Dalla rivista del Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin",
IMSI, novembre-dicembre 2012

Il principio di induzione matematica: considerazioni didattiche

Luigi Tomasi

Sommario

In questo articolo proponiamo alcune osservazioni e riflessioni didattiche sul principio di induzione matematica. L'articolo riporta quanto è stato proposto in uno dei lavori di gruppo al XLI Seminario annuale del Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin", agosto 2012, dedicato al tema dell'infinito in matematica.

Tali considerazioni possono essere utili, da un punto di vista didattico, a docenti di Scuola secondaria di I e di II grado. Questo materiale può essere utilizzato proficuamente anche dagli studenti universitari interessati a intraprendere l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria di II grado.

Abstract

In this article we offer some observations and reflections on the principle of mathematical induction. The article reports what has been proposed in one of the work groups at the XLI Annual Seminar of the Centro Ricerche Didattiche "Ugo Morin", August 2012, on the theme of infinity in mathematics.

Such considerations may be useful from a didactic point of view, to teachers of Secondary School. This material can also be used profitably by college students interested in pursuing the teaching of mathematics in secondary school.

Il principio di induzione matematica: considerazioni didattiche

Luigi Tomasi
Liceo Scientifico “Galileo Galilei”, Adria (RO)

Introduzione

Questo articolo riprende quanto è stato discusso in uno dei lavori di gruppo del Seminario annuale del Centro Morin e presenta alcune considerazioni e osservazioni didattiche sul Principio di induzione matematica. Nelle *Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento per la matematica*, relative al riordino della Scuola secondaria di II grado (DPR 15 marzo 2010, n. 89) si afferma che uno degli obiettivi di studio è il seguente:
una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio (“invarianza delle leggi del pensiero”), della sua diversità con l'induzione fisica (“invarianza delle leggi dei fenomeni”) e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.
Si noti che la formulazione di questo obiettivo presenta dei punti oscuri, in particolare nelle frasi indicate tra virgolette, che hanno suscitato molte discussioni. Riportiamo di seguito alcune note ed osservazioni per costruire un percorso didattico sul principio di induzione nella scuola secondaria di II grado.

Origine e storia del principio di induzione matematica

Friedrich Waismann (*Introduzione al pensiero matematico,* 1936, trad. it. 1939 di L. Geymonat, p. 107), afferma:
“Nella costruzione dell'aritmetica è evidente l'importanza straordinaria del principio di induzione. …Ma qual è la sua base? L'origine di questo principio non è ancora, a tutt'oggi, completamente spiegata. Secondo Poincaré l'importanza del procedimento

induttivo consiste in ciò, che esso raggruppa in sé infiniti sillogismi.”
Il principio di induzione è stato usato dai matematici in modo implicito ben prima della sua formulazione: si può dire che lo stesso Euclide lo abbia utilizzato nella Proposizione 20 del Libro IX degli *Elementi*, in cui si dimostra che “*Esistono numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si voglia proporre*”.
Il nome “principio di induzione matematica” è stato dato nel 1838 da De Morgan. Tra i matematici che l’hanno utilizzato occorre almeno citare Pascal, Grassmann e Dedekind. La formulazione più nota è stata data da Giuseppe Peano nel libro *Arithmetices principia novo methodo exposita* (1889). Il principio di induzione matematica viene enunciato nel seguente modo:

> Si assumono come *concetti primitivi* quelli di numero, di 1 (*uno*) e di *successore*.
> Sia dato un insieme N di numeri, per cui valgono i seguenti assiomi:
> - 1 *appartiene a N.*
> - *Esiste una corrispondenza biunivoca tra N ed* $N-\{1\}$. *Il corrispondente di n tramite questa funzione viene detto* successore *di n e indicato con* $succ(n)$.
>
> *Sia A un sottoinsieme di N. Se* 1 *appartiene ad A e, per ogni numero n, se n appartiene a A anche succ*(*n*) *appartiene ad A, allora A coincide con N.*

Il contenuto del procedimento di induzione appare abbastanza intuitivo, ma non è facile presentarlo dal punto di vista didattico. Il tipico schema di una dimostrazione per induzione procede nel seguente modo:
Teorema. Si vuole dimostrare $P(n)$, dove $P(n)$ è una proprietà che riguarda i numeri naturali.
Prima di tutto si dimostra che vale $P(1)$. Poi si suppone che valga la cosiddetta “ipotesi induttiva”: assumiamo cioè che valga $P(k)$.

