Bella vita e lemmi altrui

di mr. Yoneda, gentiluomo

Fosco Loregian

Tallinn University of Technology

Biografia minima

- Nobuo Yoneda (米田 信夫) 1930 –1996;
- professore all'università di Tokyo dal 1952 al 1990;
- matematico e informatico teorico;
  - legato alla congettura di Collatz (programma in ALGOL la verifica dei primi $\approx 10^{12}$ casi)
  - lemma di Yoneda
  - prodotto (estensioni) di Yoneda
  - strutture di Yoneda

$$\text{N. Yoneda} \longleftarrow \text{S. Iyanaga} \longleftarrow \text{T. Takagi} \longleftarrow \text{D. Hilbert (!)}$$

- assioma di estensionalità:

$$(A = B) \iff \forall x.(x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)$$

Alternativamente: una funzione è determinata dal suo valore sugli elementi del dominio:

$$(f = g) \iff \forall x.f(x) = g(x)$$

Due intuizioni sul lemma di Yoneda

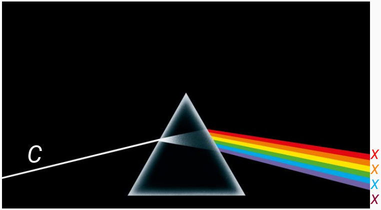
- Una categoria $\mathcal{C}$ è un sistema di transizione, i cui stati sono gli oggetti: ognuno di tali oggetti C definisce lo 'spray' delle frecce $C \to X$ (e dualmente $X \to C$).

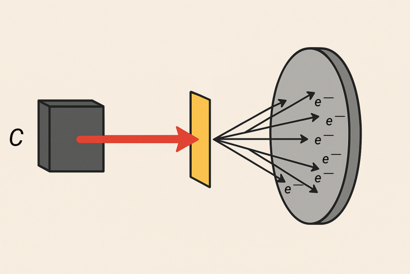
$$X \longmapsto \begin{tikzcd} & X \\ C \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & X \\ & X \end{tikzcd} \qquad\qquad X \longmapsto \begin{tikzcd} X \arrow[dr] & \\ X \arrow[r] & C \\ X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Questo principio

dalle frecce che {entrano in/escono da} loro li riconoscerete (MT 7,15-20)

non è molto lontano dall'esperienza di tanti:





$$X \longmapsto \begin{tikzcd} & X \\ C \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & X \\ & X \end{tikzcd}$$

‘Qui vige l’uguaglianza’. . .

Il principio di estensionalità per gli insiemi (e le funzioni) non cade dal cielo, è un assioma che definisce il significato di ‘uguaglianza’ tra (elementi di un ben preciso modello) di insiemi e funzioni.

Ci sono alternative:

- Aczel ha costruito una categoria dove gli insiemi sono presentati come grafi ‘decorati’, e l’estensionalità è la proprietà di ‘avere lo stesso comportamento’ (bisimilarità) interpretando le frecce del grafo come ‘transizioni’ tra ‘stati’.

- Due funzioni possono essere ‘uguali’, similmente, se hanno lo stesso ‘comportamento’ ma diversa costruzione sintattica.

‘Qui vige l’uguaglianza’...

```haskell
f :: Int -> Int
f x = 0

g :: Int -> Int
g x = if halts(x) then 0 else 0

h :: Int -> Int
h n = runIdentity $ do
  let !_ = force (10 ^ product [1 .. n])
  return 0
```

‘Qui vige l’uguaglianza’. . .

Non esiste una risposta univoca alla domanda ‘queste due cose sono uguali?’. La risposta è contestuale: dipende da cosa significa uguali.

- l’uguaglianza sintattica è spesso troppo restrittiva;
- l’uguaglianza estensionale può non essere conveniente quando le funzioni sono ‘processi’ (`f n == g n == h n` per ogni *n*...) che avvengono nel tempo.
- La teoria delle categorie preferisce non distinguere oggetti isomorfi, prendendo l’isomorfismo (canonico/naturale) come definizione di ‘uguaglianza’ tra oggetti di una categoria $\mathcal{C}$.

