitica di Fermat è concreta e operativa. Egli vi scorge un metodo per dare forma algebrica a molti problemi acquisiti dall'algebra, ma non è disposto a riconoscerle una funzione di rottura. Osserva che gli antichi avevano compiuto molti passi verso la nuova disciplina e nelle loro opere si ritrovavano quasi tutti i principi e gli accorgimenti usati in modo sistematico dalla geometria analitica. La validità di questi principi e accorgimenti risulterà provata soltanto dagli effettivi successi conseguiti in relazione a problemi particolari, che i vecchi metodi non erano riusciti a risolvere.

Fermat scrisse un trattato intitolato *Metodo per trovare i massimi e i minimi*. Egli aveva considerato i luoghi geometrici espressi (in notazione moderna) da equazioni della forma  $y = x^n$ ; essi sono perciò noti con il nome di “parabole di Fermat” se  $n$  è positivo o di “iperboli di Fermat” se  $n$  è negativo. Per le curve algebriche elaborò un metodo molto ingegnoso per individuare i punti in cui c’è un massimo o un minimo: il metodo consiste nel considerare l'espressione data nell'incognita  $x$  (nostra notazione) e l'espressione stessa in cui l'incognita è sostituita dalla quantità  $x + E$ . Osservò che la differenza tra queste due espressioni sarà minima in prossimità dei punti di massimo o minimo. Partendo allora da un'espressione polinomiale, dopo aver uguagliato, anzi “adeguagliato”, le due espressioni, svolto ed eliminato i termini comuni si divide per  $E$  (o per la potenza minima con cui  $E$  compare) l'espressione rimasta, che avrà termini contenenti  $E$  o sue potenze, e infine si eliminano i termini che contengono ancora  $E$ . Dall'equazione così ottenuta si ricava poi il valore cercato per  $x$ . Questo procedimento era molto simile a quello che oggi viene chiamato differenziazione. Infatti Fermat viene posto tra gli iniziatori del calcolo differenziale.

### Determinazione della tangente ad una curva

<sup>13</sup> Anche Fermat come Descartes si occupò della determinazione della tangente ad una curva ma per far questo utilizzò il metodo dei massimi e dei minimi. Sia (in notazione moderna)  $F(x, y) = 0$  una generica curva della

---

<sup>13</sup> questa sottosezione è stata riscritta in modo più generico e usando una notazione moderna.

quale vogliamo trovare la tangente in  $(x_0, y_0)$ ; chiamiamo  $a$  ed  $e$  i rispettivi incrementi sull'asse delle ascisse e delle ordinate. Allora risulta che  $a : e = t : y_0$  dove  $t$  è la sottotangente, ossia  $t = t_0 - x_0$  la distanza fra l'intersezione della tangente con l'asse delle ascisse e il punto  $(x_0, 0)$ . Allora per quanto detto in precedenza per trovare  $t$  bisogna calcolare

$$\frac{f(a) - f(0)}{a} = \frac{F(x_0 + a, y_0 + \frac{ay_0}{t})}{a} = 0$$

porre  $a = 0$  e risolvere in  $t$ . Notiamo subito che questo metodo per il calcolo della retta tangente è più generale del sistema di Descartes, che si fermava alle curve polinomiali, ma non abbastanza generale per coprire le curve studiate all'epoca. Infatti può andare per curve come  $y = \sqrt{x} + 1$ , ma il metodo si arrestava per curve come  $y = \sqrt{x+1}$  per la difficoltà che si incontra a semplificare in  $a$ .

#### 9.2.5 Isaac Barrow

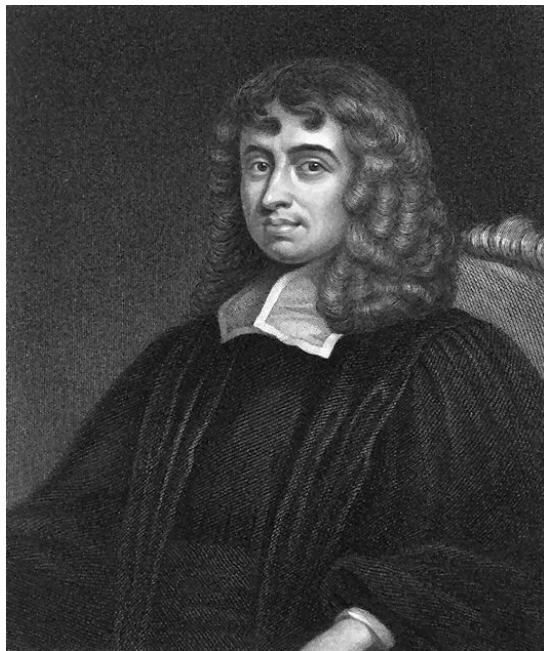


Figura 9.6: Isaac Barrow (1630 - 1677)

Isaac Barrow (Londra, 1630 - Cambridge, 4 maggio 1677), un matematico, teologo, erudito ed ecclesiastico inglese, è il maestro di Newton. I suoi lavori sul calcolo della tangente influenzarono sicuramente i pensieri del celebre discepolo. Di lui si ricorda soprattutto la scoperta del teorema fondamentale del Calcolo, noto anche come Teorema di Barrow-Torricelli, e incluso nel suo libro *Lectiones opticae et geometriae* del 1670.

Vediamo la dimostrazione di Barrow rimessa in termini moderni<sup>14</sup>.

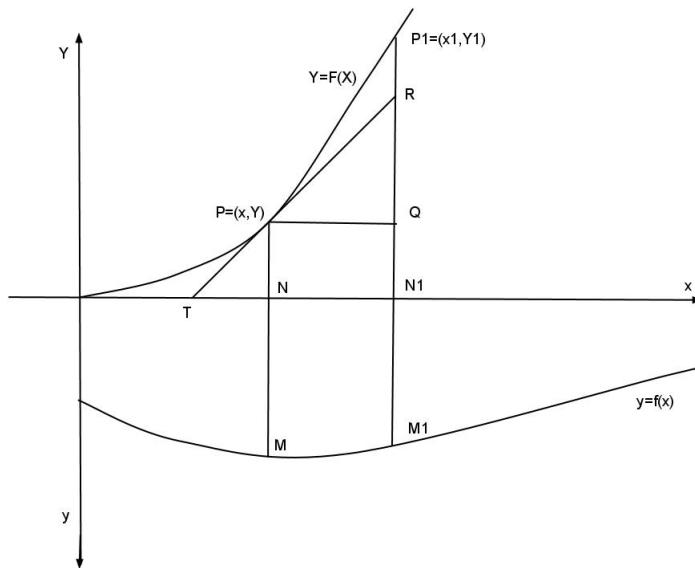


Figura 9.7: Dimostrazione del Teorema fondamentale del Calcolo.

**Teorema:** Sia C la curva  $Y = F(x)$  costruita in modo che Y sia l'area sottesa alla curva  $y = f(x)$ . Allora la tangente ad C nel punto P è la retta passante per P e per T tale che  $NT = \frac{Y}{y} = \frac{NP}{NM}$ . Si noti che questo equivale a dire  $F'(x) = f(x)$ .

**Dimostrazione:** Spostiamoci da P, di coordinate  $(x, Y)$  verso un punto vicino che stia sulla curva P1, di coordinate  $(x_1, Y_1)$ ; allora per definizione di F abbiamo che  $QP = Y - Y_1 = \text{Area}(N_1M_1MN) = A$ . Inoltre risulta che  $QR : QP = NT : NP$ , ossia che  $NT = \frac{QR \cdot NP}{QP} = \frac{|x - x_1| \cdot Y}{A}$ .

Ora, dato che C è crescente, se  $x < x_1$  allora  $A > y(x - x_1)$ , mentre se  $x > x_1$  allora  $A < y(x - x_1)$ . Dunque per x sempre più vicino ad  $x_1$  risulta

---

<sup>14</sup>la dimostrazione è ripresa dal libro [2]



Figura 9.8: Sir Isaac Newton (1642 - 1727), matematico e fisico inglese

$$A = y \mid x - x_1 \mid \text{ ossia che } NT = \frac{Y}{y}. \square$$

Notiamo come l'uso del calcolo differenziale sia quasi sempre sottinteso in questa dimostrazione.

#### 9.2.6 Isaac Newton

15

##### La vita e le opere

Isaac **Newton** (1642-1727), nato nel paesino inglese di Woolsthorpe-by-Colsterworth, fu il successore di Barrow. Uno zio, che aveva studiato a Cambridge, notò le straordinarie doti intellettuali del nipote e persuase la madre di Isaac a mandare il figlio a Cambridge, dove, grazie alle opere dei grandi matematici del passato, come Euclide, si avvicinò e si appassionò alla matematica. Per gran parte dell'anno accademico 1665-1666, mentre Newton frequentava l'università, il suo college rimase chiuso a causa della peste e lui tornò a casa

---

<sup>15</sup>questa sezione è ripresa da [6].

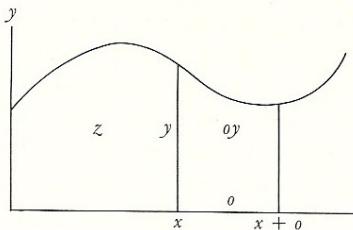
per evitare il contagio. Fu proprio in quei mesi che egli fece quattro delle sue principali scoperte:

- la formula del binomio;
- il calcolo infinitesimale;
- la legge di gravitazione universale;
- la natura dei colori.

Newton scoprì il calcolo infinitesimale negli anni 1665-1666 e nel corso del decennio successivo stese almeno tre esposizioni esaurenti della nuova analisi. Il *De Analysis* fu fatto circolare tra gli amici, ma Newton non fece nessun passo per pubblicare i suoi risultati. La sua prima esposizione pubblicata del calcolo infinitesimale apparve nel *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, del 1687. Questo libro viene generalmente descritto come quello che presenta i fondamenti della fisica e dell'astronomia utilizzando il linguaggio della geometria pura. Nonostante quest'opera presenti in larga parte un'esposizione in forma sintetica, vi sono alcuni passi in forma analitica. E' infine interessante notare che qui troviamo un tentativo di definizione di limite di una funzione: "Delle quantità, o dei rapporti di quantità, che in un intervallo di tempo finito qualsiasi convergono con continuità verso l'uguaglianza, e che prima della fine di tale intervallo si avvicinano l'una all'altra così tanto che la loro differenza è inferiore a qualsiasi differenza data, finiscono per diventare uguali.

### Le flussioni

Newton considerava una curva tale che l'area compresa sotto la curva stessa avesse formula  $z = ax^m$  con  $m$  esponente intero o razionale.



Un incremento infinitesimo nella variabile  $x$  era denotato da Newton con la lettera  $o$ , similmente a quanto compiuto da Fermat usando il simbolo  $E$ . Inoltre Newton denotava con  $oy$  l'incremento dell'area sottostante la curva (dato, evidentemente, dall'incremento infinitesimo dell'ascissa moltiplicato per l'ordinata). L'equazione risultante sostituendo  $x$  con  $x + o$  e  $z$  con  $z + oy$  era dunque:

$$z + oy = a(x + o)^m$$

Il matematico inglese applicava a questo punto il teorema binomiale (da lui generalizzato alle serie numeriche già nel 1665) al secondo membro dell'equazione (ottenendo una serie infinita nel caso di  $m$  esponente frazionario):

$$a(x + o)^m = ax^m + amx^{m-1}o + a\frac{m^2 - 1}{m}x^{m-2}o^2 + \dots$$

quindi, analogamente a quanto compiuto dai suoi predecessori, sottraeva membro a membro l'equazione dell'area,

$$oy = amx^{m-1}o + a\frac{m^2 - 1}{m}x^{m-2}o^2 + \dots$$

divideva ambo i membri per l'incremento  $o$ ,

$$y = amx^{m-1} + a\frac{m^2 - 1}{m}x^{m-2}o + \dots$$

cancellava i termini in cui fosse ancora presente  $o$ , e otteneva così:

$$y = amx^{m-1}.$$

Dato che l'odierna regola di derivazione dei polinomi era nota già a Barrow, ciò inoltre ha come diretta conseguenza l'osservazione che la curva assume un valore  $y$  pari al tasso di variazione dell'area in funzione dell'ascissa  $x$ , ovvero che la quadratura risulta essere l'operazione inversa della differenziazione. Sebbene altri matematici prima di Newton (fra cui Barrow stesso) avessero intuito il teorema fondamentale del calcolo per casi particolari, Newton risulta essere il primo ad averne dato una dimostrazione generale. Si noti che nel *De Analysi* gli incrementi delle variabili erano visti come quantità statiche e infinitamente piccole, in accordo con la visione di Cavalieri e la sua dottrina degli indivisibili.

La concezione di Newton si allontanò però dal modello di Cavalieri quando le

sue idee sul calcolo infinitesimale furono esposte nel *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum*, un libro scritto nel 1671 (ma pubblicato solo più tardi, nel 1736). In tale opera egli affermava di guardare alle variabili coinvolte nel calcolo non come a quantità statiche, determinate dall'aggregazione di elementi infinitesimali, bensì come a quantità dinamiche, corrispondenti al moto nello spazio di oggetti geometrici (punti, linee, piani). Tali quantità variaibili nel tempo erano chiamate da Newton *fluenti*, e i loro tassi di variazione nel tempo erano detti *flussioni* (da cui il titolo dell'opera). Se i fluenti erano denotati dalle lettere  $x, y$ , le rispettive flussioni erano denotati con  $\dot{x}, \dot{y}$ . Nelle nuove notazioni, gli incrementi infinitesimi dei fluenti erano scritti come  $\dot{x}o, \dot{y}o$ , e ciò consentiva di stabilire il rapporto tra le flussioni, dato quello tra i fluenti. Ad esempio, se

$$y = x^n,$$

Newton poteva scrivere

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^n$$

e procedere come prima, sviluppando il secondo membro con il teorema binomiale, sottraendo l'equazione originale membro a membro, dividendo ambo i membri per  $o$  e trascurando i termini ancora contenenti  $o$ . Il risultato era

$$\dot{y} = nx^{n-1}\dot{x}.$$

Newton condivideva con il suo maestro Barrow l'idea che una dimostrazione matematica avesse bisogno di ricorrere ad argomenti di carattere geometrico per essere davvero rigorosa. Era inoltre consapevole che le tecniche di calcolo adottate nel *De Analysi* e nel *Methodus Fluxionum*, in particolare l'espediente di eliminare i termini contenenti l'incremento  $o$ , non erano giustificate in maniera soddisfacente. Nel *Tractatus de Quadratura Curvarum*, scritto nel 1676, sembra che Newton contestasse proprio le basi teoriche di tale procedimento, giacché vi rimarcava che “*in rebus mathematicis errores quam minimi non sunt contemnendi*” (“in matematica gli errori, per quanto piccoli, non devono essere trascurati”): cercò pertanto di emendare il proprio ragionamento: il metodo da lui proposto era detto “metodo dei primi rapporti delle quantità nascenti e degli ultimi rapporti delle quantità evanescenti”. Newton considerava non più gli incrementi a sé stanti, bensì i loro rapporti, sia nel caso di quantità inizialmente nulle, che poi crescevano nel tempo (“nascenti”), sia in quello di quantità inizialmente positive che decrescevano verso lo zero (“evanescenti”). Esaminando ad esempio il caso della funzione  $y = x^n$ , Newton trovava

il rapporto tra le rispettive flussioni incrementando la  $x$  di una quantità  $o$  e sviluppando i calcoli:

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 x^{n-2} + \dots$$

poteva confrontare tra loro gli incrementi della  $y$  e della  $x$  (rispettivamente,  $nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 x^{n-2} + \dots$  e  $o$ ), affermando che il loro rapporto era pari a

$$nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} ox^{n-2} + \dots$$

A questo punto Newton affermava di “lasciar svanire gli incrementi”, e otteneva il cosiddetto “ultimo rapporto”, pari a  $\dot{y} = nx^{n-1}$ . Questo procedimento non appare, agli occhi di un moderno, più rigoroso dei precedenti, dato che lascia insoluto il problema dell’incremento evanescente, ma Newton apprezzava il fatto di non dover introdurre quantità infinitamente piccole, e ne percepiva un’identità con i metodi geometrici usati dai matematici dell’antichità, come Archimede.

### Le serie infinite

<sup>16</sup> Ma Newton sapeva di più: scrivendo qualsiasi curva  $y = f(x)$  come polinomio di grado infinito  $f(x) = ax + bx^2 + cx^3 + \dots$ , poi eseguiva le derivate su  $f$  e sul polinomio e mediante il principio di identità dei polinomi ricavava i coefficienti  $(a, b, c, \dots)$ . Questa idea era ricavata dagli scritti di Torricelli, che diceva che se  $y = x^n$  allora la sua area era  $A = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ , o anche dai risultati di Mercator, che notava che la serie armonica  $\frac{1}{x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ , allora la sua area (che oggi sappiamo essere  $\log(x+1)$ ) era  $A = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ . Inoltre con questo sistema è possibile invertire localmente un funzione: basta scrivere  $x = a + by + cy^2 + \dots$ , inserire in  $y = f(x)$ , ancora derivare e ricavare infine i coefficienti.

---

<sup>16</sup> sezione scritta /textitex novo a partire da [4].



Figura 9.9: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), matematico e filosofo tedesco

### 9.2.7 Wilhelm Leibniz

17

#### la vita

Gottfried Wilhelm **Leibniz** (1646-1716), filosofo e matematico tedesco nato a Lipsia, è considerato, con Newton, il “padre” del moderno calcolo infinitesimale. Studiò teologia, legge, filosofia, matematica, ma i suoi interessi iniziali non furono prettamente matematici, infatti conseguì il dottorato in legge e poi prese servizio come diplomatico presso la famiglia degli Hannover. In qualità di influente rappresentante di uomini di Stato, Leibniz viaggiò molto e conobbe Huygens, grazie al quale ebbe origine il suo interesse per la matematica. Nonostante i suoi importanti contributi alla storia del pensiero matematico e filosofico, è da sottolineare come Leibniz avesse una predilezione per l’aspetto pratico delle scienze: al momento della fondazione dell’Accademia delle Scienze di Berlino, da lui promossa, si raccomandò che l’istituzione incoraggiasse particolarmente le invenzioni meccaniche e le scoperte in chimica e fisiologia

---

<sup>17</sup>questa sezione è ripresa da [6].

che risultassero utili all’umanità. Preferì, inoltre, usare il tedesco anziché il latino, nelle proprie opere, affinché fossero maggiormente comprensibili anche ad un pubblico non strettamente accademico. Durante uno dei suoi viaggi capitò anche a Londra e fu prevalentemente intorno a questa visita che si accentò, più tardi, la polemica sulla priorità della scoperta del calcolo infinitesimale, giacché pareva che Leibniz avesse visto una copia del *De Analysis* di Newton. Ma è da dubitare che a tale data egli potesse trarne alcun vantaggio, poiché non aveva ancora una buona preparazione in geometria e analisi. Nei due anni successivi Leibniz diede vita al suo calcolo differenziale.

### La matematica

L’importanza di Leibniz risiede nell’aver introdotto un’operazione, la differenziazione, che opera non sulle funzioni, che quando Leibniz scriveva ancora non esistevano, ma sulle variabili e sulle loro combinazioni, e che corrisponde a prendere la differenza tra due valori infinitamente vicini delle variabili. Sono queste differenze (o *differenziali*) che Leibniz prese come parametri principali al posto della sottotangente e indicò con i simboli  $dx$  e  $dy$  questi incrementi infinitesimi di quantità date  $x$  e  $y$ . Tale scelta gli permise di superare le difficoltà, grazie alle regole di differenziazione che egli enunciò in dettaglio all’inizio della sua famosa opera del 1684 intitolata *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Nuovo metodo per trovare i massimi e i minimi e anche le tangenti, non ostacolato da quantità irrazionali). Qui Leibniz presentò le formule

$$d(xy) = x dy + y dx, \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x dy - y dx}{y^2}, \quad d(x^n) = nx^{n-1} dx.$$

La provenienza di queste formule non fu esplicitata da Leibniz, egli diceva che era l’*aritmetica delle monadi*<sup>18</sup>, indicando quindi che si trattava di regole esclusive degli “infinitesimi”. È chiaro che tali regole venivano ottenute trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, ad esempio si ha

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x + dx)(y + dy) - xy = xy + x dy + y dx + dx dy - xy = \\ &= x dy + y dx + dx dy \end{aligned}$$

---

<sup>18</sup>si veda [3].

e poiché  $dx$  e  $dy$  sono quantità infinitamente piccole allora il termine  $dx dy$  è infinitamente infinitesimo e dunque può essere trascurato, ottenendo la formula voluta.

Si tratta evidentemente di una scelta non facile, non tanto per l'intervento di quantità infinitesime, dato che queste erano ormai entrate da tempo nel linguaggio matematico, quanto perché queste quantità perdevano il loro carattere ausiliario e di artifici tecnici, destinati a sparire nella formulazione finale, per assumere invece il ruolo di parametri fondamentali per la descrizione delle curve. Le difficoltà concettuali di questa formulazione sono evidenti, al punto che Leibniz cercò di mascherarle nascondendo il carattere infinitesimo dei differenziali, d'altronde implicito nelle regole di differenziazione che non potrebbero sussistere altrimenti, ed introducendo questi ultimi per mezzo della tangente, peraltro definita più avanti come quella retta che congiunge punti infinitamente vicini alia curva. Nondimeno, Leibniz era ben cosciente della superiorità del suo metodo rispetto a quelli precedenti: “Una volta noto l'algoritmo, per così dire, di questo calcolo, che chiamo differenziale, tutte le altre equazioni differenziali si possono ottenere mediante il calcolo comune, e così trovare i massimi e i minimi, nonché le tangenti, senza che vi sia bisogno di eliminare le quantità fratte o irrazionali, o altri impicci, come invece si doveva fare con i metodi finora pubblicati.”

Inoltre, mette in luce il ruolo determinante della sostituzione dei differenziali alla sottotangente: “I metodi finora pubblicati non hanno un tale gradino intermedio [il calcolo del differenziale], ed infatti usano per lo più rette come la sottotangente o altre simili, ma non il segmento  $dy\dots$ , il che scombina tutto; di qui deriva che si debbano in primo luogo eliminare le quantità fratte ed irrazionali che contengono le variabili.”

La differenziazione assume, dunque, la posizione centrale nell'elaborazione leibniziana, una chiave che da una parte apre la strada alle molteplici scoperte successive, ma allo stesso tempo richiede una notevole dose di coraggio intellettuale, dato che attraverso di essa le quantità evanescenti fanno il loro ingresso in geometria. Più secondario è invece il ruolo delle quadrature, un problema che assieme a quello delle tangenti è tradizionalmente associato alle origini del calcolo infinitesimale. Leibniz, poi, enuncia il teorema fondamentale del calcolo: “Fondamento del calcolo: Le differenze e le somme sono tra loro reciproche, cioè la somma delle differenze della serie è il termine della serie, e la differenza delle somme è lo stesso termine della serie, la prima delle quali scrivo  $\int dx = x$ , e la seconda  $d \int x = x$ . E poiché la somma e la differenza

sono evidentemente operazioni inverse l'una dell'altra, ne segue immediatamente che invertendo la differenziazione si ottengono le quadrature: “Dunque, come assegnato il valore di una certa quantità, come  $y$ , per mezzo di un'altra indeterminata quale  $x$ , si può ottenere il valore di  $dy$  (differenza tra due  $y$  contigue) tramite  $x$  e  $dx$  (differenza di due  $x$  contigue), ovvero come, data una quantità  $y$  si può trovare la differenza  $dy$ , il che non è altro che trovare le tangenti alle curve; così reciprocamente, dato il valore di  $dy$ , nel modo che si è detto, ovvero data la differenza delle  $y$ , trovare il termine  $y$  è trovare la somma di tutte le differenze  $dy$ ; poiché la differenza tra due estreme  $y$  finite è la somma di tutte le differenze intermedie; e posta una delle estreme essere zero, ossia che crescendo si cominci da 0, la somma sarà l'ultima  $y$ . Di qui, dato un termine  $v$  che stia alla costante  $a$  come  $dy$  sta a  $dx$ , il rettangolo  $ay$  sarà uguale alla somma di tutte le  $v dx$ , che si scrive  $\int v dx$ , cioè sarà uguale all'area della figura composta dalle ordinate  $v$  moltiplicate per i rispettivi elementi  $dx$  delle ascisse. E così, rimontando dal valore delle differenze  $dy$  (ovvero  $\frac{v dx}{a}$ ) al valore di  $y$  (ovvero di  $\int \frac{v}{a} dx$ ) si trova la quadratura della figura, la cui ascissa è  $x$  e l'ordinata  $v$ .” D'altra parte quello delle quadrature non è che un caso particolare del problema generale dell'integrazione delle equazioni differenziali, o come si diceva allora del problema inverso delle tangenti; ed è a quest'ultimo e alle sue applicazioni geometriche e meccaniche che Leibniz e la sua scuola dedicarono le proprie ricerche, cogliendo una serie di successi strepitosi. Ma il problema inverso delle tangenti si poneva nella sua generalità solo successivamente all'introduzione dei differenziali, ed apparteneva dunque non alla fase della scoperta ma a quella degli sviluppi del calcolo. In conclusione, i due problemi classici del calcolo, le tangenti e le quadrature, si trovano in posizione fortemente asimmetrica nell'elaborazione leibniziana: problema chiave il primo, la cui soluzione richiede innovazioni importanti ed ardite; marginale invece il secondo, la cui posizione concettuale si risolve completamente nella relazione tra differenza e somma, dunque nell'ambito di una semplice rilettura di Cavalieri nel linguaggio delle sequenze numeriche. La stessa decisione di Leibniz di limitare la *Nova Methodus*, l'opera cioè in cui egli esponeva per la prima volta i fondamenti del nuovo algoritmo, al solo calcolo differenziale, dopo una prima versione in cui le differenze e le somme giocavano ruoli simmetrici, è un indice ulteriore della preminenza concettuale della differenziazione rispetto all'integrazione, e della riduzione di questa alla prima.

## L'importanza della notazione

Un altro aspetto importantissimo dell'opera di Leibniz è costituito dalle notazioni da lui introdotte. Nel 1676 Leibniz era giunto alla conclusione che Newton aveva raggiunto parecchi anni prima, ossia era in possesso di un metodo di grandissima importanza per la sua generalità. Sia che una funzione fosse razionale o irrazionale, algebrica o trascendente, potevano sempre essere applicate le operazioni del suo metodo per trovarne somme (integrali) e differenze (derivate). Rimanevano dunque da elaborare un linguaggio e una notazione che si addicessero a questa nuova branca della matematica.

Leibniz aveva sempre avvertito l'importanza di una buona notazione come utile strumento per il pensiero e la sua scelta nel caso specifico del calcolo infinitesimale fu particolarmente azzeccata, tanto che è quella usata prevalentemente anche ora.

- Dopo vari tentativi fissò la sua scelta su  $dx$  e  $dy$  per indicare le minime differenze possibili (differenziali) di  $x$  e  $y$ .
- In un primo tempo scrisse semplicemente  $omn.y$  (tutte le  $y$ ) per indicare la somma di tutte le ordinate di una curva. Più tardi, però, usò il simbolo  $\int y$  e, ancora più tardi,  $\int y dx$ , ove il simbolo dell'integrale è l'ingrandimento della lettera s che stava ad indicare il termine "summa".
- Per trovare le tangenti si richiedeva l'uso del *calculus differentialis*, mentre per trovare le quadrature si richiedeva quello del *calculus summatorius* o *calculus integralis*.

Leibniz fu uno dei più grandi inventori di notazioni (sotto questo aspetto fu superato soltanto da Euler). Fu il primo matematico di un certo livello a usare sistematicamente il punto come simbolo della moltiplicazione e a scrivere le proporzioni nella forma  $a : b = c : d$ . Inoltre fu in gran parte merito suo e di Newton se il segno di uguaglianza  $=$ , introdotto da Recorde, ebbe la meglio sul simbolo  $\infty$  di Descartes. A Leibniz, poi, dobbiamo i simboli  $\sim$  per "è simile a" e  $\simeq$  per "è congruente a".

Si osservi che la notazione di Leibniz è ancora oggi tra le più diffuse: la preferenza rispetto alla notazione di Newton (pure presente, ad esempio, in ambiti come la fisica matematica) può essere spiegata notando come le idee di Leibniz siano state riprese nel '700 da matematici come i fratelli Bernoulli o Eulero, mentre la predilezione per i ragionamenti geometrici avrebbe portato

la scuola matematica inglese, erede di Newton, ad un sostanziale isolamento rispetto all'Europa continentale.

### La disputa per l'invenzione del calcolo

A partire dal 1695 si accese una disputa tra Newton e Leibniz a causa di un presunto plagio, ad opera di Leibniz, delle scoperte di Newton, poiché sembrava che questi avesse visto alcuni documenti privati (che però oggi sappiamo non aveva mai ricevuto) o addirittura una copia del *De Analysis* ma, come già detto, di certo all'epoca avrebbe capito poco di quello che leggeva. Oggi è dunque abbastanza chiaro che, nonostante la scoperta di Newton abbia preceduto quella di Leibniz di circa 10 anni, quest'ultimo raggiunse i suoi risultati indipendentemente da quelli del matematico inglese. Inoltre a Leibniz va riconosciuta la priorità di pubblicazione: pubblicò infatti una esposizione del suo calcolo nel 1684 nell'*Acta Eruditorum*, un periodico mensile scientifico. C'è anche poi da dire che le scoperte di un grande matematico, come Newton, non diventano automaticamente parte della tradizione matematica. Esse possono andare perdute a meno che altri scienziati non le comprendano e non si interessino ad esse in misura sufficiente da considerarle da diversi punti di vista, generalizzandole, chiarendole e sottolineandone le implicazioni. Newton, purtroppo, non comunicava volentieri le proprie idee ai suoi colleghi, di conseguenza il metodo delle flussioni non era molto conosciuto al di fuori dell'Inghilterra. Leibniz, al contrario, trovò devoti discepoli pronti a imparare il calcolo differenziale e integrale e a divulgarlo. Fra questi ci furono i due fratelli svizzeri Bernoulli<sup>19</sup>.

### Problemi nelle diffusione del calcolo infinitesimale

<sup>20</sup> Nel 1689, dal 22 novembre al 22 dicembre, Leibniz soggiornò a Firenze, proveniente da Roma e diretto a Bologna; il suo viaggio in Italia aveva lo scopo di raccogliere più informazioni possibile sulla storia della Casa del duca di Hannover, e lui colse l'occasione per tentare di diffondere il più possibile il Calcolo. Il soggiorno fiorentino di Leibniz fu caratterizzato, tra le altre cose, anche dall'inizio di una polemica con Vincenzo Viviani. Il conflitto esplose nel

---

<sup>19</sup>un'altra differenza sostanziale fu che i successori di Newton (principalmente Taylor w Maclaurin) si occuparono principalmente del metodo delle serie infinite, che di fatto dava risultati numerici, mentre, come vedremo i risultati dei successori di Leibniz hanno dato vita alla moderna Analisi matematica.

<sup>20</sup>questa sottosezione non fa parte di [6], le informazioni sono state prese da francescoredi.it.

1692, quando il matematico toscano aveva proposto, nascosto da uno pseudonimo, un Aenigma geometricum, intorno al quale si scontravano la concezione galileiana tradizionale e la nuova prospettiva analitica della geometria. Leibniz rispose subito con una Solutio, che dimostrava che il calcolo infinitesimale era la nuova prospettiva vincente della ricerca matematica di fine secolo. Viviani era invece rimasto legato alla tradizione euclidea che puntava ad una soluzione geometrica dei problemi matematici, e giudicava i metodi algebrici leibniziani niente di più che “divertimenti infantili”<sup>21</sup>.

### 9.3 Prima le foglie, poi le radici: diffusione e sviluppo del calcolo nel '700

È dimostrato, diceva egli, che le cose non posson essere altrimenti; perché il tutto essendo fatto per un fine, tutto è necessariamente per l'ottimo fine. Osservate bene che il naso è fatto per portar gli occhiali, e così si portan gli occhiali; le gambe son fatte visibilmente per esser calzate, e noi abbiamo delle calze [...]. Per conseguenza quelli che hanno avanzata la proposizione che tutto è bene; han detto una corbelleria, bisognava dire che tutto è l'ottimo.

Voltaire, *Candido, ovvero l'ottimismo*

#### 9.3.1 Contesto storico e matematico

<sup>22</sup> Il XVIII secolo si apre con la Guerra di successione spagnola, a seguito della morte di Carlo II, infatti, si pone il problema della successione al trono a cui aspirano diversi pretendenti europei. La possibilità che venga a costituirsì un'unica corona di Francia e Spagna spinge gli altri stati ad una soluzione diplomatica sancita dalla pace di Utrecht (1713) e con l'assegnazione del trono spagnolo a Filippo d'Angiò.

Anche l'Europa centro-orientale è scossa da guerre e nuove alleanze: guerra di successione polacca (1733-1738), guerra di successione austriaca (1740-1748)

---

<sup>21</sup>una risposta del genere ad una novità come il Calcolo non deve stupirci: Leibniz e Newton avevano inventato il rock 'n roll della matematica, un misto di rompente del country rigido nelle sue regole della geometria cartesiana, e del blues di Fermat, meno ligio alle regole nell'uso delle *adæquatio*. Viviani era un matematico classicista, devoto a Galileo, e si turava le orecchie dicendo “e questa la chiamate matematica?”.

<sup>22</sup>questa sezione è ripresa da [8].

e guerra dei 7 anni (1756-1763). Un bilancio complessivo, al termine di queste tre guerre, vede un rafforzamento della Prussia, un'estensione dei domini coloniali inglesi e un indebolimento della Francia.

Nel corso del XVIII secolo, la necessità di trovare nuovi mercati per economie in forte sviluppo induce le potenze europee a riprendere la ricerca di sbocchi coloniali, principalmente verso l'Asia.

Oltre oceano, invece, comincia una lenta rottura dei rapporti tra le colonie nordamericane e la madrepatria inglese per ragioni essenzialmente economiche. Con la *Dichiarazione d'indipendenza* del 1776 si ha l'inizio di una vera e propria rivoluzione e con l'appoggio di Francia e Olanda i coloni americani nel giro di sei anni vincono la loro guerra d'indipendenza. Nel 1787 entra in vigore la nuova Costituzione, mentre nel 1789 George Washington viene eletto primo presidente degli USA.

Circa a metà del XVIII secolo la Francia dell'Antico Regime, vede una nobiltà ormai quasi del tutto privata dei suoi antichi privilegi politici e nella seconda metà del secolo ad una perdurante crisi delle finanze statali si aggiunge il contrasto sempre più serrato tra la monarchia e i Parlamenti. Questa crisi si sviluppa in un processo rivoluzionario, dove i rappresentanti del Terzo Stato si presentano alla convocazioni degli Stati Generali con precise richieste (5 maggio 1789), e con la rivolta popolare si giunge alla presa del carcere della Bastiglia (14 luglio 1789). In breve vengono proclamate la decadenza dei diritti feudali e l'abolizione dei privilegi ecclesiastici, e la rivoluzione francese culmina con l'esecuzione del re Luigi XVI (21 gennaio 1793). Il XVIII secolo si conclude con l'affermazione della figura di Napoleone Bonaparte, giovane generale francese che ottiene una serie di successi militari e che sarà una figura primaria nel secolo successivo.

A partire dalla metà del 1700, in Europa si impone il pensiero *illuministico*, esso promuoveva la critica al principio di autorità e la rivendicazione del libero esercizio della ragione. Inoltre, esso puntava alla divulgazione delle idee, ne è esempio fondamentale l'*Encyclopédie* curata da Diderot, opera monumentale e innovativa, pubblicata tra il 1751 e il 1772. Strettamente connesso all'Illuminismo è lo sviluppo della ricerca nel settore delle scienze naturali e della matematica applicata che potevano portare dei miglioramenti anche in campo militare. Il pensiero illuministico coinvolge anche molti sovrani d'Europa, detti "sovrauni illuminati", tra cui Federico II di Prussia, Caterina la Grande, Carlo III e Luigi XVI.

Infine, il '700 è anche il secolo delle trasformazioni e di una crescita economica

dovuta ad un progresso tecnologico. La scoperta della macchina a vapore di Watt (1769) contribuisce a questa *rivoluzione industriale*. Le influenze sociali sono notevoli e la nascita delle fabbriche provoca un flusso di contadini dalla campagna alla città dando vita al “proletariato”.

Per quanto riguarda lo sviluppo della matematica assistiamo ad una diffusione “a macchia d’olio” delle tecniche di calcolo differenziale; i matematici, con questo nuovo e potente strumento nelle mani riescono a risolvere problemi fino ad allora considerati inavvicinabili. Rimane comunque aperto il problema delle fondamenta del Calcolo, ossia non sembra ancora possibile poter giustificare in modo rigoroso le basi delle tecniche differenziali. Non mancarono quindi le critiche e gli interrogativi che i matematici più rigorosi posero agli analisti dell’epoca, i quali utilizzavano su larga scala un metodo che sembrava essere non dimostrabile; proprio per questo utilizzo per certi versi sconsigliato di un metodo che poteva rivelarsi fasullo, il Geymonat intitola così il capitolo di [3] dedicato al’700: *La vittoria dell’esigenza sul rigore*<sup>23</sup>.

### 9.3.2 I fratelli Bernoulli

Fra i principali artefici della diffusione e dello sviluppo del calcolo differenziale troviamo due talentuosi e competitivi fratelli di Basilea: Jakob e Johan Bernoulli, capostipiti, fra le altre cose della famiglia di matematici più famosa al mondo per numero di scienziati famosi e per l’importanza delle loro scoperte. Fra i tanti lavori dei due fratelli ci sono: un Teorema che risolveva i limiti di molte forme  $\frac{0}{0}$ , che oggi è noto con il nome di colui che per primo ha pubblicato il risultato, ossia il marchese Guillaume de l’Hôpital, il quale aveva pagato Johan per avere i diritti su alcune sue scoperte.

Ma il problema più interessante per le sue conseguenze sulla matematica fu senza dubbio il problema della curva di tempo minimo, o brachistocrona. Il problema, che già Galileo aveva provato a risolvere, consisteva nel trovare la curva tale che un oggetto sotto la sola forza di gravità arrivasse prima da A a B; tale problema fu lanciato ufficialmente da Johann Bernoulli nel 1697 e risolto da entrambi i fratelli nell’arco di due anni. Johan lo risolse mediante un’analogia con l’ottica, ma fu la soluzione di Jakob a destare maggiore meraviglia. Vediamo insieme tale soluzione, espressa in termini moderni: Sia  $A = (0, 0)$  e  $B = (x_0, y_0)$ ; dato che il corpo è soggetto esclusivamente alla forza di gravità

---

<sup>23</sup>quest’ultimo capoverso è stato aggiunto *ex novo*.



Figura 9.10: Jakob Bernoulli (1654 - 1705) e suo fratello minore Johann Bernoulli (1667 - 1748) enrtambi matematici e scienziati svizzeri, pionieri del calcolo differenziale.

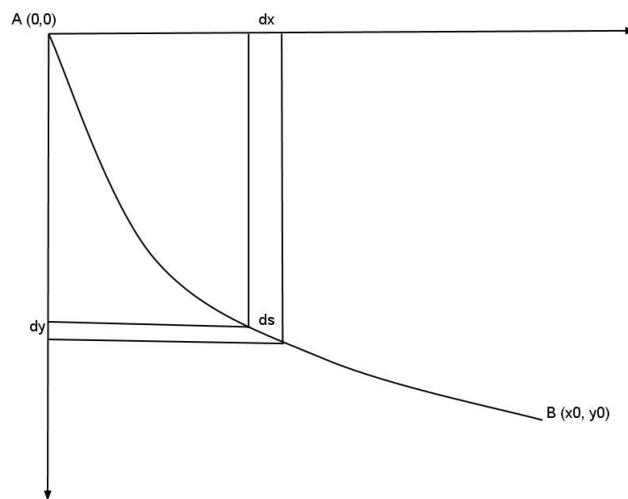


Figura 9.11: il problema della brachistocrona

possiamo scrivere  $v(x) = \sqrt{2gx}$ , quindi  $dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v}$ . Il problema è quindi cercare una funzione  $y(x)$  tale che sia minimo

$$T = \int_0^{t_0} dt = \int_0^{t_0} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{x}} dx$$

e tale che  $y(0) = 0$  e  $y(x_0) = y_0$ .

Generalizziamo il problema, e diciamo di aver trovato  $y(x)$  che minimizza  $\int_a^b f(x, y, y') dt$ ; allora ogni variazione dalla soluzione non è più minima, ossia se prendiamo  $\varphi \in \Phi = \{\phi \in C^2(a, b) \text{ t.c. } \phi(a) = \phi(b) = 0\}$  risulta che:

$$F(t) = \int_a^b f(x, y + t\varphi, y' + t\varphi') dt$$

ha minimo per  $t = 0$ , quindi:

$$0 = F'(0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \varphi + \frac{\partial f}{\partial y'} \varphi' dt = \int_a^b \varphi \left( \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} \right) dt + \left( \frac{\partial f}{\partial y'} \varphi \right) |_a^b$$

integrando per parti.

Dato che la formule deve valere  $\forall \varphi \in \Phi$  e dato che l'ultimo termine è nullo allora:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \varphi + \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

Questa formula è identica alla formula di Lagrange, attualmente usata in fisica matematica. Ritornando al problema originale, ossia ponendo  $f = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{x}}$  otteniamo  $\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{x(1+(y')^2)}} \right)$  cioè  $y' = C \sqrt{\frac{x}{1-Cx^2}}$  con  $C$  costante. Tale forma differenziale era al tempo conosciuta come cicloide (una forma parametrica verrà scoperta solo in seguito), che dunque è la curva di tempo minimo.

Questo approccio così fresco e irriverente al calcolo differenziale ha portato un modo nuovo di vedere la matematica, ed è considerato l'atto di nascita del Calcolo delle Variazioni.

### 9.3.3 Leonhard Euler



Figura 9.12: Leonhard Euler (1707 - 1783)

<sup>24</sup> Leonhard Euler (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783), è stato un matematico e fisico svizzero, probabilmente il più importante del suo tempo.

Svolse un grande lavoro enciclopedico, sistemò e organizzò tutte le nozioni matematiche in numerosi volumi in cui spiegò nel dettaglio le definizioni e i teoremi con esempi e dimostrazioni; introdusse notazioni di successo come  $f(x)$ ,  $e$ ,  $\pi$ <sup>25</sup>.

Nella sua opera *Introductio in analysis infinitorum*, 1748 scrisse: Una quantità costante è una quantità determinata che conserva sempre lo stesso valore. Quantità di questo tipo sono i numeri di qualunque genere, dunque ciò che sempre conserva quel valore che ha assunto; e se si devono indicare quantità costanti di questo tipo con dei simboli, si usano le prime lettere dell'alfabeto

<sup>24</sup>questa sezione è ripresa da [9].

<sup>25</sup>si noti che il successo delle notazioni non è mai voluto da un autore, ma è sempre frutto della semplicità d'uso delle stesse oltre che della fama del loro inventore

a, b, c, ecc. Nell'analisi comune dove si considerano soltanto quantità determinate queste prime lettere dell'alfabeto indicano usualmente i termini noti mentre le ultime indicano le quantità incognite; ma nell'analisi sublime questa distinzione non vale più, poiché qui si guarda ad un'altra differenza fra le quantità e cioè alcune si prendono costanti ed altre invece variabili [...]”

Quindi da la definizione di cosa sia una variabile e cosa una costante.

textslViene determinata una quantità variabile, quando le viene assegnato un valore qualsiasi.

La quantità variabile può dunque essere determinata in innumerevoli modi, quando è permesso mettere al suo posto proprio tutti i numeri. Il significato della quantità variabile non viene ancora esaurito, se non sono stati determinati tutti i valori messi al suo posto. Perciò la quantità variabile comprende proprio tutti i numeri in se, sia affermativi che negativi, sia interi che fratti, sia razionali che irrazionali e trascendenti. Perciò le cifre e i numeri immaginari non sono esclusi dal valore della quantità variabile.

*Una funzione di quantità variabili è un'espressione analitica composta in una maniera qualunque da questa quantità variabile e da numeri o quantità costanti.*

Quindi per ogni espressione analitica nella quale, eccetto la quantità variabile z tutte le altre quantità che la compongono sono costanti sarà una funzione della stessa z. Così

$$a + 3z, az + 4zz, az + b\sqrt{(aa - zz)}, c^z$$

sono funzioni della stessa z.

Dopo aver definito cos'è una quantità variabile definisce anche la funzione come quantità variabile, infatti scrive:

*La funzione di una quantità variabile è essa stessa una quantità variabile.*

Qui inizia a classificare i vari tipi di funzioni:

*Il principio discriminante delle funzioni è posto nella modalità di combinazione con la quale sono formate da quantità variabili e quantità costanti.*

Deriva perciò dalle operazioni, con le quali le quantità si possono comporre e mescolare; queste operazioni sono addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione, elevazione a potenza e estrazione da radice, alla quale si deve imputare anche la soluzione delle equazioni. Eccetto queste operazioni, che soliamo chiamare algebriche, ce ne sono molte altre trascendenti; come le esponenziali, le logaritmiche ed innumerevoli altre, che forniscono il calcolo integrale.

*Le funzioni si dividono in algebriche e trascendenti; la prime sono quelle che si*

compongono delle sole operazioni algebriche; le altre, invece, quelle nelle quali sono presenti le operazioni trascendenti.

Le funzioni algebriche si dividono in razionali e irrazionali; sono le prime se la variabile non viene coinvolta in alcuna irrazionalità; le altre invece, sono quelle nelle quali viene attribuita alla quantità variabile la radicalità.

Le funzioni razionali si dividono ancora in integrali e fratte.

### La formula di Eulero

<sup>26</sup> Eulero trovò la seguente importante formula, punto di partenza per la determinazione dei logaritmi complessi:

$$e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\sin\vartheta$$

La giustificazione che diede fu basata sullo sviluppo di Taylor di  $e^x$ . Si ha infatti:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Se noi sostituiamo  $x = i\vartheta$  risulta:

$$e^{i\vartheta} = 1 + i\vartheta - \frac{\vartheta^2}{2!} - \frac{i\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^4}{4!} + \dots$$

Ora tenendo presente i ben noti sviluppi del seno e del coseno che sono:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

possiamo ben immaginare che (per quanto riguarda le serie) lo sviluppo di  $e^x$  non sia altro che la somma della serie del coseno a cui aggiungiamo  $i$  volte la serie del seno.

Dal momento che nel '700 non c'era tutta quell'attenzione per il rigore formale e per le verifiche delle varie convergenze, si giunse direttamente alla formula che avevamo scritto all'inizio, e si usava tale procedimento come dimostrazione. Ponendo allora  $\vartheta = \pi$  si ottiene quella che da molti è chiamata "la formula più

---

<sup>26</sup>questa sezione è ripresa da [8].

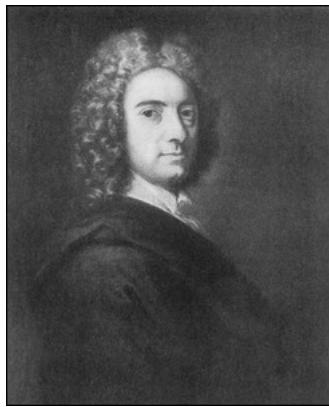


Figura 9.13: George Berkeley (1685 - 1753), filosofo e teologo irlandese, vescovo di Cloyne, Irlanda del sud

bella della matematica”, che lega tra loro tutte e sole le costanti più importanti, ovvero:

$$e^{i\pi} = -1$$

e quindi passando ai logaritmi si ha  $\ln(-1) = i\pi$ .

Essa stabiliva che i logaritmi di numeri negativi erano numeri immaginari puri, chiudendo definitivamente il discorso.

Eulero dimostrerà in seguito quindi che ogni numero complesso (quindi anche reale negativo) ammette in ambito complesso infiniti logaritmi, e oggi tale formula è nota come “formula del logaritmo complesso”, che riportiamo di seguito:

$$\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$$

Se infatti  $z$  è numero reale positivo, il termine  $\arg(z)$  è zero quindi si ha il classico logaritmo reale.

### 9.3.4 George Berkeley: i problemi delle fondamenta

27

Il vescovo e filosofo irlandese George **Berkeley** (1685-1753) propose una critica radicale all’analisi infinitesimale (così come sviluppata al suo tempo) nell’opuscolo *The Analyst*, pubblicato nel 1734. La mancanza di rigore era così

---

<sup>27</sup>questa sezione è ripresa da [6].

netta, a suo avviso, da spingerlo a dichiarare che la nuova disciplina fondata da Newton e Leibniz pretendeva di “provare i [propri] principi a partire dalle conclusioni”, anziché il contrario.

La critica del filosofo si spingeva fino alla definizione stessa delle flussioni di Newton, mai espressa rigorosamente dallo scienziato inglese: in uno dei passaggi più celebri dell’*Analyst* l’autore si domandava “Che cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti? Essi non sono né quantità finite né quantità infinitesime, e tuttavia non sono un nulla. Perché non chiamarli spiriti di quantità sparite (ghosts of departed quantities)?”

In particolare, Berkeley concentrò i propri appunti al procedimento adottato, come si è visto, dai principali matematici del Seicento, per calcolare i differenziali: apportare un incremento alla variabile e successivamente - dopo aver diviso alcuni termini per esso - porlo uguale a zero<sup>28</sup>. L’inconsistenza logica di tale procedura fece descrivere a Berkeley i risultati dell’analisi come frutto di una fortuita compensazione di errori: “In virtù di un duplice errore giungiamo, se non proprio alla scienza, per lo meno alla verità.” Berkeley, infine, poneva rilievi alla stessa nozione di velocità istantanea che i lavori di Newton sulla fisica (e sul suo legame con il calcolo infinitesimale) avevano portato a considerare. Egli infatti concepiva il moto solo all’interno di un intervallo spazio-temporale definito, relativamente al quale si può calcolare la velocità media. Dal momento che affermava di non capire il significato delle quantità “evanescenze” e “nascenti” introdotte da Newton, era per lui dunque impossibile dare un senso alla proporzione tra flussioni che nella teoria newtoniana era alla base del concetto di velocità istantanea.

### 9.3.5 Augustin Cauchy

29

La risposta ai problemi sulle fondamenta dell’analisi matematica arrivò nel secolo successivo; se Lagrange cercò di aggirare l’ostacolo introducendo nel 1797 il concetto di funzione derivata, i problemi legati all’uso degli infinitesimi vennero risolti dal nuovo concetto introdotto da Cauchy: la convergenza.

---

<sup>28</sup>in effetti è difficile accettare che una quantità  $dx$  non sia zero al momento della divisione e sia come nulla nella somma. Questo porta a paradossi come quello seguente:  $1 = 1 + dx$ , allora elevando al quadrato entrambi i membri  $1 + 2dx + dx^2 = 1 = 1 + dx$  ossia, ignorando il termine infinitesimo  $dx^2$  si giunge a  $2dx = dx$  ossia  $2 = 1$ . Non è chiara la differenza fra questo calcolo assurdo e i conti di Newton e Leibniz.

<sup>29</sup>questa sezione è ripresa da [9].



Figura 9.14: Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857), matematico e ingegnere francese

Augustin-Louis Cauchy (Parigi, 21 agosto 1789 - Sceaux, 23 maggio 1857) è stato un matematico e ingegnere francese.

Nella sua opera *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* del 1821 scrisse:  
"Chiamiamo quantità variabile quella che consideriamo come se dovesse ricevere successivamente molteplici valori differenti gli uni dagli altri. Indichiamo tale quantità con una lettera presa dalle ultime dell'alfabeto.

Chiamiamo invece, al contrario, una quantità costante e la indichiamo con una delle prime lettere dell'alfabeto tutte quelle che ricevono un valore fisso e determinato."

Quanto al concetto di funzione:

"Quando delle quantità variabili sono congiunte fra di loro in modo tale che, una volta dato il valore di una di esse, è possibile determinare il valore di tutte le altre, si ritiene di solito che queste diverse quantità siano espresse mediante quell'una, che prende allora il nome di variabile indipendente, mentre le altre quantità possono essere espresse mediante la variabile indipendente sono quelle che sono dette funzioni di questa variabile."

Riguardo al concetto di continuità egli scrive:

"La funzione  $f(x)$  resterà continua rispetto a  $x$  fra due limiti dati, se, entro questi limiti, un incremento infinitesimo della variabile produce sempre un in-

remento infinitesimo della funzione stessa”.

Cauchy si adoperò molto nei suoi scritti per rendere rigoroso il concetto di continuità delle funzioni. Introdusse anche il concetto di limite come convenienza (esattamente ciò che noi oggi definiamo come “convergenza di Cauchy.”) e lo pose come fondamento per il concetto di derivata. Il suo tentativo (in parte riuscito) fu quindi quello di rendere rigorose le definizioni e le intuizioni dei suoi predecessori.

# Bibliografia

- [1] Boyer C.B., *Storia della Matematica*, Carugo, 1990
- [2] Castelnuovo G., *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna*, Zanichelli, 1938
- [3] Geymonat L., *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Levrotto e Bella, 1947
- [4] Giusti E., *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*, Ist. Editoriali e Poligrafici, 2007
- [5] Toscano F., *La formula segreta*, Sironi editore, 2009

---

- [6] Baldacci G., Garofalo M., *La nascita del calcolo infinitesimale*, relazione del 2011
- [7] Bolzon R., Pozzato G., *Descartes e Fermat: la nascita della geometria analitica*, relazione del 2011
- [8] Bovo S., Semenzato, C., *La matematica nel 1700*, relazione del 2011
- [9] Zarpellon C., *Evoluzione del concetto di funzione*, relazione del 2010

## Capitolo 10

# Analisi e Fisica Matematica nell'800

di Davide Tasinato

### 10.1 Cenni storici: Analisi

Negli ultimi anni del '700 (a partire dal 1789) si ha la Rivoluzione Francese, in questa epoca storica si hanno profondi mutamenti in molti campi: politica, filosofia, scienza e... Matematica.

Inizialmente i rivoluzionari non vedono di buon occhio le accademie e gli studi scientifici e matematici, ma la presenza tra questi ultimi di personalità fondamentali al buon esito della rivoluzione fanno nascere la convinzione che sia necessario per la sopravvivenza della neonata Repubblica la formazione di ingegneri e scienziati. La nascente Repubblica Francese infatti per difendersi aveva bisogno della produzione di salnitro, acciaio e armi, di conseguenza anche delle conoscenze scientifiche che servivano a produrle; a monte di tutto questo vi era bisogno anche di una solida preparazione scientifica.

Lazare Carnot, importante membro dell'Assemblea Nazionale, del Comitato di Salute Pubblica nonché matematico, spinge quindi l'Assemblea a fondare L'École Polytechnique, in cui verranno chiamati ad insegnare i migliori scienziati e i migliori matematici dell'epoca.

Il matematico cambia dunque mestiere: prima era un dotto o un dilettante, ora è insegnante universitario, questo farà sì che i lavori matematici inizino ad

essere pubblicati in riviste specializzate e raccolte in manuali, questo avrà un forte impatto positivo sul rigore matematico con cui saranno scritte.

## 10.2 Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)



Figura 10.1: Cauchy

Il primo matematico di cui parliamo è Cauchy. Lo ricordiamo per alcuni motivi fondamentali: ha avviato il progetto della formulazione e dimostrazione rigorosa dei teoremi dell'analisi infinitesimale, ha dato importanti contributi alla teoria delle funzioni di variabile complessa e alla teoria delle equazioni differenziali.

La sistematicità e il livello di questi suoi lavori lo collocano tra i padri dell'analisi matematica.

Cauchy, come professore di analisi all'école Polytechnique, si impegnò in un lavoro di ricostruzione rigorosa dei concetti fondamentali dell'analisi, ne fece un corso per il primo anno e pubblicò inoltre il contenuto delle lezioni nel suo 'Cours d' Analyse'. Nonostante il rigore che lo differenziava fortemente dai suoi

predecessori e che era il suo vanto anche all'interno dell'Ecole, le definizioni di alcuni concetti elementari erano però lasciate a complesse spiegazioni discursiveive, in cui si intuiscono le definizioni rigorose date dai matematici successivi.

Possiamo vedere a tal proposito la definizione di limite:

*allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente ad un valore fissato, sì da differirne alla fine tanto poco quanto si vorrà, quest'ultima quantità è chiamata il limite di tutte le altre*

la sua definizione di funzione continua  $f$  sull'intervallo  $[a, b]$  è quella per cui  $\forall x \in [a, b]$  il limite di  $f(x + \alpha)$  con  $\alpha$  che tende a zero è  $f(x)$ . Definisce inoltre le serie convergenti e, con rammarico, poiché non era riuscito a costruire una teoria solida, deve annotare che le serie divergenti non hanno somma. Compie anche un errore piuttosto importante: un suo teorema diceva che la sommatoria infinita di funzioni continue era continua. Abel successivamente trova un controsenso nella serie di seni:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \sin(x) + \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} + \dots$$

Il secondo corso che tiene all'Ecole è 'Le Calcul Infinitésimal' in cui tenta di dare delle fondamenta più solide all'analisi rispetto a quelle presentate nei lavori di Lagrange. Lagrange infatti credeva di aver 'dimostrato' il 'teorema' di Taylor, il cui enunciato per lui asseriva che ogni funzione derivabile infinite volte era esprimibile mediante la serie di Taylor della funzione stessa.

Il controsenso che trova Cauchy è il famoso  $e^{\frac{1}{x^2}}$  che per  $x = 0$  ha le derivate di ogni grado nulle. Cambierà quindi l'enunciato del teorema e inserirà il famoso resto integrale nella forma di Cauchy.

Le definizioni importanti in questo testo sono sicuramente quella di derivata come limite del rapporto incrementale e di primitiva come operazione inversa di derivata. L'integrale per lui era il limite della somma dell'area dei rettangoli approssimanti l'area sottesa dalla funzione, ma, a differenza della moderna definizione di Riemann, per lui gli intervalli avevano passo costante e non variabile come nel caso Riemanniano.

il risultato più importante, e allo stesso tempo completo e rigoroso, di questo testo è però la definizione di problema di Cauchy e la dimostrazione dell'unicità della soluzione, che quindi apre la strada alla ricerca ed allo studio rigoroso

delle equazioni differenziali, che sino ad allora non si era spinto oltre la risoluzione incompleta di semplici casi particolari.

Il corso terminava con un piccolo cenno ai numeri immaginari ed alle funzioni immaginarie, utile più che altro per abituare i giovani studenti e gli altri matematici dell'epoca a questi concetti che erano spesso rifiutati.

Il grosso del lavoro di ricerca di Cauchy infatti era concentrato su questi temi, e, mediante le sue pubblicazioni possiamo scorgere molti risultati fondamentali dell'analisi complessa, come ad esempio il teorema dei residui e la forma integrale di Cauchy.

### 10.3 Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897)



Figura 10.2: Weierstrass

Altro padre dell'analisi moderna è sicuramente Karl Weierstrass, per i suoi enormi contributi alla sistemazione degli errori dell'impostazione di Cauchy ed alla formalizzazione matematica di molte sue definizioni discorsive, la più celebre delle quali è sicuramente la definizione di continuità epsilon-delta.

Egli era legato infatti al rigore assoluto come al principio irrinunciabile per fare analisi ed era quindi contrario alle dimostrazioni 'geometriche' in cui le funzioni erano disegnate e si facevano considerazioni geometriche sul grafico, metodo che spesso nascondeva facilmente errori e ipotesi implicite importanti. Aveva quindi filosoficamente le idee di Bolzano, il quale però diede un contributo concreto alla formalizzazione dell'analisi sicuramente minore e inoltre non riconosciuto dai matematici di allora.

La sua prima fondamentale ricerca riguardò la sistemazione del teorema errato di Cauchy sulla somma di funzioni continue: per risolvere il problema definisce la convergenza uniforme di funzioni e dimostra il teorema con questa famosa ipotesi, che avrà una forte importanza nella successiva costruzione della teoria delle funzioni.

Altre definizioni che lui specifica in maniera rigorosa, e che prima di allora erano usate con leggerezza, sono quelle di massimo, minimo, estremo inferiore ed estremo superiore, e sistema quindi i teoremi che ne facevano uso, trovando gravi errori nelle dimostrazioni, che vengono quindi riscritte. Ancora oggi molti teoremi fondamentali dell'analisi sono insegnati dandone le sue dimostrazioni. Inoltre spesso, per convincere gli altri matematici della necessità del rigore, costruiva controsenari celebri ai loro 'teoremi' dimostrati con l'abuso della geometria, uno dei più celebri è la funzione continua in ogni punto e non derivabile in nessun punto:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \quad \forall 0 < a < 1 \quad ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$$

che contraddiceva molte 'dimostrazioni' geometriche. Queste infatti spesso presupponevano che ogni funzione continua non fosse derivabile al massimo in un insieme discreto di punti.

## 10.4 Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Riemann è un matematico sicuramente ricordato maggiormente per le sue scoperte in campo geometrico, ma non si può non citare il suo lavoro nell'ambito dell'analisi complessa e la definizione di integrale. In questo caso egli espone la definizione moderna di integrale, che, a differenza di quella di Cauchy, prevede l'utilizzo di intervalli dal passo non costante.



Figura 10.3: Riemann

Grazie al suo contributo all'analisi complessa invece abbiamo la formalizzazione del criterio di Riemann-Cauchy per le funzioni olomorfe:

sia  $f(x + iy) = u + iv$  olomorfa, allora  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$  e  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

abbiamo poi la definizione di derivata frazionaria, ma sicuramente nel mondo matematico il suo nome è legato alla funzione zeta ed all'Ipotesi di Riemann.

La funzione zeta è il prolungamento analitico di

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

con  $\Re(s) > 1$  in tutto il piano complesso meno che nel punto  $s = 1$ , in altre parole l'unica funzione olomorfa tale che per  $\Re(s) > 1$  il suo valore è uguale a  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ . L'Ipotesi di Riemann prevede che gli zeri diversi dai numeri interi negativi, chiamati anche zeri non banali, abbiano tutti parte reale uguale ad  $\frac{1}{2}$ .

Riemann riuscì a legare molti risultati ottenuti su questa funzione a questioni riguardanti la distribuzione dei numeri primi, motivo per cui la sua Ipotesi, che rimane un problema tutt'ora aperto, ha interessato matematici di varie branche, ha portato alla soluzione di molte questioni intermedie ed ha stimolato la ricerca in un settore, quello dei numeri primi, diventato fondamentale in crittografia.

## 10.5 Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)



Figura 10.4: Dedekind

Se Cauchy e Weierstrass si sono occupati di dare una base solida ai teoremi fondamentali dell'analisi, Dedekind è il primo matematico che si pone di dare una base solida ai numeri reali, l'insieme fondamentale su cui lavorano gli analisti.

Prima di lui il numero reale era visto come un punto sulla retta orientata, definizione che lui riteneva debole rispetto all'importanza dell'analisi, che a quell'epoca era la disciplina il cui rigore assoluto era portato come esempio a tutte le altre branche della matematica.

Dedekind parte dunque dalla definizione di numeri razionali, il cui insieme è  $\mathbb{Q}$ , e poi definisce i tagli, coppie di insiemi con tre caratteristiche:

- entrambi sono non vuoti
- ogni elemento del primo è minore di ogni elemento del secondo
- l'unione da l'intero insieme dei razionali

ricrea la somma ed il prodotto per queste coppie di insiemi e dice che ogni coppia è un numero reale. Conclude dimostrando che così facendo si hanno tutte le proprietà note dei reali.

## 10.6 Cenni storici: Fisica Matematica

A cavallo tra il '700 e l'800 alcuni matematici iniziano a valutare seriamente di portare le loro attitudini al rigore matematico nello studio della fisica, che, per quanto ora avesse un'attitudine scientifica, poneva l'esperimento ed il laboratorio come elementi irrinunciabili per il proprio lavoro, spesso a discapito della consistenza tra diversi modelli, e, come già nominato prima, del rigore.

Uno degli ispiratori di questa nuova matematica è Eulero, che per primo si occupa di problemi fisici solo dal punto di vista prettamente matematico, permettendo cioè la correttezza delle formule fisiche trovate precedentemente e quindi analizzando sistemi molto più complessi.

Per quanto riguarda però la forte spinta che si ha nell'800 ricordiamo soprattutto Lagrange che, con il suo volume *Méchanique analytique* del 1788, aumenta di molto nel mondo della matematica l'interesse per questo nuovo tipo di ricerca, grazie ai suoi fondamentali risultati su stabilità e Lagrangiana, che porteranno benefici pure alla fisica stessa.

## 10.7 Pierre Simon Laplace (1749-1827)

Pierre Simon Laplace è una figura di transizione tra la matematica del Settecento e quella dell'Ottocento, visto che in alcuni suoi lavori (i più vecchi) mantiene molti tratti del matematico settecentesco, come il poco rigore unito alla scarsa chiarezza, successivamente diviene membro dell'*Académie des Sciences*, e anche i suoi lavori diventano meno oscuri, con uno stile più aderente al nuovo corso che la matematica stava attraversando.

Per Laplace gli spazi celesti sono visti come laboratorio privilegiato per lo studio delle leggi sul moto, per via del fatto che i corpi erano soggetti ad una sola forza principale di cui era facile calcolare gli effetti. La sua ricerca sulla meccanica celeste occupa soprattutto la prima parte della sua vita, molto più tardi raccoglie e sistema tutti i risultati sui problemi meccanici relativi ai pianeti nella sua opera principale: *Mécanique céleste*.

Dal punto di vista teorico il suo più importante contributo è sicuramente il perfezionamento del concetto di potenziale, da questo deriva la nota equazione di Laplace:



Figura 10.5: Laplace

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Non si può però parlare di Laplace senza ricordare le sue forti convinzioni filosofiche: aveva una forte concezione deterministica, pensava che, conoscendo in un dato istante tutte le forze di cui era animata la natura e le posizioni di ogni corpo, con l'analisi si sarebbero potuti conoscere tutti i movimenti futuri dei corpi che componevano l'Universo, era quindi fortemente ottimista per quanto riguarda il progresso della scienza e della fisica matematica in particolare.

Viene ricordato inoltre per la *Théorie analytique des Probabilités*, ultimo grande trattato sulla materia prima della moderna teoria assiomatica di Kolmogorov del 1933, dove dimostra il famoso Teorema del Limite Centrale. La pretesa di Laplace con questo testo era di chiudere definitivamente la questione sui fondamenti e la ricerca nel campo della teoria della probabilità. visti i risultati mirabili che lui ottiene in questo testo riesce a convincere i probabilisti contemporanei che la loro ricerca si sarebbe dovuta spostare nell'applicazione,

si hanno quindi in questo secolo i più importanti risultati nel campo della statistica teorica e applicata, e per contro il quasi completo disinteresse riguardo la teoria della probabilità e i suoi fondamenti, che si riprenderà solo con la scuola russa iniziata da Kolmogorov più di un secolo dopo.

## 10.8 Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)



Figura 10.6: Fourier

Gli interessi nel campo della Fisica Matematica per Fourier si concentrano invece sulla propagazione del calore in alcuni tipi di solidi come anelli, lastre infinite e sfere.

Durante questo tipo di studi si imbatte in equazioni differenziali non risolvibili mediante le tecniche standard e per risolverle usa serie trigonometriche infinite, che poi si riveleranno le serie di Fourier di semplici funzioni.

Nonostante la loro semplicità molto spesso queste funzioni non sono continue in alcuni punti. Questo fatto non convince gli altri accademici della bontà del lavoro di Fourier; infatti questi risultati sono contrari al sentire comune del

tempo che, influenzato dalla leibniziana legge di continuità, vuole che le funzioni che trattano fenomeni naturali siano necessariamente continue.

Altro fattore che non aiuta il giovane Fourier a far accettare il proprio lavoro agli accademici dell'epoca è lo scarso rigore con cui scrive e comunica le sue ricerche, in primo luogo perché contrario allo spirito del tempo, in secondo luogo perché lo porta a compiere grossi errori. Tra questi ricordiamo la sua 'dimostrazione' geometrica che 'qualunque' funzione può essere rappresentata mediante una serie trigonometrica con ragionamenti geometrici. A sua parziale discolpa possiamo però dire che allora il concetto di funzione non era ben chiaro e le funzioni 'patologiche' di Weierstrass non erano ancora di dominio comune.

A dimostrazione di questo scetticismo il mondo accademico, pur valutando positivamente le scoperte di Fourier, non permise, come era consuetudine a quel tempo, la pubblicazione del testo con cui vinse un concorso dell'école Polytechnique sulle leggi di propagazione del calore. Lo fece solo diversi anni più tardi, quando l'enorme valore di quei primi studi fu riconosciuto dalla grande maggioranza degli studiosi.

Fortunatamente Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) comprese non solo l'importanza del lavoro di Fourier, ma si applicò per far sì che diventasse rigoroso: diede quindi un grosso contributo al riordinamento coerente delle idee di Fourier e sistema teoremi e dimostrazioni.

## 10.9 Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)

Il rappresentante forse più importante della fisica matematica della prima metà dell'800 è però Jacobi: critica apertamente l'approccio di Laplace alla Fisica Matematica, da lui definito poco chiaro e ingarbugliato. Non lo fa solo per una questione didattica visto che scopre alcuni gravi errori dovuti a questo stile, in particolare nella dimostrazione sulla stabilità degli ellisoidi di rotazione.

Riordina quindi molti importanti lavori svolti sino ad allora anche in vista di un suo importante progetto. Jacobi infatti fonda a Königsberg un 'Seminario matematico e fisico', insieme al fisico Franz Neumann, primo esperimento nato per dare dignità culturale alle scienze matematiche, contrapponendosi quindi



Figura 10.7: Jacobi

al neoumanesimo dominante in quel periodo in Germania.

Per lui l'attività di insegnante è fondamentale e con le sue lezioni influenzerà la crescita di un'intera generazione di matematici tedeschi. I suoi lavori sono raccolti nelle 'Lezioni di Meccanica' dove nota che la meccanica è un importante campo di applicazione per la teoria delle equazioni differenziali. Il suo lavoro di ricerca per la risoluzione quindi dei principali problemi della fisica matematica si avvia verso un forte lavoro sulle equazioni differenziali ordinarie ed alle derivate parziali, che si rivelerà fondamentale strumento di analisi dei problemi più importanti di questa disciplina.

### 10.10 Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Concludiamo col 'Princeps Mateticorum', Gauss, da molti considerato il più grande matematico della storia.



Figura 10.8: Gauss

Nonostante nella sua vita si guadagnasse da vivere come direttore dell’Osservatorio di Gotha, si occupa di fisica matematica solo al termine della sua carriera, seppure per tutta la vita avesse trattato questioni fisiche e astronomiche, ma quasi sempre dal punto di vista del calcolo numerico. Per i suoi calcoli astronomici il metodo che rimarrà più famoso è quello dei minimi quadrati, che utilizzò per quasi vent’anni prima di pubblicarne la spiegazione e le dimostrazioni che ne giustificavano l’utilizzo.

Il suo motto infatti era ‘Pauca sed matura’, infatti preferiva pubblicare poco, solo quando poteva realmente giustificare tutto quello che aveva fatto, solo se era arrivato ai risultati che si prefiggeva, solo se il valore di quello che faceva fosse stato del tutto chiaro a qualsiasi matematico, visto che odiava le dispute e le inimicizie.

Questo però secondo molti storici della matematica rallentò il progresso della disciplina di decine di anni, come l’esempio dei minimi quadrati ci può far osservare: molti matematici e scienziati di ogni genere si chiedevano in che modo Gauss potesse ottenere i prodigiosi risultati che lo rendevano il migliore nel suo lavoro, e dovettero aspettare decenni prima di poter dare anche loro

un contributo dello stesso livello.

Gauss si occupò pochissimo di analisi, ma vale la pena ricordare che all'inizio della sua carriera risolse un problema rimasto aperto con la sua tesi di laurea sulla dimostrazione del teorema fondamentale dell'algebra: per la prima volta viene dimostrato che un polinomio di grado  $n$  ha  $n$  radici, conteggiate con le loro molteplicità. Ritornò nei suoi studi di analisi successivamente solo per perfezionare la dimostrazione che si scoprì mancava di un piccolo risultato.

Gauss, come abbiamo detto prima, non amava le dispute e di conseguenza non partecipò mai nella sua vita ad un convegno matematico, se non una sola volta e come spettatore, dopo le forti insistenze del suo caro amico Von Humboldt. Il convegno era quello sui problemi di magnetismo che solo allora si stavano avvicinando ad un approccio fisico-matematico. Gauss si appassionò a questo tipo di problemi, e con l'aiuto di Weber, un fisico consigliatogli da Von Humboldt stesso, lavorò a diversi progetti, non solo di tipo fisico-matematico, ma anche di tipo ingegneristico; infatti insieme non solo riescono a calcolare il campo magnetico terrestre, ma addirittura costruiscono un telegrafo elettromagnetico.

Pubblica due grandi memorie: 'Teoria generale del magnetismo terrestre' e 'Proposizioni generali sulle forze di attrazione e repulsione che agiscono secondo l'inverso del quadrato della distanza'. I suoi risultati trattano la teoria del potenziale come un caso particolare del calcolo delle variazioni. Chiudiamo ricordando uno dei risultati più famosi: il teorema di Gauss sulle superfici chiuse contenenti cariche elettriche:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

dove  $\Phi_E$  è il flusso di campo elettrico uscente da una superficie chiusa contenente la quantità di carica  $Q$  ed  $\epsilon_0$  è una costante universale chiamata permeabilità dielettrica del vuoto.

# Capitolo 11

## Origini dell'algebra moderna

di Angela Nardo

### 11.1 Introduzione

Il più completo manuale di algebra disponibile ai giorni nostri è il Bourbaki, redatto nel Novecento da un gruppo di matematici con lo scopo di raccogliere al meglio le conoscenze matematiche. Prima di loro il matematico olandese Bartel Leenert Van der Waerden (1903-1996) aveva pubblicato nel 1930 un'opera da titolo *Algebra moderna* che rappresenta la prima sistemazione degli studi sull'algebra fino a quel momento. I suoi testi sono un importante punto di riferimento per comprenderne lo sviluppo.

Per giungere alle origini dell'algebra moderna dobbiamo considerare tre fasi che Van Der Waerden distingue prendendo come spartiacque il matematico Evariste Galois.

- Prima di Galois l'interesse principale degli algebristi era risolvere le equazioni algebriche. La matematica araba influenzò l'Europa in questa ricerca tra cui spiccano nomi come Scipione Dal Ferro, Tartaglia e Cardano che sono famosi per la risoluzione delle equazioni di terzo grado; Ferrari per le equazioni di quarto. Gauss si soffermò sullo studio di quelli che oggi vengono chiamati *polinomi ciclotomici*, ossia del tipo  $x^n - 1 = 0$ , dimostrando che si possono risolvere per radicali. Inoltre si distinse per aver fornito delle nuove dimostrazioni al *Teorema fondamentale dell'algebra*, teorema secondo cui tutte le equazioni algebriche ammettono una

soluzione nei complessi. Ricordiamo all'interno di questo primo periodo anche le figure di Lagrange, Abel, Vandermonde e Ruffini.

Già nella ricerca di soluzioni per equazioni possiamo parlare di un primo livello di astrazione dal momento che il termine “cosa” per indicare l'inconosciuta aveva in sé l'idea del calcolo letterale e non strettamente numerico. Tuttavia il risultato doveva sempre essere riconducibile a operazioni concreteamente eseguibili su interi. Il passo più difficile da affrontare per gli algebristi del Cinquecento fu accettare come “numero” la radice quadrata di un numero negativo, capire di cosa la radice di  $-1$  potesse essere misura. Fu il matematico Raphael Bombelli (1526-1573) che definì l'unità immaginaria  $i$  chiamata “più di meno”, come simbolo tale che il suo quadrato sia  $-1$ , e un numero complesso come somma di un numero reale  $a$  e di  $i$  moltiplicato per un altro reale  $b$ . Si tratta quindi di passare dall'astrazione dell'aritmetica al calcolo formale su puri simboli.

- Galois, nato a Parigi nel 1811, rappresenta, se osservato con gli occhi di oggi, un ponte tra due approcci dell'algebra. Egli fu il primo che si soffermò a studiare le strutture di campi e di gruppi e ne colse la connessione. Nello studio della risolubilità per radicali di un'equazione egli intuì e dimostrò che è necessario analizzare un particolare gruppo legato a quella equazione, che prenderà appunto il nome di gruppo di Galois.
- Questa connessione tra la risoluzione delle equazioni e i gruppi di Galois portò allo sviluppo dell'algebra astratta, dedita allo studio di strutture come anelli, campi, ideali, in cui vedremo protagonisti numerosi matematici attivi principalmente in Gran Bretagna e Germania. L'astrazione si fonda sul definire le

*strutture algebriche*: aggregati di elementi di una certa natura che si possono comporre tra loro mediante operazioni che godono di determinate proprietà.

Queste proprietà definiscono la struttura nonostante gli elementi possano essere diversi. La struttura è un “ente” composto da elementi di natura non specificata e da relazioni o operazioni che legano gli elementi che soddisfano delle proprietà formali. Questo concetto permette di studiare ulteriormente le strutture algebriche senza doversi soffermare su

ognuna. I teoremi dimostrati per una certa struttura algebrica saranno veri per tutti gli aggregati che possono riconoscersi in quella struttura. Per costruire una struttura diversa da una già nota basta non considerare uno degli assiomi che la descrivono. Così ad esempio un corpo non è necessariamente un campo.

In questa relazione faremo una panoramica sull'evoluzione dell'algebra tra il 1770, anno in cui vennero pubblicate le “*Réflexions sur la résolution algébrique des équations*” di Lagrange e il 1872, data in cui Klein rese noto il suo “*Discorso di Erlangen*”.

## 11.2 Le equazioni algebriche di grado superiore al quarto

### 11.2.1 L'algebra nel XVIII secolo

Dal XVI secolo, quando Dal Ferro, Tartaglia e Cardano giunsero alla formula per le equazioni di terzo grado e Ferrari giunse a quella per le equazioni di quarto, i matematici non smisero di occuparsi della soluzione generale delle equazioni di grado cinque e superiore.

Nel XVIII secolo la concezione dell'algebra era molto differente da quella attuale da un lato questo ramo della matematica era ancora inteso come la scienza che trattava la risoluzione dei problemi attraverso l'uso delle equazioni. In questo periodo lo studio delle proprietà delle equazioni e delle loro soluzioni fu gradualmente separato dalla risoluzione vera e propria delle equazioni stesse, che rimase un argomento trattato nei libri di didattica. Va quindi riconosciuto un primo tentativo di presentare una teoria generale per la risoluzione delle equazioni.

La generalità delle equazioni era garantita dal significato generale dei loro coefficienti. Inizialmente le lettere rappresentavano un numero appartenente ad un dominio non ben definito, un numero in generale.

L'altro modo di intendere l'algebra, che Newton espresse molto chiaramente con il concetto di “aritmetica universalis” è strettamente legato al calcolo letterale. Il matematico inglese si contrappose alla più antica tradizione che distingueva l'aritmetica dei numeri o ordinaria (arithmetica vulgaris) dalla aritmetica delle lettere (arithmetica litteralis). Nel XVIII secolo il suo concetto di aritmetica generale cominciò ad acquisire una nuova e più generale natura: la lettera non rappresentava più un numero appartenente a un qualche

campo, magari nemmeno definito accuratamente, ma piuttosto una quantità in generale, per esempio aritmetica o geometrica. Questo concetto si diffuse ampiamente e verso la metà del 1700 apparve in molti libri di testo, quali *Nouveaux éléments d'algèbre* di Jacques Ozanam e *Eléments d'algèbre* di Clairaut con diverse sfumature.

Nel XVIII secolo esistevano quindi due complementari ma ben definiti concetti di algebra: uno di questi considerava l'algebra come la scienza delle equazioni e delle loro soluzioni, l'altro come la scienza delle quantità in generale.

Quest'ultimo concetto, **algebra** come “calcolo con le lettere”, divenne il **fondamento di tutte le matematiche**. Va però osservato che questo fondamento era ancora molto labile e problematico. Non esisteva ancora una struttura logica ben definita per questa “arithmetic universalis”. Echi e suggestioni linguistiche e logiche erano dominanti soprattutto nelle concezioni dell'algebra che si vennero affermando in Germania, influenzate dalle speculazioni leibniziane sulla *mathesis universalis*, l'*ars inveniendi* e la *characteristica*.

«Non puoi avere dubbi che ci sia una scienza superiore alla matematica e non meno certa», scriveva nel 1710 Leibniz al matematico tedesco Christian Wolff.

«La parte della logica che tratta dei modi e delle figure ne è un modesto esempio... la stessa algebra mostra che si possono trattare le forme e le similitudini non meno accuratamente delle quantità e delle equazioni, dal momento che, ridotta a formule, essa appare subordinata alla combinatoria».

Ma l'ambizioso progetto liebniziano trovò solo una pallida risonanza nelle opere di Wolff e Sturm, i quali tentarono di costruire un primo sistema assiomatico. Ricordiamo che durante il XVIII secolo apparivano come assiomi anche asserzioni come “Il tutto è più grande di ogni sua parte” e “Il tutto è uguale alla somma di tutte le sue parti”. Erano poi considerati assiomi i seguenti:

1.  $a = a$
2.  $a = b \Rightarrow b = a$
3.  $a = b, a = c \Rightarrow b = c$
4.  $a > b, b > c \Rightarrow a > c$
5.  $a = b \Rightarrow a \pm c = b \pm c, \quad a > b \Rightarrow a \pm c > b \pm c$
6.  $a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0)$

$$7. \ a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \quad (c > 0)$$

Il calcolo con le lettere era derivato direttamente dal calcolo con i numeri, senza definire accuratamente le regole utilizzate. Vi era inoltre una tendenza a generalizzare la validità di tali regole e dei simboli: gli assiomi sopra riportati, per esempio, erano validi per quantità generali, di natura sia aritmetica sia geometrica. Tutto ciò portò anche ad errori e assunzioni errate.

Riportiamo di seguito due esempi di abuso ed uso errato del simbolismo. Il primo è tratto dal “Vollständige Anleitung zur Algebra” (1770) in cui Euler afferma di essere arrivato alla soluzione dell’equazione:

$$x^\infty = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + \dots$$

Il secondo esempio si può ottenere facilmente se nell’assioma 5 si pone  $c = \sqrt{-1}$ . Per ogni reale arbitrario  $a$  e  $a$  si ottiene

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

che chiaramente non ha significato.

### 11.2.2 Lagrange, Waring e Vandermonde

Dopo la scoperta delle formule risolutive per le equazioni di terzo e quarto grado, molti matematici erano fiduciosi di poter trovare una formula anche quelle di grado cinque e superiore. Il periodo che va dal 1572 (pubblicazione dell’*Algebra* di Bombelli) al 1770 (pubblicazione delle *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* di Lagrange) è detto periodo di transizione. In tale periodo si passa dalla speranza di poter proseguire i risultati degli algebristi italiani all’impossibilità di trattarli.

Nel 1732 Euler aveva creduto di aver trovato un modo per esprimere mediante radicali le radici di una equazione algebrica di grado  $n$  qualunque. Insoddisfatto del risultato nel 1762 aveva proposto una seconda formula, congetturando con una sorta di induzione incompleta che ciò che era vero per i primi quattro gradi doveva essere vero anche per ogni altro grado.

I continui insuccessi nella ricerca di formule risolutive per radicali delle equazioni di grado superiore o uguale a 5, fecero di questo uno dei problemi cruciali dell’algebra nella seconda metà del Settecento. Non a caso verso il 1770 tre diversi matematici, in modo indipendente, pubblicarono pressoché contemporaneamente i loro risultati sulla questione.

Riportiamo qui sotto una cartina dell'Europa subito dopo il Congresso di Vienna avvenuto nel 1815 per inquadrare i luoghi e il clima in cui avvennero tali scoperte:

Lab/Desktop/RelazioneMEPVS/Europa4.jpg



C:/Users/Extreme Lab/Desktop/RelazioneMEPVS/Europa4.jpg

### Waring

Edward Waring (1734-1798), professore lucasiano a Cambridge, fin dal 1762, anno in cui pubblicò il libro *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis et curvarum proprietatibus*, aveva fatto circolare fra un gruppo di amici i propri lavori sulla teoria delle equazioni, che furono poi riscritte e ampliate nelle *Meditationes algebraicae* (1770).

Nelle prime pagine Waring trattava le funzioni simmetriche delle radici di un'equazione e le permutazioni delle radici stesse; egli dimostrava inoltre le formule (che portano il suo nome) sulle potenze delle radici in funzione dei

coefficienti dell'equazione.

La formula di Waring per un naturale  $n$  generico risulta:

$$a^n + b^n = (a + b)^n - \sum_{i=1}^{f_1} T_i \cdot a^i b^i \cdot [a^{n-2i} + b^{n-2i}] - f_2$$

per  $n$  dispari,  $f_1 = \frac{n}{2}$  e  $f_2 = 0$ ;

per  $n$  pari,  $f_1 = [\frac{n}{2} - 1]$  e  $f_2 = T_i \cdot a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$ , con  $T_i$  i-esimo coefficiente del triangolo di Tartaglia per la potenza  $n$ , iniziando a contare da quello più a sinistra. Waring mostrava poi come eliminare i termini di grado intermedio di un'equazione completa di  $4^\circ$  grado e osservava che in generale un'equazione di grado  $n$  dipendeva dalla risoluzione di una equazione ausiliaria «risolvente» di grado  $n!$ , maggiore dunque del grado della proposta. «Sarebbe dunque inutile ricercare mediante tale riduzione la soluzione generale delle equazioni», concludeva Waring, riconoscendo che quel tipo di approccio al problema non avrebbe portato alla soluzione.

### Vandermonde

Nello stesso anno in cui uscivano le *Meditationes* del matematico inglese, all'Académie des Sciences di Parigi Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) leggeva una propria memoria *Sur la résolution des équations* che apparve a stampa solo nel 1774.

Vandermonde cominciava a presentare le usuali funzioni simmetriche delle radici e poi abbozzava una teoria delle radici n-esime dell'unità, (ossia le radici di  $x^n = 1$ ), che sarà successivamente completata da Gauss. Si occupò molto anche di permutazioni e ne introdusse l'operazione di composizione.

Proprio sulla base di considerazioni sulle permutazioni delle radici che lasciano inalterata la funzione considerata, egli riusciva poi a trattare senza difficoltà il caso dell'equazione di  $3^\circ$  e  $4^\circ$  grado, a determinare la risolvente di  $6^\circ$  grado per l'equazione di  $5^\circ$  grado e quella di  $10^\circ$  e  $15^\circ$  per l'equazione di  $6^\circ$  grado. Anche il tentativo di considerare le risolventi delle risolventi non faceva procedere Vandermonde verso la soluzione dell'equazione di grado  $\geq 5$ ; inoltre la ricerca di funzioni di cinque lettere che assumessero tre o quattro valori per permutazioni delle lettere si era mostrata inutile e ciò lo portava a concludere che non ne esistessero.

## Lagrange

Joseph-Louis Lagrange, nato Giuseppe Lodovico Lagrangia o ancora Giuseppe Luigi Lagrangia o Lagrange (Torino, 1736 - Parigi, 1813), fu un matematico e astronomo italiano per nascita e formazione e attivo nella sua maturità scientifica per ventuno anni a Berlino e per ventisei a Parigi.

L'opera di Lagrange di maggiore interesse per quanto riguarda le equazioni di grado superiore al 5° è la memoria *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, presentata all'Accademia di Berlino il 1770. Più che le *Meditationes* di Waring o l'articolo di Vandermonde, furono le *Réflexions* a influenzare in misura determinante i successi vi sviluppi della teoria delle equazioni.

Lagrange cambiò il modo di affrontare il problema passando da un approccio **a posteriori** ad un approccio **a priori**. Fino ad allora si era sempre cercato di applicare i metodi risolutivi già trovati per le equazioni di 3° e 4° grado alle equazioni di grado superiore o uguale a 5, ottenendo risolventi di gradi maggiori del grado del problema di partenza. Nelle *Réflexions* troviamo invece scritto:

«In questa memoria mi propongo invece di esaminare i differenti metodi trovati finora per la risoluzione algebrica delle equazioni, di ridurli a dei principi generali e di far vedere *a priori* perché questi metodi funzionano per il terzo e quarto grado, e vengono meno per i gradi successivi».

Lagrange esaminava quindi il caso delle equazioni di terzo e quarto grado, giungendo alla conclusione che tutti portavano alla considerazione delle equazioni risolventi, i cui coefficienti si possono esprimere razionalmente per mezzo dei coefficienti dell'equazione proposta e il cui grado era minore del grado dell'equazione proposta.

Nemmeno Lagrange giunse quindi ad una soluzione al problema, ma lo affrontò in maniera più critica, cercando di comprendere il più possibile i meccanismi che avevano portato alle formule di Cardano e Ferrari e spostando l'attenzione sulla teoria delle permutazioni delle radici. Nonostante la sua intima convinzione dell'impossibilità di trovare una soluzione per le equazioni di grado 5 e superiori, lasciò aperta la questione, dal momento che «questa applicazione richiede un numero troppo grande di ricerche e di combinazioni il cui successo è assai dubbio» per potersi impegnare in una simile impresa. Era sufficiente per lui aver posto «i fondamenti di una teoria che ci pare nuova e generale». Lagrange stabiliva poi numerosi e importanti teoremi delle funzioni razionali

delle radici di un'equazione, le radici n-esime dell'unità e il grado delle equazioni risolventi, tra cui il risultato fondamentale che «tutte le funzioni simili delle radici di una stessa equazione sono necessariamente date da equazioni dello stesso grado». Più semplicemente le funzioni delle radici che hanno lo stesso comportamento rispetto alle permutazioni delle radici stesse sono date da equazioni dello stesso grado e tale grado sarà  $n!$  oppure un sottomultiplo di  $n!$ . Attualmente questo risultato si trova sotto il nome di Teorema di Lagrange:

*Teorema 1.* In un gruppo finito l'ordine di un sottogruppo divide l'ordine del gruppo

### 11.2.3 Il teorema di Abel-Ruffini

#### Ruffini

Nel 1799 a Bologna uscì un volume dal titolo *Teoria generale delle equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*. Ne era autore il filosofo, medico chirurgo e matematico di Modena, Paolo Ruffini (1765-1822).

