

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica "T. Levi-Civita"



Corso per l'acquisizione dei 24 CFU / 5^ ciclo

**Metodologie e tecnologie didattiche
per l'insegnamento
della matematica nella scuola secondaria**

Perché la matematica è difficile? Difficoltà nell'apprendimento della matematica

14 maggio 2019 (online)

prof. Luigi Tomasi



Difficoltà in matematica e genesì degli errori

(contratto didattico, conflitti,
misconcezioni, modelli, ostacoli)



*Se chiudete la porta a tutti gli errori,
anche la verità ne resterà fuori.*

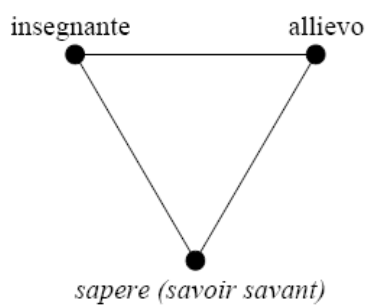
Rabindranath Tagore

3



Il “triangolo della didattica”

Schema proposto da Yves Chevallard (nel 1982) sulle
situazioni di apprendimento.



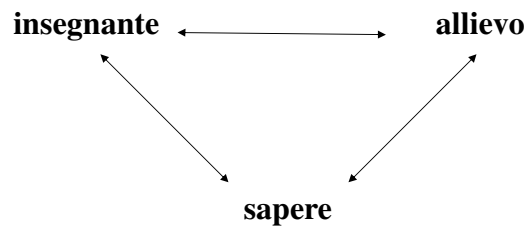
Yves Chevallard

4

Il “triangolo della didattica”



Schema proposto da Yves Chevallard (1982) sulle situazioni di apprendimento. Si parla anche di “sistema didattico”, costituito dalla terna (Allievo, Insegnante, Sapere).



Per “sapere” si intende quello ufficiale, che si impartisce all’università, quello che Chevallard chiama “savoir savant”; nel caso specifico della matematica è stato chiamato “sapere matematico”; si tratta del sapere storicizzato, accademico e della ricerca matematica.

5

Il “sistema didattico”



Qual è il campo di studi della didattica della matematica?

Per G. Brousseau (1986) sono i “fenomeni legati all’attività di insegnamento, concernenti specificatamente il sapere insegnato”.

Per C. Laborde (1989): “Ciò che noi chiamiamo didattica della matematica in Francia riguarda lo studio dei rapporti tra insegnamento ed apprendimento nei loro aspetti che sono specifici della matematica”.

Per C. Margolinas (1990): “Oggetto di studio di questo campo scientifico è il sistema didattico (Insegnante – Allievo – Sapere)”.

Nonostante le diversità espressive, le tre precedenti definizioni possono essere considerate equivalenti e ci portano dunque ad occuparci del sistema didattico.

6

Il funzionamento del “sistema didattico”

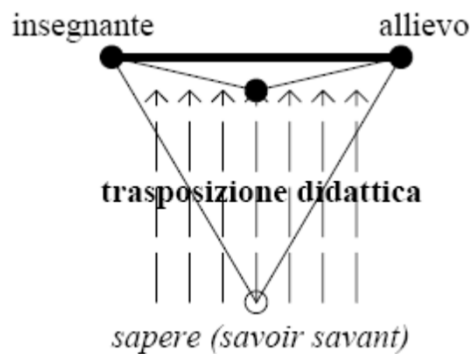
- Ciò che ci proponiamo è di capire il funzionamento del sistema didattico.
- Nonostante alcuni studi mettano l'accento su una sola delle componenti di tale sistema, esso è da considerarsi come un tutto inscindibile. Le sue componenti devono essere studiate all'interno di una disciplina specifica, la didattica della matematica.
- L'insegnante fa parte del sistema didattico ed è perciò oggetto di studio.
- Si formula l'ipotesi che le leggi del sistema didattico influenzino molto l'insegnante nella sua attività.
- Tale affermazione è in contrasto con l'idea comune che il buon insegnante sia capace di adattarsi a ogni situazione di insegnamento.

7

Lato insegnante-allievo e trasposizione didattica

In questa schematizzazione il sapere accademico è esterno al lato insegnante-allievo

Nasce quindi la necessità della **trasposizione didattica**.