Temet nosce praesertim

Il lemma di Yoneda sostanzia quest'ultima idea in un enunciato preciso.

pseudoLemma di Yoneda

Due oggetti A, B di $\mathcal{C}$ sono isomorfi se, e solo se, i funtori rappresentabili Y_A e Y_B a loro associati sono isomorfi (in modo naturale).

$$A \underset{\mathcal{C}}{\cong} B \iff \forall X : \{X \to A\} \underset{\mathbf{Set}}{\cong} \{X \to B\}$$

Per accedere alla 'identità' di un oggetto A di $\mathcal{C}$ si guardi come A è in relazione a tutti gli altri oggetti di $\mathcal{C}$ (con particolare attenzione a sé stesso).

Questo è il momento in cui l'intuizione cede il posto al formalismo.

Definizione

Una categoria consiste di...

Definizione

Un funtore tra categorie $\mathcal{C}, D$ consiste di…

Definizione

Una trasformazione naturale tra funtori F, G consiste di...

In particolare una biiezione naturale...

Sia $\mathcal{C}$ una categoria; ogni oggetto $C \in \mathcal{C}_0$ definisce un funtore rappresentabile

$$Y_C = \mathcal{C}(C, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

che associa ad un oggetto $X \in \mathcal{C}_0$ l'insieme delle frecce $Y_C(X) = \mathcal{C}(C, X)$ di dominio C e codominio X, e a ogni freccia $f : X \to X'$ la funzione $Y_C(f) : Y_C(X) \to Y_C(X')$ che associa a ogni freccia $g : C \to X$ la composizione $f \circ g : C \to X \to X'$.

[Oppure: i funtori corappresentabili

$$Y^C = \mathcal{C}(-, C) : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

che associano a ogni oggetto X l'insieme delle frecce $Y^C(X) = \mathcal{C}(X, C)$ di dominio X e codominio C, e a $f : X \to X'$ la funzione $Y^C(f) : Y^C(X') \to Y^C(X)$, $g : X' \to C$ la composizione $g \circ f : X \to X' \to C$.]

'Lemma di Yoneda' è un termine ombrello che si riferisce a una serie di proprietà dei funtori rappresentabili di $\mathcal{C}$ e della categoria che formano.

Definizione

Una distribuzione su $\mathcal{C}$ è un funtore $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$; la categoria delle distribuzioni $\mathbf{P}(\mathcal{C})$ ha per oggetti le distribuzioni e per frecce le trasformazioni naturali $\alpha : F \Rightarrow G$.

$$\boxed{\forall(f : X \to Y) : \alpha_Y \circ Ff = Gf \circ \alpha_X}$$

Si impara, studiando teoria delle categorie, che le distribuzioni su una categoria sono particolarmente importanti:

- I funtori rappresentabili Y_C sono delta di Dirac concentrate su un punto di $\mathcal{C}$; (e si presentano nella forma covariante o contravariante);

Una distribuzione $M : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ su $\mathcal{C}$ va pensata come il risultato di una misurazione efettuata sugli oggetti di $\mathcal{C}$, di modo che gli elementi di MC (la misurazione M effettuata nello stato C) quantifichino la relazione tra MC ed MC', se gli stati C, C' sono connessi da una freccia $f : C' \to C$.

Si confronti la ben più familiare frase “ad uno spazio M di interesse fisico, si associa lo spazio delle quantità osservabili su M”.

Alcune misurazioni sono ‘concentrate’ in un oggetto specifico, e misurano quanto esso è connesso (inbound o outbound) con gli altri oggetti della categoria $\mathcal{C}$. Le distribuzioni sono oggetti generalizzati di $\mathcal{C}$.

for C a category, one wants to look at distributions on C as being "generalized objects modeled on C" in the sense that these are objects that have a sensible rule for how to map objects of C into them. You can "probe" them by test objects in C.

For that interpretation to be consistent, it must be true that some X in C regarded as just an object of C or regarded as a generalized object is the same thing. Otherwise it is inconsistent to say that distributions on C are generalized objects on C.