Segue il passo d'induzione in cui si dimostra che vale $P(k+1)$ a partire dall'ipotesi induttiva.
Questo schema pone alcune difficoltà didattiche che sono state studiate dai ricercatori in didattica della matematica.
Invece del principio di induzione a volte si preferisce usare i seguenti due principi, che sono equivalenti al Principio di induzione:
- Principio del buon ordinamento: *ogni insieme non vuoto di numeri naturali contiene un minimo elemento.*
- Principio di ricorsione: *Se per ogni naturale k, la validità di* $P(i)$ *per ogni* $i<k$, *implica quella di* $P(k)$, *allora* $P(n)$ *vale per ogni naturale n.*

Il Principio di induzione non è altro che uno degli assiomi dell'aritmetica. Si tratta però di un assioma un po' particolare perché al suo interno vi è un teorema, che in precedenza abbiamo chiamato "passo d'induzione".
A differenza degli assiomi della geometria il principio di induzione *"si limita a offrire una strada per dimostrare dei risultati che per altra via si è riusciti a individuare; prima di usare il principio per provare che i numeri primi sono infiniti, o le proprietà del triangolo di Pascal o che* $1+2+3+...+n=n(n+1)/2$, *occorre aver "scoperto" per altra via questi risultati. Raramente lo stesso Principio di induzione ci permette di immaginare o enunciare la proprietà in questione"* (vedi [3], p. 112-113).
Da queste considerazioni di carattere generale discende l'importanza dal punto di vista didattico di far precedere alla enunciazione e all'uso del Principio di induzione la scoperta di congetture basate sull'esplorazione di regolarità e di proprietà legate ai numeri naturali.
Nella ricerca della proprietà da dimostrare, si può effettivamente utilizzare un processo che ha molte somiglianze con l'induzione usata nelle scienze sperimentali. Si effettuano una serie di "prove" e di "esperimenti" su una proprietà che "riguarda i naturali", finché non si arriva a stabilire una "legge" che sembra valere in tutti i casi

esaminati. Abbiamo quindi stabilito delle congetture. Questa fase di produzione di congetture si arriva a trovare una qualche formula che sembra valere in ogni caso. Si procede allora a dimostrare quel che si è scoperto, utilizzando il principio di induzione matematica. È comunque fondamentale che gli allievi si convincano che solo dopo questa dimostrazione saremo autorizzati a ritenere valida la "proprietà" precedentemente scoperta.

Il principio di induzione: osservazioni didattiche e possibili difficoltà psicologiche

Spesso gli studenti affermano che nell'uso del Principio di induzione si assume come ipotesi ciò che si vuole dimostrare. Perciò occorre fare attenzione all'uso del quantificatore "per ogni" quando si enuncia la cosiddetta "ipotesi induttiva". Dal punto di vista didattico è anche molto importante presentare alcuni degli errori tipici che si incontrano nell'uso del Principio di induzione. Ad esempio possiamo proporre di esaminare questa (strana) proprietà: "ogni numero naturale è uguale al suo successivo", oppure "sostituendo un qualsiasi naturale n nella espressione n^2+n+41 si ottengono solo numeri primi".

Occorre insomma precisare che entrambe le "tappe" del Principio di induzione sono necessarie: occorre controllare che $P(1)$ valga ed anche la seconda tappa in cui, supposta valida $P(k)$, si dimostra che vale $P(k+1)$.