8

Il lato “sapere-insegnante” trasposizione didattica del sapere



Per «trasposizione didattica» si intende il lavoro di adattamento, di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento, in funzione della classe, del luogo e delle finalità didattiche che ci si pone).

sapere matematico (disciplinare)



Insegnante

sapere da insegnare



Insegnante

sapere insegnato (in aula)

9

Trasposizione didattica del sapere



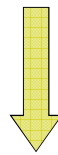
- Tale processo è stato denominato “trasposizione didattica” da Chevallard che per primo ne ha fatto l’analisi in didattica della matematica.
- La trasposizione didattica consiste, dal punto di vista dell’insegnante, nel costruire le sue lezioni attingendo dalla fonte dei saperi matematici, tenendo conto degli orientamenti forniti dalle istituzioni e dai programmi (*sapere da insegnare*), per adattarli alla propria classe: livello degli allievi, obiettivi perseguiti, ecc.

10

Il lato “insegnante-allievo”



Sapere insegnato



Alunno

Sapere appreso

11

Difficoltà intrinseche della matematica: astrazione



Gli “oggetti” della matematica sono completamente astratti; non hanno alcun legame con il mondo reale, a parte il fatto di essere astratti dalla realtà (questa astrazione è tipica del pensiero matematico).

(K. Devlin, *Il gene della matematica*, pag. 148-150)

12

Difficoltà del lato “sapere-allievo” matematica e vita ‘reale’



Hans Maier:

1 -La specificità della matematica che si insegna a scuola

“La parte nettamente predominante di oggetti, concetti, operazioni e procedimenti che gli alunni incontrano durante le lezioni di matematica non ha alcuna relazione con la loro vita “reale” (extrascolastica)...

La matematica, in ogni caso, appare nulla più se non un’invenzione della scuola, come un prodotto artificiale e misterioso...”

13

Difficoltà del lato “sapere-allievo” matematica e vita “reale”



Di conseguenza, si hanno due tipi di difficoltà:

1 - l'apprendimento della matematica in classe:

- non inizia dalle esperienze precedenti degli allievi
- non trova rinforzo nella vita quotidiana per concetti matematici affrontati in classe

2 - la matematica che si insegna a scuola fatica a far leva sulla **motivazione** degli allievi, dovendo rinunciare quasi sempre all'applicabilità alla vita reale.

14

Difficoltà del lato “sapere-allievo”: astrazione



2 - Richieste intellettuali della matematica scolastica

“La matematica insegnata a scuola richiede in modo abbastanza categorico che gli allievi siano preparati al **pensiero astratto**.

Si può dire che essa si dedichi quasi esclusivamente a questo ...

Così le teorie matematiche hanno il loro fondamento più sul terreno logico che empirico. Inoltre, l'insegnamento della matematica non può essere ristretto ad una trasmissione di informazioni o ad una raccolta di fatti.

Gli allievi devono capire e usare la loro conoscenza...”

15

Difficoltà del lato “sapere - allievo”: il linguaggio



3 – Il linguaggio della matematica (...solo a scuola)

Abbiamo già detto dell'importanza del linguaggio nella formazione dei concetti matematici.

Il linguaggio matematico:

- utilizza una grande quantità di termini tecnici e di simboli;
- utilizza termini assenti dal linguaggio quotidiano (es. *vettore*, *commutativo*...) o con significato diverso (*angolo*);
- utilizza termini presenti nel linguaggio comune, ma con un significato diverso: ci può quindi essere una *interferenza di significato*;
- è molto conciso: informazione molto densa in poche parole o simboli.

16

Difficoltà del lato “insegnante - allievo” il contratto didattico



Il contratto didattico

“In una situazione di insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l’allievo ha un compito da risolvere, ma l’accesso a questo compito si fa attraverso un’interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti nel modo di insegnare del docente. Queste **abitudini (specifiche) del docente attese dall’allievo**, ed i **comportamenti dell’allievo attesi dal docente** costituiscono il *contratto didattico*.”