The Yoneda lemma ensures precisely that this is the case.

(src: MSE)

Lemma di Yoneda

Per ogni oggetto C di una categoria $\mathcal{C}$, ed ogni distribuzione $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$, esiste una biiezione naturale

$$\mathbf{Nat}\big(\mathcal{C}(-, C), F\big) \xrightarrow{ev_{1,C}} FC$$

che manda $\alpha : \mathcal{C}(-, C) \Rightarrow F$ in $\alpha_C(1_C) \in FC$.

- $ev_{1,C}$ è iniettiva: α è determinata univocamente da $\alpha_C(1_C)$;

- $ev_{1,C}$ è suriettiva: ogni elemento $x \in FC$ è della forma $\alpha^x_C(1_C)$ per una (unica) trasformazione naturale α^x.

- $ev_{1,C}$ è naturale in C: per $u : C' \to C$ vale l'identità

$$Fu(\alpha_C(1_C)) = \alpha_{C'}(u)$$

- $ev_{1,C}$ è naturale in F: per $\gamma : F \Rightarrow G$ vale l'identità...

Corollario

Se $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ è a sua volta una distribuzione (concentrata in X), allora il lemma di Yoneda stabilisce che ogni trasformazione naturale $\alpha : \mathcal{C}(-, C) \Rightarrow \mathcal{C}(-, X)$ non può che agire come composizione con un'unica freccia $u_F : C \to X$.

Perché $\alpha_{C'} : \mathcal{C}(C', C) \to \mathcal{C}(C', X)$ è obbligata ad essere la funzione che manda $h : C' \to C$ in $\alpha_C(1_C) \circ h : C' \xrightarrow{h} C \to X$ e $u_F := \alpha_C(1_C)$.

Corollario

Due oggetto A, B di $\mathcal{C}$ sono isomorfi se, e solo se, i funtori rappresentabili Y_A e Y_B a loro associati sono isomorfi (in modo naturale).

Perché dal fatto che i funtori rappresentabili Y_A e Y_B sono isomorfi segue che esiste una famiglia di biiezioni $\alpha_C : \mathcal{C}(C, A) \to \mathcal{C}(C, B)$, e in particolare (se $C = A$) un'unica $\alpha_A(1_A) : A \to B$, e (se $C = B$) un'unica $\alpha_B^{-1}(1_B) : B \to A$ che sono inversi l'una dell'altra.

Corollario

Ogni categoria $\mathcal{C}$ si immerge dentro la categoria delle sue distribuzioni, mediante l'immersione di Yoneda

$$\begin{aligned} Y : \mathcal{C} &\hookrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{C}) \\ C &\longmapsto Y_C = \mathcal{C}(-, C) \end{aligned}$$

Principio del *negative thinking*

(Dovuto con tutta probabilità a Bill Lawvere)

In teoria delle categorie (e per estensione nella vita), davanti a una definizione nuova e misteriosa, che dipende da molte parti mobili, è utile chiedersi che cosa essa diventa quando alcune di quelle parti sono degeneri/banali.

- Che cosa dice il lemma di Yoneda quando $\mathcal{C}$ ha pochi oggetti?
- Che cosa dice il lemma di Yoneda quando $\mathcal{C}$ ha poche frecce?

CVMP[1]

[1] **C**ategorie **V**eramente **M**olto **P**iccole

Quando $\mathcal{C}$ ha solo un oggetto $\bullet$ e solo una freccia $1_\bullet : \bullet \to \bullet$, allora una distribuzione consiste di un insieme $F\bullet = A$;

c'è un unica delta di Dirac "concentrata" su $\bullet$, cioè $Y_\bullet(\bullet)$ è l'insieme $\{1_\bullet\}$, e una trasformazione naturale $Y_\bullet \Rightarrow A$ ha una sola componente, che sceglie un elemento di A; quindi

$$a : Y_\bullet \Rightarrow A \qquad a : \bullet \to A \qquad a \in A$$

sono scritture distinte per concetti equivalenti.

