Strutture di Yoneda e accessibilità

Fosco Loregian

November 15, 2018

Contents

References

[ABLR02] J. Adámek, F. Borceux, S. Lack, and J. Rosický, *A classification of accessible categories*, Theory Appl. Categ. (2002), 7–30.

[AR94] J. Adámek and J. Rosický, *Locally presentable and accessible categories*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 189, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[Beron] D. Bernardini, *Notes on Yoneda structures*, Private communication.

[BKP89] Robert Blackwell, Gregory M Kelly, and A John Power, *Two-dimensional monad theory*, Journal of pure and applied algebra **59** (1989), no. 1, 1–41.

[Bor94] F. Borceux, *Handbook of categorical algebra. 2*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 51, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, Categories and structures.

[Kel89] G. Max Kelly, *Elementary observations on 2-categorical limits*, Bulletin of the Australian Mathematical Society **39** (1989), 301–317.

[Koc95] A. Kock, *Monads for which structures are adjoint to units*, Journal of Pure and Applied Algebra **104** (1995), no. 1, 41–59.

[Koc15] ———, *Duality for generic algebras*, Cah. Topol. Géom. Différ. Catég. **56** (2015), no. 1, 2–14. MR 3379076

[Lac10] Stephen Lack, *A 2-categories companion*, Towards higher categories, Springer, 2010, pp. 105–191.

[Lor18] Fosco Loregian, *2-categorie, un corso*, online notes, 2018.

[SW78] R. Street and R. Walters, *Yoneda structures on 2-categories*, J. Algebra **50** (1978), no. 2, 350–379.

[Web07] M. Weber, *Yoneda structures from 2-toposes*, Appl. Categ. Structures **15** (2007), no. 3, 259–323.

1 Lecture I: Introduzione

1.1 2-categorie: def di partenza

Una *2-categoria* è “come una categoria, ma gli hom-set sono categorie”: si tratta di un certo tipo di struttura 2-dimensionale che soddisfa le seguenti ipotesi

1. E’ data una classe di oggetti $\mathcal{K}_0$,
2. E’ dato per ogni coppia di oggetti $X, Y \in \mathcal{K}$ un insieme di morfismi (o *1-celle*) $\mathcal{K}(X, Y)$
3. E’ data una regola di composizione

$$c_{XYZ} : \mathcal{K}(X, Y) \times \mathcal{K}(Y, Z) \to \mathcal{K}(X, Z)$$

che sia *bifuntoriale*, ossia tale esista una regola di composizione orizzontale, una verticale, e tali che per esse valga la “regola di interscambio di Godement”:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\beta"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\delta"] & B \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Downarrow\gamma"] & C \end{tikzcd}$$

$$(\alpha * \beta) \circ (\gamma * \delta) = (\gamma \circ \alpha) * (\delta \circ \beta)$$

Una 2-categoria è una categoria arricchita su Cat, guardata come base monoidale (chiusa): ogni $\mathsf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ è a sua volta una categoria, i cui oggetti sono i funtori $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali. Ciascuna composizione è "bilineare", ed esiste una nozione di funtore arricchito (*2-funtore stretto*) e di trasformazione naturale arricchita (*trasf. naturale stretta*).

La teoria delle 2-categorie coincide allora con la teoria delle Cat -categorie? In parte sì: un gran numero di risultati è conseguenza della teoria generale sviluppata nel primo capitolo. Del resto, una parte ancora maggiore di risultati non si può ingabbiare nel linguaggio delle categorie arricchite: e questo perché segretamente la collezione delle 2-categorie (di cui, fatti salvi alcuni problemi di teoria degli insiemi, Cat è un oggetto) è una **3-categoria**; le sue proprietà sono quindi più naturalmente descritte da strutture e leggi di coerenza più blande di quelle che sostengono la teoria delle Cat -categorie.

Un esempio su tutti: nei termini di una Cat -categoria è complicato (o impossibile?) descrivere come faccia un diagramma a commutare *a meno di una trasformazione naturale* -invertibile o meno.

Alcune osservazioni:

- Ogni 2-categoria dà luogo ad altre 2-categorie $\mathcal{K}^{\text{co}}, \mathcal{K}^{\text{op}}$ dove rispettivamente sono state invertite le frecce in dimensione 2 ed 1. Più formalmente, $\mathcal{K}^{\text{co}}$ è una 2-categoria ottenuta da $\mathcal{K}$ che ha gli stessi oggetti e dove $\mathcal{K}^{\text{co}}(X, Y) = \mathcal{K}(X, Y)^{\text{op}}$, e $\mathcal{K}^{\text{op}}$ è una 2-categoria con gli stessi oggetti di $\mathcal{K}$, dove $\mathcal{K}^{\text{op}}(X, Y) = \mathcal{K}(Y, X)$. Chiaramente, $(\mathcal{K}^{\text{op}})^{\text{co}} = (\mathcal{K}^{\text{co}})^{\text{op}} = \mathcal{K}^{\text{coop}}$.

- Gli oggetti di $\mathcal{K}$ si dicono *0-celle*; gli oggetti delle categorie $\mathcal{K}(X, Y)$ si dicono 1-celle (di dominio X e codominio Y); i morfismi delle categorie $\mathcal{K}(X, Y)$ si dicono 2-celle di $\mathcal{K}$.

Esempi:

- La categoria delle categorie (piccole), funtori e trasformazioni naturali

- La categoria delle categorie, aggiunzioni e trasformazioni naturali tra gli aggiunti destri (risp., sinistri)

- La categoria dei funtori $\mathcal{A}^{\text{op}} \to \mathsf{Cat}$, trasformazioni (pseudo)naturali e modificazioni.

- La categoria degli insiemi, relazioni tra essi, e ordine parziale tra le relazioni.

- La categoria degli anelli, classi di isomorfismo di bimoduli, e omomorfismi di bimoduli.