La principale difficoltà psicologica del principio di induzione secondo Fischbein (vedi [2]) è la seguente:

Lo studente è portato a dare una valore di verità assoluto all'ipotesi induttiva nell'ambito del passo di induzione $P(k)\to P(k+1)$. *Quindi l'allievo non riesce a capire come un'affermazione che deve essere provata (il teorema) possa diventare una premessa nella struttura della dimostrazione stessa.*

Da queste osservazioni emerge la necessità di un approccio molto attento dal punto di vista didattico alle dimostrazioni per induzione.

Alcuni esempi per la scuola secondaria di II grado in cui si utilizza il principio di induzione

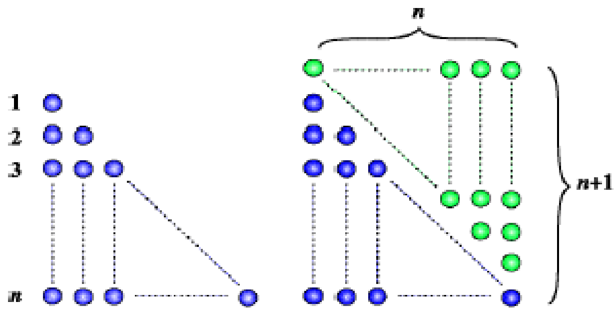
Nella precedente esposizione abbiamo visto quanto sia importante, per una buona didattica del principio di induzione, saper produrre delle congetture, da sottoporre poi alla dimostrazione.
In classe possiamo dunque proporre i seguenti esempi, alcuni dei quali sono particolarmente importanti nella storia della matematica. La metodologia consiste nel proporre un problema senza svelare immediatamente il risultato. La formula, in quasi tutti questi esempi, può essere effettivamente trovata in classe e poi dimostrata con il metodo di induzione matematica.

Esempio 1. Questo esempio si riferisce all'aneddoto che si racconta su Gauss ragazzo della scuola elementare. Il maestro avrebbe dato da sommare i numeri naturali da 1 a 100. Ci sono diverse versioni su questo aneddoto e non si sa neppure se sia vero. Tuttavia si propone di utilizzarlo in classe perché di solito suscita l'interesse degli allievi. L'idea di Gauss sembra sia stata quella di scrivere in una prima riga la somma e nella seconda riga la stessa somma in ordine inverso, secondo lo schema seguente, e poi sommare termine a termine:

 1 + 2 + 3 + 4+………+99+100
100+ 99 +98 + 97………+ 2 + 1

101+101+101+…………+101+101= $101 \cdot 100$.

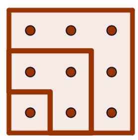
Si ottiene pertanto la somma 101 per 100 volte, cioè 10100. Dividendo per 2 si ha quindi la somma voluta, che è 5050.
Si noti che se ragioniamo sui primi n numeri naturali (si parte dal numero 1), abbiamo "trovato" la formula $n(n+1)/2$.
Ragionando su n anziché su un numero fissato, si potrebbe fare il seguente disegno, in cui però sono presenti molti puntini.



In questo disegno, che vorrebbe essere una "dimostrazione senza parole", al "triangolo" formato dalla somma $1+2+3+...+n$ è stato aggiunto un triangolo "rovesciato" formato dalla stessa somma, in ordine inverso, $n+...+3+2+1$. Si arriva quindi alla formula $n(n+1)/2$. Questa è una dimostrazione? Ci sono alcuni aspetti critici e la presenza dei puntini nel disegno costituisce un elemento che vorrebbe alludere a una dimostrazione generale, che tuttavia non si può accettare come valida. "Mentre i pallini e a maggior ragione le lettere possono trovare una traduzione rigorosa nel linguaggio matematico, non è così per i puntini di sospensione (vedi [6], p. 410).