Ma allora il lemma di Yoneda per la categoria **Set** $=$ [$\bullet$, **Set**] è precisamente l'assioma di estensionalità!

$A = B$ se, e solo se, $a \in A \iff a \in B$.

Quando $\mathcal{C}$ non ha frecce non identiche (ovvero ha un insieme C_0 di oggetti, e un insieme $C_1 = C_0$ di frecce, ciascuna l'identità del rispettivo oggetto), un funtore $F : C_0 \to \mathbf{Set}$ consiste di una collezione di insiemi $\{FX \mid X \in C_0\}$;

Esiste un funtore rappresentabile $Y_X : C_0 \to \mathbf{Set}$ per ciascun $X \in C_0$, che associa a ogni oggetto C l'insieme $Y_X(C)$, che è

- vuoto se $C \neq X$;
- un singoletto $\{1_X\}$ se $C = X$.

Una trasformazione naturale $Y_X \Rightarrow F$ quindi ha diverse componenti,

$$\alpha_C : Y_X(C) \longrightarrow FC$$

ma solo una è una funzione non vuota, e sceglie un elemento $\alpha_X(1_X) \in FX$.

Monoidi/gruppi

$\mathcal{C} = G$

Quando $\mathcal{C}$ ha un solo oggetto $\bullet$, e tutte le frecce di $\mathcal{C}$ sono invertibili, $\mathcal{C}$ è un gruppo[2] Una distribuzione su G consiste di un insieme $F\bullet = A$ su cui G agisce mediante i suoi elementi.

Un insieme X dotato di una azione di gruppo $a : G \times X \to X$ si dice un G-insieme.

[2]Quando $\mathcal{C}$ ha un solo oggetto è un monoide. È più noto a chi ascolta il caso dei gruppi, perché i fisici studiano (poco, e male) teoria delle rappresentazioni.

Scriviamo $\mathcal{C} = G$, ed esiste un unico funtore rappresentabile $Y_\bullet : G \to \mathbf{Set}$, definito come segue

- $Y_\bullet(\bullet)$, è l'insieme delle frecce $g : \bullet \to \bullet$, ossia l'insieme degli elementi del gruppo G;
- ogni elemento $g \in G$ definisce una funzione $Y_\bullet(g) : G \to G$, che associa a ogni elemento $h \in G$ l'elemento $g \circ h = g \cdot h \in G$;
- $Y_\bullet(1_G)$ è la funzione identica; $Y_\bullet(xy) = Y_\bullet(x) \circ Y_\bullet(y)$.

Si tratta della rappresentazione canonica del gruppo G su sé stesso (si pensi alle matrici invertibili, alle permutazioni, alle trasformazioni di Lorentz, eccetera).

Il lemma di Yoneda per un gruppo guardato come categoria asserisce che

- per ogni G-insieme $(X, G \times X \to X)$, una funzione $f : G \to X$ equivariante corrisponde esattamente alla scelta di un elemento di X: se

$$f(gh) = g.f(h)$$

allora ponendo $h = 1_G$, $f(g \cdot 1_G) = g.f(1_G)$.

Tutti gli elementi di G sono 'uguali' (la rappresentazione canonica di G su sé stesso è transitiva) ma alcuni elementi sono più uguali di altri (l'identità).

Grafi

$\mathcal{G} = \{0 \rightrightarrows 1\}$

Quando $\mathcal{G}$ ha due oggetti $0, 1$ e due frecce $s, t : 1 \rightrightarrows 0$, allora una distribuzione su $\mathcal{G}$ è un grafo (orientato, senza cicli).

Infatti una distribuzione su $\mathcal{G}$ consiste di una coppia di insiemi $F0 = A_0$ (vertici), $F1 = A_1$ (lati) e due funzioni $Fs, Ft : A_1 \rightrightarrows A_0$ che ad ogni lato associano un vertice sv (il dominio) e tv (il codominio).