1.2 Estensioni e lift di Kan

Definizione 1.1. *Let $B \xrightarrow{f} A \xleftarrow{g} C$ a cospan of 1-cells in $\mathcal{K}$. A /left lifting/ of f along g consists of a pair $\langle \mathrm{lift}_g f, \eta \rangle$ (often denoted simply as $\mathrm{lift}_g f$) initial among the commutative triangles like the one below:*

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[ur, dotted, "\mathrm{lift}_g f"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\Nearrow \eta"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\frac{\mathrm{lift}_g f \to h}{f \to gh}
$$

In other words, composition with $\eta\colon f \Rightarrow g \circ \mathrm{lift}_g f$ determines a bijection $\bar{\gamma} \mapsto (g * \bar{\gamma}) \circ \eta$ between 2-cells $\mathrm{lift}_g f \xrightarrow{\bar{\gamma}} h$ and 2-cells $f \to gh$.

Si può anche definire un *lifting destro* in maniera simile, rovesciando la direzione delle sole 2-celle nel diagramma precedente, e le *estensioni sinistre* e *destre* rispettivamente rovesciando solo la direzione delle 1-celle, o la direzione di entrambe nel diagramma precedente. E' quindi chiaro che le estensioni sinistre sono lifting sinistri in $\mathcal{K}^{\mathrm{op}}$, i lifting destri in $\mathcal{K}$ sono lifting sinistri in $\mathcal{K}^{\mathrm{co}}$, e le estensioni destre sono lifting sinistri in $\mathcal{K}^{\mathrm{coop}}$.

$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Swarrow \eta"] & B \\ C \arrow[ur, dotted, "\mathrm{Lan}_g f"'] & \end{tikzcd}$ $\frac{\mathrm{Lan}_g f \to h}{f \to hg}$	$\frac{\mathrm{Lift}_g f \to h}{f \to gh}$ $\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[ur, dotted, "\mathrm{Lift}_g f"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\Nearrow \eta"] & A \end{tikzcd}$
$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\Nearrow \varepsilon"] & B \\ C \arrow[ur, dotted, "\mathrm{Ran}_g f"'] & \end{tikzcd}$ $\frac{hg \to f}{h \to \mathrm{Ran}_g f}$	$\frac{h \to \mathrm{Rift}_g f}{gH \to f}$ $\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[ur, dotted, "\mathrm{Rift}_g f"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\Swarrow \varepsilon"] & A \end{tikzcd}$

Definizione 1.2 (Estensione/lift preservato/assoluto)**.** *Dato un diagramma*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, shift left=2, "\Swarrow"] & B \\
C \arrow[ur, dotted, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

che sia una Lan diciamo che un funtore $k : B \to X$ preserva *questa Lan se la composizione $\langle kh, k * \eta \rangle$ esibisce la Lan di kf lungo g.*

Diciamo che un diagramma di Lan è assoluto *se viene preservato da tutti i funtori.*

1.3 Caratterizzazione degli aggiunti mediante estensioni e lift

Qui ci proponiamo di dimostrare una caratterizzazione degli aggiunti in termini di lift ed estensioni. Si tratta di un esercizio elementare nelle proprietà universali in una 2-categoria, che svolgiamo nei dettagli per fare entrare il lettore nella semantica delle 2-categorie.

Le seguenti condizioni sono equivalenti per una coppia di 1-celle $f : A \leftrightarrows B : g$:

- $f \dashv g$ con unità η e counità ϵ;
- La coppia $\langle g, \eta \rangle$ esibisce la Lan assoluta di 1 lungo f
- La coppia $\langle g, \eta \rangle$ esibisce la Lan di 1 lungo f, ed f la preserva.

Proof. E' evidente che 2 implica 3; mostriamo che 1 implica 2. Dato il diagramma

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\swArrow\eta"] & A \\
B \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

dobbiamo mostrare che è una Lan assoluta. Del resto, se $f \dashv g$, dato $h : B \to A$ con una trasformazione $\alpha : 1 \Rightarrow hf$, le identità triangolari implicano che la composizione $\bar{\alpha} : g \overset{\alpha * g}{\Rightarrow} hfg \overset{h * \epsilon}{\Rightarrow} h$ sia tale che $(\bar{\alpha} * f) \circ \eta = \alpha$. Tale scelta è unica, perché se $\bar{\alpha}$ e $\hat{\alpha}$ hanno la stessa proprietà, basta incollare la counità per vedere che $\bar{\alpha} * g = \hat{\alpha} * g$:

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & A \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, equal] & {} & B \arrow[ur, "g"] \arrow[ur, bend right=60, ""'] \arrow[ur, phantom, bend right=20, "\Downarrow\bar{\alpha}"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & A \\
B \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, equal] & {} & B \arrow[ur, "g"] \arrow[ur, bend right=60, ""'] \arrow[ur, phantom, bend right=20, "\Downarrow\hat{\alpha}"] &
\end{tikzcd}$$

Un argomento simile mostra che l'estensione è assoluta: dato un diagramma come

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, equal] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r, "u"] & X \\
B \arrow[ur, "g"'] \arrow[urr, bend right, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

riempito da una 2-cella $\alpha : u \Rightarrow hf$, va mostrato che esiste un'unica $\bar{\alpha} : ug \Rightarrow h$ tale che $\alpha = (\bar{\alpha} * f) \circ (u * \eta)$. Tale freccia è presto vista essere $(h * \epsilon) \circ (\alpha * g)$.

Ora mostriamo che 3 implica 1. Se $\langle fg, f * \eta \rangle$ esibisce $\mathrm{lan}_f f$, allora è automatico che esista un'unica $\epsilon : fg \Rightarrow 1$ tale che $(\epsilon * f) \circ (f * \eta) = 1_f$; per quanto riguarda l'altra identità triangolare... $\square$

Valgono condizioni duali che si possono riassumere nel seguente specchietto:

1.4 Il sacro pasting lemma

Uno dei trucchi tecnici più utili è il seguente: si chiama *pasting lemma*. La dimostrazione si fa verificando la proprietà universale giusta.