Ruffini si ispirò al lavoro precedentemente svolto da Lagrange e nella prefazione al libro scrisse:

«La soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto è sempre impossibile. Ecco un teorema troppo importante nelle Matematiche, che io credo, se pur non erro, di poter assere, e di cui la dimostrazione [...] l'immortale de la Grange ha somministrato» il fondamento. «Conveniva dunque premettere a questa, per la maggior sua intelligenza, un ristretto di simili riflessioni».

Nella dimostrazione Ruffini fece uso delle sue ricerche sul gruppo di sostituzione su  $n$  lettere -la cui nozione esplicita non si trova in Ruffini, ma si dovrà attendere Galois-, in particolare utilizzò il teorema per cui non esiste una funzione di cinque elementi che assuma, per ogni loro permutazione possibile, solo otto, quattro o tre valori distinti. In termini moderni:

*Teorema 2.* Il gruppo totale delle sostituzioni su 5 lettere non possiede sottogruppi di indice 8, 4 o 3.

In mancanza di un chiaro concetto di gruppo, per stabilire questo risultato Ruffini era costretto ad elencare tutte le  $120 = 5!$  permutazioni distinte ed

esaminarne i vari casi possibili.

Nonostante l'importanza del risultato di Ruffini sull'impossibilità di risolvere per radicali le equazioni di grado superiore o uguale a 5, il matematico italiano incontrò scetticismo e diffidenza da parte dei colleghi europei. Lo stesso Lagrange scrisse che Ruffini «non dava prove abbastanza certe delle cose che avanzava».

La “sfortuna” e il poco successo di Ruffini avevano due principali motivazioni: la prima era la natura stessa del risultato che aveva presentato alla comunità matematica. Il suo era un teorema di impossibilità, che metteva la parola fine alla ricerca di soluzioni per le equazioni algebriche di grado generico, che durava ormai da secoli. Per molti matematici era quasi impensabile l'idea di abbandonare anni di studi a causa della scoperta di un quasi anonimo matematico italiano.

A peggiorare la situazione vi era poi la poca chiarezza della dimostrazione fornita da Ruffini. Lo stesso Abel scrive:

*«Le premier, et si je ne me trompe, le seul qui avant moi ait cherché à démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales, est le géomètre Ruffini, mais son mémoire est tellement compliqué qu'il est très difficile de juger de la justesse de son raisonnement.»*

Con queste parole Abel attribuì la paternità della scoperta a Ruffini, ma allo stesso tempo fece notare la poca chiarezza dei suoi scritti.

Ruffini non si occupò solo della risolubilità delle equazioni di grado maggiore o uguale a 5 ma, in un capitolo del suo libro intitolato “Proprietà delle radici dell’unità” si occupò anche delle equazioni del tipo  $x^n - 1 = 0$  arrivando alla conclusione che le radici di tale equazione possono essere espressi in termini di potenze di una singola radice diversa da 1:

$$\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^n \quad \alpha \neq 1$$

## Abel

Niels Henrik Abel nacque nel 1802 in una famiglia molto povera, ma ebbe comunque l'opportunità di frequentare l'Università di Christiania, allora capitale della Norvegia. Si dedicò fin da giovanissimo al problema della soluzione generale delle equazioni di grado superiore al quinto e in un primo momento credette di averne trovata una, ma nel 1824 pubblicò una memoria, “Sulla risoluzione algebrica delle equazioni”, in cui giungeva alla conclusione opposta.

Egli dimostrava che non vi può essere nessuna formula generale, espressa in termini di operazioni algebriche da effettuare sui coefficienti di una equazione polinomia, che permetta di trovare le radici dell'equazione, se il grado di questa è superiore al quarto.

Come era capitato alcuni anni prima a Ruffini, la scoperta di Abel, che prenderà appunto il nome di Teorema di Abel-Ruffini, venne ignorata da grandi matematici come Cauchy. Lo stesso Abel scrisse:

«Ogni principiante trova grande difficoltà a farsi notare qui. Ho appena terminato un ampio trattato su una certa classe di funzioni trascendenti [...] ma il signor Cauchy non si è neanche degnato di dargli un'occhiata».

Dobbiamo infatti ricordare che a quell'epoca lo sbocco naturale per un buon matematico era l'insegnamento universitario e Abel, giovanissimo, non aveva ancora trovato un posto in alcuna università.

Le ricerche del matematico norvegese vennero pubblicate tra 1827 e 1828; nel 1829 Abel morì di tubercolosi e due giorni dopo la sua scomparsa pervenne una lettera con la quale si comunicava che era stato nominato professore di matematica all'Università di Berlino.

Nonostante la breve e travagliata vita il matematico norvegese trovò l'"anello mancante" alla dimostrazione di Ruffini: quest'ultimo aveva considerato solo funzioni *razionali* delle radici, quando esse sarebbero potute essere *irrazionali*, ma allora anche i valori ottenuti permutando le radici  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sarebbero risultate espressioni irrazionali di queste.

Tale questione venne risolta grazie al

**Teorema di Abel:** Se un'equazione è risolubile algebricamente, si può sempre dare alla radice una forma tale che tutte le funzioni algebriche di cui è composta possano esprimersi mediante funzioni razionali delle radici dell'equazione proposta.

#### 11.2.4 Gli scarabocchi di Galois

Uno dei motivi che non consentono a Lagrange di ottenere maggiori risultati sulla risoluzione delle equazioni algebriche di grado superiore al quarto è quello di aver trascurato gli "ambienti" dove collocare i coefficienti e le radici

di un'equazione algebrica. Questa idea fondamentale, intravista da Ruffini e Abel, costituisce il punto di partenza di Évariste Galois (1811-1832), il quale considera il campo di razionalità di un'equazione, ossia il campo i cui elementi si ottengono dai coefficienti dell'equazione attraverso le quattro operazioni aritmetiche ripetute un numero finito di volte.

Data un'equazione algebrica, e considerato un numero reale o complesso  $z$ , si dice campo ampliato del campo di razionalità dell'equazione il campo generato dai coefficienti e da  $z$ . Riportiamo le parole di Galois:

«Quando converremo di riguardare come note certe quantità, diremo che le aggiungiamo all'equazione che si tratta di risolvere. [...] Ciò posto, chiameremo razionale ogni quantità che si esprimerà in funzione dei coefficienti dell'equazione e di un certo numero di quantità aggiunte all'equazione e arbitrariamente convenute.»

Galois prosegue il suo ragionamento introducendo il concetto di gruppo di un'equazione (quello che sarà chiamato Gruppo di Galois). Vediamo di che cosa si tratta: anzitutto, egli considera per l'equazione  $f(x) = 0$  assegnata, di radici  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , un'espressione razionale  $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$  che assume valori tutti diversi fra loro per le  $n!$  sostituzioni sulle radici; indicate con  $s_1, \dots, s_{n!}$  queste sostituzioni, e con  $V_1 = V(s_1), \dots, V_{n!} = V(s_{n!})$  i corrispondenti valori di  $V$ , l'equazione di grado  $n!$

$$\varphi(y) = (y - V_1)(y - V_2) \cdots (y - V_{n!}) = 0;$$

detta **risolvente di Galois** ha i coefficienti esprimibili tramite i coefficienti della  $f(x) = 0$  [per le formule di Viéte] e una qualsiasi radice di  $f(x) = 0$  è esprimibile razionalmente tramite una qualsiasi radice di  $\varphi(y) = 0$ .

Consideriamo ora qualunque dei fattori irriducibili  $\vartheta(y)$  di  $\varphi(y)$ : si definisce allora come gruppo di Galois dell'equazione iniziale  $f(x) = 0$  il gruppo delle sostituzioni che mandano una qualunque radice di  $\vartheta(y) = 0$  in un'altra. Il gruppo di Galois  $G$  dipende dal campo rispetto a cui si studia la riducibilità della risolvente, che è inizialmente il campo di razionalità  $R$  dell'equazione di partenza; aggiungendo ad  $R$  un'espressione razionale  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  delle radici dell'equazione,  $G$  si abbassa al suo sottogruppo  $G_1$ , formato da tutte e sole le sostituzioni di  $G$  che lasciano la  $F$  numericamente invariata.

Risolvere l'equazione di partenza equivale allora ad ampliare gradualmente il suo campo di razionalità in modo che il gruppo di Galois si riduca alla sola sostituzione identica. In altri termini, risolvere un'equazione significa costruire

una serie di composizione

$$G = G_0, G_1, \dots, G_{i-1}, G_i, \dots, G_n = e,$$

ovvero una catena di sottogruppi di  $G$ , dove  $G$  è gruppo di Galois dell'equazione  $f(x) = 0$ ,  $G_i$  è il sottogruppo di  $G$  relativo all'ampliamento  $i$ -esimo, ed è normale in  $G_{i-1}$ ;  $e$  è l'identità.

Si dice che un gruppo è risolubile se tutti i quozienti  $G_{i-1}/G_i$  sono abeliani. L'impossibilità della risolubilità per radicali per un'equazione di grado superiore al quarto deriva allora dalla seguente osservazione: dato che il gruppo di Galois di un'equazione algebrica di grado  $n$  è il gruppo simmetrico  $S_n$ , e che per  $n \geq 4$  esso non è risolubile, si ha che non è possibile risolvere per radicali l'equazione generale di grado superiore al quarto.

Per concludere questa sezione diamo ora l'attuale definizione di gruppo di Galois

*Definizione 1.* Sia  $E$  una estensione di un campo  $F$ . Un  $F$ -automorfismo di  $E$  è un automorfismo

$$\psi : E \longrightarrow E$$

che fissa gli elementi di  $F$ , cioè tale che

$$\psi(x) = x$$

per ogni  $x$  in  $F$ . Gli  $F$ -automorfismi di  $E$  formano un gruppo

$$G = G(E, F)$$

che è detto **gruppo di Galois** dell'estensione.

Se  $p(x)$  è un polinomio separabile a coefficienti in un campo  $F$ , il gruppo di Galois di  $p$  è definito come il gruppo di Galois dell'estensione data dal campo di spezzamento  $E$  di  $p$  su  $F$ .

**ESEMPIO:** Sia  $E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$  e  $F = \mathbb{Q}$ . Per trovare tutti i possibili automorfismi di  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$  che fissano  $\mathbb{Q}$ , basta vedere quali possono essere le immagini di  $\alpha = \sqrt[3]{5}$ . Dato che il polinomio minimo di  $\alpha$  su  $\mathbb{Q}$  è  $x^3 - 5$ ,  $\psi(\alpha)$  deve essere un'altra radice dello stesso polinomio. Ora, oltre ad  $\alpha$ , le altre due radici di  $x^3 - 5$  sono complesse, e quindi non appartengono a  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ . Ne segue che l'unica possibilità è  $\psi(\alpha) = \alpha$ , ossia l'unico automorfismo di  $G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}), \mathbb{Q})$  è l'automorfismo identico:

$$G(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}), \mathbb{Q}) = id$$

### 11.2.5 Le *Disquisitiones* di Gauss

Gauss, uno dei più grandi matematici della storia, si era dimostrato un bambino prodigo, a giudicare dai numerosi aneddoti che sono stati tramandati sulle straordinarie capacità matematiche da lui rivelate fin dalla primissima infanzia. Compiuti gli studi a Gottinga, nel 1799 Gauss discusse la tesi di laurea all'università di Helmstedt. La dissertazione che concludeva la sua carriera di studente aveva per argomento la dimostrazione del «teorema fondamentale dell'algebra», il fatto cioè che «ogni funzione algebrica razionale intera di una variabile si può scomporre in fattori reali di primo o di secondo grado». Gauss ne dava una «demonstratio nova» e fondata «su principi del tutto diversi» rispetto a quelle proposte in tempi recenti da D'Alembert, Euler e Lagrange. Dal 1796 Gauss tenne un *Tagebuch* (diario) matematico, dove annotò oltre un centinaio di scoperte sui più svariati campi della matematica. Il diario si apre con le seguenti parole:

«*Principia quibus innititur sectio circuli, ac divisibilitas eiusdem geometrica in septemdecim partes.*»

Da oltre duemila anni si sapeva come costruire, con riga e compasso, il triangolo equilatero e il pentagono regolare, ma non si era riusciti a costruire nessun altro poligono il cui numero di lati fosse un numero primo. Il 30 marzo 1796 Gauss costruì secondo le regole euclidee il poligono regolare di 17 lati.

A periodi alterni continuò a scrivere nel suo *Tagebuch* e lo terminò nel 1814 con il 146-esimo appunto riguardante la teoria dei residui biquadratici. Il contenuto completo del diario verrà pubblicato solo nel 1901 a cura del matematico Felix Klein in un volume celebrativo del 150° anniversario della fondazione della Società Scientifica di Gottinga.

A due anni soltanto dalla pubblicazione della dissertazione di dottorato, Gauss pubblicò la sua opera più famosa, un trattato latino sulla teoria dei numeri intitolato *Disquisitiones arithmeticæ*. A quest'opera si deve principalmente l'elaborazione della terminologia e delle notazioni di quella branca della teoria dei numeri che è nota come l'algebra delle congruenze. La trattazione si apre con la definizione

«Se un numero  $a$  è divisore della differenza tra due numeri  $b$  e  $c$ , allora  $b$  e  $c$  si dicono numeri congrui, altrimenti sono incongrui; e lo stesso numero  $a$  viene chiamato modulo. Ciascuno dei due numeri viene detto residuo dell'altro, nel primo caso, e non-residuo nel secondo caso.»

La notazione adottata da Gauss era quella che è in uso ancor oggi, ossia

$$b \equiv c \pmod{a}$$

Egli procedette a costruire un'algebra basata sulla relazione di congruenza denotata dal segno  $\equiv$ , analoga alla comune algebra fondata sul concetto di uguaglianza.

Nella settima parte delle *Disquisitiones* Gauss si dedicò allo studio delle equazioni ciclotomiche, ossia quelle del tipo  $x^n - 1 = 0$ .

Analizziamo, come esempio, il semplice caso  $n = 5$ , risolto ben prima di Gauss. Poiché

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

la vera equazione da risolvere è

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

Poniamo  $z = x + \frac{1}{x}$  e dato che  $x^5 = 1$  risulta  $\frac{1}{x} = x^4$  e  $z = x^4 + x$ . Inoltre,

$$z^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 2 + x^3$$

La precedente equazione di quarto grado si può riscrivere attraverso l'equazione

$$z^2 + z - 1 = 0$$

in  $z$  e l'equazione

$$x^2 - zx + 1 = 0$$

in  $x$ . Risolvendo le precedenti si ottengono

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad x_{1,2} = \frac{z \pm i\sqrt{z+3}}{2}$$

da cui si ottengono le quattro soluzioni

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}, & x_3 &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}} \\ x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} + i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}, & x_4 &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4} - i\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}} \end{aligned}$$

espresse in termini di radicali.

Riportiamo ora in linea generale i ragionamenti di Gauss riguardo i polinomi ciclotomici.

Per semplicità, Gauss restrinse il suo campo di ricerca a valori di  $n$  primi e considerò il campo:

$$K = \left\{ \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-2} x^{n-2}, \quad \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Per studiare i numeri del campo  $K$  applicò la mappa  $\epsilon \rightarrow \epsilon^k$ ,  $0 < k < n$ , all'insieme delle radici dell'equazione  $x^n = 1$ , ossia al gruppo di Galois di  $K$  su  $\mathbb{Q}$ . Scrisse poi che la costruibilità di un poligono regolare di  $n$  lati dipende non dalle sue proprietà geometriche di simmetria, bensì dalla sua “simmetria algebrica”.

Gauss scelse poi in  $K$  la più conveniente base  $x, x^2, \dots, x^{n-1}$  e introdusse per ogni decomposizione  $n - 1 = e \cdot f$  del numero  $n - 1$  il sottoinsieme  $K_e$  i cui elementi sono della forma

$$\alpha_1 \cdot (f, 1) + \alpha_2 \cdot (f, 2) + \dots + \alpha_e \cdot (f, e),$$

dove i simboli  $(f, i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, e$  indicano i “periodi di Gauss”. Per definire un periodo di Gauss non consideriamo i numeri  $1, 2, \dots, n - 1$ , ma le corrispondenti classi dei residui modulo  $n$ . Poiché  $n$  è primo queste classi formano un gruppo moltiplicativo ciclico, e per ogni divisore  $f$  di  $n - 1$  questo gruppo contiene un unico sottogruppo con  $f$  elementi.

Indichiamo con  $G$  tale gruppo, con  $H(f)$  il sottogruppo e con  $H_{(f,i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, e$  la classe laterale di  $G$  modulo  $H(f)$ . Definiamo periodo di Gauss  $(f, i)$  la somma

$$(f, i) = \sum x^k, \quad k \in H_{(f,i)}.$$

In particolare, Gauss mostrò che il prodotto di periodi con lo stesso parametro  $f$  è una combinazione lineare dei periodi stessi,

$$(f, i) \cdot (f, j) = \sum a_{ijk}(f, k)$$

che equivale a dire che  $K_e$  è un campo. Dimostrò inoltre che  $K_{e_1} \subset K_{e_2}$  se e solo se  $e_1$  divide  $e_2$ .

Tornando a situazioni più concrete si accorse che gli elementi generatori del campo più grande soddisfacevano ad un'equazione i cui coefficienti appartenevano al campo più piccolo. Mostrò come ottenere tali equazioni e provò che erano risolvibili per radicali. Concluse infine con il seguente teorema:

**Teorema:** se  $n$  è primo e  $n - 1 = a_1 \cdots a_k$  è la sua fattorizzazione in numeri primi, allora la soluzione dell'equazione

$$x^{n-1} + \dots + x + 1 = 0$$

si riduce a risolvere esattamente  $k$  equazioni di gradi rispettivamente  $a_1, \dots, a_k$

In particolare, poiché  $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ , la soluzione dell'equazione  $x^{17} - 1 = 0$  si riduce a risolvere quattro equazioni quadratiche. Ciò significa che esiste un modo di costruire con riga e compasso un poligono di 17 lati.

Concludiamo questa sezione su Gauss con un altro teorema sulla costruzione di poligoni presente nelle *Disquisitiones*:

**Teorema:** È possibile costruire con riga e compasso un poligono di  $N$  lati se e solo se

$$N = 2^n \cdot p_1 \cdot p_2 \cdots$$

Con  $n$  intero positivo e  $p_i$  numeri primi di Fermat primi distinti.

Ricordiamo che i numeri primi di Fermat sono della forma  $p = 2^{2^n} + 1$  e non sono tutti primi.

Con questo teorema Gauss dimostrava che erano costruibili i poligoni di 3, 5, 17, 257 e 65537 lati (numeri di Fermat primi ottenuti con  $n = 1, 2, 3, 4$ ).

Vi era però un aspetto irrisolto lasciato da Gauss e che dopo 2 secoli non ha ancora trovato una soluzione:

I numeri primi di Fermat che sono effettivamente primi sono infiniti?

Il 18 luglio 2009 il GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) è riuscito a dimostrare con l'utilizzo di computer che il  $F_{19}$ , ossia in numero di Fermat che si ottiene con  $n = 19$ , ha un divisore e quindi non è primo. La cifra in questione è enorme e porta a credere che non vi siano altri numeri primi al di fuori di quelli sopra elencati, ma questa è solo una supposizione.

## 11.3 Nuove concezioni dell'algebra

### 11.3.1 L'Analytical society

Nel 1807, nell' "Edinburgh Review" un autore anonimo criticava la matematica inglese affermando che negli ultimi settanta anni non c'era stato un solo matematico inglese che avesse contribuito in maniera significativa allo sviluppo della meccanica celeste né, in generale, a quello della matematica.

La necessità di una profonda riforma della concezione della matematica, del calcolo in particolare, che facesse uscire l'Inghilterra dalla condizione in cui stagnava la ricerca, era sostenuta anche da Robert WoodHouse (1773-1827), un matematico inglese della Cambridge University. Un argomento che stava particolarmente a cuore a Woodhouse era la teoria dei numeri immaginari. Ricordiamo che solo pochi anni prima William Frend (1757-1841) si era vigorosamente opposto sia all'uso degli immaginari sia a quello dei numeri negativi, a suo dire «un gergo» al quale ricorrevano coloro che assumevano le cose per fede. Anche F. Maseres (1731-1824), personalità di spicco a Cambridge, considerava i numeri immaginari come qualcosa di «misterioso e fantastico [...] che non merita di essere chiamato ragionamento».

Woodhouse, attraverso l'uso dei «numeri impossibili», sottolineava gli aspetti formali del ragionamento matematico e tralasciava la chiarificazione del significato dei termini sui quali tale ragionamento si applicava. Diventava, quindi, del tutto irrilevante il reale significato dei simboli e l'attenzione si spostava sulle regole formali che governavano i segni.

L'autonomia dell'algebra si manifestava secondo Woodhouse non solo nell'«aritmetica degli immaginari», ma soprattutto nel calcolo, di cui consentiva una presentazione libera dai concetti newtoniani di moto e velocità istantanea pura.

I professori di Cambridge ritenevano le sue idee come «una pericolosa innovazione nel piano di studi esistente» e un tentativo di «sovvertire il gusto prevalente per la forma geometrica nella ricerca e nella dimostrazione dei risultati». L'influenza delle idee di Woodhouse finì poi per saldarsi in maniera estremamente feconda con una esigenza di rinnovamento dell'insegnamento: infatti nelle università inglesi e nella Royal Society i docenti erano in maggioranza nobili e vescovi, avvocati e ufficiali con qualche interesse per la scienza, ma ben pochi per la matematica.

Di questa evidente volontà di cambiamento si fecero promotori Charles Babbage (1792-1871) e un gruppo di suoi amici tra cui George Peacock (1791-1858) e l'astronomo J. William Herschel (1792-1871).

Dopo aver letto gli scritti di Woodhouse, Lagrange e il *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* di Lacroix, Babbage si impegnò a propagandare l'uso dei differenziali leibniziani. Per la preparazione di questo progetto Babbage e i suoi amici, chiamati dai docenti dei college «giovani infedeli», diedero vita ad una società, l'«Analytical Society». Nel 1813 uscì il volume *Memoires of the Analytical Society*, che Babbage avrebbe più significativamente voluto intitolare: «I principi del puro d-ism in opposizione alla dot-age dell'Università», dove d-ism stava ad indicare le d dei diffierenziali, ma anche *deism*, mentre con un irriverente gioco di parole «dot-age» indicava l'era dei «punti» (dot) di Newton, ma anche *dotage*, rimbambimento.

Negli anni successivi alla fondazione della società, mentre Babbage si lanciava nel progetto di una «analytical engine», una sorta di primordiale calcolatrice, Peacock si dedicò alla carriera universitaria, impegnandosi nell'insegnamento e svolgendo un ruolo di primo piano nella vita di società scientifiche come la Cambridge Philosophical Society e la British Association for the Advancement of Science, nate nel clima di riforma scientifica e culturale annunciato dall'Analytical Society.

Nel 1817 negli esami di analisi Peacock riuscì perfino a cambiare il sistema di notazione, abbandonando i simboli usati nel calcolo delle flussioni e sostituendo la notazione differenziale.

### 11.3.2 Peacock

Nel *Trattato d'algebra* pubblicato nel 1830 e nel *Report on the recent progress and present state of certain branches of analysis* del 1833 il matematico inglese George Peacock (1791-1858) indicò una nuova concezione dell'algebra. Peacock, come sopra citato, faceva parte dell'Analytical Society, fondata nel 1815 presso il Trinity College di Cambridge da un gruppo di matematici che avevano lo scopo di riformare l'insegnamento e la notazione del calcolo infinitesimale.

Egli propose nei due volumi della sua opera una distinzione tra due rami dell'algebra:

- algebra aritmetica,
- algebra simbolica.

Con la prima intendeva la generalizzazione dell'aritmetica in cui i simboli rappresentano i numeri naturali e le operazioni: l'algebra aritmetica applica

le regole come ad esempio la commutatività e l'associatività per addizione e moltiplicazione ai numeri; mentre la seconda indica l'aritmetica che ha per simboli quei numeri non soggetti a restrizioni e con le operazioni sempre eseguibili, cioè estende le regole usate nella prima parte a grandezze generali.

La differenza fondamentale tra questi due rami dell'algebra sta nell'applicabilità delle operazioni, ad esempio è considerata algebra simbolica quella che permette di eseguire  $a - b$  con  $a$  minore di  $b$  cosa che non era ammessa nell'algebra aritmetica. Nell'algebra aritmetica i simboli + e - venivano usati soltanto con il loro significato originario, Peacock aveva in mente infatti i numeri naturali. Un altro esempio è quello del calcolo di  $\frac{a}{b}$ : esso è possibile nell'algebra aritmetica solo se  $b$  è un multiplo di  $a$ , mentre nell'algebra simbolica questo calcolo ha significato per qualsiasi valore di  $a$  e di  $b$ .

Nel 1834 Peacock affermava:

«Nell'algebra aritmetica, le definizioni delle operazioni determinano le regole; nell'algebra simbolica le regole determinano il significato delle operazioni, o più propriamente parlando, essi forniscono i mezzi per interpretarle».

Egli definì l'algebra simbolica come la

«scienza del ragionamento generale con linguaggio simbolico»

mentre l'algebra in sé la

«scienza dei simboli e delle loro combinazioni, costruite su loro proprie regole, che possono applicarsi all'aritmetica e a tutte le altre scienze per interpretazione: in questo modo, l'interpretazione segue e non precede le operazioni dell'algebra e i loro risultati».

D'altra parte l'algebra simbolica non aveva una sua base solo nell'algebra aritmetica, ma anche nella geometria: geometria e aritmetica sono, per Peacock, *science of suggestion* per l'algebra astratta, scienze subordinate che suggeriscono quali operazioni definire sui simboli. Da queste idee formulò il **Princípio delle forme equivalenti**:

«Se una qualunque forma è algebricamente equivalente a un'altra, se espressa in simboli generali, deve essere vera qualunque cosa i simboli denotino. Reciprocamente, se scopriamo una forma equivalente nell'algebra aritmetica o in una qualunque altra scienza

subordinata, quando i simboli sono generali nella forma ma specifici nella natura, la stessa deve continuare ad essere una forma equivalente se i simboli sono generali sia nella natura sia nella forma».

Fondamentale era quindi il ruolo dell'aritmetica che, anche se scienza subordinata, stabiliva le regole di combinazione dei segni per la correttezza dell'algebra simbolica; senza le regole di combinazione dei segni date dall'aritmetica nessuna algebra simbolica poteva ritenersi "corretta o filosofica".

Vediamo un esempio: se  $a$  è un numero razionale positivo e  $n \in \mathbb{N}$ , allora per definizione  $an$  è il prodotto di  $a$  per sé stesso ripetuto  $n$  volte. Da questa definizione segue che  $a^m a^n = a^{m+n}$ . Per il principio delle forme equivalenti Peacock affermava che nell'algebra simbolica  $a^m a^n = a^{m+n}$  qualunque fosse la natura della base  $a$  o degli esponenti  $m$  e  $n$ .

La forma algebrica di questo postulato poco chiaro rappresentò per certi aspetti un ostacolo al progresso dell'algebra moderna poiché suggeriva l'idea che le leggi dell'algebra fossero le stesse, quali che fossero i numeri o oggetti all'interno del campo algebrico. La non veridicità di questo principio fu poi evidente con la diffusione dei quaternioni che rivelarono l'esistenza di un sistema algebrico con tutte le proprietà dei numeri reali e complessi tranne la commutatività della moltiplicazione. Se infatti si considerano le due espressioni  $x * y$  e  $y * x$ , esse sono forme equivalenti nell'algebra aritmetica, ossia se per  $x$  e  $y$  si intendono numeri naturali e per l'operazione il prodotto. D'altra parte però queste due forme non sono equivalenti se rappresentano il prodotto tra quaternioni (o matrici). Nonostante questo Peacock ha il merito di aver dato un ruolo nella matematica agli apparati formali e ai linguaggi simbolici.

Augustus De Morgan (1806-1871) condivise i risultati di Peacock ma aggiunse l'astrazione ai simboli delle operazioni.

Egli si preoccupò di non dare nessun significato specifico non solo alle lettere usate, ma neanche ai simboli di operazione; le lettere A, B,C potevano essere interpretate come vizi e virtù e i simboli + e - come ricompensa e punizione.

«Fatta eccezione per un solo caso, nessun termine o segno aritmetico o algebrico possiede il minimo significato in tutto questo capitolo, che tratta di simboli e delle leggi delle loro combinazioni, e presenta un'algebra simbolica che può in seguito diventare la grammatica di centinaia di algebre differenti dotate di significati specifici».

Forse influenzato dalla filosofia kantiana, era convinto che le leggi fondamentali dell’algebra dovessero essere applicabili a qualsiasi sistema algebrico. Egli osservò anche che le operazioni rimanevano immutate nel passaggio dai reali (l’ “algebra singola”) ai complessi (l’ “algebra duplice”). Dopo tali considerazioni si convinse dell’impossibilità di sviluppare tipi di algebre “triple” o “quadruple”, idee di cui ci si dovette in parte ricredere. Nel 1867, infatti, Hankel dimostrò che l’algebra dei complessi era la più generale possibile che rispettasse le leggi fondamentali dell’aritmetica e Hamilton nel 1843 definì un corpo a quattro dimensioni in cui veniva meno la proprietà associativa del prodotto.

### 11.3.3 Hamilton

Prima di soffermarci sui contributi algebrici del matematico irlandese sir William Rowan Hamilton (1805-1865) ricordiamo che lavorò anche su altri campi di ricerca. Particolarmenete interessante è il concetto di *temporal step* ossia di “intervallo di tempo”, descritto nel lungo articolo del 1835 intitolato *Theory of coniugate functions, or algebra couples; with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time*. I concetti di tempo «puro», del prima e del dopo e della simultaneità e l’idea di una progressione continua e indefinita dal passato attraverso il presente verso il futuro erano per Hamilton frutto del «pensiero, o intuizione o forma della mente umana», in cui si potevano scorgere i principi dell’algebra.

Egli conferì alla nozione di tempo la caratterizzazione di ente algebrico, a cui assegnare regole come, ad esempio, una relazione d’ordine: data una coppia di momenti  $(A, B)$  possiamo dire  $A < B$ , o  $A > B$  o  $A = B$  a seconda che il momento  $A$  preceda, segua o concida con il momento  $B$ .

Egli introdusse poi una relazione di analogia fra le coppie di momenti che corrispondeva all’intuizione di uguali intervalli di tempo. In questo modo il concetto di numero intero era definito da Hamilton mediante una relazione su coppie analoghe di *temporal steps*, che traduceva l’idea intuitiva di successione di uguali intervalli di tempo a partire da un momento iniziale arbitrariamente scelto.

Gli interi erano poi da Hamilton detti positivi o contrapositivi (negativi) a seconda che gli intervalli di tempo fossero presi in una direzione o nell’altra dell’ordinamento temporale secondo l’intuizione naturale. Con argomenti incompleti ma moderni Hamilton costruiva poi, a partire dagli interi, il campo dei numeri «frazionari» e con assai più difficoltà costruiva i numeri reali e

introduceva delle operazioni su di essi.

Quello di Hailton fu il primo serio passo verso l'**aritmetizzazione dell'analisi e la costruzione assiomatica dei numeri reali**.

Dalla metà del Cinquecento era nota, per merito di Bombelli, l'unità immaginaria  $i$ , ossia quel numero tale che  $i^2 = -1$ . Nel 1835 Hamilton concepì per la prima volta l'idea di estendere la costruzione di  $\mathbb{C}$  a partire da  $\mathbb{R}$ , esibendo i numeri complessi come coppie ordinate di reali e definendo un opportuno prodotto con cui  $\mathbb{C}$  è un campo. Tali coppie di numeri reali erano soggette alle seguenti regole di addizione e moltiplicazione:

$$(a + b) + (\alpha + \beta) = (a + \alpha, b + \beta), \\ (ab)(\alpha\beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha).$$

Con questa interpretazione l'estrazione della radice di  $-1$ , considerata impossibile nei reali, si traduceva nell'estrazione della radice quadrata della coppia  $(-1, 0)$  con risultato la coppia  $(0, 1)$ . Hamilton definì *unità primaria*  $(1, 0)$  e *unità secondaria* la coppia  $(0, 1)$ .

La ricerca di Hamilton era orientata alla generalizzazione di questo concetto a n-uple di reali, in particolare per trovare un'algebra a tre dimensioni che potesse fornire una matematizzazione dello spazio tridimensionale, come quella che i complessi grazie a Gauss avevano fornito per il piano. Tuttavia la ricerca di una soluzione a questo problema non sembrava vicina. Per analogia con i complessi cercava una terna che si potesse scrivere nella forma  $x + iy + jz$  dove  $i^2 = -1$  e per analogia  $j^2 = -1$ . Facendone il quadrato si aveva:

$$(x + iy + jz)^2 = (x^2 - y^2 - z^2) + i(2xy) + j(2xz) + ij(2yz)$$

Per rimanere con una terna come risultato rimaneva inspiegato il termine  $ij(2yz)$  e il porre  $ij = 0$  non portava a nessun risultato. D'altra parte questo termine si sarebbe potuto eliminare supponendo  $ij = -ji$  negando la proprietà commutativa del prodotto. Ci sono due ipotesi su come Hamilton avesse pensato alla possibilità di sistemi in cui non valesse la proprietà commutativa: o tramite Eisenstein (1823-1852) che aveva mostrato a Hamilton i sistemi di matrici in cui il prodotto non è commutativo, o forse considerando proprio le rotazioni dello spazio che tra loro non commutano. Allora Hamilton affermò:

«Mi si presentò l'idea che noi dobbiamo ammettere, in un qualche senso, una quarta dimensione dello spazio se vogliamo calcolare

con le terne; o, trasferendo il paradosso all’algebra, dobbiamo ammettere un terzo simbolo immaginario  $k$ , da non confondere con  $i$  o  $j$ , ma uguale al prodotto del primo per il secondo; e quindi fui portato a introdurre quaternioni come  $a + bi + cj + dk»$

dove  $a, b, c, d$  sono coefficienti reali. Le regole fondamentali del prodotto per i quaternioni che Hamilton definì sono:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ ij &= k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\ ji &= -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j \end{aligned}$$

Hamilton rimase molto entusiasta di questa scoperta tanto che in una lettera al figlio leggiamo che il 16 ottobre 1843, preso dall’intuizione, incise sul ponte Brougham a Dublino la soluzione appena trovata.

I restanti 22 anni della sua vita li dedicò allo studio e allo sviluppo del corpo  $\mathbb{H}$  dei quaternioni trovando innumerevoli applicazioni nella geometria, nell’ottica e nella meccanica. Il suo sogno era scrivere in formalismo quaternionale le equazioni della Fisica allora conosciute, in particolare correlare il **laplaciano** di una funzione al quadrato dell’operatore:

$$\begin{aligned} \nabla &= i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \\ -\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Fu lui infatti ad inventare il nome e la forma del “nabla” (il nome viene da un antico strumento musicale ebraico di forma triangolare).

La sua ambizione e passione per la fisica lo spinsero a cercare di riscrivere le neonate equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico in termini quaternionali, ma purtroppo non visse abbastanza a lungo per portare a termine l’impresa.

## I quaternioni

Diamo di seguito la definizione e alcune proprietà dei quaternioni. Si osservi che utilizziamo la notazione moderna e non quella di Hamilton.

*Definizione 2.* L'insieme  $H$  dei quaternioni è un  $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale che ha per elementi combinazioni lineari nella forma  $a + bi + cj + dk$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  munito di un prodotto che soddisfa le seguenti condizioni:

1. il prodotto è bilineare;
2.  $q = 1 + 0i + 0j + 0k$  è l'elemento unità;
3. valgono:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1 \\ ij &= k; \quad jk = i; \quad ki = j; \\ ji &= -k; \quad kj = -i; \quad ik = -j. \end{aligned}$$

Si noti che dalla bilinearità e dalle regole 3) il prodotto risulta essere associativo.

L'applicazione da  $\mathbb{H}$  in  $\mathbb{R}^4$  che ad un quaternione  $q = a + bi + cj + dk$  associa le sue coordinate  $(a, b, c, d)$  è un isomorfismo di spazi vettoriali. Pertanto possiamo scrivere  $q = a + bi + cj + dk = (a, v)$  dove  $a \in \mathbb{R}$  è detta componente scalare, mentre  $v = (b, c, d) \in \mathbb{R}^3$  è detta componente vettoriale. Con questa notazione si ha:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1, v_1) + (a_2, v_2) = (a_1 + a_2, v_1 + v_2) \\ q_1 * q_2 &= (a_1 a_2 - v_1 \cdot v_2, a_1 v_2 + a_2 v_1 + v_1 \times v_2) \\ \bar{q} &= (a, -v) \\ \|q\|^2 &= a^2 + \|v\|^2 \end{aligned}$$

dove con  $\cdot$  e  $\times$  denotiamo l'usuale prodotto scalare e vettoriale rispettivamente così definiti: dati  $v_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k$  e  $v_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k$

$$v_1 \cdot v_2 = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2;$$

$$v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} c_1 d_2 - c_2 d_1 \\ d_1 b_2 - b_1 d_2 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix}$$

Questo aspetto ci fa osservare il legame tra il prodotto tra quaternioni e i prodotti vettoriale e scalare tra vettori. La descrizione vettoriale e alcune altre proprietà dei quaternioni permettono di dimostrare che ogni rotazione

dello spazio tridimensionale può essere considerata come un prodotto di tre particolari quaternioni. In questo modo la ricerca di Hamilton di rappresentare lo spazio così come i complessi facevano per il piano veniva risolta. Infatti ogni quaternione  $q$  di norma unitaria può essere scritto in modo unico nella forma  $q = (\cos \vartheta, \sin \vartheta u)$  con angolo  $\vartheta \in [0, \pi]$  e  $u \in \mathbb{S}^2$ , dove  $\mathbb{S}^2$  è la sfera unitaria, cioè  $u \in \mathbb{R}^3$  e  $\|u\| = 1$ .

Si può mostrare quindi che ogni quaternione  $q$  di norma unitaria rappresenta un elemento di  $SO(3)$ , gruppo speciale delle rotazioni di  $\mathbb{R}^3$ , e cioè si ha che i quaternioni descrivono attraverso il prodotto di al più tre elementi le rotazioni dello spazio. Era proprio questo l'obiettivo di Hamilton.

Poco tempo dopo Frobenius (1849-1917) dimostrò il seguente teorema:

*Teorema 3.* Ogni algebra divisoria unitaria e normata è isomorfa ad una delle seguenti:  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$ ,  $\mathbb{O}$ . In particolare non ne esistono in dimensione  $2^t$  con  $t \geq 4$ .

Spazio	Dim su $\mathbb{R}$	Si perde
$\mathbb{R}$	$1 = 2^0$	-
$\mathbb{C}$	$2 = 2^1$	ordine
$\mathbb{H}$	$4 = 2^2$	commutatività
$\mathbb{O}$	$8 = 2^3$	associatività

Ciò significa che non esiste un'algebra (associativa) su  $\mathbb{R}$  di dimensione tre e spiega il fallimento di Hamilton (e di De Morgan) nella sua originaria ricerca.

### Il problema dei 4 colori

In una delle rare occasioni in cui Hamilton lasciò da parte i quaternioni, egli schizzò un altro calcolo simbolico sulle radici dell'unità, l'*'icosian calculus*, un calcolo che in realtà anticipava questioni di moderna teoria dei grafi. Ad Hamilton sfuggì invece un altro problema di teoria dei grafi, postogli nel 1852 da De Morgan:

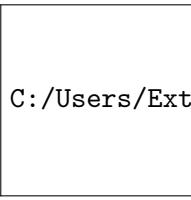
«Un mio studente -scriveva De Morgan- dice che se una figura è divisa in un qualunque modo e le parti colorate in maniera diversa, in modo tale che figure con in comune una parte qualunque del contorno siano colorate in maniera differente, possono essere necessari quattro colori ma non di più... Domanda: non si può inventare [una figura] che renda necessari cinque colori o più?»

Nella risposta Hamilton scriveva che non avrebbe potuto affrontare entro breve tempo il problema del «quaternione di colori». In realtà non si occupò mai della cosa e Francis Guthrie, lo studente di De Morgan, dovette aspettare oltre un secolo per avere una risposta.

Attualmente la questione è conosciuta come il **teorema dei quattro colori**:

*Teorema 4.* Data una regione piana divisa in regioni connesse, come ad esempio una carta geografica politica, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione facendo in modo che regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore.

Lab/Desktop/RelazioneMEPVS/quattrocolori.png



C:/Users/Extreme Lab/Desktop/Relazion

Dimostrare che ne siano strettamente necessari almeno quattro è particolarmente complesso, tanto che la dimostrazione di questo teorema ha richiesto, tra l'altro, un estensivo ricorso al computer, per una delle prime volte nella storia della matematica.

La dimostrazione definitiva del teorema è stata fornita nel 1977 da parte di Kenneth Appel e Wolfgang Haken, due matematici dell'Università dell'Illinois, grazie a un complesso algoritmo informatico.

La dimostrazione si basa sulla riduzione del numero infinito di mappe possibili a 1936 configurazioni per le quali la validità del teorema viene verificata caso per caso dal computer. Qualsiasi mappa può infatti essere ricondotta a un numero finito, sebbene assai elevato, di topologie “notevoli” tramite operazioni che modificano le relative posizioni delle regioni che la costituiscono, ma non le proprietà topologiche della mappa stessa.

Per ridurre al minimo la possibilità di errore, il programma fu eseguito su due diverse macchine con due algoritmi indipendenti facendole lavorare per migliaia di ore. Alla fine, servirono più di 500 pagine per trascrivere a mano tutte le verifiche che costituivano la dimostrazione.

Il rivoluzionario utilizzo di algoritmi informatici per verificare l'esattezza della congettura scatenò grandi polemiche sull'affidabilità di questi metodi. Il fatto che la dimostrazione fosse basata sull'analisi di una moltitudine di casi discreti portò alcuni matematici a contestarne l'effettiva validità, sia per l'impraticabilità di una verifica manuale di tutti i casi possibili, sia per l'impossibilità

di avere la certezza che l'algoritmo fosse implementato correttamente. Non è possibile infatti dimostrare la correttezza di un algoritmo.

Sorge dunque una domanda; è lecito utilizzare i calcolatori per fornire delle dimostrazioni?

Per il problema dei quattro colori si può dire soltanto che, nonostante le accuse di scarsa eleganza, finora nell'algoritmo non è mai stato trovato alcun errore.

#### 11.3.4 L'algebra di Boole

Agli inizi dell'Ottocento il linguaggio della matematica aveva per oggetto simboli dall'interpretazione ben definita e in generale riconducibili a quantità fisiche o geometriche. Il compito di verificare la correttezza dei linguaggi e dei significati spettava alla filosofia, finché alcuni matematici francesi come Condillac (1715-1780), Condorcet (1743-1794) e Gergonne (1771-1859) suggerirono di vedere nell'algebra un linguaggio che attraverso le sue regole conduce alla perfezione dell'arte di ragionare.

«Si ragiona in pratica con delle parole così come in algebra si fanno i calcoli con delle lettere, e così si può portare a termine esattamente un calcolo algebrico senza avere la minima idea del significato dei simboli su cui si lavora, si può del pari seguire un ragionamento senza conoscere affatto il significato dei termini in cui esso è formulato.» (Gergonne 1817)

Dunque la tesi del filosofo Kant, che aveva dichiarato la logica una materia ormai “chiusa e compiuta” dal momento che non aveva avuto più nessuno sviluppo, veniva confutata dagli interessi di francesi e non solo. Anche il filosofo scozzese William Hamilton (1788-1856) (da non confondere con William Rowan Hamilton dei quaternioni!) azzardava l'idea che la matematica fosse priva di valore logico e fu peraltro coinvolto in una disputa con De Morgan sull'attribuzione di alcune teorie.

L'accendersi della polemica tra Hamilton e De Morgan fornì a Boole l'occasione per riprendere «trame, ormai quasi dimenticate, di indagini precedenti». Così nel 1847, su invito di De Morgan, George Boole (1815-1864) pubblicò *The mathematical analysis of logic*, il cui intento era quello di rivendicare per il calcolo logico «un posto tra le forme di analisi matematica ormai generalmente riconosciute».

«Coloro che hanno familiarità con lo stato attuale della teoria dell'algebra simbolica, sono consapevoli che la validità dei pro-

cedimenti dell’analisi non dipende dall’interpretazione dei simboli che vi sono impiegati, ma soltanto dalle leggi che regolano la loro combinazione. Ogni sistema di interpretazione che non modifichi la verità delle relazioni che si suppone esistano tra tali simboli è egualmente ammissibile.»

Già Peacock nella sua *Algebra* del 1830 aveva avanzato l’idea che i simboli degli oggetti dell’algebra non rappresentavano necessariamente dei numeri e De Morgan, poco dopo, sostenne che anche le interpretazioni dei simboli delle operazioni erano arbitrarie. La concezione dell’algebra di Boole era estremamente formalista: la matematica non doveva più essere considerata la scienza dei numeri e delle grandezze continue. La caratteristica essenziale delle matematica non era tanto il contenuto quanto la sua forma.

«Potremmo convenientemente assegnare alla matematica il carattere di un vero e proprio Calcolo, ossia di un metodo basato sull’impiego di Simboli, le cui leggi di combinazione sono note e generali, e i cui risultati ammettono un’interpretazione coerente... È sulla base di questo principio generale che propongo di stabilire il Calcolo della Logica e che gli rivendico un posto fra le forme riconosciute di Analisi matematica.»

Nel 1854 Boole pubblicò *Investigation of the Laws of Thought*, con cui gettò le basi sia della logica formale, sia di un nuovo tipo di algebra, nota come algebra booleana. In questa nuova algebra i simboli non servivano più per descrivere solo oggetti ma classi di oggetti: si serviva delle lettere  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ... per rappresentare gli oggetti di un sottoinsieme di cose (numeri, punti, idee o altre entità) scelte da un insieme universale, la cui totalità era indicata con il simbolo 1.

Nello specifico Boole introduceva il simbolo 1 «per rappresentare l’universo, intendendo che esso comprende ogni classe concepibile di oggetti, sia che questi esistano realmente sia che non esistano» e i simboli,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , ... per rappresentare i membri di ciascuna classe, in quanto membri di quella classe. Infine assumeva l’esistenza di simboli  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , ..., detti «simboli elettivi», per denotare la nostra capacità di «separare, con un atto della mente, quegli oggetti che appartengono a una data classe e di contemplarli a parte dal resto».

Boole definì poi delle operazioni o «leggi di combinazioni» da poter applicare ai simboli elettivi. Con  $x+y$  denotava un atto di «elezione» e stava ad indicare l’unione dei due sottoinsiemi  $x$  e  $y$ , ossia l’insieme formato da tutti gli elementi

contenuti in  $x$  o in  $y$ . Il segno di moltiplicazione  $\times$  rappresentava l'intersezione di insiemi, così  $x \times y$  rappresentava quegli elementi del sottoinsieme  $x$  che erano contenuti anche nel sottoinsieme  $y$ . Si noti che Boole, diversamente da De Morgan, usava l'unione esclusiva, che non ammetteva elementi comuni all'insieme  $x$  e all'insieme  $y$ ; nell'odierna algebra booleana si usa il simbolo  $+$  nel senso di unione inclusiva di insiemi che possono avere elementi in comune. Inoltre valgono le seguenti leggi:

$$\begin{array}{ll} x(u+v) = xu+xv & \text{legge distributiva} \\ xy = yx & \text{legge commutativa} \\ x^2 = x^n = x & \text{«index law»} \end{array}$$

L'«index-law» assicura che «il risultato di un dato atto di elezione, compiuto due volte o un qualsiasi numero di volte in successione, è il risultato dello stesso atto compiuto una volta sola» ed è la legge caratteristica delle operazioni sui simboli elettivi.

L'aver definito la somma per classi disgiunte consente in maniera naturale a Boole di introdurre l'operazione  $-$  come sua inversa. In particolare, la classe  $1 - x$  denota la scelta nell'universo di tutti gli elementi che sono non- $X$ . L'introduzione poi della classe nulla, 0, e di un simbolo opportuno  $v$  per esprimere in termini di classi il quantificatore «alcuni» consentì a Boole di esprimere le proposizioni A, E, I, O della logica tradizionale:

$$\begin{array}{ll} \text{A) Ogni } X \text{ è } Y & x \cdot (1 - y) \\ \text{E) Nessun } X \text{ è } Y & x \cdot y = 0 \\ \text{I) Alcuni } X \text{ sono } Y & x \cdot y = v \\ \text{O) Alcuni } X \text{ non sono } Y & x \cdot (l - y) = v \end{array}$$

dove  $v$  è una classe «indefinita sotto tutti gli aspetti, tranne il fatto di contenere almeno un elemento».

Ma l'algebra di Boole non era una semplice trascrizione simbolica della sillogistica tradizionale. Nel capitolo dedicato alle proposizioni ipotetiche Boole infatti affermava che i simboli d'ora in avanti non avrebbero denotato più «oggetti e classi di oggetti, ma verità di proposizioni». I simboli  $X, Y, Z, \dots$  rappresentavano ora proposizioni, l'universo ipotetico 1 comprendeva «tutti i casi e gli stati di cose concepibili» e un simbolo elettivo  $x$  sceglieva «quei casi in cui la proposizione corrispondente  $X$  era vera».

Per una data proposizione  $X$  si possono dare soltanto due casi:

1. X è vera

2. X è falsa

«Poiché questi due casi, presi insieme, formano l’Universo della Proposizione, e poiché il primo di essi è determinato dal simbolo elettivo  $x$ , il secondo è determinato dal simbolo elettivo  $1 - x$ ».

Se si associano per esempio le proposizioni X e Y, il numero dei casi possibili è dato da Boole con lo schema

Casi	Espressioni elettive
X vera, Y vera	$x \cdot y$
X vera, Y falsa	$x \cdot (1 - y)$
X falsa, Y vera	$(1 - x) \cdot y$
X falsa, Y falsa	$(1 - x) \cdot (1 - y)$

Mediante queste tecniche Boole riuscì non solo a rappresentare i modi di ragionamento della logica tradizionale, ma anche a generalizzare i processi di inferenza, lasciando intravedere la **possibilità di un calcolo simbolico** del tutto **generale**, svincolato dai canoni del modello aristotelico.

Nell’ultima parte dell’ *Analysis* infine egli accennava anche ad una diversa interpretazione della sua algebra, attribuendo ai simboli elettivi il significato di probabilità.

Oggi l’algebra di Boole viene largamente usata non solo da matematici puri, ma anche da altri scienziati e tecnici che la applicano a problemi di assicurazione e alla teoria dell’informazione.

Le notazioni sono notevolmente cambiate rispetto a quelle in uso al tempo di Boole

Boole	Oggi	Significato
+	$\cup$	unione
$\times, \cdot$	$\cap$	intersezione
0	$\phi$	insieme nullo

ma i principi fondamentali sono ancora quelli da lui formulati più di un secolo fa.

## 11.4 Concetto di struttura

Lo sviluppo settoriale della matematica nell'Ottocento fece nascere la naturale esigenza di una comprensione unitaria della matematica e richiese quindi la ricerca di strumenti concettuali in grado di abbracciare gli elementi fondamentali delle varie teorie. Con questo obiettivo di unificare dal punto di vista concettuale nozioni che venivano studiate in modo indipendente, come ad esempio numeri o funzioni, nasce il concetto di struttura.

La prima struttura che viene formalizzata e studiata è quella di gruppo, di cui vedremo il percorso dopo aver esposto l'evoluzione dell'algebra. Di seguito presenteremo i lavori di Dedekind e Kronecker, i cui studi influenzano ancora oggi la geometria algebrica moderna anche se i loro risultati iniziarono ad essere compresi e considerati solo intorno al 1920.

### 11.4.1 Dedekind

Il tedesco Richard Dedekind (1831-1916) si dedicò inizialmente allo studio di Abel e Galois tenendo a Gottinga il primo corso universitario sulla Teoria di Galois. Nel 1894 pubblicò i *Supplement* che accompagnavano i testi di Lagrange e che contribuirono allo sviluppo della Teoria dei numeri e alla nascita dell'algebra astratta. Van der Waerden scrive:

«Evariste Galois e Richard Dedekind sono coloro che hanno dato all'algebra la sua struttura. L'ossatura portante si deve a loro».

Dedekind indroduisse il concetto di *corpo* (*Körper*) inizialmente denotato come dominio razionale (*Rationales Gebiet*). Con *corpo* Dedekind intende quello che noi oggi chiamiamo campo:

«Per corpo intendiamo ogni sistema di infiniti numeri reali o complessi, che sia in sé chiuso e completo in modo tale che l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione di due qualunque di questi numeri dia sempre come risultato un numero dello stesso sistema»

(Dedekind 1871).

Le definizioni che diamo oggi sono:

*Definizione 3.* Un corpo è un anello con unità tale che ogni elemento non nullo ha un inverso.

*Definizione 4.* Un anello  $(R, +, *)$  è un insieme dotato di due operazioni binarie, indicate con  $+$  e  $*$  tali che:

$$+ : R \times R \rightarrow R \\ (a, b) \rightarrow a + b$$

$$* : R \times R \rightarrow R \\ (a, b) \rightarrow a * b$$

che prendono il nome di addizione e moltiplicazione e che rispettano le seguenti condizioni:

- A1)  $+$  è *associativa*, cioè  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,  $\forall a, b, c \in R$ ;
- A2) esiste un elemento  $0$  che è neutro rispetto a  $+$ , cioè  $a + 0 = 0 + a = a$ ;  $\forall a \in R$ ;
- A3)  $\forall a \in R$  esiste un elemento  $-a$ , detto opposto di  $a$ , tale che  $a + (-a) = 0$ ;
- A4)  $+$  è *commutativa*, cioè  $(a + b) = (b + a)$ ,  $\forall a, b \in R$ ;
- A5)  $*$  è *associativa*, cioè  $(a * b) * c = a * (b * c)$ ,  $\forall a, b, c \in R$ ;
- A6) valgono le seguenti leggi distributive:  $a * (b + c) = a * b + a * c$  e  $(a + b) * c = a * c + b * c$ ,  $\forall a, b, c \in R$ .

Dedekind riportava come corpo più semplice quello dei razionali  $\mathbb{Q}$  e quello dei complessi  $\mathbb{C}$  come corpo più grande. Egli studia i numeri algebrici e i campi del tipo  $\mathbb{Q}(\alpha)$  con  $\alpha$  algebrico: si tratta del più piccolo campo contenente sia  $\mathbb{Q}$  sia  $\alpha$ . Ricordiamo che un elemento appartenente a  $\mathbb{R}$  è detto *algebrico* se soddisfa un'equazione polinomiale nella forma  $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , dove  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_i \in \mathbb{R}$ .

Volendo estendere il teorema di fattorizzazione ai campi di numeri algebrici, Dedekind definì il concetto di **ideale**: dato un corpo  $K$

«fondiamo la teoria dei numeri contenuti in  $I$ , cioè di tutti i numeri interi del corpo  $K$  sul seguente nuovo concetto: un sistema  $A$  di infiniti numeri contenuti in  $I$  si chiama un ideale se soddisfa le due condizioni seguenti:

1. la somma e la differenza di due qualunque numeri di  $A$  sono ancora numeri appartenenti ad  $A$ ;
2. ogni prodotto di un numero di  $A$  e di un numero di  $I$  è ancora un numero di  $A$ .»

In termini odierni un ideale di un anello è un sottogruppo additivo dell'anello, chiuso per il prodotto per elementi dell'anello. Un ideale è detto principale se è generato da un solo elemento. Una volta definito il prodotto di due ideali  $A$  e  $B$ , è possibile anche dire che  $I$  divide  $J$  se esiste un ideale  $K$  tale che  $J = IK$ . Si noti che la divisibilità degli ideali è strettamente connessa all'inclusione.

Diremo che

$$(m) \subseteq (n), n|m;$$

cioè l'ideale generato da  $m$  è contenuto nell'ideale generato da  $n$  se e solo se  $n$  divide  $m$ .

Questa proprietà è particolarmente chiara nell'anello degli interi. Ad esempio si ha che  $(2)$  è l'ideale generato da  $2$  e quindi contiene tutti i suoi multipli, mentre  $(4)$  contiene tutti i multipli di  $4$ . Diciamo che  $2$  divide  $4$  perché è un suo divisore, d'altra parte  $(4) \subseteq (2)$  perché tutti i multipli di  $4$  sono anche multipli di  $2$ , ma  $6$  è un esempio di multiplo di  $2$  che non è multiplo di  $4$ , quindi  $6 \in (2)$  ma  $6 \notin (4)$ .

Per ideale primo si intende un ideale che ha come divisori solo se stesso e l'unità:  $I$  è *primo* se  $ab \in I$  allora  $a \in I$  o  $b \in I$ . Questo permette di giungere ad un teorema che afferma che ogni ideale può essere fattorizzato in maniera unica nel prodotto di ideali primi; questo teorema è chiaramente una generalizzazione dell'analogo teorema di fattorizzazione per i numeri interi (da notare che non vale l'unicità della fattorizzazione).

La novità fondamentale di Dedekind risiede nel fatto che le sue definizioni sono astratte, cioè basate su proprietà essenziali e non su relazioni con particolari rappresentazioni o descrizioni.

#### 11.4.2 Kronecker

Nell'opera *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen* (Lineamenti di una teoria aritmetica delle grandezze algebriche) Leopold Kronecker (1823-1891) rese noti i risultati delle sue ricerche algebriche, riguardanti la teoria dei numeri e le funzioni algebriche. Il suo lavoro consisteva principalmente di due parti:

- i fondamenti della teoria dei campi, la classificazione delle grandezze algebriche in specie e l'applicazione alla Teoria di Galois;
- la teoria dei campi di numeri e di funzioni algebriche e la teoria degli ideali di polinomi.

In Kronecker troviamo alcuni concetti fondamentali:

- **dominio di razionalità**: estensione del campo dei numeri razionali ottenuto aggiungendo certe grandezze.  
«Il dominio di razionalità ( $R', R'', R''' \dots$ ) contiene, come indica già chiaramente il termine, tutte quelle grandezze che sono funzioni razionali delle grandezze  $R', R'', R''' \dots$  a coefficienti interi.»
- **irriducibilità** di un polinomio: innanzitutto per polinomio si intendeva una funzione algebrica intera a coefficienti nel dominio ( $R', R'', R''' \dots$ ); un tale polinomio è irriducibile se non contiene come fattore un'analogia funzione intera a coefficienti nel dominio dato.
- **varietà irriducibile**: è il correlato geometrico della scomposizione in fattori irriducibili quando si considera una varietà algebrica come l'ente formato dagli zeri di una famiglia di polinomi.
- **dimensione** di una varietà algebrica e di spazi.

Kronecker studiava la teoria dei polinomi in un certo numero di incognite e a coefficienti in un determinato campo e, seguendo la teoria degli ideali elaborata da Dedekind e Weber, mostrò che a due forme equivalenti è associato lo stesso ideale dell'anello dei polinomi e che al prodotto di forme corrisponde il prodotto degli ideali corrispondenti. Questo sviluppo teorico è detto *Teoria delle forme*.

Concludiamo questo capitolo osservando che nonostante lavorassero sugli stessi temi, Dedekind e Kronecker ebbero concezioni della matematica molto diverse.

«Quando confrontiamo i due grandi teorici dei numeri, Dedekind e Kronecker, ci accorgiamo che Dedekind pensa in maniera più concettuale, nel senso dell'odierna algebra astratta e che Kronecker al contrario attribuisce molto più valore alle esplicite prescrizioni di calcolo.» (Van der Waerden 1966)

Possiamo pensare come esempio al fatto che Dedekind ha definito il concetto di corpo in modo assiomatico, mentre Kronecker ha introdotto il concetto di dominio di razionalità in modo estensionale, definendo la natura degli enti che formano tale struttura costruendoli in un numero finito di passi a partire da certi elementi iniziali. Dedekind spingeva verso una assiomatizzazione delle teorie, mentre Kronecker proponeva metodi costruttivi.

Inizialmente vennero presi in maggiore considerazione i termini di Kronecker, mentre i matematici del Novecento diedero libero spazio e proseguirono il metodo di Dedekind. Al giorno d'oggi sembra invece essere ritornata la tendenza a prediligere metodi costruttivi.

### 11.4.3 I gruppi

Ricordiamo innanzitutto la definizione di oggi.

*Definizione 5.* Un gruppo è una struttura algebrica formata da un insieme  $G$  munito di un'operazione binaria  $*$  che ad ogni coppia di elementi  $a, b \in G$  associa un elemento  $a * b$  appartenente a  $G$  e che rispetta le seguenti proprietà:

G1) *proprietà associativa:* dati  $a, b, c \in G$ ,  $(a * b) * c = a * (b * c)$ ;

G2) *esistenza dell'elemento neutro:* esiste in  $G$  un elemento  $e$  che rispetta l'operazione  $*$ , cioè tale che  $a * e = e * a = a \quad \forall a \in G$ ;

G3) *esistenza dell'elemento inverso:* ad ogni elemento  $a \in G$  è associato un elemento  $b$ , detto inverso di  $a$ , tale che  $a * b = b * a = e$ .

Prima del 1870 erano considerati solo due tipi di gruppi, detti:

- gruppi di sostituzione,
- gruppi di trasformazioni geometriche.

La moderna definizione per gruppi abeliani fu data da Kronecker nel 1870. Dopo quella data la nozione astratta di gruppo si sviluppò grazie agli studi dello stesso Kronecker, di Cayley, Von Dyck e Weber; quest'ultimo diede la definizione di gruppi finiti nel 1882 e gruppi infiniti nel 1893. Dopo l'introduzione della nozione astratta lo studio dei matematici cercò di capire la struttura dei gruppi indipendenti da permutazioni o trasformazioni. Da questo nasce l'interesse per la rappresentazione dei gruppi.

#### Gruppi di sostituzione

Per gruppi di sostituzione si intendono quelli che noi oggi chiamiamo gruppi di permutazione. I primi a studiare queste strutture furono Lagrange (1736-1813), Ruffini (1765-1822) e Cauchy (1789-1857) i cui interessi concernevano equazioni generali di un certo grado  $n$  a  $n$  variabili indipendenti. Inoltre essi

introdussero i concetti di classe laterale e indice di un sottogruppo.

Ci fu un secondo gruppo di matematici che studiò i gruppi di sostituzione, tra questi ricordiamo Jordan (1838-1922), Sylow (1832-1918) e Frobenius (1849-1917).

Sylow fondò una teoria basata sulla definizione di sottogruppo di Sylow.

*Definizione 6.* Dato un gruppo finito  $G$  di indice  $n$  si dice *p-sottogruppo di Sylow* un sottogruppo  $H$  di  $G$  di ordine  $p^\alpha$  tale che  $p^\alpha$  divide  $n$  e  $p^{\alpha+1}$  non lo divide.

La Teoria di Sylow è considerata molto importante nella Teoria dei Gruppi perché permette la scomposizione di gruppi complessi in sottogruppi più semplici; si basa su tre teoremi che Sylow dimostrò intorno al 1872 detti appunto *Teoremi di Sylow*:

- Sia  $G$  un gruppo finito e  $|G|$  il suo ordine, allora per ogni primo  $p$  e per ogni intero  $\alpha$  tali che  $p^\alpha$  divida  $|G|$ , esiste un sottogruppo di  $G$  di ordine  $p^\alpha$ .
- Sia  $G$  un gruppo e  $|G| = p^\alpha m$  con  $p$  e  $m$  coprimi. Allora tutti i  $p$ -sottogruppi di Sylow sono coniugati, ovvero  $\forall H, K \in Syl_p(G) \exists g \in G : g^{-1}Hg = K$ , dove per  $Syl_p(G)$  si intende l'insieme di tutti i  $p$ -sottogruppi di Sylow di  $G$ .
- Sia  $G$  un gruppo e  $|G| = p^\alpha m$  con  $p$  e  $m$  coprimi. Allora detto  $n_p$  il numero dei  $p$ -Sylow di  $G$  si ha:
  - $n_p | m$ ,
  - $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ .

### Gruppi di trasformazioni geometriche

I principali matematici che si dedicarono a questi studi furono Cayley (1821-1895), Klein (1849-1925) che lavorò sulle geometrie non euclidee e su gruppi finiti di trasformazioni lineari frazionarie e Lie (1842-1899) che approfondì i gruppi continui. Si soffermarono in particolare sullo studio degli invarianti relativi ad una forma, dove per forma si intende un polinomio a due o più indeterminate.

## Gruppi astratti

Per strutture algebriche astratte si intendono quelle strutture definite esclusivamente dalle leggi di composizione dei loro elementi. Ad esempio abbiamo visto come Hamilton definì il corpo dei quaternioni proprio a partire dalle loro regole di moltiplicazione. Vediamo i passi salienti della storia della nascita dei gruppi astratti:

- nel 1829 Galois introdusse i gruppi di sostituzione;
- nel 1867 Jordan introdusse i gruppi di movimento;
- nel 1870 Kronecker definnì a partire dalle regole di composizione degli elementi i gruppi abeliani.
- nel 1854 Cayley concepì la nozione generale di gruppo astratto;
- nel 1882 Van Dyck e Weber diedero la prima definizione di gruppo (ne danno due ma che sono equivalenti).

Cayley e Sylvester studiarono con interesse la “Teoria delle forme” (o quantitative) e i loro invarianti. Come abbiamo già detto per forme si intendono polinomi omogenei a due o più variabili. Ad esempio la forma  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  se uguagliata ad una costante diversa da 0 può rappresentare un’ellisse, una parabola o un’iperbole, a seconda del segno che assume  $A^2 - AC$ . I termini  $B^2 - AC$  e  $A + C$  rimangono gli stessi qualunque siano i valori che vengono attribuiti alla forma, per questo sono altri esempi di invarianti.

Nel 1872 Felix Klein (1849-1925) unì la nozione di geometria a quella di gruppo. Nel suo discorso inaugurale noto come *Programma di Erlangen*, sostenne che una geometria è lo studio delle proprietà invarianti rispetto ad un dato gruppo di trasformazioni e come esempi distingue:

- geometrie euclidee: studio delle proprietà invarianti rispetto al gruppo delle isometrie;
- geometria affine: studio delle proprietà invarianti rispetto al gruppo affine;
- geometria proiettiva: studio delle proprietà invarianti rispetto al gruppo delle proiettività;
- geometria topologica: studio delle proprietà invarianti rispetto al gruppo degli omomorfismi.

## Struttura dei gruppi finiti

Dopo l'introduzione della nozione astratta di gruppi finiti, i problemi che i matematici si pongono sono determinare la struttura del gruppo di permutazioni sotto certe condizioni come ad esempio la transitività, determinare la struttura di gruppi continui finitodimensionali di trasformazioni. L'obiettivo è dunque trovare teoremi che riguardino la struttura dei gruppi astratti e determinare tutti i gruppi finiti di un dato ordine  $h$ . I teoremi fondamentali che emergono da questa ricerca sono:

- il “Main theorem” provato da Kronecker nel 1870 in cui si dimostra che ogni gruppo abeliano finito è prodotto diretto di gruppi ciclici;
- i teoremi di Sylow che abbiamo già esposto sopra.

## Conclusioni

L'astrazione delle strutture, ossia l'andare oltre il significato dei simboli e il definire con operazioni e proprietà una struttura algebrica, ha introdotto un approccio nuovo alla matematica dell'Ottocento. Lo studio dei gruppi come struttura è venuto dopo l'averne studiato alcuni di speciali (gruppi di sostituzione e di trasformazione), al contrario della nostra concezione matura; similmente era avvenuto con Cayley per determinanti e matrici. È notevole anche considerare di poter costruire nuove strutture algebriche rilassando le proprietà da cui sono definite o togliendo dei postulati; questo suggerisce che le possibili strutture sono molte e che la conoscenza sembra essere più estesa di quanto si pensasse.

L'algebra passa da essere studio della risoluzione di equazioni algebriche a studio degli “spazi” in cui esse vivono. Il legame con la geometria e le altre scienze è molto forte e questo spiega anche l'interesse per questa materia.

Lo sviluppo dell'algebra a partire dalla seconda metà dell'Ottocento si è poi diramato nella Teoria dei gruppi, nella Teoria degli anelli e nella Teoria dei reticolati (quest'ultima è nata sulla base dell'algebrizzazione della logica iniziata da Boole).

Si svilupperà anche l'idea di isomorfismo tra due strutture algebriche: una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di queste che soddisfa altre particolari proprietà. L'isomorfismo permette di ottenere una struttura partendo dall'altra.

Nell'algebra astratta strutture isomorfe vengono considerate uguali, non nel

contenuto ma nello “schema formale”, non negli elementi ma nella loro struttura, determinata anche dalle operazioni.

Infine gli sviluppi più recenti dell’algebra astratta sono la Teoria delle categorie che si propone di unificare teorie relative a strutture matematiche diverse, e l’Algebra universale, che vuole ottenere risultati validi per qualsiasi struttura algebrica.

## Appendici

### Hamilton e la Scienza del Tempo Puro

Riprendiamo e approfondiamo quanto accennato nel Cap 2.3 riguardo la costruzione dei numeri reali realizzata da Hamilton.

Nella sua prima riflessione riguardo all’Algebra come Scienza del Tempo Puro pose attenzione non tanto sul Tempo come intuizione (o Tempo Puro), secondo il suo significato filosofico derivato dal pensiero di Kant, ma sulla nozione di Tempo e di Progressione Continua, considerati da Hamilton concetti legati a molti risultati importanti della Matematica. Hamilton fa poi derivare il concetto di numero da quello intuitivo di momento dato nel tempo.

Dall’intuizione del Tempo, introdusse la nozione di momento, con lo stesso valore di verità con cui nella geometria, dall’intuizione di Spazio, sono dati e accettati come veri e validi gli assiomi su cui si basa tutta la geometria piana euclidea.

Ancora dal confronto con l’intuizione di Ordine nello Spazio, Hamilton introduce la nozione o intuizione di Ordine nel Tempo, riconoscendo la possibilità di fondare su questa nozione una Scienza matematica.

Hamilton allora cercò di trovare e studiare gli aspetti definiti del Tempo Puro, quali forme della mente umana (il prima e il dopo, la precedenza, la conseguenza e la simultaneità , la progressione indefinita continua), che si impongono con forza nell’indagare i principi della Scienza dell’Algebra.

Le principali relazioni e proprietà tra numeri, e dunque gli stessi insiemi numerici, vennero cercate o trovate, più che definite, a partire dalle analoghe relazioni e proprietà tra momenti di tempo. Così nei concetti di equivalenza o coincidenza (cioè simultaneità ) e di non-equivalenza (cioè conseguenza e precedenza) tra momenti si riconoscono la relazione di identità e le due relazioni d’ordine  $>$  e  $<$  tra numeri.

L’introduzione degli insiemi dei numeri interi, frazionari e infine reali è conte-

nuta in una parte preliminare dell'opera di Hamilton sulle funzioni coniugate, rivolta allo studio dei numeri complessi; l'opera non ha una struttura rigorosa e non utilizza termini e nomi riconducibili a teorie attuali.

### Momenti, relazioni e combinazioni tra momenti

Indichiamo con le lettere A e B due termini che denotano ciascuno dei momenti di tempo conosciuti, cioè A e B possono riferirsi allo stesso momento, nel caso in cui il pensiero ha ripetuto il momento, oppure possono indicare due momenti differenti, nel secondo caso in cui si hanno pensieri di momenti differenti. Si scrive:

$$B = A$$

se tra il momento indicato con B e il momento indicato con A esiste una relazione di identità , o analogamente diciamo che i termini A e B sono equivalenti. È evidente che se vale  $B = A$ , sarà anche  $A = B$ . Si scrive invece:

$$B \neq A$$

se non siamo nella precedente relazione, ma tra i due momenti esiste una relazione di diversità , o i termini A e B sono non-equivalenti. Se vale  $B \neq A$ , come sopra, è evidente che sarà anche  $A \neq B$ .

La scrittura  $B \neq A$  indica una relazione che si suddivide in due ulteriori casi: di conseguenza e di precedenza, a seconda se il momento B è posteriore o anteriore al momento A. In forma più concisa si scrive:  $B > A$  se B è conseguente ad A nel tempo e  $B < A$  se B è precedente ad A nel tempo. È evidente che se  $B > A$  allora  $A < B$  e se  $B < A$  allora  $A > B$ .

Una relazione ordinale del momento B rispetto al momento A si indica con il simbolo  $B - A$ , essendo sia una relazione di identità sia una relazione di diversità.

Se  $(C, D)$  sono una seconda coppia di termini, che denotano altri due momenti di tempo, si dice che le **coppie**  $(A, B)$  e  $(C, D)$  sono **analoghe** se D è in relazione con C come B lo è con A e si scrive:

$$D - C = B - A \quad o \quad B - A = D - C$$

dove il segno  $=$  indica l'identità tra momenti. Due coppie sono in analogia sia quando  $C = A$  e  $D = B$  sia quando i momenti C e D non coincidono con i momenti A e B. Dalla precedente analogia seguono altre espressioni di analogie:

$$\text{se } D - C = B - A \quad \text{allora} \quad D - B = C - A$$

$$\text{se } D - C = B - A \quad \text{allora} \quad C - D = A - B$$

in questo caso anche le **coppie**  $(A, C)$  e  $(B, D)$  sono analoghe e si chiamano **alternate** di  $(A, B)$  e  $(C, D)$ .

Inoltre le **coppie**  $(B, A)$  e  $(D, C)$  sono in analogia ancora tra loro e si chiamano **inverse** di  $(A, B)$  e  $(C, D)$ .

Così, dati quattro momenti di tempo A, B, C e D, valgono le seguenti otto espressioni equivalenti:

$$\begin{aligned} D - C &= B - A, & B - A &= D - C; \\ D - B &= C - A, & C - A &= D - B; \\ C - D &= A - B, & A - B &= C - D; \\ B - D &= A - C, & A - C &= B - D; \end{aligned}$$

**Continuità tra momenti nel tempo** Un concetto sempre presente e centrale è quello di continuità. Hamilton, prima di parlare della continuità tra numeri, introduce la continuità della progressione nel tempo tra momenti. Si tratta ancora di un concetto che discende naturalmente dall'intuizione pura, e che dunque non richiede una definizione, ma va riconosciuta.

La continuità del tempo si esprime attraverso le nozioni di una particolare relazione ordinale di analogia; da questa Hamilton può discutere un modo in cui determinare e rappresentare i momenti: quello di *serie* di momenti. Egli considera la seguente analogia:

$$B' - B = B - A$$

Tale analogia, composta dai tre momenti A, B e  $B'$ , si chiama **analogia continua**; inoltre si dice che i tre momenti A, B e  $B'$  formano una **serie equidistante**, cioè il momento  $B'$  è prima, o dopo, il momento B così come B è prima, o dopo, il momento A. Il momento B è perciò detto il **momento intermedio** o medio (oppure bisettore) ai due momenti  $B'$  e A. Assegnati due momenti A e  $B'$  qualsiasi, esiste sempre, ed è unico, il momento medio B; quindi è sempre possibile costruire una analogia continua di momenti, inserendo il medio, quando sono assegnati i due momenti estremi.

In generale una analogia continua può essere costruita a partire da un numero  $n$  qualunque di momenti di tempo, e avere un intervallo di estremi il primo e l' $n$ -esimo momento diviso in  $n - 1$  parti uguali dagli altri  $n - 2$  momenti di

tempo intermedi.

Inoltre conclusa la serie di  $n$  momenti in analogia continua tra loro, si può allungare la stessa serie, prima del primo estremo o dopo l'ultimo estremo in modo illimitato, determinando il momento di tempo equidistante, ogni volta, precedente al primo estremo e quello equidistante, ogni volta, conseguente all'ultimo estremo, nell'ordine in progressione, costruendo una **serie equidistante illimitata**

$$\dots E''' E'' E' E A B B' B'' B''' B'''' \dots;$$

che soddisfa la seguente condizione di analogia continua

$$\dots B'''' - B''' = B''' - B'' = B'' - B' = \\ B' - B = B - A = A - E = E - E' = E' - E'' \dots$$

**Temporal step** *Il trasferimento di una relazione ordinale è una applicazione continua di un comune **step mentale** (nel pensiero) di tempo, chiamato anche **temporal step**, con cui si passa, nel pensiero, da un momento di una serie al momento immediatamente successivo.* Lo step non indica propriamente la relazione tra momenti, ovvero l'intervallo compreso tra due momenti di tempo, ma l'atto di passaggio tra due momenti consecutivi nel tempo: dati i momenti A e B,  $B - A$  è la relazione ordinale tra i due momenti e si pone

$$B - A = a$$

dove  $a$  è lo step corrispondente all'atto di passaggio da A a B, determinato in direzione e misura dalla relazione ordinale  $B - A$  (ovvero da quanto B precede o segue A).

Nell'equazione  $B = a + A$ , il momento A viene chiamato **antecedente** e il momento B **conseguente** della relazione ordinale  $a$ , che indica e determina il passaggio.

Date due coppie di momenti (A, B) e (C, D) si indica poi con il simbolo  $\vartheta$  il segno di inversione, per cui i simboli  $\vartheta a$  e  $\vartheta b$  indicano le relazioni di A rispetto a B e di C rispetto a D, che sono le inverse delle relazioni di B rispetto ad A e di D rispetto a C;  $\vartheta a$  e  $\vartheta b$  sono gli steps inversi o opposti di  $a$  e  $b$ , e risulta:

$$B - A = a \quad e \quad A - B = \vartheta a$$

$$D - C = b \quad e \quad C - D = \vartheta b$$

Così valgono anche le seguenti affermazioni, da quelle analoghe scritte in termini di relazioni tra momenti:

$$\begin{aligned}\vartheta a = 0 &\quad \text{se } a = 0; \\ \vartheta a \neq 0 &\quad \text{se } a \neq 0; \\ \vartheta a < 0 &\quad \text{se } a > 0; \\ \vartheta a > 0 &\quad \text{se } a < 0;\end{aligned}$$

e ancora, confrontando due coppie di momenti, segue:

$$\begin{aligned}\vartheta b = \vartheta a &\quad \text{se } b = a; \\ \vartheta b \neq \vartheta a &\quad \text{se } b \neq a; \\ \vartheta b < \vartheta a &\quad \text{se } b > a; \\ \vartheta b > \vartheta a &\quad \text{se } b < a;\end{aligned}$$

infine è evidente che

$$\vartheta(\vartheta a) = a$$

Si può inoltre “definire” un’operazione di composizione.

Se  $B - A = a$  e  $C - B = b$ , (cioè  $a$  è la relazione ordinale di  $B$  rispetto ad  $A$  e  $b$  quella di  $C$  rispetto a  $B$ ) allora si può scrivere

$$C = b + (a + A)$$

dove dal primo momento  $A$  è stato generato l’ultimo momento  $C$ , mediante due passaggi successivi da  $A$  a  $B$  e da  $B$  a  $C$ . Si può dunque considerare uno step totale, ovvero un unico o totale passaggio da  $A$  a  $C$  composto da due steps parziali o intermedi  $a$  e  $b$ , e la relazione ordinale di  $C$  rispetto ad  $A$  è composta da due relazioni ordinali intermedie  $a$  e  $b$ . Come unico passaggio che dal momento  $A$  genera il momento  $C$ , si scrive

$$C - A = b + a$$

e indicando con  $c = b + a$  lo **step composto** dai due steps parziali si ha

$$C = c + A$$

L'applicazione per determinare uno degli steps componenti, noti una composizione di steps e alcuni componenti, si chiama decomposizione. Nel caso della composizione  $c = a + b$  di due steps, allora è evidente che  $a = \vartheta b + c$  e  $b = c + \vartheta a$ .

### Gli interi e i frazionari

Le nozioni di momento, relazioni ordinali (componenti e composte) e steps (successivi e composti) in progressione nel tempo rappresentano i concetti portanti per poter introdurre quelli nuovi di multiplo e sottomultiplo di uno step, da cui deriveranno il concetto di numero intero, positivo o negativo, ed il concetto di numero reciproco e numero frazionario (o frazione). Le operazioni di addizione e sottrazione, moltiplicazione e divisione algebriche seguiranno, ancora, dalle regole di composizione di steps.

Fissiamo dunque il momento A come momento standard o di riferimento, chiamato **momento zero**, rispetto al quale sono confrontati e generati tutti gli altri momenti, conseguenti e precedenti A stesso. Tali momenti vengono indicati con  $B, B', B'', \dots$  se si tratta di momenti che seguono A e vengono chiamati **positivi**, mentre si usa  $E, E', E'', \dots$ , se si tratta di momenti che precedono A e vengono chiamati **contra-positivi**; in particolare tutti i momenti positivi e contra-positivi si possono contare, ovvero si possono distinguere chiamando, nell'ordine, il momento B primo positivo,  $B'$  secondo positivo e analogamente i momenti successivi.

é inoltre possibile scrivere:

$$B = a + A; \quad B' = a + B; \quad B'' = a + B' \dots$$

$$E = \vartheta a + A; \quad E' = \vartheta a + E; \quad E'' = \vartheta a + E' \dots$$

mentre il momento zero si può esprimere come  $A = 0 + A$ , perché generato da se stesso e dallo step nullo.

Secondo la costruzione dei momenti della serie, mediante le applicazioni conti-

nue e successive dello step non nullo  $a$  si può esprimere il seguente ordinamento

$$\begin{aligned} \dots E'' &= \vartheta a + \vartheta a + \vartheta a + A; \\ E' &= \vartheta a + \vartheta a + A; \\ E &= \vartheta a + A; \\ A &= 0 + A; \\ B &= a + A; \\ B' &= a + a + A; \\ B'' &= a + a + a + A; \\ &\dots \end{aligned}$$

Così fissato lo step originale  $a$  come step base, o unità, il precedente viene detto **sistema di multipli** di  $a$ ; in particolare si dice che: 0 è il multiplo 0,  $a$ ,  $a+a$ ,  $a+a+a$ , ... sono i multilpi positivi di  $a$ , mentre  $\vartheta a + \vartheta a$ ,  $\vartheta a + \vartheta a + \vartheta a$ , ... sono i multipli contra-positivi di  $a$ .

Ogni multiplo generato da  $a$  risulta caratterizzato e individuato dalla base (comune a tutti i multipli del sistema) e da un **ordinale di determinazione**:

$$\begin{aligned} 0a &= 0, \\ 1a &= a, \quad 1\vartheta a = \vartheta a; \\ 2a &= a + a, \quad 2\vartheta a = \vartheta a + \vartheta a; \\ 3a &= a + a + a, \quad 3\vartheta a = \vartheta a + \vartheta a + \vartheta a \\ &\dots \end{aligned}$$

I simboli 1, 2, 3, ... indicano i numeri ordinali (positivi) mentre i simboli  $\vartheta 1$ ,  $\vartheta 2$ ,  $\vartheta 3$ , ... denotano i nomi ordinali contra-positivi; tali simboli precedono la base  $a$  per poter determinare un multiplo positivo o contra-positivo di  $a$ , e formano la seguente serie di simboli ordinali:

$$\dots 3\vartheta, 2\vartheta, 1\vartheta, 0, 1, 2, 3, \dots$$

I simboli della serie appena scritta possono essere interpretati anche come cardinali e si chiamano **numeri interi**. Gli interi sono, dunque, il risultato di un certo atto mentale, che a partire dalla base  $a$  è in grado di generare un suo qualsiasi multiplo.

D'ora in avanti utilizzeremo la seguente simbologia: dati un intero  $\mu$  e una base  $a$  indicheremo con  $\mu \times a$  il multiplo di  $a$ .

Definiamo ora le operazioni di addizione e moltiplicazione:

- **Addizione:** Dati  $\mu, \nu, \xi$  numeri interi positivi la legge di composizione di questi numeri,  $\mu + \nu$  o  $\xi + \nu + \mu$ , che soddisfa

$$(\nu \times a) + (\mu \times a) = (\nu + \mu) \times a$$

$$(\xi \times a) + (\nu \times a) + (\mu \times a) = (\xi + \nu + \mu) \times a$$

è detta **addizione aritmetica**, e il numero che si ottiene come risultato indica la somma aritmetica dei numeri. Questa operazione si può estendere in Algebra, (come Scienza del Tempo Puro) definendo per ogni intero  $\mu, \nu, \xi$  positivo o contra-positivo o nullo, la combinazione della forma  $\mu + \nu$  o  $\xi + \nu + \mu$ , che soddisfa la precedente, come **somma algebrica** tra due o più numeri interi, e l'operazione di composizione **addizione algebrica**.

- **Moltiplicazione:** Un multiplo  $\mu \times a$  dello step base  $a$  può essere considerato come una nuova base e così generare altri steps suoi multipli, ed ancora multipli della base originale  $a$ . In questo caso si tratta di combinare un intero  $\nu$  con la nuova base  $\mu \times a$  moltiplicandoli tra loro per generare il multiplo  $\nu \times (\mu \times a)$  di  $\mu \times a$ . Il nuovo step multiplo è dato dalla combinazione di  $a$  con un intero  $\omega$ , dipendente dai numeri interi  $\mu$  e  $\nu$ , e si ha che

$$\omega = \nu \times \mu \quad se \quad \omega \times a = \nu \times (\mu \times a)$$

dove il segno  $\times$  interposto tra gli interi  $\mu$  e  $\nu$  è definito dalla seguente legge

$$\nu \times (\mu \times a) = (\nu \times \mu) \times a$$

In modo analogo al caso della addizione, la precedente legge è la **moltiplicazione aritmetica**, quando  $\mu$  e  $\nu$  sono positivi; ed ancora come nel caso della addizione algebrica, dall'operazione aritmetica si può definire in modo più esteso nella Scienza del Tempo Puro, la **moltiplicazione algebrica** e il prodotto algebrico  $\nu \times \mu$ , per ogni intero  $\mu$  e  $\nu$  positivo, contrapositivo o nullo. Infine, come per la usuale moltiplicazione, se un fattore è nullo il prodotto  $\nu \times 0 = 0$ , per qualsiasi  $\nu$ .

- **Divisione:** Se  $\mu$  è un intero non nullo, allora possiamo determinare una serie di numeri interi che sono suoi multipli

$$\dots 3\vartheta \times \mu, 2\vartheta \times \mu, 1\vartheta \times \mu, 0 \times \mu, 1 \times \mu, 2 \times \mu, 3 \times \mu \dots$$

in modo che un qualunque altro step  $\omega$  sarà o un numero di questa serie, cioè un multiplo di  $\mu$  del tipo

$$\omega = \nu \times \mu \quad o \quad \vartheta(\nu \times \mu) + \omega = 0$$

oppure un numero compreso tra due interi successivi della stessa serie precedente, cioè

$$\omega = \rho + \nu \times \mu \quad o \quad \vartheta(\nu \times \mu) + \omega = \rho$$

dove  $\rho$  è un intero tra 0 e  $\mu$  ed è positivo o contrapositivo a seconda che  $\mu$  sia positivo o contra-positivo. In entrambi i casi, si dice che  $\omega$  è stato diviso algebricamente da  $\mu$ , e  $\nu$  è detto quoziente; in particolare nel primo caso il quoziente è preciso, mentre nel secondo caso è approssimato dal primo intero precedente e  $\rho$  è detto resto della divisione.

L'atto di passare da un multiplo alla sua base si chiama invece **sotto-moltiplicazione**: se  $b$  e  $c$  sono due steps commensurabili non nulli, essi sono multipli di una base comune se

$$b = \mu \times a$$

$$c = \nu \times a$$

Riotteniamo la base  $a$  se eseguiamo la seguente sotto-moltiplicazione:

$$a = \frac{1}{\mu} \times b$$

Per ottenere  $c$  scriveremo poi

$$c = \nu \times \left( \frac{1}{\mu} \right) \quad o \quad c = \frac{\nu}{\mu} \times b$$

Ogni step  $c$  può essere considerato come multiplo di un sottomultiplo di un altro step  $b$ , se  $c$  e  $b$  sono tra loro commensurabili, ossia se sono multipli di una base comune; l'atto di passaggio è la composizione, nell'ordine, di una sottomoltiplicazione con una moltiplicazione.

Un numero frazionario è dunque determinato sempre da due numeri interi, che sono il numero che sottomoltiplica, *denominatore*, e il numero che moltiplica, *numeratore*, che rappresentano i due atti successivi che compogno l'atto di frazionamento.

Secondo i concetti introdotti, lo step  $c$  è una frazione di  $b$ , legato a  $b$  dalla relazione in rapporto  $\frac{\nu}{\mu}$ , chiamato rapporto di  $\nu$  su  $\mu$ . Come  $c$  è generato dall'atto di frazionamento moltiplicando  $b$  per il numero frazionario  $\frac{\nu}{\mu}$ , è possibile ritornare a  $b$  da  $c$  mediante l'atto di **frazionamento inverso, o reciproco**:

$$b = \frac{\mu}{\nu} \times c \quad se \quad c = \frac{\nu}{\mu} \times b$$

e vale

$$b = \frac{\mu}{\nu} \times \left( \frac{\nu}{\mu} \times b \right) \quad e \quad c = \frac{\nu}{\mu} \times \left( \frac{\mu}{\nu} \times c \right)$$

Così i due numeri  $\frac{\mu}{\nu}$  e  $\frac{\nu}{\mu}$  sono atti reciproci, chiamati quindi numeri frazionari reciproci tra loro, o **frazioni reciproche**.

In modo analogo ai numeri interi riportiamo di seguito le operazioni concesse con le frazioni così definite:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\nu'}{\mu'} \times b \right) + \left( \frac{\nu}{\mu} \times b \right) &= \left( \frac{\nu'}{\mu'} + \frac{\nu}{\mu} \right) \times b \\ \frac{\nu'}{\mu'} \times \left( \frac{\nu}{\mu} \times b \right) &= \left( \frac{\nu'}{\mu'} \times \frac{\nu}{\mu} \right) \times b \end{aligned}$$

Da tali leggi riconosciamo le operazioni tra i numeri frazionari di addizione e moltiplicazione.

In generale, il concetto di frazione come multiplo di un sottomultiplo non esclude di pensare che il numero che moltiplica (numeratore) sia uguale zero; in tal caso se il denominatore è diverso da zero, la frazione è uguale a zero:

$$\frac{0}{\mu} \times b = 0 \quad se \quad b \neq 0$$

Il segno  $\frac{1}{0}$  rappresenta invece un atto *impossibile*, se applicato ad uno step non nullo; non ha dunque senso lo zero-sottomultiplo di uno step non nullo. Solamente il caso che considera lo zero-sottomultiplo di zero è valido, ma non in modo unico e viene detto per questo *indeterminato*.