Esempio 2. Un esempio importante, anche nella storia della matematica, è il seguente: trovare la formula che fornisce la somma dei primi n numeri dispari: $1+3+5+...+(2n-1)$. Facciamo alcune prove: 1; 1+3=4, 1+3+5=9, …

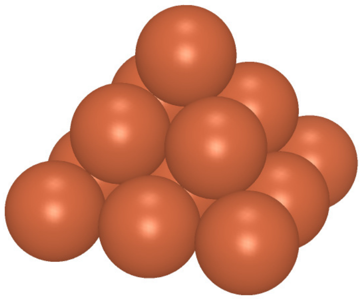
La congettura è facile: si ottiene n^2. In questo caso è possibile fornire una bella interpretazione geometrica, risalente alla scuola pitagorica, usando quadrati e gnomoni (rappresentazione di un numero dispari).



Questo stesso risultato è stato utilizzato anche da Galileo per affermare che nel moto naturalmente accelerato gli spazi percorsi successivamente, negli stessi intervalli di tempo, sono proporzionali ai successivi numeri dispari.

Esempio 3. Congetturare qual è il risultato della seguente somma: $1+2+4+8+...+2^{n-1}$ e poi dimostrare la formula trovata.
Esempio 4. Determinare la formula che fornisce la seguente somma $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$. Stabilire una congettura per la formula.

Esempio 5. Trovare qual è la formula che esprime il risultato della seguente somma: $1+4+9+...+n^2$. Si tratta di un esempio importante, ma più difficile dei precedenti. Si può ad esempio visualizzarlo come una "piramide" di quadrati formati da palline da ping pong opportunamente impilate (può andare bene anche una piramide di arance…).



Con diverse strategie, particolarmente interessanti dal punto di vista didattico, si può arrivare a dimostrare (per induzione) la formula $1+4+9+...+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$ (vedi [4]).

Esempio 6. Nell'induzione non si parte sempre da $n=1$. Possiamo quindi proporre di dimostrare la seguente disuguaglianza $2^n>2n+1$. Il lavoro preliminare consiste nello scoprire per quali naturali n vale questa disuguaglianza. In questa fase ci si può anche aiutare con un software, ad esempio con *GeoGebra* disegnando il grafico di 2^n e di $2n+1$, con n naturale. Si scopre che per n=3 la proprietà vale ($2^3 > 2 \cdot 3 + 1$). Supponiamo che valga per k ($k > 2$). Ipotizziamo quindi (ipotesi induttiva): $2^k > 2k + 1$. Aggiungiamo 2^k in entrambi i lati, ottenendo: $2^k + 2^k > 2k + 1 + 2^k$. Si ha quindi: $2^k + 2^k > 2k + 1 + 2^k \geq 2k + 1 + 2$ (per $k > 0$, si ha $2^k \geq 2$). Pertanto: $2^{k+1} > 2(k+1) + 1$.

Esempio 7. Dimostrare la disuguaglianza $2^n > n^2$. Anche qui la fase preliminare consiste nello scoprire per quali naturali *n* essa vale. Per *n*=5 la proprietà vale ($2^5 > 5^2$). Supponiamo che valga per *k* (con $k > 4$). Ipotizziamo quindi (ipotesi induttiva): $2^k > k^2$.
Aggiungiamo 2^k ad entrambi i lati: $2^k + 2^k > k^2 + 2^k$. Si ha quindi $2^k + 2^k > k^2 + 2^k > k^2 + 2k + 1$ (qui abbiamo usato quanto visto nell'esercizio precedente).
Si ha quindi: $2^{k+1} > k^2 + 2k + 1$, ovvero: $2^{k+1} > (k+1)^2$.