Proposizione 1.3. *Dato un diagramma come*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & D \\ B \arrow[ur] \arrow[d, "g"'] & \\ C \arrow[uur, bend right] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[d] & D \\ B \arrow[ur] \arrow[d] & \\ C \arrow[uur, bend right] & \end{tikzcd}$$

se il triangolo esterno e quello superiore sono estensioni di Kan, tale è anche il rimanente triangolo.

Proof. Esercizio. □

1.5 Strutture di Yoneda e FCT: il lemma di Yoneda come pilastro del pensiero occidentale

1.5.1 Yoneda nel senso classico; Yoneda "per i baby geometri"

Il lemma di Yoneda come viene insegnato nelle scuole inferiori, asserisce che dato un prefascio $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \to \mathsf{Set}$ e un oggetto $c \in \ C$ esiste un isomorfismo naturale in c

$$Nat(y(c), F) \cong Fc$$

dove $y : \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathsf{Set}]$ è l'embedding di Yoneda che manda c nel prefascio $\mathcal{C}(-, c)$.

Ora, lungi dall'essere un mero teorema di matemaitca, questo asserto costituisce uno dei punti più elevati raggiunti dal pensiero occidentale nella sua totalità. Diverse generazioni di studio sono state completamente insufficienti a disvelarne le incredibili conseguenze.

Quello che facciamo noi ora è

- Scrivere il lemma di Yoneda in forma fibrazionale;

- Capire in che cosa consiste quando i prefasci vengono interpretati come fibrazioni

Per farlo ci avvaliamo di questo risultato:

Proposizione 1.4. *Esiste un'equcat tra* $[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ *(la categoria dei prefasci su* $\mathcal{C}$*) e la categoria delle* fibrazioni discrete *su* $\mathcal{C}$ *(una fibrazione discreta è un funtore* $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ *tale che ogni fibra* $p^{\leftarrow}(c)$ *sia una categoria discreta).*

Proof. E' sufficiente dimostrare che esiste una coppia di funtori in direzioni opposte

$$[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}] \leftrightarrows \mathrm{DFib}(\mathcal{C})$$

le cui composizioni nei due sensi siano isomorfe alle rispettive identità (perché?). Per farlo, definiamo $\mathfrak{E} : [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}] \to \mathrm{DFib}(\mathcal{C})$ mandando P nella sua categoria degli elementi; in direzione opposta, definiamo $\mathfrak{F} : \mathrm{DFib}(\mathcal{C}) \to [\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ mandando $p : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$ nel prefascio determinato da $\lambda c.p^{\leftarrow}(c)$ (dal momento che p è una fibrazione discreta, questa corrispondenza è davvero un funtore). E' evidente che $\mathfrak{E}\mathfrak{F} \cong 1$, così come $\mathfrak{F}\mathfrak{E} \cong 1$. ☐

In tale contesto il lemma di Yoneda diventa il seguente enunciato:

Lemma 1.5 (Yoneda fibrazionale)**.** *C'è una biiezione*

$$\left\{ \begin{tikzcd} \mathcal{C}/c \arrow[rr, dotted] \arrow[dr, "U"'] & & \mathfrak{E}(P) \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd} \right\} \cong Pc$$

tra le frecce tratteggiate e gli elementi di Pc.

Proof. Esercizio. ☐

1.5.2 Di cosa parliamo quando parliamo di teoria delle categorie?

Che cos'è la teoria delle categorie? Nelle parole di John Gray,

> The purpose of category theory is to try to describe certain general aspects of the structure of mathematics. Since category theory is also part of mathematics, this categorical type of description should apply to it as well as to other parts of mathematics.
>
> [O]ne should attempt to identify those properties that enable one to do the "structural parts of category theory".

Che cosa significa questo? Sostanzialmente che la teoria delle categorie "astratta" è quell'insieme di asserti che riguardano il comportamento di strutture che si comportano come la 2-categoria paradigmatica Cat (allo stesso modo, la teoria delle categorie "concreta" consta di quegli asserti che riguardano categorie che si comportano come quelle di oggetti matematici quotidiani: la categoria degli insiemi, quella dei gruppi abeliani, dei monoidi, degli insiemi o spazi vettoriali con una azione di gruppo. . .). Analogamente a quel che succede quando si usa la teoria delle categorie per chiarificare la matematica classica (in modo che le proprietà degli oggetti matematici diventino proprietà universali, e che queste proprietà universali siano godute dagli oggetti di una categoria, definendo, ad esempio, la semantica funtoriale delle teorie algebriche), la teoria delle 2-categorie fa lo stesso lavoro con la teoria delle categorie. Alle entità fondamentali della teoria delle categorie (gli aggiunti e il loro calcolo, le monadi, le estensioni di Kan, il calcolo dei co/limiti. . .) viene data licenza di esistere non più nella 2-categoria Cat, ma in una generica 2-categoria $\mathcal{K}$. La nozione di struttura di Yoneda nasce per dare conto di queste affermazioni e concretizzarle in una teoria esplicita e computabile: prendiamo come assiomi fondamentali di questa religione il fatto che

- la teoria delle categorie coincide con l'insieme dei corollari del lemma di Yoneda;
- E' possibile enunciare un insieme finito di assiomi capaci di catturare le varie facce del lemma di Yoneda;
- L'intero comparto di tecniche della CT formale nasce per rispondere a questa domanda: qual è il minimo amount di struttura addizionale da mettere su una 2-categoria $\mathcal{K}$ per fare in modo che esistano, in $\mathcal{K}$, delle 1-celle che giocano lo stesso ruolo delle fibrazioni discrete, dando a $\mathcal{K}$ una versione fibrazionale del lemma di Yoneda?