La regola generale che viene fissata è comunque quella di considerare il denominatore di ogni numero frazionario diverso da zero.

## I reali

Una volta esteso il concetto di rapporto algebrico, definito prima come frazione e poi come rapporto tra steps non nulli, Hamilton vuole dimostrare che esiste sempre la radice quadrata di un qualunque numero positivo, riconoscendo la possibilità che tale radice non sia commensurabile con nessun altro numero.

A partire dalle operazioni algebriche definite nella teoria degli interi e delle frazioni, si possono estendere anche tra rapporti di steps, o numeri algebrici generali, i concetti di Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione.

Dalle seguenti espressioni derivano poi le definizioni di opposto e reciproco di un numero algebrico generale:

$$\frac{b'}{a'} = \vartheta \frac{b}{a} \quad \text{se} \quad \frac{b'}{a'} \times c = \vartheta \left( \frac{b}{a} \times c \right)$$

$$\frac{b'}{a'} = R \frac{b}{a} \quad \text{se} \quad \frac{b'}{a'} \times \left( \frac{b}{a} \times c \right) = c$$

e si scrive:

$$\frac{\vartheta b}{a} = \vartheta \frac{b}{a}$$

$$\frac{a}{b} = R \frac{b}{a}$$

Vediamo ora il concetto di analogia o proporzione continua tra step.

Se  $a, b, c$  e  $d$  sono quattro steps non nulli possono essere tra loro nella relazione

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

in cui il rapporto di  $d$  su  $c$  è lo stesso del rapporto di  $b$  su  $a$ ; in tal caso le due coppie di step  $(a, b)$  e  $(c, d)$  si dicono **analoghe** o **proporzionali**; e come per le analogie tra coppie di momenti, si dice che  $a, c$  sono **antecedenti** e  $b, d$  sono **consequenti**, mentre  $a, d$  sono gli **estremi** e  $b, c$  sono i **medi**.

Un caso particolare di analogia, centrale nella progressione di steps nel tempo, è quello simile alla analogia continua tra momenti di una serie equidistante. Tre steps non nulli  $a', b, b'$  formano una analogia continua o una proporzione continua quando il rapporto di  $b'$  su  $b$  è uguale al rapporto di  $b$  su  $a$ , e si scrive

$$\frac{b'}{b} = \frac{b}{a}$$

dove  $b$  è chiamato medio o **medio proporzionale** tra  $a$  e  $b'$ ; inoltre  $b'$  si dice anche **terzo proporzionale** di  $a$  e  $b$ , mentre  $a$  è il terzo proporzionale di  $b'$  e  $b$ , perché vale

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{b'}$$

Indichiamo con  $\tilde{a}$  il rapporto tra steps  $\frac{b}{a}$  in modo tale che risulti

$$b' = \tilde{a} \times b = \tilde{a} \times \tilde{a} \times a$$

È sempre possibile determinare (o pensare determinato) uno ed un solo terzo proporzionale  $b'$  che soddisfi all'equazione  $\frac{b'}{b} = \frac{b}{a}$ ; inoltre si osserva che comunque sia il rapporto  $\tilde{a}$ , positivo o contra-positivo, il terzo proporzionale  $b'$  è co-direzionale con lo step  $a$ .

In generale i due rapporti opposti  $\tilde{a}$ , che soddisfano  $\tilde{a} \times \tilde{a} = \tilde{b}$ , si esprimono con in simboli

$$\sqrt{\tilde{b}}(>0) \quad e \quad \vartheta\sqrt{\tilde{b}}(<0)$$

dove  $\tilde{b}$  è un rapporto positivo, mentre  $\sqrt{\tilde{b}}$  e  $\vartheta\sqrt{\tilde{b}}$  sono due rapporti, rispettivamente uno positivo e l'altro contra-positivo, che si chiamano **radici o radici quadrate** del numero positivo  $\tilde{b}$ .

Gli steps, invece, che sono medi proporzionali tra  $a$  e  $b'$  si esprimono con i simboli

$$\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a \quad e \quad \vartheta\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a$$

e per entrambi valgono le equazioni della analogia (o proporzione) continua

$$\frac{b'}{\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a} = \frac{\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a}{a} \quad , \quad \frac{b'}{\vartheta\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a} = \frac{\vartheta\sqrt{\frac{b'}{a}} \times a}{a}$$

Nella definizione precedente di radice quadrata di un qualunque rapporto positivo non si pone attenzione alla sua esistenza, per la quale occorre fare un'osservazione preliminare, riguardo alla continuità della progressione in rapporto di due differenti steps. L'idea della continuità di una progressione di momenti nel tempo implica anche la continuità della progressione in grandezza da un qualunque step non nullo ad un altro differente step non nullo, pensando gli steps come intervalli (o relazioni ordinali) tra due momenti.

Questa continuità costringe ad ammettere l'esistenza di una grandezza determinata  $b$  che sia medio proporzionale tra due grandezze disuguali assegnate  $a$

e  $b'$ ; quindi si ammette anche l'esistenza di un rapporto determinato  $\tilde{a}$  che è la radice quadrata di un rapporto positivo dato  $\tilde{b}$ .

Siano ora  $A$ ,  $B$  e  $D$  tre momenti qualsiasi dati, distinti e tali che

$$\frac{D - A}{B - A} = \tilde{b}, \quad \tilde{b} > 1$$

quindi il momento  $B$  è intermedio tra  $A$  e  $D$ . Sia  $C$  un momento fissato tra  $B$  e  $D$  nella progressione continua del tempo, e siano indicati i rapporti positivi di larghezza tra gli steps temporali individuati da  $D$ ,  $C$  e  $B$  con il momento  $A$ :

$$\frac{C - A}{B - A} = \tilde{x}, \quad \frac{D - A}{C - A} = \tilde{y} = R\tilde{x} \times \tilde{b}$$

Si può osservare che se il momento  $C$  è vicino al momento  $B$  il rapporto  $\tilde{x}$  si avvicina al rapporto di uguaglianza 1, mentre il rapporto  $\tilde{y}$  si avvicina al rapporto  $\tilde{b}$ . Introducendo il simbolo  $\underline{L}$  per indicare il limite a cui si avvicinano il momento variabile  $C$  e rispettivamente i rapporti  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ , si può scrivere:

$$\text{se } \underline{L}C = B \text{ allora } \underline{L}\tilde{x} = 1 \text{ e } \underline{L}\tilde{y} = \tilde{b}$$

Se, invece,  $C$  è vicino al momento  $D$  i due rapporti  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  si comportano inversamente; ovvero si ha:

$$\text{se } \underline{L}C = D \text{ allora } \underline{L}\tilde{x} = \tilde{b} \text{ e } \underline{L}\tilde{y} = 1$$

Fissato dunque il rapporto di larghezza  $\tilde{b} > 1$ , al variare di  $C$  da  $B$  a  $D$ , si determinano due progressioni opposte di rapporti, denotate con  $\tilde{x}$  e  $R\tilde{x} \times \tilde{b}$ , da  $\tilde{x} = 1$  e  $R\tilde{x} \times \tilde{b} = \tilde{b}$ , per cui risulta  $R\tilde{x} \times \tilde{b} > \tilde{x}$ , a  $\tilde{x} = b$  e  $R\tilde{x} \times \tilde{b} = 1$ , per cui si ha  $R\tilde{x} \times \tilde{b} < \tilde{x}$ .

Quindi deve esistere un qualche stato intermedio della progressione del momento  $C$ , tra  $B$  e  $D$ , in corrispondenza del quale le due progressioni dei rapporti  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  si incontrano, ovvero sono uguali:

$$R\tilde{x} \times \tilde{b} = \tilde{y} = \tilde{x} \quad \text{cioè} \quad \frac{D - A}{C - A} = \frac{C - A}{B - A}$$

dalle due precedenti condizioni si concepisce l'esistenza di un rapporto positivo  $\tilde{a}$  che soddisfa  $\tilde{a} \times \tilde{a} = \tilde{b} > 1$ , cioè si tratta dell'esistenza della radice quadrata positiva di  $\tilde{b}$ . In modo analogo si può dichiarare che esiste la radice quadrata positiva di un rapporto  $\tilde{b} < 1$  o  $b = 1$ .

Una proprietà importante dei rapporti, che viene provata, seppure senza una dimostrazione rigorosa, ma discende dall'esistenza della radice quadrata di un qualunque rapporto positivo, è il fatto che può e deve considerarsi esistente qualunque tipo di rapporto, anche quelli che non possono esprimersi come interi o numeri frazionari. Secondo la definizione data di steps commensurabili, vuol dire che esistono rapporti di steps **incommensurabili** tra loro, ovvero che ogni step non nullo a ha altri steps incommensurabili con se stesso. In termini di momenti di tempo, dati due momenti  $A$  e  $B$ , è possibile assegnare (non in un unico modo) un terzo momento  $C$  che non appartiene con  $A$  e  $B$  a nessuna serie equidistante di momenti, che comprenda tutti e tre i momenti  $A, B, C$ .

Siamo dunque arrivati alla costruzione dei **numeri irrazionali**.

# Bibliografia

- [1] Boyer C. B., *Storia della matematica*, ISEDI, 1976
- [2] A. N. Kolmogorov, A. P. Yushkevich, *Mathematics of the 19th century. Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*, Birkhäuser, 1996
- [3] Luboš Nový, *Origins of Moderns Algebra*, publishing House of the Czechoslovak Academy of Science, Prague 1973
- [4] Umberto Bottazzini, *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET Libreria 1990
- [5] Giulia Maria Piacentini Cattaneo, *Algebra. Un approccio algoritmico*, Decibel Zanichelli 1996
- [6] William Rowan Hamilton, *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; With a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time*, 1835

## Capitolo 12

# Cantor e la teoria degli insiemi

di Valentina Favero e Lara Tonello

### 12.1 La vita

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nacque il 3 marzo 1845 a S. Pietroburgo e qui visse fino ad undici anni per poi trasferirsi con la sua famiglia in Germania, dove trascorse gran parte della sua vita. Il padre, Georg Waldemar Cantor, un commerciante di successo e un esperto agente di borsa, decise di spostarsi con la famiglia in Germania per motivi di salute. La madre, Maria Anna Bohm, fu un'importante musicista russa e sicuramente influenzò il figlio, che si interessò alla musica imparando a suonare il violino.

Molto importante fu, nella vita di Cantor, l'aspetto religioso: egli nacque e rimase per tutta la vita luterano. I suoi genitori erano di religione cristiana, anche se gli antenati erano ebrei: il padre si era convertito al protestantesimo, la madre invece era cattolica.

Il giovane Georg nutriva un particolare interesse verso le argomentazioni dei teologi medievali riguardanti i concetti di continuità e di infinito e fu ciò che lo fece desistere dall'intraprendere la carriera da ingegnere, suggerita più volte dal padre. In una lettera che, all'età di sedici anni, egli scrisse al padre per comunicargli la sua decisione di dedicare la propria vita alla matematica leggiamo: “... la mia anima, il mio intero essere vive per la mia vocazione ... a



Figura 12.1: G. Cantor

qualsiasi cosa uno si senta chiamato da una voce ignota e segreta, a quello si dovrà dedicare fino al successo”.

Nel 1856, una volta trasferiti in Germania, vissero per alcuni anni a Wiesbaden, dove Cantor frequentò il ginnasio. Terminati gli studi liceali, si trasferirono a Francoforte sul Meno, dove Cantor frequentò dal 1862 corsi di matematica e filosofia, prima all’Università di Zurigo e poi a Berlino, dove fu allievo di importanti matematici come E. E. Kummer, W. T. Weierstrass e L. Kronecker. Nel 1867 conseguì il dottorato presentando una tesi sulla teoria dei numeri.

Successivamente, sotto l’influenza di Weierstrass, Cantor spostò il suo interesse verso l’analisi e, in particolare, verso lo studio delle serie trigonometriche. Nel 1869 venne nominato *Privatdozent* all’Università di Halle, iniziando la carriera accademica. Il *Privatdozent* era una figura tipica delle università tedesche: poteva tenere dei corsi e percepire un onorario dagli studenti che frequentavano le sue lezioni, ma non aveva uno stipendio. La cattedra arrivò nel 1872, sempre ad Halle, dove Cantor continuò ad insegnare fino alla pensione.

Nel 1874 vi fu l’evento sentimentale più importante della sua vita: conobbe

Vally Guttmann, amica di sua sorella e, dopo solo qualche mese, convolarono a nozze.

All'università di Halle, Cantor poté svolgere in tutta tranquillità i suoi difficili studi, che lo portarono a dare contributi fondamentali in vari settori, come quello dello studio delle serie trigonometriche, anche se oggi è noto soprattutto per la sua costruzione dei numeri reali e per i suoi lavori sulla teoria degli insiemi, di cui parleremo tra poco.

La teoria cantoriana degli insiemi, anche se fu in seguito modificata ed integrata, resta ancor oggi alla base dello studio delle proprietà degli insiemi infiniti. Nonostante ciò, le critiche e le accese discussioni che furono espresse al suo apparire, acuirono gli stati di depressione cui Cantor era predisposto e che lo assalirono in particolar modo negli ultimi anni della sua vita. Già nel 1884 ebbe la prima manifestazione della malattia nervosa che lo colpì a più riprese fino alla morte. Alla luce di una cognizione biografica della sua vita, infatti, sembra probabile che all'insorgere di questa malattia abbia concorso, oltre all'incertezza sulla validità della sua opera, anche l'ostracismo scientifico e accademico dovuto soprattutto a L. Kronecker, che bloccò ogni suo tentativo di insegnare a Berlino, che vantava un'università molto più prestigiosa rispetto a quella di Halle. Sulle origini della sindrome maniaco-depressiva che lo colpì possiamo solo dire che ci furono alcune cause scatenanti che fecero vacillare un già precario equilibrio.

È da notare, comunque, che poco prima dell'insorgere della malattia Cantor, in occasione di un viaggio a Parigi, aveva ricevuto molti consensi nella cerchia dei matematici parigini in particolare da parte di Poincarè che si era interessato alla teoria degli insiemi.

Dal 1884 Cantor trascorse la sua vita tra università e case di cura. Morì per un attacco di cuore il 6 gennaio 1918 mentre era ricoverato in una clinica psichiatrica.

## 12.2 Le opere

Presentiamo qui di seguito una lista delle opere principali pubblicate da Cantor, che verranno più volte nominate ed analizzate più da vicino nel corso di questa relazione. Per ciascuna opera indichiamo brevemente i contenuti principali con lo scopo di presentare uno schema sintetico dell’evoluzione del pensiero di Cantor.

- *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Sull’estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche) [1, 1872]: in questo articolo troviamo, oltre alla generalizzazione di un teorema sulle serie trigonometriche, la costruzione dei numeri reali e la definizione di insieme derivato.
- *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (Su una proprietà della classe di tutti i numeri reali algebrici) [2, 1874]: nel primo paragrafo viene dimostrata la corrispondenza biunivoca tra i reali algebrici e i naturali mentre nel secondo paragrafo troviamo l’importante risultato relativo alla non numerabilità del continuo.
- *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* (Contributo alla teoria delle molteplicità) [3, 1878]: in questo articolo Cantor, dopo aver dato le definizioni di maggiore, minore o uguale potenza tra insiemi, dimostra che  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}$  hanno la stessa cardinalità. Conclude l’articolo accennando a quella che è nota con il nome di “ipotesi del continuo”.
- *Über unendliche lineare Punktmanigfaltigkeiten* (Sulle molteplicità lineari infinite di punti) [4]: qui troviamo tutta la costruzione dei numeri ordinali e la questione riguardante il transfinito, l’infinito attuale e quello potenziale. L’articolo principale è il quinto, intitolato *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità) [4, 1883]
- *Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre* (Contributi alla teoria degli insiemi) [5, 1895-1897]: questo fu l’ultimo articolo importante pubblicato da Cantor. In esso troviamo, oltre ad alcuni risultati relativi all’insieme delle parti e all’aritmetica dei cardinali, una ridefinizione rigorosa di alcuni elementi già studiati in passato, in particolare del concetto di insieme.

## 12.3 Serie trigonometriche, numeri reali ed insiemi derivati

*Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen* (Sull'estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche) è il titolo del primo articolo importante pubblicato da Cantor nel 1872 nel quale sono presenti i primi importanti risultati ottenuti da Cantor che lo portarono allo sviluppo di tutta la teoria degli insiemi. Prima di addentrarci in tale teoria, però, c'è sembrato opportuno presentare nel dettaglio il percorso di studi e ricerche che ha sviluppato in Cantor l'interesse verso l'analisi del concetto di insieme e, soprattutto, verso la questione riguardante l'infinito. Il punto di partenza riguarda lo studio delle serie trigonometriche. Per poter estendere un risultato riguardante tali serie, Cantor, sempre all'interno dell'articolo del 1872, presenta due risultati di grandissimo rilievo:

- **la costruzione dei numeri reali**, che risulterà un elemento fondamentale nel processo di aritmetizzazione dell'analisi sviluppato in quegli anni;
- **la definizione di insieme derivato**, elemento che susciterà in Cantor l'interesse verso lo studio dell'infinito.

### 12.3.1 Fourier e Dirichlet: lo sviluppo in serie e il concetto di funzione

Appare inevitabile menzionare Joseph Fourier (1768-1830), per il fatto che sarà contribuendo ai risultati di ques'ultimo che Cantor avrà l'occasione di sviluppare la sua teoria dei numeri reali ed in seguito dei numeri transfiniti.

Fourier era “principalmente un fisico” e vedeva la matematica unicamente giustificata “dall'aiuto che dà alla soluzione dei problemi fisici” [5, Jourdain, p. 1].

Ci preme sottolineare come queste parole siano in linea con un atteggiamento in voga ai tempi di Fourier, e anche per lo meno nei due secoli precedenti, il quale riteneva sufficienti espedienti fisici e, soprattutto, geometrici per la giustificazione di risultati matematici. A questo proposito si rimanda a [6, Boyer, capitolo The rigorous formulation] e a [7, note di Zariski]. Un approfondimento della questione in parte esula gli scopi del presente lavoro, in parte verrà rimandato ai prossimi paragrafi.

Nella *Theorie de la chaleur* [8, (1822)] Fourier esprime l'idea che “qualsiasi funzione  $y = f(x)$  può venire rappresentata mediante una serie di questa forma” [10, Boyer, p. 643]:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (12.1)$$

con, per  $n = 0, 1, \dots$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a) \cos(na) da \quad (12.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(a) \sin(na) da \quad (12.3)$$

Per inciso, il valore concettuale di questo risultato sta nel fatto che “siffatta rappresentazione [...] offre la possibilità di studiare tipi di funzione considerabilmente più generali di quanto consentito dalla serie di Taylor [...] Le funzioni non dovevano più presentare quella forma regolare alla quale i matematici erano stati abituati fino ad allora” [10, Boyer, p. 633-634]. Infatti, non c’era bisogno di richiedere l’analiticità né tanto meno l’algebricità. Per un approfondimento si rimanda a [9, Klein, sezione Trigonometric series].

In seguito, molti matematici, tra i quali Cantor, si dedicarono a generalizzare i risultati inerenti la sviluppabilità. “La fondazione rigorosa dei risultati di Fourier [è] data da Dirichlet” (1805-1859) il quale si dedica all’“indagine del concetto generale di [...] funzione [...] e di sviluppo di funzioni” [5, Jourdain, p. 2].

In seguito a queste ricerche Dirichlet fornì la seguente definizione, molto ampia, di funzione (1837) [10, Boyer, p. 635]

*Definizione 7.* Se una variabile  $y$  ha una relazione con una variabile  $x$  tale che, ogni volta venga assegnato un valore numerico alla  $x$ , esiste una regola in base alla quale viene determinato un valore univoco di  $y$ , si dice che  $y$  è una “funzione” della variabile indipendente  $x$ .

Possiamo dunque affermare che i risultati di Fourier diedero un notevole contributo alla generalizzazione e all’astrazione del concetto di funzione.

### 12.3.2 Generalizzazione del teorema

Analizziamo ora nel dettaglio il contributo che Cantor diede alla teoria riguardante lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione. Come già visto in

precedenza, nel 1869 Cantor venne nominato Privatdozent all'Università di Halle dove insegnava, come docente ordinario anche Heine che proprio in questo periodo, influenzato dall' "Habilitationsschrift" di Riemann, stava facendo indagini sulle serie trigonometriche. Fu proprio Heine a proporre a Cantor questo quesito:

" Data un'arbitraria funzione rappresentata da una serie trigonometrica, è tale rappresentazione necessariamente unica?".

Lo stesso Heine aveva risolto parzialmente il problema per particolari classi di funzioni e sotto speciali condizioni. In definitiva Heine, nel 1870, era riuscito a provare il seguente:

*Teorema 5.* Una funzione di una variabile reale  $f(x)$  continua eccetto al più per un numero finito di punti può essere rappresentata in uno e in un solo modo da una serie trigonometrica della forma:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (12.4)$$

se la serie è soggetta alla condizione di essere uniformemente convergente. La serie rappresenta la funzione da  $-\pi$  a  $\pi$ .

Richiedendo l'uniforme convergenza della serie e la continuità della funzione eccetto al più per un numero finito di punti, il teorema di Heine invitava direttamente ad una generalizzazione. E proprio nel tentativo di generalizzare il risultato di Heine, Cantor notò subito che il problema dell'unicità della rappresentazione non poteva essere risolto come si era fatto fino ad allora. Lavorando in questa direzione, Cantor dimostrò, nel Marzo 1870, il seguente:

*Teorema 6.* Siano  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$  due sequenze infinite tali che il limite di  $(a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx))$ , per ogni valore di  $x$  in un dato intervallo  $(a < x < b)$  è uguale a zero al crescere di  $n$ .

Allora  $a_n$ , così come  $b_n$ , al crescere di  $n$ , converge a zero.

Questo teorema (che è noto come teorema di Cantor-Lebesgue perché dopo che Cantor ne aveva provato la validità per serie trigonometriche che convergono sull'intervallo  $(a, b)$ , Lebesgue lo generalizzò ad un qualsiasi intervallo o insieme di misura positiva nel senso appunto di Lebesgue) servì a Cantor per dimostrare, nell' Aprile del 1870, il suo teorema dell'unicità:

*Teorema 7.* Se una funzione di una variabile reale  $f(x)$  è data per mezzo di una serie trigonometrica convergente per ogni valore di  $x$ , allora non ci sono

altre serie della stessa forma che allo stesso modo convergono per ogni valore di  $x$  e rappresentano la funzione  $f(x)$ .

In altre parole, date due serie trigonometriche

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

e

$$f(x) = \frac{1}{2}a'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \sin(nx))$$

esse hanno gli stessi coefficienti (cioè rappresentano la stessa funzione) se convergono e hanno stessa somma per ogni valore di  $x$ .

Nella dimostrazione egli sottrae le due serie trigonometriche che rappresentano la funzione ottenendo una rappresentazione trigonometrica di 0 convergente per ogni  $x$ . Questa proprietà risulta fondamentale per il resto della dimostrazione nel senso che in realtà è questa l'ipotesi da richiedere. Vediamola nel dettaglio.

*Dimostrazione* Supponiamo che esistono due serie trigonometriche rappresentanti la stessa funzione  $f(x)$  e convergenti allo stesso valore per ogni valore di  $x$ . Sottraendo le due serie si ottiene una rappresentazione di zero allo stesso modo convergente per tutti i valori di  $x$ :

$$0 = C_0 + C_1 + c_2 + \dots + C_n + \dots \quad (12.5)$$

dove:

$$C_0 = \frac{1}{2}d_0$$

e

$$C_n = c_n \sin nx + d_n \cos nx.$$

Utilizzando poi il teorema del Marzo 1870 Cantor poteva concludere che la rappresentazione di zero comporta una serie trigonometrica i cui coefficienti  $c_n$  e  $d_n$ , all'aumentare dell'indice, diventano arbitrariamente piccoli. Il teorema dell'unicità era pertanto stabilito nel momento in cui si era in grado di dimostrare che i coefficienti  $c_n$  e  $d_n$  sono identicamente zero su tutti gli indici. Seguendo Riemann, Cantor considerò la funzione:

$$F(x) = C_0 \frac{xx}{2} - C_1 - \dots - \frac{C_n}{nn} - \dots \quad (12.6)$$

La funzione di Riemann,  $F(x)$ , era non soltanto continua nell'intorno di ogni valore di  $x$ , ma la sua derivata seconda:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{F(x + \alpha) + F(x - \alpha) - 2F(x)}{\alpha \alpha}$$

si avvicina a zero quando  $\alpha$  diminuisce senza limite.

Quello che serviva a Cantor era di dimostrare la linearità della funzione  $F(x)$ , linearità che su richiesta di Cantor, fu provata da H.A. Schwarz. Prendendo dunque:  $F(x) = cx + c'$  e ricordando la relazione (12.6) si ha  $cx + c' = C_0 \frac{x^2}{2} - C_1 - \dots - \frac{C_n}{n^n} - \dots$  ovvero:

$$C_0 \frac{x^2}{2} - cx - c' = \sum \frac{(a_n \sin nx + b_n \cos nx)}{n^2}$$

In quest'ultima relazione, il secondo membro  $\sum \frac{(a_n \sin nx + b_n \cos nx)}{n^2}$  è periodico di periodo  $2\pi$  (dipendendo dalle funzioni trigonometriche seno e coseno); pertanto anche il primo membro deve essere periodico e questo poteva succedere solo se sparivano i termini in  $x$ , ossia solo se  $C_0 = c = 0$ . Si ha pertanto l'uguaglianza:

$$-c' = C_1 + \frac{C_2}{2^2} + \dots + \frac{C_n}{n^2} + R_n$$

dove  $R_n$  è la somma dei termini dall'  $(n+1)$ -esimo in poi. La serie a destra è della forma:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m : \forall n \geq m \quad |R_n| < \varepsilon$$

Questo risultato valeva, come Cantor sottolineò, per ogni valore di  $x$ .

Ma quanto scritto significava che  $R_n$  è uniformemente convergente. Infatti:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad R_n = \frac{C_{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{C_{n+2}}{(n+2)^2} + \dots = -c' - C_1 - \dots - \frac{C_n}{n^2}$$

e

$$\forall x \quad |R_n| = |-c' + C_1 + \dots + \frac{C_n}{n^2}| \leq K \left( \sum (1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}) \right) < \varepsilon$$

Applicando adesso il risultato di Weierstrass sull'uniforme convergenza si poteva moltiplicare ogni membro di  $-c' = C_1 + \frac{C_2}{2^2} + \dots + \frac{C_n}{n^2} + R_n$  per  $\cos n(x-t)dx$  e compiendo adesso la legittima integrazione termine a termine fra  $-\pi$  e  $\pi$  si conclude che  $c_n \sin nx + d_n \cos nx = 0$  e di conseguenza  $d_n = c_n = 0$ .

Dunque una rappresentazione di zero per mezzo di una serie trigonometrica

convergente per tutti i valori di  $x$  era possibile solo se tutti i coefficienti  $c_n$  e  $d_n$  erano identicamente zero e da ciò immediatamente seguiva il teorema dell'unicità.  $\square$

Il risultato assai positivo che aveva raggiunto spinse Cantor ad approfondire i suoi studi sulle serie trigonometriche e lo portò, nel Gennaio 1871, ad una pubblicazione nel “Notiz” dove si trovano note e perfezionamenti al suo teorema dell'unicità dell'anno precedente. Cantor estese la validità del suo teorema assumendo l'esistenza di una sequenza infinita di valori  $x_0, x_1, x_2, \dots$  cosicché per questi  $x_n$  o la convergenza o la rappresentazione di zero falliva. Tuttavia Cantor si affrettò a sottolineare che “questi  $x_n$  dovevano capitare in intervalli finiti soltanto in numero finito”.

Lo stesso Cantor si rendeva però conto che il teorema dell'unicità poteva essere ulteriormente generalizzato ed infatti scrisse:

“Questa prima estensione del teorema non deve significare la fine del mio lavoro; io stesso ho già avuto successo nel trovare un teorema ugualmente rigoroso ma più generale, teorema che comunicherò non appena ne avrò la possibilità”.

La sua riflessione si basava sul fatto che “...la presenza di un numero finito di singolarità in un dato intervallo  $(a, b)$  non implica difficoltà aggiuntive per il teorema dell'unicità. Cosa succede se un numero infinito di singolarità è presente in tale intervallo? ”: il teorema continuava a valere.

Per dimostrare ciò, egli utilizzò il teorema di Bolzano-Weierstrass il quale afferma che:

*Teorema 8 (Bolzano-Weierstrass).* Sia  $x : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$  una successione di numeri reali limitata. Allora  $x$  ha una sottosuccessione convergente.

Tale teorema assicurava che c'era almeno un punto di accumulazione in ogni intorno del quale si può trovare un numero infinito di punti singolari  $x_v$ . Pensiamo allora all'intervallo  $(a, b)$  e supponiamo che in tale intervallo sia presente un unico punto di accumulazione  $x'$ . Per il teorema di Bolzano-Weierstrass in ogni intorno di tale punto  $x'$  si possono trovare infiniti punti singolari  $x_v$ .

Limitiamoci a considerare l'intervallo  $(a, x')$ . In ogni sottointervallo proprio  $(s, t)$  di tale intervallo  $(a, x')$  si può trovare solo un numero finito di punti

singolari  $x'_v$  altrimenti in  $(a, x')$  dovrebbero essere presenti altri punti di accumulazione, contrariamente all'ipotesi che  $x'$  sia il solo punto di accumulazione dell'intero intervallo  $(a, b)$ .

Per tutti gli intervalli  $(s, t)$ , poiché in ciascuno di essi è presente solo un numero finito di singolarità  $x'_v$ , il risultato del "Notiz" assicurava la validità del teorema dell'unicità.

Dal momento che i punti finali  $s$  e  $t$  possono essere portati a  $(a, x')$  era possibile concludere la validità del teorema dell'unicità anche sull'intervallo  $(a, x')$ . Le stesse argomentazioni si rivelavano chiaramente esatte se era presente un numero finito di punti di accumulazione  $x'_0, x'_1 \dots, x'_n$ .

A questo punto Cantor era dunque arrivato a stabilire il teorema dell'unicità anche per un numero infinito di punti di singolarità purché tali punti fossero distribuiti in questo particolare modo.

Non c'era ragione per limitarsi a considerare solo un numero finito di punti di accumulazione  $x'_v$ . Seguendo lo stesso schema di ragionamento si poteva supporre che fossero presenti in  $(a, b)$  infiniti punti di accumulazione. In questo caso, secondo il teorema di Bolzano-Weierstrass, nell'intervallo  $(a, b)$  doveva essere presente almeno uno degli infiniti punti di accumulazione  $x'_v$ . Supponiamo che sia presente uno solo di tali punti di accumulazione e denotiamolo con  $x''$ . Come in precedenza, da ciò seguiva che solo un numero finito di punti  $x'_v$  poteva essere presente in ogni sottointervallo  $(s, t)$  di  $(a, x'')$ . Come dimostrato in precedenza, la funzione  $f(x)$  rappresentata in serie trigonometriche era lineare su tali intervalli. Avvicinando quanto si voglia i punti finali  $s$  e  $t$  ad  $a$  e  $x''$ , ne derivava direttamente che  $f(x)$  doveva essere lineare su  $(a, x'')$ .

Il discorso si poteva estendere ulteriormente ma nel concretizzare rigorosamente questa possibilità intervennero difficoltà tecniche. In definitiva Cantor non era a questo punto in grado di districare i vari livelli di singolarità e capì che l'unico modo di risolvere il problema era di procedere aritmeticamente. Fare questo richiedeva però una rigorosa teoria dei numeri reali. C'erano quindi problemi fondamentali da risolvere prima di poter estendere ulteriormente il teorema dell'unicità.

Riassumendo quanto enunciato in questo paragrafo, Cantor dimostrò dapprima che, date due serie trigonometriche

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

e

$$f(x) = \frac{1}{2}a'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \sin(nx))$$

esse rappresentano la stessa funzione (cioè esiste unica la rappresentazione in serie di Fourier di  $f$ ) se convergono e hanno stessa somma per ogni valore di  $x$ . Una prima generalizzazione richiedeva convergenza ed ugual somma ovunque, a meno di un numero finito di valori di  $x$ . Infine, Cantor riuscì a dimostrare che il risultato continuava a valere se le due serie convergevano ed avevano ugual somma ovunque, a meno di un numero infinito di valori di  $x$  che “dovevano capitare in intervalli finiti soltanto in numero finito”.

Cantor intuì la possibilità di estendere ulteriormente questi risultati ma, per poter fare ciò in modo rigoroso, necessitava di una definizione solida e precisa dei numeri reali.

Prima di passare nel dettaglio alla descrizione della costruzione dei reali realizzata da Cantor, analizziamo brevemente qual era la situazione generale in quel tempo nell’ambito dell’analisi.

### 12.3.3 Weierstrass e Dedekind: aritmetizzazione dell’analisi

Karl Weierstrass (1815-1897), Richard Dedekind (1831-1916) e Georg Cantor sono i tre nomi che di solito vengono associati a ciò che va sotto il nome di “aritmetizzazione dell’analisi”.

Nel 1859 Weierstrass tenne le sue lezioni sulla teoria delle funzioni analitiche all’Università di Berlino. Con ciò egli “fu obbligato [...] a studiarne i fondamenti” [5, Jourdain, p. 13] e questo “lo condusse ad una [...] investigazione dei principi dell’aritmetica” [5, Jourdain, p. 13]. Il maggior risultato che conseguì a questa investigazione fu la sua teoria dei numeri irrazionali.

Infatti, nella teoria delle funzioni analitiche si usa spesso [5, Jourdain, p. 13] il seguente

*Teorema 9.* Data una regione limitata del piano complesso contenente un numero infinito di punti esiste almeno un punto del piano complesso tale che ogni suo intorno contiene un numero infinito di punti.

A questo punto Jourdain fa un’osservazione che ci preme notare: “l’analogo geometrico di questa proposizione si può affermare che sia intuitivo; ma se il nostro ideale nella teoria delle funzioni [...] è fondare questa teoria sul solo numero, questa proposizione conduce alle considerazioni sulle quali una teoria degli irrazionali come quella di Weierstrass è costruita”.

Dedekind, che intraprese le proprie ricerche sui numeri reali parallelamente a Weierstrass, nella prefazione a *La continuità e i numeri irrazionali* [7, (1872)], incaricato nel 1958 di tenere alcune conferenze sul calcolo differenziale al Politecnico di Zurigo, nota che le dimostrazioni dei risultati analitici erano di carattere geometrico e dichiara che per questo motivo esse non potevano essere considerate scientifiche. In particolare sottolinea la mancanza di una definizione rigorosa della nozione di continuità e si propone di fornirla e con essa fondare il calcolo differenziale su sole basi aritmetiche. Queste ricerche porteranno alla costruzione di una teoria degli irrazionali, esposta nel 1872 nell'opera citata. Vediamone la sostanza.

Riflettendo su che cosa costituisse la continuità della linea giunge “alla conclusione che l’essenza della continuità di un segmento [...] è dovuta [... al fatto che] in qualsiasi divisione dei punti del segmento in due classi, tali che che ciascun punto appartenga ad una e una sola classe, e che ogni punto di una classe si trovi a sinistra di ogni punto dell’altra classe, v’è uno ed un solo punto che determina la divisione” [10, Boyer, p. 644]. Dedekind si accorse che è possibile istituire una corrispondenza biunivoca tra i punti di un segmento e i numeri reali se questi vengono istituiti in un particolare modo.

Egli definisce *sezione* [*Schnitt*] ogni divisione dei numeri irrazionali in due classi  $A$  e  $B$  tali che ogni numero della prima classe sia minore di ogni numero della seconda classe. E chiama queste sezioni numeri reali. Così riesce a dimostrare un teorema equivalente al principio dell’estremo inferiore: ogni sezione dei numeri reali (definita in modo naturale ed analogo alle sezioni dei numeri razionali) ammette elemento separatore  $L$ , cioè un numero reale  $L$  tale che, se  $(\alpha, \beta)$  è una sezione dei numeri reali,  $\alpha \leq L \leq \beta$ . In questo modo è possibile istituire una corrispondenza biunivoca tra i numeri reali e i punti di una linea. Guadagnata questa corrispondenza, i risultati analitici ottenuti a partire dall’ipotesi intuitiva e di carattere geometrico che la linea fosse continua trovano una rigorosa giustificazione aritmetica.

Con ciò, oltre a fornire la definizione dei numeri reali di Dedekind che assieme a quella di Cantor sono le più note, si vuole sottolineare il cambiamento di prospettiva da un rigore di tipo euclideo dove le costruzioni geometriche sono ritenute sufficienti per dimostrare risultati analitici ad un rigore che vuole l’analisi fondata sull’aritmetica.

È inoltre importante notare che questa nuova sensibilità riguardo al rigore delle dimostrazione di determinati risultati non è stata acquisita da un giorno all’altro ma è il frutto di un lento progresso intellettuale e culturale. Ripercor-

erne le tappe esula dagli scopi del presente lavoro, per un approfondimento si vedano le note di Zariski a [7, Dedekind, 1872]. Appare tuttavia opportuno farne qualche accenno.

Le definizioni dei numeri reali fornite da Weierstrass, Dedekind e Cantor permisero di dimostrare tutta quella classe di problemi relativi alla continuità della linea, come ad esempio il *teorema dei valori intermedi* o il *principio dell'estremo inferiore*. Accanto a problemi di natura geometrica, la mancanza di una definizione rigorosa dei numeri reali si faceva sentire nella teoria della serie.

Comunque, sia in un caso che nell'altro, l'errore logico dei matematici precedenti consisteva nel fatto che si volevano dimostrare risultati in qualche modo equivalenti alle proprietà a partire dalle quali i numeri reali vennero in seguito costruiti o che si prendevano questi risultati come intuitivamente evidenti per dimostrarne altri sostanzialmente equivalenti. Difatti Cauchy non riuscì a dimostrare la sufficienza del proprio criterio di convergenza [11, 1821] e Cantor partì proprio dalla definizione di successione di Cauchy per istituire i numeri reali. Oppure si vedano i tentativi di dimostrare il *teorema dei valori intermedi* da parte di Bolzano [12, 1817] e sostanzialmente Dedekind si è rifatto a qualcosa di analogo per istituire i numeri reali. Tuttavia, il problema dei numeri reali e della loro proprietà di continuità è molto più antico. Almeno in abito occidentale si può affermare che esso venga inaugurato con la scoperta dell'irrazionalità di  $\sqrt{2}$  da parte dei pitagorici nel V secolo a.C. e rimarrà sempre oggetto di discussione e di ricerca fino al 1872, l'anno di pubblicazione delle teorie dei numeri reali da parte di Dedekind e Cantor che ne segna la piena risoluzione rispetto al moderno concetto di rigore.

Si vuole infine ricordare, come giustamente si può ritrovare in [10, Boyer, p. 642], che questo percorso di smarcamento dell'analisi da giustificazioni di natura intuitiva può essere contestualizzato in una cornice di più ampio respiro se si considera, da un lato, la progressiva astrazione dell'algebra registrata fin dall'inizio dell'800 (per un approfondimento si rimanda a [10, Boyer, p. 642 e capitolo 26]), dall'altro, la nascita delle geometrie non-euclidee e il progressivo svincolamento delle geometrie da giustificazioni o dichiarazioni di leicità di queste che poggiassero sulla nostra percezione della realtà.

#### 12.3.4 I numeri reali

Come abbiamo visto nel paragrafo 12.3.3, intuendo la possibilità di poter dimostrare l'unicità della rappresentazione in serie di Fourier a meno di una

particolare successione infinita di valori, Cantor avvertì la necessità di fare una costruzione rigorosa dei numeri reali. Egli, infatti, scrisse:

“Ho cercato di dimostrare che due serie trigonometriche che convergono e hanno la stessa somma per tutti i valori di  $x$ , hanno gli stessi coefficienti; ho poi dimostrato che questo teorema resta vero se per un numero finito di valori di  $x$  si rinuncia o alla convergenza o all’uguaglianza delle somme delle due serie. L’estensione che ho in mente consiste in questo: che si può rinunciare alla convergenza o alla concordanza delle somme delle serie per un numero infinito di valori di  $x$  senza che il teorema cessi di essere vero.

Per raggiungere questo scopo sono, però, costretto a premettere alcune considerazioni utili non appena siano date delle grandezze numeriche, in numero finito o infinito”.

Non tutti i matematici di allora accettarono le varie definizioni e costruzioni dei numeri reali presentate da Cantor e da altri suoi contemporanei. Uno di questi fu Kronecker, il quale esigeva che l’aritmetica fosse finita e che l’aritmetica e l’analisi venissero basate sui numeri interi. Egli sosteneva, infatti: “Dio ha creato i numeri interi; tutto il resto è opera dell’uomo”. Fu questo il principale motivo di conflitto e disaccordo con Cantor che portò Kronecker ad opporsi in tutti i modi alla diffusione delle teorie di Cantor e al suo avanzamento nella carriera accademica.

Come leggiamo in [13, 1992], la matematica non poteva fare a meno dei numeri irrazionali ma i “puristi” matematici si chiedevano: sono numeri, queste quantità irrazionali? Un numero rispettabile aveva un discorso, un’espressione del suo valore di lunghezza finita. Una grandezza non dominabile con questi strumenti aveva qualcosa di infido. Ma se almeno fosse stato possibile definire le quantità irrazionali per mezzo di quelle razionali, il fatto di trattarle come numeri avrebbe cominciato ad avere una giustificazione concettuale.

Fu per questo motivo che la costruzione dei numeri reali effettuata da Cantor ebbe come punto di partenza i razionali.

Osserviamo inoltre che fu fondamentale il contatto con Weierstrass, il quale avvicinò Cantor alla cosiddetta *ricerca sui fondamenti*. Il principale scopo di questa disciplina è quello di individuare un piccolo numero di concetti semplici e sicuri sulla cui base ricostruire, per mezzo di definizioni rigorose, l’intero edificio della matematica. Era opinione comune che il fondamento della matematica andasse ricercato nell’aritmetica elementare che studia le proprietà

dei numeri naturali. Tutti gli altri numeri (negativi, razionali, irrazionali, complessi) si dovevano definire mediante i naturali e le loro proprietà andavano ricondotte all'aritmetica elementare. Ora i numeri razionali erano già stati ben definiti a partire dai naturali ed erano ben utilizzabili. Per estendere tale costruzione e definire i numeri reali, si poteva dunque partire dai razionali.

Vediamo ora nel dettaglio la costruzione fatta da Cantor. Cantor definì  $A$  il dominio dei numeri razionali compreso lo zero. Si noti che la teoria parte dai numeri razionali, intesi come dati.

Fornisce la seguente definizione

*Definizione 8* (Successione fondamentale). Sia  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  una successione di numeri razionali. Tale successione è detta “successione fondamentale” se esiste un intero  $N$  tale che per ogni razionale positivo  $\varepsilon$  si ha  $|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$  per ogni  $m$  intero positivo e per ogni intero  $n \geq N$

Data tale definizione, Cantor scrive: “Espresso tale proprietà della successione  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  con queste parole “*Tale successione ha un limite b determinato*”. Per il momento queste parole non hanno altro senso se non quello di esprimere questa proprietà della successione: ad essa associamo un apposito segno  $b$ . Date successioni distinte di questo tipo, si dovranno introdurre segni  $b, b', b'', \dots$  distinti”.

Egli afferma cioè che, se la successione  $\{a_n\}$  soddisfa a questa condizione allora essa ha un limite determinato  $b$ . Egli sottolinea come a questo punto del lavoro le dette parole servono esclusivamente ad enunciare una proprietà delle successioni fondamentali imposta loro, ovvero a far capire che ad ogni siffatta successione  $\{a_n\}$  è associato uno speciale simbolo [Zeichen]  $b$ . L'insieme di tali  $b$  costituisce il dominio  $B$ .

Cantor procede allora fornendo le seguenti definizioni.

*Definizione 9* (Relazioni d'ordine). Se  $\{a_n\}$  è associata con  $b$ ,  $\{a'_n\}$  è associata con  $b'$ , allora se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intero  $N$  tale che per ogni intero  $n > N$  si ha

- (i)  $a_n - a'_m < \varepsilon$  si può dire che  $b$  è uguale a  $b'$ ;
- (ii)  $a_n - a'_m < -\varepsilon$  si può dire che  $b$  è minore di  $b'$ ;
- (iii)  $a_n - a'_m > \varepsilon$  si può dire che  $b$  è maggiore di  $b'$ .

Poichè ogni numero irrazionale  $a$  può essere definito tramite la successione costante, che è fondamentale,  $\{a\}$ , ne segue che ogni successione fondamentale ha una e soltanto una delle tre relazioni con un numero razionale.

Grazie alle assunzioni fatte sopra è possibile estendere le operazioni elementari eseguite sui numeri razionali ai due domini  $A$  e  $B$  presi insieme. Per l'esattezza, se  $b$ ,  $b'$  e  $b''$  sono tre grandezze numeriche di  $B$ , le formule

$$b + b' = b'', \quad bb' = b'', \quad \frac{b}{b'} = b'' \quad (12.7)$$

esprimono il fatto che fra le successioni

$$\begin{aligned} &a_1, a_2, \dots \\ &a'_1, a'_2, \dots \\ &a''_1, a''_2, \dots \end{aligned}$$

corrispondenti ai numeri  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$  sussistono rispettivamente le relazioni

$$\begin{aligned} \lim(a_n + a'_n - a''_n) &= 0; \\ \lim(a_n a'_n - a''_n) &= 0; \\ \lim\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) &= 0; \end{aligned}$$

Prima di proseguire nello studio degli elementi del dominio  $B$ , è importante far notare che, presi due elementi  $b, b' \in B$ , scrivere  $b = b'$  non significa identificare questi due elementi tra loro ed associarli ad uno stesso valore ma significa solamente che sussiste una particolare relazione tra le successioni fondamentali che li definiscono. Lo stesso Cantor, infatti, scrive:

“...il fare uguali due grandezze  $b$  e  $b'$  di  $B$  non comporta la loro identità ma esprime soltanto una determinata relazione fra le successioni alle quali esse sono determinate”.

A questo punto Cantor abbandonò l'uso del termine “ simbolo” per indicare gli elementi di  $B$  ed usò invece il termine “Zahlengrossen” (numero). Tuttavia rimaneva un problema relativo alla natura degli elementi del dominio  $B$ . Egli infatti sosteneva che tali elementi erano insignificanti in se stessi ed aveva creato una teoria “nella quale i numeri, mancanti di generale oggettività in se stessi, appaiono solo come componenti di teoremi che hanno oggettività”. Sostanzialmente un elemento  $b \in B$  rappresentava soltanto una sequenza fondamentale.

In seguito concentrò i propri sforzi per istituire una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e i numeri reali. Scelta un'origine e un'unità di misura, era facile la biunivocità dei punti commensurabili con l'unità e i numeri razionali.

Poiché, dato un punto, esso poteva essere avvicinato a piacere da una successione di punti commensurabili tale che i corrispondenti numeri razionali  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  costituissero una successione fondamentale, era possibile stabilire una corrispondenza iniettiva tra i punti di una retta e i numeri reali. Dunque, fissata l'origine, ad ogni punto della retta reale potevo associare un numero corrispondente alla distanza di tale punto dall'origine: questa poteva essere o una grandezza  $a \in A$  (cioè un numero razionale) altrimenti poteva essere avvicinata da una successione  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  di razionali, e si poteva quindi affermare che la distanza era il valore  $b \in B$ , limite di tale successione. Ad ogni punto della retta potevo quindi associare un elemento del dominio B. Tuttavia, non riusciva a dimostrare il viceversa e fu costretto ad invocare il seguente assioma:

“Anche viceversa, ad ogni numero corrisponde un determinato punto della linea la cui coordinata è uguale a quel numero ”.

Questo assioma era utile a Cantor per due motivi: da un lato dava agli elementi del dominio B un'ulteriore oggettività, dall'altro dava senso di simmetria e completezza alle relazioni tra la linea e i numeri reali. Grazie ad esso, infatti, Cantor poteva affermare che ad ogni numero reale era possibile associare un punto della retta e viceversa: c'era quindi una corrispondenza biunivoca tra retta e numeri reali.

Cantor proseguì costruendo C da B in termini di sequenze fondamentali di elementi di B con lo stesso procedimento con cui aveva costruito B da A e così via, reiterando un numero finito  $\lambda$  volte la costruzione. Egli si accorse che era possibile stabilire una corrispondenza iniettiva tra A e B ma non biettiva; mentre tra B ed ognuno degli altri sistemi era possibile istituire una corrispondenza biettiva. A questo punto Canto sottolineò : “Sebbene B e C possano essere considerati come identici, è tuttavia essenziale nella teoria seguita mantenere l'astratta distinzione tra B e C”.

Ripetendo lo schema sopra esposto che dal dominio A lo aveva portato alla costruzione dei domini B,C,...,M,L, Cantor, considerando insiemi di punti anzichè successioni di valori, giunse ad introdurre il concetto di insieme derivato.

### 12.3.5 Gli insiemi derivati

Come affermato nel capitolo precedente, l'idea di insieme derivato giunse nella mente di Cantor quando egli pensò di ripetere la costruzione dei domini  $B, C, \dots$  considerando, anziché valori numerici, punti della retta.

Prima di giungere alla definizione precisa di insieme derivato, Cantor anticipò le seguenti definizioni:

*Definizione 10* (Insieme di punti). Chiamiamo insieme di punti ogni molteplicità data, finita o infinita, di punti.

*Definizione 11* (Punto limite). Per “punto limite di un insieme di punti  $P$ ” si intende un punto della linea tale che in ogni suo intorno sia possibile trovare infiniti punti di  $P$ .

Osserviamo che il punto limite corrisponde a quello che noi comunemente chiamiamo punto di accumulazione.

*Definizione 12* (Intorno). Per “intorno” di un punto si intende un qualsiasi intervallo che contenga il punto nel suo interno.

*Definizione 13* (Punto isolato). Se un punto non è punto limite è detto “punto isolato”.

Cantor osservò subito che un insieme con un numero infinito di punti ha almeno un punto limite.

Dopo queste premesse, poté dare la definizione di insieme derivato:

*Definizione 14* (Primo insieme di punti derivato). Dato un insieme  $P$ , l'insieme dei punti limite di  $P$  è detto “primo insieme di punti derivato” [erste Ableitung] di  $P$  ed è indicato con  $P'$ .

Il primo insieme derivato di un insieme  $P$  è, dunque, l'insieme dei punti di accumulazione di  $P$ .

Facciamo un esempio: sia  $P$  l'insieme di tutti i punti razionali della linea, corrispondente all'insieme di tutti i numeri razionali  $A$ . Allora  $P'$  è insieme di tutti i punti del continuo lineare, corrispondente all'insieme di tutti i numeri reali

A questo punto Cantor proseguì affermando: “Se l'insieme  $P'$  non è composto da un numero finito di punti, esso ha senz'altro un insieme derivato  $P''$  che chiamerò *derivato secondo* di  $P$ ”. Esso risulta essere l'insieme dei punti di accumulazione dei punti di accumulazione di  $P$ .

Con  $\nu$  di questi passaggi arriviamo al concetto di derivato  $\nu$ -esimo di  $P$ .

Considerando questi insiemi derivati, Cantor diede un'ulteriore definizione:

*Definizione 15* (Essere dell'  $\nu$ -esima specie per un insieme di punti). Dato un insieme di punti  $P$ , dato un intero  $\nu$ , se  $P^{(\nu)}$  è composto da un numero finito di punti (e dunque  $P^{(\nu+1)}$  non esiste), allora si dice che  $P$  è dell' "  $\nu$ -esima specie".

Per dimostrare l'esistenza di  $P^{(\nu)}$  considerò un punto la cui ascissa fosse una quantità numerica  $\rho$  del  $\nu$ -esimo tipo. La successione che la determina è costituita da quantità numeriche del  $(\nu - 1)$ -esimo tipo. La successione che determina ciascuna di queste quantità è del  $(\nu - 2)$  tipo e così via. Alla fine ottenne una successione di razionali e l'insieme dei punti aventi tali ascisse costituiva l'insieme dei punti del  $\nu$ -esimo tipo.

Così facendo Cantor era riuscito a determinare insiemi infiniti di punti con proprietà strutturali rigorosamente specificate e fu quindi in grado di estendere ulteriormente il suo teorema dell'unicità delle serie trigonometriche a questi particolari insiemi infiniti.

*Teorema 10.* Se un'equazione è della forma

$$0 = \frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx + d_n \cos nx \quad (12.8)$$

per tutti i valori di  $x$  ad eccezione di quelli che corrispondono ai punti di un dato insieme di punti  $P$  di  $\nu$ -esima specie nell'intervallo  $(0, 2\pi)$ , con  $\nu$  intero, allora  $c_0 = c_n = d_n = 0$  per ogni intero  $n$ .

Riprendendo quanto visto nel paragrafo 12.3.2, con questo teorema Cantor afferma che:

date due serie trigonometriche

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

e

$$f(x) = \frac{1}{2}a'_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a'_n \cos(nx) + b'_n \sin(nx))$$

esse hanno gli stessi coefficienti se convergono e hanno stessa somma per ogni valore di  $x$  nell'intervallo  $(0, 2\pi)$  a meno dei punti di un insieme di  $\nu$ -esima specie.

La dimostrazione di questo teorema procede in modo simile a quella del teorema dell'unicità dell'Aprile 1870 e a quella pubblicata nel Notiz nel 1871.

A conclusione della classificazione degli insiemi di punti, Cantor diede le seguenti due definizioni:

*Definizione 16* (Insieme di punti di primo genere). Gli insiemi di punti per ciascuno dei quali esiste un intero  $\nu$  tale che essi sono di  $\nu$ -esima specie sono detti di “primo genere”.

*Definizione 17* (Insieme di punti di secondo genere). Gli insiemi di punti tali che esiste il derivato  $\nu$ -esimo per ogni valore intero positivo di  $\nu$  e  $P^\nu$  è vuoto solo per valori non finiti di  $\nu$  sono detti di “secondo genere”.

Gli insiemi di secondo genere erano dunque quelli per cui  $P^\infty = \emptyset$ , dove  $\infty$  è il più piccolo numero infinito oltre tutti i numeri finiti, cioè  $n < \infty$  per tutti i valori finiti di  $n$ . A questo punto dei suoi studi, Cantor non riuscì a elaborare bene il concetto di  $P^\infty$  e sue possibili estensioni né aveva le basi per stabilire la differenza concettuale tra  $P^\nu$  e  $P^\infty$ . Alcuni decenni dopo, avendo a disposizione maggiori strumenti, queste “idee embrionali” lo portarono alla definizione di numero transfinito.

Analizzando la teoria degli insiemi di Cantor, il matematico tedesco Ernst Zermelo (1871-1953) scrisse in una nota:

“Dal concetto di “punto limite” [...] di un insieme infinito di punti o numeri si ricava quello di “insieme derivato”, che poi, iterato  $\alpha$  volte, conduce alla definizione di “insieme di punti di  $\alpha$ -esima specie”. Un’ulteriore estensione oltre ogni indice finito  $\alpha$  ha poi portato l’autore, per sua necessità interna, a creare il concetto di numero ordinale “transfinito”  $\omega, \omega + 1, \dots, \omega^2, \dots$  Possiamo dunque riconoscere in questo concetto di derivato “superiore” di un insieme di punti il più autentico germe della “teoria degli insiemi cantoriana”, e nella teoria delle serie trigonometriche il suo luogo di nascita. ”

## 12.4 La potenza di un insieme

Gli studi fatti sui numeri reali e sugli insiemi derivati, suscitarono in Cantor la voglia di conoscere la relazione tra i diversi tipi di insiemi infiniti che aveva incontrato; per esempio la relazione tra insiemi infiniti con i numeri naturali e insiemi infitti continui come i reali.

Egli aveva infatti osservato che il dominio dei razionali era strettamente contenuto in quello dei reali (esisteva una funzione iniettiva da A a B ma non una biezione). Studiando il processo di derivazione, inoltre, aveva osservato che gli insiemi di  $n$ -esima specie costituivano, al crescere di  $n$ , una “vertiginosa gerarchia di concentrazioni sempre più addensate” che però non consentivano di costruire il continuo; essi erano una sorta di “infinito numerabile all’ $n$ -esima potenza”.

Il 29 Novembre 1873, un anno dopo il loro primo incontro in Svizzera, Cantor scrisse a Dedekind ponendogli la seguente questione:

*“Sia  $(n)$  la collezione di tutti gli interi positivi  $n$  e  $(x)$  la collezione di tutti i numeri reali  $x$ .  $(n)$  e  $(x)$  possono essere posti in corrispondenza cosicché ogni elemento di una collezione corrisponda ad uno e ad un solo dell’altra collezione? ”.*

Prima di addentrarci nello studio dei risultati ottenuti da Cantor sulla cardinalità degli insiemi infiniti, analizziamo brevemente come era stato concepito in concetto di infinito fino ad allora.

### 12.4.1 L’infinito nel passato

Il lavoro svolto da Cantor tra il 1874 e il 1884 costituisce l’origine della teoria degli insiemi. Prima di allora, il concetto di insieme era stato usato implicitamente e in modo elementare, fin dall’inizio della matematica, ma nessuno aveva realizzato che la teoria degli insiemi avesse dei contenuti non banali: prima di Cantor venivano considerati principalmente insiemi finiti e, come concetto separato, “l’infinito”, che era trattato come argomento filosofico più che matematico.

Fin dai tempi di Zenone i filosofi avevano parlato di infinito (spesso in teologia), ma nelle discussioni riguardanti tale tema gli esempi più frequentemente citati erano quelli di una potenza illimitata o di grandezze indefinitamente

grandi. Solo raramente, invece, l'attenzione era stata rivolta agli infiniti elementi di un insieme come, per esempio, i numeri naturali o i punti di un segmento. Proprio in questo contesto, il concetto di infinito aveva portato una serie di problematiche poiché non si riusciva a precisare il significato di “più piccolo” e “più grande” per quantità infinite.

Galileo Galilei aveva osservato che l'insieme dei numeri pari è contenuto nell'insieme di tutti i naturali poiché ogni pari è un numero naturale ma non tutti i naturali sono numeri pari. Tuttavia, era possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra questi due insiemi infiniti:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots \end{array}$$

La conclusione di Galileo era stata: “Degli infiniti non si può dire uno esser maggiore o minore o eguale all'altro”.

Infatti l'insieme infinito dei naturali risultava associabile biunivocamente ad una sua parte propria e queato era in contrapposizione con quanto affermato da Euclide cioè che “ il tutto è maggiore delle parti”.

Citando alcuni matematici più vicini a Cantor, l'opinione di Leibniz riguardo all'infinito era che: “La nozione di numero di tutti i numeri interi è in sè contraddittoria e dovrebbe essere rifiutata”.

Gauss affermò invece: “Protesto contro l'uso di una grandezza infinita che non è mai lecito in matematica”.

Cauchy e Weierstrass, infine, ritenevano che si poteva parlare di infinitamente grande solo come incompletezza del processo considerato.

Il primo a rivendicare la trattabilità matematica dell'infinito fu Bolzano il quale propose anche una sorta di “aritmetica dell'infinito” la quale, però, non ebbe molto successo poiché portò ad alcuni paradossi. Fu probabilmente anche leggendo le opere di Bolzano che in Cantor si sviluppò l'idea dell'esistenza di diversi tipi di infinito. Come leggiamo nell'introduzione di Gianni Rigamonti di [13], l'aritmetica bolzaniana degli infiniti non appare convincente; c'era però alla sua base un'idea alla quale Cantor non avrebbe mai rinunciato, cioè che gli elementi di un insieme infinito-determinato in atto devono avere un numero, e c'era anche un esempio di una coppia di insiemi infiniti-determinati uno dei quali appare maggiore dell'altro che suonava molto convincente:

“... l'insieme dei punti contenuti in un segmento  $az$ , breve quanto si voglia, è un insieme che si deve considerare infinitamente più

grande dell’insieme infinito di quelli che sottraiamo al precedente quando, partendo da uno dei suoi punti estremi  $a$ , ad una determinata distanza ne togliamo un secondo  $b$ , poi, ad una distanza minore, ne togliamo un terzo  $c$ , e procediamo senza fine in questo modo, diminuendo secondo una legge le distanze in modo che il loro infinito insieme, sommato, sia minore o uguale alla distanza  $az$ . Infatti, poiché anche le infinite parti  $ab, bc, cd, \dots$  nelle quali è divisa  $az$  sono tutte a loro volta linee finite, con ognuna si può procedere come abbiamo appena supposta di fare con  $az$ ; in ciascuna, cioè è possibile individuare un insieme infinito di punti come in  $az$ , e questi punti appartengono anche ad  $az$ . Perciò un insieme infinito di punti cosiffatto deve essere contenuto infinite volte nell’intera  $az$ ".

Abbiamo, quindi, ottenuto un infinito “contenuto infinite volte” in un altro quindi, intuitivamente, molto più piccolo.

In questo esempio di Bolzano sono già presenti gli elementi che permisero a Cantor di ipotizzare che l’infinito più “piccolo” fosse tale in quanto *numerabile* e quello più “grande” lo fosse in quanto *continuo*.

Insomma, si era già parlato di infinito, ma nessuno prima del 1872 era stato in grado di dire esattamente di cosa stesse parlando. In quest’anno, infatti, Dedekind diede la sua definizione di insieme infinito:

“Un insieme si dice infinito quando è simile a una propria parte; in caso contrario si dice finito.”

Cantor, come Dedekind, riconobbe tale proprietà fondamentale degli insiemi ma, in più, si rese conto che non tutti gli insiemi infiniti sono simili. È possibili, invece, stabilire una gerarchia di insiemi a seconda della “*Mächtigkeit*” o “potenza” dell’insieme.

#### 12.4.2 Breve nota introduttiva

Prima di addentrarci nello studio fatto da Cantor sulla cardinalità degli insiemi, descriviamo brevemente la sequenza cronologica con cui egli pubblicò le sue scoperte relative a questo ambito.

L’inizio della teoria degli insiemi come branca della matematica viene spesso fatto coincidere con la pubblicazione dell’articolo di Cantor del 1874 intitolato “*Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*” (Su

una proprietà della classe di tutti i numeri reali algebrici).

Questo articolo fu il primo a fornire una prova rigorosa dell'esistenza di più tipi di infinito, infatti in precedenza tutti gli insiemi infiniti erano stati implicitamente assunti avere la stessa grandezza, cioè lo stesso numero di elementi. In questo lavoro, oltre alla dimostrazione della numerabilità (cioè la proprietà per un insieme di essere posto in corrispondenza biunivoca con gli interi positivi) dei numeri algebrici e dei razionali, pubblica la dimostrazione della non numerabilità dei numeri reali. Oltre a questa prima dimostrazione, nel 1891 Cantor ne pubblicherà una seconda, più nota ed elegante, che utilizza il suo famoso argomento diagonale.

È da osservare come, nonostante il risultato più importante contenuto nel soprattutto articolo sia certamente quello relativo alla non numerabilità dei reali, Cantor abbia deciso di nominare nel titolo solo la questione riguardante i numeri algebrici. Questo perché, nella dimostrazione riguardante i numeri reali egli utilizza sia la continuità che la sua teoria dei numeri irrazionali. Entrambi questi argomenti erano sgraditi a Kronecker ed, essendo egli uno degli editori del Crelle's Journal (dove tale articolo doveva essere pubblicato), c'era la paura da parte di Cantor che Kronecker si opponesse all'inserimento dei suoi risultati.

Sarà solo nell'articolo successivo, intitolato *“Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre”* (Contributo alla teoria della molteplicità) pubblicato nel 1878, che Cantor inserisce la definizione precisa di maggiore, minore e uguale potenza. In questo articolo, inoltre, è presente un altro importante risultato: la dimostrazione che la cardinalità di  $\mathbb{R}^n$  è uguale alla cardinalità di  $\mathbb{R}$ .

#### 12.4.3 Maggiore, minore o uguale potenza

Quella che noi oggi chiamiamo “cardinalità” di un insieme, venne inizialmente denominata da Cantor con il termine “*Mächtigkeit*”, cioè “potenza”. Nell'articolo del 1878 troviamo la seguente

*Definizione 18* (Essere della stessa potenza o equivalenti). “Mi sia concesso, se due insiemi  $M$  e  $N$  possono essere associati l'uno all'altro in modo univoco e completo [biottivo], elemento per elemento (cosa che se è possibile in una maniera lo è sempre anche in molte altre), di dire d'ora in poi che tali insiemi hanno “uguale potenza”, o anche che sono “equivalenti”. Per “parte costitutiva” di un insieme  $M$  intendiamo ogni altro insieme  $M'$  i cui elementi siano anche elementi di  $M$ . Se i due insiemi  $M$  e  $N$  non hanno uguale potenza, o avranno uguale potenza  $M$  e una parte costitutiva di  $N$ , o l'avranno  $N$  e

una parte costitutiva di  $M$ ; nel primo caso diciamo che la potenza di  $M$  è “minore”, nel secondo caso che è “maggiore” di quella di  $N$ .

Sempre nel paragrafo introduttivo di questo articolo, Cantor afferma che valgono i seguenti risultati:

*Teorema 11.* Per gli insiemi finiti “il concetto di potenza corrisponde a quello di numero” di elementi, cioè “a due insiemi [...] finiti] spetta un’uguale potenza se e solo se il numero dei loro elementi è uguale”.

*Teorema 12.* Una parte costitutiva di un insieme finito ha sempre una potenza minore di quella dell’insieme stesso, ma questa relazione viene del tutto meno negli insiemi infiniti, cioè composti di un numero infinito di elementi [... a meno che] non si sappia già che la potenza [...] dell’insieme] non è uguale a quella [...della sua parte].

Un sottoinsieme di un insieme finito, dunque, ha sempre una potenza minore di quella dell’insieme stesso. Ciò non è sempre vero, però, per gli insiemi infiniti.

È da sottolineare l’importanza della definizione di “ugual potenza” data da Cantor: oltre al merito che nel finito corrisponde al numero di elementi e valgono le tradizionali relazioni di “maggiore”, “minore” ed “uguale”, grazie ad essa vengono risolti i paradossi sull’infinito a cui erano giunti alcuni matematici del passato. Nell’esempio sopracitato proposto da Galileo, non risulta più alcun problema perché l’uguaglianza tra due insiemi infiniti non significa più essere composti dagli stessi elementi ma solamente l’esistenza di una relazione biunivoca tra di essi. Ne risulta che, grazie a questa nuova definizione, il “tutto è maggiore delle parti” solo nel finito.

#### 12.4.4 Gli insiemi numerabili

In questo paragrafo elenchiamo i principali risultati ottenuti da Cantor riguardanti alcuni insiemi numerabili e la relazione tra di essi.

Prima di enunciare il primo teorema, diamo la seguente definizione riportando le parole di Cantor stesso:

*Definizione 19.* Per numero reale algebrico si intende in generale una grandezza numerica reale  $\omega$  che soddisfi un’equazione non identica della forma

$$a_0\omega^n + a_1\omega^{n+1} + \dots + a_n = 0 \quad (12.9)$$

dove  $n, a_0, a_1, \dots, a_n$  sono numeri interi; posiamo senz'altro supporre positivi i numeri  $n$  e  $a_0$ , primi fra loro i coefficienti  $a_0, a_1, \dots, a_n$  e irriducibile l'equazione (12.9).

Risulta valere il seguente

*Teorema 13.* La totalità dei numeri reali algebrici forma una classe di grandezze numeriche ( $w$ ) alla quale è possibile associare univocamente la classe di tutti i numeri interi positivi  $\nu$  in modo che ad ogni reale algebrico  $\omega$  corrisponda un intero positivo  $\nu$  e viceversa.

*Dimostrazione* Sia  $\omega$  un numero reale algebrico che soddisfa l'equazione (12.9).

Chiamiamo *altezza* di  $\omega$  e indichiamo con  $N$  la somma dei valori assoluti dei coefficienti dell'equazione più  $n - 1$ , dove  $n$  è il grado di  $\omega$ . Cioè:

$$N = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|$$

L'altezza sarà dunque un intero positivo determinato per ogni reale algebrico  $\omega$ . D'altronde, per ogni intero positivo  $N$  esiste solo un numero finito di reali algebrici di altezza  $N$ . Sia  $\phi(N)$  questo numero (per esempio  $\phi(1) = 1, \phi(2) = 2, \phi(3) = 4$ ).

Possiamo dunque ordinare tutti i numeri reali algebrici nel seguente modo: al primo posto mettiamo  $\omega_1$ , l'unico numero di altezza  $N = 1$ ; seguiranno, in ordine di grandezza crescente, i  $\phi(2) = 2$  numeri algebrici di altezza  $N = 2$  che indicheremo con  $\omega_1, \omega_2$ , poi verranno i  $\phi(3) = 4$  algebrici di altezza  $N = 3$ . Procedendo in questo modo otteniamo tutti i numeri reali algebrici nella forma

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$$

ed abbiamo in questo modo stabilito una corrispondenza biunivoca tra la classe dei numeri reali algebrici ( $\omega$ ) e quella dei numeri naturali, associando ad ogni  $\omega_n$  il proprio pedice  $n$ .  $\square$

Nello studio di quali insiemi infiniti risultassero essere numerabili, Cantor dimostrò che

*Teorema 14.* La cardinalità dell'insieme di tutti i numeri razionali è uguale alla cardinalità del numerabile.

*Dimostrazione* La figura sopra riportata rappresenta la corrispondenza biunivoca che Cantor identificò tra l'insieme dei numeri razionali e i naturali. Seguendo le frecce possiamo "numerare" i razionali in modo da far corrispondere

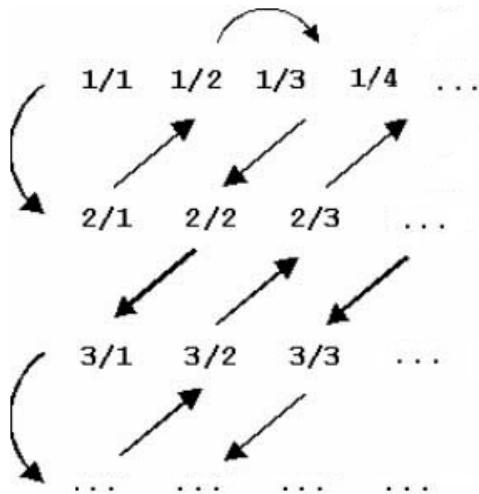


Figura 12.2: Numerazione dei razionali

ad ogni razionale un preciso numero naturale e viceversa. Per quanto riguarda le frazioni che rappresentano lo stesso valore (per esempio  $1/2, 2/4, 3/6\dots$ ) sarà sufficiente numerare la prima e, quando si incontrano le frazioni con ugual valore, passare al numero razionale successivo.

Numerati i razionali positivi, in modo analogo si potranno numerare i razionali negativi e unendo questi due insiemi, otteniamo nuovamente un insieme numerabile.  $\square$

Osserviamo come sia stata geniale l'idea di Cantor che gli permise di dimostrare un risultato così importante in modo abbastanza elementare. Il metodo dimostrativo utilizzato è ora noto con il nome di *primo procedimento diagonale*.

Tale metodo venne utilizzato anche per dimostrare un altro importante risultato:

*Teorema 15.* L'unione di una famiglia finita o numerabile di insiemi numerabili risulta essere un insieme numerabile

*Dimostrazione* Sia  $\{X_i\}_{i \geq 0}$  una famiglia numerabile di insiemi numerabili e sia  $X := \bigcup_{i \geq 0} X_i$ .

Posto  $X_i := \{x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}, \dots\}$ , gli elementi di  $X$  possono essere dispo-

sti in una tabella infinita:

$X_0$	$x_{00} x_{01} x_{02} x_{03} x_{04} \dots x_{0n} \dots$
$X_1$	$x_{10} x_{11} x_{12} x_{13} x_{14} \dots x_{1n} \dots$
$X_2$	$x_{20} x_{21} x_{22} x_{23} x_{24} \dots x_{2n} \dots$
$X_3$	$x_{30} x_{31} x_{32} x_{33} x_{34} \dots x_{3n} \dots$
	.....
$X_i$	$x_{i0} x_{i1} x_{i2} x_{i3} x_{i4} \dots x_{in} \dots$
	.....

e quindi possono essere contati in diagonale:

$$X = \{x_{00}, x_{10}, x_{01}, x_{20}, x_{11}, x_{02}, x_{30}, x_{21}, \dots\}$$

Precisamente, per ogni fissato  $i \geq 0$ , sia

$$D_i = \{x_{i-k,k}; k = 0, \dots, i\} = \{x_{i0}, x_{i-1,1}, x_{i-2,2}, \dots, x_{0,i}\}$$

la *i-esima diagonale*. Notiamo che  $|D_i| = i + 1$ . Poiché ogni elemento  $x_{ij} \in X$  appartiene ad una ed una sola diagonale, precisamente quella di indice  $k = i + j$ , allora a  $x_{ij}$  possiamo far corrispondere il numero intero

$$d_{ij} = |D_0| + |D_1| + |D_2| + \dots + |D_{i+j-1}| + (j+1) = 1 + 2 + 3 + \dots + (i+j) + (j+1).$$

In questo modo si definisce una corrispondenza biunivoca che ad ogni  $x_{ij}$  associa  $d_{ij}$ .  $\square$

#### 12.4.5 Relazione numerabile-continuo

Come già anticipato all'inizio di questo capitolo, nel Novembre del 1873, Cantor scrisse una lettera a Dedekind in cui gli poneva il quesito riguardante la relazione tra la potenza del continuo e quella del numerabile. Cantor, come visto in precedenza, dagli studi fatti per la costruzione dei numeri reali e dei vari domini A,B,C,... e dallo studio degli insiemi che ammettevano derivato di ogni ordine  $n$ , già aveva intuito l'esistenza di infiniti diversi, in particolare che il continuo era “ maggiore” del numerabile.

Già nel Dicembre del 1873 riuscì a trovare una dimostrazione che confermava questa sua intuizione.

*Teorema 16.* I numeri reali non sono numerabili, cioè non possono essere posti in biezione con i numeri naturali.

*Dimostrazione.* Supponendo per assurdo che i reali siano numerabili, ne segue che possiamo rappresentarli come una successione indicizzata sui numeri naturali

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

Dato un qualunque intervallo  $(a, b)$  Cantor mostra che è possibile determinare un numero reale  $\mu$  in tale intervallo che non è contenuto nella data sequenza, quindi si arriva all'assurdo.

Per trovare un tale numero Cantor costruisce due sequenze di numeri reali nel seguente modo: prendiamo i primi due numeri della sequenza  $x_1, x_2, x_3, \dots$  che appartengono all'intervallo  $(a, b)$ . Chiamiamo il più piccolo di tali numeri  $a_1$  e l'altro  $b_1$ .

Allo stesso modo troviamo i primi due numeri della sequenza che appartengono all'interno dell'intervallo  $(a_1, b_1)$ . Chiamiamo il più piccolo  $a_2$  e il più grande  $b_2$ .

Continuando in questo modo si genera un sequenza di intervalli  $(a_1, b_1) \supseteq (a_2, b_2) \supseteq \dots$  tale che ogni intervallo della sequenza contiene tutti gli intervalli successivi. Ciò implica che la sequenza  $a_1, a_2, a_3, \dots$  è crescente, la sequenza  $b_1, b_2, b_3, \dots$  è decrescente e ogni membro della prima sequenza è minore di ogni membro della seconda.

Ora si possono verificare due possibilità: il numero di intervalli generati è finito o infinito.

- 1) Il numero degli intervalli è finito.

Sia  $(a_N, b_N)$  l'ultimo intervallo. Allora, siccome è l'ultimo intervallo, vuol dire che al più un  $x_n$  può appartenere a tale intervallo, ma allora ogni numero diverso da  $x_n$  che sta in tale intervallo non è contenuto nella sequenza data.

- 2) Il numero degli intervalli è infinito.

La successione degli  $a_n$  è crescente ed è costretta nell'intervallo  $(a, b)$ , quindi ha limite finito  $a_\infty := \lim a_n$ . Analogamente si trova  $b_\infty$ .

- Se  $a_\infty < b_\infty$  ogni numero reale in  $(a_\infty, b_\infty)$  non è contenuto nella sequenza data (procedendo come nel caso finito).

- Se  $a_\infty = b_\infty$ , (caso che nella classe  $(\omega)$  di tutti i numeri reali algebrici si verifica sempre) è facile vedere, se solo si tiene presente la definizione degli intervalli, il numero  $\mu$  non sta nella sequenza data. Infatti se così fosse dovrebbe esistere  $k$  tale che  $a_\infty = x_k$ , ma per un indice  $n$  abbastanza grande si ha che  $x_k$  non cade in  $(a_n, b_n)$ , mentre  $a_\infty$  sì.

□

Dopo aver analizzato l'articolo “*Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*”, Zermelo scrisse in una nota:

“Questo saggio, che inaugura la serie dei lavori di teoria degli insiemi, ha ancora a che fare esclusivamente col concetto elementare di “insieme numerabile”; vi si dimostra infatti che cadono sotto questo concetto sia la totalità dei numeri razionali sia quella dei numeri *algebrici*, ma *non* i numeri reali di un intervallo finito qualsiasi. La *prima* dimostrazione, che stranamente è la sola a trovare espressione nel titolo, è relativamente facile e anzi viene fuori da sé dal concetto di numero algebrico, una volta posto il problema. La prova della “non numerabilità” dei reali è invece riuscita a Cantor, come egli stesso dichiara, con difficoltà e dopo alcuni tentativi andati a vuoto. Oggi essa costituisce per noi, senza paragone, il risultato più profondo di questa ricerca e anche nel metodo è tipica di uno stile inferenziale specificamente insiemistico. Il concetto di “numerabilità” acquista senso e importanza solo grazie alla dimostrazione che esistono anche totalità matematiche “non numerabili” ben definite, dopo di che la transizione al concetto generale di “potenza” non è che il passo successivo. -In questo, che è un lavoro di fondazione, la terminologia non è pienamente formata: invece di “insieme” [Menge] Cantor dice “totalità” [Gesamtheit] o classe [Inbegriff], e lo stesso temine “numerabile” [abzählbar] è ancora assente - si parla sempre e soltanto di “associazione univoca” [eindeutige Zuordnung] degli elementi di una totalità a quelli di un’altra [...]”

Oltre alla dimostrazione pubblicata nell'articolo del 1874, alcuni anni dopo, Cantor riuscì, con un'idea brillante, a provare questo stesso risultato. Nel 1892 Cantor, infatti, pubblicò l'articolo *Über eine elementare Frage der*

*Mannigfaltigkeitslehre*, che contiene la famosa *dimostrazione per diagonalizzazione* della non numerabilità dei reali. La ripercorremo dando per buono il risultato, precedentemente mostrato da Cantor, dell'equipotenza dei reali  $\mathbb{R}$  con qualsiasi intervallo aperto  $(a, b)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$  (dimostreremo tale risultato in seguito).

*Dimostrazione (tramite diagonalizzazione).* Dobbiamo mostrare che non esiste nessuna biiezione tra  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{N}$ , ma siccome già sappiamo che  $\mathbb{R}$  e l'intervallo aperto  $(0, 1)$  sono in corrispondenza biunivoca, è sufficiente escludere qualunque biiezione tra quest'ultimo e  $\mathbb{N}$ . Prendiamo allora una qualunque funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow (0, 1)$  e mostriamo che non può essere biiettiva, anzi, mostriamo di più e proviamo che non può essere neppure suriettiva.

Per ottenere questo risultato, osserviamo che possiamo rappresentare ogni numero reale  $r \in (0, 1)$  nella forma  $r = 0.a_0a_1a_2\dots a_n\dots$ , dove gli  $a_n$  sono numeri naturali. Inoltre, pur essendoci numeri che hanno più di una rappresentazione decimale, quelli che terminano con una sequenza infinita di 9 o 0, conveniamo di prendere la rappresentazione che termina con 0.

Per ogni  $n$  naturale, dunque, il reale  $f(n) \in (0, 1)$  ammette la sua rappresentazione decimale, che è anche unica, per quanto appena detto.

Costruiamo allora un nuovo numero reale  $r \in (0, 1)$  diverso da tutti gli  $f(n)$ , e quindi esterno all'immagine di  $f$ , nel modo seguente: la cifra di posto 0 dello sviluppo decimale di  $r$  è diversa da quella di  $f(0)$ , la cifra di posto 1 è differente da quella di  $f(1)$ , la cifra di posto  $n$  da quella corrispondente in  $f(n)$ , e così via. Il nostro  $r$  può essere esplicitamente costruito, e risulta diverso da ogni  $f(n)$ , perché differisce da esso nella cifra  $n$ -esima dello sviluppo decimale unico. Allora  $r$  non può appartenere all'immagine di  $f$  e  $f$  non è suriettiva.  $\square$

#### 12.4.6 Le principali proprietà del continuo

In questo paragrafo presentiamo i due principali risultati dimostrati da Cantor relativamente alla potenza del continuo: il primo riguarda la corrispondenza biunivoca tra ogni segmento di retta e tutto  $\mathbb{R}$  mentre nel secondo dimostra che la potenza di  $\mathbb{R}^n$  è uguale a quella di  $\mathbb{R}$ .

Iniziamo con il primo:

*Teorema 17.* La potenza di un qualsiasi segmento di retta di estremi  $a, b$  (con  $a, b \in \mathbb{R}$ ) è uguale alla potenza del continuo.

La dimostrazione del precedente teorema è immediata considerando la corrispondenza biunivoca rappresentata in figura.

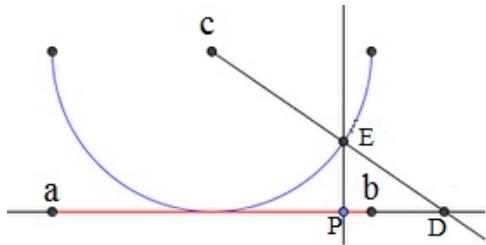


Figura 12.3: Potenza di un segmento

Gran parte dell'articolo “*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*” pubblicato nel 1878, è dedicato alla dimostrazione del seguente

**Teorema 18.** Una molteplicità continua estesa su  $n$  dimensioni può essere associata in modo univoco e completo a una molteplicità continua a una dimensione.

Importante è lo scambio epistolare che ci fu tra Cantor e Dedekind, in cui possiamo vedere come Cantor sviluppò e ottenne questo risultato Già il 2 Dicembre del 1873, Cantor si era posto il problema e scisse all'amico:

“A proposito delle questioni che mi hanno occupato in questi ultimi tempi, mi accorgo che, in questo ordine di idee, si presenta anche la seguente: una superficie (per esempio un quadrato compreso il suo contorno) può essere messa in relazione univoca [noi oggi diremmo: in corrispondenza biunivoca] con una curva (per esempio un segmento di retta, estremi compresi) in modo che ad ogni punto della superficie corrisponda un punto della curva, e reciprocamente ad ogni punto della curva un punto della superficie?

Mi sembra, in questo momento, che rispondere alla domanda presenti grosse difficoltà, sebbene, anche qui, si sta talmente inclini a dare una risposta negativa che quasi si considera superflua una dimostrazione”.

La questione venne lasciata in sospeso per alcuni anni poiché Cantor, allora, non aveva ancora a disposizione tutti gli strumenti necessari per sviluppare appieno la questione. Il problema ritornò alla mente di Cantor nel 1877, come testimonia la lettera che egli inviò a Dedekind il 20 Giugno 1877:

“Vorrei sapere se voi considerate aritmeticamente rigoroso un metodo di dimostrazione da me applicato. Si tratta di dimostrare che

le superfici, i volumi ed anche le varietà continue a  $p$  dimensioni possono essere messi in corrispondenza univoca con curve continue, dunque con varietà a una sola dimensione, che le superfici, i volumi, le varietà a  $p$  dimensioni hanno dunque la stessa potenza delle curve; questa opinione appare opposta a quella generalmente diffusa, particolarmente tra i rappresentanti della nuova geometria, secondo la quale si parla di varietà semplicemente, doppiamente, triplamente,  $p$  volte infinite; ci si presenta a volte addirittura le cose come se si ottenesse l'infinità dei punti di una superficie elevando in qualche modo al quadrato, quella di un cubo elevando al cubo, l'infinità di punti di una linea [...]. Voglio parlare dell'ipotesi secondo la quale una molteplicità continua  $p$  volte estesa necessita, per la determinazione dei suoi elementi,  $p$  coordinate reali fra loro indipendenti, questo numero non potendo essere, per una stessa molteplicità, né aumentato né diminuito. Anch'io ero arrivato a credere a questa ipotesi, ero quasi persuaso della sua esattezza; il mio punto di vista differiva da tutti gli altri soltanto nel fatto che consideravo questa ipotesi come un teorema che necessitava, ad alto livello, una dimostrazione, e avevo precisato il mio punto di vista sotto forma di domanda sottomessa ad alcuni colleghi, in particolare anche all'occasione del giubileo di Gauss a Göttingen. Siano  $x_1, x_2, \dots, x_p$  variabili reali indipendenti che possono assumere tutti i valori  $\geq 0$  e  $\leq 1$ . Sia  $y$  una  $(p+1)$ -esima variabile reale con il medesimo dominio di variazione. È allora possibile far corrispondere le  $p$  grandezze  $x_1, \dots, x_p$  alla sola grandezza  $y$  in modo tale che a ciascun sistema determinato di valori  $(x_1, \dots, x_p)$  corrisponda un valore  $y$ ? E, viceversa, è possibile che a ciascun valore determinato  $y$  corrisponda uno ed un solo sistema di valori  $(x_1, \dots, x_p)$ ?

A me sembra di poter rispondere affermativamente a questa questione per le seguenti ragioni.

Tutti i numeri  $\geq 0$  e  $\leq 1$  possono essere rappresentati in una ed una sola maniera come frazione decimale

$$x = \alpha_1 \frac{1}{10} + \alpha_2 \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_\nu \frac{1}{10^\nu}$$

dove le  $\alpha_\nu$  sono numeri interi  $\geq 0$  e  $\leq 9$ . Tutti i numeri  $x$  determinano così una successione infinita  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  e viceversa.”

La corrispondenza biunivoca fu dimostrata nel seguente modo: dati due reali  $x_1, x_2$  così espressi

$$x_1 = \alpha_1 \frac{1}{10} + \alpha_2 \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_\nu \frac{1}{10^\nu}$$

$$x_2 = \beta_1 \frac{1}{10} + \beta_2 \frac{1}{10^2} + \dots + \beta_\nu \frac{1}{10^\nu}$$

da questi si può ottenere un terzo numero nel modo seguente:

$$y = \alpha_1 \frac{1}{10} + \beta_1 \frac{1}{10^2} + \alpha_2 \frac{1}{10^3} + \beta_2 \frac{1}{10^3} + \dots$$

il numero  $y$ .

In questo modo Cantor credette di aver trovato una corrispondenza biunivoca associando alla coppia  $(x_1, x_2)$  e  $y$ .

Quanto sia sorprendente questo risultato è testimoniato dalle parole ormai celebri che Cantor scrisse a Dedekind: “je le vois, ma je ne le crois pas!” (“lo vedo ma non ci credo!”), una volta dimostrato l’ultimo enunciato.

Dedekind però trovò un errore in tale dimostrazione e lo comunicò a Cantor in una lettera datata 22 Giugno 1877.

Per poter rappresentare in modo univoco ogni numero reale appartenente all’intervallo  $(0, 1)$ , si devono identificare i valori tali che  $\alpha_n = 0$  da un certo indice in poi con il corrispondente valore per cui  $\alpha_n = 9$  (per esempio  $0.3000\dots$  e  $0.29999\dots$ ). Dedekind infatti scrive:

“... il fatto che voi sottolineate il termine “infinito” mi lascia supporre che voi escludiate il caso di una funzione finita, vale a dire che al posto di

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_\nu}{10^\nu} + \frac{0}{10^{\nu+1}} + \frac{0}{10^{\nu+2}} + \dots$$

voi scrivete costantemente

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_\nu - 1}{10^\nu} + \frac{9}{10^{\nu+1}} + \frac{9}{10^{\nu+2}} + \dots$$

escludendo così tutte le possibilità di una doppia rappresentazione di un medesimo numero  $x$ .

La mia opinione è la seguente. Mi limito per semplicità al caso di dimensione 2 e pongo:

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_\nu \dots$$

$$y = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \dots = 0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_\nu \dots$$

e costruisco come voi, a partire dai due numeri, un terzo numero

$$z = 0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$$

dove

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \alpha_1 & \gamma_2 &= \beta_1 & \gamma_3 &= \alpha_2 \\ \gamma_4 &= \beta_2 & \gamma_{2\nu-1} &= \alpha_\nu & \gamma_{2\nu} &= \beta_\nu\end{aligned}$$

Ma ci sarà un'infinità di vere frazioni alle quali  $z$  non sarà mai uguale, per esempio

$$0.478310507090\alpha_70\alpha_80\alpha_90\dots$$

A partire da questo  $z$  proposto possiamo ricostruire i numeri  $x$  e  $y$

$$x = 0.481579\alpha_7\alpha_8\alpha_9\dots$$

$$y = 0.7310000\dots$$

quindi il numero  $y$  fa proprio parte dei numeri esclusi per l'unicità della rappresentazione.”

Riconosciuto l'errore, Cantor si mise al lavoro per risolvere questo problema e, appena due giorni dopo, il 24 Giugno, scrisse nuovamente all'amico presentando una dimostrazione completamente diversa e più complicata grazie alla quale Cantor poté affermare che “la conclusione resta ancora interamente valida”. Vediamo nel dettaglio questo risultato, riportandolo nella forma in cui Cantor lo pubblicò nel suo articolo del 1878.

Poiché due figure continue con numero di dimensioni uguale possono essere ridotte l'una all'altra in modo univoco e completo per mezzo di funzioni analitiche, per provare che è possibile un'associazione univoca e completa di figure con numeri di dimensioni diverse ci è utile la dimostrazione del seguente teorema:

*Teorema 19. (A)* Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono grandezze reali variabili e reciprocamente indipendenti per ciascuna delle quali sono ammissibili tutti i valori  $\geq 0$  e  $\leq 1$  e  $t$  è un'altra variabile con lo stesso ambito di variazione ( $0 \leq t \leq 1$ ), è possibile associare la grandezza unica  $t$  al sistema delle  $n$  grandezze  $x_1, x_2, \dots, x_n$

in modo tale che a ogni valore determinato di  $t$  corrisponda un sistema di valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  determinato e, viceversa, a ogni sistema di valori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  determinato corrisponda un certo valore di  $t$ .