Esempio 8.. Dimostrare la formula di De Moivre per la potenza di un numero complesso: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$.
Per *n*=1 la proprietà vale.
Supponiamo che valga per *k*, ovvero:
$(\cos x + i \sin x)^k = \cos(kx) + i \sin(kx)$ e dimostriamo che allora vale per *k*+1:
$$(\cos x + i \sin x)^{k+1} = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x + i \sin x) =$$
$$\big(\cos(kx) + i \sin(kx)\big)(\cos x + i \sin x) = \cos\big((k+1)x\big) + i \sin\big((k+1)x\big).$$

Esempio 9. Dimostrare la relazione tra la media geometrica e la media aritmetica per i numeri positivi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, ovvero si ha $m_{geometrica} \leq m_{aritmetica}$. Per *n*=2 la proprietà vale (si può anche visualizzare geometricamente). Supponendo che valga per *k* (con $k > 2$) si dimostra che la disuguaglianza vale per $k + 1$. Nella dimostrazione, un po' laboriosa, si distingue tra i numeri *n* che sono potenze di 2 e gli altri (vedi [5], p. 29-30).

Il Principio di induzione come strumento per definire e per descrivere algoritmi

In matematica sono molto importanti le definizioni per induzione o per ricorrenza (vedi [1]). Ad esempio diamo la definizione per ricorrenza del fattoriale di un numero naturale ($n!$):

$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot (n-1)! \end{cases}$$

La prima uguaglianza fissa il valore iniziale; la seconda dice come il fattoriale si calcola (prodotto di n per il fattoriale di $n-1$) per gli altri numeri naturali. È da notare che questa definizione non dice che cos'è il fattoriale, ma descrive come si calcola. Il metodo di calcolo è lungo se n è "grande". Molto utile, per dare questa definizione è l'uso di un foglio elettronico. I fogli elettronici sono strumenti informatici diffusissimo, ma non sempre si sottolinea il fatto che operano in modo ricorsivo, per esempio quando si copia una formula da una cella alla riga successiva.

La definizione data di fattoriale è molto elegante, ma a volte, in certi software, provoca lentezze notevoli nel calcolo.

Un altro esempio, anche se più difficile, che si può portare è la definizione ricorsiva di addizione tra due numeri naturali $n+m$:

$$\begin{cases} n + 0 = n \\ n + (m+1) = (n+m) + 1 \end{cases}$$

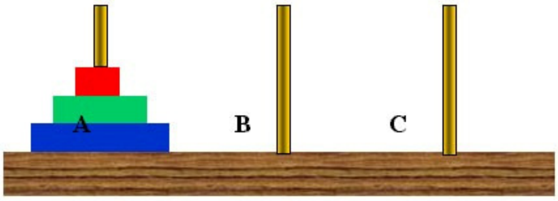
Una definizione come questa (andrebbe un po' esplicitata: dov'è l'ipotesi induttiva?) non dice che cos'è $n+m$, ma fornisce un algoritmo per calcolare la somma tra due numeri naturali.

Altri esercizi da proporre in classe sono i seguenti:

- Definire in modo ricorsivo una progressione aritmetica
- Definire in modo ricorsivo una progressione geometrica
- Definire in modo ricorsivo i numeri triangolari (1, 3, 6, 10, …).

Alcune successioni vengono definite di solito in modo ricorsivo; il caso più noto è quello della successione di Fibonacci anche se si tratta di una ricorsione che opera su due termini precedenti invece che su un solo termine.

Molto interessante, dal punto di vista didattico, è la presentazione di un gioco famoso detto della “torre di Hanoi”. Sono dati tre paletti etichettati con *A, B* e *C*, e i dischi numerati da 1 (di diametro più piccolo) a *n* (il più grande).



Le regole del gioco sono:

- un disco può essere spostato solo da un paletto a un altro;
- si può spostare un solo disco alla volta;
- non si può mai sovrapporre un disco di diametro più grande su uno più piccolo.

È molto interessante provare questo gioco materialmente in classe anche se in rete si trovano delle belle animazioni. Dopo vari tentativi, si trova che la soluzione deve essere svolta e descritta in modo ricorsivo. In definitiva l'algoritmo si esprime secondo le seguenti “macro-mosse”:

- sposta i primi $n-1$ dischi da A a B (questa macro-mossa lascia il disco n da solo sul paletto A);
- sposta il disco n da A a C;
- sposta $n-1$ dischi da B a C.