1.6 Assiomi di struttura di Yoneda

Gli assiomi sono 4. Seguiamo questo pattern:

- Come zeresimo passo, listiamo i dati che K deve possedere; questi dati formano un telaio di Yoneda.
- Prima enunciamo l'assioma;
- Poi mostriamo perché è vero in Cat (la risposta sarà che l'assioma è una conseguenza del lemma di Yoneda, in un modo o nell'altro);

- Poi enucleiamo alcuni corollari di quell'assioma.

Definizione 1.6. *Affinché K abbia un telaio di Yoneda essa deve essere equipaggiata di questi dati:*

- *Un ideale di morfismi "ammissibili"; le frecce identiche nell'ideale specificano gli* oggetti *ammissibili.*
- *Per ogni oggetto ammissibile A una "freccia di Yoneda" $y_A : A \to PA$ verso un oggetto che chiamiamo "oggetto dei prefasci" di A;*
- *per ogni morfismo ammissibile $f : A \to B$ con dominio ammissibile un triangolo*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "y_A"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \chi^f"] & \\ PA & & B \arrow[ll, "B(f,1)"] \end{tikzcd}$$

Assioma 1.7. *La coppia $\langle B(f,1), \chi^f \rangle$ esibisce* $\mathrm{lan}_f y_A$.

Perché è vero in Cat? E' il lemma di Yoneda, nella forma che asserisce l'esistenza di un funtore $N_f = B(f,1) : \lambda b.(\lambda a.B(fa,b))$, detto f *nervo*. Ad esempio, quando $f : \Delta \to \mathsf{Cat}$ è il funtore che realizza ogni ordinale finito come una categoria, $\mathsf{Cat}(f,A)$ è il *nervo* della categoria $A \in \mathsf{Cat}$, che manda n in $\mathsf{Cat}([n],A)$.

Proof. Bisogna mostrare l'isomorfismo

$$[B,PA](N_f,G) \cong [A,PA](y_A, G \circ f).$$

Per farlo, è sufficiente considerare l'isomorfismo integrale

$$\begin{aligned} [B,PA](N_f,G) &\cong \int_b PA(B(f,b),Gb) \\ &\cong \int_{ab} \mathsf{Set}(B(fa,b),G(b)(a)) \\ &\cong G(fa)(a) \\ [A,PA](y_A, G\circ f) &\cong \int_a PA(y_A(a),G(fa)) \\ &\cong G(fa)(a). \end{aligned}$$

E' ovviamente possibile una dimostrazione diretta, con la proprietà universale: la lasciamo come esercizio. □

Assioma 1.8. *La coppia* $\langle f, \chi^f \rangle$ *esibisce* $\mathrm{lift}_{B(f,1)} y_A$.

Perché è vero in Cat? E' il lemma di Yoneda, nella forma che asserisce che vale l'isomorfismo

$$\begin{aligned}
[A, PA]\big(y_A, N_f \circ g\big) &\cong \int_{a'} [A^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]\big(y_A a', N_f \circ g(a')\big) \\
&\cong \int_{a'} [A^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]\big(y_A a', B(f-, ga')\big) \\
&\cong \int_{a'} B(fa', ga') \\
&\cong [A, B](f, g)
\end{aligned}$$

E' ovviamente possibile una dimostrazione diretta, con la proprietà universale: la lasciamo come esercizio.

Assioma 1.9. *Given a pair of composable 1-cells* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, *the pasting of 2-cells*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "y_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \chi^{y_B f}"] & & PA \\
B \arrow[r, "y_B"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \chi^{g}"] & PB \arrow[ur, "Pf"'] & \\
C \arrow[ur, "C(g,1)"'] & &
\end{tikzcd}$$

exhibits $\mathrm{lan}_{gf} y_A = C(gf, 1)$.

Perché è vero in Cat? Pasting lemma delle estensioni.

Assioma 1.10. *La coppia* $\langle 1_{PA}, 1_{y_A} \rangle$ *esibisce* $\mathrm{lan}_{y_A} y_A$.

Perché è vero in Cat? E' il lemma di Yoneda, nella forma che asserisce che l'embedding di Yoneda è un funtore *denso*.

Proof. Si potrebbe fare con gli integrali usando ancora la formula puntuale per le Lan, ma una dimostrazione diretta è illuminante. Srotolando la proprietà universale, va dimostrato che una trasformazione naturale $\alpha : 1_{PA} \Rightarrow H$ è univocamente determinata dalla sua restrizione alle componenti rappresentabili (nell'immagine essenziale di y_A, che sappiamo già essere pienamente fedele). Ora, data una $\beta : y_A \Rightarrow H y_A$ dobbiamo dimostrare che essa è $\alpha * y_A$ per un'unica $\alpha : 1 \Rightarrow H$; per farlo possiamo ricordare che ogni $P : A^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$

è colimite di rappresentabili, e precisamente $P \cong \varinjlim^P y_A$; sicché la componente di β si può estendere a

$$P \cong \varinjlim^P y_A \xrightarrow{\varinjlim^P \beta} \varinjlim^P H y_A \to H(\varinjlim^P y_A) \cong HP$$

Che queste siano le componenti di una trasformazione naturale $1 \Rightarrow H$ è presto verificato. □

Ora possiamo definire diverse nozioni che non avevano un analogo controllabile prima di scoprire che $\mathcal{K}$ supportava una teoria delle categorie.

Definizione 1.11 (Estensioni puntuali e assolute)**.** *Dato un triangolo*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

1.7 Esempi

Raccogliamo degli esempi di strutture di Yoneda

1.7.1 Categorie arricchite

Sulla categoria $\mathcal{V}$-Cat delle categorie arricchite su una base monoidale $\mathcal{V}$ c'è una struttura di Yoneda dove y_A è la versione arricchita dell'embedding classico. (Esiste qualcosa di analogo anche per categorie arricchite su una bicategoria?)