Da tale teorema ne segue un altro che è il nostro obiettivo:

*Teorema 20. (B)* Una molteplicità continua estesa su  $n$  dimensioni può essere associata in modo univoco e completo a una molteplicità continua a una dimensione; due molteplicità continue, una di  $n$  e l'altra di  $m$  dimensioni, dove  $n \geq m$  o  $n \leq m$ , hanno potenza uguale; gli elementi di una molteplicità continua estesa su  $n$  dimensioni sono determinabili univocamente mediante un'unica coordinata reale continua  $t$ , ma possono essere determinati in modo univoco e completo anche mediante un sistema  $t_1, t_2, \dots, t_m$  di  $m$  coordinate continue.

Per dimostrare (A) partiamo dal noto fatto che ogni numero irrazionale  $e > 0, < 1$  si può scrivere in modo unico come frazione continua infinita

$$x = \frac{1}{\alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \dots}}} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots) \quad (12.10)$$

con gli  $\alpha_\nu$  interi positivi. L'ultima uguaglianza è così in Cantor. Dunque ogni numero irrazionale determina univocamente  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_\nu, \dots)$  e viceversa.

Siano ora  $e_1, e_2, \dots, e_n$   $n$  grandezze variabili, reciprocamente indipendenti, ciascuna delle quali può prendere, una sola volta per uno, tutti i valori irrazionali dell'intervallo  $(0, 1)$ , e poniamo

$$\begin{aligned} e_1 &= (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,\nu}, \dots) \\ &\vdots \\ e_\mu &= (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \dots, \alpha_{\mu,\nu}, \dots) \\ &\vdots \\ e_n &= (\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \dots, \alpha_{n,\nu}, \dots) \end{aligned} \quad (12.11)$$

Questi  $n$  numeri irrazionali ne determinano univocamente un  $(n+1)$ -esimo

$$d = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu, \dots) \quad (12.12)$$

se

$$\beta_{(\nu-1)n+\mu} = \alpha_{\mu, \nu} \quad (12.13)$$

con  $\mu = 1, 2, \dots, n$  e  $\nu = 1, 2, \dots$

Viceversa, dato un numero irrazionale  $d > 0, < 1$ , esso determina la successione dei  $\beta_\nu$  e attraverso (12.13) anche quella degli  $\alpha_{\mu, \nu}$ . In altre parole,  $d$  determina univocamente il sistema degli  $n$  numeri irrazionali  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Da questa osservazione si ricava immediatamente il seguente

*Teorema 21.* **(C)** Se  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sono  $n$  grandezze variabili reciprocamente indipendenti ognuna delle quali può prendere tutti i valori irrazionali dell'intervallo  $(0, 1)$  e  $d$  è un'altra variabile con lo stesso ambito di variazione, è possibile associare l'una all'altro in modo univoco e completo la singola grandezza  $d$  e il sistema delle  $n$  grandezze  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Con il ragionamento fatto sopra abbiamo dimostrato implicitamente anche il teorema (C). Ora dobbiamo preoccuparci di provare il seguente:

*Teorema 22.* **(D)** Una grandezza variabile  $e$  che possa assumere tutti i valori irrazionali dell'intervallo  $(0, 1)$  è associabile univocamente a una variabile  $x$  che ammetta tutti i valori reali, cioè razionali e irrazionali, compresi fra 0 e 1 in modo tale che ad ogni valore irrazionale  $> 0, < 1$  di  $e$  corrisponda uno e un solo valore reale  $\geq 0$  e  $\leq 1$  di  $x$  e a ogni valore reale di  $x$  corrisponda, viceversa, un certo valore irrazionale di  $e$ .

Supponiamo, una volta dimostrato questo teorema (D), che in base ad esso alle  $n + 1$  grandezze variabili indicate precedentemente con  $e_1, e_2, \dots, e_n$  e  $d$  siano associate in modo univoco e completo le nuove variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $t$ , ciascuna delle quali ammette, senza restrizioni, ogni valore reale  $\geq 0$  e  $\leq 1$ . Poiché sopra abbiamo costruito una corrispondenza biunivoca fra la variabile  $d$  e il sistema delle  $n$  variabili  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , otteniamo una corrispondenza univoca e completa fra la singola variabile continua  $t$  e il sistema delle  $n$  variabili continue  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Resta così provata la verità del teorema (A).

Resta, dunque, da dimostrare solamente il teorema (D). Per fare ciò useremo, per brevità, una semplice terminologia che ora andiamo a descrivere. Per *molteplicità lineare* di numeri reali intendiamo una qualsiasi molteplicità ben definita di numeri reali distinti l'uno dall'altro per cui uno stesso numero non occorrerà più di una volta in una molteplicità lineare. Tutte le variabili reali che ci useremo in seguito saranno delle molteplicità lineari.

Diremo che due di tali variabili  $a$  e  $b$  non hanno *connessione* quando nessun valore che possa essere assunto da  $a$  è uguale a un valore di  $b$ ; in altre parole,

se  $a$  e  $b$  sono da considerare senza connessione gli insiemi dei valori ammissibili di queste due variabili non hanno elementi comuni.

Se abbiamo una successione  $a', a'', a''', \dots, a^\nu, \dots$  finita o infinita, di variabili o costanti ben definite e tutte senza connessione fra loro, possiamo da essa definire una variabile  $a$  il cui ambito di variazione sia l'unione degli ambiti di variazione delle  $a', a'', a''', \dots, a^\nu, \dots$ ; e una variabile  $a$  data può, viceversa, essere scomposta nei modi più diversi in altre variabili  $a', a'', \dots$  senza connessione fra loro. Esprimiamo in entrambi i casi la relazione fra  $a$  e  $a', a'', a''', \dots, a^\nu, \dots$  con la formula:

$$a \equiv \{a', a'', a''', \dots, a^\nu, \dots\}.$$

La validità di questa formula comporta dunque:

1. che ognuno dei valori ammissibili per una qualsiasi delle variabili  $a^{(\nu)}$  sia anche un valore ammissibile della variabile  $a$ ;
2. che ognuno dei valori che  $a$  può assumere sia assunto anche da una e una sola delle grandezze  $a^{(\nu)}$ .

A titolo di illustrazione, siano per esempio  $\phi$  una variabile che può prendere tutti i valori numerici razionali  $\geq 0$  e  $\leq 1$ ,  $e$  una variabile che può prendere tutti i valori irrazionali dell'intervallo  $[0, 1]$ , e  $x$  una variabile che può prendere tutti i valori numerici, razionali e irrazionali, che siano  $\geq 0$  e  $\leq 1$ : abbiamo allora

$$x \equiv \{\phi, e\}$$

Se  $a$  e  $b$  sono due grandezze variabili associabili in modo univoco e completo (cioè se i loro ambiti di variazione hanno uguale potenza) le diremo equivalenti ed esprimeremo tale fatto mediante una di queste due formule,

$$a \sim b, b \sim a$$

Da questa definizione dell'equivalenza di due variabili segue facilmente che  $a \sim a$  e che, se  $a \sim b$  e  $b \sim c$ , allora  $a \sim c$ . Presentiamo ora un teorema che ci sarà utile in seguito:

*Teorema 23. E* Se  $a', a'', a''', \dots, a^\nu, \dots$  è una successione, finita o infinita, di variabili o costanti senza connessione fra loro,  $b', b'', b''', \dots, b^\nu, \dots$  è un'altra successione con queste stesse caratteristiche, a ogni variabile  $a^{(\nu)}$  della prima successione corrisponde una variabile  $b^{(\nu)}$  determinata della seconda e le variabili corrispondenti sono sempre equivalenti l'una all'altra, cioè  $a^{(\nu)} \sim b^{(\nu)}$ ,

allora si ha

$$a \sim b$$

quando

$$a \equiv \{a', a'', a''', \dots, a^\nu, \dots\}$$

e

$$b \equiv \{b', b'', b''', \dots, b^\nu, \dots\}.$$

Dato per valido questo teorema, la cui dimostrazione risulta abbastanza semplice, ci resta da dimostrare il teorema (D). Per fare ciò, osserviamo che tutti i numeri razionali  $\geq 0$  e  $\leq 1$  possono essere scritti sotto forma di successione semplicemente infinita

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_\nu, \dots$$

Il modo più semplice di farlo è il seguente: se  $p/q$  è la forma irriducibile di un numero razionale che sia  $\geq 0$  e  $\leq 1$  (nel qual caso  $p$  e  $q$  saranno numeri interi non negativi con massimo comun divisore 1), si ponga

$$p + q = N.$$

A ogni numero  $p/q$  corrisponderà allora un valore intero positivo determinato di  $N$ , e a ognuno di tali valori di  $N$  corrisponderà viceversa solo una quantità finita di numeri  $p/q$ .

Se ora pensiamo i  $p/q$  ordinati in modo tale che quelli con un valore di  $N$  minore precedano quelli con  $N$  più grande, e inoltre tutti quelli con uno stesso valore di  $N$  si succedano in ordine di grandezza, i maggiori dopo i minori, ognuno di questi numeri occuperà un posto perfettamente determinato in una successione semplicemente infinita il cui membro generico indicheremo con  $\phi_\nu$ . Tutto ciò può essere dedotto anche dal fatto che la classe  $(\omega)$  di tutti i numeri reali algebrici è numerabile e quindi può essere pensata come successione infinita della forma

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$$

Infatti questa proprietà della classe  $(\omega)$  si trasmette a tutti i numeri razionali  $\geq 0$  e  $\leq 1$ , dato che quest'ultima è un sottoinsieme della prima.

Sia ora  $e$  la variabile, presente nel teorema (D), che ammette tutti i valori reali dell'intervallo  $(0, 1)$  a eccezione dei numeri  $\phi_\nu$ . Prendiamo inoltre, sempre nell'intervallo  $(0, 1)$ , una qualsiasi successione infinita di numeri irrazionali  $\varepsilon_\nu$ , soggetta solo alle due condizioni che sia in generale  $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$  e che  $\lim \varepsilon_\nu = 1$

per  $\nu = \infty$  (per esempio  $\varepsilon_\nu = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}$ ).

Indichiamo ora con  $f$  una variabile che può assumere tutti i valori reali dell'intervallo  $(0, 1)$  a eccezione degli  $\varepsilon_\nu$ , e con  $g$  un'altra variabile che può assumere tutti i valori dello stesso intervallo a eccezione degli  $\varepsilon_\nu$  e dei  $\phi_\nu$ : risulta che

$$e \sim f.$$

Vale infatti, nella notazione vista sopra,

$$e \equiv \{g, \varepsilon_\nu\},$$

$$f \equiv \{g, \phi_\nu\},$$

e poiché  $g \sim g$  e  $\varepsilon_\nu \sim \phi_\nu$ , utilizzando (E), concludiamo che

$$e \sim f.$$

Il teorema (D) che dobbiamo dimostrare viene perciò ricondotto a quest'altro:

**Teorema 24. (F)** Una variabile  $f$  che possa assumere tutti i valori dell'intervallo  $(0, 1)$  a eccezione di quelli di una successione  $\varepsilon_\nu$  data, soggetta alle due condizioni che  $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$  e che  $\lim \varepsilon_\nu = 1$  per  $\nu = \infty$ , è associabile in modo univoco e completo a una variabile  $x$  che ammetta ogni valore  $\geq 0$  e  $\leq 1$ ; in altre parole,  $f \sim x$ .

Basiamo la dimostrazione di (F) sulle seguenti proposizioni (G), (H) e (J):

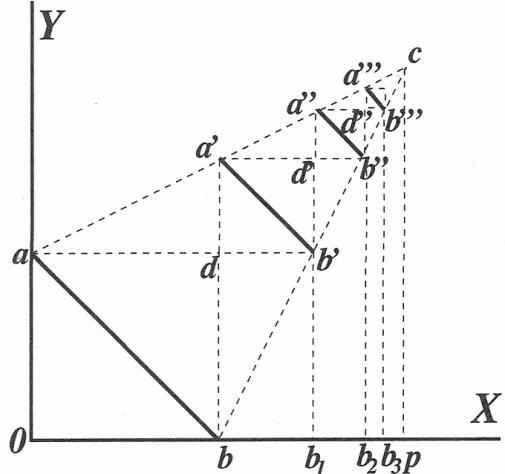
**Proposizione 1. (G)** Se  $y$  è una variabile che ammette tutti i valori dell'intervallo  $(0, 1)$  a eccezione del solo 0 e  $x$  una variabile che ammette senza eccezioni tutti i valori di tale intervallo, allora

$$y \sim x$$

La proposizione (G) può essere espressa nel seguente modo:

$$(0, 1] \sim [0, 1]$$

Questo risultato si dimostra nel modo più semplice osservando la curva disegnata qui sotto.



Tale curva è composta degli infiniti segmenti  $\overline{ab}, \overline{a'b'}, \dots, \overline{a^\nu b^\nu}, \dots$ , paralleli fra loro, che al crescere di  $\nu$  all'infinito diventano infinitamente piccoli, e del punto isolato  $c$ , al quale i suddetti segmenti si avvicinano asintoticamente. Si faccia attenzione però che gli estremi  $a, a', \dots, a^{(\nu)}, \dots$  sono da considerare appartenenti alla curva mentre gli estremi  $b, b', \dots, b^{(\nu)}, \dots$  vanno considerati come esterni ad essa.

Le lunghezze rappresentate nella figura sono

$$\overline{Op} = \overline{pc} = 1, \quad \overline{Ob} = \overline{bp} = \overline{Oa} = \frac{1}{2}, \quad \overline{a^{(\nu)}d^{(\nu)}} = \overline{d^{(\nu)}b^{(\nu)}} = \overline{b_{\nu-1}b_\nu} = \frac{1}{2^{\nu+1}}$$

Osserviamo che, mentre l'ascissa  $x$  assume tutti i valori da 0 a 1, l'ordinata  $y$  ammette tutti questi valori eccetto lo 0.

Dopo aver dimostrato in questo modo il teorema (G) otteniamo subito, applicando le trasformazioni

$$y = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha'} \quad x = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}$$

la seguente generalizzazione:

*Proposizione 2. (H)* Una variabile  $z$  che può assumere tutti i valori di un intervallo  $(\alpha, \beta)$ , dove  $\alpha < \beta$ , a eccezione del solo valore estremo  $\alpha$ , è equivalente

a una variabile  $u$  che può assumere tutti, senza eccezione, i valori dello stesso intervallo  $(\alpha, \beta)$ .

Da (H) arriviamo immediatamente al seguente teorema

*Teorema 25. (J)* Se  $w$  è una variabile che assume tutti i valori dell'intervallo  $(\alpha, \beta)$  (estremi esclusi) e  $u$  è come in (H), allora

$$w \sim u''.$$

Sia infatti  $\gamma$  un qualsiasi valore intermedio fra  $\alpha$  e  $\beta$ , e introduciamo quattro variabili ausiliarie  $w', w'', u''$  e  $z$ .

Sia  $z$  come in (H);  $w'$  assuma tutti i valori dell'intervallo  $(\alpha, \gamma)$ , estremi esclusi;  $w''$  ammetta tutti i valori dell'intervallo  $[\gamma, \beta]$  (solo estremo  $\beta$  escluso);  $u''$  sia una variabile che assume tutti i valori dell'intervallo  $[\gamma, \beta]$ , estremi inclusi. Vorranno allora

$$w \equiv \{w', w''\}, \quad z \equiv \{w', u''\}.$$

Ma per (H) vale anche

$$w'' \sim u'';$$

e ne deduciamo quindi che

$$w \sim z.$$

Per quanto affermato nel teorema (H), vale inoltre

$$z \sim u;$$

di conseguenza si ha  $w \sim u$  e il teorema (J) è dimostrato.

E ora possiamo dimostrare il teorema (F) nel seguente modo:  
introduciamo, tenendo presente il significato di  $f$  e  $x$  nell'enunciato di (F), le variabili ausiliarie

$$f', f'', \dots, f^{(\nu)}, \dots$$

e

$$x'', x^{IV}, \dots, x^{(2\nu)}, \dots$$

Sia  $f'$  una variabile che ammette tutti i valori dell'intervallo  $[0, \varepsilon_1]$  a eccezione dell'estremo  $\varepsilon_1$ ; per  $\nu > 1$  sia  $f^{(\nu)}$  una variabile che assume tutti i valori dell'intervallo  $(\varepsilon_{\nu-1}, \varepsilon_\nu)$  a eccezione dei due valori estremi  $\varepsilon_{\nu-1}, \varepsilon_\nu$ ; sia infine  $x^{(2\nu)}$  una variabile che ammette, senza eccezioni, tutti i valori dell'intervallo  $[\varepsilon_{2\nu-1}, \varepsilon_{2\nu}]$ .

Se alle variabili  $f', f'', \dots, f^\nu, \dots$  aggiungiamo la costante numerica 1, tutte

queste grandezze, messe insieme, hanno lo stesso ambito di variazione di  $f$ ; vale cioè

$$f \equiv \{f', f'', \dots, f^{(\nu)}, \dots, 1\}.$$

Si può anche vedere che

$$x \equiv \{f', x'', f''', x^{IV}, \dots, f^{(2\nu-1)}, x^{2\nu}, \dots, 1\}.$$

Ma per il teorema (J)

$$f^{(2\nu)} \sim x^{(2\nu)} \quad \text{inoltre} \quad f^{(2\nu-1)} \sim f^{(2\nu-1)}, 1 \sim 1;$$

dunque, per il teorema (E),

$$f \sim x,$$

come volevasi dimostrare.

Cantor, a questo punto, diede una nuova dimostrazione, più breve, del teorema (D); il motivo per cui non si limitò a questa sola dimostrazione è che le proposizioni ausiliarie (F), (G), (H) e (J) utilizzate nel procedimento più complicato sono interessanti anche di per sé.

#### *Dimostrazione alternativa di (D)*

Per  $x$  intendiamo, come sopra, una variabile che assume tutti i valori dell'intervallo  $[0, 1]$ , estremi inclusi; sia invece  $e$  una variabile che ammette solo i valori irrazionali di tale intervallo. Dobbiamo dimostrare che  $x \sim e$ .

Rappresentiamoci, come fatto anche sopra, i numeri razionali  $\geq 0$  e  $\leq 1$  sotto forma di una successione con membro generico  $\phi_\nu$ , dove  $\nu$  percorre l'intera successione numerica 1, 2, 3, ... Prendiamo inoltre una qualsiasi successione infinita di numeri irrazionali distinti compresi nell'intervallo  $(0, 1)$ , e sia  $\mu_\nu$  il membro generico di questa successione (per es.  $\mu_\nu = \frac{\sqrt{2}}{2^\nu}$ ).

Sia  $h$  una variabile che ammette tutti i valori dell'intervallo  $(0, 1)$  a eccezione delle  $\phi_\nu$  e delle  $\mu_\nu$ . Avremo allora,

$$x \equiv \{h, \mu_\nu, \phi_\nu\} \tag{12.14}$$

e

$$e \equiv \{h, \mu_\nu\}$$

L'ultima formula può essere scritta anche nel seguente modo:

$$e \equiv \{h, \mu_{2\nu-1}, \mu_{2\nu}\}. \tag{12.15}$$

Osservando che  $h \sim h$ ,  $\mu_\nu \sim \mu_{2\nu-1}$ ,  $\phi_\nu \sim \mu_{2\nu}$  e applicando le formule 12.14 e 12.15 e il teorema (E), otteniamo

$$x \sim e,$$

come volevasi dimostrare.  $\square$

Dopo aver verificato la correttezza della dimostrazione, Dedekind invita Cantor a non giungere a conclusioni troppo affrettate. Gli scrive, infatti

“Se i punti di due domini di dimensioni diverse possono essere posti in una corrispondenza reciproca e completa, allora tale corrispondenza è del tutto discontinua. [...] Per riempire le lacune voi siete obbligato ad introdurre nella corrispondenza una discontinuità da far venire le vertigini, che trasforma tutto in atomi”.

Rispondendo a tale osservazione, Cantor sottolinea che non intende mettere in discussione il concetto di dimensione e invarianza della dimensione ma che

“...se non si impone nessuna condizione alla natura della corrispondenza biunivoca, il numero delle coordinate reali da utilizzare per una determinazione degli elementi di una molteplicità n-dimensionale può essere ridotto a un valore prefissato qualsiasi, e quindi non è da considerare un carattere invariabile di una molteplicità data”.

## 12.5 L'insieme delle parti

Trattiamo come paragrafo a se stante questo relativo allo studio dell'insieme delle parti poiché, anche se è legato allo studio delle potenze dei vari insiemi, fu un argomento che Cantor analizzò solo negli ultimi anni della sua vita e pubblicò nell'ultimo articolo importante “*Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre*”(Contributi alla teoria degli insiemi) [5, 1895-1897]. Presentiamo di seguito i tre principali risultati relativi a questo argomento.

*Teorema 26.* (1890) La cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme  $X$  è strettamente maggiore di quella di  $X$ .

*Dimostrazione* Dobbiamo dimostrare che esiste una funzione iniettiva da  $X$  a  $\mathcal{P}(X)$  ma non una suriettiva

L'applicazione iniettiva

$$X \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad x \mapsto \{x\}$$

ci permette di affermare che  $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ .

D'altra parte, nessuna applicazione  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  può essere suriettiva e quindi  $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ . Infatti, sia  $\varphi : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  una qualsiasi applicazione, così che  $\varphi \in \mathcal{P}(X)$  è il sottoinsieme di  $X$  corrispondente all'elemento  $x \in X$ . Consideriamo l'insieme  $Z := \{x \in X; x \notin \varphi(x)\}$ . Se  $Z = \varphi(z)$  allora per definizione

$$z \in Z \Leftrightarrow z \notin \varphi(z) \Leftrightarrow z \notin Z.$$

Questa contraddizione mostra che  $Z \neq \varphi(z)$ , per ogni  $z \in X$ . Quindi l'applicazione  $\varphi$  non è suriettiva.  $\square$

Altro risultato importante a cui giunse Cantor fu quello di dimostrare un valore preciso per la cardinalità dell'insieme delle parti, come enunciato nel seguente

*Teorema 27.* L'insieme  $\mathcal{P}(X)$  delle parti di  $X$  ha la potenza dell'insieme  $\mathbf{2}^X$ , cioè dell'insieme delle funzioni da  $X$  a valori in  $\mathbf{2} := \{0, 1\}$

*Dimostrazione* La dimostrazione di questo teorema è immediata se, per ogni sottoinsieme  $A \subset X$ , consideriamo la sua funzione caratteristica

$$\chi_A : X \rightarrow \mathbf{2} := \{0, 1\}; \quad x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

La biezione da prendere sarà dunque

$$\mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbf{2}^X$$

$$A \mapsto \chi_A$$

□

Grazie al risultato appena dimostrato, Cantor riuscì infine a provare il seguente

*Teorema 28.* L'insieme  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  delle parti di  $\mathbb{N}$  ha la cardinalità del continuo

*Dimostrazione* Tenuto conto che  $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbf{2}^{\mathbb{N}}|$ , mostriamo che l'insieme  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}}$  delle successioni a valori in  $\mathbf{2} := \{0, 1\}$  ha la cardinalità del continuo. Scriviamo  $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} = X \cup Y$ , dove  $X$  è il sottoinsieme delle successioni che non sono quasi ovunque nulle e  $Y$  è il sottoinsieme delle successioni quasi ovunque nulle. Poiché ogni numero reale ha una ed una sola rappresentazione non finita in una qualsiasi base, associando ad ogni numero reale dell'intervallo  $(0, 1]$  la successione non quasi ovunque nulla delle sue cifre in base 2, otteniamo che  $X$  è equipotente all'intervallo  $(0, 1]$ . Pioché, come già visto in precedenza, la potenza di  $\mathbb{R}$  è uguale a quella dell'intervallo  $(0, 1]$ , ne risulta che  $X$  ha la cardinalità del continuo. Basta allora mostrare che l'insieme  $Y$  ha la cardinalità del numerabile (dato che l'unione di un insieme continuo con uno numerabile risulta essere un insieme che ha la cardinalità del continuo). Sia  $Y_n$  l'insieme delle successioni  $(a_i)_{i \geq 0}$  a valori in  $\mathbf{2}$  tali che  $a_i = 0$  per  $i \geq n$ . Allora la corrispondenza

$$Y_n \rightarrow \mathbf{2}^n; \quad (a_i)_{i \geq 0} \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

è biunivoca. Quindi  $Y_n$  ha  $2^n$  elementi e  $Y = \bigcup_{n \geq 0} Y_n$  è numerabile perché unione numerabile di insiemi di cardinalità finita. Il fatto che  $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$  è conseguenza del teorema (26). □

## 12.6 Über unendliche lineare Punktmanigfaltigkeiten

Negli anni che vanno dal 1879 al 1884 si ha una prima presentazione organica della teoria dei numeri cardinali e ordinali transfiniti nella pubblicazione: ‘Über unendliche lineare Punktmanigfaltigkeiten’ (Sulle molteplicità di punti lineari ed infinite) divisa in 6 articoli. Di seguito vengono riportati alcuni di questi articoli che approfondiscono i concetti di insiemi derivati e potenza.

### 12.6.1 Articolo2

Mi sia concesso innanzitutto, per facilitare con qualche abbreviazione l'esposizione che seguirà, di introdurre alcuni formalismi.

Esprimiamo l'identità di due insiemi di punti  $P$  e  $Q$  mediante la formula  $P \equiv Q$ . Se due insiemi  $P$  e  $Q$  non hanno elementi comuni diciamo che sono senza connessione. Se un insieme  $P$  è formato dall'unione di più insiemi  $P_1, P_2, P_3, \dots$ , in numero finito o infinito, che siano a due a due *senza connessione*, scriviamo

$$P = \{P_1, P_2, P_3, \dots\}.$$

Se tutti i punti di un insieme  $P$  appartengono pure a un altro insieme  $Q$  diciamo che  $P$  è *contenuto* in  $Q$ , o anche che  $P$  è un divisore di  $Q$  e  $Q$  un multiplo di  $P$ . Se  $P_1, P_2, P_3, \dots$  sono insiemi di punti qualsiasi, in numero finito o infinito, avranno sia un minimo comune multiplo, che indichiamo con

$$\mathfrak{M}(P_1, P_2, P_3, \dots) \quad [\text{l'unione}]$$

ed è l'insieme formato da tutti i punti distinti di  $P_1, P_2, P_3, \dots$  e da nessun altro, sia un massimo comun divisore, che indicheremo con

$$\mathfrak{D}(P_1, P_2, P_3, \dots) \quad [\text{l'intersezione}]$$

ed è l'insieme dei punti comuni a tutti i  $P_1, P_2, P_3, \dots$ . Se per esempio  $P', P'', P''', \dots$  sono le derivate successive di un insieme di punti  $P$ , possiamo dire che  $P''$  è un divisore di  $P'$ ,  $P'''$  è un divisore tanto di  $P''$  quanto di  $P'$  e in generale  $P^{(\nu)}$  è un divisore di  $P^{(\nu-1)}, P^{(\nu-2)}, \dots, P'$ ; invece  $P'$  non è in generale un divisore di  $P$  - ma se  $P$  è a sua volta la derivata prima di un insieme  $Q$ , allora lo è. È anche utile disporre di un segno che esprima l'assenza di punti, e a tale scopo sceglieremo la lettera  $O$ ;  $P \equiv O$  significherà dunque che l'insieme  $P$  non contiene

*nessun* punto, e quindi a rigore nemmeno esiste in quanto insieme. Per dare anche qui un esempio: un insieme di punti di *primo genere* e n-esima specie è caratterizzato dal fatto che

$$P^{(n+1)} \equiv O$$

mentre  $P^{(n)}$  è diverso da O.

Due insiemi sono connessi dal loro massimo comun divisore, e quando quest'ultimo è  $\equiv O$  sono *senza connessione*. Se due insiemi di punti P e Q hanno uguale *potenza* e quindi appartengono a *una stessa classe* diciamo che sono *equivalenti* ed esprimiamo questa relazione con la formula

$$P \sim Q$$

Se abbiamo  $P \sim Q$  e  $Q \sim R$ , è sempre anche

$$P \sim R$$

Se inoltre  $P_1, P_2, P_3, \dots$  è una successione di insiemi a due a due senza connessione,  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  è un'altra successione dello stesso tipo e valgono  $P_1 \sim Q_1, P_2 \sim Q_2, P_3 \sim Q_3, \dots$  sarà anche

$$\{P_1, P_2, P_3, \dots\} \sim \{Q_1, Q_2, Q_3, \dots\}.$$

Gli insiemi di punti di primo genere sono, come abbiamo visto poco sopra, completamente caratterizzabili per mezzo del concetto di derivata, così come è stato sviluppato finora; tale concetto è invece insufficiente per quelli di secondo genere, ed è ormai necessario un suo ampliamento che si presenta quasi da sé a una riflessione più profonda.

Osserviamo che ogni membro della successione delle derivate  $P', P'', P''', \dots$  di un insieme P è un divisore del precedente, per cui ogni nuova derivata  $P^{(\nu)}$  si forma dalla precedente  $P^{(\nu-1)}$  grazie all'*eliminazione* di certi punti e *senza* che se ne aggiungano di nuovi.

Se P appartiene al secondo genere,  $P'$  sarà composto di due insiemi di punti Q e R essenzialmente diversi; avremo cioè

$$P \equiv \{Q, R\}$$

dove Q è formato da quei punti di  $P'$  che vanno perduti se si avanza a sufficienza lungo la successione  $P', P'', P''', \dots$ , mentre R comprende i punti che

si conservano in tutti i membri di tale successione. Perciò R è definito dalla formula

$$R \equiv \mathfrak{D}(P', P'', P''', \dots).$$

Ma vale, chiaramente, anche

$$R \equiv \mathfrak{D}(P'', P''', P^{\text{IV}}, \dots)$$

e in generale

$$R \equiv \mathfrak{D}(P^{(n_1)}, P^{(n_2)}, P^{(n_3)}, \dots),$$

dove  $n_1, n_2, n_3, \dots$  è una qualsiasi successione infinita di numeri interi positivi crescenti.

Indichiamo ora col segno

$$P^{(\infty)}$$

l'insieme di punti R, estratto da P, che chiameremo derivata di P di ordine  $\infty$

Indichiamo la derivata prima di  $P^{(\infty)}$  con  $P^{(\infty+1)}$ , la n-esima con  $P^{(\infty+n)}$ ; anche  $P^{(\infty)}$  avrà una derivata di ordine  $\infty$  diversa in generale da O, che chiameremo  $P^{(2\infty)}$ . Proseguendo in questa costruzione di concetti giungeremo a derivate che andranno indicate, consequenzialmente, con

$$P^{(n_0\infty+n_1)},$$

dove  $n_0$  e  $n_1$  sono numeri interi positivi. Ma arriviamo anche più in là, costruendo

$$\mathfrak{D}(P^{(\infty)}, P^{(2\infty)}, P^{(3\infty)}, \dots)$$

e assegnandogli il segno  $P^{(\infty^2)}$ .

Di qui otteniamo, iterando questa operazione e combinandola con quelle già costruite, un concetto più generale,

$$P^{(n_0\infty^2+n_1\infty+n_2)},$$

e proseguendo con questo procedimento arriviamo a

$$P^{(n_0\infty^\nu+n_1\infty^{\nu-1}+\dots+n_\nu)},$$

dove  $n_0, n_1, \dots, n_\nu$  sono numeri interi positivi. Giungiamo poi a un concetto ancora più generale se facciamo variare  $\nu$ . Si ponga

$$P^{\infty^\infty} \equiv (P^{(\infty)}, P^{(\infty^2)}, P^{(\infty^3)}, \dots);$$

proseguendo nello stesso modo otteniamo, uno dopo l'altro, i nuovi concetti

$$P^{(n\infty^\infty)}, P^{(\infty^{\infty+1})}, P^{(\infty^{n\infty})}, P^{(\infty^{\infty^n})}, P^{(\infty^{\infty^\infty})}, \text{ecc.}$$

Siamo in presenza, come si vede, di una produzione di concetti dialettica che prosegue illimitatamente e tuttavia è immune da qualsiasi arbitrio e in sé necessaria e consequenziale.

Per gli insiemi di punti di primo genere vale, come segue dal concetto stesso,

$$P^\infty \equiv O$$

è da notare che si può dimostrare anche la conversa, cioè che ogni insieme di punti per il quale vale questa uguaglianza è di primo genere; dunque gli insiemi di primo genere sono *caratterizzati in modo completo* da tale uguaglianza.

Si può facilmente costruire un esempio di insieme di punti di secondo genere per il quale  $P^{(\infty)}$  è formato da un solo punto  $p$ : in intervalli consecutivi e contigui che, diventando infinitamente piccoli, convergono verso  $p$  si prendano degli insiemi di punti di primo genere i cui numeri ordinali crescono al di là di ogni limite quando l'intervallo corrispondente si approssima a  $p$ . Questi insiemi, presi insieme, ci danno l'esempio cercato, che risolve anche il problema se a un insieme di punti di secondo genere debba sempre corrispondere un intervallo nel quale esso sia *ovunque denso*. Qui possiamo vedere che ciò non è *in alcun modo* necessario.

è altrettanto facile costruire insiemi di Punti di secondo genere per i quali  $P^{(\infty+n)}$ , o  $P^{(2\infty)}$ , o in generale

$$P^{(n_0\infty^\nu+n_1\infty^{\nu-1}+\dots+n_\nu)},$$

è formato da un solo punto preassegnato  $p$ .

Gli insiemi di questo tipo non sono ovunque densi in *nessun* intervallo e appartengono *tutti* alla prima classe; da questi due punti di vista essi sono uguali agli insiemi di punti di primo genere.

### 12.6.2 Articolo3

(Fino ad ora) ci siamo attenuti strettamente all'argomento indicato dal titolo, occupandoci soltanto di insiemi lineari di punti, cioè di molteplicità di punti date secondo una legge e appartenenti a una linea retta continua infinita. Non era senza motivo che inizialmente avevo assegnato questo limite

all'esposizione: infatti, considerando i risultati da me ottenuti in Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre (Crelles Journal, vol. 84, p. 242), grazie ai quali figure piane, spaziali e n-dimensionalili in genere vengono messe in relazione univoca con insiemi lineari di punti, si poteva supporre fin dall'inizio che la maggior parte delle proprietà e relazioni riscontrabili negli insiemi lineari di punti fossero dimostrabili, con qualche ovvia modificazione, anche per insiemi di punti contenuti in un continuo piano, spaziale o n-dimensionale. Ora però vorrei presentare queste generalizzazioni in modo più esplicito, dato che non solo sono interessanti di per sé e per le loro applicazioni alla teoria delle funzioni, ma ci danno anche nuove prospettive da cui studiare gli insiemi lineari di punti.

Per cominciare subito con una di tali generalizzazioni, il concetto di *derivata* con i suoi diversi ordini, caratterizzabili non solo mediante numeri interi finiti ma anche, in certe circostanze, mediante simboli infinitari rigorosamente determinati, può essere senz'altro esteso agli insiemi di punti che incontriamo in domini continui n-dimensionalili. Tale concetto si basa sulla nozione di *punto limite* di un insieme di punti  $P$  dato, nozione definita dal fatto che in ogni *intorno*, per quanto piccolo, del punto in questione esistono punti di  $P$  diversi da esso; è indifferente, poi, che il punto limite appartenga anch'esso a  $P$  oppure no. È stato C. Weierstrass il primo a enunciare e dimostrare in tutta la sua generalità, e a sfruttare nel modo più ampio in teoria delle funzioni, il teorema che ogni insieme di punti formato da infiniti elementi ed esteso su un dominio n-dimensionale continuo e finito ha *almeno un* punto limite.

La classe di *tutti* i punti limite di un insieme  $P$  forma un nuovo insieme di punti  $P'$ , diverso in generale da  $P$ , che io chiamo *derivata prima* di  $P$ . Iterando finitamente o anche *infinitamente* questa costruzione concettuale si ottengono, con una dialettica dotata di una sua precisa necessità, i vari concetti di derivata di ordine superiore. In questo contesto ci si presenta sempre un fenomeno al quale non è difficile trovare un fondamento, cioè che ogni derivata, a eccezione della prima, è contenuta come parte nelle precedenti compresa  $P'$ , cioè la prima, mentre l'insieme  $P$  dato inizialmente contiene in genere punti del tutto diversi da quelli delle sue derivate. Anche il concetto dell'*essere ovunque denso*, che inizialmente avevamo preso in esame solo per gli insiemi di punti lineari, può essere senz'altro esteso a insiemi di dimensionalità superiore: per l'esattezza, un insieme di punti  $P$  dato in un dominio continuo n-dimensionale  $A$  sarà detto *ovunque denso in a*, dove  $a$  è un sotto dominio di  $A$ , se ogni sottodomino continuo  $a'$  di  $a$  con lo stesso numero di dimensioni di  $a$  contiene

al proprio interno punti di tale insieme.

La derivata prima  $P'$  di un insieme di punti  $P$  ovunque denso in un dominio continuo  $a$  contiene (come tutte le derivate successive) il dominio  $a$  stesso con tutti i punti del suo contorno, e questa proprietà di un insieme  $P$  può anche essere presa, conversamente, come punto di partenza della definizione del suo essere ovunque denso nel dominio  $a$ .

Anche il *concetto di potenza*, che comprende in sé come caso particolare quello di numero intero, cioè il fondamento della teoria delle grandezze, e può essere visto come l'autentico momento generalissimo delle molteplicità, è tanto poco limitato agli insiemi lineari di punti che va piuttosto considerato un attributo di qualsiasi molteplicità *ben definita*, quale che sia poi il carattere concettuale dei suoi elementi.

Chiamo *ben definita* una molteplicità (una classe, un insieme) di elementi appartenenti a una sfera concettuale qualsiasi quando sulla base della sua definizione, e come conseguenza del principio logico del terzo escluso, si deve considerare *determinato internamente*: *primo*, se un qualunque oggetto appartenente a quella stessa sfera concettuale sia o non sia elemento della molteplicità che viene pensata; *secondo*, se due oggetti appartenenti all'insieme siano o non siano, al di là di una differenza formale nel modo in cui sono dati uguali l'uno all'altro.

In generale, di fatto queste alternative non potranno essere decise in modo sicuro e preciso coi metodi o le capacità a nostra disposizione; qui però non stiamo affatto discutendo di questo, ma *soltanto* della *determinazione interna*, che in certi casi concreti, se l'obiettivo lo richiede, si dovrà cercare di trasformare in *determinazione attuale (esterna)* perfezionando l'apparato strumentale.

Ricordiamo, a scopo illustrativo, la definizione dell'insieme di tutti i numeri algebrici. Questa può sicuramente essere formulata in modo tale che con essa sia anche determinato internamente se un certo numero  $\eta$ , comunque preso, appartiene ai numeri algebrici oppure no; ciononostante, spesso il problema di giungere effettivamente a una decisione per un  $\eta$  dato risulta, com'è noto, dei più *difficili*, e per esempio è ancora una questione aperta (e del più alto interesse) se  $\pi$ , il numero che esprime il rapporto della circonferenza col diametro, sia algebrico o, come è molto probabile, trascendente. Per  $e$ , il numero base del sistema dei logaritmi naturali, il problema è stato risolto appena otto anni fa da Ch. Hermite nel suo splendido 'Sur la fonction exponentielle, Paris 1874', in cui si dimostra che  $e$  non è radice di nessuna equazione algebrica con coefficienti razionali interi.

Se abbiamo a che fare con una molteplicità geometrica i cui elementi possono essere non solo punti, ma anche linee, superfici o corpi, ove questa sia *ben definita* ci si presenta anche qui, e immediatamente, il problema della sua potenza, che sarà o *uguale* a una delle molteplicità possibili per gli insiemi di punti o *maggiori* di tutte queste. Per quanto riguarda in particolare gli *insiemi di punti* contenuti in domini continui n-dimensionali, ho già provato rigorosamente (*Crelles Journal*, vol. 84, p. 242) che le loro potenze coincidono con quelle degli insiemi *lineari* di punti; questo fatto può essere inteso come una semplice conseguenza di una proposizione ivi dimostrata, secondo la quale una figura continua n-dimensionale può essere messa in relazione biunivoca, totalmente conforme a una legge e relativamente semplice, con una figura continua unidimensionale, cioè col *continuo lineare* retto. La questione delle diverse potenze degli *insiemi di punti* può dunque essere studiata senza alcuna perdita di generalità, come ho già sottolineato alla fine dell'articolo appena citato, lavorando solo sugli insiemi *lineari* di punti.

Ho preso il termine ‘potenza’ da J. Steiner, che l’usa in un senso tutto particolare ma pur sempre affine al mio, cioè per indicare che due figure possono essere correlate *proiettivamente* fra loro in modo che a un elemento dell’una corrisponda uno e un solo elemento dell’altra; ora, il concetto assoluto di potenza, come l’intendiamo qui, tiene ferma l’associabilità biunivoca, mentre non impone nessuna restrizione (e in particolare nessuna restrizione relativa alla continuità e discontinuità) alla legge di correlazione. Così, a due insiemi viene riconosciuta *uguale* potenza quando, ma anche solo quando, essi possono essere associati biunivocamente l’uno all’altro secondo una legge qualsiasi; se entrambi sono *ben definiti*, il fatto che abbiano o no uguale potenza è *determinato internamente*, ma nei casi concreti spesso la decisione *effettiva* in materia è un problema dei più diffoltosi. A me, per esempio, è riuscito solo dopo molti tentativi infruttuosi di provare otto anni fa [...], che il continuo lineare *non* ha la stessa potenza della successione dei numeri naturali.

La *teoria delle molteplicità*, nell’accezione che ha qui acquisito, abbraccia (se teniamo conto solo degli enti matematici e trascuriamo, provvisoriamente, le altre sfere concettuali) i campi dell’aritmetica, della teoria delle funzioni e della geometria, che essa raccoglie in un’unità superiore sulla base del concetto di potenza. In tal modo il *continuo* e il *discontinuo* vengono considerati da uno stesso punto di vista e misurati con un metro comune.

La *minima* potenza che si possa dare negli insiemi *infiniti*, cioè costituiti da elementi infinitamente numerosi, è quella della successione dei numeri raziona-

li interi positivi. Io chiamo le molteplicità di questa classe *insiemi numerabili all'infinito* o, più brevemente e semplicemente, *insiemi numerabili*; esse sono caratterizzate dal fatto di poter essere rappresentate (in vari modi) sotto forma di successione semplicemente infinita e conforme a una legge

$$E_1, E_2, \dots, E_\nu, \dots,$$

così che ogni elemento dell'insieme abbia una posizione determinata nella successione e quest'ultima non abbia altri membri oltre agli elementi dell'insieme dato.

Ogni parte costitutiva infinita di un insieme numerabile forma a sua volta un insieme numerabile all'infinito.

Se abbiamo un insieme finito o infinito numerabile di insiemi  $(E), (E'), (E'')$ , ... ciascuno dei quali sia a sua volta numerabile, anche l'insieme ottenuto dall'unione di tutti gli elementi di  $(E), (E'), (E'')$ , ... è numerabile.

Queste due proposizioni, semplici e facili da provare, costituiscono il fondamento delle dimostrazioni di numerabilità. Esse permettono di riconoscere immediatamente che, come ho già osservato più volte, tutti gli insiemi che sono dati sotto forma di successione semplicemente infinita con membro generico  $E_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n}$ , (dove  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$  prendono, indipendentemente l'uno dall'altro, tutti i valori interi positivi) sono numerabili, cioè rappresentabili sotto forma di successioni semplicemente infinite; ma anche gli insiemi il cui membro generico ha la forma

$$E_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_\mu}$$

dove lo stesso  $\mu$  può prendere tutti i valori interi positivi, appartengono a questa classe; un esempio particolarmente notevole di quest'ultimo tipo è dato dall'insieme di tutti i numeri algebrici. L'aritmetica e l'algebra ci offrono perciò una ricchezza inesauribile di esempi di numerabilità; né la geometria è meno generosa sotto questo aspetto. Ce ne può dare forse un'idea il seguente teorema, che consente alcune delle applicazioni alla teoria dei numeri e a quella delle funzioni:

*Teorema: In uno spazio n-dimensionale continuo A esteso ovunque all'infinito sia definito un numero infinito (a) di sottodomini n-dimensional, continui, disgiunti e che si toccano al massimo lungo i contorni; la molteplicità (a) di questi sottodomini è sempre numerabile.*

Vale la pena di sottolineare che qui non si fanno assunzioni di nessun genere sulla distribuzione o sulla grandezza del volume dei domini  $a$ , che possono avvicinarsi all'infinito, essendo piccoli a piacere, a qualsiasi punto di A che non

appartenga loro; il teorema non ha eccezione alcuna, sempre che ogni sotto dominio  $a$  (tutti gli  $a$  sono per ipotesi n-dimensionali) abbia un volume determinato (piccolo a piacere) e che i diversi  $a$  coincidano al massimo lungo i contorni.

La dimostrazione del teorema procede così: lo spazio n-dimensionale infinito A sia correlato per mezzo di radii vectores reciproci a una figura n-dimensionale B posta all'interno di uno spazio infinito  $(n + 1)$ -dimensionale A' e caratterizzata dal fatto che i suoi punti hanno distanza costante 1 da un punto fisso dello spazio A'. (Nel caso di  $n = 1$  si tratterà di un cerchio di raggio unitario, nel caso di  $n = 2$  di una sfera di raggio unitario). A ogni sotto dominio n-dimensionale  $a$  di A corrisponde un sotto dominio n-dimensionale  $b$  di B con un volume determinato; ora, se è possibile dimostrare la numerabilità dell'insieme  $(b)$ , ne seguirà, a causa della correlazione biunivoca, la numerabilità dell'insieme  $(a)$ .

Ma l'insieme  $(b)$  è numerabile perché il numero dei domini  $b$  il cui volume è maggiore di un numero  $\gamma$  comunque assegnato è necessariamente finito: la loro somma, infatti, è minore di  $2^n\pi$  cioè del volume della figura B, che contiene tutti i  $b$ ; ne consegue che i domini  $b$  possono essere ordinati, rispetto alla grandezza del volume, in una successione semplicemente infinita tale che i più piccoli seguono i più grandi e nel loro susseguirsi diventano, da ultimo, infinitamente piccoli.

Il caso di  $n = 1$  ci dà il seguente teorema, essenziale per l'ulteriore sviluppo della teoria degli insiemi lineari di punti: *ogni classe di intervalli  $(\alpha \dots \beta)$  disgiunti e coincidenti al massimo negli estremi definita su di una linea retta infinita è necessariamente una classe numerabile*. Ciò vale anche per l'insieme degli estremi  $\alpha$  e  $\beta$ , ma può non valere per la sua derivata.

Il caso di  $n = 2$ , che esprime la numerabilità di ogni classe di porzioni di superficie disgiunte e in contatto al massimo lungo i contorni, appare significativo per la teoria delle funzioni di grandezze complesse. Qui osserverò che non è difficile estendere questa proposizione alle classi di porzioni di superficie disgiunte definite in un dominio che copra il piano  $m$  volte, o anche un'infinità numerabile di volte.

Per quanto riguarda gli *insiemi di punti* numerabili, essi presentano un fenomeno notevole che vorrei ora mettere in luce. Consideriamo un qualsiasi insieme di punti (M) che sia *ovunque denso* in un dominio n-dimensionale continuo e connesso A e possieda la proprietà della numerabilità, sia cioè tale

che i punti ad esso appartenenti possano essere rappresentati nella forma

$$M_1, M_2, \dots, M_\nu, \dots;$$

possiamo prendere come esempio l'insieme di tutti i punti del nostro spazio tridimensionale le cui coordinate in un sistema ortogonale  $x, y, z$  hanno tutte e tre un valore numerico *algebrico*. Se supponiamo di sottrarre al dominio A l'insieme di punti numerabile (M) e indichiamo con  $\alpha$  il dominio che rimane vale una proposizione assai notevole, cioè che per  $n \geq 2$  il dominio  $\alpha$  non cessa di essere *connesso in modo continuo*, o, in altre parole, che due punti qualsiasi N e N' di  $\alpha$  possono sempre essere collegati con una *linea continua* i cui punti appartengono tutti ad  $\alpha$ , cosicché su essa non c'è nemmeno un punto dell'insieme (M).

Ci basterà verificare la validità di questo teorema per il caso di  $n = 2$ ; la dimostrazione si basa, essenzialmente, su una proposizione [...], cioè che, se è data una qualsiasi successione conforme a una legge di grandezze reali

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$$

(fra le quali possono anche essercene di uguali - il che, chiaramente, non fa nessuna differenza sostanziale), in ogni intervallo  $(\alpha \dots \beta)$  assegnato a piacere, per quanto piccolo, si possono trovare grandezze reali  $\eta$  che non occorrono in tale successione.

Sia dunque A una qualsiasi porzione continua interconnessa del piano infinito, prendiamo in A l'insieme di punti numerabile e ovunque denso (M) e siano N, N' due punti qualsiasi di A non appartenenti a (M) che inizialmente collegheremo, senza preoccuparci dei punti di (M), con una linea continua  $l$  che corre all'interno di A; si deve dimostrare che  $l$  può essere sostituita da un'altra linea continua  $l'$  che collega anch'essa i punti N e N' e corre pure all'interno di A ma non contiene nemmeno un punto dell'insieme (M).

Su  $l$  giacciono in generale infiniti punti dell'insieme (M) che formano in ogni caso una parte costitutiva di (M) e quindi ancora un insieme *numerabile*.

Di conseguenza, per la proposizione aritmetica appena citata, in ogni intervallo sulla linea  $l$ , per quanto piccolo, esisteranno dei punti non appartenenti a (M). Consideriamo un numero finito di questi punti su  $l$ , diciamo  $N_1, N_2, \dots, N_k$ , tali che i segmenti di retta  $NN_1, N_1N_2, \dots, N_kN'$  giacciono anch'essi per intero all'interno di A. Ora, tali segmenti possono sempre essere sostituiti da archi di cerchio con gli stessi estremi e che corrono pure all'interno di A, non contengono alcun punto dell'insieme (M) e uniti formano una linea continua  $l'$  con

le proprietà indicate sopra.

Basterà dimostrare la cosa per un segmento; prendiamo il primo,  $NN_1$ .

I cerchi passanti per i punti  $N$  e  $N_1$  formano un fascio semplicemente infinito, e i loro centri giacciono su una retta  $g$  determinata; indichiamo mediante la distanza  $u$  da un punto fisso  $O$  di  $g$  la posizione di uno di questi centri. Alla grandezza  $u$  si potrà sempre assegnare come dominio di variabilità un intervallo  $(\alpha \dots \beta)$  tale che, per ogni cerchio corrispondente a un  $u$ , uno dei due archi che collegano  $N$  e  $N_1$  verrà a trovarsi per intero nel dominio A.

I centri di quei cerchi del nostro fascio che passano per i punti

$$M_1, M_2, \dots, M_\nu, \dots$$

dell'insieme (M) formano sulla retta  $g$  un insieme di punti numerabile

$$P_1, P_2, \dots, P_\nu, \dots;$$

siano

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$$

i corrispondenti valori di  $u$ .

Se ora nell'intervallo  $(\alpha \dots \beta)$  prendiamo un numero  $\eta$  che non sia uguale a nessun  $\omega_\nu$  (il che è sempre possibile per il teorema introdotto sopra), assumendo  $u = \eta$  otteniamo un cerchio del nostro fascio sul cui contorno non giace nessun punto dell'insieme (M) e che, essendo  $\alpha < \eta < \beta$ , ci darà un arco che collega i punti  $N$  e  $N_1$  e possiede le proprietà richieste.

Resta così dimostrato che due punti  $N$  e  $N'$  qualsiasi del dominio  $\alpha$ , che è quello che rimane dopo la sottrazione di un insieme di punti numerabile e ovunque denso (M) ad A, possono essere collegati mediante una linea continua  $l'$ , formata da un numero finito di archi di cerchio, i cui punti appartengono tutti al dominio  $\alpha$  - che non contiene cioè alcun punto dell'insieme (M). Sarebbe anche possibile collegare, usando gli stessi strumenti, i punti  $N$  e  $N'$  mediante una linea continua conforme a una *legge analitica unica* e contenuta per intero nel dominio  $\alpha$ . Si riallacciano a questi teoremi alcune riflessioni sulla natura dello spazio tridimensionale da porre a fondamento del mondo reale per descrivere e spiegare concettualmente i fenomeni che vi hanno luogo. Esso viene considerato com'è noto, *totalmente continuo* a causa delle forme in esso presenti, ma anche e soprattutto per via dei movimenti che vi hanno luogo. In base alle ricerche, coincidenti nel tempo e indipendenti l'una dall'altra, di Dedekind (si veda il suo opuscolo *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig 1872)

e dell'autore (Mathem. Annalen, vol. V, pp. 127-128), questa assunzione significa semplicemente che ogni punto le cui coordinate  $x, y, z$  in un sistema di riferimento ortogonale siano date mediante numeri reali determinati *qualsiasi* razionali o irrazionali, viene pensato come *realmente appartenente allo spazio* - il che non discende, in generale da nessuna costrizione interna, e quindi deve essere visto come un libero atto della nostra attività di costruzione mentale. Dunque l'*ipotesi della continuità dello spazio* altro non è che la presupposizione, in sé arbitraria, della corrispondenza biunivoca completa fra il continuo tridimensionale *puramente aritmetico* ( $x, y, z$ ) e lo spazio che sta alla base del mondo fenomenico.

Ma il nostro pensiero può benissimo astrarre con non minore facilità, da alcuni punti spaziali, anche ovunque densi, e costruirsi il concetto di uno spazio tridimensionale *discontinuo* a con le caratteristiche descritte sopra. Si pone allora una questione, cioè se anche in un simile spazio *discontinuo* a sia pensabile un *movimento continuo*, e per quanto abbiamo detto sopra la risposta dev'essere incondizionatamente *affermativa*; abbiamo infatti dimostrato che due punti qualsiasi di una figura in a possono essere collegati mediante innumerevoli linee continue e perfettamente regolari. Viene così in luce un fatto notevole, cioè che dalla semplice esistenza del moto continuo non si può dedurre immediatamente la perfetta continuità del concetto di spazio tridimensionale che usiamo per spiegare i fenomeni di movimento. E' ovvio quindi che si dovrebbe cercare di sviluppare una meccanica modificata, valida per spazi del tipo di a, onde ricavare dalle conseguenze di questa ricerca e dal loro confronto coi dati una base d'appoggio il più possibile fattuale per l'*ipotesi della perfetta continuità del concetto di spazio* da porre a fondamento dell'esperienza.

### 12.6.3 Articolo 4

Ora dobbiamo, in aggiunta alle idee sviluppate sopra, enunciare e dimostrare diversi nuovi teoremi che sono tanto interessanti in sé quanto utili per la teoria delle funzioni. A tale scopo ci serviremo delle seguenti notazioni: se  $P_1, P_2, P_3, \dots$  sono insiemi di punti senza connessione l'uno con l'altro e P è l'insieme formato dalla loro unione, invece della formulazione usata in precedenza ne useremo un'altra più comoda,

$$P \equiv P_1 + P_2 + P_3 + \dots,$$

e se  $Q$  è un insieme contenuto in  $P$  e  $R$  è l'insieme che rimane quando si sottrae  $Q$  da  $P$ , scriveremo per uniformità

$$R \equiv P - Q.$$

Un insieme di punti  $Q$  che giaccia in uno spazio continuo n-dimensionale può essere tale che *nessuno* dei punti che gli appartengono sia un suo punto limite; chiamiamo *isolato* un simile insieme di punti, per il quale varrà

$$\mathfrak{D}(Q, Q') \equiv O.$$

Dato un *qualsiasi* insieme di punti  $P$  che *non* sia isolato, se ne ottiene un  $Q$  *isolato* sottraendogli l'insieme  $\mathfrak{D}(P, P')$ .

Vale dunque

$$Q \equiv P - \mathfrak{D}(P, P')$$

e di conseguenza

$$P \equiv Q + \mathfrak{D}(P, P').$$

Ogni insieme di punti può quindi essere visto come l'unione di un insieme isolato  $Q$  e di un altro insieme  $R$  che è divisore della sua derivata  $P'$ . Osserviamo inoltre (ma su ciò abbiamo già richiamato più volte l'attenzione) che ogni derivata superiore di  $P$  è contenuta nella precedente; ne segue che

$$P' - P'', P'' - P''', \dots, P^{(\nu)} - P^{(\nu+1)}, \dots$$

sono tutti insiemi *isolati*.

Nel seguito useremo due importanti scomposizioni,

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \dots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}$$

e

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \dots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \dots + P^{(\infty)}$$

Per gli insiemi isolati vale il seguente

**Teorema I.** *Ogni insieme di punti isolato è numerabile e quindi appartiene alla prima classe.*

**Dimostrazione.** Siano  $Q$  un generico insieme di punti isolato posto in uno spazio n-dimensionale,  $q$  uno dei suoi punti e  $q', q'', q''', \dots$  gli altri suoi punti. Le distanze  $qq', qq'', qq''', \dots$  hanno un *limite inferiore* che indicheremo con  $\rho$ . Siano, analogamente,  $\rho'$  il limite inferiore delle distanze  $q'q, q'q'', q'q''', \dots, \rho''$  il

limite inferiore delle distanze  $q''q, q''q', q''q'', \dots$ , ecc.

Dato che  $Q$  è un insieme isolato, tutte queste grandezze  $\rho, \rho', \rho'', \dots$  sono *diverse da zero*.

Si descriva con centro  $q$  la figura  $(n-1)$ -dimensionale i cui punti hanno distanza  $\frac{\rho}{2}$  da  $q$ ; questa figura delimita un'ipersfera  $n$ -dimensionale che indicheremo con  $K$ . Si costruiscano, allo stesso modo, un'ipersfera  $K'$  con centro  $q'$  e raggio  $\frac{\rho'}{2}$ , un'ipersfera  $K''$  con centro  $q''$  e raggio  $\frac{\rho''}{2}$ , ecc.

Vale un fatto fondamentale, cioè che due qualsiasi di queste ipersfere, per es.  $K$  e  $K'$ , possono essere al massimo tangenti, e in caso contrario sono totalmente esterne l'una all'altra.

Ciò dipende dall'essere le due grandezze  $\rho$  e  $\rho'$ , come segue dalla loro definizione, minori o uguali a  $qq'$ , per cui i raggi  $\frac{\rho}{2}, \frac{\rho'}{2}$  delle due ipersfere  $K, K'$  non sono maggiori della congiungente i centri  $qq'$ .

Perciò le ipersfere  $K, K', \dots$  formano una classe di sottodomini  $n$ -dimensionali esterni l'uno all'altro dello spazio  $n$ -dimensionale di base; ma una simile classe è, come abbiamo qui dimostrato, sempre *numerabile*. Di conseguenza anche i loro centri  $q, q', q'', \dots$  formano un insieme numerabile, cioè è numerabile  $Q$ .

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

**TeoremaII.** *Se la derivata  $P'$  di un insieme di punti  $P$  è numerabile, è numerabile anche  $P$ .*

**Dimostrazione.** Indichiamo il massimo comun divisore di  $P$  e  $P'$  con  $R$ ; sia cioè

$$R \equiv \mathfrak{D}(P, P'),$$

e poniamo

$$P - R \equiv Q.$$

Allora  $Q$  sarà, come abbiamo già visto, un insieme *isolato* e quindi, per il teor. I, numerabile.

$R$  è numerabile in quanto parte costitutiva dell'insieme  $P'$ , numerabile per ipotesi.

Ma l'unione di due insiemi numerabili dà sempre un insieme anch'esso numerabile; perciò  $P \equiv Q + R$  è numerabile.

**TeoremaIII.** *Ogni insieme di punti di primo genere e  $n^a$  specie è numerabile.*

1<sup>a</sup> dimostrazione. Per gli insiemi di punti di 0<sup>a</sup> specie il teorema è evidente in quanto tali insiemi sono chiaramente isolati. Ragioniamo ora per induzione completa, assumendo che il teorema sia vero per gli insiemi di punti di 0<sup>a</sup>, 1<sup>a</sup>, 2<sup>a</sup>, ..., (n-l)<sup>a</sup> specie e dimostrandolo su questa base che è vero anche per gli insiemi di n<sup>a</sup> specie.

Se  $P$  è un i. di p. di  $n^a$  specie,  $P'$  è di  $(n-l)^a$ ; perciò  $P'$  è numerabile per ipotesi, e di conseguenza lo è anche  $P$  per il teor. II.

2<sup>a</sup> dimostrazione. Se  $P$  è un insieme di punti di  $n^a$  specie  $P^{(n)}$  è di  $0^a$ , cioè è isolato.

Ora, abbiamo che

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \dots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}$$

Tutte le parti costitutive dal lato destro,  $(P' - P'')$ ,  $(P'' - P''')$ , ...,  $(P^{(n-1)} - P^{(n)})$  sono insiemi isolati, cioè, per il teor. I, numerabili; di conseguenza è tale l'insieme  $P'$ , formato dalla loro unione, e quindi lo è anche  $P$ .

Teorema IV. *Ogni insieme di punti  $P$  di secondo genere tale che  $P^\infty$  sia numerabile è numerabile esso stesso.*

Otteniamo la dimostrazione di questo teorema mediante la scomposizione

$$P' \equiv (P' - P'') + (P'' - P''') + \dots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \dots + P^{(\infty)}$$

Infatti tutte le parti costitutive dal lato destro sono numerabili e la loro *enumerazione è infinita numerabile*; ne seguono la numerabilità di  $P'$  e, per il teor. II, anche quella di  $P$ .

Se per  $\alpha$  intendiamo uno qualsiasi dei *simboli infinitari* [...], abbiamo un teorema più generale:

Teorema V. *Ogni insieme di punti  $P$  di secondo genere per il quale  $P^{(\alpha)}$  sia numerabile è numerabile esso stesso.*

Questa proposizione si dimostra per induzione completa come i teoremi III e IV.

Possiamo formulare queste ultime proposizioni anche nel seguente modo:

*Se  $P$  è un insieme di punti non numerabile anche  $P^{(\alpha)}$  è non numerabile, sia quando  $\alpha$  è un numero intero finito sia quando è un simbolo infinitario.*

Nelle ricerche dedicate da du Bois-Reymond e Harnack alla generalizzazione di alcuni teoremi del calcolo integrale si fa uso di insiemi lineari di punti che possono essere racchiusi in un numero finito di intervalli *la cui somma è minore di qualsiasi grandezza preassegnata*.

Perché un insieme lineare di punti possieda la suddetta proprietà è necessario, chiaramente, che non sia ovunque denso in nessun intervallo, per quanto piccolo; tuttavia questa condizione non appare sufficiente allo scopo. Siamo invece in grado di dimostrare il seguente

Teorema VI. *Se un insieme lineare di punti  $P$  contenuto in un intervallo  $(a, b)$  è tale che la sua derivata  $P'$  è numerabile, è sempre possibile racchiudere  $P$  in*

*un numero finito di intervalli con somma piccola a piacere.*

Per la dimostrazione, che seguirà immediatamente, usiamo le seguenti proposizioni ausiliarie, la prima delle quali enuncia una proprietà ben conosciuta delle funzioni continue mentre le altre due ci sono note attraverso le considerazioni fatte sopra.

Lemma I. Una funzione continua  $\phi(x)$  della variabile continua  $x$  data in un intervallo  $(c, d)$  e che abbia agli estremi valori  $\phi(c)$  e  $\phi(d)$  disuguali assume almeno una volta ogni valore  $y$  intermedio fra gli estremi  $\phi(c)$  e  $\phi(d)$ .

Lemma II. Un numero infinito di intervalli giacenti su una retta infinita, esterni l'uno all'altro e in contatto al massimo agli estremi è sempre numerabile.

Lemma III. Se abbiamo un insieme infinito numerabile di grandezze

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots,$$

in ogni intervallo preassegnato è possibile trovare una grandezza  $\eta$  che non compare fra di esse.

Dimostrazione del teorema VI. Supponiamo per semplicità che l'intervallo  $(a, b)$  nel quale giace  $P$  sia tale che  $a = 0, b = 1$ ; il caso generico è riconducibile a questo per mezzo di facili trasformazioni. Dunque  $P$  giace nell'intervallo  $(0, 1)$ , e lo stesso vale, chiaramente, per  $P'$  e per l'insieme formato dall'unione di  $P$  e  $P'$ , che chiameremo  $Q$ . Abbiamo

$$Q \equiv \mathfrak{M}(P, P').$$

Indichiamo inoltre con  $R$  l'insieme residuo contenuto in  $(0, 1)$  quando a quest'ultimo si sottrae  $Q$ ; sarà cioè

$$(0, 1) \equiv Q + R. \quad (1)$$

L'ipotesi della numerabilità dell'insieme  $P'$  ha le seguenti conseguenze immediate:

1. Per il teor. II, anche  $P$  è numerabile, e quindi pure  $Q$  lo è.
2.  $P$  (e perciò  $P'$ ) non è ovunque denso in *nessun* intervallo; se infatti  $P$  fosse ovunque denso nell'intervallo  $(i, k)$ , tutti i punti di quest'ultimo apparterrebbero a  $P'$ , che perciò, per il lemma III, non potrebbe essere numerabile. Perciò  $Q$  stesso non è ovunque denso in *nessun* intervallo.

Siano

$$u_1, u_2, \dots, u_\eta, \dots \quad (2)$$

i valori delle coordinate corrispondenti ai punti dell'insieme numerabile  $Q$ .

Se ora consideriamo l'insieme  $R$ , si può dimostrare che i valori delle coordinate corrispondenti ai suoi punti coincidono con la totalità dei valori *interni* di una successione infinita di intervalli

$$(c_1, d_1), (c_2, d_2), \dots, (c_\nu, d_\nu), \dots \quad (3)$$

esterni l'uno all'altro e contenuti, ovviamente, in  $(0, l)$ . Poiché solo i valori *interni* di questi intervalli corrispondono a punti dell'insieme  $R$ , dalla relazione (1) segue immediatamente che gli estremi  $c_\nu$  e  $d_\nu$  degli intervalli stessi corrispondono a punti dell'insieme  $Q$  e quindi occorrono nella successione (2). Sia infatti  $r$  un punto di  $R$ : allora i punti di  $Q$  non gli si possono approssimare all'infinito, perché in tal caso  $r$  sarebbe un punto limite di  $P$  e di conseguenza apparterrebbe a  $Q$ . Ora, devono esserci un punto  $c$  alla sinistra di  $r$  e un punto  $d$  alla sua destra tali che all'interno dell'intervallo  $(c, d)$  non cada nessun punto di  $Q$ , mentre se  $c$  e  $d$  non sono punti isolati di  $Q$ , al di fuori di questo intervallo i punti di  $Q$  si possono approssimare ad essi quanto si vuole; ma poiché ogni punto limite di  $Q$  appartiene a  $Q$  stesso, anche in quest'ultimo caso  $c$  e  $d$  sono punti appartenenti a  $Q$ . Gli infiniti intervalli  $(c, d)$  che si formano in questo modo sono, chiaramente, tutti esterni l'uno all'altro e perciò costituiscono, per il lemma II, un insieme numerabile (3), come volevasi dimostrare.

La grandezza dell'intervalllo  $(c_\nu, d_\nu)$  è, ponendo  $c_\nu < d_\nu$ ,

$$= d_\nu - c_\nu.$$

Chiamiamo  $\sigma$  la somma delle grandezze di tutti questi intervalli; sarà allora

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (d_\nu - c_\nu) = \sigma. \quad (4)$$

Si vede subito che  $\sigma \leq l$ , perché gli intervalli sono tutti esterni l'uno all'altro e sono contenuti in  $(0, l)$ . Se ora fossimo in grado di provare che  $\sigma = l$ , ovvero di escludere la possibilità di  $\sigma < l$ , con ciò il teorema VI resterebbe dimostrato come risulta chiaro da una semplicissima riflessione sul significato degli intervalli  $(c_\nu, d_\nu)$ .

Per completare la dimostrazione dovremo dunque provare che l'ipotesi  $\sigma < l$  porta a una contraddizione.

A tale scopo definiamo per  $0 \leq x \leq 1$  la seguente funzione  $f(x)$ : si sommino le grandezze di tutti gli intervalli  $(c_\nu, d_\nu)$ , per quella parte in cui questi cadono

all'interno dell'intervallo  $(0, x)$ , e sia questa somma  $= f(x)$ . (Se un intervallo  $(c_\nu, d_\nu)$  giace in parte all'esterno di  $(0, x)$ , nella somma si dovrà prendere solo quella sua porzione che cade invece all'interno di  $(0, x)$ ).

è chiaro che

$$f(1) = \sigma.$$

Se inoltre poniamo che  $f(0) = 0$ , ne segue con facilità che  $f(x)$  è una funzione continua di  $x$  per  $0 \leq x \leq 1$ .

Dalla definizione di  $x$  segue infatti immediatamente che se  $x$  e  $x + h$  sono due valori distinti nell'intervallo  $(0, 1)$  per valori positivi di  $h$  si ha

$$0 \leq f(x + h) - f(x) \leq h,$$

e da ciò deduciamo la continuità di  $f(x)$ .

Se si torna alla definizione di  $f(x)$  è anche subito evidente che, se  $x$  e  $x + h$  sono due valori distinti di uno stesso sottointervallo  $(c_\nu, d_\nu)$ , vale

$$f(x + h) - f(x) = h,$$

e quindi anche

$$(x + h) - f(x + h) = x - f(x).$$

Perciò, se introduciamo la funzione

$$\phi(x) = x - f(x),$$

anche questa sarà una funzione continua di  $x$ , e quando  $x$  cresce da 0 a 1 varierà senza mai diminuire da 0 fino a  $1 - \sigma$ .

*Questa variazione procede in modo tale che all'interno di un sottointervallo  $(c_\nu, d_\nu)$  la funzione continua  $\phi(x)$  conserva un valore costante.*

Di conseguenza, la funzione  $\phi(x)$  è tale che tutti i valori che assume sono esauriti dalla successione

$$\phi(u_1), \phi(u_2), \dots, \phi(u_\nu), \dots \tag{5}$$

In effetti o  $x$  è uguale a uno dei valori  $u_\nu$ , e in questo caso abbiamo

$$\phi(x) = \phi(u_\nu),$$

oppure è un valore all'interno di un intervallo  $(c_\nu, d_\nu)$ , e in questo caso, dato che  $\phi(x)$  è costante all'interno di tali intervalli, abbiamo

$$\phi(x) = \phi(c_\nu) = \phi(d_\nu).$$

Ma i valori  $c_\nu$  e  $d_\nu$  appartengono, come abbiamo visto sopra, anche alla successione (2); varrà cioè

$$c_\nu = \phi(u_\lambda).$$

Perciò la successione (5) contiene tutti i valori che possono essere assunti da  $\phi(x)$ .

Dunque l'insieme dei valori possibili per la funzione continua  $\phi(x)$  è *numerabile*.

Ora, se fosse  $\sigma < 1$  e quindi  $1 - \sigma$  fosse diverso da zero, per il lemma I la funzione continua  $\sigma(x)$  assumerebbe almeno una volta ogni valore  $y$  compreso fra 0 e  $1 - \sigma$ . Di conseguenza la successione (5), che come abbiamo appena dimostrato esaurisce tutti i valori assunti da  $\phi(x)$ , conterebbe tutti i possibili numeri dell'intervallo  $(0, 1 - \sigma)$ , il che contraddice il lemma III. Dunque rimane solo l'ipotesi  $\sigma = 1$ , ed era questo che dovevamo dimostrare.

## 12.7 L'infinito

Le prossime sezioni andranno ad analizzare i concetti di infinito e di numeri ordinali transfiniti che vengono presentati da Cantor nel quinto degli articoli sopra citati, conosciuto con il titolo ‘Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre’ (Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità) pubblicati nel 1883. Questo è il primo testo in cui Cantor spiega in modo organico i numeri ordinali transfiniti.

### 12.7.1 L'infinito proprio e improprio

A questo punto della trattazione sulla teoria delle molteplicità, Cantor deve affrontare un ostacolo concettuale importante senza il quale i suoi studi non sarebbero potuti proseguire. Egli infatti vuole andare a definire dei nuovi numeri interi che oltrepassino il limite del finito, andando ad ampliare il concetto di numero. Allo stesso tempo era però anche consapevole che queste idee non sarebbero state accettate da gran parte dei suoi contemporanei. L'inizio dei Grundlagen inizia infatti dicendo:

« La presentazione sviluppata fino ad ora delle mie ricerche nella teoria delle molteplicità è arrivata ad un punto in cui il proprio proseguimento è condizionato dall'ampliamento della concezione di numero intero al di là dei confini fino ad ora conosciuti e questo ampliamento va nella direzione nella quale, per quanto ne so, nessuno si è mai cimentato. La dipendenza nella quale io mi vedo impegnato da questa estensione del concetto di numero è così grande che mi sarà appena possibile fare ulteriori passi avanti nella teoria degli insiemi. In questa circostanza desidererei dare una giustificazione, o se possibile una scusa, per quelle idee in apparenza insolite che introduco nelle mie osservazioni. Si tratta quindi di un ampliamento o meglio di una continuazione della serie numerica intera verso l'infinito; ciò potrebbe sembrare anche troppo audace, posso perciò esprimere non soltanto la speranza, ma la ferma convinzione che questo ampliamento potrà essere visto, con il tempo, semplice, adeguato e naturale. Non nascondo affatto che con questa impresa mi metto in un certo qual modo in contrasto con le opinioni molto diffuse sull'infinito matematico e con gli odierni punti di vista sull'essenza della grandezza numerica.»

Da questo punto in poi, Cantor dedica molto spazio nello spiegare cosa sia per lui l'infinito matematico; per prima cosa gli sembra si presenti come un infinito improprio, ovvero *una variabile, crescente o decrescente al di là di ogni limite, o decrescente ad una qualsiasi piccolezza, ma come una grandezza che rimane sempre finita*. D'altra parte in quel periodo si era

« sviluppato un altro concetto di infinito sia nel campo della geometria che in quello della teoria delle funzioni secondo il quale è diventato comune e necessario immaginarsi nel piano [...] un unico punto, infinitamente lontano ma determinato; inoltre si dimostra che il comportamento della funzione nelle vicinanze del punto infinitamente lontano presenta le stesse caratteristiche di ogni altro punto posto nel finito...»

Quest'ultimo tipo di infinito viene chiamato da Cantor proprio.

Abbiamo così da una parte un infinito variabile e quindi incrementabile ma indeterminato; dall'altra invece un infinito che è assolutamente determinato; i numeri infiniti interi che Cantor definirà in seguito, saranno proprio una manifestazione di quest'ultimo, ovvero dell'infinito proprio.

Vediamo dunque come nascono queste idee di infinito in Cantor. Oltre che matematico, Cantor era molto appassionato di filosofia e fu particolarmente affascinato da due filosofi: Baruch Spinoza e Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano. Del primo, che era un filosofo olandese vissuto tra il 1632 e il 1677, Cantor fu colpito soprattutto dal lato metafisico che emerge nell' *Etica* e in particolare dal fatto che accettava l'infinito attuale e distingueva diversi ordini di infinità. Spinoza concepiva due tipi di infinito attuale: un infinito *al di fuori del quale nulla è*, ovvero un infinito assoluto identificato con Dio, e un infinito *solo nel suo genere*, ovvero determinato e che non abbraccia tutte le cose. Chiaramente l'infinito assoluto doveva essere in qualche modo più grande dell'altro infinito e per Cantor, che era molto religioso, non c'era dunque nessuna difficoltà nell'accettare sia l'identificazione dell' infinito assoluto con Dio, sia considerare tutti gli altri infiniti determinabili in quanto non assoluti. Ma la visione di Cantor sull'assoluto proprio era più sottile e l'idea gli fu forse suggerita da Bolzano. Questo infatti accettava l'idea di un infinito attuale, ma l'innovazione consisteva nel rivendicarne una trattabilità matematica fino ad allora mai azzardata, arrivando persino a proporre una sorta di aritmetica degli infiniti che però non ebbe successo. Ma cosa ancora più importante, il suo studio delle molteplicità infinite in atto lo porta ad introdurre un nuovo

concetto, che verrà poi ripreso da Cantor, di insieme visto come una molteplicità determinata esclusivamente dai suoi elementi. In particolare sostiene che *due insiemi M e N sono considerati uguali se e solo se hanno esattamente gli stessi elementi.*

Cantor rielaborò questi concetti e nella sua mente si andarono così a creare i due concetti di infinito potenziale e attuale che sono stati definiti prima. In generale l'infinito improprio veniva visto come un ‘cattivo’ infinito, a torto per Cantor perché questo concetto si era rilevato uno strumento molto utile nell’analisi infinitesimale e nel calcolo integrale; nonostante ciò però non lo vede come un vero e proprio infinito e per questo lo chiama improprio. Esso ha infatti *una realtà fittizia essendo riferito ad un infinito attuale senza il quale non avrebbe senso* e in una lettera a Vivanti dice:

« ...è fuori dubbio che non possiamo rinunciare alle grandezze variabili nel senso dell’infinito potenziale...ma in una osservazione matematica deve essere conosciuto con rigore il dominio della sua variabilità, attraverso una definizione; questo dominio, a sua volta, non può essere variabile, perché verrebbero a mancare le basi per l’indagine e quindi questo dominio è un insieme di valori attualmente infiniti. Così ogni infinito potenziale presuppone un infinito attuale per essere utilizzabile matematicamente...»

Questo infinito potenziale era già concepito e accettato fin dall’antichità; per quasi due millenni, il problema di come trattare l’infinito veniva risolto assumendo il principio dovuto ad Aristotele secondo cui ‘*infinity actus non datur*’, cioè non è ammissibile un’infinità data in atto, un infinito attuale. All’epoca infatti erano note solo numerazioni finite ed è quindi naturale che con il solo atto del contare conoscessesse soltanto insiemi finiti; inoltre il filosofo greco sosteneva che se l’infinito esisteva, allora il finito si sarebbe perso in esso, affermazione che con la nuova teoria di Cantor non ha più validità, perché come si vedrà in seguito ciò dipenderà solamente dall’ordine in cui il finito si pone nei confronti dell’infinito. Cantor sostiene così che tale principio dovrebbe essere modificato in ‘*omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt*’, quindi tranne Dio, l’intelletto umano era in grado di definire sia il finito che l’infinito: l’intelligenza umana non ha limiti nel concepire ed eventualmente determinare l’infinito.

Per quanto riguarda l’infinito proprio, pensa esso si presenti in tre modalità diverse:

- ‘in Deo extramundano aeterno omnipotente sive natura naturanti’, come assoluto;
- ‘in concreto seu natura naturata’, come transfinito;
- ‘in abstracto’, come grandezza matematica, numero o tipo d’ordine

Risulta qui chiara l’influenza di Spinoza e di Bolzano sul pensiero cantoriano. Da notare come sia facile confondere le due forme di transfinito e dell’assoluto: il primo è determinato e incrementabile, il secondo invece è determinato ma non incrementabile e non può essere pertanto trattato matematicamente. Infatti dopo Kant si era diffusa l’idea dell’assoluto come limite ideale del finito mentre nel pensiero cantoriano questo può essere pensato come un transfinito, anzi come il più piccolo di tutti i numeri transfiniti.

### **L’origine del termine transfinito**

La teoria degli insiemi portò Cantor a formulare l’idea che esistessero diversi tipi di infinito. Per il religiosissimo Cantor nacque quindi il dubbio che tutto ciò potesse andare contro la religione. Infatti l’idea di Dio nel corso della storia umana era spesso associata all’idea di infinito: l’affermare l’esistenza di diversi infiniti poteva dunque contaminare questa idea? Cantor decise allora di contattare il Santo Uffizio che all’epoca aveva a capo il cardinale tedesco Franzelin per risolvere tale dubbio. I segretari del Santo Uffizio, che erano frati domenicani, per due anni si impegnarono a studiare la teoria degli insiemi e non trovarono nulla di pericoloso nei suoi scritti. Di seguito sono riportati alcuni passi delle lettere che il cardinale e Cantor si scambiarono:

Lettera del 22 gennaio 1886

« ... la lettera che mi fu indirizzata il 25 dicembre 1885 contiene alcuni dubbi riguardo al fondamento filosofico dei miei scritti; probabilmente ho usato alcune parole di cui non ho spiegato abbastanza bene il significato e che non lasciano trasparire chiaramente la mia opinione, perciò ora mi permetto di esprimermi in modo più esatto. Le espressioni ‘natura naturans e natura naturata’ ... vengono usate con lo stesso significato datogli dai Tomisti e cioè: la prima definisce Dio come fermo Creatore e Sostegno di quelle

stesse sostanze create da Lui dal niente, mentre la seconda definisce il mondo creato tramite Lui. Di conseguenza io distinguo un ‘Infinitum aeternum increatum sive Absolutum’ che si rifà a Dio e ai Suoi attributi ed un ‘Infinitum creatum sive Transfinitum’ che si esprime in qualsiasi luogo del creato in cui si deve constatare un infinito attuale, per esempio, secondo me, riguardo al numero infinito attuale dei singoli esseri creati sia nell’intero universo che nel nostro pianeta, e, con tutta probabilità anche in ciascuna sfera, piccola ed estesa dello spazio; ...

...Credo anche che nelle parole delle Sacre Scritture, per esempio Sap. c. Il v. 21: ‘Omnia in pondere, numero et censura disposuisti’ in cui si vede una contraddizione con i numeri infiniti-attuali, non hanno questo significato. Poniamo quindi il caso che ci siano ‘potenze’ attualmente infinite, come credo di aver dimostrato, cioè numeri cardinali e infiniti ‘ordinali di insiemi ben ordinati’ (due concetti che negli insiemi infiniti attuali sono diversi, mentre non lo sono negli insiemi finiti), si dovrebbe pensare allora, che esistano dei numeri transfiniti nella espressione sacra sopra citata e perciò a mio avviso non si deve prenderla come argomentazione contro i numeri infiniti attuali se vogliamo evitare un circolo chiuso.

Tuttavia si può dimostrare in più modi che esiste un ‘infinitum creatum’.

Per non dilungarmi oltre, a questo proposito, mi limiterò a due brevi accenni. Una dimostrazione ci viene da Dio stesso e si desume la possibilità della creazione di un transfinito ordinato proprio dalla massima perfezione dell’Essere Divino; e così pure dalla Sua Onnipotenza e Superiorità si desume ‘la necessità’ dell’avvenuta creazione di un transfinito...»

Questa fu la risposta del cardinale Franzelin:

« ... Osservo con soddisfazione come lei distingua molto bene l’infinito Assoluto da quello che lei chiama infinito attuale .Per quanto constati fino ad ora, così interpretato il suo concetto di transfinito non è affatto una minaccia per le verità religiose. Tuttavia in un punto Lei va contro una indiscussa verità religiosa, e questo non deriva dal suo concetto di transfinito bensì da una imperfetta concezione di Assoluto. Lei afferma giustamente che una prova deriva dal concetto di Dio e desume la possibilità della creazione di un

transfinito ordinato dalla massima perfezione dell'Essere Divino. A meno che il Suo transfinito non abbia in sé alcuna contraddizione, la sua deduzione della possibilità di creazione di un transfinito dal concetto di Potenza divina è molto esatta. Ma con mio rammarico Lei va oltre e desume la necessità di una reale creazione del transfinito. Proprio perché Dio è di per sé Bene assoluto e infinito a cui niente può essere tolto o aggiunto, la necessità di una creazione è una contraddizione ... Secondo la Sua concezione di necessità di una creazione di un transfinito, Lei dovrebbe andare molto oltre. Il suo transfinito attuale è accrescibile; solo se l'infinita Bontà e Superiorità divina vuole la creazione necessaria del transfinito ne segue la necessità dell'incremento fino a che ciò sia possibile e questo contraddice il suo concetto di transfinito... Questa sua 'infelice' concezione della necessità di una creazione Le sarà di ostacolo anche nella Sua lotta ai Panteisti o quantomeno indebolirà la forza persuasiva delle Sue dimostrazioni...».

In seguito a questa lettera Cantor chiarì che, essendo per lui l'assoluta Libertà divina fuori discussione, il concetto di necessità non era da intendersi nel modo in cui il cardinale Franzelin lo aveva interpretato ma: (dalla lettera del 29 gennaio 1886)

« ... io non volevo discutere sulla mia opinione di una necessità obiettiva e metafisica di un atto creativo a cui l'assoluta libertà di Dio si sottopone, bensì volevo solo far notare una certa necessità per noi soggettiva di desumere la creazione realmente ottenuta per infinita bontà divina e non di una creazione da atuarsi 'a parte Dei...' ».

L'unico accorgimento voluto dal cardinale, era che tali infiniti venissero chiamati con un nome diverso, poiché effettivamente c'era una forte analogia con la divinità. Cantor pensò così di chiamarli transfiniti, e per ironia della sorte, le potenze degli insiemi infiniti vengono oggi chiamati cardinali!

Il legame tra Cantor e la religione era così profondo che egli sosteneva perfino di non essere lui stesso ad avere queste idee, ma di essere un relatore/profeta che trascrive divine rivelazioni ed è stata proprio questa convinzione a spingerlo nel continuare con le sue ricerche nonostante fosse consapevole delle ostilità che avrebbe incontrato negli altri colleghi del tempo. Ed infatti ad esempio trovò una forte opposizione da parte del matematico e logico tedesco Leopold

Kroneker che sosteneva che ‘Dio ha creato i numeri interi; tutto il resto è opera dell’uomo’ e che quindi pensava che tutte le scoperte di Cantor fossero sbagliate.

### Il rifiuto degli infinitesimi

Il concetto di differenziale era in genere inteso come una grandezza infinitamente piccola, mentre per Cantor altro non è che una grandezza ausiliaria variabile da assumersi piccola a piacere che però svanisce alla fine del calcolo. Non si deve però dimenticare l’importanza che ha assunto nel calcolo differenziale ed integrale, che però non è sufficiente per attribuire agli infinitesimi un significato che va oltre quello di mezzo ausiliario.

Il rifiuto degli infinitesimi come grandezze da assimilare alle grandezze attuali infinitamente piccole è espresso da Cantor anche nei *Grundlagen*, ma successivamente asserisce che le proprie rigide argomentazioni contro gli infinitesimi sarebbero dedotte dalla teoria dei numeri transfiniti.

Cantor infatti ‘dimostra’ l’inesistenza degli infinitesimi nel seguente modo:

« Non possono esistere grandezze numeriche lineari  $\zeta$  (ossia grandezze numeriche rappresentabili sotto forma di segmenti continui rettilinei limitati) diverse da zero e minori di qualunque grandezza numerica finita piccola a piacere, cioè grandezze di tal natura sono in contraddizione con il concetto di grandezza numerica lineare.

L’andamento della mia dimostrazione è il seguente: io parto dalla supposizione d’una grandezza lineare  $\zeta$ , tanto piccola che il suo n-uplo  $\zeta \cdot n$  per ogni numero intero arbitrariamente grande  $n$  è minore dell’unità, e dimostro, partendo dal concetto di grandezza lineare e mediante certi teoremi della teoria dei numeri transfiniti, che allora anche  $\zeta \cdot \nu$  è minore di qualunque grandezza finita arbitrariamente piccola,  $\nu$  denotando un numero ordinale (cioè un numero o tipo di un insieme ben ordinato) transfinito grande a piacere e appartenente ad una classe di numeri elevata quanto si vuole. Ma ciò vuol dire che, esso non pò certo essere elemento di grandezze finite, pertanto la supposizione fatta contraddice al concetto di grandezza lineare, secondo il quale ciascuna grandezza lineare può immaginarsi come parte integrante di altre grandezze, e in particolare di grandezze finite. Dunque non resta che abbandonare l’ipotesi dell’esistenza di una grandezza  $\zeta$  minore di  $\frac{1}{n}$  per ogni finito intero  $n$ , e con ciò il nostro teorema è dimostrato.»

Il concetto della dimostrazione di Cantor sembra essere questo: dire che  $\zeta$  è un segmento equivale ad ammettere che, disponendo successivamente sopra una retta una serie abbastanza grande di segmenti tutti uguali a  $\zeta$ , si arriva necessariamente a coprire per intero un segmento finito assegnato.

Si può però vedere che l'argomentazione di Cantor ha una vistosa lacuna, o almeno incompletezza, quando pretende di concludere che, se  $\zeta \cdot n$  è minore, per qualunque numero finito  $n$ , di qualunque grandezza finita, allora lo stesso vale per  $\zeta \cdot \nu$  per qualsiasi numero transfinito  $\nu$ .

Comunque la posizione di Cantor è stata al centro di un acceso dibattito, e alcuni matematici hanno cercato di rendere rigorosa e completa questa ‘dimostrazione’, ma apparentemente senza successo. Infatti, il passaggio critico di cui sopra rimane irrisolto.

## 12.8 I numeri ordinali

Per capire al meglio come Cantor abbia cominciato a pensare ai numeri ordinali, è necessario ricordare la seguente

*Definizione 20.* Dato l'insieme  $P$ , l'insieme derivato è l'insieme dei punti di accumulazione di  $P$ .

In simboli, il primo insieme derivato si indica con  $P^{(1)}$ , il secondo con  $P^{(2)}$ , il terzo con  $P^{(3)}$ , e così via. Questo processo di derivazione poteva continuare nel caso che  $P^{(n)}$  non fosse vuoto,  $\forall n$  numero naturale. Si definisce invece il derivato infinito come:

$$P^\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P^n$$

che verrà indicato da Cantor con  $P^{(\omega)}$ . Ma  $P^{(\omega)}$  è ancora un insieme di punti, per cui continuando a derivare si ottiene  $P^{(\omega+1)}$ ,  $P^{(\omega+2)}$ ,... Questo processo verrà giustamente definito da Zermelo il ‘germe embrionale della teoria degli insiemi’.