Non tutti i software permettono di definire “oggetti” in modo ricorsivo. In alcuni casi la definizione ricorsiva può essere deleteria per il computer data la quantità di calcoli che lascia “aperti” prima di arrivare alla conclusione.

Fino a non molto tempo fa erano pochi i libri di testo per la scuola secondaria di II grado che introducevano il principio di induzione. Tra i primi occorre citare i seguenti testi innovativi pubblicati tra gli anni Settanta e Ottanta:

- *School Mathematics Project*, trad. it. a cura dell’UMI, Zanichelli, Bologna, 1972;

- G. Prodi, E. Magenes, *Elementi di Analisi matematica,* Progetto "Matematica come scoperta", D'Anna, Firenze-Messina, 1982;
- L. Lombardo Radice, L. Mancini Proia, *Il metodo matematico*, vol. 3°, Principato, Milano 1979.

Oggi ci sono diversi libri di testo che riportano il Principio di induzione, anche se al momento opportuno non sempre lo usano, per esempio quando introducono le proprietà delle progressioni aritmetiche e delle progressioni geometriche.

Dopo questo excursus di carattere didattico torniamo alle *Indicazioni* nazionali di matematica per i Licei. Le richieste relativamente al Principio di induzione sembrano essere troppo ambiziose oltre che poco chiare in alcune parti, ad esempio quando si dice che lo studente al termine del percorso liceale deve avere "*un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico".*

Sembra che queste ultime frasi siano ispirate ad alcuni passi de *La Science et l'Hypothèse* del 1902*,* di H. Poincaré (1854-1912), anche se ad una attenta analisi di quest'opera non si trovano esattamente questi riferimenti.

Molto più precise sono invece le indicazioni della Commissione UMI che ha prodotto la proposta di curricolo contenuta in *Matematica 2003*. In questa proposta si dice: *Applicare in semplici casi il principio di induzione* (abilità per il 2° Biennio, nel nucleo trasversale: *Argomentare, congetturare, dimostrare*, vedi [6], p. 21).

Conclusioni

Nelle *Indicazioni nazionali per i Licei* (2010) sull'induzione matematica paragonata con l'induzione in fisica, forse conveniva essere più chiari e non introdurre una particolare visione di questo principio. In generale, dal punto di vista didattico, si può dire che l'uso del principio di induzione nelle dimostrazioni sia piuttosto delicato e che convenga introdurlo solo negli ultimi anni, accanto a una riflessione sulle diverse forme di dimostrazione presenti in matematica. Il principio di induzione riguarda soprattutto proprietà relative ai numeri naturali. Il principio di induzione inoltre non è da privilegiare rispetto ad altri tipi di dimostrazione, anzi è forse il tipo di dimostrazione più tecnico. Richiede pertanto un approccio didattico molto attento, che conduca gradualmente l'allievo dalle congetture alla dimostrazione.

Bibliografia

[1] M. Ferrari, *Uno strumento per definire e dimostrare: il principio di induzione matematica*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 11 B, n. 6, Dicembre 1988, pp. 1169-1198.
[2] E. Fischbein, I. Engel, *Difficoltà psicologiche nella comprensione del principio di induzione matematica*. La matematica e la sua didattica, Vol. 3 1989, n. 2, pp. 43-45.
[3] G. Mazzanti, B. Piochi, *Il principio di induzione*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 14 B, n. 2, Febbraio 1991, pp. 108-136.
[4] G. Polya, *Mathematics and Plausible Reasoning. Induction and Analogy in Mathematics* (vol. I), *Patterns of Plausible Inference* (vol. II), Princeton University Press, 1954.
[5] I. S. Sominskii, *Il metodo di induzione matematica*. Progresso Tecnico Editoriale, Milano 1964.
[6] MIUR-UMI-SIS, *Matematica 2003, La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Scuola secondaria di secondo grado*. Liceo Vallisneri, Lucca 2004.
[7] F. Waismann, *Introduzione al pensiero matematico*, Boringhieri, Torino 1971.