1.7.2 Categorie interne

Nella 2-categoria delle categorie interne a $\mathcal{K}$ (una categoria con limiti finiti, o con almeno pullback) c'è una struttura di Yoneda ma fatta con le fibrazioni; ne sketchiamo l'esistenza. Let $\mathcal{E}$ be a finitely complete category, and $\mathcal{K} = \mathsf{Cat}(\mathcal{E})$ the 2-category of categories internal to $\mathcal{E}$. Recall the definition of an internal profunctor; prove that there is an equivalence

$$\mathrm{Prof}_{\mathcal{E}}(A, B) \cong \mathrm{Prof}_{\mathcal{E}}(1, A^{\mathrm{op}} \times B)$$

Prove that this correspondence is natural in A, B (which covariance type is it?).

We define

- an *internal full subcategory* of $\mathcal{E}$ an object S of $\mathcal{K}$ with an internal profunctor $s : 1 \rightsquigarrow \mathrm{S}$ inducing a fully faithful functor

$$\mathcal{K}(X, \mathrm{S}) \to \mathrm{Prof}_{\mathcal{E}}(1, B)$$

via precomposition.

- a 1-cell $f : A \to B$ in $\mathcal{K}$ *admissible* when the profunctor corresponding to (f/B) lies in the essential image of the functor $\mathcal{K}(A^{\mathrm{op}} \times B, \mathrm{S}) \to \mathrm{Prof}_{\mathcal{E}}(1, A^{\mathrm{op}} \times B)$. call f^* this (unique) 1-cell $A^{\mathrm{op}} \times B \to \mathrm{S}$.

Prove that $\mathcal{K}$ has a Yoneda structure when $B(f, 1) := \widehat{f^*} : B \to [A^{\mathrm{op}}, \mathrm{S}]$ is the mate of f^*, and thus $PA := [A^{\mathrm{op}}, \mathrm{S}]$.

What happens when $\mathcal{E}$ is an elementary topos and $\mathrm{S} = \Omega_{\mathcal{E}}$? What happens when $\mathcal{E}$ is a Grothendieck topos and $\mathrm{S} = \mathbb{N}$ is the natural number object of $\mathcal{E}$?.

▷ Domanda aperta: esiste un teorema che "trasporta" una struttura di Yoneda lungo l'aggiunzione

$$\mathcal{K}^{(T)} \leftrightarrows \mathcal{K}$$

associata a una 2-monade su $\mathcal{K}$? (Già trattare il caso idempotente sarebbe bello)

1.7.3 Pseudofuntori e derivatori (?)

Sulla 2-categoria degli pseudofuntori $\mathcal{A} \to \mathsf{Cat}$ ($\mathcal{A}$ una bicategoria a caso) c'è una struttura di Yoneda "puntuale", definita da una opportuna contorsione fibrazionale.

▷ Domanda aperta: questa struttura di Yoneda si riporta alla 2-categoria (stretta) dei funtori *stretti* $\mathcal{A} \to \mathsf{Cat}$ (ora $\mathcal{A}$ è una 2-categoria stretta). Come si trova una struttura di Yoneda sulla 2-categoria dei prederivatori che abbia un *significato omotopico*?

1.8 La nozione di P-cocompletezza

Negli assiomi di YS è nascosto il fatto che PA ha la proprietà universale del *cocompletamento libero* di A: dove? E' magari possibile dimostrare che un oggetto X è cocompleto se e solo se tutte le 1-celle $A \to X$ si estendono a una aggiunzione $PA \leftrightarrows X$? La risposta è sì, ma affinché sia vero PA deve essere "cocompleto rispetto a sé stesso".

Definizione 1.12 (Oggetto co/completo)**.** *Un oggetto $X \in \mathcal{K}$ si dice P-*cocompleto *quando in ogni diagramma*

$$\begin{tikzcd}
& PG \arrow[dr, dotted, "L"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow"] & \\
G \arrow[ur, "y_A"] \arrow[rr, "\ell"'] & & X
\end{tikzcd}$$

la freccia tratteggiata esiste, e la 2-cella rende il triangolo così ottenuto una estensione puntuale.

Proposizione 1.13. *Un oggetto X è P-cocompleto se e solo se esiste una aggiunzione*

$$L : PX \leftrightarrows X : i$$

con counità invertibile (quindi se e solo se X "è riflessivo in PX").

1.9 La vera natura di P.

La costruzione dei prefasci P di una struttura di Yoneda si caratterizza con queste proprietà:

1. E' tale che ogni Pf ha un aggiunto sinistro $P_!f$;
2. La corrispondenza $f \mapsto P_!f$ definisce una pseudomonade (come una monade, ma uno pseudofuntore) e *relativa* (come una monade, ma non è un endofuntore);
3. Tale monade è *lax idempotente*, ossia le sue algebre $a : PA \to A$ sono univocamente caratterizzate dal dare una aggiunzione

$$a : PA \leftrightarrows A : y_A$$

In un recente lavoro con I. Di Liberti mostriamo che *tutte* le strutture di Yoneda cocomplete nascono a questo modo.

2 Lecture II: Accessibility and Presentability in 2-categories

2.1 Preambolo

Molte delle categorie che nascono naturalmente nella pratica matematica sono larghe (essenzialmente come conseguenza del fatto che lo è Set). Del resto, è evidente che spesso una categoria larga può essere completamente determinata da un insieme piccolo di oggetti, similmente a come un gruppo infinito può ammettere un numero finito di generatori.

La teoria delle categorie accessibili e il suo raffinamento alle presentabili traccia un parallelo con questa intuizione propria dell'algebrista: idealmente, una categoria "si può raggiungere" (è accessibile) quando esiste un insieme di generatori G tale che ogni oggetto di $\mathcal{A}$ sia colimite di oggetti in G.

Una categoria "si può scrivere" (è presentabile) quando è accessibile e cocompleta.

Già nell'idea originale di Gabriel e Ulmer è presente questa intuizione: così come un gruppo G si dice α *presentabile* se si può scrivere come un conucleo

$$*\mathbb{Z} \rightrightarrows *\mathbb{Z} \to G$$

dove il coprodotto è fatto da meno di α copie libere di $\mathbb{Z}$, allo stesso modo una categoria si dirà α *presentabile* se ogni oggetto è, canonicamente, il colimite di un diagramma con meno di α oggetti.