Poiché *ad ogni insieme ben definito spetta una determinata potenza per cui a due insiemi viene attribuita la stessa potenza se questi si possono ordinare, elemento per elemento, biunivocamente*, l'intento di Cantor era quello di riuscire a classificare gli insiemi in base alla loro potenza, dove:

*Definizione 21.* Un insieme si dice ben definito, in una determinata sfera concettuale, quando, sulla base della sua definizione e del principio logico del terzo escluso, è intrinsecamente determinato tanto se qualsiasi oggetto appartenga o no a quell'insieme, quanto se due elementi dell'insieme siano uguali oppure no.

L'idea di base era dunque quella di usare i numeri ordinali non solo per ottenere insiemi di cardinalità crescente (le classi numeriche) ma anche per numerare via via questa cardinalità (la prima classe numerica, la seconda classe numerica,...) in modo da esaurire tutti i cardinali, e il passaggio consisteva nell'associare ad ogni insieme derivato  $P^{(1)}$ ,  $P^{(2)}$ ,... un numero ordinale finito:

$$\begin{array}{ccccccc} P^{(1)}, & P^{(2)}, & P^{(3)}, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3, \dots \end{array}$$

e a partire da  $P^{(\omega)}$  gli ordinali transfiniti:

$$\begin{array}{ccccccc} P^{(\omega)}, & P^{(\omega+1)}, & P^{(\omega+2)}, \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \omega & \omega + 1 & \omega + 2, \dots \end{array}$$

Per la prima volta, i numeri sono così considerati come entità astratte, diverse dagli insiemi di cui esprimono la potenza o il tipo d'ordine, dove per insieme si intende *un raggruppamento di certi distinti oggetti della nostra opinione e del nostro pensiero, i quali vengono chiamati gli elementi dell'insieme*. Notiamo come questa definizione non è precisa, ma anzi lascia ampi margini all'interpretazione. L'importante era che l'insieme fosse ben definito, mentre non era così importante se un oggetto appartenesse o no all'insieme considerato o se due oggetti fossero uguali. Ad esempio, la definizione 'l'insieme degli uomini belli' non è valida, mentre 'l'insieme degli uomini con meno di un milione di capelli sulla testa' sì, perché anche se è molto difficile stabilire se un uomo appartiene o meno a questo insieme, tuttavia, per il principio del terzo escluso, o un uomo vi appartiene oppure no.

L'introduzione dei nuovi numeri appare per Cantor di grande significato per lo sviluppo e l'approfondimento del concetto di potenza. In particolare essi saranno tali che

« per gli insiemi finiti la potenza coincide con il numero ordinale degli elementi poiché tali insiemi hanno, in ogni disposizione, lo stesso numero di elementi. Per gli insiemi infiniti non si era sollevata fino ad ora [...] la questione di attribuire un preciso ordinale dei loro elementi, ma potrebbe essere attribuita anche a questi una potenza indipendentemente dalla loro disposizione. »

Nasce così il nuovo concetto di *numero ordinale degli elementi di una molteplicità infinita bene ordinata* dove

*Definizione 22.* Si definisce insieme ben definito un insieme nel quale gli elementi sono legati fra loro da una data successione della quale è stato dato convenientemente un primo elemento dell'insieme e quindi ad ogni singolo elemento ne segue un altro ben preciso (sempre che non sia l'ultimo della successione) e così anche a qualsiasi insieme di elementi finito o infinito appartiene un ben preciso elemento che è quello che segue immediatamente tutti gli altri nella successione (a meno che non si verifichi affatto una successione).

### 12.8.1 Costruzione dei numeri ordinali

Consideriamo la successione dei numeri naturali e il seguente

**Primo principio di generazione:** *aggiunta di una unità ai numeri precedentemente formati.*

Partendo da 0 e utilizzando il principio appena definito, si ottiene la successione

$$1, 2, 3, \dots, \nu, \dots$$

che identifica i numeri ordinali finiti.

*Definizione 23.* Si definisce la prima classe numerica (I) la successione 1, 2, 3, ...,  $\nu$ , ...

A questo punto

« il numero ordinale dei numeri  $\nu$  così formati della classe (I) è infinito e non ce ne è un altro più grande. Sarebbe perciò contradditorio parlare di un numero della classe (I) più grande, d'altra parte non c'è niente di strano pensare ad un nuovo numero, chiamiamolo  $\omega$ , il quale deve essere l'espressione di tutta la (I) classe [...]. Si immagina quindi  $\omega$  come il limite a cui tendono i numeri  $\nu$ , se non si intende niente altro che  $\omega$  come il primo numero intero, che segue tutti i numeri  $\nu$  e quindi è il più grande di qualsiasi altro  $\nu$ . »

Abbiamo così ottenuto un nuovo numero  $\omega$  in modo del tutto naturale; applichiamo allora il primo principio di generazione a  $\omega$ . Costruiamo così i primi numeri ordinali transfiniti:

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \nu, \dots$$

Anche in questo caso Cantor osserva che non si arriva ad un numero massimo, e dunque nuovamente non c'è nulla di male nel pensare ad un nuovo numero che sia il più grande, ad esempio  $2\omega$ ; esso deve essere il primo di tutti i numeri  $\nu$  e dei numeri  $\omega + \nu$  che seguono. Notiamo che ogni volta dovremmo applicare il primo principio un numero infinito di volte prima di ottenere un nuovo numero; per interrompere questo processo è necessario il

**Secondo principio di generazione:** se esiste una qualsiasi successione determinata dei numeri interi, in cui non esiste il numero massimo, si viene a definire un nuovo numero che è pensato limite di tutti gli altri numeri e perciò è definito come il più grande immediatamente successivo a tutti.

Il sequito viene spiegato riportando quanto Cantor stesso ha scritto nei Grunlagen:

Applicando entrambi i principi di formazione si ottiene la seguente:

$$2\omega, 2\omega + 1, 2\omega + 3, \dots, 2\omega + \nu, \dots$$

$$3\omega, 3\omega + 1, 3\omega + 3, \dots, 3\omega + \nu, \dots$$

.....

$$\mu\omega, \mu\omega + 1, \mu\omega + 3, \dots, \mu\omega + \nu, \dots$$

Tuttavia neanche qui c'è una fine, perché non esiste massimo tra i numeri  $\mu\omega + \nu$ . Il secondo principio di formazione ci induce quindi all'introduzione di un nuovo numero, immediatamente successivo a tutti i numeri  $\mu\omega + \nu$ , che chiamo  $\omega^2$  al quale si legano i numeri in una determinata successione:

$$\lambda\omega^2 + \mu\omega + \nu$$

così, osservando entrambi i principi di formazione, si arriva a questi numeri:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu;$$

e il secondo principio di formazione, dunque, ci porta a considerare un nuovo numero, indicato in modo appropriato con  $\omega^\omega$ , numero più grande di tutti questi numeri ed a loro immediatamente successivo.

Come si può vedere, questa formazione di nuovi numeri non ha mai fine; usando i due principi di formazione si ottengono *sempre* nuovi numeri e serie numeriche, che hanno una successione *ben precisa*.

Con questo processo di formazione dei numeri interi, infiniti, sembrerebbe di perdersi nell'infinito e di non essere in grado di porre fine a questo processo illimitato, per assicurare con ciò una limitazione analoga a quella conferita alla prima classe numerica; in essa veniva usato il primo principio di formazione e quindi era impossibile 'uscire' dalla serie (I). Il secondo principio di formazione non doveva soltanto oltrepassare il confine numerico fino ad ora conosciuto,

ma mostrarsi anche mezzo capace di *spezzare ogni limite* nella formazione concettuale dei numeri interi.

Notiamo, tuttavia, che tutti i numeri fino ad ora ottenuti e i successivi osservano una certa condizione la quale, ogni volta che c'è bisogno di formare nuovi numeri, si presenta come un nuovo e *terzo* principio che io chiamo *principio di impedimento o limitazione* il quale come dimostrerò, mostra che la seconda classe numerica risultante da esso non ha soltanto una potenza maggiore di quella della prima classe, ma una *immediatamente maggiore*, cioè la *seconda potenza*.

La condizione menzionata, osservata da ogni numero infinito fino ad ora definito, come subito ci si convince, è che l'insieme di questi numeri nella successione dei numeri precedenti è della potenza della prima classe numerica (I). Prendiamo per esempio il numero  $\omega^\omega$ , i numeri precedenti sono contenuti nella forma:

$$\nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega + \nu_\mu$$

dove  $\mu, \nu_0, \nu_1, \dots, \nu_\mu$  possono prendere tutti i valori finiti positivi interi con inclusione dello zero, ma con esclusione del caso  $\nu_0 = \nu_1 = \dots = \nu_\mu = 0$ .

Come si sa, questo insieme si può rappresentare nella forma di una semplice serie infinita e dunque ha la potenza della prima classe numerica.

Poiché inoltre ogni successione di insiemi dei quali ognuno ha la prima potenza, se ogni successione stessa è della prima potenza, ci dà sempre un nuovo insieme il quale ha la potenza della prima classe numerica, allora è chiaro che nella continuazione della nostra successione di numeri in realtà si ottengono sempre e soltanto numeri tali da osservare di fatto qualsiasi condizione.

Questo è quanto spiega Cantor per arrivare ad introdurre la

*Definizione 24.* Si definisce la seconda classe numerica (II) come la totalità di tutti i numeri formati con l'aiuto dei due principi di generazione, crescenti secondo una successione determinata

$$\omega, \omega + 1, \dots, \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \dots + \nu_\mu, \dots, \omega^\omega, \dots, \alpha, \dots$$

i quali sottostanno alla condizione che tutti i numeri che precedono  $\alpha$ , da 1 in poi, formano un insieme della potenza della prima classe numerica.

Questa ultima parte è il **principio di impedimento** e quindi è quel principio che determina i ‘confini’ delle diverse classi numeriche; infatti con l'utilizzo di questi tre principi potremmo ora continuare a creare numeri ottenendo così la terza classe numerica, la quarta classe numerica,...

*Teorema 29.* La seconda classe numerica (II) ha una potenza diversa da quella della prima classe numerica(I).

**Dimostrazione:** Si ricava tale teorema dalla

**Proposizione:** *Se  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$  è un qualsiasi insieme di numeri distinti della seconda classe numerica avente la prima potenza (per cui siamo autorizzati a prenderlo sotto forma di successione semplice  $(\alpha_\nu)$ ), o uno di tali numeri, diciamo  $\gamma$ , è maggiore di tutti gli altri, o in caso contrario c'è un ben determinato numero  $\beta$  della seconda classe numerica (II) che non compare fra gli  $\alpha_\nu$  ed è maggiore di tutti essi mentre ogni numero intero  $\beta' < \beta$  è superato in grandezza da certi numeri della successione  $(\alpha_\nu)$ ; il numero  $\gamma$  o, rispettivamente,  $\beta$  può essere a buon diritto chiamato 'limite superiore' dell'insieme  $(\alpha_\nu)$ .*

**Dimostrazione:** sia  $\alpha_{x_2}$  il primo numero della successione  $(\alpha_\nu)$  maggiore di  $\alpha_1, \alpha_{x_3}$  il primo maggiore di  $\alpha_{x_2}$  e così via.

Avremo allora la successione crescente

$$1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots$$

$$\alpha_1 < \alpha_{x_2} < \alpha_{x_3} < \alpha_{x_4} < \dots$$

e in generale

$$\alpha_\nu < \alpha_{x_\lambda}$$

se

$$\nu < x_\lambda$$

Ora possono accadere due situazioni:

1. tutti i numeri che seguono un certo  $\alpha_{x_\rho}$  nella successione  $(\alpha_\nu)$  sono minori di esso; allora  $\alpha_{x_\rho}$  è il più grande di tutti gli  $\alpha_\nu$ , e abbiamo  $\alpha_{x_\rho} = \gamma$ .
2. prendiamo l'insieme di tutti i numeri interi, da 1 in poi, minori di  $\alpha_1$ , aggiungiamogli prima l'insieme di tutti i numeri interi  $\geq \alpha_{x_2}$  e  $\downarrow \alpha_{x_3}$  e così via; otteniamo in tal modo una parte ben determinata, composta di numeri in successione, delle nostre due prime classi numeriche. Tale insieme di numeri è della prima potenza perché unione numerabile di insiemi numerici numerabili, per cui esiste, in base alla definizione di (II), un ben determinato numero  $\beta$  della classe (II) che è il primo maggiore

di tutti i precedenti. Varrà dunque  $\beta > \alpha_{x_\lambda}$  e perciò anche  $\beta > \alpha_{x_\nu}$ , perché possiamo sempre prendere un  $x_\lambda$  tanto grande da superare un  $\nu$  preassegnato, e in tal caso è  $\alpha_\nu < \alpha_{x_\lambda}$ .

Facilmente, ogni numero  $\beta' < \beta$  viene superato in grandezza da alcuni  $\alpha_{x_\nu}$ , e con ciò la proposizione è dimostrata.  $\square$

Da questa proposizione segue che la totalità dei numeri della classe (II) non ha la potenza di (I), perché altrimenti potremmo pensare l'intera classe (II) sotto forma di una successione semplice

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$$

che per la proposizione appena dimostrata o avrebbe un massimo elemento  $\gamma$  o sarebbe superata, per quanto riguarda la grandezza di tutti i suoi membri  $\alpha_\nu$ , da un certo numero  $\beta$  di (II); nel primo caso il numero  $\gamma + 1$ , appartenente alla classe (II), non appartiene alla successione  $(\alpha_\nu)$  altrimenti ne sarebbe il massimo, nel secondo caso  $\beta$  non appartiene alla successione poiché  $\beta$  sta in (II). Ma questa allora è una contraddizione avendo supposto  $(\alpha_\nu)$  della prima potenza; di conseguenza la classe numerica (II) ha potenza diversa della (I).  $\square$

*Teorema 30.* La potenza della seconda classe (II) segue immediatamente quella della prima classe (I); pertanto non possono esserci potenze intermedie.

**Dimostrazione:** Se dalla classe (II) estraiamo secondo una legge qualsiasi un insieme  $(\alpha')$  di numeri  $\alpha'$  distinti, se pensiamo cioè un qualsiasi insieme  $(\alpha')$  contenuto in (II), un simile insieme ha sempre delle particolarità che possiamo esprimere con le seguenti proposizioni:

- Fra i numeri dell'insieme  $(\alpha')$  ce n'è sempre uno minimo.
- Se in particolare abbiamo una successione di numeri  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\beta, \dots$  della classe (II) che diminuiscono costantemente in grandezza, per cui se  $\beta' > \beta$  allora  $\alpha_\beta > \alpha_{\beta'}$ , questa successione s'interromperà necessariamente, arrestandosi al numero più piccolo, dopo un numero finito di passi; quindi non può essere infinita.

Notiamo che questa proposizione, che è chiara se gli  $\alpha_\beta$  sono numeri finiti, è dimostrabile anche per gli  $\alpha_\beta$  infiniti. Infatti dalla definizione della successione numerica (II) e per quanto appena detto, fra i numeri  $\alpha_\nu$ , se teniamo presenti

solo quelli il cui indice  $\nu$  è finito, ce n'è uno minimo; se poniamo che questo sia  $\alpha_\rho$ , è evidente che, essendo  $\alpha_\nu > \alpha_{\nu+1}$ , la successione  $\alpha_\nu$ , e quindi anche l'intera successione  $\alpha_\beta$ , deve essere composta esattamente di  $\rho$  membri e quindi è finita.

Consideriamo ora il seguente

*Teorema 31.* Se  $(\alpha')$  è un qualsiasi insieme di numeri contenuto nella classe (II), si può verificare solo uno dei tre casi seguenti:

1.  $(\alpha')$  è una classe finita, cioè formata da un'enumerazione finita di numeri;
2.  $(\alpha')$  ha la potenza della (I) classe;
3.  $(\alpha')$  ha la potenza della (II) classe.

**Dimostrazione:** Sia  $\Omega$  il primo numero della terza classe numerica (III); allora tutti i numeri  $\alpha'$  dell'insieme  $(\alpha')$ , essendo questo contenuto in (II), sono minori di  $\Omega$ . Immaginiamo ora che i numeri  $\alpha'$  siano ordinati per grandezza; sia  $\alpha_\omega$  il più piccolo,  $\alpha_{\omega+1}$  il più piccolo dei rimanenti e così via. In questo modo l'insieme  $(\alpha')$  acquista la forma di un insieme ben ordinato  $\alpha_\beta$ , dove  $\beta$  percorre a partire da  $\omega$  i numeri della successione naturale estesa; perciò  $\beta$  resta sempre minore o uguale a  $\alpha_\beta$ , ed essendo  $\alpha_\beta < \Omega$  sarà anche  $\beta < \Omega$ . Dunque il numero  $\beta$  non può andare al di là della classe (II) e resta sempre all'interno del suo dominio, per cui sono possibili solo tre casi:

1.  $\beta$  rimane inferiore a un numero assegnabile della successione  $\omega + \nu$ , e allora  $(\alpha')$  è un insieme finito;
2.  $\beta$  prende tutti i valori della successione  $\omega + \nu$  ma resta inferiore a un numero assegnabile della successione (II), e allora  $(\alpha')$  è un insieme della prima potenza;
3.  $\beta$  assume valori grandi a piacere in (II), percorrendo quindi tutti i numeri di (II), e in questo caso la classe  $(\alpha_\beta)$ , cioè l'insieme  $(\alpha')$ , ha la potenza di (II).

□

Questo teorema dimostra quanto richiesto nel Teorema2. □

**Conseguenze del Teorema2:**

- Si consideri un insieme ben definito  $M$  con la potenza della classe numerica ( $\aleph_0$ ) e sia  $M'$  un suo qualsiasi sottoinsieme infinito; o la classe  $M'$  può essere pensata sotto forma di successione semplicemente infinita, oppure è possibile rappresentare biunivocamente l'uno sull'altro i due insiemi  $M$  e  $M'$ .
- Si consideri un insieme ben definito  $M$  della seconda potenza, un sottoinsieme  $M'$  di  $M$  e un sottoinsieme  $M''$  di  $M'$  tali che  $M''$  sia rappresentabile biunivocamente su  $M$  e  $M'$  sia rappresentabile biunivocamente su  $M$ ; allora  $M'$  è rappresentabile biunivocamente anche su  $M''$ .

### 12.8.2 Relazione tra ordinali e cardinali

La relazione che sussiste tra queste due tipologie di numeri è completamente diversa a seconda che si parli di insiemi finiti o infiniti. Nei Beiträge Cantor chiama insiemi finiti gli insiemi che hanno un numero cardinale finito; tutti gli altri transfiniti.

Consideriamo il caso di insiemi finiti; in questa situazione gli interi positivi hanno la duplice natura di cardinale e ordinale. Il primo deve essere inteso come ‘quanti elementi ci sono nell’insieme’, il secondo invece come ‘quali posti dell’insieme sono coperti’. Ad esempio, se un insieme  $M$  ha 100 elementi ordinati in un modo dato, uno di essi sarà primo, uno il secondo e così via fino al centesimo; dopo di che sarà sempre possibilie cambiarli di posizione, ma anche col nuovo ordinamento le posizioni da essi occupate andranno dalla prima alla centesima.

Nell’infinito invece una trasposizione può modificare sia il posto degli elementi che il numero ordinale associato all’insieme di partenza. Ad esempio, consideriamo la successione:

$$a_1, a_2, a_3, \dots \tag{12.16}$$

Supponiamo ora di riordinarla considerando prima tutti gli elementi con indice dispari e poi con quello pari; otteniamo così la successione:

$$a_1, a_3, \dots; a_2, a_4, \dots \tag{12.17}$$

Quindi la (12.17) è formata da due successioni infinite, poste una dopo l’altra e possiamo quindi assegnargli l’ordinale  $2\omega$ . La prima invece è un’unica successione infinita e quindi gli viene associato l’ordinale  $\omega$ . Abbiamo quindi usato gli stessi elementi, ma a seconda dell’ordine l’ordinale è cambiato:

« Se concepisco l'infinito al modo di questo lavoro [si riferisce ai Grundlagen] e dei miei precedenti provo un vero godimento, al quale mi concedo con un senso di gratitudine, al vedere come l'intero concetto di numero, cui nel finito fa da sfondo solo l'enumerazione, ascendendo all'infinito si scinda in certo qual modo in due concetti: quello della potenza attribuita all'insieme, la quale è indipendente dall'ordine, e quello dell'enumerazione, necessariamente legata a un ordinamento dell'insieme secondo una legge grazie alla quale esso diventa ben ordinato. E se dall'infinito ridiscendo al finito vedo, in modo altrettanto chiaro e bello, come i due concetti ri-divengano uno e confluiscano nel concetto di numero intero finito.  
»

Risulta quindi chiaro come la potenza di un insieme sia un attributo indipendente dall'ordinamento, mentre l'ordinale associato ad un insieme è un attributo dipendente dall'ordine. Si è visto in precedenza come nel finito questi due concetti risultano equivalenti; resta quindi solo da capire quale relazione sussista tra i due nell'infinito. Innanzitutto,

« due insiemi ben ordinati hanno lo stesso ordinale ( relativamente alle rispettive successioni preassegnate) quando è possibile associarli biunivocamente l'uno all'altro in modo che, se E e F sono due elementi qualsiasi del primo, e E<sub>1</sub> e F<sub>1</sub> gli elementi corrispondenti del secondo, la posizione di E e F nella successione del primo insieme coincide sempre con quella di E<sub>1</sub> e F<sub>1</sub> nella successione del secondo. Questo ordine è, se possibile e come si vede facilmente, sempre determinato e perciò nella serie numerica troviamo uno e un solo numero  $\alpha$  tale che i numeri che lo precedono (da 1 in poi) hanno nella successione naturale lo stesso ordinale così che si è obbligati a porre l'ordinale di entrambi gli insiemi ben ordinati uguali ad  $\alpha$ , se  $\alpha$  è un numero infinitamente grande, e uguale al numero  $\alpha - 1$  se  $\alpha$  è un numero intero finito.[...] Tuttavia esiste anche negli insiemi infiniti una certa connessione tra la potenza dell'insieme e l'ordinale determinato attraverso la successione data dei suoi elementi.

Prendiamo un insieme che ha la potenza della prima classe numerica e mettiamo gli elementi in una successione qualunque in modo da ottenere un insieme ben ordinato, il suo ordinale è sempre un certo numero della seconda classe numerica e non può essere mai

determinato da un numero di una classe numerica che non sia la seconda. D'altra parte si può ordinare ogni insieme della prima classe numerica in una successione tale che il suo ordinale, in relazione a questa successione, sia un qualunque numero della seconda classe numerica. Possiamo esprimere questa affermazione anche nel seguente modo: ogni insieme della potenza della prima classe numerica è numerabile da numeri della seconda classe numerica e soltanto da questi; possiamo quindi attribuire all'insieme una certa successione di elementi che viene a formarsi tramite un numero qualsiasi della seconda classe; questo numero ci dà l'ordinale degli elementi dell'insieme in riferimento ad ogni successione.

Analoghe leggi valgono per insiemi di potenze maggiori. Ogni insieme ben definito della potenza della seconda classe numerica è numerabile tramite numeri della terza classe numerica e solo da questi; quindi viene attribuita all'insieme una successione di elementi tali da essere numerata da un numero scelto a piacere della terza classe numerica, numero che determina l'ordinale degli elementi dell'insieme in relazione ad ogni successione. »

### 12.8.3 Aritmetica degli ordinali

Consideriamo la somma fra ordinali.

*Definizione 25.* Siano  $M$  e  $M_1$  due insiemi ben ordinati di enumerali  $\alpha$  e  $\beta$  rispettivamente. Allora  $M + M_1$  è un insieme ben ordinato dato ponendo prima gli elementi di  $M$  e poi unendo quelli di  $M_1$ ; all'insieme  $M + M_1$  corrisponde un determinato numero ordinale che è la somma di  $\alpha$  e  $\beta$  ed è indicato con  $\alpha + \beta$ .

Per la somma in generale non vale la proprietà commutativa, e quindi in generale  $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$ ; ad esempio consideriamo  $\omega + 1$  e  $1 + \omega$ :

$$\omega + 1 = 1, 2, 3, \dots; 1$$

$$1 + \omega = 1, 1, 2, 3, \dots = \omega$$

e dunque  $1 + \omega \neq \omega + 1$ . Questo esempio fa comprendere meglio quanto l'affermazione di Aristotele che se l'infinito esisteva allora avrebbe assorbito il finito, sia vera solo nel caso in cui il finito venga anteposto all'infinito; se invece il finito viene dopo l'infinito, allora non è vero che scompare ma anzi

il finito è addirittura tale da modificare l'infinito. Si approfitta dell'esempio anche per rimarcare quanto detto sulla potenza e l'ordinale di un insieme; infatti gli insiemi  $1 + \omega$  e  $\omega + 1$  hanno la stessa potenza in quanto si possono mettere in relazione biunivoca associando 1 con 1 e  $\omega$  con  $\omega$ , ma per quanto visto nell'esempio hanno ordinale diverso.

La proprietà associativa invece è ancora valida; in particolare  $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$ .

Per quanto riguarda il prodotto, si ha invece la seguente

*Definizione 26.* Supponiamo di prendere una successione, determinata da un numero  $\beta$ , di insiemi tutti uguali e ben ordinati ciascuno dei quali abbia ordinale degli elementi uguale ad  $\alpha$ , si ottiene un insieme nuovo e ben ordinato il cui ordinale ci offre la definizione per il prodotto  $\beta\alpha$ , dove  $\beta$  è il moltiplicatore e  $\alpha$  il moltiplicando.

Successivamente, in una lettera allo scrittore, scienziato e filosofo tedesco Kurd Lasswitz, il prodotto verrà cambiato in ‘moltiplicando per moltiplicatore’; questo è importante perché in questo modo si poteva scrivere  $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$  mentre con l'altra notazione sarebbe risultato  $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma = \alpha^{\gamma+\beta}$  ma in generale  $\beta+\gamma \neq \gamma+\beta$ . Anche per la moltiplicazione non vale la proprietà commutativa; ad esempio se  $\beta = \omega$  e  $\alpha = 2$  allora

$$\beta\alpha = \omega \cdot 2 = \omega + \omega = 2\omega$$

$$\alpha\beta = 2 \cdot \omega = \omega$$

e dunque in generale  $\beta\alpha \neq \alpha\beta$ . La proprietà associativa invece è valida:  $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ , come anche la distributiva ma solo nella forma  $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ .

« Per concludere vorrei esaminare ancora i numeri della seconda classe numerica (II) e le operazioni possibili con essi, ma mi limiterò solo alle più semplici, riservandomi di parlarne in seguito in altri studi più approfonditi. [...] »

La sottrazione si può considerare secondo due punti di vista. Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due numeri interi qualsiasi e  $\alpha < \beta$ , ci si convince facilmente che l'uguaglianza

$$\alpha + \xi = \beta$$

ammette sempre e solo una soluzione per  $\xi$ , in cui se  $\alpha$  e  $\beta$  sono numeri della (II),  $\xi$  sarà un numero della (I) o della (II) e sarà

posto uguale a  $\beta - \alpha$ .

Osserviamo ora la seguente uguaglianza:

$$\xi + \alpha = \beta$$

essa mostra che non è affatto risolvibile a seconda del valore di  $\xi$ , per esempio in questo caso rientra la seguente uguaglianza:

$$\xi + \omega = \omega + 1$$

Ma anche in quei casi in cui l'uguaglianza  $\xi + \alpha = \beta$  si può risolvere a seconda del valore di  $\xi$  si nota che la uguaglianza è soddisfatta da infiniti valori numerici di  $\xi$ ; ma fra queste soluzioni ci sarà sempre quella minima.

Per questa radice più piccola dell'uguaglianza:

$$\xi + \alpha = \beta$$

nel caso in cui l'ultima sia generalmente risolvibile sceglioamo la definizione  $\beta_{-\alpha}$ , che è in generale diversa da  $\beta - \alpha$ , il cui ultimo numero è sempre disponibile perché  $\alpha < \beta$ .

Se tra i numeri  $\beta, \alpha, \gamma$  esiste l'uguaglianza:

$$\beta = \gamma\alpha$$

(dove  $\gamma$  è moltiplicatore), ci si convince facilmente che la uguaglianza non ha altra soluzione per  $\xi$  che  $\xi = \gamma$  e in questo caso  $\gamma$  si definisce attraverso  $\frac{\beta}{\alpha}$ .

Al contrario si noti che l'uguaglianza:

$$\beta = \alpha\xi$$

(dove  $\xi$  è il moltiplicando) se è risolvibile per  $\xi$ , ha molteplici radici infinite, di cui però ce ne è sempre una più piccola; questa radice minima dell'uguaglianza  $\beta = \alpha\xi$  viene definita sufficiente con

$$\beta$$

$$\alpha$$

se l'ultima è risolvibile.

I numeri  $\alpha$  della seconda classe numerica sono di due tipi:

1. i numeri  $\alpha$ , che hanno un fattore immediatamente precedente nella serie, che è  $\alpha_{-1}$ , li chiamo del primo tipo,
2. i numeri che hanno un fattore immediatamente precedente nella serie, per i quali dunque non esiste  $\alpha_{-1}$ , li chiamo del secondo tipo.

I numeri  $\omega, 2\omega, \omega^\nu + \omega, \omega^\omega$  sono del secondo tipo, mentre  $\omega + 1, \omega^2 + \omega + 2, \omega^\omega + 3$  sono del primo del tipo.

In modo simile si dividono anche i numeri primi della seconda classe numerica; numeri primi del secondo tipo e numeri primi del primo tipo.

I numeri primi del secondo tipo sono in ordine di apparizione nella serie della seconda classe numerica (II):

$$\omega \quad \omega^\omega \quad \omega^{\omega^2} \quad \omega^{\omega^3} \dots$$

cosicché tra i numeri della forma:

$$\phi = \nu_0 \omega^\mu + \nu_1 \omega^{\mu-1} + \dots + \nu_{\mu-1} \omega + \nu_\mu,$$

solo il numero primo  $\omega$  è del secondo tipo; ma da questa suddivisione solo apparentemente debole dei numeri primi del secondo tipo, non si deduce che la totalità di tutti loro abbia una potenza più piccola rispetto a quella della classe numerica II; si trova che questa totalità ha la stessa potenza della (II).

I numeri primi del primo tipo sono:

$$\omega + 1, \omega^2 + 1, \dots, \omega^\mu + 1, \dots$$

Questi sono gli unici numeri primi del primo tipo che figurano fra quelli definiti con  $\phi$ ; la totalità di tutti i numeri primi del primo tipo della seconda classe numerica ha la stessa potenza di quest'ultima.

I numeri primi del secondo tipo hanno una particolarità che gli conferisce un carattere molto particolare; se  $\eta$  è un numero primo del secondo tipo, abbiamo che  $\eta\alpha = \eta$ , ogni volta che  $\alpha$  è un numero minore di  $\eta$ ; ne segue che, se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due numeri più piccoli di  $\eta$ , allora il prodotto  $\alpha\beta$  è sempre minore di  $\eta$ .

Limitiamoci a considerare i numeri della seconda classe numerica che hanno la forma  $\phi$ , per essi risultano le seguenti regole di addizione e moltiplicazione:

$$\begin{aligned}\phi &= \nu_0\omega^\mu + \nu_1\omega^{\mu-1} + \dots + \nu_\mu \\ \psi &= \rho_0\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \dots + \rho_\lambda\end{aligned}$$

con  $\nu_0$  e  $\rho_0$  diversi da zero.

### Addizione

- Se  $\mu < \lambda$  si ha:

$$\phi + \psi = \psi$$

- Se  $\mu > \lambda$  si ha:

$$\phi + \psi = \nu_0\omega^\mu + \dots + \nu_{\mu-\lambda-1}\omega^{\lambda+1} + (\nu_{\mu-\lambda} + \rho_0)\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \rho_2\omega^{\lambda-2} + \dots + \rho_\lambda$$

- Per  $\mu = \lambda$

$$\phi + \psi = (\nu_0 + \rho_0)\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \dots + \rho_\lambda$$

### Moltiplicazione

- Se  $\nu_\mu$  è diverso da zero, si ha:

$$\phi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \dots + \nu_\mu\rho_0\omega^\lambda + \rho_1\omega^{\lambda-1} + \dots + \rho_\lambda$$

Nel caso in cui  $\lambda = 0$  l'ultimo fattore a destra è  $\nu_\mu\rho_0$ .

- Se  $\nu_\mu$  è uguale a zero

$$\phi\psi = \nu_0\omega^{\mu+\lambda} + \nu_1\omega^{\mu+\lambda-1} + \dots + \nu_{\mu-1}\omega^{\lambda+1} = \phi\omega^\lambda$$

La scissione di un numero  $\phi$  nei suoi fattori primi è la seguente:

$$\phi = c_0\omega^\mu + c_1\omega^{\mu_1} + c_2\omega^{\mu_2} + \dots + c_\sigma\omega^{\mu_\sigma}$$

dove  $\mu > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_\sigma$  e  $c_0, c_1, \dots, c_\sigma$  sono numeri positivi finiti diversi da zero e quindi:

$$\phi = c_0(\omega^{\mu-\mu_1} + 1)c_1(\omega^{\mu_1-\mu_2} + 1)c_2\dots c_{\sigma-1}(\omega^{\mu_{\sigma-1}-\mu_\sigma} + 1)c_\sigma\omega^{\mu_\sigma}$$

Se si pensa ancora  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{\sigma-1}, c_\sigma$  scissi in fattori primi secondo le regole della prima classe numerica, si ha anche la scissione di  $\phi$  in fattori primi; quindi i fattori  $\omega^\chi + 1$  e  $\omega$  sono essi stessi numeri primi.

La scissione di numeri della forma  $\phi$  è una ed una sola, anche rispetto alla sequenza dei fattori, se si prescinde dalla commutabilità dei fattori primi entro ciascun  $c$  e se è chiaro che l'ultimo fattore deve essere una potenza di  $\omega$  oppure deve essere uguale a 1 e che  $\omega$  può essere solo un fattore in ultima posizione. »

## 12.9 L'ipotesi del continuo

In precedenza si è visto che il primo numero cardinale transfinito era la potenza dell'insieme di tutti i numeri cardinali finiti, ovvero quella della prima classe numerica (I).

Cantor fu particolarmente attento nello scegliere la notazione per i numeri cardinali transfiniti ed infine la scelta cadde su ‘aleph’, ovvero sulla prima lettera dell’alfabeto ebraico.

E’ stato dimostrato in precedenza che la potenza della seconda classe (II) è diversa da quella della prima (I) ed è quella immediatamente successiva, quindi devono esistere almeno due cardinali diversi; Cantor denotò con  $\aleph_0$  la cardinalità della prima classe numerica (I) e con  $\aleph_1$  quella della seconda (II). Segue dunque immediatamente che

$$\text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$$

In precedenza aveva inoltre dimostrato che

$$\text{Card}(\mathbb{R}) > \text{Card}(\mathbb{N})$$

e, utilizzando le nuove notazioni per i cardinali, che

$$\text{Card}(P(\mathbb{N})) = 2^{\text{Card}(\mathbb{N})} = 2^{\aleph_0}.$$

Poiché

$$\text{Card}(P(\mathbb{N})) = \text{Card}(\mathbb{R})$$

riunendo tutte le relazioni appena citate, risulta che

$$\text{Card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0} > \aleph_0;$$

tale relazione in realtà vale in generale, ovvero 2 esponentiato da un numero cardinale transfinito dà origine ad un numero cardinale maggiore del numero all’esponente, (ovvero  $2^{\aleph} > \aleph$ , con  $\aleph$  numero cardinale transfinito).

Nasce così il problema di stabilire se la relazione

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

fosse vera, ovvero se la  $\text{Card}(\mathbb{R})$  fosse o meno uguale a  $\aleph_1$ .

Cantor assunse la seguente:

**Ipotesi del continuo:**

*Non esiste un insieme A tale che  $\aleph_0 < \text{Card}(A) < 2^{\aleph_0}$*

che cercò di dimostrare per tutto il resto della sua vita, senza tuttavia riuscirci.

Nel II<sup>o</sup> congresso internazionale per matematici a Parigi nel 1900, Hilbert pose l'ipotesi del continuo al primo posto nella lista dei maggiori problemi matematici insoluti.

Più tardi, nel 1938, Kurt Gödel dimostrò che non si poteva dimostrare che l'ipotesi del continuo fosse falsa all'interno del sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel, ma un colpo di scena si ebbe nel 1963 quando Paul Cohen dimostrò che non si poteva dimostrare che l'ipotesi del continuo fosse vera a partire da quegli stessi assiomi.

In conseguenza a queste dimostrazioni, l'ipotesi del continuo risulta quindi essere indecidibile partendo dal sistema di assiomi di Zermelo-Fraenkel.

# Bibliografia

- [1] CANTOR, G., Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, *Mathematische Annalen*, 5, p. 123-132, 1872.
- [2] CANTOR, G., Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, *Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 77, pp. 258-262, Göttingen, 1874.
- [3] CANTOR, G., Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, *Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 84, pp. 242-258, Göttingen, 1878.
- [4] CANTOR, G., Über unendliche lineare Punktmanigfaltigkeiten, *Mathematische Annalen*, sei articoli pubblicati tra il 1879 e il 1884. Dei quali il quinto è il celebre *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* edito anche come volume a parte, Lipsia, 1883.
- [5] CANTOR, G., *Contributions to the theory of transfinite numbers, translated, and provided with an introductions and noted by Philip E. B. Jourdain*, Dover pubblications inc., New York, 1915. Beiträge zur Begründung der Transfiniten Mengenlehre, *Mathematische Annalen*, 1895 e 1897.
- [6] BOYER, C., *The history of the calculus and his conceptual development*, Dover pubblications inc., New York, 1959.
- [7] DEDEKIND R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Druck und Verlag von Friedrich Bieweg und Sohn, Braunschweig, 1872. *Essenza e significato dei numeri; Continuità e numeri irrazionali*, traduzione dal tedesco e note storico-critiche di Oscar Zariski, Stock, Roma, 1926.

- [8] FOURIER, J., *Theorie analytique de la chaleur*, Firmin-Didot, Parigi, 1822.
- [9] KLEIN, F., *Elementary mathematics from an advanced standpoint, arithmetic, algebra, analysys*, Vol.II, Dover pubblications inc., New York, 1945.
- [10] BOYER C., *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1990.
- [11] CAUCHY A. L., *Course d'analyse de l'école royale polytechnique, I.re partie, analyse algébrique*, Parigi, 1821.
- [12] BOLZANO B., *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewshren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Ostwald's Klassiker, nr. 153, Praha, 1817.
- [13] CANTOR G., *La formazione della teoria degli insiemi, note di Ernst Zermelo, a cura di Gianni Rigamonti*, Sansoni editore, Firenze, 1992. Contiene le prime quattro opere di Cantor riportate in bibliografia.

# Capitolo 13

## I paradossi e la crisi dei fondamenti della matematica

di Elisa Rossi

### 13.1 Introduzione

Nel corso dell'800 la matematica subì un enorme sviluppo: intorno alla metà del secolo i logici Boole e De Morgan procedettero nel codificare le forme del ragionamento deduttivo, Frege a Jena e Peano a Torino lavoravano per abbinare il ragionamento formale allo studio degli insiemi e dei numeri, Hilbert a Gottinga elaborò una formalizzazione della geometria rigorosa; la scoperta delle geometrie non-euclidee inoltre scosse la collettività matematica, poiché metteva seriamente in dubbio l'idea secondo cui la geometria studiava il mondo reale. Nel frattempo si ebbero sviluppi molto interessanti nella matematica classica, grazie alla teoria degli insiemi di Cantor.

In breve tempo vennero alla luce tutta una serie di paradossi insiemistici, che coinvolgevano, di conseguenza, la teoria di Cantor e tutte le sue applicazioni. Il più famoso di questi paradossi fu certamente quello di Russell, che purtroppo era solo il primo dei tanti che erano stati scoperti!

Si cominciò così a scavare più in profondità nella teoria degli insiemi. La questione fondamentale sembrava essere: si può trovare un modo per salvare la matematica e metterla al riparo dai paradossi?

## 13.2 I paradossi

*“Il paradosso è il lusso delle persone di spirito,  
la verità è il luogo comune dei mediocri.”*  
(Leo Longanesi)

Con il termine *paradosso*, dal greco *παρά*(contro) e *δόξα* (opinione), si vuole indicare qualcosa di contrario alla verosimiglianza e al senso comune; una conclusione di un ragionamento corretto che sia smentita dall'evidenza o dall'esperienza.

Cercando il significato nel vocabolario, troviamo la seguente definizione: *proposizione che per forma o contenuto si oppone all'opinione comune o all'esperienza quotidiana, risultando perciò sorprendente o bizzarra.*

Dal punto di vista più generale o letterario i paradossi sono affermazioni che sorprendono l'uditore (e non ha importanza la loro falsità o veridicità); nel campo scientifico si presentano come affermazioni che apparentemente contraddicono i principi elementari della logica, ma risultano, in realtà, del tutto valide; in matematica infine si distinguono due termini: il *paradosso* in senso stretto consiste in una proposizione dimostrata e coerente logicamente, ma lontana dall'intuizione; l'*antinomia*, invece, è una vera e propria contraddizione logica. Nel corso del tempo l'idea di paradosso e di ciò che rappresenta è cambiata. Storicamente l'attenzione si è focalizzata sui paradossi principalmente in tre momenti: nell'epoca greca, nel Medioevo e tra la fine dell'800 e gli anni '30 del '900. Il differente ruolo che ha avuto nei tre periodi è testimoniato dal modo in cui veniva chiamato: rispettivamente *paradoxa* (oltre la logica), *insolubilia* (problemi senza una soluzione) e *paradossi, antinomie* (contrari all'opinione comune, contrari alle regole).

Vediamo alcuni esempi di paradossi molto conosciuti.

Si ritiene che il più antico paradosso conosciuto sia quello di Epimenide, vissuto nel VI secolo a.C., in cui egli afferma: “Tutti i cretesi sono bugiardi”. Essendo Epimenide stesso un cretese, la frase risulta paradossale: se questa fosse stata una bugia, egli avrebbe in realtà detto la verità; viceversa, se fosse stata la verità, allora egli avrebbe mentito. Secondo la logica moderna tuttavia questo non è un vero paradosso, in quanto non ci troviamo in un caso in cui valgono contemporaneamente una proposizione  $\mathcal{P}$  e anche la sua negazione: la negazione di “tutti i cretesi sono bugiardi” è “esiste almeno un cretese che non è bugiardo”, non “tutti i cretesi sono sinceri” (infatti la negazione di “ $\forall x, x$  verifica  $\mathcal{P}$ ” è “ $\exists$  almeno un  $x$  che non verifica  $\mathcal{P}$ ”, non “ $\forall x, x$  verifica  $\neg\mathcal{P}$ ”).

Successivi di un paio di secoli ma molto più famosi sono poi i paradossi di Zenone di Elea (489 a.C.-431 a.C.), di cui abbiamo testimonianza grazie alla citazione nell'opera *Fisica* di Aristotele. Lo scopo di Zenone è sostenere l'idea del suo maestro Parmenide, secondo cui la realtà è costituita da un essere unico e immutabile. Per fare questo elabora dei paradossi contro il pluralismo e il movimento, il più celebre dei quali è il paradosso della freccia: “*Essa appare in movimento ma, in realtà, è immobile: in ogni istante difatti occuperà solo uno spazio che è pari alla sua lunghezza; e poiché il tempo in cui la freccia si muove è fatto di infiniti istanti, essa sarà immobile in ognuno di essi*”. Come possono la freccia ferma e quella in movimento essere la stessa? Come si possono distinguere in modo da smentire il paradosso? Oggi sappiamo che per la teoria della relatività ristretta, le due frecce sono diverse, perché quella che è in movimento rispetto all'osservatore appare a questo più corta.

Esistono molti tipi di paradossi, che possiamo classificare in tanti modi. Se consideriamo le nostre esperienze sensoriali abbiamo paradossi tattili, gustativi, olfattivi, uditivi, visivi, che vengono solitamente chiamati *ambiguità* o *anomalie*. Abbiamo poi i paradossi logici e matematici. Secondo P. Odifredi, possiamo classificare quest'ultimo tipo in base a premesse, ragionamento e conclusione, ottenendo così questa suddivisione:

- paradossi *logici* o *negativi*, in cui si intende rifiutare le premesse mediante una riduzione all'assurdo (questo tipo di paradossi è molto importante, perché permette di accorgersi che certe assunzioni non sono in realtà accettabili);
- paradossi *retorici* o *nulli*, utilizzati al solo scopo di esibire la sottigliezza del ragionamento o l'abilità di chi lo fa;
- paradossi *ontologici* o *positivi*, che attraverso un ragionamento inusuale servono a rafforzare la conclusione a cui si arriva.<sup>1</sup>

Un altro tipo di classificazione viene elaborata dal filosofo e matematico inglese F. P. Ramsey (1903-1930), secondo cui le antinomie sono di due tipi:

- *antinomie logiche*;
- *antinomie semantiche* o *linguistiche*, che, a differenza di quelle logiche, coinvolgono concetti di verità e definibilità.

Ramsey afferma inoltre che per evitare le antinomie logiche in matematica sembra essere necessaria una revisione critica dei concetti coinvolti; mentre i paradossi semantici non vanno nemmeno considerati: essi infatti non sono riproducibili in matematica, in quanto dovuti semplicemente a formulazioni linguistiche scorrette. Chiaramente, il fatto che i paradossi semantici non ap-

---

<sup>1</sup>confronta [4]

paiano direttamente non significa che non possano farlo indirettamente: non è escluso che in qualche modo si possa passare da concetti semantici a concetti logici, e quindi da paradossi semantici a enunciati paradossali in matematica. Fortunatamente però la teoria semantica di Tarski (1902-1983) ci fornisce un metodo per evitare i paradossi linguistici: secondo questa teoria nessun linguaggio consistente può contenere al suo interno i mezzi per parlare del significato o delle verità delle sue stesse espressioni. I paradossi semantici nascono perché cerchiamo di esprimere in un linguaggio  $\mathcal{L}$  il concetto di “essere veri in  $\mathcal{L}$ ”: per eliminare il paradosso dobbiamo allora esprimere il concetto di “essere veri in  $\mathcal{L}$ ” utilizzando un linguaggio diverso  $\mathcal{L}'$ , che viene chiamato *metalinguaggio*. Se dunque non c’è una generale “ricetta” per eliminare le antinomie in matematica, *almeno* non dobbiamo più preoccuparci di quelle linguistiche, ma solo di quelle logiche.

Vediamo infine alcuni esempi di paradossi linguistici (per quanti riguarda gli esempi di antinomie logiche, avremo modo di vederne all’interno della teoria di Cantor):

Il paradosso di Richard è stato proposto dal matematico francese J. A. Richard (1862-1956) nel 1905. Possiamo illustrarlo così: consideriamo un vocabolario, il quale sarà costituito da un numero esteso (ma ovviamente finito) di parole e di segni. Consideriamo allora quelle frasi, costruite mediante tali parole e segni, che ci permettono di definire univocamente dei numeri reali, ad esempio “il numero il cui quadrato è due”, composta da 7 parole, oppure “il numero dato dal rapporto tra la lunghezza della circonferenza e quella del diametro del medesimo cerchio”, composta da 17 parole. Chiamiamo allora  $\mathcal{R}_n$  l’insieme dei numeri reali che possiamo definire tramite  $n$  parole e segni del nostro vocabolario. Certamente  $\mathcal{R}_n$  è un insieme finito, qualsiasi sia l’intero  $n$ , quindi l’insieme:

$$\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n ,$$

costituito da tutti e soli quei numeri reali definibili con un numero finito di elementi del nostro vocabolario, risulta essere numerabile; perciò è possibile ordinarne gli elementi nella successione  $r_1, r_2, r_3, \dots$ . Ogni elemento di questa successione può essere scritto nella maniera:

$$r_t = [r_t].r_{t_1}r_{t_2}r_{t_3}r_{t_4} \dots \quad \text{dove } [r_t] \text{ rappresenta la parte intera di } r_t.$$

Consideriamo ora il numero  $\bar{r} = 0.\bar{r}_1\bar{r}_2\bar{r}_3\bar{r}_4\dots$  così definito:

$$\bar{r}_i = \begin{cases} r_{i_i} + 1 & \text{se } r_{i_i} \neq 9 ; \\ 0 & \text{se } r_{i_i} = 9 . \end{cases}$$

Esso è: il numero la cui parte intera è zero, mentre (per ogni  $i$ ) il suo  $i$ -esimo decimale è ottenuto aumentando di uno l' $i$ -esimo decimale del numero  $r_i$  appartenente ad  $\mathcal{R}$  (con l'avvertenza che se tale decimale fosse 9, non si pone dieci ma zero).

Da un lato, possiamo vedere dalla frase sopra riportata che  $\bar{r}$  è un numero reale definibile con una quantità finita di parole o segni del nostro vocabolario e quindi deve essere un elemento di  $\mathcal{R}$ ; dall'altro lato, per il modo in cui è costruito, è diverso da tutti i numeri reali contenuti in  $\mathcal{R}$  e quindi non può appartenervi!

Una variante del paradosso di Richard è il paradosso di Berry (dal nome del bibliotecario G. G. Berry (1867-1928) che l'ha proposto), in cui questa volta: “ $\bar{r}$  è il più piccolo numero naturale che non può definirsi usando meno di 19 parole del vocabolario”. Chiaramente il problema è ben posto, perché i numeri naturali sono infiniti, mentre il numero delle parole del vocabolario è finito; quindi certamente ci saranno alcuni numeri che non possono essere definiti con meno di un numero arbitrario fissato di parole del vocabolario. Inoltre, dato che l'insieme dei naturali è ben ordinato, si può scegliere il minimo elemento di tali numeri. Dunque siamo nuovamente di fronte ad un paradosso, perché la frase che definisce  $\bar{r}$  è formata da 18 parole!

L'ultimo esempio di paradosso semantico che riportiamo è il paradosso dell'eterologicità, riportati per la prima volta dal matematico K. Grelling (1886-1942). Definiamo *autologici* gli aggettivi che sono veri in se stessi, che possono riferirsi a se stessi; viceversa chiamiamo *eterologici* gli aggettivi che non possono riferirsi a se stessi. Il paradosso nasce dalla domanda: “eterologico” è un aggettivo eterologico o autologico? Se supponiamo che non si riferisca a se stesso allora è eterologico, quindi si riferisce a se stesso; se supponiamo che si riferisca a se stesso allora è autologico e quindi non si riferisce a se stesso; dunque è eterologico se e solo se è autologico!

### 13.3 La crisi dei fondamenti della matematica

*“Se il pensiero matematico è fallace,  
dove mai troveremo verità e certezza?”*

(David Hilbert)

### 13.3.1 La scoperta della antinomie

Con “crisi dei fondamenti della matematica” si vuole indicare l’ampio dibattito che ha coinvolto la comunità dei matematici e dei filosofi nel primo trentennio del XX secolo. Tale dibattito era incentrato sulla natura della matematica, cioè su quali siano, se ci sono, gli enti primi indimostrabili che costituiscono il punto di partenza di questa disciplina. In seguito al grande impulso ricevuto dalla formalizzazione nel corso dell’800 grazie al lavoro di matematici come Boole (1815-1864), Peano (1858-1932), Dedekind (1831-1916), tra la fine del XIX e l’inizio del XX secolo, un nutrito gruppo di studiosi si impegnò nel tentativo di dare una rigorosa fondazione logica ai contenuti delle proposizioni matematiche, con l’obiettivo di produrre una giustificazione assoluta della loro validità. In ciò fu importante soprattutto il lavoro di Frege (1848-1925). Tuttavia l’insorgenza di difficoltà inaspettate (in particolare una serie di paradossi portati alle loro estreme conseguenze da Gödel (1906-1978) nel 1931), finì per dimostrare l’incompletezza di tutta la matematica.

Fondamentali per capire quali siano le radici storiche della crisi sono i cambiamenti profondi che la matematica ha subito nell’arco del XIX secolo: verso la metà dell’800, con l’operato di Boole, la logica fu matematizzata (cioè furono espresse le leggi logiche, fino ad allora date in modo discorsivo, in forma di calcolo) e nacque la logica matematica; nel frattempo c’era stata la scoperta delle geometrie non euclidee che portò a due conseguenze: da un lato si sviluppò un grande interesse per i sistemi assiomatici, quindi in definitiva per la logica; dall’altro si generò una sorta di impulso irrefrenabile alla libertà creativa e alla non accettazione dei vecchi modelli, che causò la messa in discussione di tutta la matematica classica.

Queste però non erano le uniche novità: erano nate l’analisi moderna e la teoria degli insiemi, si erano verificate l’aritmetizzazione dell’analisi, la logizzazione dell’aritmetica e la formalizzazione della geometria.

La matematica classica aveva concepito i propri principi come delle verità rivelate, che, in quanto tali, non necessitavano di nessuna giustificazione. Le nuove scoperte rifiutavano però l’intuizione come fonte di verità, dunque avevano bisogno di essere legittime.

In definitiva, negli ultimi anni del XIX secolo, le sorti dell’intera matematica erano ridotte alle sorti dei sistemi assiomatici formali: e se questi ultimi si fossero rivelati contraddittori?

All'inizio del '900 il mondo scientifico fu scosso dalla scoperta delle antinomie che minacciavano i fondamenti della matematica. Furono coinvolti matematici come Cantor (1845-1918), Dedekind e Frege, che si erano sforzati di dare un fondamento all'edificio matematico moderno, dotandolo di strutture più rigorose. In particolare Frege si era occupato del proseguimento della logica e della rigorizzazione dell'analisi.

L'episodio che aprì ufficialmente la crisi dei fondamenti fu la lettera che Russel (1872-1970) inviò a Frege nel 1902: proprio mentre quest'ultimo stava ultimando la stampa del volume *Fondamenti dell'aritmetica*, Russell lo informò di un'antinomia derivabile dal sistema logico della sua opera che riguardava in particolare il V assioma, ed era radicata nei fondamenti della teoria degli insiemi. Entusiasmato per i lavori di Peano seguiti al congresso di Parigi del 1900, Russell aveva cominciato la redazione dei *Principles of mathematics* e, nel passare in rassegna la letteratura più recente e rilevante per il suo argomento, aveva intrapreso uno studio approfondito dei *Fondamenti* di Frege. Nel corso di tale studio, probabilmente nel 1901, formulò il suo celebre paradosso, che poi rivelò a Frege. Questi ne diede notizia in una nota finale, dicendo: "A uno scrittore di scienze ben poco può giungere più sgradito del fatto che, dopo completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della sua costruzione". E di certo non era di consolazione che chiunque nelle sue dimostrazioni avesse fatto uso di estensioni di concetti, di classi, di insiemi si trovasse nella sua stessa posizione: "qui non è in causa il mio metodo di fondazione in particolare, ma la possibilità di una fondazione logica dell'aritmetica in generale". L'antinomia di Russell, prima che venisse resa nota da Frege, era stata scoperta anche da Zermelo (1871-1953) e discussa negli ambienti di Gottinga. Dopo la lettera di Russell, lo stesso Hilbert (1862-1943) scrisse a Frege, aggiungendo che egli aveva trovato altre e più convincenti contraddizioni già 4 o 5 anni prima.

Per quanto già noti in ristretti circoli matematici, le antinomie e i paradossi presenti nella teoria degli insiemi e nel sistema di Frege cominciarono ad essere apertamente discussi in tutte le loro implicazioni solo dopo la pubblicazione dell'opera di Russell, *The Principles of Mathematics*, nel quale il logico inglese presentava la sua antinomia.

## I paradossi della teoria di Cantor

La teoria degli insiemi fu sviluppata da Cantor tra il 1874 e il 1884: tra i molti risultati ottenuti, troviamo la definizione di cardinalità di un insieme

finito e di potenza di un insieme infinito e lo sviluppo dell'aritmetica transfinita, che rivoluzionò del tutto la nozione matematica di infinito. Le sue idee non furono subito accettate di buon grado: tra le molte critiche le più profonde giunsero da Kronecker. Solo qualche anno dopo, però, la teoria degli insiemi risultava quasi universalmente accettata e utilizzata in ogni campo della matematica (ad esempio da Dedekind, Frege, Peano per la costruzione dei naturali o più tardi, agli inizi del '900, da Lebesgue per la teoria della misura): era ormai diventata patrimonio comune.

La teoria degli insiemi difettava tuttavia proprio nelle definizioni di partenza. A questo proposito Cantor affermava che: *“ogni insieme è la raccolta in una totalità di oggetti determinati, ben distinti tra di loro, della nostra intuizione o del nostro pensiero”*. Dunque, oltre a non dire nulla di preciso su cosa siano queste *raccolte*, la definizione di insieme, così come quelle di ordinale e cardinale, fa chiaro riferimento all'intuizione. Proprio la natura intuitiva del concetto di insieme andrà a cozzare, a causa delle antinomie che emergeranno all'inizio del '900, con le pretese di una matematica antiintuitiva.

Come abbiamo già visto, nel 1902 Russell sconvolse tutto l'ambiente matematico con la sua antinomia, che riguardava il principio di comprensione e la logica elementare. Il principio di comprensione era quello usato da Cantor per definire gli insiemi, secondo il quale ad ogni proprietà  $\mathcal{P}$  corrisponde un insieme  $\mathcal{E}$  ben determinato, formato da tutti gli elementi che soddisfano  $\mathcal{P}$ . Secondo Russell, tale insieme in linea di principio poteva non esistere. Basta infatti considerare:

$$\mathcal{R} = \{X \mid X \notin X\}$$

ossia l'insieme che contiene tutti gli insiemi che non contengono se stessi. A questo punto ci domandiamo se  $\mathcal{R}$  contenga o meno se stesso come elemento:  
 -se  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ , allora per definizione  $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ ;  
 -se  $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ , allora per definizione  $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ .

Dunque:  $\mathcal{R} \in \mathcal{R} \iff \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$ .

Di conseguenza, tale insieme  $\mathcal{R}$  non può esistere.

Il paradosso di Russell era però solamente una delle tante contraddizioni che cominciavano ad affiorare nella teoria degli insiemi; già nell'ultimo decennio dell'800 Cantor si era reso conto che c'erano alcune contraddizioni all'interno della sua teoria.

Uno di questi è il paradosso di Cantor, o paradosso del massimo cardinale, che può essere formulato in questo modo: sia  $\mathcal{E}$  l'insieme di tutti gli insiemi e  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  il suo insieme delle parti. Allora, per un teorema dimostrato da Cantor,

$\text{card } \mathcal{E} < \text{card } \mathcal{P}(\mathcal{E})$ . Inoltre,  $\mathcal{P}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$ , perché gli elementi di  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$  sono insiemi (e  $\mathcal{E}$  è l'insieme di tutti gli insiemi), dunque  $\text{card } \mathcal{E} \geq \text{card } \mathcal{P}(\mathcal{E})$ , da cui la contraddizione.

Questo significa che un tale insieme  $\mathcal{E}$  non può esistere.

L'ultima delle antinomie logiche della teoria di Cantor che vedremo è il paradosso di Burali-Forti, o paradosso del massimo ordinale. Supponiamo infatti che esista  $\Omega$ , l'insieme di tutti gli ordinali  $\alpha$ . Allora  $\Omega$  sarebbe ancora un ordinale, quindi esisterebbe il suo successore  $\Omega + 1$ , che quindi verificherebbe  $\Omega + 1 > \Omega$ . Ma essendo  $\Omega + 1$  ancora un ordinale, allora  $\Omega + 1 \in \Omega$ , quindi avremmo  $\Omega + 1 \leq \Omega$ , da cui l'assurdità:  $\Omega + 1 \leq \Omega < \Omega + 1$ . Di conseguenza, l'insieme di tutti gli ordinali non pò esistere.

### 13.3.2 Le reazioni alla scoperta delle antinomie e la fine della crisi

La storia della matematica dal 1902 agli anni trenta coincide con la storia dei tentativi fatti di eliminare i paradossi e, più in generale, di dare dei fondamenti solidi alla matematica. Antinomie e paradossi sembravano spuntare ovunque: era stato introdotto il paradossi di Berry, che sembrava fin troppo vicino a quello di Russell, erano nati nuovi paradossi di tipo linguistico come quello di Richard (e sue varianti, tra cui una elaborata da König ).

Dopo la lettera di Russel e la scoperta dei paradossi, vi furono diverse reazioni: Frege rinunciò a intervenire nel dibattito sui fondamenti della matematica, abbandonando di fatto la ricerca logica attiva; Dedekind, la cui costruzione dell'aritmetica era stata altrettanto colpita dal paradosso di Russell, fu altrettanto rinunciatario. Da parte di alcuni vi fu una tendenza istintiva a rifiutare ogni fondazione logica della matematica (il più autorevole rappresentante di questo movimento “antilogicista” fu Poincaré (1854-1912)); Cantor invece riteneva che nella sostanza il paradosso di Russell fosse riconducibile ad un tipo di paradossi che egli stesso da tempo aveva trovato (e comunicato per lettera a Dedekind e Hilbert) relativi a molteplicità come la classe di tutti i cardinali, classi troppo grandi, che non potevano essere pensate come insiemi. Egli quindi distingue tra “molteplicità inconsistenti” e “consistenti”, cioè tra quelle esistenti solo come molteplicità, troppo grandi per essere considerate come oggetti, e quelle del genere oggetto, delle quali cioè potevano predicarsi delle proprietà; tale soluzione significava, implicitamente, una limitazione del principio di comprensione.

Il paradosso di Russell, pur non paralizzando in senso stretto l'attività dei

matematici, che in realtà non si trovavano a dover lavorare con insiemi così grandi, fu un durissimo colpo per il fondamento logico che si stava cercando di dare alla matematica da Boole in poi: veniva messa in crisi la possibilità di definire in maniera assoluta i concetti matematici fondamentali. Era chiara dunque la necessità di una revisione dei fondamenti della matematica allo scopo di eliminare i paradossi.

Nacquero così varie posizioni fondazionaliste, che si fanno di solito rientrare in una delle tre scuole di filosofia matematica che sorsero all'inizio del secolo: il Logicismo di Russell, il Formalismo di Hilbert e l'intuizionismo di Brouwer (1881-1966); inoltre ci fu un ulteriore tentativo di revisione della teoria degli insiemi (oltre a quella di Russell) da parte di Zermelo.

Il primo a credere nel metodo assiomatico come mezzo per eliminare le antinomie dalla teoria degli insiemi fu il tedesco Hilbert, convinto che le gravi difficoltà insorgessero qualora si avesse a che fare con gli insiemi infiniti; Hilbert propose, per evitare il sorgere di contraddizioni, di unificare metodo assiomatico e logica simbolica e di studiare la matematica dopo averla completamente assiomatizzata e formalizzata. In tal modo una qualunque dimostrazione doveva essere assolutamente chiara e rigorosa.

In collaborazione con Whitehead(1861-1947) Russell elaborò un nuovo sistema logico in grado di evitare il possibile sorgere di contraddizioni e di ricostruire l'intero edificio matematico a partire da un numero ristretto di assiomi. In particolare, essi proposero l'introduzione del concetto di ordine, che comportava una complessa stratificazione dell'universo in tipi, da cui il termine teoria dei tipi.

Gli intuizionisti, le cui posizioni erano state anticipate da Poincarè, sostenevano l'impossibilità di fondare su basi logiche la matematica, poiché nella loro interpretazione questa è un'attività costruttiva, e dunque precede la logica, che invece è un'attività descrittiva. Per questo motivo la matematica non è realmente messa in crisi da alcun paradosso logico. Anche l'intuizionismo, in ogni caso, aveva dei difetti: oltre alla sostanziale rinuncia a ogni tipo di fondazione, infatti, gli intuizionisti erano costretti a rifiutare il principio del terzo escluso.

Zermelo, allievo di Hilbert, diede una rigorosa impostazione assiomatica alla teoria degli insiemi: cercò di riformulare la teoria di Cantor in termini non contraddittori, ricorrendo ad un efficace sistema di assiomi, poiché a suo avviso il sorgere di paradossi poteva derivare da un'insufficiente definizione del concetto d'insieme. Cercò inoltre di indebolire il principio di comprensione, che

nel suo sistema divenne il *principio di separazione* (o *di isolamento*), che però permetteva di dimostrare soltanto l'esistenza dell'insieme vuoto e si limitava a generare nuovi insiemi a partire da insiemi già dati. La teoria di Zermelo si basava su 7 assiomi, che erano sufficienti per ottenere tutti i risultati importanti della teoria degli insiemi e non creavano nessuna delle antinomie conosciute. La sua teoria fu quindi concepita come una teoria matematica e non come una teoria logica, come invece quella di Russell. Nonostante ciò, la sua teoria si dimostrò troppo debole, non sufficiente, cioè, a garantire una completa revisione della teoria di Cantor: lasciava aperti i problemi dell'indipendenza e della coerenza degli assiomi.

Queste e altre debolezze teoriche rilevate nel sistema di Zermelo furono superate, all'inizio degli anni Venti, dal norvegese Skolem (1887-1963); qualche anno dopo, anche Fraenkel (1888-1970) riprese i risultati di Zermelo, li perfezionò e propose un sistema assiomatico, noto come teoria di Zermelo-Fraenkel.

Alla fine degli anni venti, il dibattito era diventato leggermente più statico: il Logicismo di Russell fu, delle tre, la dottrina meno seguita; l'Intuizionismo di Brouwer attecchì solo su un gruppo ristretto di studiosi; il Formalismo di Hilbert, fu di fatto considerato vincente. Perché il trionfo fosse definitivo era però necessaria la fatidica dimostrazione di coerenza e di completezza di un sistema assiomatico formale che potesse esprimere l'aritmetica.

All'inizio degli anni trenta, il giovanissimo Gödel arrivò a dei risultati che misero fine alla speranza di ottenere una tale dimostrazione, e quindi alla possibilità avere una matematica che si autogiustificasse. Di fatto qui si concluse la crisi dei fondamenti: anche se il dibattito continuò per molti anni ancora, esso andò via via scemando.

# Bibliografia

- [1] Bell, Eric T., *I grandi matematici*, Biblioteca Universale Sansoni.
- [2] Bottazzini, Umberto, *Storia della matematica moderna e contemporanea*, Utet Libreria.
- [3] Falletta, Nicholas, *Il libro dei paradossi*, Longanesi & C.
- [4] Odifreddi, Piergiorgio, *Tempi (e luoghi) dei paradossi*.
- [5] Relazioni degli anni precedenti

# Capitolo 14

## Le geometrie non euclidee

di Elisa Rossi

### 14.1 Introduzione

Il celeberrimo *V postulato* di Euclide, contenuto nella sua opera *Elementi* è sempre stato al centro dell'attenzione. Sembra addirittura che Euclide stesso non fosse del tutto convinto della sua validità, assumendolo come postulato (e quindi come verità evidente, non necessaria di dimostrazione) solo dopo vani tentativi di dimostrarlo e cercò di utilizzarlo il meno possibile (le prime 28 delle 48 proposizioni contenute nell'opera vengono dimostrate senza di esso). Nel corso della storia, molti matematici hanno cercato più volte di dimostrarlo. Il risultato è stato la dimostrazione del fatto che tale postulato è in realtà indipendente dagli altri assiomi di Euclide. La teoria che assume la sua veridicità, così come quelle che assumono la sua falsità (o la veridicità della sua negazione) oltre agli altri assiomi, sono quindi perfettamente accettabili. In questo modo sono nate le cosiddette *geometrie non-euclidee*.

L'accettazione di queste nuove teorie è stata ardua soprattutto all'inizio, perché esse erano lontane dall'intuizione e perché non c'erano modelli a cui applicarle. Un'altro scoglio da superare era la fiducia nella geometria euclidea: con la scoperta di quelle non-euclidee questa diventava solo una di quelle possibili e aveva lo stesso "valore" di tutte le altre.

Lo scopo di questa relazione è esaminare appunto la nascita di tali geometrie non-euclidee e vederne alcuni dettagli.

## 14.2 Il V postulato di Euclide

L'opera di Euclide intitolata *Elementi* è stata usata per secoli come manuale per insegnare il metodo scientifico-deduttivo nelle scuole. Negli *Elementi* si trovano definizioni, postulati e teoremi, i quali sono dimostrati in maniera rigorosa a partire dagli assiomi o dai postulati, o da teoremi già dimostrati. Nel libro l'autore chiama *parallele* due rette complanari che, prolungate comunque, non si incontrano (Def. XXIII). Il *V postulato* dice: “*Se una linea retta, cadendo sopra due altre fa gli angoli interni da una medesima parte la cui somma sia minore di due retti, quelle due prolungate da questa parte si incontrano.*”

Mentre gli altri assiomi e postulati della teoria di Euclide erano *evidentemente* veri, il V postulato ha sempre destato interesse e dubbi, perché non rimanda ad alcuna costruzione geometrica che possa limitarsi sempre ad una porzione finita del piano. Per questo motivo molti matematici ritennero che tale postulato non fosse così evidente e che, di conseguenza, andasse dimostrato; i primi a muoversi in questo senso furono Tolomeo (II d.C.) e Proclo (410-485). Successivamente molti altri tentarono ancora nel corso dei secoli: prima i matematici arabi, poi i geometri del '500 e '600 con la riscoperta dei classici. Nella maggior parte di questi tentativi si è cercato di dedurlo da altre proposizioni all'apparenza più intuitive oppure di dare una nuova definizione di rette parallele, nel tentativo di rendere più facile la sua dimostrazione.

Il primo a tentare una dimostrazione di tipo differente fu Gerolamo Saccheri (1667-1733), utilizzando il metodo di dimostrazione *per assurdo*, e dimostrandone, di fatto, la coerenza della geometria non-euclidea iperbolica.

### 14.2.1 Gerolamo Saccheri

Il gesuita Gerolamo Saccheri fu indirizzato alla lettura e allo studio degli Elementi di Euclide da un professore del Collegio dei gesuiti di Brera. Egli fu colpito dal metodo della dimostrazione per assurdo, tanto da decidere di analizzarla sistematicamente nella sua opera *Logica demonstrativa* del 1697 e di utilizzarla poi per dimostrare la veridicità del V postulato nella sua più conosciuta opera *Euclides ab omni naevo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* (solitamente tradotto e abbreviato in “*Euclide riscattato da ogni difetto*”) del 1733.

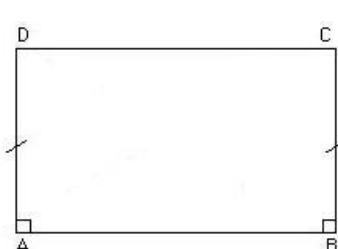
A questo scopo, Saccheri assunse come dati i primi 4 postulati e le prime 28 proposizioni (che ricordiamo, erano indipendenti dal V postulato) e la *falsità*

del V postulato, cercando così di arrivare a una contraddizione, per concludere la *verità* di tale postulato.

Essendo il V postulato equivalente all'enunciato: “*Dato un punto  $P$  esterno ad una retta  $l$ , esiste un'unica retta passante per  $P$  e parallela ad  $l$* ”, le due possibili negazioni del V postulato sono:

- esistono infinite rette passanti per  $P$  e parallele ad  $l$ ;
- non esiste nessuna retta passante per  $P$  e parallela ad  $l$ .

Invece di procedere assumendo (una alla volta) queste due ipotesi, Saccheri decise di considerare la figura del *quadrilatero birettangolo isoscele*, il quadrilatero  $ABCD$  con  $AD$  e  $CB$  uguali e perpendicolari alla base  $AB$ :



Per prima cosa dimostrò che nel caso del quadrilatero birettangolo isoscele gli angoli  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  sono uguali, grazie al seguente:

**Lemma 14.2.1.** *In un quadrilatero  $ABCD$  con gli angoli consecutivi  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  retti, se i lati  $AD$  e  $CB$  sono uguali, allora anche gli angoli  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  sono uguali.*

A questo punto, introdusse la negazione del V postulato: secondo l'ipotesi euclidea gli angoli  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  sono retti, dunque Saccheri procedette considerando le due ipotesi distinte secondo cui  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  sono acuti o ottusi, che vengono chiamate rispettivamente *ipotesi dell'angolo acuto* e *ipotesi dell'angolo ottuso*.

Grazie al seguente:

**Lemma 14.2.2.** *Se in un quadrilatero  $ABCD$  con gli angoli consecutivi  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  retti, i lati  $AD$  e  $CB$  non sono uguali, allora nemmeno gli angoli  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  sono uguali; inoltre dei due angoli  $\hat{C}$  e  $\hat{D}$  è maggiore quello adiacente al lato minore e viceversa.*

Saccheri poté quindi ottenere i primi risultati conseguenti dalla negazione del V postulato:

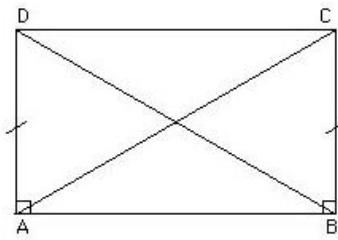
*Teorema 32.* A seconda che il quadrilatero birettangolo isoscele  $ABCD$  verifichi l'ipotesi dell'angolo retto, ottuso o acuto, si ha rispettivamente che  $AB = CD$ ,  $AB > CD$  e  $AB < CD$ .

da cui seguì che:

*Teorema 33.* A seconda che il quadrilatero birettangolo isoscele  $ABCD$  verifichi l'ipotesi dell'angolo retto, ottuso o acuto, si ha rispettivamente che la somma degli angoli interni di un triangolo è (rispettivamente) uguale, maggiore o minore di due angoli retti.

*Dimostrazione.* (La dimostrazione è quella di Saccheri)

Sia  $ABC$  un triangolo rettangolo in  $B$ . Si completi il quadrilatero tracciando  $AD$  uguale a  $BC$  e perpendicolare ad  $AB$ , indi congiungendo  $D$  con  $C$ .



Nell'ipotesi dell'angolo retto i due triangoli  $ABC$ ,  $ACD$  sono uguali, per cui  $\hat{B}AC = \hat{D}CA$ . Segue immediatamente che nel triangolo  $ABC$ :  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 2$  angoli retti.

Nell'ipotesi dell'angolo ottuso, essendo  $AB > DC$ , sarà:  $A\hat{C}B > D\hat{A}C$  (questa diseguaglianza venne dimostrata a parte da Saccheri), per cui avremo:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 2$  angoli retti.

Nell'ipotesi dell'angolo acuto, essendo  $AB < DC$ , sarà:  $A\hat{C}B < D\hat{A}C$  (anche questa diseguaglianza venne dimostrata a parte da Saccheri), per cui avremo:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 2$  angoli retti.  $\square$

Saccheri continuò quindi nella deduzione di altri teoremi e proposizioni, riuscendo a concludere che l'ipotesi dell'angolo ottuso è falsa, sfruttando, in particolare, il seguente:

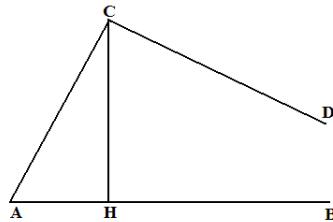
*Teorema 34* (Prop. XI, XII). Nell'ipotesi dell'angolo retto e nell'ipotesi dell'angolo ottuso, una perpendicolare ed una obliqua ad una stessa retta si incontrano.

da cui seguì il:

*Teorema 35.* Nell'ipotesi dell'angolo retto e nell'ipotesi dell'angolo ottuso, è vero il V postulato di Euclide.

*Dimostrazione.* (La dimostrazione è quella di Saccheri)

Siano  $AB, CD$  due rette intersecate dalla retta  $AC$  come in figura.



Supponiamo che sia:

$$B\hat{A}C + A\hat{C}D < 2 \text{ angoli retti.}$$

Allora uno degli angoli  $B\hat{A}C, A\hat{C}D$ , ad esempio il primo, sarà acuto. Da  $C$  si cali allora la perpendicolare  $CH$  su  $AB$ .

Nel triangolo  $ACH$ , in forza alle ipotesi fatte, sarà:

$$\hat{A} + A\hat{C}H + \hat{H} \geq 2 \text{ angoli retti}$$

(poichè siamo nell'ipotesi di un angolo ottuso o retto).

Combinando queste due si ottiene:

$$\hat{A} + A\hat{C}H + \hat{H} \geq 2 \text{ angoli retti} > \hat{A} + A\hat{C}H + H\hat{C}D$$

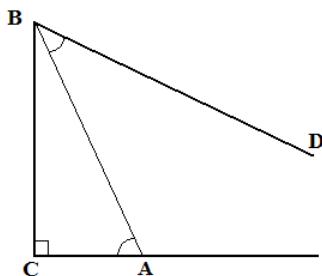
$$\hat{H} > H\hat{C}D.$$

Poichè  $\hat{H}$  è retto, l'angolo  $H\hat{C}D$  risulta acuto. Allora, in forza delle proposizioni XI, XII, le rette  $CD$  ed  $AB$  s'incontrano.  $\square$

In particolare, quindi, Saccheri riuscì a dimostrare che assumendo l'ipotesi dell'angolo ottuso si arriva all'ipotesi dell'angolo retto (poichè vale il V postulato, quindi nel quadrilatero birettangolare isoscele tutti gli angoli sono retti). Di conseguenza, l'ipotesi dell'angolo ottuso è falsa.

Sembrava quindi che la dimostrazione del V postulato fosse vicina: sarebbe bastato dimostrare che nemmeno l'ipotesi dell'angolo acuto era valida. Saccheri allora continuò a studiare i risultati che seguono dall'ipotesi dell'angolo acuto, ma non riuscì a dimostrarne la falsità così facilmente.

Egli considerò infatti la figura:



in cui  $C\hat{B}D$  è acuto per ipotesi dell'angolo acuto. Saccheri trovò che  $AC$  e  $BD$  erano parallele, perché formavano angoli alterni interni uguali, ma erano anche rispettivamente perpendicolare ed obliqua ad  $AB$ , dunque si avvicinavano tra loro sempre di più. Quindi nell'ipotesi dell'angolo acuto esistevano delle *rette asintotiche*, che rendevano problematica la dimostrazione dell'assurdo, costringendo Saccheri ad un circolo vizioso, in cui egli semplicemente spostava il problema.

La dimostrazione che propose, per quanto lunga e articolata, non aveva basi logiche ma intuitive; difatti egli la concluse dicendo che: “*l'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, perché ripugna alla natura della linea retta.*” (prop. XXXIII)

Saccheri stesso era insoddisfatto del suo ragionamento, e cercò altre vie di dimostrazione, che non portano a nessuna conclusione.

Egli aveva dunque tentato di dimostrare il V postulato, ma il fatto che non fosse pervenuto a nessun assurdo dimostrava, di fatto, che il V postulato era *indipendente* dalle altre assunzioni iniziali (ossia la teoria *con o senza* il V postulato risultava *coerente*): era questa l'apertura ad un nuovo mondo geometrico, il mondo delle geometrie non-euclideanee (in particolare della geometria *iperbolica*), di cui senza rendersene conto Saccheri aveva già posto le basi e trovato i primi risultati.

È da notare, infine, che era presente un errore nel ragionamento di Saccheri: egli non aveva dimostrato che l'ipotesi dell'angolo ottuso era falsa, ma solo che

non era compatibile con l’insieme delle sue assunzioni iniziali, in particolare col fatto che si potesse estendere infinitamente un segmento, cioè che la retta fosse infinita (di cui si era servito nel corso delle dimostrazioni delle proposizioni XI e XII). Se invece avesse ipotizzato che la retta fosse finita, non avrebbe trovato alcuna contraddizione, arrivando, analogamente al caso dell’ipotesi dell’angolo ottuso, alla geometria non-euclidea *ellittica*.

Analogamente a Saccheri, Lambert (1728-1777) aveva affrontato il *problema delle parallele* nella sua opera *Teoria delle Parallele* del 1776, dove partiva considerando un quadrilatero *trirettangolo* e ipotizzava poi che il quarto angolo fosse retto, ottuso o acuto.

Particolarmente interessanti sono poi i suoi studi sulla “misura assoluta” delle lunghezze, che sviluppò ispirandosi all’analogia che c’è tra il caso dell’angolo ottuso e la geometria sulla superficie sferica. Nell’ipotesi dell’angolo acuto egli aveva scoperto che la lunghezza non era più una misura *relativa*: ad ogni segmento di una data lunghezza corrispondeva un certo angolo, invariante per similitudine (diversamente dal caso della geometria euclidea, in cui la lunghezza di un segmento *non* è invariante per similitudine). Nel caso dell’ipotesi dell’angolo acuto, egli era portato a “*quasi trarne la conclusione che [essa] si presenti nel caso di una sfera immaginaria*”, conclusione che *ripugnava* l’intuizione dello spazio e lasciò dunque esitante Lambert.

Le scoperte di Saccheri e Lambert, per quanto innovative, non erano destinate a rivoluzionare il mondo della matematica. Nonostante l’*Euclides* dovesse essere molto noto all’epoca, in un articolo apparso l’anno seguente D’Alembert scriveva ancora ad esempio che: “la definizione e le proprietà della retta, così come delle parallele, sono lo scoglio e per così dire lo scandalo degli elementi della geometria”.

Nel 1795 Fourier e Monge, ad esempio, si impegnarono in una discussione su quale fosse il modo migliore di definire una retta, convinti del fatto che una miglior definizione avrebbe permesso di superare il problema del V postulato. Fourier, ad esempio, proponeva di assumere come fondamentale il concetto di distanza tra due punti; si sarebbero potuti definire così la sfera, come luogo dei punti equidistanti da *un* punto, il piano, come luogo dei punti equidistanti da *due* punti e finalmente la retta, come luogo dei punti equidistanti da *tre* punti.

Saccheri si può dunque ritenere “moralmente” il padre delle geometrie non-euclidee. Egli le aveva già costruite, ma evidentemente occorreva ancora qualcosa di più, oltre che un altro po’ di tempo, per poter accettare una così grande scoperta.

### 14.3 Le geometrie non-euclidee

Il primo a cominciare a credere che il V postulato fosse indipendente fu Gauss (1777-1855). Sembra che già da quindicenne avesse tentato di dimostrare il V postulato, convincendosi ben presto di poter costruire una geometria coerente con la negazione di tale postulato. Successivamente però abbandonò questa strada, probabilmente influenzato dalla convinzione secondo cui il V postulato doveva essere *necessariamente* vero, la quale regnava sovrana negli ambienti matematici dell’epoca. In una lettera del 1799 da lui scritta ad un altro matematico ad esempio scrisse: “[...]i miei lavori sono già molto avanzati; ma la via nella quale sono entrato non conduce al fine che si cerca, [...], ma conduce piuttosto a mettere in dubbio l’esattezza della geometria.[...].”

Solamente molti anni dopo, a partire dal 1813, ricominciò ad affiorare in lui il desiderio di ricerca di una geometria non-euclidea.

Tutto ciò che conosciamo di questi studi e riflessioni deriva dalla corrispondenza che egli intratteneva con compagni di studi e matematici illustri: Gauss infatti non volle mai pubblicare nulla a riguardo, preoccupato in parte di ciò che avrebbero suscitato le sue teorie in un mondo non ancora pronto.

Indicativo di questo è ad esempio il fatto che egli intratteneva una corrispondenza con Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859), in cui è lo stesso Schweikart, giurista e non matematico, nel 1818, a sostenere che “*esistono due tipi di geometria - una geometria in senso ristretto, la euclidea; ed una seconda geometria astrale*”, in cui i triangoli “*hanno la proprietà che la somma dei loro tre angoli non è uguale a due angoli retti*” ed “*è tanto più piccola quanto più è grande l’area del triangolo*”.

Schweikart aveva approfondito ulteriormente gli studi che riguardavamo la *geometria astrale*, arrivando ad affermare che: “*l’altezza di un triangolo rettangolo isoscele, pur crescendo al crescere dei lati, tuttavia non può superare un certo segmento*”, che egli aveva chiamato *costante*, e che tale proprietà valeva anche nella geometria euclidea, dove tale costante era infinitamente grande.

Gauss, che all’epoca aveva già maturato completamente le sue idee riguardo alla geometria *anti-euclidea*, come lui la chiamava, era rimasto colpito dalla

conversazione e aveva esortato il giurista a proseguire con i suoi studi. Così Schweikart coinvolse anche il nipote, Franz Taurinus (1794-1874), nelle sue ricerche. Nel 1825 quest'ultimo pubblicò l'opera *teoria delle parallele*, in cui presentava sviluppi analoghi a quelli di Saccheri e Lambert e determinava la costante di Schweikart, anche se rifiutava categoricamente l'ipotesi dell'angolo acuto (pur non trovando contraddizioni), profondamente convinto della verità del V postulato.

L'anno successivo Taurinus pubblicò un'altra opera in cui ripubblicava le sue ricerche ed esponeva gli sviluppi deducibili dall'ipotesi dell'angolo acuto in termini puramente analitici. Egli otteneva una nuova geometria, che chiamava *logaritmico-sferica*, in cui la somma degli angoli interni di un triangolo era minore di due angoli retti e in cui, se la lunghezza dei lati tendeva a zero, la somma degli angoli interni tendeva a  $\pi$  e i triangoli si avvicinavano sempre di più all'essere euclidei.

Qualche anno più tardi (intorno al 1830) finalmente Gauss sembrava pronto per pubblicare quanto aveva scoperto sulle geometrie-non eucleede e affrontare le *"strida dei beoti"*; nel 1832 gli giungeva però tra le mani la prima pubblicazione di un volume del suo compagno di studi Farkas Bolyai, nel quale in appendice il figlio János Bolyai esponeva, per primo, i suoi studi sulle geometrie non-eucleede.

János Bolyai (1802-1960) si interessò alla questione delle parallele perché affascinato dagli studi del padre, Farkas Bolyai (1775-1856). Farkas era stato compagno di studi di Gauss a Gottinga e con lui manteneva un rapporto epistolare anche dopo la fine degli studi. Egli dedicò molto tempo al tentativo di dimostrare il V postulato, senza però ottenere alcun risultato. Fu questo il motivo per cui, quando il figlio János si mostrò interessato a cercare, come lui, una dimostrazione del V postulato, egli tentò di dissuaderlo. Emblematiche sono le parole di una lettera che scrisse al figlio nel 1820: *"Dovresti sfuggirla come una relazione sfrenata e dissoluta; può privarti del tuo tempo, della salute, della tranquillità, di tutta la tua gioia di vivere."*

Fortunatamente il giovane János non si lasciò dissuadere dal padre e si concentrò quindi sul tentativo di dimostrare il V postulato. Tuttavia abbandonò questo obiettivo quasi subito: ben presto capì che, invece di tentare di dimostrare l'impossibile, sarebbe stato molto più interessante sviluppare e studiare la teoria che derivava dall'esclusione del V postulato: in questo modo di fatto Bolyai evitava di dover decidere (e dimostrare) a priori la verità o meno del V postulato; dedicandosi piuttosto allo studio della *scienza dello spazio assolu-*

*tamente vera* (come lui la chiamava), che consiste di tutte quelle proposizioni e quei teoremi della geometria ordinaria che sono indipendenti dal V postulato e sono quindi *assolutamente veri*.

Fu così che nel 1823 Bolyai aveva già trovato alcune formule fondamentali di geometria non-euclidea ed era deciso a pubblicare tali risultati, anche se non era ancora giunto alla fine delle sue ricerche. Egli scriveva al padre: “*Non posso dire altro che questo: ho creato dal nulla un nuovo universo.*”

Le scoperte di János vennero pubblicate quindi nel 1832, in appendice al volume del padre, con un lungo titolo che annunciava la *scienza assolutamente vera*.

In tale appendice venivano presentati come esempi elementari di enunciati *assolutamente veri* i primi 28 teoremi degli *Elementi* di Euclide; inoltre egli considerava le formule fondamentali della geometria sferica, che è indipendente dal V postulato, e mostrava che per una sfera di raggio infinito, la geometria sferica era identica a quella piana. Infine sviluppava la trigonometria piana nel caso non-euclideo, ne applicava le formule al calcolo di aree e affrontava il problema della costruzione di un quadrato equivalente ad un dato cerchio. Il padre preoccupato scrisse a Gauss per chiedergli un’opinione sulle concezioni poco ortodosse del figlio nel giugno del 1832; Gauss rispose a Farkas dicendo: “[...] tutto il contenuto dell’opera spianata da tuo figlio coincide quasi interamente con quanto occupa le mie meditazioni da trentacinque anni a questa parte [...]. è dunque con gradevole sorpresa che mi viene risparmiata questa fatica [di pubblicare], e sono contento che il figlio di un vecchio amico mi abbia preceduto in modo così notevole.” Farkas comunicò questa lettera al figlio, che non ne fu affatto felice: non riusciva a capacitarsi del fatto che altri fossero arrivati prima e indipendentemente da lui all’elaborazione della stessa teoria. Questa lettera lo elevava al rango del grande scienziato Gauss, ma allo stesso tempo lo privava della priorità della scoperta.

Sia il giovane Bolyai sia Gauss ignoravano che in realtà già da tempo analoghe idee avevano visto la luce a Kazan in Russia, ad opera di Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1793-1856), professore presso l’università di Kazan.

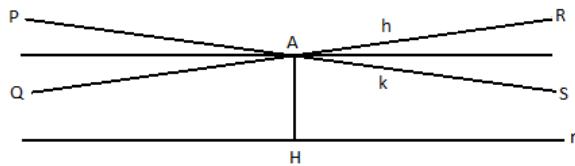
Lobačevskij fin dal 1817 aveva intrapreso una revisione critica dei principi della geometria. La prima opera in cui presentava tali risultati, del 1826, non fu mai pubblicata dall’università, perché troppo rivoluzionaria. Egli decise quindi di renderli noti attraverso un saggio sul giornale *Kazanski Vestnik* (Messaggero di Kazan) intitolato *Sui principi della geometria*, pubblicato tra il 1829 e il 1830. A questo saggio seguirono altri due articoli sul *Messaggero di Kazan*:

*Geometria immaginaria*, del 1835 e *Nuovi principi della geometria con una teoria completa delle parallele*, pubblicato tra il 1835 e il 1838.

Come scrisse nell'introduzione ai *Nuovi principi*, furono proprio i vani sforzi compiuti dai geometri a far sospettare Lobačevskij che nei concetti primitivi della geometria non si trovasse racchiusa la verità che essi volevano disperatamente dimostrare. Ai fini pratici la geometria euclidea si poteva senz'altro ritenere in accordo con l'esperienza, ma d'altra parte “*nella nostra immaginazione lo spazio può essere ampliato senza limiti*” e le distanze possono essere così grandi che tutte quelle di cui abbiamo esperienza diventano insignificanti.