$\mathcal{G} = \{0 \rightrightarrows 1\}$

Ci sono due rappresentabili, Y_0 e Y_1, uno per ogni oggetto di $\mathcal{G}$, definiti come segue:

- $Y_0 = \mathcal{G}(-, 0)$ che manda 0 in $\mathcal{G}(0, 0) = \{id_0\}$, 1 in $\mathcal{G}(1, 0) = \varnothing$;
- $Y_1 = \mathcal{G}(-, 1)$ che manda 0 in $\mathcal{G}(0, 1) = \{s, t\}$, 1 in $\mathcal{G}(1, 1) = \{id_1\}$.

$$
\begin{tikzcd}
\varnothing \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \{id_1\} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
\{id_0\} & \{s, t\}
\end{tikzcd}
$$

$$
\left[\underset{id_0}{\bullet}\right] \qquad \left[\underset{s}{\bullet} \to \underset{t}{\bullet}\right]
$$

Matrici

la categoria delle matrici $\mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}}$ ha

- per oggetti i numeri naturali, $\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \dots$;
- per frecce $\langle n\rangle \to \langle k\rangle$ le matrici con k righe ed n colonne, a entrate intere.

$$\begin{bmatrix} -3 & 7 & 0 & -9 \\ 10 & -4 & 5 & -1 \\ 2 & 8 & -7 & 6 \end{bmatrix} : \langle 4\rangle \to \langle 3\rangle$$

La composizione di frecce è la moltiplicazione di matrici:

$${}_{3}\overset{4}{\boxed{\quad A \quad}} \circ {}_{4}\overset{5}{\boxed{\quad B \quad}} = {}_{3}\overset{5}{\boxed{\; A \circ B \;}}$$

è una freccia $\langle 5\rangle \to \langle 3\rangle$.

Il funtore rappresentabile $Y_{\langle k\rangle} = \mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}}(\langle k\rangle, \_) : \mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}} \to \mathbf{Set}$ associa a ogni oggetto $\langle n\rangle$ l'insieme $\mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}}(\langle k\rangle, \langle n\rangle)$ delle matrici $n \times k$ a entrate intere, e a ogni freccia $A : \langle n\rangle \to \langle m\rangle$ la funzione

$${}_{n}\overset{k}{\boxed{\; X \;}} \mapsto {}_{m}\overset{n}{\boxed{\; A \;}}\ {}_{n}\overset{k}{\boxed{\; X \;}}$$

Tre famiglie di trasformazioni naturali:

$$\tau_{ij}^{(k)} : \mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}}(\langle n\rangle, \langle k\rangle) \to \mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}}(\langle n\rangle, \langle k\rangle)$$
$$\mu_{\alpha,i}^{(k)} : \mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}}(\langle n\rangle, \langle k\rangle) \to \mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}}(\langle n\rangle, \langle k\rangle)$$
$$\sigma_{ij}^{(k)} : \mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}}(\langle n\rangle, \langle k\rangle) \to \mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}}(\langle n\rangle, \langle k\rangle)$$

- scambia di posto la riga *i* e *j* del suo argomento

$$\tau_{13}^{(3)} \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 0 & -6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 0 & -6 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$$

- moltiplica la riga *i* per α

$$\mu_{2,2}^{(3)} \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 0 & -6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 0 & -12 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$$

- somma alla riga *i* la riga *j*

$$\sigma_{13}^{(3)} \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 0 & -6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 13 \\ 0 & -6 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

Il lemma di Yoneda applicato a $\mathbf{Mat}_{\mathbb{Z}}$ dice che ogni trasformazione naturale tra funtori rappresentabili $Y_{\langle k\rangle} \Rightarrow Y_{\langle n\rangle}$ deve essere ottenuta per composizione con un 'elemento universale' $\langle n\rangle \to \langle k\rangle$ della categoria delle matrici, cioè una matrice A di dimensione $k \times n$ che realizza la trasformazione naturale.

Corollario

Le operazioni elementari su matrici

- $\tau_{ij}^{(k)}$, scambio di righe e colonne,
- $\mu_{\alpha,i}^{(k)}$, moltiplicazione di una riga per uno scalare,
- $\sigma_{ij}^{(k)}$, somma di righe

sono trasformazioni naturali tra funtori rappresentabili, indotte ciascuna dalla moltiplicazione (destra o sinistra) per una matrice di dimensione opportuna.