2.2 Cosa vogliamo fare

Le categorie accessibili e presentabili sono particolari oggetti della 2-categoria Cat; fino a che punto è possibile sketchare una definizione per un oggetto accessibile/presentabile di una 2-categoria $\mathcal{K}$? E' ancora possibile recuperare i teoremi classici di rappresentazione, che dicono come gli oggetti accessibili nascano da riflessioni di oggetti dei prefasci?

E' ancora possibile enunciare e dimostrare la dualità di Gabriel-Ulmer?

2.3 L'idea per farlo

Utilizzare il linguaggio delle strutture di Yoneda; idealmente, un oggetto di $\mathcal{K}$ sarà presentabile se nasce da una localizzazione riflessiva di PA per qualche oggetto A, e sarà accessibile se è della forma $Ind_\alpha(G)$ per qualche "generatore" G. Ci sono però vari problemi:

1. Che ruolo hanno i numeri cardinali in questa definizione?

La risposta sarà: sono importanti, ma possiamo nasconderli sotto il tappeto. (Questa non è probabilmente una cosa molto saggia da dire a Torino, ma ci liberiamo di una dipendenza della teoria dagli insiemi che è piuttosto fastidiosa; del resto, sarei felice che un insiemista rispondesse a questa domanda:

cosa sono i numeri cardinali e la loro aritmetica, così come la loro combinatoria, in $\mathcal{K}$? Quanto dipende la forma di queste teorie dalla particolare scelta di $\mathcal{K}$?)

1. Qual è il significato di "accessibile" in un contesto

dove non si può guardare dentro gli oggetti, e quindi non si può dire che "esiste un generatore"?

2.4 Categorie accessibili e presentabili, classicamente.

Definizione 2.1 (Categoria accessibile)**.** *Una categoria $\mathcal{K}$ si dice α-accessibile se*

- *Ha i colimiti α-diretti;*
- *Ha un insieme di oggetti α-compatti che genera $\mathcal{K}$ per colimiti α-diretti.*

Definizione 2.2 (Categoria presentabile)**.** *Una categoria $\mathcal{K}$ si dice α-presentabile se è α-accessibile e cocompleta.*

Definizione 2.3 (Teorema di rappresentazione, I)**.** *Equivalent characterizations include that C is α-accessible iff:*

- *it is the category of models (in Set) of some small sketch.*
- *it is of the form $Ind_\alpha(S)$ for S small, i.e. the α-ind-completion of a small category, for some α.*
- *it is of the form α-$Flat(S)$ for S small and some α, i.e. the category of α-flat functors from some small category to Set.*

Definizione 2.4 (Teorema di rappresentazione, II)**.** *Equivalentemente, una categoria $\mathcal{K}$ è presentabile se una, e quindi tutte, di queste condizioni è soddisfatta:*

- *$\mathcal{K}$ è la categoria dei modelli di un limit sketch;*
- *$\mathcal{K}$ è equivalente alla categoria $[C, \mathsf{Set}]$ dei funtori da C a Set che preservano gli α-limiti;*
- *$\mathcal{K}$ è una localizzazione riflessiva, accessibilmente immersa, di una categoria di prefasci.*

Definizione 2.5 (Dualità di Gabriel-Ulmer)**.** *La dualità di Gabriel-Ulmer asserisce che la 2-categoria* Lex *delle categorie con limiti finiti e la 2-categoria* Prs *delle categorie* $\aleph_0$*-presentabili sono biequivalenti (ricorda la definizione di biequivalenza).*

Si tratta di costruire una coppia di funtori

$$P : \mathsf{Lex} \leftrightarrows \mathsf{Prs} : \mathbf{c}$$

nel modo seguente: data una categoria C con limiti finiti, la sua categoria di prefasci $[C^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ è finitamente presentabile. Viceversa, data una categoria localmente presentabile $\mathcal{K}$, possiamo estrarre la sua sottocategoria degli oggetti $\aleph_0$-compatti; questa è una categoria con limiti finiti (è un risultato standard), e questo determina una biaggiunzione.

Ora, le categorie con limiti finiti sono Cauchy-complete, sicché esse sono univocamente determinate dalle loro categorie di prefasci; questo significa che P è pienamente fedele. Del resto, estrarre la categoria degli oggetti $\aleph_0$-compatti da $\mathcal{K}$ è anche lui un funtore pienamente fedele, perché $\mathcal{K} \cong Ind_{\aleph_0}(\mathbf{c}(\mathcal{K}))$.

2.5 Definizione: Yoneda context

Definizione 2.6. *A* Yoneda context *is a pseudonatural transformation* $y : S \Rightarrow P$ *such that*

- *for each component* $X \in \mathcal{K}$ *the triangle*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "y_X"'] \arrow[dr, "\alpha_X"] \arrow[d, phantom, "\chi_P \Downarrow"] & \\ P(X) & & S(X) \arrow[ll, "y_X"] \end{tikzcd}$$

  exhibits the left extension of y_X *along* α_X*, and which is is componentwise representably fully faithful.*

- *The pseudo-functor* $P \in KZ(\mathcal{K})$ *underlies a Yoneda structure.*

2.6 Definizione: oggetto accessibile wrt un contesto

Definizione 2.7 (y accessible object)**.** *Let* y *be a context on the 2-category* $\mathcal{K}$*;* $A \in \mathcal{K}$ *is* y accessible *if there exists a* P *small object* $G \in \mathcal{K}$ *such that* $A \cong SG$*.*

2.7 Definizione: oggetto presentabile wrt un contesto

resentability is harder to define properly; in fact, the strategy of exploiting a similar intrinsic characterization for the accessibility condition collides with the fact that we are able to give *two* such characterizations:

- A category A is locally presentable if it is an accessible, accessibly embedded full reflective subcategory of a category of presheaves.
- A category A is locally presentable if it is a full reflective subcategory of a category of presheaves such that the inclusion creates λ directed colimits.