Per prima cosa egli definiva come la distanza come posizione relativa di due punti. In questo modo si ottenevano la sfera, il piano e la retta (procedendo come Fourier), passando poi a sviluppare la *geometria assoluta*. Faceva inoltre considerazioni riguardo la congruenza dei triangoli, arrivando a dimostrare che, nell'ipotesi dell'angolo acuto (nella *geometria immaginaria*), triangoli simili sono sempre uguali.

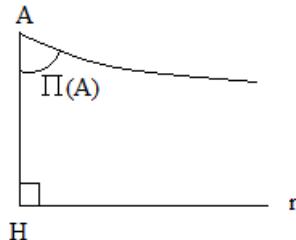
A questo punto iniziava la discussione sulla questione del parallelismo: egli dimostrò che: “*Le linee che escono da un punto o intersecano una data retta nel medesimo piano, oppure non si incontrano mai con essa, per quanto vengano prolungate.*”



Si considerino una retta fissata  $r$  ed un punto  $A$  esterno ad essa, la retta  $AH$  del fascio per  $A$  perpendicolare ad  $a$  e la retta del fascio per  $A$  perpendicolare alla retta  $AH$ : nel sistema euclideo, quest'ultima è l'unica retta che non interseca  $r$ . Nel sistema immaginario, invece, esistono altre rette che non intersecano  $r$ : sono tutte le rette comprese negli angoli  $P\hat{A}Q$  e  $R\hat{A}S$ , che vengono separate dalle rette del fascio che intersecano  $r$  dalle rette  $h$  e  $k$ , le rette asintotiche alla rette parallele ad  $r$ , che non intersecano  $r$ .

Si definisce poi l'*angolo di parallelismo* relativo al segmento  $A$  di perpendico-

lare (indicato con  $\Pi(A)$ ): è l'inclinazione di una delle rette del fascio per  $A$  scelta tra quelle che non intersecano  $r$ .



L'angolo di parallelismo permetteva così di distinguere la geometria euclidea, in cui  $\Pi(A)$  è sempre retto, indipendentemente dalla lunghezza del segmento  $A$ , dalla geometria immaginaria, in cui  $\Pi(A)$  è una funzione di  $A$ , sempre compresa tra  $0$  e  $90^\circ$ , che tende a  $0$  per  $A$  che tende ad infinito e tende a  $90^\circ$  per  $A$  che tende a  $0$ .

Possiamo allora considerare la curva, detta *orociclo*, per la quale due qualsiasi rette parallele ad una fissata abbiano lo stesso angolo di parallelismo rispetto ad una corda: una curva ortogonale ad un fascio di rette parallele. Nella geometria euclidea tale curva è sicuramente una retta, ma nella geometria immaginaria è il limite di un cerchio con raggio infinitamente grande.

In maniera analoga si può poi definire il concetto di *orisfera*, come il limite a cui tende la sfera all'aumentare del raggio; allora i cerchi massimi su di essa “*si trasformano in orocicli*”. Se gli angoli di parallelismo sono retti, l’orisfera è semplicemente un piano; altrimenti essa è una superficie curva, su cui tuttavia la geometria è euclidea.

L’orisfera non è altro che la superficie di cui parlava Bolyai (e di cui Lobačevskij non era a conoscenza).

Da questa corrispondenza tra rette e oricicli, tra piani e orisfere, Lobačevskij deduce il primo risultato notevole di “trigonometria immaginaria”: ‘*sulla orisfera è valida la geometria euclidea e in particolare l’ordinaria trigonometria piana*’.

La sua formula fondamentale è data nel seguente teorema:

**Teorema 36.** Se nel triangolo piano  $ABC$  denotiamo con  $a, b, c$  il lati opposti ad  $A, B, C$ ; con  $\Pi(a), \Pi(b), \Pi(c)$  gli angoli di parallelismo corrispondenti ai

lati, allora vale:

$$\cos(A) \cos(\Pi(b)) \cos(\Pi(c)) + \frac{\sin(\Pi(b)) \sin(\Pi(c))}{\cos(\Pi(a))} = 1$$

Lobačevskij aveva quindi intuito che c'è un legame tra geometria euclidea e geometria immaginaria (iperbolica) e che quest'ultima è il "limite" della prima.

Lobačevskij non ottenne la notorietà che si aspettava, così pubblicò nel *Journal* una traduzione francese di *Geometria immaginaria* nel 1837 e poi un volume in tedesco, *Ricerche geometriche sulla teoria delle parallele* nel 1840, allo scopo di far conoscere le sue teorie anche all'estero.

Con l'uscita del volume in tedesco di Lobačevskij la delusione di Bolyai, i cui meriti non furono mai riconosciuti, toccò l'apice. A causa di questo malessere egli non pubblicò più alcun lavoro.

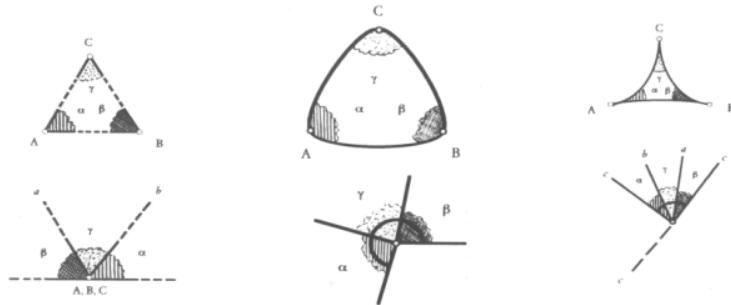
Tale volume trovò un attento lettore anche in Gauss, il quale, in una lettera a Schumacher del 1846, scriveva: “[...]Sono stato indotto di recente a rivedere l'opuscolo di Lobačevskij. Contiene i fondamenti di quella geometria che dovrebbe, e a rigore potrebbe, aver luogo se la geometria euclidea non fosse vera. Un certo Schweikart la chiamò geometria astrale. Lobačevskij geometria immaginaria. Lei sa che già da 54 anni ho le stesse convinzioni. Materialmente non ho trovato nulla di nuovo nell'opera di Lobačevskij, ma lo sviluppo è fatto per una via diversa da quella che ho seguito io[...].”.

Nel 1855, un anno prima di morire, Lobačevskij pubblicò in lingua russa e francese la sua ultima opera, *Pangeometria*, che rappresentava una sintesi delle sue vedute nel campo della geometria generica, di cui quella euclidea era solo un caso particolare.

Nel 1867 fu pubblicata postuma un'opera di Riemann (1826-1866), scritta nel 1854. In quest'opera, Riemann gettava le basi di una geometria totalmente nuova, detta geometria riemanniana, in cui il problema del parallelismo non si pone nemmeno, sostituendo il concetto di retta con quello metrico di curva *geodetica*, ossia il percorso di minor distanza tra due punti. In quest'ottica, la geometria euclidea è la geometria naturale del piano.

Riemann disse che bisogna distinguere tra illimitato e infinito (e infatti secondo lui, lo spazio era illimitato, ma non infinito). Con questa distinzione

fondamentale si affacciava la possibilità, completamente sfuggita ai geometri precedenti, ed esplorata poi da Klein (1849-1925) a partire dal 1871, di una geometria non-euclidea in cui viene meno non solo il V postulato, ma anche il II (che implica l'infinità della retta).



Klein diede il nome di *geometria iperbolica* e *geometria ellittica* rispettivamente alla geometria sviluppata da Bolyai e Lobačevskij (quella che deriva dall'ipotesi dell'angolo acuto) e alla geometria sviluppata da Riemann (quella che deriva dall'ipotesi dell'angolo ottuso con l'ipotesi della retta finita).

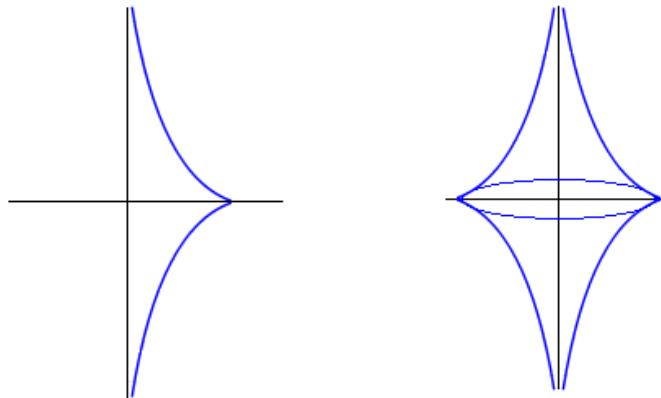
#### 14.4 I modelli

Le ricerche di Bolyai e Lobačevskij non riscossero nemmeno in parte il successo che i due autori si aspettavano. Le pubblicazioni dei due vennero presto lasciate da parte, perché sembravano “inutili”: se, come sembrava sperimentalmente confermato, la geometria dello spazio era quella euclidea, a cosa mai sarebbero potute servire le geometrie non-euclideanee? Se gli oricigli degeneravano in rette e le orisfere in piani, a cosa potevano portare le formule di Bolyai e Lobačevskij?

Non c'erano cioè modelli su cui le teorie potessero essere utilizzate.

Quando le geniali idee di Riemann sulla geometria furono pubblicate, le teorie di Lobačevskij e Bolyai cominciarono a diffondersi e ad essere discusse, in seguito alla pubblicazione, tra il 1860 e il 1863, dell'epistolario tra Gauss e Schumacher, che rendeva nota l'opinione sulle nuove geometrie espressa da Gauss. Le opere dei due e l'epistolario vennero inoltre tradotti ed iniziarono a diffondersi, anche in Italia.

In questo contesto Beltrami (1835-1900) esibì un modello del piano iperbolico, detto *pseudosfera*, la superficie generata dalla rotazione di una trattrice attorno al suo asse.



Nel *Saggio* Beltrami considerava una superficie a curvatura costante negativa, che già era stata considerata in lavori di Minding (1806-1885) e Codazzi (1824-1875).

Ciò che era sfuggito a Minding e Codazzi, e rappresentava il nocciolo teorico del *Saggio* di Beltrami, era lo stretto legame tra la geometria di Lobačevskij sul piano e la geometria su una pseudosfera.

Definito un sistema di coordinate su di essa dato da due sistemi di geodetiche ortogonali tra di loro, Beltrami riusciva a dimostrare che le geodetiche della superficie pseudosferica potevano essere interpretate come corde di un cerchio del piano euclideo. Egli introduceva poi la nozione di *angolo di parallelismo*, otteneva un'interpretazione nel suo modello degli orocicli e ritrovava le formule e i teoremi di Lobačevskij. Il modello di Beltrami fu fondamentale per la diffusione delle geometrie non-euclidee, anche se aveva un limite: nel 1901 infatti Hilbert (1862-1943) dimostrò che non esiste una superficie regolare in cui vale nella sua integrità la geometria di Lobačevskij, quindi il modello di Beltrami è un modello solamente locale. Nonostante questo, esso fu molto importante dal punto di vista storico, perché fu il primo di diversi modelli che iniziarono a far cadere le opposizioni e i preconcetti verso i nuovi sistemi. Anche altri matematici trovarono applicazioni delle geometrie non-euclidee, ad esempio Klein (alla geometria proiettiva) e Poincarè (1854-1912) (al semipiano complesso).

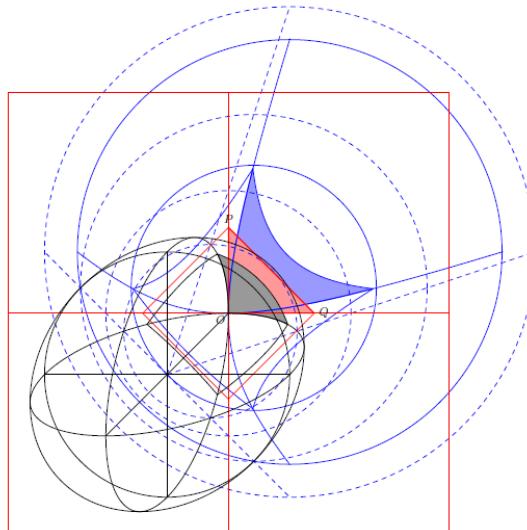
L'introduzione di tutti questi modelli, alcuni matematicamente molto importanti, permise finalmente alle geometrie non-euclidee di entrare a far parte del patrimonio della matematica.

## 14.5 Le geometrie non-euclidee oggi

In questo capitolo vogliamo illustrare come, utilizzando i risultati dell'algebra e delle applicazioni bilineari, si possano costruire dei modelli di piani non-euclidei. Nella costruzione faremo uso solo di concetti di algebra lineare e geometria proiettiva, senza far ricorso a concetti e tecniche della geometria differenziale.

In particolare sarà facile in questo modo vedere la relazione tra le due metriche non-euclideanee e la metrica euclidea: risulta infatti che la metrica ellittica e la metrica iperbolica *tendono* entrambe alla metrica euclidea, nel senso che le formule usate per le misure di distanze o di angoli delle due metriche, nei casi limite, tendono esattamente alle note formule euclideanee.

I tre modelli per le tre geometri sono: la sfera (per la geometria ellittica), il piano usuale (per la geometria euclidea) e l'iperboloido ellittico (per la geometria iperbolica).



Nel seguito si riporta uno schema generale per studiare le metriche con le applicazioni bilineari; in particolare, sono messe a confronto le tre metriche tramite i risultati più significativi. Verranno riportati dei confronti, a volte tra i tre casi (geometria euclidea, iperbolica e ellittica) e a volte solo tra ellittica ed iperbolica.

#### 14.5.1 Metriche e assoluto

##### Piano ellittico

Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione tre e si consideri su  $V$  un'applicazione bilineare, simmetrica, definita positiva:  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ; sia poi  $\|v\| = \sqrt{g(v, v)}$  per ogni vettore  $v \in V$ .

Fissato un numero reale  $R > 0$ , sia  $K = 1/R^2$ .

Definiamo allora su  $\mathbb{P}(V)$  la metrica  $\delta_K$ , ponendo:

$$\cos\left(\frac{\delta_K(P, Q)}{R}\right) = \frac{|g(v, w)|}{\|v\| \|w\|},$$

dove  $P = \sigma \langle v \rangle$ ,  $Q = \sigma \langle w \rangle$  e  $0 \leq \delta_K(P, Q) \leq \frac{R\pi}{2}$ .

I numeri reali  $R$  e  $K$  sono detti, rispettivamente, *raggio di curvatura* e *curvatura* della metrica  $\delta_K$ . Chiameremo poi *piano ellittico di curvatura*  $K$  il piano proiettivo  $\mathbb{P}(V)$  dotato della metrica  $\delta_K$ .

Per il piano ellittico l'assoluto  $\Gamma$  corrisponde alla conica senza punti reali determinata da  $g$ . La sua matrice nella base canonica è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{con } \epsilon > 0$$

##### Piano iperbolico

Per poter avere una definizione soddisfacente di metrica su un piano iperbolico dovremo accontentarci di definirla solo a un sottoinsieme del piano proiettivo.

Sia quindi  $V$  uno spazio vettoriale reale di dimensione tre e si consideri su  $V$  un'applicazione bilineare, simmetrica, non degenere e non-definita di inerzia  $i(g) = 1$ :  $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .

Consideriamo i sottoinsiemi di  $V$ :

$$\mathcal{T} = \{v \in V \mid g(v, v) < 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} = \{v \in V \mid g(v, v) = 0\}$$

e osserviamo che se  $v \in \mathcal{T}$  (rispettivamente  $v \in \mathcal{C}$ ) allora  $\langle v \rangle \setminus \{0\} \subseteq \mathcal{T}$  (rispettivamente  $\langle v \rangle \subseteq \mathcal{C}$ ).

Poniamo inoltre  $\|v\| := \sqrt{-g(v, v)}$  per ogni  $v \in \mathcal{T}$  e diciamo che due vettori  $v$  e  $w$  di  $\mathcal{T}$  sono concordi se  $g(v, w) < 0$  (cioè se appartengono alla stessa falda dell'iperboloido).

Possiamo ora passare allo spazio proiettivo  $\mathbb{P}(V)$  e considerare i sottoinsiemi:

$$H = \{P \in \mathbb{P}(V) \mid P = \sigma \langle v \rangle, v \in \mathcal{T}\} \quad \text{e} \quad \Gamma = \{P \in \mathbb{P}(V) \mid P = \sigma \langle v \rangle, v \in \mathcal{C} \setminus \{0\}\}$$

ed arrivare alle definizioni analoghe a quelle per il piano ellittico:  
fissiamo un numero reale  $R > 0$ , sia  $K = -1/R^2$ .

Definiamo allora su la metrica  $\delta_K : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ , ponendo:

$$\cosh\left(\frac{\delta_K(P, Q)}{R}\right) = \frac{|g(v, w)|}{\|v\| \|w\|},$$

dove  $P = \sigma \langle v \rangle$ ,  $Q = \sigma \langle w \rangle$  e  $0 \leq \delta_K(P, Q) \leq \frac{R\pi}{2}$ .

I numeri reali  $R$  e  $K$  sono detti, rispettivamente, *raggio di curvatura* e *curvatura* della metrica  $\delta_K$ . Chiameremo poi *piano iperbolico di curvatura*  $K < 0$  il sottoinsieme  $H$  del piano proiettivo  $\mathbb{P}(V)$  dotato della metrica  $\delta_K$ . Il sottoinsieme  $\Gamma$  di  $\mathbb{P}(V)$  è detto l'*assoluto* del piano iperbolico; i punti di  $H$  sono detti *punti interni all'assoluto* mentre i punti che non stanno né in  $H$  né in  $\Gamma$  sono detti *punti esterni all'assoluto*.

L'assoluto corrisponde al supporto della conica di  $\mathbb{P}(V)$  associata all'applicazione bilineare  $g$  ed un punto  $P = \sigma \langle V \rangle$ , che non sta in  $\Sigma$ , è interno o esterno all'assoluto a seconda del segno di  $g(v, v)$ . La matrice dell'assoluto nella base canonica è: Per il piano ellittico l'assoluto  $\Gamma$  corrisponde alla conica senza punti reali determinata da  $g$ . La sua matrice nella base canonica è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{con } \epsilon < 0$$

### Piano euclideo

La matrice dell'assoluto nella base canonica è: Per il piano ellittico l'assoluto  $\Gamma$  corrisponde alla conica senza punti reali determinata da  $g$ . La sua matrice nella base canonica è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{con } \epsilon = 0$$

### 14.5.2 Angolo tra due rette e parallelismo

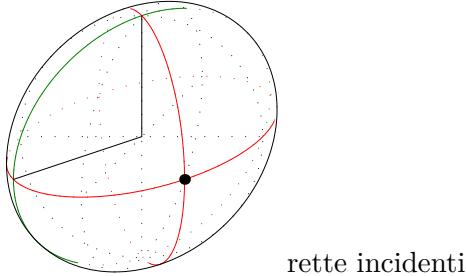
#### Piano ellittico

Nelle notazioni precedenti, date due rette  $r = \sigma \langle v, w \rangle$  e  $s = \sigma \langle v, z \rangle$ , consideriamo i vettori  $y_r$  e  $y_s$  in  $V$  tali che  $\langle y_r \rangle = \langle v, w \rangle^\perp$  e  $\langle y_s \rangle = \langle v, z \rangle^\perp$ . L'angolo tra le due rette è il numero reale  $\alpha(r, s)$  tale che:

$$\cos(\alpha(r, s)) = \frac{|g(y_r, y_s)|}{\|y_r\| \|y_s\|} \quad \text{e} \quad 0 \leq \alpha(r, s) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Nel piano ellittico non possono esserci due rette parallele distinte, perché in esso ogni retta reale contiene due punti, a coordinate complesse coniugate, nel supporto di  $\Gamma$  (l'assoluto); ma due rette reali che abbiano in comune un punto dell'assoluto necessariamente coincidono, perché hanno in comune anche il punto coniugato.

Dunque nel caso ellittico due rette distinte sono sempre incidenti:



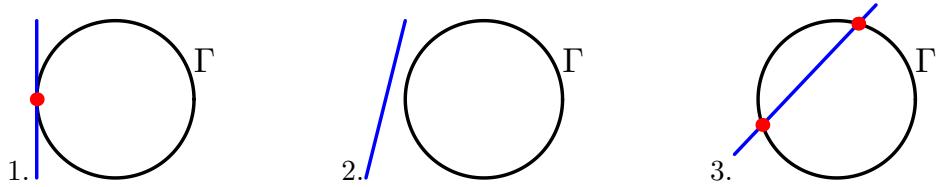
#### Piano iperbolico

Di nuovo, dovremo fare una distinzione tra le rette di  $\mathbb{P}(V)$  per poter definire la nozione di angolo e questa distinzione dipenderà dalla loro posizione rispetto all'assoluto.

Una retta di  $\mathbb{P}(V)$  può essere:

1. tangente all'assoluto  $\Gamma$ ;
2. esterna all'assoluto  $\Gamma$ ;
3. secante all'assoluto  $\Gamma$ .

Solo le rette secanti all'assoluto contengono punti iperbolici; solo queste quindi sono le rette iperboliche. Nelle notazioni precedenti, una retta  $r = \sigma \langle v, w \rangle$  di  $\mathbb{P}(V)$  è una *retta del piano iperbolico* se la sua restrizione a  $\langle v, w \rangle$  è non-degenera e non-definita. Due rette del piano iperbolico si dicono *incidenti* se si intersecano in un punto proprio, cioè di  $H$ .



Date quindi due rette del piano iperbolico  $r = \sigma \langle v, w \rangle$  e  $s = \sigma \langle v, z \rangle$ , incidenti in  $P = \sigma \langle v \rangle \in H$ . L'angolo tra le due rette è il numero reale  $\alpha(r, s)$  tale che:

$$\cos(\alpha(r, s)) = \frac{|g(y_r, y_s)|}{\|y_r\| \|y_s\|} \quad \text{e} \quad 0 \leq \alpha(r, s) \leq \frac{\pi}{2},$$

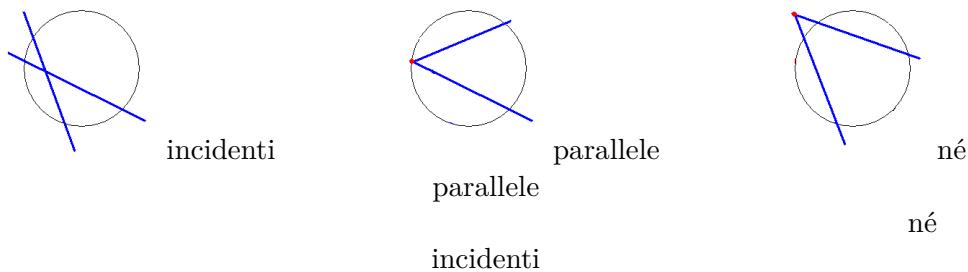
dove  $y_r$  e  $y_s$  in  $V$  sono tali che  $\langle y_r \rangle = \langle v, w \rangle^\perp$  e  $\langle y_s \rangle = \langle v, z \rangle^\perp$ .

Due rette del piano iperbolico si dicono *parallele* se la loro intersezione contiene un punto dell'assoluto.

Dunque esistono rette del piano iperbolico che non sono né incidenti né parallele (quelle che si incontrano in un punto esterno all'assoluto).

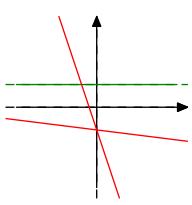
Inoltre, la relazione di parallelismo in questo caso non è relazione d'equivalenza, perché due rette parallele ad una stessa retta non sono necessariamente parallele tra loro.

Dunque nel caso iperbolico abbiamo tre possibilità:

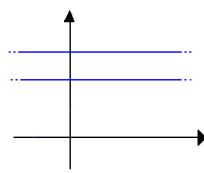


### Piano euclideo

Nel piano euclideo come sappiamo date due rette distinte abbiamo due possibilità:



rette incidenti



rette parallele

# Bibliografia

- [1] Bell, Eric T., *I grandi matematici*, Biblioteca Universale Sansoni.
- [2] Bottazzini, Umberto, *Storia della matematica moderna e contemporanea*, Utet Libreria.
- [3] Dispense per il corso di matematica 3, Maurizio Candilera.
- [4] Relazioni degli anni precedenti

# Capitolo 15

# Hilbert e il formalismo

di Alessandro Noiato



## 15.1 Biografia

David Hilbert nacque nei pressi di Königsberg nel 1862 da Otto Hilbert, un giudice, e Maria, sua moglie. Frequentò dal 1872 il Friedrichskolleg, una scuola

privata che offriva un curriculum molto tradizionale e rigido (che prevedeva, fra l'altro lo studio del greco e del latino, come negli odierni licei classici). Il giovane Hilbert non apprezzò mai il tipo di studio richiesto al Friedrichskolleg e nel 1879 si trasferì, per l'ultimo anno, al Wilhelm Gymnasium, una scuola pubblica che enfatizzava l'insegnamento della matematica. Nel 1880 si iscrisse all'Università di Königsberg; non a studiare legge, come avrebbe voluto il padre, ma matematica, che allora faceva capo alla Facoltà di Filosofia. Nel 1882 conobbe Hermann Minkowski, che all'epoca aveva solo 17 anni ma era allo stesso punto di Hilbert con gli studi e strinse con lui un'amicizia destinata a durare fino alla morte di quest'ultimo (1909). Due anni dopo, nel 1884, Adolf Hurwitz giunse a Königsberg da Göttingen come Extraordinarius (i.e. professore associato) e tra i tre nacque una collaborazione scientifica molto fruttuosa. Nel 1885 ottenne il dottorato sotto la guida di Ferdinand von Lindemann, con una tesi sugli invarianti di certe forme binarie. Dal 1886 al 1895 restò a Königsberg come professore. In questo periodo si sposò e nacque il suo unico figlio, Franz. Nel 1895, grazie all'intercessione di Felix Klein, che era rimasto impressionato dalla sua soluzione del Problema di Gordan, ottenne la cattedra di Matematica alla prestigiosa Università di Gottinga (a quel tempo uno dei migliori centri di ricerca per la matematica) dove restò fino alla fine della sua carriera. Tra i 69 studenti che conseguirono il dottorato sotto la sua guida, molti divennero importanti matematici, ad esempio: Otto Blumenthal, Hermann Weyl, Richard Courant, Erich Hecke, Hugo Steinhaus. Tre anni dopo propose una nuova assiomatizzazione della geometria euclidea. Nel 1900 era già molto rispettato all'interno della comunità matematica, al punto di essere invitato al Congresso Internazionale dei Matematici a Parigi. In quest'occasione tenne un discorso, ritenuto da molti il più influente mai pronunciato nel suo genere, in cui espone una lista di problemi da risolvere nel secolo a venire. Alcuni di questi furono risolti in breve tempo, altri furono discussi per gran parte del secolo scorso, altri ancora sono considerati lontani da una soluzione. Nel 1920 propose un progetto di ricerca (Programma di Hilbert) con l'obiettivo di dare alla matematica una base logica solida e completa, in risposta alla crisi causata dai paradossi. Più in generale, come matematico, diede contributi importanti a diverse aree, soprattutto in analisi funzionale e teoria algebrica dei numeri. Nel 1933 Hilbert assistette impotente mentre l'università soffriva la perdita di molte delle sue menti più brillanti per via dell'ascesa al potere del partito nazista. Molti ebrei emigrarono, altri furono costretti a lasciare le loro posizioni all'interno dell'università. Nel 1934 infatti, al nuovo ministro

dell’istruzione che chiedeva come stesse andando la matematica a Göttingen, liberata dall’influenza giudaica, Hilbert rispose: “Matematica a Göttingen? Non ce n’è più.” Quando morì, nel 1943, al suo funerale si presentò non più di una dozzina di persone, delle quali solo un paio erano matematici, proprio a causa di questa diaspora. La notizia della morte di Hilbert giunse al resto della comunità matematica solo sei mesi dopo. Sulla sua lapide sono incise le ultime parole del discorso che aveva pronunciato in occasione dell’incontro annuale dell’associazione dei medici e degli scienziati tedeschi nel 1930, anno del suo pensionamento:

Wir müssen wissen,  
wir werden wissen.

Questa massima testimonia la fede di Hilbert nella ragione umana come strumento di risoluzione di tutti i problemi scientifici, in opposizione all’ *ignorabimus* di du Bois-Reymond.



## 15.2 Hilbert ed i Fondamenti

Il metodo assiomatico era noto ed usato fin dall'antichità. Data una teoria informale, esso consiste sostanzialmente nell'indicare un insieme di proposizioni iniziali procedendo dalle quali, con l'utilizzo di certe regole di inferenza, si possono ottenere tutte le proposizioni della teoria. Per citare Hilbert:

“Ogni scienza ha come punto di partenza un corpo di fatti sufficientemente coerenti. Essa prende forma, tuttavia, solo organizzando tale corpo di fatti. Questa organizzazione ha luogo attraverso il metodo assiomatico, ovvero si costruisce una struttura logica di concetti in modo tale che le relazioni tra concetti corrispondano alle relazioni tra i fatti da organizzare. C'è arbitrarietà nella costruzione di una tale struttura di concetti; noi, comunque, ne richiediamo: 1) completezza, 2) indipendenza, 3) consistenza. [8]”

Questo punto di vista è però già moderno. In passato i concetti di verità e dimostrabilità erano in qualche modo mescolati. L'intenzione di Euclide era quella di enunciare un numero finito di proposizioni vere da cui dedurre tutti i risultati di geometria piana che gli erano noti. In particolare, pose alla base della geometria piana cinque postulati e altrettanti principi comuni (e.g. Il tutto è più grande di ogni sua parte). Questa concezione fu però messa in crisi nel XIX secolo, quando alcuni matematici (tra cui citiamo Lobachevsky, Bolyai, Gauss e Beltrami) si accorsero che negando il quinto postulato si otteneva una geometria perfettamente consistente semplicemente modificando l'interpretazione dei termini “punto”, “retta” e “piano”. Poggiandosi su questi lavori, Hilbert, nel 1898, gettò nuove fondamenta per la geometria Euclidea, enunciando venti assiomi suddivisi in cinque gruppi (in realtà ne enunciò ventuno, ma uno fu dimostrato essere ridondante). Ci furono altre assiomatizzazioni della geometria Euclidea successive (Tarski, Birkhoff) ma quella di Hilbert rappresentò uno dei primi paradigmi del metodo assiomatico moderno<sup>1</sup>, avendo avuto il merito di evidenziare come le interpretazioni date da Euclide di punto, retta e piano non fossero strettamente necessarie per fare della matematica consistente e assumessero importanza solo in base agli assiomi che venivano scelti. Dunque, secondo questo nuovo punto di vista, gli assiomi non sono più da intendersi come verità autoevidenti e la matematica

---

<sup>1</sup>non il primo però: fu anticipato, ad esempio, da Peano nel 1889 per l'aritmetica

può considerare oggetti vicini alla nostra intuizione, ma questo non deve necessariamente portarci ad assegnare significati specifici ai concetti primitivi: che li si chiami punto, retta e piano o tavoli, sedie e boccali di birra, tali oggetti saranno semplicemente quelli per cui valgono le relazioni enunciate dagli assiomi. Il risultato, insomma, fu la distinzione tra la struttura logico-deduttiva di una teoria e lo status epistemologico degli assiomi e quindi dei teoremi: le dimostrazioni di quest'ultimi non stabiliscono più la verità di una proposizione, ma il fatto che data una qualunque interpretazione degli enti di base che renda validi gli assiomi, questa deve rendere validi anche i teoremi. Va menzionato inoltre, che al metodo assiomatico come lui lo concepiva Hilbert attribuiva un valore trasversale nella scienza, applicabile ad ogni teoria che abbia una struttura logica basata su un numero finito di proposizioni fondamentali. Quando cominciò a dedicare parte del suo tempo alla fisica, dal 1912, Hilbert tentò di dare un fondamento assiomatico alla teoria cinetica dei gas e alla teoria elementare della radiazione. È noto inoltre l'aneddoto secondo cui fu molto compiaciuto quando anni dopo si scoprì come le leggi che governano l'ereditarietà delle caratteristiche nei moscerini della frutta possano essere dedotte da un certo gruppo di assiomi.

### 15.3 Finitismo

Agli inizi del novecento, vari tentativi di porre basi solide per la matematica, condotti da diversi fronti, si erano dimostrati inefficaci o vulnerabili a paradossi, sicché anche l'idea stessa che il problema dei fondamenti avesse soluzione era messa in discussione. Su tali questioni, Hilbert si diceva insoddisfatto dei tentativi precedenti, in particolare di quelli dei logicisti, che riducevano la matematica a pura logica. Scrive a riguardo:

“ L'aritmetica è spesso considerata parte della logica e le nozioni logiche fondamentali tradizionali sono di solito presupposte, quando si tratta di stabilire una base per l'aritmetica. Se osserviamo attentamente, però, ci accorgiamo che nell'esposizione tradizionale delle leggi della logica, certe nozioni aritmetiche fondamentali sono già usate, per esempio la nozione di insieme e, in qualche misura, anche quella di numero. Quindi ci troviamo a girare in un circolo ed è questo il motivo per cui è richiesto uno sviluppo parzialmente simultaneo delle leggi della logica e dell'aritmetica se si vogliono evitare paradossi. [4, 129-138]”

Quindi la proposta di Frege si era rivelata inconsistente e i tentativi di Russell e Whitehead facevano ricorso ad assunzioni (assioma dell'infinito, assioma di riducibilità) tutt'altro che evidenti, o addirittura, secondo Hilbert, neppure plausibili. Tuttavia riconobbe di essere in debito nei confronti di Frege e Russell, soprattutto per l'invenzione del calcolo logico, strumento che Hilbert stesso utilizzò nel dare la sua risposta alla crisi dei fondamenti. Il cardine della filosofia della matematica di Hilbert, ciò che gli permise di dare forza alla proposta degli anni â20, fu il punto di vista cosiddetto "finitista", che consiste nel restringere il pensiero matematico a oggetti completamente conoscibili, finitamente e concretamente presentabili, la verifica delle cui proprietà e relazioni sia intuitiva. Hilbert stesso caratterizza il dominio dei ragionamenti finitisti in un paragrafo che lascia sostanzialmente invariato in tutte le pubblicazioni di quel periodo sull'argomento:

"Come condizione per l'uso di inferenze ed operazioni logiche, qualcosa dev'essere già dato alla nostra facoltà di rappresentazione, certi oggetti concreti ed extra-logici che sono intuitivamente presenti come esperienza immediata prima di ogni pensiero. Se l'inferenza logica dev'essere affidabile, dev'essere possibile esaminare questi oggetti completamente in tutte le loro parti e la loro esistenza, il loro differire da l'un l'altro, la loro successione o concatenazione devono esserci dati immediatamente, intuitivamente, insieme agli oggetti, come qualcosa che non possa essere ridotto ad altro. Questa è la posizione filosofica di base che ritengo necessaria per la matematica e, in generale, per la comunicazione, la comprensione e il pensiero scientifico." [3]

Gli oggetti cui si riferisce sono i segni, "la cui forma può essere da noi riconosciuta in modo certo e generale, indipendentemente da spazio e tempo, dalle specifiche condizioni di produzione del segno e da insignificanti differenze nel prodotto finito". Per darci un'idea di cosa intendeva Hilbert si considerino come numeri naturali i simboli del tipo: —, —, —, — etc., detti numerali. Le più semplici proposizioni finitarie sono quelle riguardanti uguaglianze e disuguaglianze di numerali. Ad esempio se  $n$  ed  $m$  sono due naturali, possiamo dire che  $n = m$  se sono di fatto lo stesso segno e che  $n \neq m$  se  $n$  è un segmento iniziale proprio di  $m$ . Si noti che in questo contesto " $n = m$ ", " $n \neq m$ " non sono formule ma proposizioni, con un valore di verità ben definito. Inoltre per segni di questo tipo si può evidentemente definire operazioni, ad esempio la concatenazione di — e — si scrive "2+3". In pratica negli

scritti di metamateamatica di Hilbert e dei suoi collaboratori, queste operazioni di base si generalizzavano a operazione più complicate definite per ricorsione. Analogamente, le affermazioni plausibili che si possono dare sui numerali non sono solamente quelle di uguaglianza o disuguaglianza, ma anche alcune semplici proprietà decidibili, come ad esempio  $p$  è primo. Questo è finitisticamente accettabile poiché la funzione caratteristica di questa proprietà è essa stessa finitistica: l'operazione che trasforma un numerale in — se esso è primo e in — altrimenti è una funzione ricorsiva primitiva, dunque finitistica. Le proposizioni più problematica sarebbero quelle che esprimono fatti generali sui numerali, come  $1 + n = n + 1$ . È problematica perché non può essere negata dal punto di vista finitista e, come dice Hilbert, “non si può, dopo tutto, fare la prova con tutti i numeri”. Insomma, Hilbert attribuiva un ruolo privilegiato nella matematica alla teoria dei numeri elementare, che dipende esclusivamente da una base puramente intuitiva di segni concreti. Talvolta si presenta il punto di vista di Hilbert in modo errato, suggerendo l'idea che Hilbert ritenesse che i numeri fossero i segni materiali sulla carta (o su un altro supporto). È importante sottolineare come questa concezione sia errata nel senso che le affermazioni della teoria dei numeri elementare non possono dipendere da fatti fisici esterni o possibilità fisiche.<sup>2</sup>

## 15.4 Hilbert e l'intuizionismo

Dato che i numerali della matematica finitistica sono semplicemente i segni e l'esistenza di un dominio in cui esistano a priori non è garantita, la concezione della quantificazione intesa da Hilbert è molto vicina a quella intuizionista. Per cui, ad esempio, una dimostrazione di una proposizione di esistenza del tipo “esiste  $n$  tale che  $P(n)$ ” per essere valida dev'essere “costruttiva” nel senso seguente: deve esibire un  $n$  tale che  $P(n)$  sia vera oppure indicare un metodo con cui si possa in linea di principio trovare un tale  $n$ . Perciò, ad esempio, l'inferenza da una proposizione come “non per tutti gli  $n$ ,  $P(n)$ ” a “esiste un  $n$  tale che non  $P(n)$ ” non è ammissibile. Poichè questa inferenza segue dal principio del terzo escluso, per Hilbert tale principio non è utilizzabile nella matematica finitaria. Hilbert e i suoi collaboratori erano consapevoli del fatto che le assunzioni necessarie alla costruzione, per esempio, dell'analisi non hanno una giustificazione finitistica quindi non possono essere dimostrate vere.

---

<sup>2</sup>Ad ogni modo, le questioni filosofiche sull'aritmetica finitista e sul modo in cui la intendeva Hilbert sono piuttosto spinose e trascendono gli scopi di questa relazione.

Tuttavia non erano d'accordo con la conclusione intuizionista di dover abbandonare tali teorie e ricostruirle dalle fondamenta. I motivi di tale disaccordo erano fondamentalmente di natura pragmatica. Ricostruire l'analisi su base intuizionistica, rinunciando al principio del terzo escluso su insiemi infiniti avrebbe reso la teoria più povera di risultati secondo Hilbert, obbligando i matematici a complicate distinzioni:

“Proibire ad un matematico di usare il principio del terzo escluso è come proibire ad un astronomo di usare il telescopio o ad un pugile di usare i guantoni.” [1]

O secondo Bernays:

“Ci sembra una pretesa ingiustificata sulla matematica da parte della filosofia, che la matematica debba abbandonare i propri metodi più semplici e potenti in favore di un metodo sconveniente e restrittivo senza essere portata a far ciò da una necessità interna. Il punto di vista intuizionista ci diviene sospetto per via di questa richiesta irragionevole.” [5]

Un altro argomento contro gli intuizionisti è la constatazione che molte teorie che coinvolgono l'infinito attuale quali l'analisi o la teoria dei campi funzionano brillantemente. Hilbert cita anche le scienze fisiche:

“Infine, se solo pensiamo a tutte le applicazioni e prendiamo coscienza di quale moltitudine di inferenze transfinite del tipo più difficile e più arduo sono contenute, per esempio, nella teoria della relatività e dei quanti e a come cionondimeno la natura si conformi a tali risultati à la radiazione delle stelle fisse, il pianeta Mercurio, e i più complicati spettri qui sulla terra e a distanza di migliaia di migliaia di anni luce à come potremmo, in questa situazione, dubitare anche solo per un istante della legittimità dell'applicazione del principio del terzo escluso [...]? Ciò nonostante, ancor oggi Kronecker ha i suoi sostenitori che non credono nell'ammissibilità del principio del terzo escluso: questa è probabilmente la più crassa mancanza di fede riscontrabile nella storia del genere umano.” [6]

Ovviamente Hilbert non pretendeva di porre l'osservazione fisica o l'evidenza empirica a fondamento dei metodi dell'analisi ma usava questi argomenti per

sostenere che l'analisi non era affatto in crisi. In quest'ottica, il ruolo di una teoria fondazionale non doveva essere quello di ricostruire l'analisi, quanto piuttosto quello di giustificarne i risultati e chiarirne completamente le basi. In questo è evidente la spaccatura con l'intuizionismo. Scrive infatti Brouwer:

“ Una tale giustificazione contiene un circolo vizioso, perché dipende dalla correttezza (contenutistica) della proposizione che dalla consistenza di un'affermazione segue la correttezza di quell'affermazione, i.e. dalla correttezza contenutistica della legge del terzo escluso.[2] ”

La polemica con lo stesso Brouwer, assunse toni piuttosto aspri. La controversia era iniziata per Hilbert contestualmente alla sua dimostrazione non costruttiva del Teorema della Base, che costituiva parte integrante della soluzione al problema di Gordan. Molti non furono convinti da quella dimostrazione, tra cui Kronecker, che morì poco tempo dopo. Le sue obiezioni furono però accolte e portate avanti da Brouwer e la sua emergente scuola intuizionistica, persino da Hermann Weyl - uno degli allievi prediletti di Hilbert - che attorno al 1918 “defezionò” a favore dell'intuizionismo, dando un forte dispiacere ad Hilbert. Pur senza nominarlo direttamente, Hilbert disse di Brouwer:

“Mi stupisce che un matematico debba dubitare che il principio del terzo escluso sia strettamente valido come modo di inferenza. Mi stupisce ancora di più che, come pare, si sia costituita un'intera comunità di matematici che condividono questa posizione. Mi lascia assolutamente basito il fatto che anche in ambienti matematici il potere di suggestione di un singolo uomo, per quanto pieno di temperamento ed inventiva, sia in grado di avere gli effetti più improbabili ed eccentrici.[4] ”

In occasione di una polemica sulla politica editoriale dei *Mathematische Annalen*, Hilbert arrivò addirittura a far escludere Brouwer dal novero degli editori della rivista.

## 15.5 La proposta formalista

A partire dal 1920 Hilbert intraprese un tentativo sistematico di risolvere la crisi causata dai paradossi. Con l'introduzione del “programma di Hilbert”, egli e i suoi collaboratori (Bernays, Ackermann, Von Neumann) si proponevano quanto segue.

1. Formalizzazione: fare in modo che tutte le proposizioni matematiche possano essere scritte in un preciso linguaggio formale e manipolate secondo regole ben definite.
2. Completezza: mostrare che tutte le proposizioni matematiche vere sono anche dimostrabili.
3. Consistenza: far vedere che non è possibile derivare una contraddizione all'interno della matematica formalizzata come sopra.
4. Decidibilità: deve esistere un algoritmo che decida la verità o falsità di ogni proposizione matematica.

Il merito principale di Hilbert fu suggerire un nuovo metodo per la formalizzazione della matematica, che avrebbe secondo lui reso agevole anche la dimostrazione della consistenza. In un certo senso l'idea di fondo di questo metodo è già presente nel significato della parola consistenza com'è intesa oggi dai matematici, ovvero che non si possa dedurre alcuna contraddizione dagli assiomi. Per dimostrare la consistenza in modo diretto quindi, si dovrebbe dimostrare una proposizione sulla teoria stessa e in particolare su tutte le possibili dimostrazioni di teoremi nella teoria in oggetto. La teoria matematica per cui si spera di provare la consistenza diventa allora essa stessa oggetto di uno studio matematico, che Hilbert chiama metamateematica. Come si realizza questa idea? Il risultato dell'attività dei matematici s'incarna in proposizioni, nella fattispecie quelle della teoria in oggetto. Anche se non è possibile scriverele tutte, dev'essere possibile conoscere le condizioni che determinano se una data proposizione è vera o meno. La proposta di Hilbert si basa sul metodo assiomatico. Come primo passo, le proposizioni devono essere disposte secondo una "gerarchia" deduttiva, indicando alcune di esse come assiomi. Questo passo non è concluso finché tutte le proprietà dei termini tecnici che abbiano qualche rilevanza dal punto di vista deduttivo non sono chiarite in modo tale che si possa ricavare deduzioni trattandoli come se non avessero alcun significato "intrinseco". Infatti se avessero un significato necessario alla deduzione di teoremi allora non avremmo espresso tutte le loro proprietà tramite assiomi. Fino a che punto continuare questo processo di assiomatizzazione è arbitrario quanto la distinzione fra termini "tecnicici" e non. Il passo successivo è quello di indicare i modi di inferenza, esplicitandoli come regole o come nuovi assiomi nella teoria stessa. Pertanto sarà possibile stabilire se una data sequenza finita di proposizioni sia o meno la dimostrazioni di un certo teorema. Dato

che ci siamo astratti dal contenuto, lasciando solo la forma, possiamo dire che la teoria iniziale è stata formalizzata. In questa forma, la teoria non è più un insieme di proposizioni con un significato, ma un sistema di proposizioni intese solo come successioni di parole. Solo in base alla forma stabiliamo quali combinazioni di parole sono proposizioni, quali proposizioni sono assiomi e quali si possono dedurre immediatamente da altre. Nelle parole di Hilbert:

“Tutto ciò che costituisce la matematica nel senso tradizionale è rigorosamente formalizzato, cosicché la matematica vera e propria diviene un insieme di formule. Certe formule che servono da fondamento per l’edificio formale della matematica sono dette assiomi. Una dimostrazione è una figura che [â<sup>1</sup>] consiste di inferenze, ove ciascuna delle premesse è o un assioma, o coincide con il risultato di un’inferenza che la precede nella dimostrazione, o risulta da una formula precedente per sostituzione. Una formula si dirà dimostrabile se è o un assioma o la formula terminale di una dimostrazione.”

[6]

In questo modo Hilbert usa i metodi della logica matematica per tradurre le componenti di una teoria assiomatica in oggetti della matematica finitaria. Così si ottiene un metodo che permette di valutare con un numero finito di operazioni la correttezza di un risultato ottenuto anche usando metodi transfiniti, permettendo di fatto di riformulare la matematica transfinita all’interno di un sistema formale, in modo da poter “comprenderla” al finito. Va sottolineato che i metodi usati nella metateoria saranno esclusivamente quelli finitari, nel senso già discusso del termine. Ricapitolando, possiamo immaginarcici tre “teorie” distinte:

1. La teoria “informale” di cui vogliamo ottenere una formalizzazione
2. Il sistema formale
3. La metateoria, in cui il sistema formale è descritto e studiato.

Il sistema formale del punto 2 non è da intendersi come una teoria nel senso usuale del termine ma piuttosto come un sistema di oggetti costituiti da segni. La metateoria ha il sistema formale come oggetto e vi deve essere applicabile senza considerare 1, o meglio all’interpretazione di 2 in termini di 1. Infine, 3 è ristretta all’uso di metodi finitari. A questo punto possiamo passare a come Hilbert intendeva affrontare il problema della consistenza di una teoria. Prima

del Programma, anche nelle prime fasi del suo stesso pensiero, il metodo usato per dimostrare la consistenza di una teoria assiomatica era darne un “modello”. Un modello è semplicemente un insieme ben definito di oggetti scelti da un’altra teoria che diano un’interpretazione dei termini presentati nel sistema in modo tale da soddisfare gli assiomi. Ad ogni oggetto o nozione primitiva della teoria assiomatica si fa corrispondere un oggetto od una nozione dell’altra teoria, in modo tale che gli assiomi nella prima corrispondano a teoremi nella seconda. Se quest’altra teoria è consistente, allora anche quella di partenza dev’esserlo. Supponendo infatti che nella teoria assiomatica si potesse dedurre una contraddizione dagli assiomi, si dovrebbe poter dedurre una contraddizione tra i teoremi corrispondenti. Esempio: Beltrami nel 1968 mostrò che le rette nella geometria piana di Lobatchevsky e Bolyai possono essere rappresentate dalle geodetiche su una superficie di curvatura negativa e costante nello spazio Euclideo. Quindi la geometria iperbolica piana è consistente se la geometria Euclidea lo è. Ma c’è un problema: questo tipo di dimostrazioni della consistenza di una teoria sono “relative”. La teoria per cui si produce un modello è consistente se lo è quella da cui il modello è stato preso, per cui solo quando quest’ultima è inattaccabile il modello ci da una dimostrazione valida della consistenza. Ma per dimostrare la consistenza, ad esempio, della teoria dei numeri classica o dell’analisi matematica non si può usare questo metodo. Hilbert e Bernays escludono anche la possibilità di poter ottenere un modello ispirandosi al mondo fisico o a quello delle percezioni. Se si deve provare la consistenza di teoria dei numeri, analisi, etc. bisogna usare un altro metodo ed è qui che entra in gioco l’idea di Hilbert. Grazie alla traduzione della teoria in sistema formale e quindi in un oggetto della matematica finitista, l’enunciato di consistenza si riduce infatti ad una proposizione della metateoria e quindi suscettibile di dimostrazione non formale ma contenutistica. Si esaminano gli assiomi e le regole del sistema formale e si mostra con ragionamenti finitistici che non si può derivare, ad esempio la contraddizione  $1 \neq 1$  (o qualunque altra contraddizione fissata, dato che tutti i sistemi considerati da Hilbert contengono la regola di derivazione ex falso quodlibet, secondo cui se la teoria dimostra una contraddizione allora dimostra ogni formula). A partire dal 1923, Hilbert introdusse un’ulteriore distinzione nel suo punto di vista: quella tra formule “reali” ed “ideali”. Le formule reali sono quelle che corrispondono a proposizioni contenutistiche, finitarie, quelle ideali sono le altre. Esse sono aggiunte alla parte reale delle teorie matematiche per preservare i modi di inferenza classici anche nei ragionamenti che trattano l’infinito come attuale. Un esem-

pio di aggiunta di un elemento ideale ad un sistema è quello dell'iperpiano all'infinito della geometria proiettiva. Così scrive Hilbert a riguardo:

“Nella mia metamateematica, gli assiomi e le formule transfiniti sono aggiunti agli assiomi finiti come nella teoria delle funzioni a variabili complesse gli elementi immaginari sono aggiunti ai reali e come in geometria le costruzioni ideali sono aggiunte a quelle reali. [7]”

Quando Hilbert parla di proposizioni reali, manifesta chiaramente che la parte reale della teoria consta solo di formule decidibili e senza variabili, che devono essere suscettibili di verifica diretta, in perfetta analogia con le proposizioni della fisica che possono essere verificate sperimentalmente. Le proposizioni transfinite invece non necessitano di alcun significato intuitivo allo stesso modo in cui in fisica non è necessario vedere gli elettroni per scriverne una teoria. La *raison d'être* per la parte ideale starebbe nella conservatività rispetto a quella reale: ognqualvolta una proposizione reale viene dimostrata usando della matematica ideale, tale proposizione dev'essere dimostrabile anche con mezzi finitisti. Una teoria matematica classica può allora essere vista come una semplice ed elegante sistematizzazione attraverso cui una varietà di proposizioni reali vere, che precedentemente apparivano eterogenee e scollegate o erano addirittura ignote, sono comprese come conseguenze dei teoremi ideali. Non stupisce che in virtù di questo punto di vista (che sembra concepire la matematica classica come uno strumento) alcuni filosofi della matematica abbiano poi letto Hilbert come uno strumentalista.

## 15.6 Dopo Gödel

Come già accennato, un'ulteriore aspirazione del Programma di Hilbert, era la decidibilità. Avrebbe dovuto esistere, secondo lui, un algoritmo per stabilire la verità o la falsità di ogni enunciato matematico, per lo meno intendendo “verità” come validità nel sistema assiomatico in cui è formalizzata la teoria. Questo, ovviamente, sottintende che ogni enunciato sia o “vero” o “falso”. Nel 1930 Gödel dimostrò che ogni sistema formale consistente e abbastanza potente da formalizzare l'aritmetica di Peano non può essere completo. “Peggio” ancora, una conseguenza del secondo teorema di incompletezza è che una dimostrazione finitaria di consistenza per un sistema formale abbastanza forte da formalizzare l'aritmetica di base (la matematica finitaria di Hilbert)

è impossibile. I diretti interessati negli sviluppi del programma e soprattutto Hilbert non ebbero dubbi che si trattava di un colpo fatale per il progetto così com'era stato concepito. Egli ne fu deluso: il risultato cui aveva dedicato tanti sforzi dall'inizio del secolo non poteva essere raggiunto e la fiducia illimitata nelle possibilità del metodo assiomatico e del suo approccio formale che lo aveva portato a pronunciare il famoso motto “Noi dobbiamo sapere. Noi sapremo.” era stata mal riposta. In ogni caso, lo stesso Gödel e Bernays ritenevano che le difficoltà nella dimostrazione della consistenza di PA potessero essere superate impiegando metodi che, seppur non formalizzabili in PA, fossero comunque finitari e Hilbert stesso si rimise al lavoro pubblicando due articoli che andavano in questa direzione. Se tali metodi potessero essere considerati finitisti secondo l'originale concezione di Hilbert o costituissero un'estensione del punto di vista finitista iniziale fu motivo di dibattito. Tuttavia è sostanzialmente corretto dire che dal 1934 in avanti fu quasi universalmente accettato che i metodi di dimostrazione accettati come finitisti prima dei teoremi di Gödel sono tutti formalizzabili in PA. Estensioni dell'originale punto di vista finitista furono tentate da Gentzen (1936), Takeuti (1987) e da Gödel stesso (1958). Un'altra, più recente difesa del programma di Hilbert (comunque non inteso come in origine) è stata tentata da Detlefsen (1986).

# Bibliografia

- [1] Constance Reid. *Hilbert-Courant*. Springer-Verlag, 1986
- [2] Stephen Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North Holland Publishing Company, 1971
- [3] David Hilbert. *Über das Unendliche*. Mathematische Annalen, 95:161â90, 1926
- [4] Jean van Heijenoort. *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1897â1931*.
- [5] Paul Bernays. *Die Philosophie der Mathematik und die Hilbersche Beweistheorie*. Blatter für deutsche Philosophie 4, 1930-31, pp.326-67.
- [6] David Hilbert. *Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie*. Mathematische Annalen 104, 1931, pp.485-94. Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967.
- [7] David Hilbert. *Die logischen Grundlagen der Mathematik*. Mathematische Annalen, 88:151â165, 1923.
- [8] David Hilbert. *David Hilbert's Lectures on the Foundations of Geometry, 1891â1902*. Ulrich Majer and Michael Hallett, editors. Springer, New York, 2004.

# Capitolo 16

# Logicismo

di Simone Tonelli

## 16.1 La nascita della tesi logicista

Avevo bisogno della certezza nel modo in cui la gente ha bisogno della fede religiosa. Pensavo che la certezza si potesse più verosimilmente trovare nella matematica che altrove. Ma scoprì che molte dimostrazioni matematiche, che i miei insegnanti pretendevano che io accettassi, erano piene di fallacie, e che, se effettivamente la certezza si potesse trovare nella matematica lo sarebbe stata in nuovo genere di matematica, con fondamenta più solide di quelle che erano state ritenute sicure fino a quel momento. Ma mentre il lavoro procedeva, mi si rievocava di continuo la favola dell'elefante e della tartaruga. Avendo costruito un elefante su cui il mondo matematico potesse appoggiarsi, scoprì che l'elefante vacillava e procedetti a costruire una tartaruga per impedire all'elefante di cadere...

[Bertrand Russel, portraits from memory(1956)]

### 16.1.1 L'ambiente filosofico e scientifico del fine '800

Si deve osservare che Frege e Russell cominciarono la loro carriera accademica in un periodo esaltante per la storia della matematica. La geometria euclidea che per oltre due millenni era stata considerata come un sistema di verità necessarie, aveva perduto all'inizio del XIX secolo quello status del tutto peculiare. Euclide aveva derivato i teoremi del suo sistema da cinque assiomi:

ma adesso era stato mostrato che uno di tali assiomi, lungi dall'essere una verità necessaria, poteva essere negato senza che ne seguisse una contraddizione, e le geometrie non-euclidean venivano sviluppate sulla base di assiomi alternativi. Vi erano novità eccitanti anche nella teoria dei numeri. I numeri immaginari, come  $\sqrt{-1}$ , a cui nel XVII secolo si era guardato come ad una bizzarra curiosità, su rivelarono invece utili per la rappresentazione del movimento su di un piano e, insieme con altre classi di numeri più familiari, furono incorporati in una teoria generale dei numeri complessi. Il matematico dublinese Sir William Hamilton concepì un calcolo per i numeri quaternioni da utilizzare nella rappresentazione del moto su un piano. Ed infine a Halle in Germania, all'epoca in cui Frege era un giovane docente, Georg Cantor stava sviluppando la teoria dei numeri infiniti che avrebbe pubblicato nel 1883. Però tutta quella imponente costruzione poggiava a loro giudizio su fondamenta malferme. I matematici non comprendevano quello che stavano facendo, nemmeno a livello delle nozioni più basilari. Non soltanto cioè mancava una chiara comprensione circa la vera natura di numeri immaginari come  $\sqrt{-1}$ , o di numeri irrazionali come  $\sqrt{2}$  o  $\pi$ , o di numeri frazionari come  $\frac{2}{7}$ , o di numeri interi negativi come -1; il difetto di comprensione cominciava già con i numeri naturali, come 1,2 e 3.

Nacque quindi un intreccio fra matematica, logica e filosofia e successivamente, soprattutto in Germania, si diffuse una nuova concezione della matematica e della sua struttura logica che vedeva come fondamento di questa la capacità della mente umana di astrarre e di fare un uso appropriato dei simboli. Nacque così il problema della fondazione da un punto di vista più filosofico: come verificare che l'adeguatezza e la coerenza<sup>1</sup> dei procedimenti matematici garantisca la correttezza dei processi mentali? Il problema allora diventò di carattere più propriamente filosofico, ed è il cosiddetto *problema dei fondamenti*.

Prima che Frege se ne occupasse, vi erano due scuole di pensiero circa la natura della matematica. Secondo Immanuel Kant (1724-1804) la nostra conoscenza dell'aritmetica e della geometria si basava sull'intuizione. La sua *Critica alla ragion pura* sviluppava l'idea che le verità matematiche fossero, secondo la sua terminologia, al tempo stesso sintetiche ed *a priori*, ossia che fossero genuinamente informative e nondimeno note prima di ogni esperienza. John Stuart Mill (1806-73), d'altro canto, riteneva che le verità matematiche fossero conosciute *a posteriori*, cioè sulla base dell'esperienza. Nel suo *Sistema*

---

<sup>1</sup>I termini coerente e corretto sono qui usati in senso intuitivo

*di logica* abbracciava la tesi che esse fossero generalizzazioni empiriche con un vasto campo di applicazione ed un elevato grado di conferma.

La natura della verità matematica ha una rilevanza centrale in filosofia. Si tratta di una questione particolarmente cruciale per il dibattito che contrapponeva i filosofi empiristi, secondo i quali tutta la nostra conoscenza deriva dall'esperienza sensoriale, ed i filosofi razionalisti, i quali sostenevano che gli elementi universali e fondamentali della nostra conoscenza provenissero da qualche fonte sovrasensibile. Così Mill afferma che il suo *Sistema* si confrontava con i filosofi dell'intuizione su un terreno in cui essi erano stati giudicati precedentemente inattaccabili; e forniva una propria spiegazione, in termini di esperienza ed associazione, del carattere peculiare di quelle che venivano chiamate verità necessarie, quel carattere che veniva addotto come prova che la loro evidenza dovesse provenire da una fonte più profonda della semplice esperienza.

Sarà in questa atmosfera che verranno a formarsi correnti fondazionali quali il logicismo di Frege e Russell, il formalismo di Hilbert, e l'intuizionismo di Brower. Ma prima di addentrarci nel primo di questi pensieri analizziamo due aspetti importanti che saranno al centro della tesi logicista, ossia la nascita della logica moderna e l'aritmetizzazione dell'analisi.

### 16.1.2 La nascita della logica matematica

La nascita della logica, che potrebbe essere definita come la scienza che studia le forme e le leggi del pensiero, coincide con la nascita del pensiero filosofico. La storia della logica si può dividere in due fasi: la logica aristotelica e la logica moderna. La logica aristotelica, il cui primo teorizzatore fu appunto Aristotele, si fonda prevalentemente sul sillogismo, cioè un ragionamento consistente di tre parti, una premessa maggiore, una premessa minore e una conclusione, e sulla deduzione. Con logica matematica o formale si vuole indicare quella branca della logica moderna che rappresenta i modi del pensiero con combinazioni di stringhe di segni e, spogliate queste di ogni significato, riconduce lo studio del pensiero allo studio di tali stringhe e alle leggi che ne regolano le trasformazioni. Si usa l'aggettivo matematica o formale per distinguere da altri tipi di logica moderna come la logica filosofica o la logica modale (tuttavia vi è chi sostiene che si possa identificare la logica moderna con quella matematica). La differenza fondamentale tra logica aristotelica e logica matematica (a parte l'aspetto puramente estetico: parole nella prima, segni nella seconda) è che a differenza della seconda, la prima concepisce una

dimostrazione soprattutto come metodo di persuasione. Cioè in essa si da molto peso alla psicologia che, al contrario, è totalmente assente nella logica matematica.

Il precursore della logica matematica fu Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) che nel 1666 espresse, nel suo primo lavoro matematico, l'idea-utopia di creare un alfabeto universale di segni tale che tutti i possibili pensieri potevano essere espressi tramite stringhe di tali segni, così che lo stesso sillogismo avrebbe dovuto essere ridotto a una sorta di calcolo espresso in un simbolismo universale comprensibile in tutte le lingue. La verità e l'errore si sarebbero ridotti allora semplicemente a una questione di calcoli esatti o errati all'interno del sistema, e si sarebbe posto fine a tutte le controversie filosofiche. Nonostante quella di Leibniz fosse un'idea pionieristica di grande portata, essa fu accolta con scarsissimo entusiasmo dai suoi contemporanei e la logica matematica dovette rimandare la sua nascita di circa due secoli. L'anno che di solito si sceglie per datare la nascita della logica matematica è il 1847, anno di pubblicazione di *L'analisi matematica della logica* di George Boole (1815-1864).

Le idee più innovative contenute nelle opere di Boole sono:

1. la convinzione che la logica è collegata con la matematica più che con la metafisica;
2. la concezione della logica come scienza che studia le forme dei ragionamenti più che i loro contenuti, da cui la cosiddetta formalizzazione della logica;
3. la convinzione che la vera essenza della matematica risiede nella logica che vi sta sotto, non negli oggetti classici (numeri e figure) del suo studio.

Naturalmente lo sviluppo della logica formale fu, nei dettagli, un processo molto complicato che un resoconto schematico come quello che qui si sta facendo non può rendere a pieno. Ad esempio essa fu, nei primi tempi, indissolubilmente legata all'algebra astratta, e spesso è quasi impossibile scindere i progressi fatti nelle due discipline, proprio per il fatto che esse sono nate come un unicum e solo in seguito distinte.

### 16.1.3 Aritmetizzazione dell'analisi

La cosiddetta aritmetizzazione dell'analisi altro non è che la riduzione dello studio del continuo allo studio del discreto, ovvero dell'analisi all'aritmetica, e

i suoi principali artefici furono quattro matematici tedeschi: Karl Weierstrass (1835-1897), Edward Heine (1821-1881), Georg Cantor (1845-1945), Julius Wilhem Richard Dedekind (1831-1916). Prima di esporre brevemente un distillato delle idee fondamentali che si trovano nelle loro opere, va ricordato che altri uomini ricoprirono un ruolo di rilievo nell'aritmetizzazione (ma non c'è dubbio che quelli da noi sopra menzionati furono i più importanti).

Lo scopo di ridurre l'analisi all'aritmetica sarebbe stato raggiunto se si fosse riusciti nell'impresa di definire i numeri reali, cioè le grandezze continue, in funzione dei numeri naturali, cioè delle quantità discrete. In pratica era necessario riuscire a definire un numero irrazionale senza ricorrere al concetto di limite, visto che per definire quest'ultimo fino a quel momento era stata necessaria la nozione di irrazionale.

Cartesio aveva dato inizio alla trasformazione della geometria da scienza sintetica in analitica; Newton e Leibniz con l'introduzione degli infinitesimi l'avevano completamente ricondotta all'analisi; con l'aritmetizzazione l'analisi si riduceva allo studio dei numeri razionali, i quali a loro volta non sono altro che classi di equivalenza di coppie ordinate di naturali. Tutta la matematica classica, in circa due secoli, era stata ridotta ai numeri naturali. Ma cosa si sapeva allora dei numeri naturali? E dei razionali? Sono più i razionali o i naturali? E gli irrazionali? Che cos'è una quantità infinita?

Le grandi idee furono, in questo caso, di Cantor. Elenchiamo qui di seguito alcuni dei risultati che egli raggiunse:

1. definì la cardinalità di un insieme finito nel seguente modo:

- due insiemi hanno uguale cardinalità se gli elementi dell'uno possono essere messi in corrispondenza biunivoca con quelli dell'altro;
- il primo ha cardinalità maggiore del secondo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme proprio del secondo;

2. definì la potenza di un insieme infinito come segue:

- due insiemi infiniti sono equipotenti se i loro elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca;
- il primo ha una potenza maggiore del secondo se esiste un sottoinsieme proprio del primo che è equipotente al secondo, ma non esiste nessuna corrispondenza biunivoca tra gli elementi del primo e quelli del secondo;

3. dimostrò che  $\mathbb{N}$  contiene sottoinsiemi propri che hanno la sua stessa potenza;
4. dimostrò, tramite il celeberrimo processo diagonale, che  $\mathbb{N}$  e  $\mathbb{Q}$  sono equipotenti;
5. dimostrò che  $\mathbb{N}$  e l'insieme dei numeri algebrici sono equipotenti;
6. dimostrò che  $\mathbb{R}$  ha una potenza maggiore di  $\mathbb{N}$ . Chiamò numerabile ogni insieme equipotente a  $\mathbb{N}$  e continuo ogni insieme equipotente a  $\mathbb{R}$ ;
7. dimostrò che un qualsiasi segmento e una qualsiasi superficie sono insiemi continui, cioè che un segmento, una superficie ed contengono lo stesso numero di punti. Più in generale dimostrò che  $\mathbb{R}$  ed  $\mathbb{R}^n$  sono equipotenti (per qualsiasi  $n \geq 1$ );
8. Dimostrò che l'insieme delle parti  $P(A)$  di un insieme  $A$  (cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $A$ ) ha una potenza di 1 maggiore di quella di  $A$ . Così, ad esempio,  $P(\mathbb{N})$  è un insieme continuo.

A partire dal 1874 (anno in cui apparvero i suoi articoli più innovativi) Cantor formulò la teoria degli insiemi come disciplina matematica a sé. In essa si sviluppava la cosiddetta aritmetica transfinita che rivoluzionava letteralmente la nozione matematica di infinito, e che sarebbe stata destinata a cambiare la storia della matematica.

Egli assegnò ad ogni insieme infinito un cardinale, partendo da 1 per e assegnando via via numeri maggiori ad insiemi con una potenza maggiore. Dimostrò che esistono infiniti numeri transfiniti, ma è ancora aperta la questione se ve ne sia qualcuno maggiore di quello di  $\mathbb{N}$  e minore di quello di  $\mathbb{R}$ . La teoria degli insiemi di Cantor è un indubbio capolavoro e stupisce per la chiarezza con cui tratta quell'orribile infinito che aveva offuscato le migliori menti, per imbrigliarlo in secche ed eleganti definizioni.

Essa difettava però proprio nella definizione di partenza, cioè nella definizione di insieme, che era: *per insieme si intende un raggruppamento in un tutto di oggetti ben distinti della nostra intuizione o del nostro pensiero*.

Ma cos'è un raggruppamento? E un tutto? Un oggetto? Ebbene Cantor non ci dice niente di preciso sui primi due ma dice chiaramente che oggetto è una nozione intuitiva dell'uomo.

E' strano che proprio la teoria degli insiemi, che sarà una delle principali armi scagliate contro l'intuizione, era stata costruita dal suo fondatore intorno

a una definizione che ricorreva all'intuizione esplicitamente, riconoscendole quindi una esistenza fuori discussione.

Vedremo nel seguito che sarà proprio la natura intuitiva del concetto di insieme a cozzare, a causa dei paradossi che emergeranno, con le pretese di una matematica antiintuitiva, e a far fallire il programma formalista e in parte anche quello logicista di rifondazione della matematica.

## 16.2 Gottlob Frege

### 16.2.1 Vita, opere, e pensiero

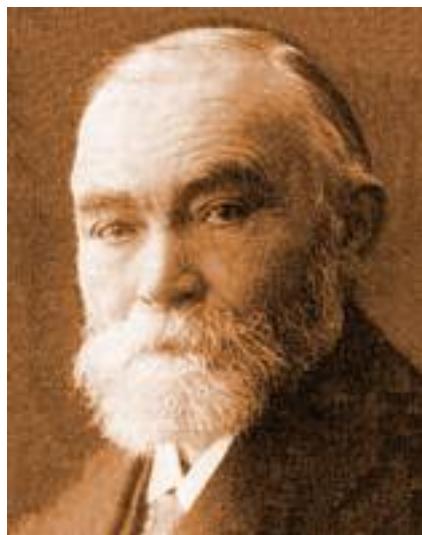


Figura 16.1: Gootlob Frege

Nacque da una famiglia luterana a Wismar, sulla costa baltica della Germania, nel 1848. Fu la madre, in seguito alla morte del padre, che provvide al sostentamento economico durante gli anni dell'istruzione e gli inizi della carriera accademica.

Frege si iscrisse all'Università di Jena per poi spostarsi a Gottingen, studiando filosofia fisica e matematica, ed infine tornare ad insegnare a Jena. Frege si accorse che il lussureggiante sviluppo nella matematica del tempo, soffrisse a monte di una debolezza di impostazione. I matematici, secondo

lui, non erano in grado di spiegare la natura degli oggetti primari della loro scienza, come ad esempio i numeri naturali, e dunque non erano in grado di spiegare le basi stesse della disciplina che insegnavano. Porre rimedio a tale mancanza, esplicitando in modo chiaro e rigoroso i fondamenti logici e filosofici della matematica, fu lo scopo cui consacrò l'esistenza. A questo obiettivo dedicò, tra i trenta ed i sessant'anni, una serie di pubblicazioni.

La Prima di esse fu un breve libro uscito nel 1879 con il titolo di *Begriffsschrift*, che in italiano è stato reso con *Ideografia*: ovvero scrittura (o grafia, *schrift*) dei concetti (o idee, *Begriff*). La scrittura delle idee alla quale si fa riferimento nel titolo è un nuovo simbolismo capace di rendere evidenti relazioni logiche che il linguaggio ordinario occulta. Il sistema di calcolo qui proposto costituiva una novità decisiva per la storia della logica.

L'ideografia di Frege contiene la prima formulazione del calcolo proposizionale; questo è presentato in una forma assiomatica, nella quale tutte le leggi della logica sono presentate da un certo numero di principi primitivi, mediante un metodo deduttivo esplicitamente specificato. Il simbolismo fregeiano, sebbene elegante, non è più in uso; ma le operazione che esso esprime continuano ad essere alla base della logica matematica.

Il maggior contributo di Frege alla logica fu l'elaborazione della sua teoria della quantificazione: un metodo per dare forma rigorosa a quelle inferenze la cui validità dipende da espressioni come tutti, qualche, nessuno. Utilizzando un nuovo sistema di notazione per la quantificazione, nell'*Ideografia* presentò un calcolo originale adatto a formalizzare tali inferenze (un calcolo funzionale o calcolo dei predicati come sarebbe stato chiamato in seguito). Questo gettò le basi per tutti gli sviluppi successivi in logica, e consentì di formalizzare la teoria della deduzione in modo più rigoroso e generale di quanto non facesse la tradizionale sillogistica aristotelica, giudicata fino al tempo di Kant l'alfa e l'omega della logica.

Nell'*Ideografia* Frege non era interessato alla logica in sé e per sé. Né il suo obiettivo era semplicemente di mostrare che la logica ammetteva un trattamento matematico; egli intendeva mostrare piuttosto che logica e matematica erano molto più intimamente correlato di quanto si fosse fino ad allora compreso.

Frege concordava con Kant contro Mill sul fatto che le conoscenze matematiche fossero *a priori*. Ma per lui le verità dell'aritmetica non erano affatto sintetiche; a suo giudizio esse non contenevano alcuna informazione che non fosse già implicita nella natura stessa del pensiero. A differenza della geome-

tria - che, in accordo con Kant, riteneva poggiasse su un'intuizione a priori l'aritmetica era analitica; essa, in definitiva, non era altro che una branca della logica.

L'obiettivo finale di Frege era mostrare che l'aritmetica poteva essere formalizzata senza ricorrere affatto a nozioni o assiomi esterni alla logica, e che dunque essa era fondata esclusivamente sulle leggi generali che governano ogni ambito della conoscenza, senza riferimento a fatti empirici. L'*Ideografia*, oltre alla formulazione del calcolo proposizionale e funzionale, conteneva un importante lavoro preparatorio per la riduzione della matematica alla logica; ma la presentazione completa della tesi di Frege avrebbe dovuto attendere fino alla pubblicazione del suo libro *I fondamenti dell'aritmetica* (*Die Grundlagen der Arithmetik*) nel 1884.

Grazie anche all'*Ideografia*, Frege diventò docente regolarmente retribuito. Il libro tuttavia non ricevette in generale una buona accoglienza dal mondo dei logici e matematici. La notazione di Frege era bidimensionale e tabulare e secondo i critici questa scelta era ingombrante e priva di utilità.

Forse a causa dell'accoglienza sfavorevole riservata al primo libro, scrisse *I fondamenti dell'aritmetica* in uno stile molto differente. Il ricorso alla notazione simbolica è in confronto modesto, e vi è uno sforzo costante di confrontarsi con le posizioni di altri autori.

Quasi metà del libro è dedicata a criticare le idee dei predecessori e contemporanei, inclusi Kant e Mill. Nel corso di queste critiche viene preparato il terreno per la posizione logicista. Nella parte restante del lavoro, quella più importante, Frege mostrava come rimpiazzare la generale nozione aritmetica di numero con nozioni logiche come quelle di concetto, del cadere di un oggetto sotto un concetto, di equivalenza tra concetti e di estensione di un concetto. Egli offriva definizioni, in termini puramente logici, dei numeri zero e uno, e della relazione che ogni numero ha con il suo predecessore nella serie numerica. A partire da questi elementi, insieme con le leggi generali della logica, proponeva di derivare l'intera teoria dei numeri.

*I fondamenti dell'aritmetica* sebbene sia un libro davvero innovativo, quando fu pubblicato ebbe un'accoglienza più fredda di quella dell'*Ideografia*. Apparvero solo tre recensioni, tutte ostili, e per quasi vent'anni il libro fu completamente ignorato. Frege fu deluso, ma questo non gli impedì di portare avanti il suo importante progetto.

Di fatto, con queste due opere egli non soltanto ha fondato la logica moderna, ma ha dato anche un rinnovato impulso alla filosofia della logica. Il passo

decisivo in questa direzione lo ha compiuto tracciando una netta distinzione tra la logica filosofica e due altre discipline con cui questa era stata spesso mescolata: da un lato la psicologia, frequentemente confusa con la logica dai filosofi di tradizione empirista, dall'altro lato l'epistemologia, con cui a volte quella è identificata nella tradizione filosofica che deriva da Descartes.

Per i nove anni successivi alla pubblicazione dei fondamenti Frege lavorò essenzialmente al suo lavoro di derivare l'aritmetica dalla logica. I suoi scritti di questo periodo, tuttavia, riguardano principalmente problemi di filosofia del linguaggio. Negli anni 1891-92 apparvero tre saggi: *Funzione e concetto*, *Senso e denotazione*, *Concetto e oggetto*. Ognuno di questi saggi presentava idee filosofiche di importanza fondamentale con stupefacente chiarezza e brevità. Senza dubbio Frege li concepiva come propedeutici al progetto logicista, ma oggi essi sono visti come dei classici che stanno a fondamento della moderna teoria semantica.

Il punto di arrivo di questo percorso filosofico avrebbe dovuto essere la pubblicazione dei volumi dei *Grundgesetze der Arithmetik* (*Le leggi fondamentali dell'aritmetica*), con cui si riprometteva di presentare in termini formali la costruzione logicista dell'aritmetica sulla base della pura logica. Questo lavoro intendeva portare a termine il compito che era stato delineato nei precedenti scritti sulla filosofia della matematica: ossia, enunciare un insieme di assiomi che fossero con tutta evidenza verità della logica, individuare un insieme di regole di inferenza la cui correttezza fosse non controversa, e quindi derivare una ad una le verità standard dell'aritmetica applicando queste regole a quegli assiomi, tramite una versione arricchita del simbolismo dell'*Ideografia*. Tuttavia nessun editore voleva pubblicare il manoscritto in un unico volume, condizionando però l'uscita del secondo al successo del primo. La pubblicazione del primo apparve sul finire del 1893, mentre la pubblicazione del secondo dovette attendere fino al 1903.

I *Grundgesetze* seguono in pratica la strada tracciata dai *Fondamenti dell'aritmetica*, ma in essi viene posta un'enfasi maggiore sulla nozione di classe, giudicata ora essenziale per la definizione della nozione di numero. I numeri cardinali sono definiti, di fatto, come classi di classi equivalenti, ossia classi con uno stesso numero di membri; ad esempio il numero due è la classe delle coppie, e il tre la classe delle terne. A dispetto dalle apparenze, tale definizione non è circolare perché siamo in grado di dire quando due cose hanno lo stesso numero di membri senza fare ricorso alla nozione di numero. Due classi sono tra loro equivalenti se vi è una corrispondenza biunivoca tra i loro membri.

Possiamo definire il numero zero in termini puramente logici come la classe di tutte le classi equivalenti alla classe degli oggetti che non sono identici a sé stessi. Possiamo definire il numero uno come al classe di tutte le classi equivalenti alla classe il cui unico membro è zero. Per passare dalla definizione di zero ed uno a quella degli altri numeri naturali, Frege fa uso della definizione di successore, e di altre relazioni definite sulla serie dei numeri che aveva introdotto nell'*Ideografia*. Il trattamento dei numeri negativi, frazionari, irrazionali e complessi fu rinviaio al secondo volume.

Il grandioso progetto di Frege abortì prima di essere portato a compimento. Il primo volume fu accolto in generale con lo stesso gelido silenzio che aveva salutato i suoi precedenti lavori e in conseguenza di ciò che la pubblicazione del secondo volume fu procrastinata per un decennio ed infine realizzata a spese dello stesso autore. Comunque, la pubblicazione del primo volume valse a Frege la nomina di professore ordinario a Jena, ed inoltre essa portò ad un fruttuoso dibattito con il logico italiano Giuseppe Peano, che in seguito alle critiche di Frege modificò la propria assiomatizzazione dell'aritmetica pubblicata poco prima. Attraverso Peano, venne a conoscenza del lavoro di Frege il primo dei suoi lettori inglesi, Bertrand Russell, allora giovane professore al Trinity College di Cambridge. Come vedremo mentre il secondo volume era in stampa, nel 1902 Frege ricevette una lettera da Russell in cui si evidenziava come il quinto degli assiomi iniziali dei *Grundgesetze* rendesse l'intero sistema incoerente.

Come è naturale, Frege fu terribilmente amareggiato da questa scoperta, anche se gli sembrò di poter salvare l'intero sistema indebolendo l'assioma incriminato. Il paradosso ed il suo tentativo di soluzione furono descritti in un'appendice al secondo volume, quando questo apparve nel 1903. Ma anche il nuovo sistema così riveduto si dimostrò incoerente. Quando nel 1918 lasciò l'attività accademica sembra che infine egli abbandonasse l'idea che l'aritmetica fosse derivabile dalla logica, e che tornasse all'idea kantiana che l'aritmetica, come la geometria, sia sintetica *a priori*.

Negli ultimi anni della sua vita Frege tentò di scrivere un trattato completo di logica filosofica. In realtà riuscì solo a portare a termine una serie di articoli (*Ricerche logiche*, 1919-23) in cui tornò sulla relazione tra logica e psicologia filosofica, e discusse la natura del pensiero e della deduzione.

Frege e sua moglie ebbero numerosi figli, tutti morti giovani; ed adottarono un figlio, Alfred, che divenne ingegnere. Quando Frege fece testamento, nel gennaio 1925, gli lasciò i suoi scritti inediti, con la seguente nota:

*Caro Alfred,*

*non disprezzare queste riflessioni che ho annotato. Anche se non è tutto oro, c'è dell'oro in esse. Io credo che vi siano cose qui che un giorno saranno tenute in una considerazione molto più alta di quanto non lo siano adesso. Abbi cura che nulla vada perduto.*

*Il tuo affezionato padre.*

*E' una considerevole parte di me quella che qui ti lascio in eredità.*

Sei mesi più tardi Frege moriva, senza immaginare che un giorno sarebbe stato considerato il fondatore del movimento filosofico più importante del XX secolo. La sua morte fu appena notata dalla comunità intellettuale.

### 16.2.2 Ideografia

#### L'inadeguatezza della logica tradizionale

Abbiamo appena visto che Frege, per poter attuare il suo programma logicista, aveva bisogno di una nuova visione sistematica della logica, delle definizioni e del calcolo. Sarà lui stesso a dare questa sistemazione nella sua opera *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* (*Ideografia - Un linguaggio in formule del pensiero puro ad imitazione di quello aritmetico*) del 1879.

Sin dagli inizi della sua riflessione sulla fondazione logicista della matematica, Frege si lamenta della limitatezza degli strumenti offerti dal linguaggio naturale.

Frege nota infatti che se ci si basasse solo sul linguaggio comune si giungerebbe a due difficoltà:

- la complessità delle formulazioni linguistiche in conseguenza dell'analisi minuta dei vari elementi di una dimostrazione (che ricordiamo doveva essere del tutto esplicitata);
- la possibilità di basarsi inavvertitamente su ipotesi intuitivamente accettabili ma non esplicite proprio per l'associazione suggerita dal linguaggio comune.

Notiamo come venga posta in evidenza da Frege la necessità di indagare sulla natura stessa dell'argomentazione deduttiva, di porre cioè al centro

dell'analisi il concetto stesso di dimostrazione: è questo concetto che va reso esplicito in ogni suo passo operativo; vanno isolati e esplicitati le regole e i principi sui quali la deduzione si fonda, in modo tale che ogni passaggio avvenga secondo quelle regole e ogni proposizione suscettibile di dimostrazione venga ricondotta ai quei principi o da essi derivata.

L'accenno al rifiuto fregeiano di utilizzare elementi intuitivi in ambito logico è importante, perché contribuisce a inquadrare la necessità di una nuova concettualizzazione delle categorie logiche.

L'atteggiamento di Frege si contrappone all'orientamento psicologista in voga nel XIX secolo. Secondo lo psicologismo la logica, essendo scienza del ragionamento, va intesa come una branca della psicologia. Secondo Frege, invece, quest'ultima va distinta nettamente dalla logica, poiché, mentre la logica è la scienza della verità e della generalità, la psicologia è studio delle rappresentazioni mentali, che in quanto tali sono solipsistiche e non possono quindi garantire generalità alle verità della logica. Ad esempio, la mia rappresentazione mentale della luna è chiaramente diversa dalla rappresentazione che della luna ha il mio vicino di casa, per il fatto che le nostre rispettive rappresentazioni mentali sono private. Ora, una analisi in termini psicologici delle verità della logica porterebbe a dover rigettare come quanto meno contingenti verità che ci appaiono necessarie. Si consideri, a titolo di esempio, l'enunciato  $\text{Luna} = \text{Luna}$ . Questa è una istanza della legge di identità  $a=a$  e, dunque, è necessariamente vera. Tuttavia, sulla scorta dell'analisi psicologista, possiamo affermare che  $\text{Luna} = \text{Luna}$  è vero solo se le due occorrenze del termine Luna si riferiscono alla medesima rappresentazione mentale.

E' quindi ovvio che, considerando la mia rappresentazione mentale della Luna e quella del mio vicino di casa, l'enunciato  $\text{Luna}=\text{Luna}$  risulti falso, in quanto, poiché ogni rappresentazione appartiene al suo portatore, la mia rappresentazione della Luna è necessariamente diversa dalla rappresentazione che della Luna ha il mio vicino di casa.

E' chiaro, dunque, che, se intende fondare la matematica su basi solide, Frege deve evitare le oscurità del linguaggio naturale e i tranelli dello psicologismo.

Dall'inadeguatezza del linguaggio naturale nella corretta analisi delle relazioni logiche che intervengono nelle dimostrazioni matematiche e dalla possibilità che il nostro ragionamento sia inficiato dall'introduzione surrettizia di

elementi psicologici, nasce così l'esigenza di costruire un linguaggio formale, privo di ambiguità, e generalissimo, atto cioè a incamerare e tradurre, rendendolo rigoroso, qualsiasi frammento linguistico. Questo è lo scopo della Ideografia, un libello di un'ottantina di pagine che, benché accolto nell'indifferenza pressoché generale della comunità scientifica dell'epoca o addirittura nello sfavore di alcuni suoi rappresentanti, sancisce l'atto di nascita della logica contemporanea. In essa, Frege presenta il primo sistema formale della logica dei predicati della storia della logica. La logica proposizionale e la logica dei predicati ottengono nell'Ideografia la prima sistematizzazione rigorosa; in essa viene introdotta la teoria della quantificazione così come la conosciamo oggi, benché in una notazione diversa; in essa la tradizionale dicotomia aristotelica soggetto-predicato, ancora standard fra i logici di fine Ottocento, viene capovolta e ripensata. E' un dato di fatto che le innovazioni introdotte dall'Ideografia siano epocali.

### **La dicotomia funzione–argomento e l'introduzione dei quantificatori**

L' Ideografia fregeiana rappresenta un punto di svolta fondamentale nella storia della logica. In essa, infatti, Frege scardina il paradigma logico aristotelico in voga fino alla fine del XIX secolo.

La logica aristotelica ruota attorno all'analisi dei sillogismi, cioè delle deduzioni di conclusioni da premesse. Un esempio classico di sillogismo è il seguente:

**Premessa maggiore** Tutti gli uomini sono mortali;

**Premessa minore** Socrate è un uomo;

**Conclusione** Socrate è mortale.

Secondo Aristotele, gli enunciati che compaiono nei sillogismi devono avere tutti la medesima struttura: devono contenere un soggetto, rappresentato da un termine particolare, ad esempio Socrate, o universale, ad esempio umano, e un predicato, che non può essere un universale. Nella Premessa minore, ad esempio, il soggetto è il termine individuale Socrate, mentre il predicato è un uomo.

Questa analisi, tuttavia, soffre di alcuni difetti.

Innanzitutto, riducendo la forma logica alla forma grammaticale, l'analisi aristotelica induce un appiattimento di quelle che oggi chiameremmo le relazioni logiche sulle relazioni grammaticali fra enunciati. Si considerino i due seguenti enunciati:

- (A) Piero ama Maria;
- (B) Maria è amata da Piero.

L'analisi aristotelica analizza gli enunciati (A) e (B) come segue: in (A), il soggetto è Piero, mentre il predicato è ama Maria; nel caso di (B), invece, il soggetto è Maria, mentre il predicato è è amata da Piero. In forza del fatto che (A) e (B) hanno, secondo la logica tradizionale, una struttura diversa, essi sono enunciati diversi. Questo è, in un certo senso, evidente. Tuttavia, conseguenza di questo approccio è che (A) e (B) abbiano conseguenze logiche distinte, mentre tutto ciò che segue da (A) segue da (B) e viceversa. In particolare, (A) segue da (B) e viceversa.

La distinzione soggetto-predicato, inoltre, non utilizza predicati relazionali.

Ad esempio, l'enunciato:

- (C) 4 è maggiore di 3

in termini aristotelici viene tradotto con a è F, dove a sta per il soggetto 4 e F sta per il predicato è maggiore di 3.

Un ulteriore difetto dell'analisi aristotelica sta nel fatto che essa non è in grado di rendere conto della funzione logica dei quantificatori, cioè delle espressioni quali tutti, qualche o nessuno, a meno che non si trovino in posizione di soggetto.

Consideriamo l'enunciato:

- (D) Tutte le ragazze amano qualche marinaio.

L'analisi aristotelica ci costringe a trattare il predicato 'amano qualche marinaio' come una unità. In termini aristotelici, (D) viene quindi tradotto 'tutte le A sono F', che non sembra essere quello che dice (D).

Tutti questi difetti, secondo Frege, sono imputabili al fatto che la logica tradizionale si fonda sulla dicotomia soggetto-predicato. Il caso degli enunciati (A) e (B) è particolarmente eloquente. Essi, infatti, sembrano esprimere il medesimo stato di cose, palesato dal sentimento di amore che lega Piero a Maria, eppure la logica tradizionale trascura questa identità di contenuto. Allo scopo, quindi, di rendere conto correttamente del contenuto e della struttura logica degli enunciati, Frege propone di sostituire alla dicotomia soggetto-predicato la dicotomia funzione–argomento, che egli recupera dalla matematica e amplia. Egli sostituisce al sillogismo una funzione proposizionale dove al soggetto corrisponde un argomento, posto tra parentesi, e al predicato una funzione posta fuori dalle parentesi.

Consideriamo l'enunciato:

**(1)**  $2+3=5$

e consideriamo innanzitutto l'espressione  $2+3$ . Essa può essere scomposta nella funzione a due argomenti '( ) + ( )', dove le parentesi tonde segnano posti vuoti che vengono occupati rispettivamente dall'argomento 2 e dall'argomento 3. La funzione + applicata a due argomenti arbitrari, dunque, avrà come valore un numero naturale, nel nostro esempio 5.

Consideriamo ora l'intero enunciato (1). Esso va letto come l'applicazione di una funzione a tre argomenti, che assume come valore un valore di verità, cioè il Vero o il Falso.