(Guy Brousseau, 1980)

17

Difficoltà del lato “insegnante - allievo”



Il contratto didattico

“È l’insieme dei comportamenti dell’insegnante che sono attesi dall’allievo e l’insieme dei comportamenti dell’allievo che sono attesi dall’insegnante.”

(Guy Brousseau, 1986)

18

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



Il contratto didattico

Nel contratto didattico spesso si tratta di “attese” non esplicite ma dovute:

- alla concezione della scuola
- alla concezione della matematica
- alla ripetizione di modalità.

(Qualcuno osserva che il “contratto didattico” non svolge sempre un ruolo negativo...)

19

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



Contratto didattico ed effetto “età del capitano”

Sono ben descritti in questi due libri della didatta della matematica francese Stella Baruk:

- Stella Baruk, *Dizionario di Matematica elementare*, Zanichelli, Bologna 1998, pag. 207
- Stella Baruk, *L'âge du capitain*, Seuil, Paris 1985
(ma anche in G. Peano, 1924)

20

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



Effetto “età del capitano”

Si designa la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, nonostante questo problema non possieda una soluzione numerica.

- Stella Baruk, *Dizionario di Matematica elementare*, Zanichelli, Bologna 1998, pag. 207
- Stella Baruk, *L'âge du capitain*, Seuil, Paris 1985 (ma anche in Giuseppe Peano, 1924).

21

Effetto “età del capitano”



Si parla (tra gli studiosi di Didattica della Matematica in Francia)

di effetto “età del capitano” per riferirsi a un problema in cui la domanda posta non ha alcun rapporto con i dati di cui si dispone. Risale allo scrittore Flaubert (che odiava la matematica)

Gustave Flaubert, Lettera alla sorella del 15 marzo 1843

“Una nave si trova in mare. È partita da Boston con un carico di 200 barili di indaco; fa vela verso Le Havre,.... Il vento soffia in direzione NNE. Ci sono 12 passeggeri; l'orologio segna le 3 e un quarto del pomeriggio e si è nel mese di maggio.

Qual è l'età del capitano?”

22

Contratto didattico: effetto “età del capitano”



Variante in B. D'Amore, *Didattica della Matematica*, pag. 36 (problema dato in IV elementare):

“Un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore?”

Bruno D'Amore racconta:

In coro, con sicurezza, e *tutti* senza eccezioni o riserve, i bambini hanno dato la risposta attesa: «18».

Di fronte allo sgomento della maestra, le ho spiegato che si tratta di un fatto legato al contratto didattico: lei non aveva mai dato problemi senza soluzione, o impossibili: dunque i bambini avevano introdotto nel contratto didattico, in modo semplicistico, una clausola del tipo: «Se la Maestra ci dà un problema, questo deve essere certamente risolto».

23

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



■ interpretazione *distorta* delle comunicazioni insegnante-allievo (questa situazione si crea però non solo per responsabilità dell'allievo; a volte dipende anche dall'insegnante ...):

- di algoritmi
- di termini e simboli
- di concetti

24

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



- interpretazione *distorta* di algoritmi

A volte gli alunni sbagliano

- non perché applicano in modo scorretto algoritmi corretti,
- ma perché *applicano in modo corretto algoritmi scorretti*

Quindi: *porre domande per aiutare l'alunno ad esplicitare il suo processo personale di apprendimento.*

25

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



- interpretazione *distorta* di termini e simboli

- conflitto tra significato tecnico e del linguaggio quotidiano
- simboli interpretati in modo distorto o personalizzato, ad esempio le parentesi, la freccia dell'implicazione (condizione necessaria; condizione sufficiente)

26

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



- interpretazione *distorta* di concetti: misconcetti (spesso spiegabile con la teoria di *immagine e modello*)

Alcuni esempi di convinzioni (errate) diffuse:

- il prodotto di due numeri è sempre maggiore dei fattori
- un numero è negativo ($-a$) se e solo se rappresentato con il segno “meno $-$ ” e, simmetricamente, è positivo se è preceduto dal segno $+$ (ad esempio $+a$) ;
- confusione/identificazione tra integrale definito e area

27

Argomenti di studio emergenti in Didattica della Matematica



Ci sono argomenti di studio in Didattica della Matematica, che sono emersi con grande forza negli ultimi anni:

- i conflitti
- le misconcezioni
- i modelli intuitivi

Sono argomenti molto intrecciati tra di loro.