These two characterizations are equivalent in Cat, but can't be made equal in general.

We will favour the first definition of presentability.

Definizione 2.8 (y presentable object)**.** *Let $y : S \Rightarrow P$ be a context; $A \in \mathcal{K}$ is y* presentable *if the following conditions are satisfied:*

- *A is a left split subobject (see* **??***) of PG for some G, via an adjunction $L : PG \leftrightarrows A : i$;*
- *A is y accessible (i.e. $A \cong S\overline{G}$ for some $\overline{G}$);*
- *The functor $i : A \to PG$ exhibits the left extension of $\alpha_{\overline{G}} \circ i$ along $\alpha_{\overline{G}}$ ($\alpha_{\overline{G}} : \overline{G} \to S\overline{G}$ is the unit of the),*

$$\begin{tikzcd}
& \overline{G} \arrow[dl, "\alpha_{\bar{G}} \circ i"'] \arrow[dr, "\alpha_{\bar{G}}"] \arrow[d, phantom, "\eta \Downarrow"] & \\
PG & & A \arrow[ll, "i"]
\end{tikzcd}$$

2.8 Faint presentability: non più equivalente alla presentabilità forte...

The following definition, as well as the notion of S cell, will reappear when we stu *Gabriel-Ulmer structures*, i.e. those Yoneda contexts where the skewness of our two definitions of presentability disappears (this is the content of **??**; in addition, Gabriel-Ulmer structures will turn out to be the right contexts in which we can instantiate a weak form of Gabriel-Ulmer duality in $\mathcal{K}$).

Definizione 2.9 (Faint presentability)**.** *Let $y : S \Rightarrow P$ be a Yoneda context on $\mathcal{K}$. An object $A \in \mathcal{K}$ is called* faintly presentable *if it is a left split subobject of PG for some $G \in \mathcal{K}$, and in addition the inclusion $A \to PG$ is a S cell and A is S cocomplete.*

Let y be a context. Then if SG is y presentable, it is also y faintly presentable.

2.9 . . . Ma sono equivalenti in un GU-envelope!

We start with the simple observation that the closure under finite colimits of $A \in \mathsf{Cat}$ is the subcategory of $[A^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ generated by finite colimits of representables; we call this category $\widehat{A}$. It is clear that its opposite $(\widehat{A})^{\mathrm{op}}$ has finite *limits*; moreover, we have the following chain of isomorphisms, where $\mathsf{Cat}_*(\widehat{A}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set})$ is the category of functors $\widehat{A}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$ that commute with finite limits:

$$\boldsymbol{Ind}(\widehat{A}) \cong \mathsf{Cat}_*(\widehat{A}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}) \cong [A^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}];$$

in other words, {there exists an object $\widehat{A}$ such that} $\boldsymbol{Ind}(\widehat{A}) \cong PA$.

This amounts to a factorization of $y_A : A \to PA$ as a composition $A \to \widehat{A} \to S\widehat{A} \cong PA$, naturally in $A \in$. This will turn out to be a fundamental property, in that the definition of a GU envelope relative to a context y amounts to the same "factorization of P along S". More precisely, we can give the following definition:

Definizione 2.10 (envelope)**.** *A* GU envelope *(*envelope *for short) relative to a context $y : S \to P$ consists of an additional relative KZ doctrine denoted $\widehat{-}$ with unit $\iota_A : A \to \widehat{A}$ such that $\alpha_{\hat{A}} : \widehat{A} \to S(\widehat{A})$ exhibits the left extension of y_G along ι_A. In particular this means that the diagram*

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\iota_A"'] \arrow[dr, "\alpha_{\hat{A}}\iota_A"] \arrow[dr, bend left=60, "y_A"] & \\
\widehat{A} \arrow[rr, "\alpha_{\hat{A}}"'] & & S\widehat{A} \cong PA
\end{tikzcd}$$

is filled by an invertible 2-cell $y_A \cong \alpha_{\hat{A}}\iota_A$.

Notice that the 2-category Cat has a envelope, relative to the standard context $\boldsymbol{Ind}_\omega \to [-^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$, defined sending A into its finite colimit completion $\widehat{A}$. If $L \dashv R$ is an adjunction in Cat, a well-known sufficient condition so that L preserves α presentable objects is that R commutes with α filtered colimits. This simple observation, together with the definition of S cell, motivates the following definition.

2.10 Un GU envelope è esattamente il setting dove vale GU

GU duality builds an a bi-equivalence

$$y\text{-}\mathsf{Mod} : \mathrm{Lex}^{\mathrm{op}} \leftrightarrows \mathrm{LFP} : y\text{-}\mathsf{Th}$$

between the 2-category of small finitely complete categories, finite limit preserving functors, and natural transformations, and the 2-category Lfp of locally finitely presentable categories, finitary right adjoint functors and natural transformations.

The idea is that an object $C \in \mathrm{Lex}$ is a "theory", whose category of models $\mathrm{Lex}(C, \mathsf{Set})$ is locally finitely presentable. GU duality says that all locally finitely presentable categories arise in this way, as it is possible to extract the theory of which a given $A \in \mathrm{LFP}$ is the category of models of.