(1) viene quindi scomposto nella funzione  $( ) + ( ) = ( )$ , in cui i posti vuoti siano occupati da termini appropriati. Tale funzione, una volta che i suoi posti vuoti siano occupati da argomenti, Frege direbbe una volta saturata, assume come valore un valore di verità, ossia il Vero oppure il Falso. Così, se saturiamo la funzione  $( ) + ( ) = ( )$  con i termini 2, 3 e 5, il valore di questo enunciato sarà il Vero; se, invece, la saturiamo con i termini 2, 3, e 4, il valore che la funzione assume per questi argomenti sarà il Falso.

Ora, si applichi il medesimo procedimento all'enunciato:

**(2)** Piero è bello.

Secondo Frege, (2) va scomposto nella funzione '( ) è bello', applicata all'argomento Piero. Anche nel caso di (2), il valore associato all'argomento Piero

dalla funzione ( ) è bello è un valore di verità. Le funzioni che associano a degli argomenti un valore di verità sono dette da Frege concetti.

Consideriamo nuovamente l'enunciato:

(A) Piero ama Maria.

Secondo la proposta fregeiana, (A) può essere analizzato in tre modi diversi:

(A') ( ) ama Maria;

(A'') Piero ama ( );

(A''') ( ) ama ( ).

Nella scomposizione (A''') abbiamo ottenuto il predicato ( ) ama ( ) elidendo entrambi gli argomenti Piero e Maria, ottenendo così un predicato a due posti, ossia un predicato relazionale. Grazie all'uso della nozione di relazione, Frege riesce così a ovviare anche al secondo problema della logica aristotelica, quello cioè di non riuscire a rendere conto degli enunciati relazionali.

L'ulteriore innovazione fregeiana che intendo esporre sta nell'introduzione dei quantificatori che permettono di specificare se le variabili che vengono utilizzate vanno riferite a tutti gli elementi di una classe( $\forall$ ) o solo ad alcuni( $\exists$ ).

L'introduzione dei quantificatori è la concezione dei termini come tutti e qualche come espressioni funzionali di ordine superiore. Una espressione che in logica aristotelica costituisce un singolo enunciato (tutti gli uomini sono mortali) diventa in Frege una connessione di due funzioni proposizionali:  $\forall(x)(uomo(x) \rightarrow mortale(x))$  [la formula si legge "per ogni  $x$ , se  $x$  è un uomo allora  $x$  è mortale"]. La soluzione è analoga a quella degli stoici (che proponevano se qualcosa è un uomo, allora è mortale), con l'aggiunta dell'idea di "variabile" presa dalla matematica: il quantificatore universale  $\forall$  vincola la variabile  $x$  per cui tutto ciò che segue al quantificatore dipende dal raggio di azione di quest'ultimo. L'altro quantificatore  $\exists$ , col significato di esiste almeno un si può definire nei termini di quello universale e del connettivo di negazione: esiste almeno un  $x$  tale che... equivale a non tutti gli  $x$  non hanno....

L'uso dei quantificatori ha permesso di evitare una serie di errori logici, resi possibili precedentemente dalla confusione che il linguaggio naturale genera, nascondendo la vera struttura del pensiero.

Per esempio senza ricorso ai quantificatori, la proposizione ogni ragazzo ama una qualche ragazza' può significare due cose molto diverse:

1. che tutti i ragazzi del mondo amano la stessa ragazza
2. che ogni ragazzo ama una qualche ragazza(diversa per ogni diverso ragazzo)

## Il linguaggio

L'intento di Frege non era quello di rappresentare una logica astratta in formule, ma di esprimere un contenuto attraverso segni scritti in modo più preciso e chiaro di quanto non fosse possibile con il linguaggio comune. L'effetto che vuole raggiungere è quello di creare una *lingua characteria* destinata alla matematica e non un semplice *calculus* limitato alla sola logica, come aveva fatto Boole.

Oltre al problema di trovare un linguaggio adatto si pone il problema (collegato al precedente) di trovare le regole di deduzione giuste per poter affrontare le varie dimostrazioni.

L'idea geniale di Frege a questo riguardo è, diversamente da quello che aveva fatto Boole, la costruzione delle proposizioni mediante l'uso degli stessi simboli usati per il calcolo. Pone quindi la logica delle proposizioni sullo stesso piano di quella dei termini attraverso la distinzione tra proposizione e funzione proposizionale<sup>2</sup>. Secondo Frege la struttura grafica delle proposizioni e del calcolo deve riflettere la forma logica di questi.

La soluzione di Frege consiste, in termini moderni, nella costruzione di un linguaggio al primo ordine con identità per la struttura assiomatica del calcolo.

Per quanto riguarda il calcolo Frege si basa su nove assiomi e la regola del *modus ponens*. Gli assiomi sono i seguenti:

- $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
- $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- $\vdash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

---

<sup>2</sup>Una funzione proposizionale è una proposizione nella quale occorrono variabili libere. Ad esempio "Socrate è un uomo" è una proposizione, mentre " $x$  è un uomo" è una funzione proposizionale.

- $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
- $\vdash \neg\neg p \rightarrow p$
- $\vdash p \rightarrow \neg\neg p$
- $\vdash x = y \rightarrow (P(x) \rightarrow P(y))$
- $\vdash x = x$
- $\vdash \forall x P(x) \rightarrow P(y)$

Ed il *modus ponens* così rappresentato

$$\vdash \mathcal{A}, \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} / \vdash \mathcal{B}$$

Da notare il fatto che gli assiomi sono stati scritti sopra con la notazione moderna, Frege invece ne usava una diversa e più pesante, eccone un assaggio 16.2:

La seguente tabella invece mostra le notazioni fregeiana e moderna per i diversi connettivi:

### 16.2.3 I saggi sulla filosofia del linguaggio

In questa sezione analizzeremo brevemente i saggi di Frege sulla filosofia del linguaggio, chiariremo concetti filosofici che Frege utilizza costantemente e che rivedremo nella sua costruzione del numero naturale.

#### Fuznione e concetto

- Funzione: secondo l'analisi matematica superiore, per funzione di  $x$  si intende una espressione di calcolo contenente  $x$  (argomento), una formula contenente  $x$ . Questa definizione è insufficiente, in quanto non distingue la forma e il contenuto. Bisogna anzitutto dire che l'argomento non è parte della funzione, essa in partenza è insatura, in ciò essa differisce dai numeri. Quando alla funzione si attribuisce un argomento, essa assume un valore. Due funzioni, hanno lo stesso decorso di valori, se con gli stessi argomenti assumono gli stessi valori. Per Frege l'aritmetica non è che una logica ulteriormente sviluppata.
- Concetto: è una funzione il cui valore, con un argomento  $x$ , è sempre un valore di verità, cioè o vero o falso.

(55) ::	$\frac{d \mid x}{c \mid z} \quad \frac{(x \equiv z)}{\frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s)}$	(104).
§ 30.	$\frac{99}{\frac{(z \equiv x)}{\frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s)}} \quad \frac{\left[ \frac{(z \equiv x)}{\frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s)} \right] \equiv \frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s)}{\boxed{\left[ \frac{(z \equiv x)}{\frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s)} \right] \equiv \frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s)}}$	
(52) :	$\frac{\begin{array}{c} f(\Gamma) \\ c \mid \Gamma \\ (z \equiv x) \\ \frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s) \end{array}}{d \mid \frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s)}$	$\frac{\frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s)}{(z \equiv x) \quad \frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s)}$
(37) :	$\frac{\begin{array}{c} a \mid \frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s) \\ b \mid (z \equiv x) \\ c \mid \frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s) \end{array}}{a \mid \frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s) \quad \frac{\gamma}{\beta} f(x, z_s)}$	(105).
		Whatever follows $x$ in the $f$ -sequence belongs to the $f$ -sequence beginning with $x$ .
106	$\frac{x \mid z}{z \mid v}$	$\frac{\frac{\gamma}{\beta} f(z, v_s)}{\frac{\gamma}{\beta} f(z, v_s)}$
(7) :	$\frac{\begin{array}{c} a \mid \frac{\gamma}{\beta} f(z, v_s) \\ b \mid \frac{\gamma}{\beta} f(z, v_s) \\ c \mid f(y, v) \\ d \mid \frac{\gamma}{\beta} f(z, y_s) \end{array}}{a \mid \frac{\gamma}{\beta} f(z, v_s) \quad \frac{\gamma}{\beta} f(z, v_s)}$	$\frac{\frac{\gamma}{\beta} f(z, v_s)}{\begin{array}{c} f(y, v) \\ \frac{\gamma}{\beta} f(z, y_s) \\ \frac{\gamma}{\beta} f(z, v_s) \\ f(y, v) \\ \frac{\gamma}{\beta} f(z, y_s) \end{array}}$
(102) ::		(107).

Figura 16.2: Il simbolismo fregeiano

Basic concept	Frege's notation	Modern notations
Judging	$\vdash A, \ V \vdash A$	$p(A) = 1$ $p(A) = i$
Negation	$\neg \neg A$	$\neg A ; \sim A$
Conditional (implication)	$\frac{}{A}{B}$	$B \rightarrow A$ $B \supset A$
Universal quantification	$\forall u \Phi(u)$	$\forall y : \Phi(y)$
Existential quantification	$\exists u \Phi(u)$	$\exists y : \Phi(y)$
Content identity (equal sign)	$A \equiv B$	$A = B$

Figura 16.3: L'equivalente significato moderno

- Estensione del concetto: è il decorso dei valori di una funzione il cui valore per qualsiasi argomento è un valore di verità. Le uguaglianze matematiche sono come gli enunciati assertori. Ad esempio Cesare conquistò la Gallia. Cesare è una parte finita in sé stessa (argomento della funzione) e ( ) conquistò la Gallia è una espressione insatura, ha bisogno di essere completata da un argomento. L'argomento non è pertanto un semplice numero, ma qualsiasi oggetto, comprese le persone, può essere tale.
- Oggetto: tutto ciò che non è funzione, la cui espressione non è insatura, non reca con sé posti vuoti. Le funzioni si differenziano quindi dagli oggetti, si differenziano inoltre tra funzioni che hanno come argomento altre funzioni e funzioni che hanno come argomento oggetti. Si definiscono di primo livello se l'argomento è un oggetto. Di secondo livello se l'argomento è una funzione.
- Relazione: funzione che con 2 argomenti assume un valore di verità.

### Senso e denotazione

Il problema dell'uguaglianza porta a riflettere sul concetto di segno. Infatti se  $a = a$  è vero a priori,  $a = b$  va verificato. A solo una relazione fra i segni, o anche fra i designati? Ogni segno è legato a qualcosa di designato, la cosiddetta

Denotazione (*Bedeutung*), ma anche al modo con cui esso è espresso, il Senso (*Sinn*).

- Segno o Nome: una espressione in grado di fare le veci di un nome proprio, il cui significato sia un oggetto determinato, ma non un concetto o una relazione. Il nome proprio è una espressione che designa un oggetto particolare.
- Rapporto Segno-Senso Denotazione: un segno ha un senso determinato, e questo, a sua volta, un significato determinato. Un significato, non ha invece un unico senso, ma più sensi. Non sempre una frase, per quanto possa avere un senso, ha un significato determinato.
- Rappresentazione (*Bild*): immagine prodotta dal soggetto su un senso e significato. Essa è soggettiva.

Quindi, Rappresentazione(soggetto) - Senso (universale per entrambi) - Denotazione (oggetto). Parole, enunciati ed espressioni si possono distinguere per rappresentazione, senso o significato o per tutti e due contemporaneamente. Nell'enunciato il pensiero è il senso; il valore di verità è il significato. Nel giudizio si vede se l'enunciato è Vero o Falso. C'è il passaggio dal senso al significato. Il giudizio quindi è il progredire dal pensiero al suo valore di verità. Frege stesso esemplifica il concetto con la metafora della luna osservata attraverso un cannocchiale: la luna è il significato, l'immagine sulla retina è la rappresentazione (soggettiva e diversa per ciascuno), mentre l'immagine sulla lente del cannocchiale è il senso (oggettivo, ma variabile a seconda del punto di osservazione).

Laddove altri filosofi avevano parlato in modo ambiguo di significato di un'espressione, Frege attirò l'attenzione sulla differenza tra la *denotazione* di un'espressione (l'oggetto a cui questa si riferisce, ad esempio il pianeta venere in quanto denotazione di La stella del mattino) ed il *senso* di un'espressione (La stella del mattino ha un senso differente da La stella della sera pur riferendosi anch'essa, come hanno scoperto gli astronomi, a Venere). La più sorprendente controversa applicazione della distinzione di Frege tra senso e denotazione era la sua teoria secondo cui non solo le singole parole hanno denotazione, ma anche gli enunciati interi. La denotazione di un enunciato era il suo valore di verità (ossia, il vero, o il falso).

## **Concetto ed oggetto**

Concetto: in senso logico, termine che può fungere da predicato. Nome d'oggetto: nome proprio che non può fungere da predicato grammaticale. Un oggetto cade sotto un concetto e il predicato grammaticale ha per significato un oggetto. Il cadere di un oggetto sotto un concetto non è invertibile, pertanto questo rapporto non è una uguaglianza. Ogni concetto può cadere sotto un altro concetto di ordine superiore. Solitamente negli asserti si trova l'articolo determinativo per indicare oggetti e l'indeterminativo per indicare concetti. Nell'accezione linguistica l'oggetto e il concetto sono il soggetto e il predicato. Il concetto è sempre predicativo anche quando si fa una affermazione attorno ad esso, può essere sostituito da un altro concetto, ma mai da un oggetto. Ciò che si afferma di un concetto non può mai attribuirsi ad un oggetto.

### **16.2.4 Critiche ai contemporanei**

Nell'ambito della fondazione della matematica e più precisamente del concetto di numero vennero a formarsi scontri tra scuole matematiche e scuole filosofiche. Quelli che Frege critica più duramente sono:

1. l'empirismo matematico e lo psicologismo logico di J.S.Mill e Benno Erdmann;
2. l' "intuizionismo" matematico di stampo kantiano;
3. il formalismo ingenuo di Thomae e Hankel;
4. il formalismo più maturo di Hilbert.

vediamo velocemente le posizioni di questi e le critiche che Frege muove loro.

1. Queste prime correnti tendevano a confondere le proposizioni aritmetiche con le applicazioni che potevano avere (spesso di carattere fisico e riguardanti fenomeni osservati).

Frege dice che da questa scuola ne può risultare al più

*un'aritmetica dei granelli di pepe o dei sassolini*

dice poi nuovamente Frege che

*quanto più la matematica deve astenersi da qualsiasi ricorso a questioni psicologiche, tanto meno può negare, invece, i suoi rapporti con la logica. Io mi trovo d'accordo con coloro i quali ritengono impossibile tracciare una precisa linea divisoria tra le due.*

2. Per quanto riguarda il kantismo Frege critica l'idea del numero come qualcosa di intuitivo ed il fatto che le formule aritmetiche siano di conseguenza indimostrabili ed intuitivamente chiare. Frege sostiene che questa visione sia data dal fatto di considerare solo numeri "piccoli".
3. Per tutta la durata delle sue ricerche Frege si è caparbiamente opposto al formalismo, prima quello ingenuo di Thomae ed Hankel che vedeva nel segno, in quanto tale l'oggetto ultimo della ricerca matematica, e successivamente quello di Hilbert.

Per quanto riguarda il primo, Frege vi oppone la propria visione *contenutistica*, ovvero il segno non è altro che lo strumento per denotare l'oggetto. In questa visione l'aritmetica non diverrà altro che un mezzo per giungere alla matematica.

Della visione formalistica Frege dice

*La concezione formalistica è in grado di sostenersi, di enunciare leggi aritmetiche solo ricorrendo inconsapevolmente ma inequivocabilmente, a quel contenuto del segno del quale dichiarano di poter fare a meno.*

4. Per quanto riguarda il formalismo di Hilbert, Frege critica in questo il fatto che la contraddittorietà di un concetto non garantisce l'esistenza di oggetti che cadono sotto quel concetto ma anzi, che per dimostrare la non contraddittorietà bisognerebbe esibire oggetti di quel concetto.<sup>3</sup>

Frege critica quindi a Hilbert la non osservanza della distinzione tra concetto ed oggetto che sarà in futuro uno dei punti chiave della teoria fregeiana.

---

<sup>3</sup>Frege e Russell criticarono a questo proposito i lavori di Cantor, Weierstrass e Dedekind sulla definizione di numero irrazionale in quanto non ne danno una dimostrazione dell'esistenza degli stessi.

Critica poi anche Cantor, nonostante l'approvazione della stessa estensione cantoriana del concetto di numero, il residuo psicologistico nella concezione dell'astrazione e la mancanza di rigore logico nelle definizioni e a Dedekind l'ammissibilità del preteso 'potere creativo' delle definizioni.

### 16.2.5 La definizione di numero naturale

#### Numero come oggetto

Una volta confutate le teorie concorrenti, Frege procede, nella seconda parte dei Fondamenti, la pars construens, ad un' analisi positiva della natura dei numeri e a una loro definizione rigorosa.

Frege considera i numeri come oggetti e non, come alcuni autori prima di lui, come proprietà di oggetti. La tesi di Frege è che un'asserzione numerica (dire quanto cose vi sono di un certo tipo) contiene un'asserzione su un concetto.

Un'attribuzione numerica come "gli apostoli sono 12" riguarda il concetto di "apostoli" e dice che il numero 12 cade sotto il concetto di "apostoli". Il numero non può essere una proprietà di oggetti, perché non vi è alcun apostolo che ha come proprietà il 12. Il numero 12, in questo caso, è quell'oggetto che è l'estensione del concetto "apostoli", ma anche del concetto "mesi dell'anno solare" e "segni dello zodiaco", ecc.

Russell dirà più semplicemente che i numeri sono classi di classi, in questo caso il 12 è la classe di tutte le dozzine, come 2 è la classe di tutte le coppie. Ma per Frege la questione era più complessa, perché una stessa classe può essere vista come diversi concetti: ad esempio una classe di soldati può essere vista come 1 esercito, 5 divisioni, 25 reggimenti, 100 compagnie, 400 plotoni o 4000 persone.

Frege usò così il concetto di corrispondenza biunivoca (definito nella Ideografia) come la possibilità di far corrispondere uno a uno gli oggetti che cadono sotto un concetto agli oggetti che cadono sotto un altro concetto. In tal modo definiva la "equinumerosità" di due concetti (quelli i cui oggetti sono in corrispondenza biunivoca) e poteva infine definire il numero spettante a un concetto F come l'estensione del concetto "equinumeroso a F". Con passaggi rigorosi Frege passò poi a definire la classe dei numeri naturali, lo zero e il concetto di successore di un numero.

In realtà la definizione di numero naturale per Frege, è molto simile a quella data da Cantor dalla quale differisce quasi esclusivamente per l'aspetto della correttezza logica.

Mentre Cantor giungeva alla definizione di numero cardinale tramite un'astrazione di tipo psicologista, per poi far intervenire una relazione di equivalenza tra classi - questo per inciso dava una soluzione problematica in quanto non consentiva di capire quali tipo di oggetti fossero stati definiti con tale astrazione - Frege compie invece il cammino inverso, individuando prima la relazione di equinumerosità (equivalente a quella di equivalenza tra classi di Cantor) e poi tramite un processo di astrazione ben definito dà la definizione cercata.

### Definizione per astrazione

Accanto alla definizione per postulati dei numeri finiti - che vedremo in seguito -, Peano ne propone una più generale, che si può applicare a tutti i numeri cardinali, sia finiti sia transfiniti: egli la chiama definizione per *astrazione*. L'idea della definizione per astrazione è molto vicina al modo in cui apprendiamo l'uso dei termini astratti. Noi diciamo la massa di  $a$  è uguale alla massa di  $b$ , che il colore di  $a$  è uguale al colore di  $b$ , la lunghezza di  $a$  è uguale alla lunghezza di  $b$ . Non occorre sapere cosa sia la massa di  $a$  o di  $b$  ma basta saper riconoscere se esse sono uguali oppure no: ad esempio tramite una bilancia a due piatti; e si noti che grazie a questo non si cade in un circolo vizioso dato che non ci interessa la definizione di massa. A livello matematico si trattano di relazioni d'equivalenza, ovvero relazioni riflessive, simmetriche e transitиве.

Questo è ciò che accade nella teoria dei numeri cardinali di Cantor. In questa teoria l'espressione avere lo stesso cardinale è perfettamente definita; possiamo dunque stabilire se due classi hanno lo stesso numero cardinale; tuttavia non è definito il significato di numero cardinale di (): in altri termini la teoria di Cantor non ci dice che cosa sia il numero cardinale di una classe.

Ogni relazione d'equivalenza ha un'importante proprietà: sia  $A$  una classe di elementi  $x, y, z, \dots$  ed una relazione  $R$  di equivalenza. Consideriamo ora, per ogni elemento  $x$  di  $A$ , la classe  $\alpha(x)$  di tutti gli elementi di  $A$  che stanno in relazione con  $x$  (la classe di equivalenza).

$$\alpha(x) = \{y \in A : yRx\}$$

Si dimostra che  $R$  determina una partizione degli elementi di  $A$  in classi esaustive e disgiunte, ogni elemento cioè, appartiene ad una ed una sola classe.

Ogni classe così individuata, è quindi rappresentata da uno qualsiasi dei suoi elementi.

La definizione per astrazione proposta da Peano consiste nel definire un *nuovo oggetto*,  $\phi a$  come *ciò che hanno in comune* tutti gli oggetti che appartengono alla stessa classe d'equivalenza di  $a$ . Per esempio il numero cardinale di  $\alpha$ , viene definito come la proprietà comune a tutte le classi che hanno lo stesso numero cardinale di  $\alpha$  - dove aver lo stesso numero cardinale di è, come abbiamo visto, ben definita. Così il numero zero può essere definito come il numero cardinale della classe vuota, il numero uno come il numero di ogni classe che ha un solo elemento, e così via. I numeri infiniti possono essere definiti come i numeri di quelle classi il cui numero resta invariato quando si sia loro tolto un elemento. Infine i numeri naturali si possono definire come quei numeri che non sono infiniti. Le operazioni aritmetiche possono poi essere definite alla maniera di Cantor, come operazioni tra insiemi.

Pur riconoscendo che l'aritmetica potrebbe cominciare da qui, invece che dai suoi assiomi, Peano non sviluppa questa seconda possibilità. Fu invece proprio essa ad attrarre Russell, almeno per due ragioni:

1. consentiva un trattamento unificato per l'aritmetica dei numeri finiti e transfiniti
2. permetteva una ulteriore riduzione dei termini primitivi usati negli assiomi di Peano a termini che Russell riteneva essere puramente logici, realizzando così una analisi filosofica più profonda.

Il problema di fondo è che quando si parla di proprietà comune a due oggetti, sostanzialmente si sta parlando di un predicato comune a questi, e quindi utilizzando la logica soggetto-predicato tanto rifiutata dai logicisti. Dunque Russell riesce a rendere questa proprietà comune definendola in termini di relazioni.

A questo punto, secondo Russell vi sono due possibilità: la prima è quella di affermare che l'entità giusta, cioè il numero di una classe, è qualcosa che noi affermiamo attraverso un processo psicologico di *intuizione*; la seconda, è quella di *costruire* questa entità in modo che la sua esistenza ed unicità risultino dimostrate. Russell sceglie la seconda via, *identificando il numero di una classe con la classe do tutte le classi cardinalmente simili alla classe data*.

Se si accetta questa definizione, la relazione che associa ad una classe il suo numero cardinale esiste ed è unica: essa non è nient'altro che la relazione di appartenenza di una classe alla classe di tutte le classi ad essa cardinalmente simili.

Russell ammette che, di primo acchito, la concezione di numero come classe di classi appare paradossale:

[...] quando giungiamo all'autentica definizione dei numeri non possiamo evitare ciò che, a prima vista, non può non apparire come un paradosso, anche se questa impressione sarà presto dissipata. Noi pensiamo spontaneamente che la classe delle coppie (per esempio) sia qualcosa di differente dal numero 2. Ma non vi è dubbio riguardo alla classe delle coppie: è indubitabile e non è difficile da definire, mentre il numero 2, in qualsiasi altro senso, è una entità metafisica circa la quale non possiamo mai sentirci sicuri che esista e che l'abbiamo identificata. E' pertanto più prudente accontentarci della classe delle coppie, di cui siamo sicuri, che andare a caccia di un problematico numero 2, che è destinato a rimanere inafferrabile.

Il principio applicato da Russell nella definizione dei numeri cardinale è di grande importanza in tutta la sua filosofia: si tratta di quello che Russell chiama *principio di astrazione*. Esso consiste - nella sua generalità - nell'identificare una classe di equivalenza rispetto ad una certa relazione d'equivalenza, che non sia vuota, con quella entità che di solito si chiamerebbe la proprietà che gli oggetti appartenenti a quella classe hanno in comune.

L'applicabilità di questo principio è molto vasta. Noi siamo intuitivamente portati - dice Russell - a ritenere che, quando tra alcune entità vale una certa relazione d'equivalenza, queste entità abbiano una proprietà in comune. Questo - afferma Russell - può essere vero ma anche falso; oppure - cosa più probabile - può essere vero in alcuni casi e falso in altri. Allora, in luogo di questa supposta qualità in comune, possiamo prendere semplicemente l'appartenenza alla classe di tutte le entità che sono nella relazione di equivalenza data con una certa entità.

Il principio di astrazione evita dunque, in un certo numero di casi, l'introduzione di entità metafisiche puramente ipotetiche:

Quando un gruppo di oggetti presenta quel genere di similitudine che noi tendiamo ad attribuire al possesso di una qualità comune, il principio in questione mostra che l'appartenenza al gruppo servirà a tutti gli scopi della supposta qualità comune e quindi, a meno che sia effettivamente

conosciuta qualche qualità comune, il gruppo o la classe di oggetti simili può essere usato al posto della qualità comune, che non è necessario si assuma esistente.

Russell fa il seguente esempio:

Supponiamo quindi di avere un certo gruppo di bastoncini, tutti ugualmente lunghi. E' facile supporre che esista una certa qualità, chiamata la loro lunghezza, che tutti questi condividono. Ma tutte le proposizioni nelle quali compare questa supposta qualità conserveranno invariato il loro valore di verità se, in luogo di lunghezza del bastoncino  $x$  prendiamo l' appartenenza al gruppo dei bastoncini lunghi come  $x$

Come si vede, nel principio d'astrazione, l'astrazione è spogliata di ogni vaghezza psicologica.

### **Numero Naturale attraverso la definizione per astrazione**

Vediamo ora come Frege, utilizzando la definizione per astrazione da lui perfezionata, definirà i numeri naturali.

Si consideri la classe di tutte le classi, indicata con la lettera  $V$ , e la relazione  $R$  di equinumerosità fra classi. Si dimostra che tale relazione (che collega due classi con la stessa cardinalità) è di equivalenza, e quindi si può usare per la definizione per astrazione. Considerando ora, per ogni classe  $x$  di  $V$ , l'insieme

$$\alpha(x) = \{y \in V : yRx\}$$

ovvero la classe formata da tutte le classi equinumerose con  $x$ , è ovvio che usando il procedimento prima descritto si crea una partizione dell'insieme  $V$  in classi di classi e ognuna di queste classi di classi sarà caratterizzato dal contenere ogni altra classe equinumerosa ad essa.

Il numero cardinale di una classe è quindi definito come la classe di tutte le classi ad essa equinumerose (ovviamente non vale il viceversa). Ogni numero cardinale è definito come una classe di classi.

Si può notare come tale definizione non sia circolare (come volendo potrebbe sembrare a prima vista) in quanto:

- Prima Frege definisce il cardinale di una classe (cioè che noi chiamiamo la cardinalità della classe). In realtà basta semplicemente usare la nozione di equinumerosità tra classi, come nozione di equivalenza tra le cardinalità, senza scendere a definire la cardinalità;

- poi usa la definizione per astrazione ed ottiene la definizione di cardinale (puro).

Per esempio, suppongo di voler definire la classe di tutti i mariti. Prima di tutto definisco cosa vuol dire essere marito di qualcuno; poi definisco la classe dei mariti come costituita da tutti coloro che sono marito di qualcuno. La definizione non è circolare ma nei due casi si definiscono concetti(classi) diverse.

Bisogna ora isolare all'interno di questi cardinali, i numeri naturali. Per questo Frege userà la teoria delle successioni (teoria dell'induzione generalizzata).

Definito lo 0 come la classe delle classi vuote, Frege definisce l'operatore di successore nel seguente modo: il successore del numero di una classe  $\alpha$  è il numero della classe formata da  $\alpha$  e da un elemento  $x$  che non appartiene ad  $\alpha$ .

Frege poi, in questo modo dimostra che la successione dei naturali è infinita e fa coincidere il concetto di numero naturale con quello di appartenenza a tale successione che parte da 0 cioè un numero naturale è un qualunque oggetto possa essere raggiunto a partire dallo 0 applicando un numero finito di volte l'operatore di successore.

#### 16.2.6 L'antinomia di Russell

Nel giugno del 1902 Frege ricevette la seguente lettera:

Caro collega,... Mi trovo completamente d'accordo con lei su tutti i punti essenziali, in modo particolare col suo rifiuto di ogni elemento psicologico nella logica e col fatto di attribuire un grande valore all'ideografia per quel che riguarda i fondamenti della matematica e della logica formale, che, per inciso, si distinguono difficilmente tra loro. Riguardo a molti problemi particolari trovo nella sua opera discussioni, distinzioni e definizioni che si cercano invano nelle opere di altri logici. Specialmente per quel che riguarda le funzioni (cap. 9 del suo *Begriffsschrift*), sono giunto per mio conto a concezioni identiche, perfino nei dettagli. C'è solo un punto in cui ho trovato una difficoltà... a causa della seguente contraddizione. Sia  $w$  il predicato "essere un predicato che non può predicarsi di

se stesso".  $w$  può essere predicato di se stesso? Da ciascuna risposta segue l'opposto. Quindi dobbiamo concludere che  $w$  non è un predicato. Analogamente non esiste alcuna classe (concepita come totalità) formata da quelle classi che, pensate ognuna come totalità, non appartengono a se stesse. Concludo da questo che in certe situazioni una collezione definibile non costituisce una totalità.

Il paradosso di Russell fu il primo paradosso logico della storia ad essere riconosciuto come tale. Era semplice e non riguardava la teoria dei numeri transfiniti, ma concetti, come quello di proprietà o di insieme, che erano divenuti assolutamente centrali nella matematica dell'epoca. Servendosi degli insiemi, Russell aveva potuto ricostruire i concetti fondamentali della matematica - numeri cardinali, ordinali, naturali, reali, ecc. - ; ora scoprì che, servendosi di essi, poteva essere ricavata anche una contraddizione. Fu, comprensibilmente, un colpo molto duro.

Il paradosso di Russell è oggi notissimo. Alcune classi non sono membri di sé stesse, altre invece lo sono. Per esempio, la classe degli uomini non è membro di sé stessa, perché non è un uomo; la classe delle biciclette non è membro di se stessa perché non è, a sua volta, una bicicletta. Ma la classe di tutte le cose che non sono uomini non è un uomo, e quindi è un elemento di se stessa; analogamente quella di tutte le cose che non sono biciclette. Si noti che non sono solo classi definite da attraverso una negazione che possono essere membri di se stesse; per esempio, la classe di tutte le classi che hanno più di tre elementi ha certamente più di tre elementi, e quindi è membro di se stessa; la classe di tutte le cose menzionate in questo paragrafo è a sua volta menzionata in questo paragrafo, e quindi appartiene a se stessa; la classe di tutte le cose definibili con esattamente dodici parole italiane, è una classe descrivibile con esattamente dodici parole italiane, e quindi appartiene a se stessa.

Supponiamo ora di formare la classe di tutte le classi che non sono membri di se stessi. Si tratta senza dubbio delle classi di tipo più comune: la classe degli uomini, quelle delle biciclette, quella delle cose rosse, e così via. Definiamo cioè la classe  $w$  in modo che una classe appartenga ad  $w$  se e solo se non appartiene a se stessa. Chiediamoci ora: la classe  $w$  è membro di se stessa o no? Supponiamo dapprima che  $w$  sia elemento di  $w$ . Allora, dato che , per definizione di  $w$  tutti gli elementi di  $w$  hanno la proprietà di non appartenere a se stessi, se  $w$  è uno di questi elementi se ne deduce che  $w$  non è un elemento di  $w$ . Dall'ipotesi che  $w$  è un elemento di  $w$  se ne deduce quindi che  $w$  non è

un elemento di  $w$ . Supponiamo allora che  $w$  non sia elemento di  $w$ . Allora, dato che , per definizione di  $w$  tutte le classi che non elementi di se stessi appartengono a  $w$ , se  $w$  non appartiene a  $w$  allora  $w$  non è una classe che non è un elemento di se stessa. Ma allora  $w$  appartiene a  $w$ . Dunque dall'ipotesi che  $w$  non sia un elemento di  $w$  se ne deduce quindi che  $w$  non è un elemento di  $w$ . Abbiamo dunque una contraddizione.

In simbologia moderna è la seguente. Se definiamo

$$w = \{y : y \notin y\}$$

allora la domanda *w appartiene a se stesso?* genera una contraddizione.

In altre parole, per ogni classe  $y$ ,  $w$  è definito ponendo

$$y \in w \iff y \notin y$$

quindi sostituendo  $w$  ad  $y$  si ottiene la contraddizione

$$R \in R \iff R \notin R$$

In termini meno tecnici il concetto può essere espresso, non formalmente, come segue: *In un villaggio c'è un unico barbiere. Il barbiere rade tutti (e solo) gli uomini che non si radono da s'è. Chi rade il barbiere?*

Si possono fare due ipotesi:

1. il barbiere rade sé stesso, ma ciò non è possibile in quanto, secondo la definizione, il barbiere rade solo coloro che non si radono da sé;
2. il barbiere non rade sé stesso, ma anche ciò è contrario alla definizione, dato che questa vuole che il barbiere rada tutti e solo quelli che non si radono da sé, quindi in questa ipotesi il barbiere deve radere anche sé stesso.

In entrambi i casi si giunge ad una contraddizione. Una trattazione di tipo insiemistico semplifica l'approccio al paradosso. Innanzitutto, ci si rende conto di trovarsi di fronte a due insiemi distinti:

**A** : gli uomini che si radono da soli;

**B** : gli uomini che si fanno radere dal barbiere.

Il problema è collocare il barbiere in uno dei due insiemi, poiché la sua inclusione in entrambi gli insiemi creerebbe una contraddizione con la definizione stessa degli insiemi.

## La via d'uscita di Frege

Il primo a pubblicare il paradosso di Russell fu Frege, nella Nota finale al secondo volume del suo *Grundgesetze der Arithmetik*. Frege aveva quasi terminato la stesura del secondo quando ricevette la lettera. Comprensibilmente fu molto scosso dal fatto che il sistema alla cui costruzione aveva dedicato tutta la vita portasse ad una contraddizione ma, con grande onestà intellettuale, riconobbe il problema e aggiunse al suo libro un'appendice in cui descriveva accuratamente il paradosso e ne tentava una soluzione. Per comprendere questa soluzione, cominciamo brevemente a ripercorrere la strada che conduce al paradosso. Innanzi tutto in quel ragionamento, che abbiamo esplicitato nella sezione precedente, si fa implicitamente uso del principio secondo cui ogni proprietà determina una classe: la classe di tutte e sole le cose che hanno questa determinata proprietà. Riportiamo parte della risposta di Frege alla lettera:

La vostra scoperta della contraddizione mi ha causato la più grande sorpresa, e direi quasi costernazione, poiché ha scosso la base su cui ho inteso di fondare l'aritmetica... ciò è ancor più grave poiché in mancanza della mia regola V, non solo i miei fondamenti dell'aritmetica, ma anche gli unici fondamenti dell'aritmetica sembrano venir meno.

Questo principio, che pare del tutto ovvio ed era stato assunto da Russell anche nei *Principles*, prende il nome di *principio di comprensione illimitato* ed era derivabile nel sistema dei *Grundgesetze*. L'assioma cruciale, a questo proposito è il famoso assioma V che, a parole, asserisce che due classi sono identiche se e solo se le loro funzioni definiti sono formalmente equivalenti. Per vedere in modo formale questa parte del lavoro di Frege si rimanda ad [1].

Frege propone quindi di scomporre l'assioma in due parti:

**Va** che asserisce che nessuna proprietà può dar luogo a due classi differenti, e questo non pare a Frege suscettibile di obiezioni.

**Vb** invece asseriva il viceversa, cioè se due proprietà hanno estensione uguale allora sotto di essi cadono li stessi oggetti, cioè hanno lo stesso decorso di valori.

In modo formale se indichiamo con  $\hat{z}(\phi z)$  l'estensione della proprietà  $\phi$  al variare di zeta, cioè l'insieme  $\{z : \phi(z)\}$  possiamo tradurre formalmente le due parti in questo modo:

**Va**  $\forall x(\phi x \equiv \psi x) \longrightarrow \hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z)$

**Vb**  $\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) \longrightarrow \forall x(\phi x \equiv \psi x)$

Frege, per risolvere il problema, propone nell'appendice di rimpiazzare il principio Vb con il seguente:

**Vb'**  $\hat{z}(\phi z) = \hat{z}(\psi z) \longrightarrow \forall x(x \neq \hat{z}(\phi z) \rightarrow (\phi x \equiv \psi x))$

che ammette la possibilità che due proprietà definiscano la stessa classe anche quando non sono estensionalmente equivalenti. Questo blocca la derivazione del paradosso di Russell.

In sintesi possiamo dire che la reazione di Frege al paradosso di Russell fu quella di restringere la validità del principio di comprensione. La restrizione proposta (implicitamente) da Frege è la seguente: per ogni proprietà esiste una classe cui appartiene tutto ciò che ha la proprietà che definisce la classe ed è *diverso dalla classe stessa*. Secondo questa proposta, una classe  $\alpha$ , anche se ha essa stessa la proprietà definente la classe  $\alpha$ , non può appartenere ad  $\alpha$ : una formula del tipo  $\alpha \in \alpha$  sarebbe dunque sempre falsa.

Frege si era posto come obiettivo di mostrare che l'intera aritmetica si fonda su principi logici intuitivamente indubitabili, ma la soluzione da lui proposta, spesso citata in letteratura come la via d'uscita di Frege (*Frege's way out*), non solo non appare intuitivamente certa, ma possiamo dire tranquillamente che non sarebbe venuta in mente a nessuno, se non fosse stato per il paradosso di Russell.

Ma c'è di peggio: è stato dimostrato indipendentemente da Quine[1955] e da Geach[1956] che il nuovo sistema di oggetti è ancora contraddittorio in ogni universo che contenga almeno due oggetti. Quine definisce una classe  $w = \hat{x}(\forall z((x \in z \wedge z \in x) \rightarrow x = z))$  e dimostra, in base alle assunzioni di Frege e in base all'assunzione che al mondo vi sia qualcos'altro oltre la classe vuota, che la classe che ha come unico elemento  $w$  deve appartenere, e allo stesso tempo non appartenere ad  $w$ .

Non si hanno evidenze dirette che Frege si sia mai accorto che la sua - via d'uscita portava a questo genere di contraddizione. Ma non ci si può certo aspettare che un logico del suo calibro mancasse di rendersi conto del carattere *ad hoc* della sua nuova teoria. Il secondo volume dei *Grundgesetze* doveva essere pubblicato, e Frege cercò il più in fretta possibile una via d'uscita che evitasse al suo sistema di nascere già morto; ma non ne fu per nulla soddisfatto. Per qualche anno continuò a pensare che una soluzione dovesse esistere nella

direzione in cui lui l'aveva cercata e che il progetti logicista dovesse essere, in fondo, giusto; ma negli ultimi anni della sua vita perse ogni speranza. Nel settembre 1924 egli annota cupamente: I miei sforzi di far chiarezza sulle questioni che circondano la parola numero, i singoli numerali e i segni numerici, sono terminati, a quanto pare, in un incompleto insuccesso. Più o meno nello stesso periodo, in un breve appunto in cui avanza l'idea che tutta l'aritmetica debba trovare fondamento nella geometria, e in una meglio precisata intuizione dello spazio, egli scrive: Ho dovuto rinunciare alla mia idea che l'aritmetica sia un ramo della logica e che, di conseguenza, tutto in aritmetica debba essere dimostrato in modo puramente logico. Frege morirà pochi mesi dopo, nel luglio del 1925.

## 16.3 Giuseppe Peano

### 16.3.1 Vita ed attività scientifica

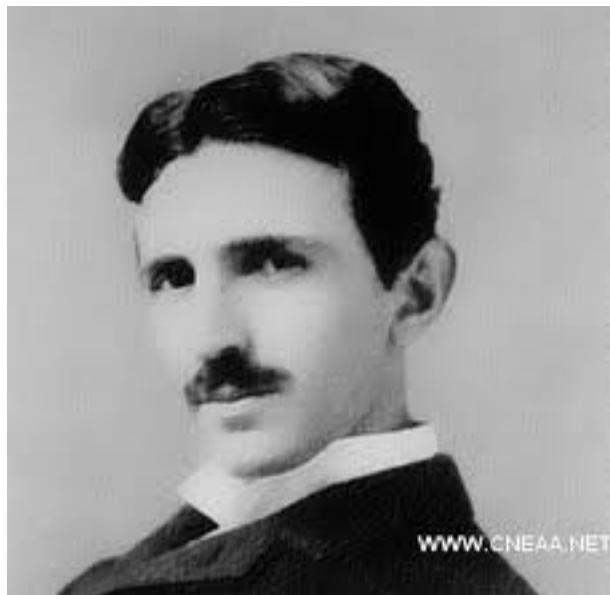


Figura 16.4: Giuseppe Peano

Giuseppe Peano (Spinetta di Cuneo, 27 agosto 1858 â Torino, 20 aprile 1932) è stato un matematico, logico e glottoteta italiano. Fu l'inventore del latino sine flexione, una lingua ausiliaria internazionale derivata dalla semplificazione del latino classico.

Studiò a Torino, al Liceo classico Cavour. Assistente all'Università di Torino, divenne professore di calcolo infinitesimale presso la stessa ateneo a partire dal 1890. Morì nella sua casa di campagna a Cavoretto, presso Torino, per un attacco di cuore che lo colse nella notte.

Il matematico piemontese è capostipite di una scuola di matematici italiani tra i quali possiamo annoverare Giovanni Vailati, Filiberto Castellano, Cesare Buralli-Forti, Alessandro Padoa, Giovanni Vacca, Mario Pieri e Tommaso Boggio.

A livello matematico Peano precisò la definizione del limite superiore, fornì il primo esempio di una curva che riempie una superficie (Curva di Peano, 16.5) (uno dei primi esempi di frattale) mettendo così in evidenza come la definizione di curva allora vigente non fosse conforme a quanto intuitivamente si intende per curva. Da questo lavoro partì la revisione del concetto di curva che fu ridefinito da Camille Jordan (1838 â 1932) (curva secondo Jordan). Fu anche uno dei padri del calcolo vettoriale insieme a Tullio Levi-Civita. Dimostrò importanti proprietà delle equazioni differenziali ordinarie, e ideò un metodo di integrazione per successive approssimazioni.

Sviluppò il *Formulario mathematico*, scritto dapprima in francese e nelle ultime versioni in interlingua, come chiamava il suo latino *sine flexione*, contenente oltre 4000 tra teoremi e formule, per la maggior parte dimostrate.

Come logico dette un eccezionale contributo alla logica delle classi, elaborando un simbolismo di grande chiarezza e semplicità. Diede una definizione assiomatica dei numeri naturali, i famosi assiomi di Peano, i quali vennero ripresi da Russell e Whitehead nei loro Principia Matematica per sviluppare la teoria delle classi. Ebbe ampi riconoscimenti negli ambienti filosofici più aperti alle esigenze e alle implicazioni critiche della nuova logica formale.

Era affascinato dall'ideale leibniziano della lingua universale, e sviluppò il latino sine flexione, lingua con la quale cercò di tenere i suoi interventi ai congressi internazionali di Londra e Toronto. Tale lingua fu concepita per semplificazione della grammatica ed eliminazione delle forme irregolari, applicandola a un numero di vocaboli minimo comune denominatore tra quelli principalmente di origine latina e greca rimasti in uso nelle lingue moderne.

Uno dei grandi meriti dell'opera di Peano sta nella ricerca della chiarezza e

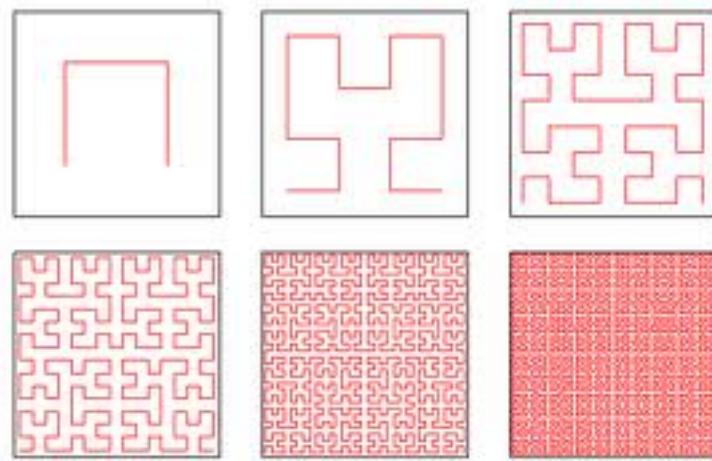


Figura 16.5: La curva di Peano

della semplicità. Contributo fondamentale che gli si riconosce è la definizione di notazioni matematiche entrate nell'uso corrente, per esempio il simbolo di appartenenza,  $\in$ , o il quantificatore esistenziale  $\exists$ .

Tutta l'opera di Peano verte sulla ricerca della semplificazione, dello sviluppo di una notazione sintetica, base del progetto del già citato formulario, fino alla definizione del latino sine flexione. La ricerca del rigore e della semplicità portarono Peano ad acquistare una macchina per la stampa, allo scopo di comporre e verificare di persona i tipi per la Rivista di Matematica (da lui diretta) e per le altre pubblicazioni. Peano raccolse una serie di note per le tipografie relative alla stampa di testi di matematica, uno per tutti il suo consiglio di stampare le formule in un'unica riga, cosa che ora viene data per scontata ma che non lo era ai suoi tempi.

### Un ponte tra Frege e Russell

Il maggior contributo di Peano, per quanto riguarda la nostra indagine sul logicismo sta nell'aver scritto il *formulario* dove introduce notazioni logiche per i costrutti matematici paragonabili, e forse migliori, a quelli di Frege e Russell.

L'obiettivo di questo trattato fu quello di individuare un'ideografia necessaria per analizzare e trascrivere concettualmente tutta intera la matematica.

Non si tratta però di un tentativo di fondazione dell'aritmetica né di qualunque teoria specifica, ma di analizzare tutti i possibili teoremi con i concetti fondamentali, di isolarli, di studiarne i rapporti di definibilità ed infine di redigerne un catalogo. Questa trascrizione, per Peano, è resa possibile dall'intervento della logica matematica che fornisce le varie nozioni logiche (classe, appartenenza, relazione, identità...).

Russell dice di lui

*Il formulario non è un tentativo di fondazione unitaria come i Principia<sup>4</sup>, ma è innegabile che la precisione delle analisi concettuali di Peano fu un aiuto inestimabile nella compilazione stessa dei Principia, dal momento che mostrava in concreto, per larghe parti della matematica, come poche nozioni logiche fossero in grado di analizzare la massa eterogenea ed enorme dei contenuti matematici specifici.*

Ed ancora

*Sino a che non incontrai Peano, non mi passò mai per la testa che la logica simbolica sarebbe potuta essere di qualche uso per i principi della matematica, poiché conoscevo l'armamentario booleano e lo trovavo privo di utilità.*

### 16.3.2 Gli assiomi di Peano

Nell'*Introduction to Mathematical Philosophy* (1919), Russell espone le sue idee fondamentali dell'aritmetica a partire dall'assiomatizzazione di quest'ultima da parte di Peano. Infatti, sebbene le teorie di Russell sull'aritmetica vengano spesso assimilate - giustamente - a quelle di Frege, il logicismo di Russell si sviluppò a partire dal lavoro di Peano, non da quello di Frege.

Alla fine dell'Ottocento, Peano aveva sviluppato l'aritmetica dei numeri naturali a partire da soli cinque assiomi contenenti tre termini primitivi. Il lavoro era condotto col linguaggio simbolico di cui era stato l'ideatore, che fu adottato anche da Russell e Whitehead e sarebbe infine divenuto, in gran parte, il linguaggio della logica contemporanea.

Russell attribuì una grande importanza al fatto che le derivazioni venissero

---

<sup>4</sup>I *Principia Mathematica*, dei quali parleremo più avanti, sono la risposta di Russell stesso e di Whitehead all'antinomia russelliana

condotte in un linguaggio simbolico, a partire da assiomi e regole esplicite. Questo non perché Russell abbia mai simpatizzato con concezioni della matematica di tipo formalista, ma per un altro motivo, che egli sintetizza così:

Il fatto è che il simbolismo è utile perché rende le cose difficili. (Questo non è vero per le parti avanzate della matematica, ma soltanto per gli inizi). Quello che vorremmo sapere è che cosa può essere dedotto da cosa. Ora, al principio, tutto è autoevidente; ed è difficilissimo rendersi conto se una proposizione autoevidente segue da un'altra oppure no. L'ovvia è sempre nemica della precisione. Perciò inventiamo qualche nuovo e difficile simbolismo, in cui niente appare ovvio. Poi stabiliamo certe regole per operare sui simboli, e l'intera cosa diventa meccanica. In questo modo scopriamo che cosa deve essere assunto come premessa, e che cosa può essere dimostrato o definito. Per esempio la totalità dell'Aritmetica e dell'Algebra si è dimostrata richiedere tre notazioni indefinibili e cinque proposizioni indimostrabili. Ma senza simbolismo sarebbe stato difficile scoprirla. E' tanto ovvio che due e due fanno quattro, che difficilmente possiamo renderci sufficientemente scettici da dubitare che lo si possa provare. E lo stesso vale in altri casi in cui si devono provare cose autoevidenti.

Riprendiamo il sistema assiomatico di Peano. Naturalmente, i termini primativi in quanto tali non possono essere definiti formalmente, tuttavia Peano ne spiega in modo intuitivo il significato. I tre termini sono:

$\mathbb{N}$ , che denota l'insieme dei numeri naturali

**0**, che denota lo zero

**s**, che è un segno di funzione che significa il successore di...

Gli assiomi di Peano sono i seguenti:

1.  $0 \in \mathbb{N}$ , in linguaggio comune: 0 è un numero naturale
2.  $x \in \mathbb{N} \rightarrow s(x) \in \mathbb{N}$ , cioè: il successore di un numero naturale è un numero naturale
3.  $((x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}) \wedge (s(x) = s(y))) \rightarrow (x = y)$ : i numeri naturali che hanno lo stesso successore sono identici; ovvero l'iniettività della funzione successore

4.  $x \in \mathbb{N} \rightarrow s(x) \neq 0$ : Zero non è il successore di alcun numero naturale
5.  $(0 \in A \wedge \forall y(y \in A \rightarrow s(y) \in A)) \rightarrow (\mathbb{N} \subset A)$ : Se  $A$  è un insieme qualsiasi che contiene lo zero e per ogni suo elemento contiene il successore di quell'elemento, allora  $A$  contiene tutti i numeri naturali

Analizziamo brevemente il significato di questi postulati. Il primo e il secondo, presi insieme, ci dicono che 0 è il suo successore, e il successore del successore, e così via, sono numeri naturali. Il primo e il quarto presi insieme ci dicono che 0 è il primo numero della serie dei naturali. Il terzo ed il quarto postulato escludono che la serie dei numeri naturali sia una serie, che in qualche modo si chiude su sé stessa. Così questi due postulati assicurano che il numero dei numeri naturali è infinito.

Il quinto postulato è della massima importanza: esso ci dice che possiamo fare uso, nelle dimostrazioni che riguardano i numeri naturali, del *principio d'induzione*.

Come rileva lo stesso Peano, i cinque assiomi sono indipendenti l'uno dall'altro; vale a dire che nessuno può essere dedotto a partire dagli altri quattro. Peano lo dimostra trovando quelli che oggi si chiamerebbero dei modelli, cioè delle interpretazioni dei tre termini primitivi  $\mathbb{N}, 0$  e  $s$ , tali che in ciascuno di essi un assioma divenga falso, mentre gli altri quattro restano vero. Infatti, se un assioma  $p$  fosse deducibile dagli altri quattro, sarebbe una *impossibilità logica* che la sua negazione possa essere coerente con essi, e quindi non esisterebbe alcun modello in cui la negazione di  $p$  e gli altri assiomi siano simultaneamente veri. Mostriamo ora, seguendo gli esempi forniti dallo stesso Peano, l'indipendenza degli assiomi.

1. Sia  $\mathbb{N}$  l'insieme dei numeri interi positivi: in questa interpretazione sono veri tutti gli assiomi tranne il primo. Dunque il primo assioma è indipendente dagli altri.
2. Sia  $\mathbb{N}$  l'insieme dei primi  $n$  numeri. Allora il successore di  $n$  non sarebbe in  $\mathbb{N}$ , e quindi il secondo postulato sarebbe falso in questa interpretazione. Dunque il secondo postulato non può dipendere dagli altri.
3. Sia  $\mathbb{N}$  una qualsiasi successione che comincia con un antiperiodo per poi diventare periodica, come per esempio la successione 0, 1, 2, 3, 2, 3, 2,

3... qui 0 e 3 hanno lo stesso successore, per cui il terzo postulato è falso: gli altri postulati sono tuttavia veri in questa interpretazione: dunque il terzo assioma è indipendente dagli altri.

4. Sia  $N$  la successione delle ore solari dalle 24 in poi, cioè la successione  $24, 1, 2, \dots, 23, 24, 1, \dots$ ; il simbolo primitivo 0 venga interpretato nel 24. In questa interpretazione tutti gli assiomi sono veri, tranne il quarto: dunque il quarto assioma è indipendente dagli altri.
5. Sia  $N$  l'insieme dei numeri naturali. Il simbolo  $s$  venga interpretato in il successore del successore di, cioè  $s(x) = x + 2$ . Allora il quinto postulato diventa falso, perché non è affatto vero che un numero naturale qualsiasi appartenga a un insieme qualsiasi di cui siamo membri 0 e tutti i numeri pari. Gli altri assiomi sono tuttavia veri in questa interpretazione: dunque il quinto postulato è indipendente dagli altri.

L'obiettivo di Russell è quello di dare una definizione puramente logica, e non solo simbolica, delle tre nozioni fondamentali di Peano  $(0, s, N)$ , tale che:

- â€¢ rispecchi il modo in cui applichiamo i numeri al mondo che ci circonda
- â€¢ faccia uso di concetti primitivi puramente logici
- â€¢ renda possibile, sulla base di assiomi logici, *dimostrare* i postulati di Peano

allora si avrà una teoria logicista che conserverà tutta la potenza degli assiomi di Peano. Russell lo realizza definendo prima i numeri cardinali e ordinali in generale poi isolando da essi i numeri finiti e mostrando che hanno esattamente le proprietà attribuite a loro dagli assiomi di Peano.

## 16.4 Bertrand Russell

### 16.4.1 Vita, opere e pensiero

Bertrand Arthur William Russell nacque il 18 maggio 1872 nei pressi di Trelleck, in Galles. La sua era una famiglia aristocratica di politiche liberali. Come egli stesso ricorda, nella sua autobiografia, il suo interesse per la matematica e i suoi fondamenti fu molto precoce:



Figura 16.6: Bertrand Russell

..a undici anni cominciai a studiare geometria.. fu inebriante come il primo amore. Non avrei mai immaginato che al mondo vi fosse una cosa così splendida... Ma come tutte le felicità non era perfetta.. ero molto deluso dal fatto che [Euclide] iniziasse a dimostrare le cose con dei postulati.. li accettai pro tempore. Il dubbio che provai circa le premesse della matematica rimase in me e determinò l'indirizzo della mia opera..

Durante l'adolescenza Russell cominciò a nutrire un profondo interesse per la speculazione filosofica che, tuttavia, l'ambiente familiare, rigidamente puritano, non favoriva affatto. Avendo perso entrambi i genitori quando era ancora molto piccolo, a nemmeno quattro anni era stato affidato ai nonni paterni, che vivevano a Londra.

Nell'ottobre 1890, Russell entrò al Trinity College di Cambridge, dove trovò un ambiente molto stimolante per il clima di libertà intellettuale a cui non era stato abituato. D'altro canto, Russell non era soddisfatto del tipo di insegnamento che veniva impartito a Cambridge:

L'insegnamento della matematica a Cambridge quando io ero studente era decisamente scadente... Le prove dei teoremi matematici che venivano offerte erano un insulto all'intelligenza logica. In effetti, l'intera

matematica veniva presentata come un insieme di abili trucchi mediante i quali accumulare punti nell'esame finale. Il risultato di tutto ciò su di me fu di farmi considerare disgustosa la matematica [...]. E così, nel mio quarto anno [a Cambridge] mi immersi con grande piacere nel fantastico mondo della filosofia.

Russell fu in un primo tempo kantiano, poi divenne decisamente hegeliano. Nell'estate del 1895 Russell presentò la sua dissertazione di dottorato - rielaborata nell'anno seguente nel libro *An Essay on the Foundation of Geometry* - che è una difesa di una variante dell'approccio kantiano alla geometria. Verso la fine del 1898 Russell rigettò sia il kantismo sia l'idealismo hegeliano. All'origine di questa repulsa, si possono individuare almeno tre impulsi: quello di Whitehead, quello di Moore e quello costituito dal rifiuto, da parte di Russell, di ciò che egli chiamò l'assioma delle relazioni interne, a favore della sua dottrina delle relazioni esterne, che non approfondiremo.

Nell'estate del 1900 Russell si recò a Parigi, al Congresso internazionale di filosofia, che si tenne dall'1 al 5 agosto, in occasione dell'esposizione di quell'anno. Russell giunse a Parigi munito delle sue nuove idee realiste. In *My mental development* (1944) Russell ricorda: L'anno più importante della mia vita intellettuale fu il 1900 e l'avvenimento più importante di quell'anno fu la mia visita al Congresso internazionale di Parigi. Il motivo fu che, a quel congresso Russell incontrò Giuseppe Peano. Russell dice che era stato ... colpito dal fatto che, in tutte le discussioni, Peano e i suoi allievi, avevano una precisione che non era posseduta dagli altri. Nelle settimane successive al congresso, Russell lesse tutte le opere di Peano, che egli stesso li procurò: furono proprio queste opere ad indirizzare Russell verso la sua concezione matura della matematica.

Nell'opera di Peano, Russell trovò diverse proposte che infine si riveleranno di importanza fondamentale per lo sviluppo della sua filosofia della matematica matura. Una di esse fu senza dubbio la notazione - finalmente maneggevole e perspicua - che consentiva di controllare accuratamente, evitando i pericoli della vaghezza, sia le assunzioni che i diversi passaggi di un ragionamento. Un'altra fu la distinzione di *appartenenza* ad una classe ( $\in$ ) e *inclusione* di una classe dentro un'altra ( $\subset$ ).

Poco dopo Russell cominciò la stesura dei *The Principles of Mathematics*. Alla base di questo libro è la tesi - cui Russell giungerà nella prima metà del 1901, sviluppando in modo originale le idee di Cantor, Dedekind e Peano - secondo cui tutta la matematica pura deriva da premesse puramente logiche

e utilizza solo concetti logici o definibili in termini puramente logici. Questa tesi - la tesi logicista - era stata sostenuta in precedenza da Frege, ma Russell lo ignorò fino al 1902. Riportiamo di seguito parte della prefazione alla prima edizione:

La presente opera ha due scopi principali [...] quello di provare che tutta la matematica pura tratta esclusivamente di concetti definibili in termini di un numero piccolissimo di principi fondamentali [...] il secondo scopo, cui viene dedicata la prima parte, è la spiegazione dei concetti fondamentali che la matematica accetta come indefinibili [...] se pubblico un lavoro che contiene tante difficoltà insolite la mia scusa è questa: che la ricerca non ha rilevato alcuna prospettiva vicina a risolvere la contraddizione [il suo paradosso] , o di raggiungere un maggior approfondimento nella natura delle classi.

Appena sbocciato, il progettò logicista andò tuttavia incontro ad una difficoltà tanto terribile quanto inaspettata. Nel maggio del 1901, lavorando sul teorema di Cantor - la cui validità non lo convinceva - Russell scoprì il paradosso che porta il suo nome. Lo espose a Peano il quale però non gli rispose, quindi come abbiamo visto si mise in contatto con Frege. La risposta di Frege infine convinse Russell che il suo paradosso era qualcosa di veramente preoccupante. Da quel momento intraprese un percorso che lo portò, a partire dal 1907, a sviluppare quella sua soluzione matura al problema dei fondamenti della matematica che oggi è conosciuta con il nome di *teoria ramificata dei tipi*

La teoria ramificata dei tipi è alla base dei *Principia Mathematica*, opera scritta in collaborazione con Whitehead. La divisione del lavoro tra i due autori viene così descritta dallo stesso Russell:

I problemi con cui dovevamo lottare erano di due tipi: filosofici e matematici. Parlando in generale, Whitehead lasciava a me i problemi filosofici. Quanto ai problemi matematici, Whitehead inventò la maggior parte della notazione, eccetto quanto fu ripreso da Peano. [...] Tuttavia è difficile dire che non vi sia una sola riga che non sia un prodotto comune.

Il successo del programma logicista, così come concepito nei *Principia*, fu solo parziale, per varie ragioni, tra cui spicca la necessità di assumere il cosiddetto assioma di riducibilità. Lo stesso Russell non fu mai soddisfatto dell'assunzione di tale assioma: nell'introduzione alla seconda edizione dei *Principia* l'assioma di riducibilità non viene più difeso. Russell cerca di ridurne

al minimo l'uso e indagare quanto si possa ottenere senza di esso. Il risultato non è però confortante: senza questo assioma, la sua fondazione logicista dell'Analisi e della teoria cantoriana del transfinito va perduta.

La parte originale del lavoro di Russell sui fondamenti si concluse con la pubblicazione della prima edizione dei *Principia*. Non che egli fosse convinto di aver risolto in modo soddisfacente tutti i problemi; più che altro pensava di non poter produrre più nulla di interessante in quel campo. In *Portraits from Memory* (1956) richiamando l'antica leggenda secondo cui il mondo poggia su un elefante, il quale a sua volta, poggia su una tartaruga, Russell scrive:

Avendo costruito un elefante su cui il mondo matematico potesse appoggiarsi, trovai che l'elefante vacillava, e procedetti a costruire una tartaruga per impedire all'elefante di cadere. Ma la tartaruga non era più sicura dell'elefante, e dopo circa vent'anni di durissimo lavoro, giunsi alla conclusione che non c'era null'altro che *io* potessi fare nella direzione di rendere la conoscenza della matematica indubitabile.

A partire dai secondi anni '20 - mentre Ramsey compiva un energico tentativo di colmare la distanza che ancora separava il sistema di Russell dalla piena realizzazione del programma logicista - gli interventi di Russell sul problema dei fondamenti della matematica si fecero sporadici, fino ad annullarsi del tutto pochi anni dopo.

Russell morì quasi novantottenne, il 2 febbraio 1970, ancora nel pieno delle sue facoltà intellettuali. Egli rimase, fino all'ultimo, convinto della fondamentale correttezza del programma logicista.

#### 16.4.2 Teoria dei Tipi

Nell'articolo *Mathematical logic as based on the Theory of Types*, del 1908, Russell espone la sua soluzione al problema delle antinomie, ovvero appunto la Teoria dei Tipi. L'articolo comincia con un elenco dei principali paradossi ed antinomie conosciuti:

- Antinomia di Russell
- Antinomia di Burali-forti
- Antinomia di Cantor
- Antinomia delle relazioni

- Antinomia di Epimenide (del mentitore)
- Antinomia di Berry
- Antinomia di König
- Antinomia di Richard

Ciò che interessa a noi è che Russell identifica in queste antinomie una caratteristica comune ovvero l'autoriferimento o la riflessività. Deve quindi trovare un modo di aggirare questo problema, che sembra quello scatenante le antinomie.

Per fare ciò Russell assume il *principio del circolo vizioso* introdotto da Poincarè che dice

Tutto ciò che coinvolge *tutto* di una collezione non deve essere elemento della collezione.

Il *principio del circolo vizioso* afferma che nessuna totalità può contenere membri definibili solo in termini di tale totalità. Non si può accettare una definizione di un ente quando in questa definizione viene implicata la totalità cui l'ente appartiene o, in modo più restrittivo, quando nella definizione stessa si faccia ricorso a termini la cui definizione è possibile soltanto facendo riferimento alla classe cui l'ente da definirsi appartiene. Sarebbe ad esempio un'operazione illegittima, passibile causa di antinomie, la definizione di numero reale che facesse riferimento alla classe di tutti i numeri reali, cui ovviamente appartiene quel particolare numero che si vuole definire.

Russell poi definisce come *impredicative* quelle proposizioni che violano il circolo vizioso e che quindi possono portare ad antinomie. Sostiene quindi che basti far in modo che il sistema logico non permetta la formazione di siffatte frasi per evitare le antinomie. Russell fa notare che, una volta assunto il principio del circolo vizioso in questa visione, viene a crearsi una distinzione tra le espressioni *tutti* e *uno qualunque*.

La prima, che assume senso cumulativo è l'unica delle due in grado di portare ad antinomie, in quanto ha potere totalizzante, la seconda invece no, in quanto ha senso distributivo e, non come la prima, cumulativo.

Dopo di ciò Russell comincia con la presentazione vera e propria della *soluzione* ovvero la teoria dei tipi. Questa consiste nello stratificare, tutto l'universo del discorso, in livelli gerarchici ben definiti che chiama appunto

*tipi.* L'idea di fondo della teoria dei tipi consiste nello strutturare in una gerarchia dei tipi gli oggetti del pensiero a seconda della loro complessità e nello stabilire la clausola che ogni proposizione ben formata deve essere sempre di un tipo superiore a quello cui appartiene ciò su cui essa verte. In termini di funzioni proposizionali, si richiede che una funzione proposizionale debba essere sempre di un tipo superiore a quello cui appartengono i suoi argomenti. Si trattava, in sostanza, di organizzare gli enti logici, ad esempio gli enunciati, secondo una disposizione gerarchica partendo dagli enti logicamente più semplici fino a quelli via via più complessi e ottenuti facendo riferimento a enti già definiti. Ogni qualvolta si parla di oggetti che soddisfano ad una determinata proposizione o proprietà, ci si riferisce ad oggetti dello stesso tipo.

Se per esempio, dico *tutte le cose rosse* mi riferisco a tutte le cose rosse dello stesso tipo, mentre se dico *ogni cosa rossa* mi riferisco indifferentemente ad una qualunque cosa rossa in un qualsiasi tipo. Nel primo caso la proposizione individua una classe, nel secondo no.

Questa tipizzazione viene fatta per le classi, per le proposizioni, per le funzioni proposizionali, ecc.

Più in dettaglio vediamo una distinzione in tipi degli individui e classi.

- 1** Al tipo 1 appartengono gli individui;
- 2** al tipo 2 appartengono le classi di individui (ovvero classi di individui del tipo 1);
- 3** al tipo 3 appartengono le classi di classi di individui (ovvero classi di individui del tipo 2);
- 4** ...
- n** al tipo n appartengono le classi di oggetti del tipo n-1.

Russell e Whitehead mostrano che con questa costruzione non si possono raggiungere tipi infiniti.

Ora, con questa distinzione, se  $x^n$  rappresenta un oggetto di tipo  $n$ , allora è sensato scrivere  $x^n \in x^{n+1}$ , ma è privo di qualsiasi significato asserire espressioni del tipo  $x^n \in x^n$  oppure  $x^n \in x^{n+p}$  per  $p > 1$ . Infatti se si conviene che la relazione di appartenenza possa sussistere solo fra enti di tipi opportunamente diversi, non ha senso affermare o negare che  $x$  è elemento di  $y$  se  $x$  e  $y$  sono dello stesso tipo.

In questo modo si vede che il Paradosso di Russell non ha più senso.

In realtà, per evitare la formazione di frasi impredicative sarà necessaria un'ulteriore suddivisione dell'universo. Ogni tipo viene suddiviso in ordini perché oggetti dello stesso tipo possono avere ordini diversi a seconda delle espressioni definitorie che li individuano. La divisione in ordine viene quindi effettuata in base al grado di complessità delle definizioni con cui l'insieme è stato introdotto. Per esempio, se per definire un insieme  $x$  si fa riferimento ai tipi il cui ordine massimo è  $n$ , allora  $x$  apparterrà a un tipo il cui ordine è  $n + 1$ .

Per semplicità mostro di seguito la costruzione della suddivisione in ordini delle proposizioni.

Gli individui costituiscono i termini delle proposizioni elementari, quelle cioè, che non contengono variabili vincolate. Le proposizioni elementari, insieme a quelle che contengono solo individui come variabili apparenti, le chiamiamo proposizioni del primo ordine. Queste formano il secondo tipo logico. Possiamo allora formare proposizioni nelle quali occorrono, come variabili, proposizioni del primo ordine, formando così le proposizioni del secondo ordine che formeranno insieme il terzo tipo logico, .... E così via.

Mentre la distinzione in tipi ci informa circa il livello dell'universo stratificato in cui si trova un dato oggetto, la suddivisione in ordini ci dice come è stato possibile raggiungere quel dato oggetto.

La teoria che viene fuori dalla suddivisione in tipi ed in ordini viene chiamata *Teoria dei Tipi ramificati* per distinguerla dalla *teoria dei tipi semplici* nella quale non compare la distinzione in ordini.

### 16.4.3 Gli assiomi

Con l'ausilio dei tipi ramificati si evitano effettivamente le antinomie, però dall'altra parte, si ha che alcuni teoremi importanti non sono più suscettibili di dimostrazione nel loro nuovo contesto perché il quantificatore universale sarà sempre relativizzato a un tipo e a un ordine.

Come scrisse Casari:

la difficoltà si traduce ora nell'esistenza di numeri reali di ordini diversi e ... nell'impossibilità in generale di trattare con sufficiente libertà gli insiemi di numeri reali. Più particolarmente, non si potrà mai parlare di tutti i reali che soddisfano ad una certa condizione ma sempre e soltanto di tutti i reali di un dato ordine che soddisfano a quella condizione.

Per ovviare a questa difficoltà Russell e Whitehead introdussero, a malincuore, il controverso *assioma di riducibilità*. Tale assioma fa parte dei tre assiomi extralogici introdotti da Russell e Whitehead.

Vediamo di cosa trattano.

**Axioma di riducibilità** Come visto sopra questo postulato sarà d'obbligo per evitare le difficoltà incontrate dopo aver stratificato l'universo in tipi e ordini.

Per rendere inoperante la distinzione in ordini nell'ambito di un tipo è ragionevole individuare un ordine rappresentativo di tale tipo tale che una volta individuato, una proprietà valida nell'ordine di quel rappresentante, sia possibile estenderla anche agli altri ordini di quel tipo. Questo ordine, detto *ordine predicativo*, è tale che individua enti del tipo dato facendo riferimento ad elementi dell'ordine immediatamente precedente (i differenti ordini di quel tipo possono essere ridotti all'ordine più basso di quel tipo). Russell e Whitehead chiamano poi *predicativo*, un elemento di un certo tipo quando è determinato da una condizione predicativa. Allora, l'assioma di riduzione dice che per ogni classe di enti di un certo tipo, esiste una classe predicativa che è equiestensiva con essa.

In termini di funzioni proposizionali, indicando con  $\phi!$  una funzione predicativa, l'assioma di riducibilità assume la seguente forma

$$\vdash \exists \mu \forall x (\phi x \leftrightarrow \mu!x)$$

ossia qualunque sia la funzione  $\phi$  esiste una funzione predicativa  $\mu$  che risulta ad essa equivalente per ogni valore della variabile  $x$ .

Per semplificare la questione, diciamo che l'assioma di riducibilità afferma che se  $x$  è un insieme qualunque e  $n$  è l'ordine dei suoi elementi, allora esiste un insieme  $y$  che ha gli stessi elementi di  $x$  e che è di ordine  $n + 1$  ("insieme predicativo"). Ogni funzione proposizionale è quindi estensionalmente equivalente a una funzione predicativa, cioè a una funzione di ordine immediatamente successivo a quello dei suoi argomenti (se gli argomenti sono individui, una funzione predicativa è un predicato del primo ordine). Una volta stabilite relazioni e proprietà per classi predicative, sarà possibile estendere queste relazioni e proprietà a ogni ordine grazie all'assioma di riducibilità.

**Assioma moltiplicativo** *Ogni prodotto cartesiano di insiemi non vuoti è non vuoto.* Tale assioma è equivalente all'assioma della scelta (di Zermelo) in quanto gli elementi di questo prodotto altro non sono che funzioni di scelta per la data famiglia di insiemi.

Inizialmente anche Russell stesso era scettico riguardo a tale assioma. Sia lui che altri hanno inizialmente tentato di eliminarlo. Dall'insuccesso di questi tentativi Russell si convinse della sua ineliminabilità per la teoria dei cardinali transfiniti.

**Assioma dell'infinito** postula l'esistenza di infiniti oggetti di un dato tipo (in particolare di tipo minimo, ossia individui).

Nella teoria dei tipi, una funzione proposizionale può avere come estensione solo oggetti di un dato tipo. In questo modo vengono ad identificarsi i numeri naturali con proprietà di insiemi, quindi con classi di insiemi. Si avrà che, perché un numero sia esemplificato (cioè sia diverso dalla classe vuota) è necessario che esista nell'universo sufficienti insiemi di tipo opportuno.

Russell e Whitehead identificano i naturali con la classe di quei cardinali che soddisfano l'induzione (dovranno quindi soddisfare agli assiomi di Peano).

Da qui nasce un problema: dimostrare il secondo assioma di Peano, ovvero l'iniettività della funzione successore. Tale assioma ha carattere esistenziale e afferma che se  $m \neq n$ , esisterà un insieme  $x$  di cardinalità  $m + 1$  che non è di cardinalità  $n + 1$ . Bisogna allora provare l'esistenza di siffatti insiemi per ogni cardinale finito e ciò comporta l'assunzione che almeno un tipo sia infinito, e siccome esistono sono tipi finiti, deve essere infinito il tipo più basso, ovvero quello degli individui.

Vediamo ora gli assiomi che Russell e Whitehead danno per la loro Grande Logica. Tali assiomi si basano sui due connettivi fondamentali  $\neg$  e  $\vee$  e l'implicazione è definita come segue

$$A \rightarrow B := \neg A \vee B$$

Gli assiomi riguardanti i connettivi sono i seguenti

- $\vdash p \vee p \rightarrow p$

- $\vdash q \rightarrow p \vee q$
- $\vdash p \vee q \rightarrow q \vee p$
- $\vdash p \vee (q \vee r) \rightarrow q \vee (p \vee r)$
- $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \vee r)$

L'unica regola assunta è il *modus ponens*.

Successivamente la teoria delle proposizioni elementari verrà estesa, usando i quantificatori, alla logica del primo ordine e poi a quella del secondo ordine.

#### 16.4.4 Critiche e risposte

Una prima critica al sistema logico dei *Principia* è la seguente:

data la definizione di  $A \rightarrow B$  come falsa se e solo se  $A$  vera e  $B$  falsa, allora date due proposizioni  $A$  e  $B$  qualunque, si ottiene che vale almeno una delle due

$$A \rightarrow B$$

e

$$B \rightarrow A^5$$

Una risposta di Russell a questa critica è la seguente. Russell dice che un legame formale tra  $A$  e  $B$  non può dipendere solo dal valore di verità, ma deve anche tener conto dei possibili contesti nei quali assumono valori di verità.

Russell distingue in effetti l'implicazione in due: l'implicazione formale e quella materiale.

**formale** del tipo  $\forall x_1, \dots, \forall x_n (K \rightarrow A)$

**materiale** del tipo  $A \rightarrow B$  che coinvolge solo enunciati le cui variabili non sono quantificate universalmente.

$A$  implica formalmente  $B$  significa asserire che tutte le verità di tutte le implicazioni materiali facendo variare le variabili in tutto l'universo.

Un'altra critica che viene mossa al sistema russelliano è la moltiplicazione di concetti base come identità, numero naturale, ecc. a causa della tipizzazione e della ramificazione.

---

<sup>5</sup>In realtà questo vale in ogni sistema logico di tipo classico.

Russell e Whitehead rispondono a tale critica ammettendo di poter parlare di tipi indeterminati (ambiguità dei tipi). Quest'idea sarà poi sviluppata a partire dagli anni trenta da Quine e da Specker. Altri tentativi furono fatti per superare questa difficoltà negli anni successivi, Carnap con l'introduzione dei tipi transfiniti, Von Neumann con gerarchia dell'universo degli insiemi... Una semplificazione ulteriore venne sviluppata contemporaneamente ed indipendentemente da Weiner, Hausdorff e Kuratowski, che permette di ricondurre la nozione di relazione a quella di insieme, questo tramite l'introduzione della nozione di coppia ordinata (e per estensione di n-upla ordinata), ma non è questa la sede per discutere di tali tentativi.

Una piccola nota a parte deve essere fatta a riguardo di Wittgenstein. Ludwig Wittgenstein entrò inizialmente al Trinity college dove lavorava Russell che subito lo prese come collaboratore. Wittgenstein in principio, come appena detto, si mise a collaborare con Russell, dando consigli e contributi nello sviluppo del suo pensiero.

Successivamente però, soprattutto dopo la prima guerra mondiale, si trovò in aperto contrasto con le teorie di Russell e Frege, e pubblicò la sua quasi unica opera: il *Tractatus logico-filosofico*, nel quale spiega come, secondo lui, la logica era puramente filosofia. Di particolare interesse fu il *Tractatus* nell'ambito del Circolo di Vienna, dove venne approfonditamente studiato ma, secondo l'autore, mal interpretato.

## 16.5 Due obiezioni generali al logicismo

### 16.5.1 L'obiezione di Quine

Come abbiamo visto nel corso di questo lavoro, la derivazione della matematica dalla logica richiede la quantificazioni su classi. o su proprietà. Se dunque la cosiddetta logica di ordine superiore e la teoria delle classi vengono considerate teorie *extralogiche* la tesi logicista diviene banalmente falsa. Il nucleo dell'obiezione di Quine al logicismo è proprio questo: egli ritiene che il campo della logica sia limitato alla logica elementare, in cui è consentita solo la quantificazione su individui concreti. Quine ammette che, per gli scopi della matematica, può rivelarsi necessario quantificare su entità *astratte* - proprietà o classi - e non lo considera affatto illegittimo; solo che ritiene che, quando si passa da una teoria che ammette unicamente la quantificazione su proprietà si passi da una teoria *logica* ad una teoria *matematica* vera e propria. Il confine

tra matematica e logica, per Quine, si situa precisamente al confine tra logica elementare e logica la teoria delle classi.

L'obiezione di Quine non è dunque diretta, come molte altre a particolari aspetti del logicismo russelliano - come ad esempio il principio del circolo vizioso, l'assioma dell'infinito, la teoria dei tipi, l'assioma della scelta, ecc. Essa è diretta al fondamento stesso della costruzione logicista in qualsiasi forma possibile. Infatti poiché si può dimostrare che la logica elementare si può assiomatizzare in modo completo mentre l'aritmetica non può essere completamente assiomatizzata, ne deriva che non può esistere alcun metodo per ridurre l'aritmetica alla logica elementare. Per fare un esempio, anche se i paradossi non fossero esistiti e la teoria di Frege si fosse rivelata ineccepibile, l'obiezione di Quine resterebbe in piedi: la teoria di Frege non rappresenterebbe una riduzione dell'aritmetica alla logica, ma semmai una riduzione riuscita dell'aritmetica alla logica più la teoria delle classi.

Sono molti, oggi gli autori che concordano con Quine nel collocare la teoria delle classi (o delle proprietà) al di fuori della logica vera e propria, e credo che sia soprattutto questo, piuttosto che le numerose obiezioni sollevate contro questo o quell'aspetto del sistema dei *Principia*, ad aver decretato, per la maggior parte degli autori, la definitiva uscita di scena del logicismo come possibile filosofia della matematica.

### 16.5.2 Il primo teorema di incompletezza di Godel: un colpo mortale per il logicismo?

In un celebre articolo del 1931, Kurt Godel dimostrò che qualunque sistema formale abbastanza potente da includere l'aritmetica elementare è *incompleto*, nel senso che deve esistere almeno un enunciato del sistema che è *vero* ma che non è *dimostrabile* all'interno del sistema stesso.

Il logicismo asserisce che tutti i teoremi della matematica sono dimostrabili sulla base dei soli principi della logica; tuttavia il risultato di Godel dimostra che nessun sistema assiomatico può essere sufficiente da derivare l'intera matematica: qualche verità matematica dovrà per forza restare fuori da questa derivazione. Quindi il logicismo non può essere corretto.

Questa tesi si basa sull'assunto che il logicismo debba asserire che la logica può essere completamente assiomatizzata. Ma è davvero così?

Certamente questa era la tesi del logicismo di Frege; Frege riteneva che le verità fondamentali dalle quali sono deducibili tutte le verità dell'aritmetica dovessero essere in un numero finito. Lo stesso vale anche per Russel, almeno

prima del 1931, infatti, nella prefazione dei *Principles*, descrive uno degli scopi principali del libro come:

[...] quello di provare che tutta la matematica pura tratta esclusivamente di concetti definibili in termini di un numero piccolissimo di concetti logici fondamentali e che tutte le sue proposizioni sono deducibili da un numero piccolissimo di principi logici fondamentali [...]

Tutto ciò non può meravigliare, per il semplice fatto che, prima di Gödel, nessun logico aveva mai messo in dubbio l'idea che la logica fosse completamente assiomatizzabile.

Il logicismo russelliano sembra essere indipendente da questa tesi. Il logicismo in sé la tesi secondo cui tutta la matematica è riducibile alla logica, nel senso che tutti i suoi principi sono derivabili da principi logici e tutti i suoi concetti sono definibili in termini puramente logici. In sostanza, il logicismo vede la matematica come una continuazione della logica: i teoremi matematici sono teoremi logici e la matematica è logica. Una confutazione del logicismo deve consistere in una confutazione in una refutazione dell'identità tra matematica e logica - deve cioè consistere nel cercare di mostrare, come per esempio fecero Kant e Poincaré, che nel ragionamento matematico deve entrare in gioco qualcosa di addizionale rispetto ai principi logici. Ma il teorema di Gödel non si limita a dire che la matematica non può essere completamente assiomatizzata, ma dice anche che la logica - almeno se con logica si intende, come fanno i logicisti, la logica di ordine superiore - non può essere completamente assiomatizzata. Dato che matematica e logica di ordine superiore sono poste, dal teorema di Gödel, sullo stesso piano, non può essere vero che questo teorema confuti l'identità tra logica (di ordine superiore) e matematica.

Questo modo di concepire il logicismo riporta tutta via in primo piano il problema di definire la logica; se non si riesce a fare questo sembra che la tesi logicista venga in qualche modo banalizzata. In realtà Russell non riuscì mai a dare una definizione di logica della quale ritenersi soddisfatto. In assenza di una tale definizione, il logicismo non è confutato, ma diviene una tesi molto meno chiara di quanto potesse apparire all'inizio.

## 16.6 Il revisionismo di Ramsey

Concludiamo quest'indagine sulla storia del logicismo introducendo il lavoro del matematico Ramsey appunto, che, negli anni venti, riprese in mano

il lavoro di Russell, che nel frattempo fu infine abbandonato e considerato un fallimento dalla critica, per continuare il programma logicista.

Frank Plumpton Ramsey nacque a Cambridge il 22 febbraio 1903, dove studiò matematica ottenendo anche il titolo di *Senior Wrangler*, il massimo titolo ottenibile in quell'ambito, dopo il sostenimento del Tripos. Nonostante la prematura morte, a soli 26 anni, Ramsey fu in grado di distinguersi per la sua notevole intelligenza, spaziando il campo d'applicazione dalla matematica, alla filosofia, alle lingue, all'economia.

Lo sviluppo della tesi logicista supportata dai *Principia*, era rimasto con grosse problematiche, delle quali Russell stesso era consapevole, davanti a tutto la macchinosità ed la complessità di tutto l'apparato formale. Un'altra bizzarria che emerse fu la seguente: Russell cercava di ridurre la matematica alla logica, ma quest'ultima non era mai stato in grado di definire precisamente. Ci penserà per lui successivamente Wittgenstein, del quale già un po' abbiamo parlato, definendo la logica come lo studio delle Tautologie, ovvero di tutto ciò che è vero in qualunque stato possibile di cose.

Nel 1925 invece, Ramsey partì dai *Principia* e usò le critiche mosse, per esempio da Wittgenstein, per revisionarlo. Ramsey sostiene che il contenuto delle proposizioni matematiche deve essere completamente generale e la loro forma deve essere tautologica. Ramsey sosteneva

I formalisti trascuravano completamente il contenuto e rendevano la matematica senza significato, i logicisti trascuravano la forma e facevano consistere la matematica in qualunque generalizzazione vera. Solo tenendo conto di entrambi i punti di vista e considerando la matematica come composta di generalizzazioni tautologiche noi possiamo ottenere una teoria adeguata.

Si nota come tale concezione di Ramsey fu pesantemente influenzata da Wittgenstein. Infatti Ramsey, sostenendo che tutta la matematica è tautologia, vuole mostrare che tutte le proposizioni contenute nei *Principia* sono tautologiche.

Da un punto di vista più tecnico, sostiene che le tautologie possono avere arietà infinita, riduce quindi i quantificatori universale ed esistenziale a, rispettivamente, congiunzioni e disgiunzioni infinite.

Troverà però difficoltà, ancora una volta, nel trattare l'assioma di riducibilità.

Ramsey individua nei *Principia* questi principali difetti:

1. Secondo Ramsey, un difetto dei *Principia* sta nella trattazione indiscriminata delle antinomie, mentre Ramsey crede che sia meglio dividerle in due categorie: le antinomie logiche (per es quella di Russell , Burali-Forti, Canto...) e quelle non puramente logiche (per es mentitore, Richard..). Delle prime dice

sono tali che se non si prendessero provvedimenti contro di esse si presenterebbero negli stessi sistemi logici o matematici

e sostiene che il loro presentarsi significa che c'è qualcosa di sbagliato nell'apparato logico introdotto. Delle seconde invece

Non possono venir enunciate in soli termini logici; poiché tutte contengono qualche riferimento al pensiero, al linguaggio o al simbolismo che non sono termini formali, ma empirici.

E' qui implicita la distinzione linguaggio/metalinguaggio oggi universalmente accettata.

2. Un altro difetto che egli individua riguarda la definizione di identità che, Russell faceva dipendere dall'assioma di riducibilità. Secondo Ramsey, la definizione di Russell di identità, ovvero che

Due cose sono identiche se e solo se hanno in comune le proprietà predicative. (La cui estensibilità era appunto garantita dall'assioma di riducibilità),

sia un'interpretazione scorretta della nozione di identità in quanto

non si definisce il significato per cui il simbolo dell'identità viene effettivamente usato

Ramsey, a partire da queste critiche cercherà di poter ancora sostenere la tesi logicista superando tali difficoltà presentate nei *Principia*. Non scendiamo però in questa sede in dettagli.

Almeno in un primo momento Ramsey ritenne ovviamente corretta la tesi logicista. Infatti non riusciva ad accettare il rifiuto intuizionista del principio del terzo escluso, né altri concetti cardine della teoria intuizionista.

Tuttavia, in particolare rispetto all'assioma dell'infinito, Ramsey conclude con una nota di pessimismo. Vediamone una citazione

una giustificazione logica della matematica è assai problematica [...] [infatti] Brouwer e Weyl dicono che ciò non è possibile e Hilbert propone di giustificarla come un gioco condotto sulla carta, con segni privi di significato...

D'altra parte ritiene che il suo lavoro di ricostruzione dei *Principia*

superi molte difficoltà, ma [...] è impossibile considerarlo del tutto soddisfacente

Sarà poi proprio questa insoddisfazione ad allontanarlo dalla tesi logicista, ed un successivo avvicinamento alla politica di Hilbert.

## 16.7 Teoria di Zermelo–Fraenkel

Il personaggio che tenta una nuova sistemazione della teoria degli insiemi è Ernst Zermelo. Egli si trova costretto, dal paradosso di Russell, a dover indebolire l'assioma di comprensione creando una teoria che non sia però troppo debole. Ciò che si vuole è riuscire, nella nuova formulazione, a dimostrare tutti i teoremi già dimostrati senza far nascere nuovamente il paradosso di Russell. Tale opera viene successivamente purificata da Fraenkel e da allora porta il nome di teoria di Zermelo–Fraenkel (ZF).

Sulla teoria degli insiemi, Zermelo così si esprime: *La teoria degli insiemi è quella branca della matematica il cui compito è indagare matematicamente le nozioni fondamentali di numero, ordine, funzione, assumendole nella loro forma pristina, semplice e sviluppando di lì i fondamenti logici di tutta l'aritmetica e l'analisi. La teoria degli insiemi riguarda un dominio di individui, che chiameremo semplicemente oggetti, tra cui sono compresi gli insiemi.*

In questa teoria viene mantenuto il principio di estensionalità:

$$\forall(x)(x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z$$

ovvero due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi, un insieme è quindi individuato dai suoi elementi.

Il principio di comprensione viene sostituito dal più debole principio di separazione: Per ogni formula  $\alpha[z, ...]$  con eventuali altri parametri diversi da  $y$ ,  $\forall(x)\exists(x)\forall(z)(z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \alpha[z, ...])$  ovvero un insieme viene sempre definito da una certa proprietà ma i suoi elementi vengono ora ritagliati all'interno di

un insieme più grande comunque definito.

Il punto fondamentale e il motivo per cui oggi la teoria ZF e quella (quasi) universalmente accettata è il fatto che in ZF si può dimostrare il seguente teorema:

**Teorema 16.7.1.** *Nella teoria ZF  $\neg u \forall z(z \in u)$*

*Dimostrazione.* Se esistesse un tale  $u$ , sostituitolo al posto di  $x$  nell'assioma di separazione, prendendo per  $\alpha$  la formula  $z \notin z$  si avrebbe  $\forall z(z \in u \leftrightarrow z \notin z)$  e per  $z=u$  si avrebbe una contraddizione logica.  $\square$

Non esiste quindi l'insieme  $u$  universale, del resto ammettere la sua esistenza vorrebbe dire confondere l'assioma di comprensione con l'assioma di separazione, infatti separare un insieme  $x$  dall'insieme universale  $u$  è equivalente a soddisfare una proprietà P in generale.