2.3. DEFINIZIONE (OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE RIGHE). *Le seguenti operazioni si dicono "operazioni elementari sulle righe di una matrice" A:*

(i) *scambiare di posto tra di loro due righe;*
(ii) *sostituire una riga con la somma di se stessa e di un multiplo scalare di un'altra riga;*
(iii) *moltiplicare una riga per uno scalare non nullo.*

operazioni elementari sulle righe di una matrice:	*moltiplicazione a sinistra per:*	*cambiamenti di base nel codominio:*
scambio tra loro le righe i-esima e j-esima	la matrice elementare $S(i,j)$	scambio tra loro i vettori i-esimo e j-esimo
sommo alla riga i-esima la j-esima moltiplicata per α	la matrice elementare $H(i,j,\alpha)$	sottraggo al j-esimo vettore l'i-esimo moltiplicato per α
moltiplico la riga i-esima per $\alpha \neq 0$	la matrice elementare $H(i,\alpha)$	divido l'i-esimo vettore per α

2.4. TEOREMA (RIDUZIONE DI GAUSS). *Tramite operazioni elementari sulle righe ogni matrice può essere ridotta in forma a scalini (per righe) usando operazioni dei tipi (i) e (ii); usando anche operazioni elementari del terzo tipo ogni matrice può essere ridotta in forma speciale a scalini (per righe).*

(src: AGLQ)

Dove si va da qui?

Il lemma di Yoneda ha molti volti nella matematica moderna:

- geometria algebrica (fasci su uno spazio topologico / su una categoria);
- topologia algebrica (teoremi di rappresentabilità, insiemi simpliciali,...)
- logica categoriale ('topos' di Grothendieck e 'matematica fibrata')
- ...

Vi ho raccontato solo parte della storia:

Teorema (decomposizione di distribuzioni su $\mathcal{C}$)

Ogni distribuzione $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \textbf{Set}$ è un colimite di rappresentabili,

$$FC \cong \int^X \mathcal{C}(C, X) \times FC$$

Si compari con (Petersen, K. *Ergodic Theory*, Theorem 5.14)

Teorema (decomposizione ergodica)

Ogni misura di probabilità sul cerchio S^1 si scrive come 'somma' (non numerabile) di delta di Dirac: in partic. la misura di Lebesgue si scrive

$$m = \int_{S^1} \delta_x \, dm(x).$$

Chiosa

Sottotitolo: breve apologia della mia fascinazione per le buone idee e le verità semplici, anziché per le tecniche complicate e ricamate sulle mode.

- Ho iniziato a studiare teoria delle categorie nel 2010 –ma probabilmente un po' prima; non ho ancora capito cosa sia *veramente* il lemma di Yoneda;
- Questo perché è una tautologia (la dimostrazione è molto semplice), che però implica dei fatti profondi sulla teoria delle categorie, e sul resto della matematica.
- Vi sono dei tentativi (a cui ho contribuito superficialmente) di ridurre la teoria delle categorie a 'una teoria matematica dove si istanzia il lemma di Yoneda';
- La geometria moderna non esisterebbe senza questa tautologia; un 'fatto semplice' ha cambiato il volto alla matematica del XX secolo.

Se vi ho incuriosito... $\mathbf{Ita} \underset{\perp}{\rightleftarrows} \mathbf{Ca}$

Riferimenti

- Escardó, M. H. Equality of mathematical structures. University of Birmingham, UK; UW Logic Seminar, Mathematics Department, University of Wisconsin, December 1, 2020. `https://web.math.wisc.edu/logic/talks/201201-Escardo.pdf`
- S. Derbyshire (https://mathoverflow.net/users/362/sam-derbyshire), "Philosophical" meaning of the Yoneda Lemma, URL (version: 2020-01-08): `https://mathoverflow.net/q/3184`
- Moss, L.S., "Non-wellfounded Set Theory", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), `https://plato.stanford.edu/archives/sum2018/entries/nonwellfounded-set-theory/`.