Definizione 2.11 (The 2-category $\mathrm{Lex}(y)$)**.** *Let $y : S \Rightarrow P$ be a Yoneda context on , and $\widehat{-}$ a envelope on , that will remain implicit in the discussion. We define the 2-category Lex(y) having 0-cells the $\widehat{-}$ cocomplete objects, 1-cells the $\widehat{-}$ cells, and all 2-cells between them.*

Definizione 2.12 (The 2-category $\mathrm{LFP}(y)$)**.** *The objects of the 2-category LFP(y) are y presentable objects of : by our* **??***, this class coincides with y accessible and cocomplete 0-cells; 1-cells are right adjoints that are S cells according to* **??***, with all 2-cells of between them.*

Osservazione 2.13. *If A is y presentable, then $A \cong SG$, and A is a reflection on $P(\bar{G})$, so that there is a fully faithful right adjoint $L \dashv i : SG \to P(\bar{G})$; it is easy to see that we can always reduce to the case where $\bar{G} = G$: since $P\bar{G}$ is P cocomplete, the composition $i \circ \alpha_G$ admits a Yoneda extension $I : PG \to P\bar{G}$, and the composition $L \circ I$ determines a reflection of PG onto $SG \cong A$.*

Theorem 2.14 (GU duality)**.** *Let $y : S \Rightarrow P$ be a context on , with S climbable and assume that there exist an absorbing envelope relative to y. Then there is a bi-adjunction*

$$y\text{-}\mathsf{Mod} : Lex(y)^{\mathrm{op}} \rightleftarrows LFP(y) : y\text{-}\mathsf{Th}$$

which is in fact a bi-equivalence of 2-categories.

2.11 Esempi, tantissimi esempi

2.11.1

Let us consider the 2-category Cat and the Yoneda context where $P = [(-)^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ is the canonical presheaf construction, but $SA = 1$ is the constant functor at the terminal category; it's easy to see that the context $y_A : 1 \to [A^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}]$ that chooses the terminal object of PA exhibits the universal property of the colimit of the Yoneda embedding,[1]The colimit $\mathrm{colim}_{x\in A} A(-,x)$ coincides with the presheaf $a \mapsto \mathrm{colim}_{x\in A} A(a,x)$, so with the colimit of $A(a,-)$, which is the terminal set.} thus axiom 1 is satisfied. This context defines accessible objects (terminal categories), and presentable objects (still only the terminal category); faintly presentable objects are instead all left split subobjects of PA's. It's easy to see that there can't be a GU- envelope relative to this context.

2.11.2

In the 2-category of categories, functors, and natural transformations, the canonical Yoneda structure of **??** having \$ P A = [A^op,Set]\$ yields notions of accessible and presentable that coincide with the classical notions of accessible and locally λ presentable category given in [AR94], when the Yoneda context is chosen to be $Ind_\lambda \Rightarrow P$. The envelope $\widehat{A}$ here is the λ colimit completion of A; it is easy to see that this KZ doctrine is climbable in the sense of **??**, and GU duality takes its canonical form.

2.11.3

The former example is in fact a particular case of the following more general phenomenon. In the 2-category Cat, we can consider Yoneda contexts of the form $y_{\mathrm{C},\mathbb{D}} : \mathbb{D}\text{-}Ind \Rightarrow P$ in the sense of **??** ($\mathbb{D}$ is a "sound doctrine" in the sense of [ABLR02]); here, the notion of accessible and presentable object coincide with the notions of $\mathbb{D}$ *accessible* and *locally* $\mathbb{D}$ *presentable* category given in [ABLR02]. [**?**, 76] proves that the envelope $\widehat{A}$ is the $\mathbb{D}$ colimit completion of A; the representation theorem appears in [**?**, 78]. The GU duality in this context is one of the central result of [**?**].

[1] {

2.11.4

The 2-category **Pos** of partially ordered classes, monotone class functions becomes a 2-category once $\mathbf{Pos}(P, Q)$ is endowed with the pointwise partial order between functions. Sending $A \in \mathbf{Pos}$ into \$ P A := Pos(A, {0⩽ 1})\$ determines a Yoneda structure on **Pos** (this was first noted in [SW78]). The locally presentable objects in this Yoneda structure are the *algebraic lattices* in the sense of [**?**], while the accessible objects are "accessible posets" (there does not seem to be a name for these categories, but they are simply posetal categories that are accessible in Cat); the representation theorem is the content of [**?**]. The results in Porst's paper seem to pave the way to a form of GU duality; our approach seems to clarify how, and why, it is so.

2.11.5

Let $\mathcal{V}$ be a locally presentable, monoidal closed category. The notion of accessible and presentable object in the 2-category of $\mathcal{V}$ enriched categories, $\mathcal{V}$ enriched functors and $\mathcal{V}$ natural transformations, with its natural Yoneda structure having \$ P A = [A^op,V]\$ was first outlined in [**?**, **?**, **?**]; more in detail, the first two papers establish the theory of accessibility, and the last proves GU duality in enriched context. There exists a suitable definition of "Ind-completion" worked out in [**?**] (this KZ doctrine is climbable: see [**?**, 2.4]), and [**?**, Cor. 3.6] proves the representation theorem for $\mathcal{V}$ enriched categories (a slightly less general version of this result appears as [**?**, 7.3]). [**?**, 9.3] proves the existence of a envelope.

2.11.6

The former example contains several interesting particular examples:

- if $\mathcal{V} = [0, \infty]^{\text{op}}$ is the monoidal category of non-negative real numbers with opposite order, we recover Lawvere metric spaces [**?**]; the Yoneda structure is given by the "metric Yoneda embedding" $X \to [X, \mathcal{V}]$. The former example specializes to this context, but $\mathcal{V}$ enriched Ind-completion, the envelope and the representation theorem do not seem (to the best of our knowledge) to admit a topological characterization.

- given an additive category , regarded as a particular preadditive (=Ab enriched) category, its Yoneda map shall be $\to [^{\text{op}}, Ab]$ in the category of Ab enriched functors; this is indeed the case; it is easily seen that presentable objects for the Ab enriched Yoneda structure are *Grothendieck categories*, whereas the representation theorem becomes essentially the statement of Gabriel-Popescu theorem [**?**]: every Grothendieck category admits a left exact and reflective embedding into the category of R modules, where $R = \mathrm{End}(G)$ is the endomorphism ring of its generator.

2.11.7

2.11.8

2.11.9

2.12 Long term goal: derivatori e infty-categorie