Abbiamo quindi dimostrato che il paradosso di Russell non si può verificare, ovvero non esiste  $x$  tale che  $(x \in x \leftrightarrow x \notin x)$ , questo si può vedere come circolo vizioso di grado 1. Nulla ci assicura di non trovare però cicli di grado n, ovvero catene del tipo  $x_1 \in x_2 \in x_3 \dots x_n \in x_1$ , per assicurarci che ciò non accada siamo costretti ad inserire un nuovo assioma, l'assioma di fondazione.

Tale assioma impedisce la comparsa di cicli di qualsivoglia lunghezza:

1. Se esistesse  $x$  tale che  $x \in x$  allora si avrebbe che l'insieme  $\{x\} \neq \emptyset$  sarebbe una contraddizione, infatti ogni elemento di tale insieme (cioè  $x$  stesso) avrebbe un elemento (ancora  $x$ ) in  $\{x\}$ .
2. Se esistesse una catena del tipo  $x_1 \in x_2 \in x_3 \dots x_n \in x_1$  allora si avrebbe che l'insieme  $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} \neq \emptyset$  sarebbe una contraddizione, infatti per ogni elemento  $x_i$  appartenente a tale insieme si avrebbe  $x_{i-1} \in x_i$ , l'intersezione e quindi sempre non vuota.

### 16.7.1 Axioma della scelta

Abbiamo capito l'importanza di aver assunto la teoria ZF nelle nostra trattazione del concetto di insieme. Zermelo successivamente si occupa di indagare il concetto di numero, ordine e funzione. Per poter fare ciò egli fa uso del cosiddetto assioma delle scelta che Russell nel 1906 formula così:

**Definizione 16.1** (Assioma della scelta). Se  $A$  è un insieme di insiemi  $X$  non vuoti a due a due disgiunti allora c'è un insieme  $S$  che interseca ogni  $X$  in esattamente un elemento, e cioè, in altre parole, sceglie un elemento in ogni  $X$ .

Questa è appunto solo una formulazione possibile di tale assioma equivalente al più noto lemma di Zorn. Lo stesso Zermelo si rende conto che "Questo principio non può, a rigore, essere ridotto ad uno più semplice, ma esso si può applicare ovunque nelle deduzioni matematiche senza esitazione" ed infatti non saranno pochi i matematici che non accetteranno tale assioma. Rimane comunque il problema se questo principio sia effettivamente un assioma nuovo da, eventualmente, prendere in considerazione, oppure si riesca a dimostrarlo all'interno di ZF. A tale domanda viene data una risposta in due momenti diversi da Gödel e da Cohen:

**Teorema Gödel (1938)** : Se ZF è coerente, allora è impossibile che dimostri il contrario dell'assioma della scelta.

**Teorema Cohen (1963)** : Se ZF è coerente, allora è impossibile che dimostri l'assioma della scelta.

Quindi effettivamente tale principio è un assioma indipendente dagli altri. Possiamo quindi aggiungerlo alla lista di assiomi che già abbiamo, la teoria ZF aggiunta dell'assioma della scelta prende il nome di teoria ZFC.

Il punto ora è se effettivamente conviene introdurre questo assioma oppure no, a questa domanda forse non si può ragionevolmente rispondere, possiamo comunque far notare che grazie a tale assioma si riesce a dimostrare una quantità di fatti notevoli alcuni fra i quali sono:

- Teorema del buon ordinamento
- Teorema di Tychonoff
- Teorema di esistenza della base per uno spazio vettoriale
- Teorema della chiusura algebrica
- Teorema dell'ideale massimale per reticolati
- Teorema di Hahn-Banach

- Teorema dell'ideale primo per algebre di Boole

Esistono però altri risultati dovuti all'assioma della scelta assolutamente anti-intuitivi e riguardanti la teoria della misura, essi sono:

- Teorema di Vitali
- Paradosso di Banach-Tarski

Il teorema di Vitali mostra come nell'insieme dei reali esistano insiemi non misurabili secondo la misura di Lebesgue. Tale teorema è cardine per dimostrare il paradosso di Banach-Tarski. Il fatto notevole è che tale paradosso è effettivamente un teorema rigoroso all'interno di ZFC, non è quindi un "pericolo" come lo è stato il barbiere per l'opera di Frege. Esso viene sempre citato come paradosso perché scuote invariabilmente la nostra comune intuizione geometrica!

**Teorema 16.7.2** (Teorema di Banach-Tarski). *Sia  $U$  una sfera chiusa. Allora esistono due sfere chiuse  $U_1$  e  $U_2$  disgiunte, ottenute per decomposizione finita di  $U$ , ognuna delle quali equivalente ad  $U$  stessa.*

Tale teorema ci dice quindi che è possibile moltiplicare le sfere attraverso una apposita decomposizione. La dimostrazione di questo fatto si basa, come già detto, sul teorema di Vitali, l'idea base è di dividere la sfera  $U$  in modo tale che ogni sua parte risulti non misurabile secondo la misura di Lebesgue. In tal modo si perde il "controllo" sul volume stesso e, attraverso particolari rotazioni, si possono ricombinare tali parti per formare le due sfere  $U_1$ ,  $U_2$ .

Un altro risultato anti-intuitivo è stato mostrato di recente dal matematico Miklos Laczkovich:

**Teorema 16.7.3.** *E' possibile decomporre un cerchio unitario in un numero finito di porzioni (per la precisione al più  $10^{50}$ ) che con sole traslazioni possono essere ricomposte in modo da formare un quadrato di uguale area.*

Qui il paradosso sta nel fatto che ogni porzione del cerchio ha "perso" la sua originaria curvatura, solamente grazie ad alcune traslazioni, per costituire poi i lati di un quadrato che sappiamo avere curvatura nulla.

## 16.8 Neologicismo

Crispin Wright (1942-) è un filosofo inglese, che ha dato luce alla corrente, con scarso seguito, del cosiddetto neo-fregeismo o neo-logicismo. Infatti sostiene che il progetto logicista di Frege possa essere rivisto rimuovendo il principio di comprensione illimitata (la sua legge V) dal sistema formale; e sostituendolo con il principio di Hume. L'aritmetica è derivale dalla logica di secondo ordine più il principio di Hume. Wright ha argomentato informalmente che:

1. il principio di Hume più la logica del secondo ordine sono consistenti
2. da questi si possono dedurre gli assiomi di Peano

Entrambi questi argomenti vennero dimostrati in maniera più rigorosa da George Boolos. Rimandiamo ai loro articoli per un approfondimento della questione.

# Bibliografia

- [1] Stefano donati, *I fondamenti della matematica nel logicismo di Bertrand Russell*, (fortemente consigliato, per quanto riguarda il logicismo in generale)
- [2] Bertrand Russell, *I principi della matematica*, seconda edizione, 1925
- [3] Anthony Kenny, *Frege, un'introduzione*, 1995
- [4] Mario mariani, *Introduzione a Frege*, editori laterza, 1994
- [5] Vario materiale reperito in rete e relazioni degli anni precedenti
- [6] Gottlob Frege, *Alle origini della nuova logica*, epistolario scientifico, Boringhieri
- [7] Carl Boyer, *Storia della matematica*

# Capitolo 17

## L'intuizionismo

di Elisa Rossi

### 17.1 Introduzione

Nella discussione sui fondamenti della matematica, avvenuta nel primo trentennio del '900, una delle voci più innovative fu quella di Brouwer. La sua tesi di dottorato, *Over de Grondslagen der Wiskunde* (Sui fondamenti della matematica), del 1907, divenne il manifesto dell'intuizionismo. In essa egli sosteneva che il fondamento del pensiero matematico fosse un'unica intuizione a priori, l'intuizione della *duo-unità*: tramite questo processo si possono infatti costruire non solo tutti i numeri naturali, ma anche il più piccolo ordinale infinito,  $\omega$ , nonché il continuo.

Immediatamente dopo la pubblicazione della tesi, in una breve nota, sollevò la questione del *principio del terzo escluso*, considerandolo non accettabile. Accanto ai lavori di natura programmatica, lo studioso pubblicò numerosi risultati concreti, come la dimostrazione intuizionista di alcuni teoremi classici. Secondo Brouwer i formalisti erano decisi sostenitori della “falsa credenza” costituita dall’importanza data all’apparato linguistico nelle teorie matematiche, conseguenza di “un errore profondamente radicato, cioè di una fiducia inconsulta nella logica matematica”. Per lo studioso infatti il linguaggio non aveva alcun ruolo privilegiato, e la matematica era un risultato mentale da esso indipendente: non esiste per la matematica alcun linguaggio sicuro che la metta al riparo da frantamenti ed errori. Da queste premesse deriva il sostanziale scetticismo con cui Brouwer guardò ai sistemi formali di logica

intuizionistica che via via furono proposti: non serviva a nulla sottoporre ad un trattamento sistematico la lingua matematica stessa, come erano soliti fare i formalisti.

Il più importante tentativo di costruire un calcolo logico intuizionista fu messo in atto da Heyting, che pubblicò nel 1930 le opere *Le regole formali della matematica intuizionista I e II*, le quali portavano ad un primo terreno concreto di confronto tra logici classici e logici intuizionisti, e potevano essere oggetto di studio anche per coloro che non condividevano le premesse filosofiche di Brouwer e Heyting.

## 17.2 Luitzen Egbertus Jan Brouwer



Luitzen Egbertus Jan Brouwer nacque a Rotterdam nel 1881, visse e studiò in Olanda. Iniziò le scuole superiori all'età di undici anni ed entrò all'università di Amsterdam all'età di sedici, per studiare matematica e fisica. Ottenne il dottorato nel 1094, durante il quale lavorò sulla tesi "Sui fondamenti della matematica" che discusse nel 1907. Già in essa si potevano vedere i tratti fondamentali della sua filosofia, inizialmente ispirati al kantismo (probabile causa della decisione del suo relatore Diederik Korteweg (1848-1941) di tagliare alcune parti della sua tesi). Dal 1905 al 1912 fu docente universitario (non retribuito) presso l'università di Amsterdam, ottenendo poi la cattedra di professore.

Brouwer si occupò a lungo del problema dei fondamenti, ma diede contributi anche in altri rami della matematica: tra le altre cose studiò a fondo la geometria e la topologia.

Come filosofo ed epistemologo, egli viene considerato il fondatore della cor-

rente cosiddetta dell'intuizionismo, una delle principali scuole di filosofia della matematica del XIX secolo.

Nei primi anni di insegnamento di ruolo conobbe Hilbert (1962-1943). I loro rapporti non furono mai buoni, per via delle differenti idee riguardo i fondamenti della matematica. I due diedero vita ad una controversia pubblica che, nel 1928, causò addirittura l'espulsione di Brouwer dalla redazione dei *Mathematische Annalen*, a cui entrambi lavoravano. Questa delusione provocò un rallentamento nella produzione di Brouwer ed egli un po' alla volta si isolò relativamente; lo sviluppo dell'intuizionismo venne lasciato al suo studente Arend Heyting (1898-1980), morì nel 1966.

### 17.2.1 La filosofia di Brouwer

Attraverso gli scritti di Brouwer si posso individuare due diverse fasi del suo pensiero.

Nella prima fase, come si vede dalla sua tesi di dottorato del 1907 e dalla sua opera *Life, art and Mysticism*, si realizzò lo sviluppo della sua filosofia, caratterizzato dal misticismo e dalla sfiducia nel linguaggio: “*Il primo atto dell'intuizionismo separa la matematica dal linguaggio matematico, in particolare dal linguaggio descritto dalla logica e riconosce che la matematica è essenzialmente un'attività alinguistica della mente che ha origine nella percezione del cambiamento del tempo*”. Il misticismo di Brouwer consisteva in un'assoluta tendenza all'interiorità: egli era convinto infatti che fosse l'unica maniera per avere serenità, mentre diffidava di tutto ciò che era rivolto verso l'esterno. Per lo stesso motivo non erano possibili i rapporti interpersonali, basati sul linguaggio verbale, mezzo non affidabile.

Il secondo atto dell'intuizionismo di Brouwer ebbe inizio nel 1918 e a differenza del primo è più costruttivo: “[il] secondo atto dell'intuizionismo [...] riconosce la possibilità di generare nuove entità matematiche: in primo luogo sotto forma di successioni che proseguono all'infinito  $p_1, p_2, \dots$ , i cui termini sono scelti più o meno liberamente tra entità matematiche già costruite, [...]; in secondo luogo sotto forma di specie matematiche, [...]”.

Nei suoi ultimi scritti Brouwer arriva anche ad accettare il linguaggio matematico, ma non allo scopo di garantire la sua esattezza: la verità e la certezza della matematica stanno nell'atto mentale interiore, il linguaggio matematico è solamente un sostegno alla memoria.

Secondo lo studioso, la conoscenza avviene non attraverso il ragionamento, ma attraverso un percorso della coscienza dall'interiorità verso il mondo esterno.

no. Inizialmente la coscienza è in stato di quiete, per poi passare allo *stato di sensazione*, in cui essa conserva una precedente sensazione come passata. A questo punto, attraverso la distinzione presente-passato, questa diventa *mente* e permette l'esperienza di passato e presente *come oggetti*, che Brouwer chiama *atteggiamento temporale*. La mente inoltre sperimenta anche l'*atteggiamento causale*, cioè l'individuazione di complessi di sensazioni che sono totalmente estranei al soggetto. Anche le altre persone per noi stessi non sono altro che “causa di complessi di sensazioni”.

L'intuizione del tempo è quindi di certo una forma a priori. All'inizio Brouwer considerava anche lo spazio come concetto a priori, ma successivamente cambiò opinione probabilmente per via della scoperta delle geometrie non-euclidee, o forse perché l'esistenza di un a priori dello spazio avrebbe reso necessaria l'esteriorità. L'intuizione del tempo quindi è (l'unica) forma a priori di qualunque percezione, e si ottiene cercando nelle percezioni del cambiamento ciò che hanno in comune. Dato che ogni esperienza è percepita come cambiamento, astraendo si ottiene proprio l'*intuizione del tempo*.

Anche la matematica di conseguenza si sviluppa da una singola intuizione a priori, l'intuizione del tempo, detta anche *invarianza nel cambiamento, unità nella molteplicità, due in uno o duo-unità*, che rappresenta la capacità di unire, trovare connessioni tra elementi che rimangono comunque identificabili separatamente. La matematica “pura” (non quella delle applicazioni alla fisica o quella del linguaggio, simbolica, che non sono compatibili con il misticismo di Brouwer) è quindi un'evoluzione mentale interiore a partire dalla duo-unità: così come essa rappresenta l'intuizione e la consapevolezza del modo in cui il soggetto sperimenta le sensazioni del presente che immediatamente lasciano il posto ad altre sensazioni, mentre le precedenti sensazioni sono già legate al passato, allo stesso modo si può scindere in matematica l'uno dal due, e successivamente il due dal tre e così via. L'intuizione della duo-unità si pone come fondamento della costruzione dei numeri naturali.

### 17.2.2 Matematica e logica

#### I naturali, le sequenze di scelta e il continuo

Secondo Brouwer, i numeri naturali vengono costruiti attraverso la duo-unità (la forma a-priori dell'esperienza presente-passato). Il numero 1 e il numero 2 vengono creati simultaneamente: “passato” corrisponde ad 1 e “presente corrisponde” a 2. Tuttavia il “presente” non dura: sprofonda nel passato,

per lasciare il posto ad un nuovo presente. In questo modo il secondo elemento della duo-unità stesso si scinde in due, incorporando una nuova duo-unità nella vecchia. Si arriva così al 3, poi al 4 e così via, fino ad ottenere i numeri naturali. È proprio l'intuizione che questo processo può essere iterato a dar luogo al primo ordinale infinito  $\omega$ ; ma quest'infinità deve essere pensata come potenziale, non come attuale.

Nella sua tesi del 1907, Brouwer era stato chiaro sul fatto che la duo-unità permette la costruzione non solo dei naturali (quindi del discreto), ma anche del continuo, che è, secondo lui, ciò che “sta tra” i due elementi della duo-unità: è l'astrazione del tempo che scorre tra “passato” e “presente”. Per costruirlo però non sono sufficienti due elementi, così Brouwer introduce le *sequenze di scelta* e le *specie*.

Una sequenza di scelta è una sequenza potenzialmente infinita di oggetti matematici, scelti uno dopo l'altro dal soggetto che crea (anche le sequenze stesse secondo Brouwer sono oggetti matematici). Supponiamo di avere a disposizione una collezione di oggetti matematici, ad esempio i numeri naturali. Scegliendone un certo numero (reinserendo nella collezione quello scelto ogni volta) otterremo ad esempio: 33, 4, 5, 33, 8. Pensando che la sequenza che stiamo costituendo è potenzialmente infinita otteniamo una sequenza di scelta, di cui il *segmento iniziale* è la parte finita che abbiamo portato ad esempio. Anche se in realtà *non possiamo* fare un numero infinito di scelte, possiamo sempre estendere un segmento iniziale facendo ulteriori scelte. Brouwer distinse diversi tipi di sequenze di scelta: il soggetto è libero nelle sue scelte, dunque è anche libero di porvi delle restrizioni, creando delle “lawlike choice sequences”, oppure di proibire tali restrizioni, creando le “lawless choice sequences”. Questi tipi di sequenze sono solo gli estremi di una grande varietà di sequenze di scelta, che in generale possiamo esprimere come una successione di enti matematici  $(n_i)$  ciascuno dei quali soggetto alle restrizioni (in numero finito)  $R_1^i, R_2^i, \dots, R_{k_i}^i$ :  $(n_i, R_1^i, R_2^i, \dots, R_{k_i}^i)_{i \in \mathbb{N}}$ . Si noti che gli oggetti della matematica classica hanno proprietà indipendenti dai soggetti e sono statici, a differenza delle sequenze di scelta, che oltre a dipendere chiaramente dal soggetto e dalle sue scelte cambiano anche nel tempo.

Assieme alle sequenze di scelta Brouwer introdusse la nozione di specie, che corrisponde più o meno all'idea di insieme di Cantor, essendo una collezione di sequenze di scelta. Tuttavia, un'importante differenza tra specie e insiemi cantoriani è che le specie non possono essere identificate con i loro elementi: insiemi definiti in maniera diversa ma con gli stessi elementi sono considerati

identici (assioma di estensione) ma per le specie l'identità consiste nella maniera in cui sono definite. Brouwer diede quindi un'analisi matematica del continuo usando specie e sequenze di scelta di intervalli razionali; la novità era che le sequenze non erano un metodo per approssimare un numero reale, ma il numero reale stesso! Nasceva però un problema: come "operare" con le sequenze di scelta, che sono oggetti infiniti? Brouwer trovò la risposta nell'affermare che non abbiamo mai bisogno di considerare l'intera sequenza di scelta. Nello specifico, il *principio di continuità debole per i numeri* dice che una funzione totale da sequenze di scelta a numeri naturali non ha mai bisogno di più input di un segmento iniziale per produrre lo stesso output, quindi tutte le sequenze che condividono lo stesso segmento iniziale daranno luogo allo stesso valore. Questo principio fu liberamente utilizzato da Brouwer, che però non lo giustificò mai.

### La logica

Già nella tesi Brouwer aveva fatto notare che, dato che la matematica si sviluppa a partire dalla duo-unità, essa è assolutamente indipendente dalla logica, visto che non procede seguendo i suoi schemi. Era invece la logica a dipendere dalla matematica. Essa, secondo lo studioso aveva natura linguistica: egli riteneva che le leggi logiche fossero schemi di espressioni linguistiche, che coglievano le strutture ricorrenti nell'espressione del ragionamento (della matematica) e le estrapolavano. Una legge logica nasceva nello stesso modo in cui nasce una legge nella scienza: evidenziando sequenze ricorrenti (regolarità linguistiche dell'espressione logica) ed etichettandole come rapporto causa-effetto. Tali regolarità venivano quindi attribuite all'attività matematica stessa.

Quello che Brouwer criticava era lo spostamento di attenzione dalle costruzioni della matematica alle regolarità del linguaggio attraverso cui si parlava di matematica: per quanto si possa privare di contraddizioni, esso rimane un linguaggio, che quindi è inaffidabile. Proprio le antinomie erano un segnale di quanto fosse sbagliato fondare la matematica sulla logica: mentre il ragionamento matematico non può presentare contraddizioni, esse evidenziano quanto un linguaggio possa essere contraddittorio parlando di matematica.

Il linguaggio simbolico solitamente usato in logica aveva altri limiti, primo tra tutti la freddezza, che lo rendeva inadeguato: per Brouwer il linguaggio ha lo scopo di convincere l'interlocutore, dunque *dove* deve sempre avere una certa componente persuasiva. Un'altra probabile motivazione della diffiden-

za di Brouwer è il legame stretto tra simbolismo e formalismo, teoria rivale dell'intuizionismo.

### Il principio del terzo escluso

Il culmine della riflessione di Brouwer sulla logica riguarda il principio del terzo escluso. Secondo lui dire che un ente matematico esiste significa essere in grado di spiegare la costruzione mentale che porta necessariamente alla sua esistenza, in quanto ogni teorema è il risultato di una serie di passi costruiti successivamente, e la prova del teorema è la costruzione stessa.

Dato che la matematica è costituita di azioni mentali,  $\mathcal{P}$  e  $\neg\mathcal{P}$  devono corrispondere alla stessa azione mentale; risulta quindi naturale pensare che  $\mathcal{P}$  rappresenti una costruzione che porta ad un successo, mentre  $\neg\mathcal{P}$  rappresenti una costruzione che porta ad una contraddizione.

Questa interpretazione della negazione rende subito plausibile la non accettazione da parte di Brouwer del principio del terzo escluso:  $\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{P}$ . Accettare questo significherebbe che per qualsiasi enunciato, o si può esibire una costruzione che lo conferma, oppure si perviene effettivamente ad una contraddizione; “ne segue che la questione della validità del principio del terzo escluso è equivalente alla questione se possano esistere problemi matematici insolubili”, visto che una dimostrazione di impossibilità costituisce comunque una soluzione ad un problema. Ciò che Brouwer rifiuta non è l’idea che ogni problema matematico possa avere prima o poi una soluzione; semplicemente, ogni questione matematica aperta è di per sé un asserto di principio del terzo escluso in sospeso, dunque lo stesso asserto generale del principio del terzo escluso rimane aperto per questo motivo. Se infatti per arrivare alla soluzione di un problema bisogna passare in rassegna, per ogni proprietà, tutte le varie costruzioni che possono costituire passi della prova che la proprietà vale per ciascuno degli enti in questione, quando il numero di enti matematici a cui ci si riferisce è infinito i tentativi da fare per arrivare ad una soluzione del problema sono in quantità più che numerabile, dunque si potrebbe non arrivare mai alla soluzione cercata. Ne sono un chiaro esempio le sequenze di scelta: se due di esse sono:  $\alpha = 1, 4, 7, 9, 1, \dots$ ,  $\beta = 1, 4, 7, 9, 1, \dots$ , non abbiamo nessun diritto di dire  $(\alpha = \beta) \vee \neg(\alpha = \beta)$ , perché ad ogni punto delle sequenze non possiamo sapere quali saranno le scelte successive. Brouwer quindi rifiuta la validità del principio del terzo escluso quando riguarda le sequenze di scelta (quando riguarda casi infiniti).

La messa in discussione del principio del terzo escluso aveva conseguenze de-

vastanti per la matematica classica: ad esempio Brouwer mostrò che non è (intuisticamente) vero che un insieme è o finito o infinito.

### 17.3 Arend Heyting



Arend Heyting nacque ad Amsterdam nel 1898. Figlio di due professori, studiò matematica all'università di Amsterdam, dove fu studente di Brower, il quale ebbe molta influenza sui suoi lavori futuri. Una volta laureatosi, nel 1922, cominciò a lavorare come insegnante alle scuole superiori nella città di Enschede; la lontananza dal mondo accademico gli permise di lavorare molto nelle sue ricerche e lo portò ad ottenere il dottorato nel 1925 con una tesi sull'assiomatizzazione intuizionista della geometria proiettiva, di cui Brower era il relatore.

Heyting fu il primo studente di Brower ad avere un ruolo attivo nel divulgare l'intuizionismo. Nel 1928 vinse il premio dell'associazione dei matematici olandesi per aver scritto un saggio in cui formalizzava la teoria intuizionistica di Brower; successivamente tale saggio fu ampliato da Heyting e pubblicato nel 1930. Questo lo rese famoso tra i matematici e i filosofi, tanto che Heinrich Scholz, professore di logica matematica dell'università di Münster, mise a sua disposizione la propria libreria, che fortunatamente era abbastanza vicina ad Enschede, così tra i due nacque una profonda amicizia, e Heyting non fu più accademicamente isolato.

Heyting partecipò al Simposio *Erkenntnis* a Königsberg nel 1930 rappresentando l'intuizionismo, mentre Carnap e Von Neumann rappresentavano rispettivamente logicismo e formalismo. Nonostante la versione di Heyting della logica intuizionista differisse da quella di Brower, era chiaro che uno

dei suoi obiettivi principali era quello di rendere le idee di Brouwer più accessibili e conosciute. L’obiettivo di Heyting era di indurre i matematici ad interessarsi all’intuizionismo e a sviluppare parti della matematica secondo i metodi intuizionisti: non cercava di far prevalere la sua proposta, ma di trovare collaboratori nell’impresa di riedificare la matematica. Morì a Lugano nel 1980.

### 17.3.1 Matematica e logica

#### L’unità

Distanziandosi da Brouwer, Heyting separò l’evidenza della duo-unità dalla sua radice kantiana. Il suo scopo era liberare l’intuizionismo da ogni legame con una filosofia particolare, e per questo motivo descrisse la formazione dei numeri naturali come la capacità di concentrarsi su una tra le sensazioni date e di ripetere l’isolamento ogni volta che si vuole: “Possiamo costruire la successione dei numeri naturali in questo modo, iniziando a pensare a un’unità: è la medesima costruzione spirituale che deve essere eseguita anche nella formazione della percezione ‘una matita’. Poi noi pensiamo ‘ancora un’unità’ e infine pensiamo che quest’ultimo passo può essere ripetuto a volontà. I tre concetti ‘uno’, ‘ancora uno’ e ‘ripetutamente ancora uno’ sono sufficienti a costruire la teoria dei numeri naturali”. In questo modo mise l’accento sulla singola unità piuttosto che sulla duo-unità.

#### La logica

Secondo Heyting, “un teorema matematico esprime un fatto meramente empirico; e cioè il successo di una certa costruzione. ‘ $2+2=3+1$ ’ dev’essere letto come abbreviazione della asserzione: ‘Ho effettuato le costruzioni mentali indicate da ‘ $2+2$ ’ e ‘ $3+1$ ’ ed ho trovato che portano alla stesso risultato.’ Possiamo quindi accettare come spiegazione di cosa sia una proposizione matematica la seguente: la proposizione  $\mathcal{P}$  può essere asserita se e solo se si è in grado di realizzare la costruzione da essa intesa. Partendo da questo punto di vista, Heyting diede un’interpretazione delle costanti logiche e dei connettivi:

- possiamo asserire  $\neg\mathcal{P}$  se e solo se possediamo una costruzione che porta a contraddizione ogni prova della verità di  $\mathcal{P}$
- possiamo asserire  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  se e solo se possiamo asserire almeno una tra  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$

- possiamo asserire  $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$  se e solo se possiamo asserire entrambe  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$
- possiamo asserire  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  se e solo se possiamo asserire  $\mathcal{P}$  e abbiamo una costruzione che, unita a qualunque costruzione che provi  $\mathcal{P}$ , porterebbe automaticamente alla prova di  $\mathcal{Q}$
- possiamo asserire  $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$  se e solo se possiamo asserire  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  e  $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P}$
- possiamo asserire  $\forall x \mathcal{P}(x)$  se e solo se abbiamo un metodo di costruzione generale che
- possiamo asserire  $\exists x \mathcal{P}(x)$  se e solo se siamo effettivamente in grado di costruire un elemento  $a$  tale che valga  $\mathcal{P}(a)$ .

Si noti che dall'interpretazione del condizionale  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$  e della negazione  $\neg \mathcal{P}$  discende che per gli intuizionisti non vale la legge della doppia negazione forte ( $\neg \neg \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ ). Gli intuizionisti non accettano, cioè, che sia possibile realizzare la costruzione di  $\mathcal{P}$  ogni volta che si è in grado di portare a contraddizione l'ipotesi che la realizzazione di  $\mathcal{P}$  porti ad una contraddizione. Chiaramente, il rifiuto del terzo escluso e quello della doppia negazione forte sono tra loro equivalenti.

Per quanto riguarda il rapporto logica-matematica, Heyting pensava che la logica fosse subordinata alla matematica. Inizialmente egli era dello stesso parere di Brouwer, per questo riteneva, come Brouwer, che non avesse senso la costruzione di un sistema formale della matematica, perché le possibilità del pensiero superano l'espressività finita del linguaggio.

La sua posizione cambiò per la prima volta nel 1954: egli non considerava più la logica come espressione della matematica, bensì come una sua parte: la logica è costituita dai teoremi più generali della matematica.

Nel 1974, infine, Heyting affermò che la logica può essere definita in tre modi: come regola del linguaggio, come riferimento a una teoria filosofica sul mondo (quando si parla di verità) e come insieme dei teoremi della matematica. Nei primi due casi quindi la logica è un'applicazione della matematica, nell'ultimo una sua parte.

Nonostante questo, nel suo saggio del 1930 Heyting procedette con la formalizzazione della logica intuizionista. Questo non era in contraddizione con il suo pensiero, perché egli distingueva due diverse funzioni del metodo assiomatico: la *funzione descrittiva*, propria di quei sistemi in cui il metodo assiomatico non ha lo scopo di fondare una teoria ma solamente di sistematizzare le conoscenze già ottenute indipendentemente, e la *funzione creativa*,

che si manifesta nei casi in cui il metodo assiomatico viene usato per fondare una teoria, per costituire nuovi enti matematici. Quella che l'intuizionismo rifiuta è la funzione creativa del metodo assiomatico, non quella descrittiva (che per l'intuizionismo ha lo stesso valore che per la matematica classica). Di conseguenza, Heyting respinge tutti i sistemi assiomatici che non possono essere ridotti a sistemi descrittivi, come la teoria degli insiemi. Essa è infatti risultata contraddittoria e, dato che prima dell'assiomatizzazione di tale teoria non era disponibile alcuna conoscenza a riguardo, la questione dell'esistenza di un modello per i suoi assiomi è solamente una questione di fede.

La formalizzazione proposta da Heyting consta dei seguenti schemi di assiomi:

$$H1 : \mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{P} \wedge \mathcal{P})$$

$$H2 : (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \rightarrow (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P})$$

$$H3 : (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) \rightarrow ((\mathcal{P} \wedge \mathcal{S}) \rightarrow (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{S}))$$

$$H4 : ((\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{S})) \rightarrow (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{S})$$

$$H5 : \mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P})$$

$$H6 : (\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q})) \rightarrow \mathcal{Q}$$

$$H7 : \mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$$

$$H8 : (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \rightarrow (\mathcal{Q} \vee \mathcal{P})$$

$$H9 : ((\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{Q})) \rightarrow ((\mathcal{P} \vee \mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{Q})$$

$$H10 : \neg \mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q})$$

$$H11 : ((\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \rightarrow \neg \mathcal{Q})) \rightarrow \neg \mathcal{P}$$

insieme alla regola di separazione:

$$\frac{\vdash \mathcal{P}, \vdash \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}}{\vdash \mathcal{Q}}$$

## Il linguaggio

Così come Brouwer, anche Heyting pensava che il linguaggio, soprattutto in matematica, avesse scopo persuasivo, per indurre l'interlocutore ad attuare una costruzione mentale uguale alla propria. Il linguaggio matematico aveva

quindi senso perchè esprimeva costruzioni mentali. In ogni caso non si poteva escludere la possibilità di fraintendimento, neppure utilizzando un linguaggio formale. A differenza di Brouwer, però, Heyting considerava inevitabile l'utilizzo del linguaggio nella costruzione della matematica: secondo lui la matematica senza comunicazione e con il supporto di una memoria illimitata è solo un'idealizzazione.

Per quanto riguarda il linguaggio simbolico, Heyting lo accettava, e riteneva fosse equivalente scegliere di utilizzarlo oppure di utilizzare un linguaggio non simbolico: si trattava solamente una questione di gusti.

# Bibliografia

- [1] Bottazzini, Umberto, *Storia della matematica moderna e contemporanea*, Utet Libreria.
- [2] Casari, Ettore, *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli editore.
- [3] Franchella, Miriam, *Con gli occhi negli occhi di Brouwer*, Polimetrica International Scientific Publisher.
- [4] Van Atten, Mark *On Bruower*, Thomson Wadsworth.
- [5] Relazioni degli anni precedenti.

# Capitolo 18

## Kurt Gödel

di Mario Leone

### 18.1 La vita

#### 18.1.1 Cenni biografici su Kurt Gödel

Kurt Gödel nacque a Brünn, in Moravia, il 28 aprile 1906. Di famiglia benestante, visse un'adolescenza serena. Conseguita la licenza liceale a Brünn, si trasferì a Vienna per iniziare i suoi studi universitari, inizialmente con l'intenzione di studiare fisica teorica, ma poi dedicandosi alla matematica e alla filosofia, e concentrandosi infine sulla logica matematica.

Nonostante la caduta, nel 1918, dell'impero austro-ungarico, Vienna restò per tutti gli anni Venti un importante centro culturale e intellettuale.

L'università di Vienna contava su importanti professori, come Philipp Furtwängler, Hans Hahn, Wilhelm Wirtinger, Walter Mayer, Karl Menger.

Benché tranquillo e riservato, Gödel si distinse da subito per il suo eccezionale talento. Particolarmente importante fu l'influenza di Hans Hahn, che si interessava di analisi moderna e di topologia insiemistica, oltre che di logica, di fondamenti della matematica e di filosofia della scienza. Fu Hahn ad introdurre Gödel nel gruppo di filosofi che faceva riferimento a Moritz Schlick, titolare della cattedra di Filosofia delle Scienze Induttive, e che in seguito fu noto come “Circolo di Vienna” (“Wiener Kreis”) e identificato con la dottrina filosofica chiamata *positivismo logico* o *empirismo logico*.

Gödel frequentò abbastanza regolarmente il Circolo nel periodo 1926-1928, ma poi se ne allontanò gradualmente, pur mantenendo contatti personali con alcuni dei suoi membri, come Rudolf Carnap. Aveva infatti sviluppato delle vedute filosofiche lontane, se non opposte, a quelle dei positivisti logici.

Ciononostante, il Circolo influenzò l'orientamento degli interessi e il lavoro di Gödel. Pare che determinanti per la scelta dell'ambito di ricerca furono alcune conferenze di Carnap sulla logica matematica e la pubblicazione nel 1928 del *Grundzuge der theoretischen Logik* da parte di David Hilbert e Wilhelm Ackermann. In questo libro era presentato come problema aperto la questione della completezza di un certo sistema di assiomi per il calcolo dei predicati del primo ordine di Frege.

Nel 1928 Gödel ottenne il primo risultato importante a soli ventiquattro anni. Dimostrò, nella sua tesi di laurea, che il sistema assiomatico per il calcolo dei predicati formulato da Frege era completo. Tutte le verità logiche erano dimostrabili a partire dagli assiomi. Frege aveva fatto un'analisi completa per il calcolo dei predicati.

Il decennio 1929-1939 fu un periodo di lavoro intenso, che produsse i principali risultati di Gödel nel campo della logica matematica. Nel 1930 egli cominciò ad approfondire il programma di Hilbert di stabilire con mezzi finitari la non contraddittorietà dei sistemi assiomatici formali per l'aritmetica.

I Teoremi di Incompletezza furono pubblicati nel 1931. Le conclusioni e i caratteri del tutto originali di questi teoremi attirarono presto l'attenzione di molti intellettuali.

Dati gli incredibili risultati di questi teoremi esso fu molto cauto quando procedette alla dimostrazione, avendo attenzione di curare tutti i dettagli per tentare di convincere i matematici che l'avrebbero letto. Gödel, ciò nonostante, ebbe un po' di difficoltà a convincere i suoi colleghi dei risultati ottenuti.

Uno dei primi a riconoscere il potenziale significato dei risultati di incompletezza e ad incoraggiarlo a proseguire verso un loro più ampio sviluppo fu John von Neumann, che era tre anni più vecchio di Gödel ma che si era già distinto per i brillanti risultati in teoria degli insiemi, teoria della dimostrazione, analisi e fisica matematica.

Nel 1932 Gödel diventò *Privatdozent*, e gli anni successivi furono segnati da studi nel campo della logica e numerose pubblicazioni.

Durante l'anno accademico 1933-1934, si recò come visitatore presso l'Institute for Advanced Study di Princeton, che era stato fondato nel 1930 da Abraham Flexner, e dove erano stati nominati professori Albert Einstein e

Oswald Veblen, James Alexander, Marston Morse, John von Neumann, Hermann Weyl. Qui Gödel tenne delle lezioni sui Teoremi di Incompletezza, ma nel 1934 tornò in Europa, dove ebbe una crisi nervosa; negli anni seguenti numerosi furono le manifestazioni di depressione mentale e di esaurimento.

Nel 1937 ricominciò a tenere lezioni presso l'Università di Vienna, presentando i suoi nuovi risultati nella teoria assiomatica degli insiemi: era riuscito a dimostrare che l'ipotesi del continuo (CH) è compatibile con gli assiomi di Zermelo-Fraenkel (ZF).

Presupposto della dimostrazione di Gödel è la sua definizione all'interno di ZF di una nozione generale di costruibilità per gli insiemi. Quello che formulò fu il cosiddetto “universo degli insiemi costruibili” costituito dai soli insiemi costruibili. Questi insiemi formano un modello della teoria ZF, cioè valgono tutti gli assiomi della teoria ZF e in più soddisfano CH.

Poiché c'è un modello della teoria ZF dove l'ipotesi del continuo è vera allora la negazione di CH non può essere dimostrata, perché se lo fosse sarebbe vero sia CH che CH falsa in tutti le interpretazioni possibili.

Nel 1938, Kurt sposò Adele Nimbursky, ballerina, di sei anni più vecchia di lui e con un breve matrimonio alle spalle; al loro progetto matrimoniale si erano opposti i genitori di Gödel, e in particolare il padre che era morto nel 1929, all'età di cinquantaquattro anni. Il loro fu un amore duraturo, e Adele si rivelò per Kurt fonte di sostegno negli anni difficili che gli stavano innanzi.

Durante gli anni Trenta vi furono inoltre molti cambiamenti significativi nella vita sociale, oltre che privata, di Gödel: alcuni amici del Circolo lasciarono Vienna per trasferirsi a Parigi o, come Carnap, in America; Hahn morì nel 1934 per cause naturali, Schlick fu ucciso nel 1936 da uno studente con disturbi mentali, Menger si trasferì a Notre-Dame.

In quegli anni, l'Austria attraversava un periodo difficile economicamente in seguito alla “grande depressione” del 1929. Ma anche dal punto di vista politico non versava in una situazione migliore: nel 1933, infatti, salì al potere Adolf Hitler e nel 1938 ci fu l'annessione (*Anschluss*) dell'Austria alla Germania.

Questi fatti portarono a significative trasformazioni nella vita culturale e intellettuale austriaca: vi fu un esodo di intellettuali, non solo ebrei, e la disgregazione completa del Circolo.

Gödel mantenne sempre una posizione apolitica e non impegnata, ma ben conosceva quel che stava accadendo attorno a lui.

Su sollecitazione di Menger, egli soggiornò a Princeton nel periodo 1938-1939 (dove tenne delle lezioni sui nuovi risultati di non contraddittorietà dell'ipotesi del continuo), poi a Notre-Dame, infine tornò a Vienna dalla moglie.

Nel 1939 voleva tornare in America, ma dovette scontrarsi con le rigide impostazioni del regime nazista: fu chiamato per una visita medica militare nella quale fu ritenuto idoneo, oltre che privato del suo ruolo presso l'Università a seguito dell'eliminazione della figura di *Privatdozent*. Nonostante le sue posizioni apolitiche, furono sollevate inoltre questioni sui suoi rapporti con professori ebrei, Hahn in particolare.

Tutti questi fatti lo indussero, nel novembre 1939, a chiedere aiuto a Veblen per raggiungere Princeton: Gödel e Adele riuscirono ad ottenere i visti, lasciarono Vienna nel gennaio 1940 e raggiunsero Princeton, dove Gödel diventò Membro Onorario dell'Institute for Advanced Study, e dove diventò amico di Albert Einstein e Von Neumann.

A Princeton, non ebbe impegni ufficiali, quindi si dedicò alla ricerca nel campo della logica matematica, in particolare alla dimostrazione di indipendenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi del continuo (ma con successi solo parziali e solo sul primo problema) e ad una nuova interpretazione costruttiva dell'aritmetica, che dimostrava la sua coerenza, ma con strumenti che andavano al di là di quelli finitisti nel senso di Hilbert.

Dal 1943 si dedicò quasi esclusivamente alla filosofia. Nel 1944 pubblicò il suo scritto sulla logica matematica di Bertrand Russell, che contiene la sua visione "platonista" sulla realtà degli oggetti matematici astratti. Si dedicò inoltre alla lettura di Kant, Leibniz, Husserl, oltre che alla teoria generale della relatività negli anni 1947-1951.

Nel 1948 ottenne la cittadinanza americana e nel 1953 fu nominato professore, ruolo che lo portò a gestire numerose richieste da parte di logici da tutto il mondo che volevano soggiornare a Princeton, tra i quali anche Paul Bernays. Dal 1951 ricevette molti riconoscimenti: nel 1951 il Premio Einstein, nel 1955 l'elezione a membro della National Academy of Sciences, nel 1957 dell'American Academy of Arts and Sciences e nel 1968 della Royal Society. Nel 1975 gli venne conferita la National Medal of Science da parte del presidente Ford.

Vinse il premio Einstein per aver trovato una soluzione esatta alle equazioni di campo della relatività generale. Questa soluzione prevedeva delle proprietà strane, tra cui l'esistenza nell'universo di curve chiuse che permettevano di viaggiare indietro nel tempo.

- Ax. 1.  $\{P(\varphi) \wedge \square \forall x[\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]\} \rightarrow P(\psi)$   
 Ax. 2.  $P(\neg\varphi) \leftrightarrow \neg P(\varphi)$   
 Th. 1.  $P(\varphi) \rightarrow \diamond \exists x[\varphi(x)]$   
 Df. 1.  $G(x) \iff \forall \varphi [P(\varphi) \rightarrow \varphi(x)]$   
 Ax. 3.  $P(G)$   
 Th. 2.  $\diamond \exists x G(x)$   
 Df. 2.  $\varphi \text{ ess } x \iff \varphi(x) \wedge \forall \psi \{\psi(x) \rightarrow \square \forall x[\varphi(x) \rightarrow \psi(x)]\}$   
 Ax. 4.  $P(\varphi) \rightarrow \square P(\varphi)$   
 Th. 3.  $G(x) \rightarrow G \text{ ess } x$   
 Df. 3.  $E(x) \iff \forall \varphi [\varphi \text{ ess } x \rightarrow \square \exists x \varphi(x)]$   
 Ax. 5.  $P(E)$   
 Th. 4.  $\square \exists x G(x)$

Figura 18.1: Prova ontologica

Nel 1970 si imbattè nella cosiddetta prova ontologica che aveva affascinato filosofi e matematici nel corso dei secoli. Egli riprendendo in mano la prova ontologica in versione filosofica che aveva dato Leibniz nel secolo precedente ne dette una formulazione in termini logico-matematici utilizzando la logica modale.

Dopo gli anni Sessanta, la salute di Gödel si rivelò precaria, morì di inedia il 14 gennaio del 1978.



Figura 18.2: Gödel da giovane

Scrisse di lui Solomon Feferman:

*I risultati fondamentali e sorprendenti ottenuti da Gödel nel decennio 1929-1939 hanno trasformato la logica matematica e lo hanno consacrato come il logico più importante del ventesimo secolo. La sua opera ha influenzato praticamente tutti gli sviluppi nella disciplina come anche tutta l'ulteriore riflessione sui fondamenti della matematica.*

*I risultati che hanno reso famoso Gödel sono la completezza della logica del primo ordine, l'incompletezza dei sistemi assiomatici contenenti l'aritmetica e, infine, la non contraddittorietà dell'assioma di scelta e dell'ipotesi del continuo, con gli altri assiomi della teoria degli insiemi. Durante lo stesso decennio, Gödel ha dato altri contributi alla logica, anch'essi significativi, lavorando sul problema della decisione, sull'intuizionismo e sulla nozione di calcolabilità.*

## 18.2 I teoremi di incompletezza

Per una più chiara trattazione dei teoremi di incompletezza è necessario dare una visione ad alto livello di quelle che sono le componenti che andremo a trattare nel seguito.

Gödel certamente quando iniziò a dimostrare i teoremi di incompletezza aveva ben in mente il fatto che bisognasse distinguere tra almeno tre mondi.

- Aritmetica intuitiva: studio dei numeri naturali così come viene condotto nei libri di testo.
- Aritmetica formale: sistema formale puramente sintattico che cerca di catturare le verità dell'aritmetica intuitiva. Si parla di segni, formule, regole di inferenza. Manipolazione di simboli tramite regole a partire da assiomi. In poche parole il sistema formale così come era concepito da Hilbert spogliato da ogni significato e interpretazione.
- Metamatematica: studio di sistema formale in questione. Enunciati su proprietà puramente sintattiche godute dal sistema formale. Il programma di Hilbert consisteva nel risolvere tutti i problemi, come quello della coerenza, studiando sistemi formali da un punto di vista metamatematico, utilizzando metodi finitistici, ad esempio, rifiutando l'infinito in atto.

Quello che Gödel riuscì brevemente a fare è stato immergere la metateoria nella teoria, in modo tale da far parlare il sistema formale di se stesso e riuscire a trovare un enunciato metamatico che non può essere deciso dal sistema formale stesso. In questo modo formula il primo teorema di incompletezza: un sistema formale ricorsivamente assiomatizzabile, sufficientemente potente e coerente ha almeno una formula che non può essere decisa sulla base degli assiomi.

Da questo teorema della metamatematica segue il secondo teorema di incompletezza: dato che il primo teorema dice che esiste un enunciato indecidibile allora se è possibile provare la coerenza all'interno del sistema stesso, questo enunciato lo si riesce a decidere. Da qui segue che non è possibile provare la coerenza con il sistema stesso.

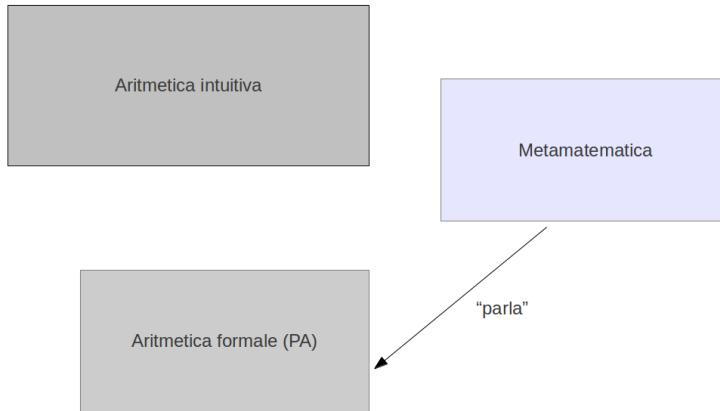


Figura 18.3: MetamateMATICA, aritmetica intuitiva e formale

### 18.3 L’aritmetica formale

Gödel rimase molto colpito dalle idee di Hilbert e cercò inizialmente di risolvere il secondo problema da lui proposto. Ed è proprio cercando la soluzione a questo problema che arrivò, invece, a dimostrare che questa dimostrazione di coerenza è impossibile, nella forma in cui la immaginava Hilbert.

Pubblicò, ancora venticinquenne, il suo risultato nel 1931 su una rivista scientifica<sup>1</sup>, con un articolo dal titolo “Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter systeme” (“Sulle proposizioni formalmente indecidibili dei *Principia Mathematica* e dei sistemi affini”).

All’interno del suo articolo, Gödel presenta il suo sistema formale, che chiama P, costruito basandosi principalmente sui contenuti dei *Principia Mathematica*. In realtà non è fondamentale, ai fini della comprensione del teorema, utilizzare il suo sistema. Quello che è davvero importante è la struttura di base del sistema, perciò altri sistemi formali, basati sull’Aritmetica di Peano,

---

<sup>1</sup>Monatshefte für Mathematik und Physik

possono essere ugualmente utilizzati per dimostrare il teorema. Prendiamo dunque un sistema, che chiamiamo PA (Aritmetica di Peano) e definiamolo indicando i segni da utilizzare, le formule, le regole di derivazione e gli assiomi usati.

- **Segni.** Abbiamo bisogno, prima di tutto, di segni che ci permettano di descrivere i numeri naturali e di parlare delle operazioni su di essi. Dunque introduciamo “0” (lo zero), “ $s$ ” (successore di), “+”(addizione), “ $\times$ ” (moltiplicazione), “(”, “)” (parentesi), “=”(uguale).

Per formulare delle proposizioni abbiamo, però, bisogno anche di connettivi logici: “&” (la congiunzione), “ $\vee$ ” (la disgiunzione), “ $\neg$ ” (la negazione), “ $\rightarrow$ ” (l’implicazione), “ $\forall$ ” (il per ogni), “ $\exists$ ” (l’esiste).

Ci servono dei simboli che rappresentino dei numeri (in pratica delle variabili numeriche) e altri che, invece, rappresentino delle formule. Indichiamo i simboli per rappresentare i numeri con le lettere minuscole “ $x$ ”, “ $y$ ”, “ $z$ ”, ecc... Indichiamo i simboli per rappresentare le formule con le lettere greche “ $\phi$ ”, “ $\psi$ ”, “ $\varphi$ ”, ecc...

- **Formule** Le formule sono combinazioni di simboli accettabili nel sistema. Dunque rispettano le regole formali legate ai simboli (per esempio il segno + deve essere seguito e preceduto da numeri). Vale la regola che se  $\phi$  e  $\psi$  sono formule, allora anche  $\neg\phi$ ,  $\phi \& \psi$ ,  $\phi \vee \psi$  e  $\phi \rightarrow \psi$  lo sono. Espressioni come “ $\phi \vee$ ”, oppure “ $\phi \neg \psi$ ” invece non sono formule, perché manca un termine nel connettivo logico oppure due termini sono legati da un operatore (la negazione) che prende un solo argomento e non può essere usato come connettivo.

- **Regole di derivazione** Sono le regole che ci permettono di ottenere una formula da una o più formule che sono assiomi o a loro volta sono state ottenute dagli assiomi.

Una prima regola è quella della *sostituzione*. Ad esempio, se abbiamo precedentemente ottenuto la formula “ $\phi \rightarrow \phi$ ”, possiamo sostituire le formula  $\phi$  con  $\psi \vee \varphi$  e ottenere una nuova formula: “ $(\psi \vee \varphi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$ ”. Un’altra regola che inseriamo nel nostro sistema è quella del *modus ponens*, cioè date le formule “ $\phi$ ” e “ $\phi \rightarrow \psi$ ”, possiamo dedurre la formula “ $\psi$ ”.

Si può introdurre ora anche il concetto di dimostrazione all’interno del nostro sistema. Una dimostrazione altro non è che una sequenza finita di

formule, ricavate una dall'altra tramite le regole di derivazione a partire dagli assiomi, che termina in una stringa che è esattamente il teorema che è stato dimostrato.

Dunque se, data una certa espressione  $\phi$ , esiste una sequenza finita di formule, legate dalle regole di derivazione, che termina nell'espressione data, allora si dice che tale espressione è dimostrabile all'interno di PA e si indica  $\vdash_{PA} \phi$ .

- **Axioms** Inseriamo innanzitutto degli assiomi logici:

$$(\phi \vee \phi) \rightarrow \phi; \phi \rightarrow (\phi \vee \psi); (\phi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \phi); (\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\varphi \vee \phi) \rightarrow (\varphi \vee \psi)).$$

Questi sono gli assiomi relativi alla disgiunzione, ai quali andranno aggiunti quelli della congiunzione e agli altri connettivi logici.

A questi aggiungiamo gli assiomi di Peano, più alcuni assiomi che definiscono la somma e la moltiplicazione:

$$\forall x (s(x) \neq 0)$$

$$\forall x, y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$$

$$\forall x (x + 0 = x)$$

$$\forall x, y (x + s(y) = s(x + y))$$

$$\forall x (x \times 0 = 0)$$

$$\forall x, y (x \times s(y) = (x \times y) + x)$$

$$(\phi(0) \& \forall x (\phi(x) \rightarrow \phi(s(x)))) \rightarrow \forall x (\phi(x)).^2$$

---

<sup>2</sup>L'induzione



### 18.3.1 La numerazione di Gödel

Per provare i suoi teoremi, egli elabora uno strumento che permette la realizzazione effettiva della visione hilbertiana della metamatematica, la cosiddetta ‘aritmetizzazione della sintassi’. Essa consiste in una codifica delle componenti sintattiche della teoria in modo da far corrispondere ad ogni termine, ad ogni formula e ad ogni derivazione uno e un solo numero naturale.

Dopo aver definito il sistema, Gödel illustra un suo metodo per assegnare ad ogni simbolo, formula o dimostrazione un determinato numero, chiamato appunto *numero di Gödel*. In realtà ci sono moltissimi modi diversi per fare questo assegnamento e non è molto importante, ai fini della dimostrazione, quale metodo viene usato. L’importante è trovare una relazione iniettiva, ma non necessariamente suriettiva, che associa dei numeri alle formule del nostro sistema. Useremo ora un metodo molto simile a quello usato da Gödel.

- **I simboli** Prima di tutto vengono assegnati dei numeri ai simboli. Ai simboli costanti vengono assegnati i numeri dispari dall’1 al 25, secondo la seguente regola:

0	<i>s</i>	+	×	(	)	&	∨	¬	→	∀	∃	=
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25

Passiamo poi alle variabili. Mentre i simboli costanti da utilizzare erano in numero finito, le variabili non lo sono, per cui seguiremo la regola che ad ogni variabile numerica viene assegnato un numero primo più grande di 25:

<i>x</i>	<i>y</i>	<i>z</i>	...
29	31	37	...

Si vede chiaramente che non ci sono sovrapposizioni tra numeri di Gödel di simboli diversi.

- **Le formule** Una volta assegnato un numero ad ogni simbolo si può passare ad assegnare un numero ad ogni formula. Per prima cosa è necessario trovare per ogni singolo termine della formula il corrispondente numero di Gödel. Per esempio, data l'espressione

$$\exists x(x = s(y))$$

otteniamo:

$$\begin{array}{ccccccccc} \exists & x & ( & x & = & s & ( & y & ) & ) \\ \downarrow & \downarrow \\ 23 & 29 & 9 & 29 & 25 & 3 & 9 & 31 & 11 & 11 \end{array}$$

Adesso costruiamo il numero di Gödel della formula prendendo i primi  $n$  numeri primi, dove  $n$  è la lunghezza della formula (nel nostro esempio 10), ed assegnando ad ognuno un esponente in questo modo:

all' $i$ -esimo numero primo viene dato come esponente il numero di Gödel dell' $i$ -esimo termine della formula. Per esempio, il numero di Gödel della formula vista prima sarà:

$$2^{23} \times 3^{29} \times 5^9 \times 7^{29} \times 11^{25} \times 13^3 \times 17^9 \times 19^{31} \times 23^{11} \times 29^{11}$$

In questo modo gli esponenti ci dicono qual è il simbolo e le basi ci dicono qual è la posizione che occupa.

Si vede chiaramente che questi numeri possono avere valori molto elevati.

- **Le dimostrazioni** Abbiamo visto prima che le dimostrazioni altro non sono che sequenze di formule. Per numerare le dimostrazioni usiamo un procedimento simile a quello usato per le formule. Troviamo il numero di Gödel per ogni formula e assegnamo il numero corrispondente all' $i$ -esima formula come esponente dell' $i$ -esimo numero primo.

Contrariamente a quanto potrebbe sembrare, non c'è rischio di confusione tra numeri di Gödel associati alle formule e numeri di Gödel associati alle dimostrazioni, nonostante il calcolo sia molto simile. Infatti, il numero di Gödel di una formula, una volta fattorizzato, ha come esponenti

i numeri corrispondenti ai simboli, che sono tutti numeri dispari. Invece il numero di Gödel corrispondente ad una dimostrazione, una volta fattorizzato, ha come esponenti i numeri corrispondenti alle formule, che sono numeri pari, in quanto nel loro calcolo il 2 compare con esponente almeno 1.

Come è possibile passare da simboli, formule e dimostrazioni ai numeri corrispondenti, è possibile fare anche il contrario. Cioè, dato un numero, è possibile riconoscere se è o meno un numero di Gödel e risalire all'espressione che rappresenta. Chiaramente, un numero come  $3^5 \times 7^2$  non è un numero di Gödel perché non compaiono potenze di tutti i numeri primi che precedono il 7. Così anche il numero  $2^5 \times 3^7 \times 5^{18}$  non lo può essere perché compaiono come esponenti sia numeri che rappresentano segni (quelli dispari) sia numeri che potrebbero rappresentare formule (quelli pari).

L'unicità dell'interpretazione dei numeri di Gödel è dovuta all'unicità della fattorizzazione di un numero in fattori primi. Vediamo un esempio di individuazione della formula associata a un numero di Gödel.

Abbiamo un numero che ha la seguente fattorizzazione:

$$2^{17} \times 3^{23} \times 5^7 \times 7^9 \times 11^7 \times 13^5 \times 17^3 \times 19^3 \times 23^1 \times 29^{25} \times 31^{31} \times 37^{11}$$

Chiaramente non si tratta del numero di Gödel di un simbolo perché non è un numero primo o quadrato di un primo, né un numero dispari. Non si tratta neppure del numero di Gödel di una dimostrazione, perché in quel caso gli esponenti sarebbero tutti pari. Dunque a questo numero corrisponderà una formula. Troviamo i simboli associati a ciascuno degli esponenti:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 17 & 23 & 7 & 9 & 7 & 5 & 3 & 3 & 1 & 25 & 31 & 11 \\ \downarrow & \downarrow \\ \neg & \exists & x & ( & x & + & s & s & 0 & = & y & ) \end{array}$$

Dunque la formula è :  $\neg \exists x(x + ss0 = y)$ .

Che equivale a  $\neg \exists x(x + 2 = y)$ , se sostituiamo la stringa *sso* con il simbolo 2 (che fa parte della nostra notazione comune, ma non dei simboli utilizzabili all'interno del nostro sistema formale).

### 18.3.2 Dimostrazione e Sostituzione

All'interno del suo articolo, Gödel presenta quarantacinque funzioni/relazioni relative alla metamatematica e mostra come, usando la numerazione prima definita, sia possibile rappresentarle tramite formule o relazioni aritmetiche. Per comprendere il risultato di Gödel non è, comunque, necessario conoscerle tutte. Perciò ci limiteremo a presentare le due più importanti: la relazione *dim* e la funzione *sost*.

**Dim.** Una dimostrazione, ricordiamolo, è una sequenza di formule, legate dalle regole di derivazione, e che termina con la proposizione finale che è il teorema dimostrato. Chiaramente, la relazione “essere dimostrazione di” non è facile da trasformare in una relazione algebrica, soprattutto per il fatto che è necessario controllare che la dimostrazione sia corretta, cioè che siano state usate le regole di deduzione.

Una relazione *Dim*( $m, n$ ) tra due termini, prende in argomento  $m$  ed  $n$ , che sono numeri di Gödel, il primo di una sequenza di formule e il secondo di una formula. Il nome *Dim* serve a ricordare qual è il significato di tale relazione: la sequenza di formule con numero i Gödel  $m$  è dimostrazione della formula con numero di Gödel  $n$  se e solo se il numero  $m$  sta rispetto al numero  $n$  nella relazione aritmetica definita *Dim*( $m, n$ ). E dunque il concetto metamatico di “essere relazione di” è stato ricondotto ad una relazione puramente algebrica tra i corrispondenti numeri di Gödel. Se invece una certa sequenza di formule non è dimostrazione di una certa formula, si scriverà  $\neg\text{Dim}(m, n)$ .

Avendo definito in questo modo la dimostrazione, vediamo brevemente cosa significhi essere un teorema nel nostro sistema. Una certa formula con numero di Gödel  $n$  è un teorema se ne esiste una dimostrazione, cioè  $\exists x(\text{Dim}(x, n))$ . Al contrario una formula non è un teorema nel sistema PA se non ne esiste alcuna dimostrazione, cioè  $\forall x(\neg\text{Dim}(x, n))$ .

**Sost.** Definiamo ora la sostituzione nel nostro sistema. Sappiamo che l'operazione di sostituzione di una variabile all'interno di una certa formula consiste nello scrivere al posto della variabile, in tutte le posizioni in cui questa compare nella formula, il termine con cui la sostituiamo. La funzione *Sost* compie proprio questo, restituendo infine il numero di Gödel della formula che si ottiene da questa sostituzione.

In pratica  $Sost(m, n, p)$  mi rappresenta il numero di Gödel della formula che si ottiene sostituendo, all'interno della formula con numero di Gödel  $m$ , la variabile con numero di Gödel  $n$  con il numerale  $p$ .<sup>3</sup>

Naturalmente è possibile, usando  $Sost$ , sostituire all'interno di una formula il suo stesso numero di Gödel. Per esempio scrivendo  $Sost(m, 31, m)$ , si sostituisce nella proposizione con numero di Gödel  $m$ , al posto della variabile  $y$  (che ha numero di Gödel 31) il numerale  $m$ .<sup>4</sup>

### 18.3.3 Io non sono dimostrabile

Si è visto che la formula  $\forall x(\neg Dim(x, m))$  indica che la formula con numero di Gödel  $m$  non è dimostrabile all'interno del sistema e che la funzione  $Sost(y, 31, y)$  restituisce il numero di Gödel della formula ottenuta sostituendo nella formula con numero di Gödel  $y$ , la variabile  $y$  con il numerale  $y$ .

Scriviamo dunque la seguente formula, che indicheremo con (G):

$$\forall x(\neg Dim(x, Sost(y, 31, y)))$$

Il significato di tale formula è che non esiste una dimostrazione per la formula con numero di Gödel  $y$  a cui ho sostituito, ad ogni occorrenza della variabile  $y$ , il numerale  $y$ .

Questa formula (G), essendo esprimibile con i simboli base del nostro sistema, ha un suo numero di Gödel, che indichiamo con  $n$ . Si tratta sicuramente di un numero molto grande, ma a noi basta sapere che esiste.

Veniamo, ora, al punto chiave della questione. Vogliamo sostituire all'interno della formula (G) la variabile  $y$  con il numerale  $n$  (cioè quello corrispondente al numero di Gödel proprio di (G)). Per come è definita  $Sost$ , il numero di Gödel della proposizione ottenuta da questa sostituzione è  $Sost(n, 31, n)$ .

E la formula è la seguente (la chiamiamo  $(\gamma)$ ):

---

<sup>3</sup>Diamo una breve distinzione tra numero e numerale. Un numerale è un *segno*. Un numero è invece qualcosa a cui il numerale dà un nome. All'interno della funzione  $Sost$  dobbiamo allora usare un numerale e quindi una stringa del tipo  $sss\dots s0$  quando si effettua la sostituzione.

<sup>4</sup>In realtà non sarebbe possibile costruire in questo modo funzioni all'interno di un simile sistema, in quanto non sono esprimibili con i simboli visti. Sarebbe più appropriato considerare la relazione tra numeri  $Sost(m, n, p, t)$  che rappresenta:  $t$  è numero di Gödel della formula ottenuta sostituendo all'interno all'interno della formula con numero di Gödel  $m$ , la variabile con numero di Gödel  $n$  con il numerale  $p$ . Per rendere più semplice la comprensione, continuiamo comunque a considerarla una funzione.

$$\forall x(\neg \text{Dim}(x, \text{Sost}(n, 31, n)))$$

Ma questa formula afferma l'indimostrabilità della formula con numero di Gödel  $\text{Sost}(n, 31, n)$ , che è esattamente il suo numero di Gödel.<sup>5</sup> Dunque questa formula afferma nientemeno che la propria indimostrabilità!

Si può vedere chiaramente una somiglianza con il paradosso del mentitore, che afferma “Questa proposizione è falsa”. La situazione è molto simile, in quanto l'enunciato della proposizione  $(\gamma)$  in concreto dice “Questa proposizione è indimostrabile”. In realtà la differenza fondamentale sta nel fatto che viene usata l'idea di dimostrabilità invece di quella di verità e questo non ci fa ricadere in un paradosso, come potrebbe sembrare.

#### 18.3.4 Il Primo Teorema di Gödel

Sia  $n_\gamma$  il numero di Gödel della proposizione  $(\gamma)$ . Se  $\bar{n}$  codificasse una dimostrazione di  $(\gamma)$ , allora all'interno di PA sarebbe possibile dimostrare che vale  $\text{Dim}(\bar{n}, n_\gamma)$  e dunque si avrebbe  $\text{PA} \vdash \text{Dim}(\bar{n}, n_\gamma)$ .

Vediamo cosa si può dire della dimostrabilità della proposizione  $(\gamma)$ .

Supponiamo che la proposizione  $(\gamma)$  sia dimostrabile, cioè  $\text{PA} \vdash (\gamma)$ . Riscrivendo al posto di  $(\gamma)$  il suo enunciato, questo equivale a  $\text{PA} \vdash \neg \exists n(\text{Dim}(n, n_\gamma))$ . Ma, essendo  $(\gamma)$  dimostrabile, allora esiste un  $\bar{n}$  tale che codifichi una dimostrazione di  $(\gamma)$ , e dunque  $\text{PA} \vdash \text{Dim}(\bar{n}, n_\gamma)$ .

Allora si può dimostrare che  $\text{PA} \vdash \exists n(\text{Dim}(n, n_\gamma))$ <sup>6</sup>. Ma è stato prima visto che vale anche  $\text{PA} \vdash \neg \exists n(\text{Dim}(n, n_\gamma))$ , il che è impossibile in un sistema coerente. Dunque  $(\gamma)$  non è dimostrabile all'interno del sistema PA.

Supponiamo allora che la negazione di  $(\gamma)$  sia dimostrabile.

Per affrontare questa parte del problema abbiamo bisogno del concetto di  $\omega$ -coerenza. Un sistema si dice  $\omega$ -incoerente se per una formula del linguaggio è contemporaneamente possibile provare  $\exists x(\phi(x))$  e  $\neg\phi(0), \neg\phi(1), \neg\phi(2), \dots$  cioè se è possibile dimostrare che esiste un numero che rende vera  $\phi$ , ma tale numero non è 0, non è 1, non è 2,....

L' $\omega$ -coerenza è una condizione più forte della coerenza semplice.

---

<sup>5</sup>In pratica l'utilizzo della numerazione di Gödel per le formule ci ha permesso di scrivere proposizioni autoreferenziali.

<sup>6</sup>Si può vedere che questo equivale a dire che  $\neg(\gamma)$  è dimostrabile, il che è impossibile, dal momento che abbiamo supposto  $(\gamma)$  dimostrabile e il sistema coerente.

Supponiamo il sistema PA sia  $\omega$ -coerente. Se  $\neg(\gamma)$  fosse dimostrabile all'interno di PA, cioè  $\text{PA} \vdash \neg(\gamma)$ , avremmo, sostituendo l'enunciato di  $(\gamma)$  ed eliminando la doppia negazione<sup>7</sup>,  $\text{PA} \vdash \exists n (\text{Dim}(n, n_\gamma))$ . Se avessimo che per ogni possibile  $n$  valesse  $\text{PA} \vdash \neg \text{Dim}(\bar{n}, n_\gamma)$ , il sistema sarebbe  $\omega$ -incoerente. Allora necessariamente esiste un  $\bar{n}$  tale che  $\text{PA} \vdash \text{Dim}(\bar{n}, n_\gamma)$ . Ma allora  $\bar{n}$  codifica una prova di  $(\gamma)$  all'interno di PA e quindi  $\text{PA} \vdash (\gamma)$ , che è la negazione dell'ipotesi iniziale, e cioè che  $\text{PA} \vdash \neg(\gamma)$ .<sup>8</sup> E questo è impossibile in un sistema coerente e quindi anche in uno  $\omega$ -coerente.

Poiché nel 1936 Barkley Rosser ha dimostrato una variante del primo teorema di incompletezza, in seguito parleremo solo di coerenza semplice.

Ma allora in un sistema coerente né  $(\gamma)$ , né la sua negazione sono dimostrabili. Dunque abbiamo trovato una formula indecidibile all'interno del sistema.

Dunque arriviamo all'enunciato del teorema:

*Se PA è coerente, al suo interno né  $(\gamma)$ , né la sua negazione sono dimostrabili.*

Potrebbe sembrare che questa esistenza di un enunciato indecidibile sia un problema del nostro sistema in particolare, magari dovuto al fatto che gli assiomi presenti sono insufficienti, e che ampliando questo insieme di assiomi la proposizione potrebbe diventare dimostrabile.

Costruiamo allora il sistema  $\text{PA}_1$  costruito in modo simile al sistema PA, ma aggiungendo tra gli assiomi anche  $(\gamma)$ . Poiché  $(\gamma)$  non è in contraddizione con gli altri assiomi, ma è indipendente, posso aggiungerla ottenendo di nuovo un sistema con le stesse proprietà di PA, in particolare con la capacità di esprimere l'aritmetica. Dunque abbiamo ottenuto un nuovo sistema in grado di esprimere l'aritmetica, ma in cui  $(\gamma)$  è decidibile, in quanto è assioma!

Ma su questo nuovo sistema possiamo definire una nuova relazione  $\text{Dim}_{\text{PA}1}$ , simile alla relazione  $\text{Dim}_{\text{PA}}$ , ma più estesa, in quanto abbiamo un nuovo assioma utilizzabile all'interno delle dimostrazioni. Allora potremmo costruire una proposizione  $(\gamma_{\text{PA}1})$ , simile alla proposizione  $(\gamma_{\text{PA}})$ , ma che utilizza la relazione  $\text{Dim}_{\text{PA}1}$ , che è diversa dalla relazione  $\text{Dim}_{\text{PA}}$ . Dunque si tratta di una proposizione diversa, per cui vale, all'interno di  $\text{PA}_1$ , quanto visto prima per  $(\gamma_{\text{PA}})$  nel sistema PA, e cioè è indecidibile! Possiamo procedere allo stesso

---

<sup>7</sup>Possiamo farlo perché si tratta di logica classica.

<sup>8</sup>Intuitivamente, poiché  $\neg(\gamma)$ , essendo la negazione di  $(\gamma)$ , afferma che  $(\gamma)$  è dimostrabile, con una prova di  $\neg(\gamma)$  avremmo dimostrato che  $(\gamma)$  è dimostrabile. Ma siamo di nuovo di fronte a una contraddizione.

modo aggiungendo ( $\gamma_{PA1}$ ) agli assiomi per costruire  $PA_2$  e via così. Ma in ogni caso è possibile costruire una proposizione indimostrabile.

Per questo si parla di *Incompletezza essenziale*, cioè che non può essere risolta aggiungendo assiomi al sistema.

Dunque il teorema si può generalizzare a tutti i sistemi formali simili a quello che abbiamo scelto noi:

*Teorema 37* (Primo Teorema di Incompletezza). Se un sistema formale in cui è possibile esprimere l'aritmetica è coerente, allora esiste al suo interno una proposizione indecidibile, cioè tale che non può essere dimostrata e non si può dimostrare neppure la sua negazione.

In altre parole, questo ci dice che il sistema non è completo, cioè al suo interno non è possibile decidere riguardo ad ogni proposizione formulabile. Dunque ogni sistema di questo tipo che sia coerente è anche incompleto.

### 18.3.5 Il Secondo Teorema di Gödel

Cerchiamo di capire come il fatto di aver dimostrato che esiste una proposizione non ammissibile all'interno del sistema possa portarci a vedere che è impossibile dimostrare la coerenza al suo interno.

Abbiamo già visto che un sistema si dice *coerente* se al suo interno non è possibile dimostrare contemporaneamente una proposizione e la sua negazione.

Sistemi non coerenti hanno una scarsa utilità, in quanto all'interno di essi sarebbe dimostrabile qualunque cosa<sup>9</sup>. Ma allora dimostrare la coerenza di un sistema equivale a dimostrare che esiste almeno una proposizione non dimostrabile. Dunque la proprietà di un sistema di essere coerente può essere formalizzata nella seguente espressione del sistema:

$$\exists y(\forall x(\neg Dim(x, y)))$$

Chiamiamo (A) questa espressione. Con il primo teorema abbiamo visto che se un sistema è coerente allora la formula ( $\gamma$ ) non è dimostrabile all'interno. Ma poiché ( $\gamma$ ) afferma la sua stessa indimostrabilità, affermare che ( $\gamma$ ) non è dimostrabile equivale ad affermare ( $\gamma$ ) stessa. Dunque abbiamo che la coerenza di un sistema implica necessariamente ( $\gamma$ )!

---

<sup>9</sup>Perché per le regole di deduzione logica, da una contraddizione è possibile derivare qualunque cosa.

$$(A) \rightarrow (\gamma)$$

Supponiamo ora che (A), cioè la coerenza del sistema, sia dimostrabile. Allora avremmo a nostra disposizione una prova di (A) ed anche una prova di  $(A) \rightarrow (\gamma)$ , che abbiamo visto essere equivalente al primo teorema già dimostrato. Ma allora, per la regola del *modus ponens* anche  $(\gamma)$  sarebbe dimostrabile. E invece abbiamo visto con il primo teorema che se il sistema è coerente,  $(\gamma)$  non può essere dimostrata al suo interno. Siamo giunti ad una contraddizione e dunque abbiamo, necessariamente, che:

*Se PA è coerente allora la sua coerenza non può essere dimostrata al suo interno.*

E dunque, generalizzando a tutti i sistemi formali simili al nostro:

*Teorema 38* (Secondo Teorema di Incompletezza). Dato un sistema formale in cui sia possibile esprimere l'aritmetica, se questo sistema è coerente, allora non è possibile dimostrare al suo interno la sua coerenza usando metodi finitari.

Tale risultato potrebbe essere fainte. Questo non esclude affatto che sia possibile dimostrare la coerenza dell'aritmetica! Come dice Gödel stesso, subito dopo aver enunciato e dimostrato il secondo teorema:

*Deve essere precisato che la Proposizione XI<sup>10</sup> (e i corrispondenti risultati per M ed A<sup>11</sup>) non rappresenta alcuna contraddizione con il punto di vista formalista di Hilbert. Perché questo punto di vista presuppone solo l'esistenza di una prova di consistenza effettuata con metodi finitari, e potrebbero esserci prove finitarie che non possono essere espresse in P<sup>12</sup> (o in M o in A).*

Per comprendere meglio quest'ultimo punto usiamo la seguente analogia. Si è dimostrata l'impossibilità di trisecare un angolo utilizzando riga e compasso. Questo non significa affatto che sia impossibile trisecare un angolo, ma che è impossibile farlo usando solo quegli strumenti. Dunque non si può escludere che la trisezione dell'angolo sia possibile con degli altri strumenti.

---

<sup>10</sup>All'interno del suo articolo, Gödel aveva enunciato una serie di proposizioni. Quello che noi abbiamo chiamato Primo Teorema di Incompletezza era nel suo articolo la Proposizione VI, mentre il Secondo Teorema di Incompletezza era indicato come la Proposizione XI.

<sup>11</sup>M indica il sistema formale costruito sugli assiomi della teoria degli insiemi, mentre A su quelli della matematica classica.

<sup>12</sup>è il sistema usato da Gödel. Ma abbiamo già visto che il sistema PA che abbiamo preso andava ugualmente bene.



## 18.4 Interpretazioni dei teoremi di Gödel

### 18.4.1 Interpretazioni postmoderne

Vi sono una gran quantità di discussioni sull'interpretazione dei teoremi di incompletezza di Gödel. In molte situazioni i teoremi vengono generalizzati a campi con i quali in realtà non hanno nulla a che fare. Vediamone alcuni esempi.

Consideriamo il seguente brano preso dalla *Critica della ragione politica* di Debray:

*L'enunciato del segreto dei disagi collettivi, cioè della condizione a priori di ogni storia politica passata, presente e a venire, consiste in alcune parole semplici, quasi infantili.[...] Questo segreto ha la forma di una legge logica, generalizzazione del teorema di Gödel: non esiste sistema organizzato senza chiusura e nessun sistema può chiudersi grazie ai soli elementi del sistema.*

In pratica, sulla base del teorema di Gödel che dice che un sistema formale è incompleto perché esiste sempre una formula indimostrabile, Debray afferma che le società non sono complete in se stesse e per organizzarsi hanno bisogno di fondarsi su qualcosa di esterno.

Vediamo un'altra citazione:

*Le persone religiose sostengono che tutte le risposte si trovano nella Bibbia o in qualsiasi testo adoperino. Questo vuol dire che la Bibbia è un sistema completo, così Gödel sembra indicare che ciò non può essere vero. E lo stesso*

*si potrebbe dire di qualsiasi religione che affermi (cosa che fanno tutte) un insieme definitivo di risposte.*<sup>13</sup>

Ovvero, nessuna religione può dare delle risposte ad ogni cosa. Indipendentemente dalla verità o meno di tale affermazione, dovrebbe risultare evidente che non può certo essere considerata una conseguenza dei teoremi di incompletezza. Come la citazione precedente, anche questa non ha nulla a che vedere con l'aritmetica, mentre i teoremi di Gödel si applicano a sistemi che sono in grado di esprimere l'aritmetica al loro interno.

Oltre a questo, i teoremi di Gödel vanno applicati a sistemi formali. La Bibbia, così come qualunque altro testo sacro, non può essere considerato un sistema formale: innanzitutto è scritta in un linguaggio ordinario, che non potrebbe essere tradotto in un linguaggio formale senza snaturarla; in secondo luogo in testi di questo tipo non sono definiti concetti come quello di assioma, teorema e dimostrazione, che sono fondamentali in un sistema formale. Infine sarebbe decisamente insensato estendere il concetto di completezza: infatti, un sistema è completo quando, per ogni formula esprimibile nel sistema, si può dimostrare o la formula stessa o la sua negazione. Ma quali sono le formule che la Bibbia dovrebbe esprimere?

#### 18.4.2 Interpretazione platonista

Vediamo ora in cosa consisteva il platonismo matematico e quali effetti i teoremi di Gödel hanno avuto su questo pensiero.

Il platonismo matematico considera i numeri e gli oggetti matematici come entità astratte esistenti indipendentemente da noi. Gli enunciati matematici non sono altro che descrizioni di questi oggetti e delle loro proprietà, che noi possiamo cogliere attraverso l'intuizione. Dunque un matematico non può inventare o costruire nuovi oggetti matematici, in quanto questi già esistono in sé, anche se non se ne era a conoscenza. Il lavoro di un matematico consiste, dunque, nello scoprire questi oggetti e ciò che li riguarda.

Ad esempio il fatto che 1729 sia il più piccolo numero esprimibile in due modi come somma di due cubi sarebbe stato vero anche se nessuno ci avesse mai fatto caso, perché questo numero esisteva già di per sé, con tutte le sue caratteristiche.

Gödel era un platonista, ma si era formato all'interno del Circolo di Vienna, che trattava la matematica come semplice “sintassi del linguaggio” e aveva una

---

<sup>13</sup>Franzén T. *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to its Use and Abuse.*

posizione antiplatonista. Perciò, Gödel non espose le sue convinzioni, se non dopo molti anni.

*Ma, nonostante la loro distanza dall'esperienza sensoriale, abbiamo in qualche modo una percezione anche degli oggetti della teoria degli insiemi, come pare dal fatto che gli assiomi ci si impongono come veri. Non vedo motivi per avere meno fiducia in questo tipo di percezione, cioè nell'intuizione matematica, che nelle percezioni sensoriali che ci inducono a costruire le teorie fisiche[...]*

*Si deve fare continuamente appello all'intuizione matematica non solo per ottenere delle risposte non ambigue alle questioni della teoria transfinita degli insiemi, ma anche per risolvere problemi della teoria dei numeri finitista (del tipo della congettura di Goldbach), dove la significatività e non ambiguità dei concetti che compaiono in essi difficilmente potrebbe essere messa in dubbio. Questa è una conseguenza del fatto che per ogni sistema assiomatico esistono infinite proposizioni indecidibili di tale tipo.<sup>14</sup>*

La congettura di Goldbach dice che ogni numero pari può essere scritto come somma di due numeri primi. Tale congettura non è mai stata dimostrata, ma non si è neppure trovato un controesempio e dunque non si è dimostrata neppure la sua negazione. Eppure si tratta di un'affermazione sensata e che ha sicuramente un suo valore di verità. Questa affermazione può essere vera o falsa, indipendentemente dal fatto che lo si sia dimostrato. Dunque la verità può oltrepassare la dimostrazione.

Se una certa cosa non è dimostrabile all'interno di un sistema, vuol dire che l'insieme dei suoi assiomi non è sufficiente a dimostrarla.

Ma se anche aggiungessimo dei nuovi assiomi per dimostrare tale proposizione, avremmo comunque un sistema formale che cade sotto l'influsso del teorema di Gödel e perciò si potrebbe trovare una nuova affermazione indimostrabile. Dunque, per quanto si possa ingrandire il sistema con cui si lavora, sarà sempre impossibile ottenere una descrizione completa della realtà. La matematica, insomma, non può essere ridotta alla semplice sintassi.

Questa impossibilità di ridurre la matematica a sistemi formali viene affermata anche da Goldstein:

*(γ) è indimostrabile e, visto che questo è ciò che dice, è anche vera. Non abbiamo trovato che è vera trovandone una prova entro il sistema formale,*

---

<sup>14</sup>Gödel, *Russell's Mathematical Logic*.

*usando le regole puramente meccaniche di quel sistema, e cioè, deducendovela. Piuttosto, abbiamo mostrato che è vera, ironicamente, uscendo dal sistema e mostrando che non se ne può produrre una prova entro il sistema formale. [...] Rimane qualcosa -sempre- che esclude la cattura in un sistema formale. È in questa metaluce che Gödel vide i propri teoremi di incompletezza.*<sup>15</sup>

## 18.5 Il Formalismo dopo i Teoremi di Gödel

Hilbert aveva concepito un ambizioso e articolato piano per mettere al sicuro tutta la matematica esistente, sviluppandola in modo perfettamente supervisionabile e dimostrandola libera da contraddizioni.

Ma Hilbert si era spinto anche oltre, congetturando che il metodo assiomatico fornisca i mezzi non solo per formulare, ma anche per risolvere ogni problema matematico.

Tale pretesa può essere giustificata solo ritenendo che le teorie formali con cui la matematica ha a che fare siano *complete*<sup>16</sup>, cioè che dimostrino sempre o una formula o la sua negazione. Ciò è esplicitamente congetturato da Hilbert e Bernays per quanto riguarda l'aritmetica e l'analisi [5] e sembra ci si aspettasse lo stesso anche per la teoria degli insiemi.

Ma le cose non stanno come Hilbert pensava: nel 1931 Gödel dimostrò infatti che ogni teoria formale che estenda la teoria standard PA dell'aritmetica non può essere completa, dato che esistono nella teoria delle *proposizioni indecidibili* che il sistema non è in grado né di dimostrare né di refutare. Questo dimostra che su strutture infinite non è in generale possibile simulare una nozione platonica di verità mediante un sistema formale, e perciò usare i sistemi formali come procedimenti di decisione totali.

Ma c'è di più: Gödel mostrò che ogni proposizione della metamateMATICA su un dato sistema formale è equivalente ad una proposizione aritmetica, traducibile in una formula nel linguaggio dell'aritmetica.

In particolare, alla proposizione di consistenza (o coerenza) di una teoria  $T$  corrisponde una formula aritmetica  $\text{Con}(T)$ . Gödel dimostra che ogni teoria  $T$  che estenda la teoria standard dell'aritmetica non dimostra la formula  $\text{Con}(T)$ .

---

<sup>15</sup>Goldstein R. *Incompleteness. The Proof and Paradox of Kurt Gödel.*

<sup>16</sup>È interessante osservare che i formalisti non fanno distinzione tra completezza sintattica e *categoricità*, cioè la proprietà di una teoria di ammettere un solo modello a meno di isomorfismi.

Ne segue l'impossibilità di dimostrare con metodi finitistici la consistenza dell'aritmetica e, *a fortiori*, la consistenza di una teoria all'interno della quale è possibile sviluppare l'aritmetica, quale quella degli insiemi.

Da ciò segue che una dimostrazione di coerenza di un tale sistema deve necessariamente fare ricorso a qualche principio non contenuto in esso. Quindi se si cerca una dimostrazione finitaria della coerenza di tale teoria, si deve estendere l'ambito della matematica finitaria oltre ciò che è esprimibile nell'aritmetica formale e questo effettivamente è stato fatto da Gerhard Gentzen che trovò nel 1936 una dimostrazione di coerenza per l'aritmetica formale che fa uso dell'induzione fino ad un particolare numero ordinale transfinito, chiamato epsilon-zero. Se poi dall'aritmetica si passa all'analisi matematica, cioè ad una teoria formale per i numeri reali, la dimostrazione di coerenza deve attendere il 1970 e richiede l'induzione fino ad un ordinale infinitamente più grande di epsilon-zero.

Inoltre, come si è dedotto sopra, la teoria ZF non è in grado di dimostrare la propria coerenza, quindi per farlo abbiamo bisogno di un principio non dimostrabile in ZF stessa. Ora, da un lato è del tutto irragionevole ritenere che la matematica finitaria non sia contenuta nella teoria degli insiemi nella quale è di fatto contenuta tutta la matematica d'oggi e dall'altro, fatto ancora più rilevante, è attualmente del tutto inimmaginabile un principio matematico che trascenda la teoria degli insiemi e quindi risulta proprio impossibile allo stato attuale fornire una prova di coerenza di tale teoria.<sup>17</sup>

Il programma di Hilbert per mettere al sicuro la matematica dai paradossi garantendone la consistenza con mezzi “al di sopra di ogni sospetto” era in questo modo distrutto.

Nonostante questo duro colpo alla sua filosofia, il formalismo si impose nella pratica matematica come fondazione dominante: oggi, gran parte della comunità matematica utilizza una teoria assiomatica, la teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con assioma di scelta (ZFC), come fondamento per il proprio lavoro.

Il successo del metodo assiomatico formale è probabilmente da attribuirsi al fatto che esso rimane ad oggi l'unica maniera in cui è possibile sviluppare in modo completamente chiaro e finitistico teorie transfinite, quali la teoria degli insiemi e l'analisi, preservandone tutti i risultati (anzi, favorendo salti

---

<sup>17</sup>Sambin, *Alla ricerca della matematica perduta*.



nell'infinito sempre più arditi e slegati da ogni possibilità di interpretazione costruttiva).

A prescindere comunque dalla teoria degli insiemi e dal suo attuale successo, il formalismo ha dato un grosso contributo alla matematica e alla sua filosofia per una ragione più generale.

Grazie al metodo assiomatico formale, infatti, fissate le premesse e le regole logiche, il procedimento di deduzione diviene un processo combinatorio e pertanto non controverso e anzi addirittura automatizzabile. In questo modo si garantisce una volta per tutte la possibilità di risolvere ogni disputa sulla correttezza dei teoremi formalizzati, e di ricondurre i disaccordi a una diversa (ma libera) scelta di principi (assiomi o regole logiche).

# Bibliografia

- [1] Paul Bernays, “Die Beteutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik”, *Die Naturwissenschaften* 10, 1922, pp 93-99. Traduzione inglese disponibile in [7].
- [2] David Hilbert, “Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung,”, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 1, 1922, pp 157-77. Traduzione inglese disponibile in [7].
- [3] Paul Bernays, “Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen,” *Matematische Annalen* 90, 1923, pp. 159-63. Traduzione inglese disponibile in [7].
- [4] David Hilbert, “Problemen der Grundlegung der Mathematik,” *Matematische Annalen* 102, 1929, pp. 1-9. Traduzione inglese disponibile in [7].
- [5] Paul Bernays, “Die Philosophie der Mathematik und die Hilbersche Beweistheorie,” *Blätter für deutsche Philosophie* 4, 1930-31, pp.326-67. Traduzione inglese disponibile in [7].
- [6] David Hilbert, “Die Grundlegung der elementaren Zahlentheorie,” *Matematische Annalen* 104, 1931, pp.485-94. Traduzione inglese disponibile in [7].
- [7] Mancosu, Paolo, *From Brouwer to Hilbert*, Oxford University Press, 1998.
- [8] Otto Blumenthal, *Lebensgeschichte*, Hilbert Geschichte Abhandlungen, 3, 1935.
- [9] Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, 1991.

- [10] Victor Vinnikov, “We shall know: Hilbert’s apology”, *Mathematical intelligencer* 21, 1999, pp. 42-46.
- [11] Gödel, Kurt, *On formally undecidable proposition of Principia Mathematica and Related Systems*, Oliver and Boyd, 1962.
- [12] Berto, Francesco, *Tutti Pazzi per Gödel*, Laterza, 2008.
- [13] Nagel Ernest and Newman James R., *La prova di Gödel*, Bollati Boringhieri, 1992.
- [14] Boyer Carl B., *Storia della matematica*, Arnoldo Mondadori Editore, 2009.
- [15] Gödel, Kurt, *Scritti scelti*, Bollati Boringhieri, 2011.
- [16] Avigad J. and Rech E.H., *Clarifying the nature of infinite: the development of metamathematics and proof theory*, 2001.
- [17] Sambin, Giovanni, *Alla ricerca della certezza perduta*, 1987.
- [18] Hilbert, David, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V.Michele Abrusci, Bibliopolis, 1984.
- [19] Roberto G. Timossi, *Prove logiche dell’esistenza di Dio da Anselmo d’Aosta a Kurt Gödel: storia critica degli argomenti ontologici*, 2005.
- [20] Kurt Gödel, *La prova matematica dell’esistenza di Dio*, a cura di Gabriele Lolli e Piergiorgio Odifreddi, Bollati Boringhieri editore, 2006