28

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



■ Conflitti

Lo studente nel tempo costruisce un *concetto* e se ne fa un' *immagine*.

Questa immagine può essere stata validata e rafforzata nel corso del suo curriculum scolastico da prove, esperienze ripetute, figure, esercizi risolti ed accettati dall'insegnante come corretti.

Può capitare che tale immagine si riveli inadeguata e che venga sostituita da una nuova.

Si genera quindi un conflitto tra la precedente immagine e la nuova. Ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità di quella precedente

Es. il concetto di angolo.

29

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



■ Misconcezioni

Legata alle idee di immagine di un concetto e di conflitto, c'è il problema delle misconcezioni, ovvero delle *concezioni distorte*.

Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce di solito un evento da evitare.

Tuttavia non va sempre vista come una situazione del tutto negativa.

Non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare per una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione

Es. il prodotto di due numeri è maggiore dei fattori.

30

Esempi di misconcezioni



Rettangolo «coricato» e rettangolo «in piedi»

Il quadrato è un rettangolo (molti pensano che non sia vero)

Il quadrato è un rombo (idem)

Queste misconcezioni possono derivare da disegni stereotipati:

Trapezio disegnato in modo particolare

Il rombo sempre disegnato con le diagonali una verticale e l'altra orizzontale.

Alla base dei conflitti ci sono le misconcezioni, cioè concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica. Di solito non sono eliminabili; sono un momento di passaggio...

31

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



■ **Ostacoli che si frappongono all'apprendimento (concetto introdotto da Guy Brousseau, metà degli anni Settanta)**

Un ostacolo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti. È però fallimentare quanto si tenta di applicarla ad un problema nuovo.

Visto il successo ottenuto in precedenza si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di salvarla, ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

(B. D'Amore, *Didattica della Matematica*, p. 67)

32

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



Gli ostacoli: una prima classificazione (Guy Brousseau)

1) *Ostacoli di origine ontogenetica*

Si tratta di ostacoli che dipendono dai limiti dell'allievo. Ogni insegnante sa che di fronte a sé non vengono a trovarsi studenti “ideali”, pressoché perfetti, bensì ragazzi in carne ed ossa, talvolta limitati, insicuri: queste caratteristiche possono influenzare (negativamente) il rendimento scolastico.

Per esempio, si rivela fallimentare ogni tentativo di introdurre dimostrazioni in seconda o terza media (età degli allievi 12-14 anni); ad esempio il teorema di Pitagora deve essere introdotto con una «prova» sperimentale.

Oppure, si rivela fallimentare tentare di introdurre nella scuola elementare il connettivo logico «se..., allora...».

Questo fallimento è legato all'età e alla loro immaturità di sviluppo cognitivo.

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



Gli ostacoli: una prima classificazione (Guy Brousseau)

2) *Ostacoli di origine didattica*

Dipendono dal sistema educativo adottato, dalle scelte operate dall'insegnante: dunque proprio l'insegnante può operare in termini decisivi per limitare l'influenza di questo genere di ostacoli (ad es. il linguaggio matematico,...).

Un esempio di ostacolo didattico sorge nella scuola elementare quando si presenta il segmento, la retta come degli infiniti «attuali». Di solito gli allievi hanno un'idea di infinito diversa, di infinito «in potenza».

Il segmento, per gli allievi, è molto spesso una «collana di perle» e si fa quindi fatica, più avanti a capire la «densità» e la continuità della retta.

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



3) Ostacoli di natura epistemologica

- Dipendono dalla natura della disciplina (e sono, dunque, inevitabili). Inutile illudersi: alcuni contenuti matematici non sono banali, non sono immediatamente comprensibili.
- Se, da un lato, è assurdo che l'allievo “rinunci in partenza”, che finisca per trincerarsi dietro ad un “io non ce la farò mai a capire questo argomento” (atteggiamento, purtroppo, non del tutto infrequente),
- d'altro canto è sbagliato e controproducente presentare tutta la matematica come un elementare e divertente giochetto.
- *Non è così*. La matematica è bella, certo; e vale davvero la pena di impegnarsi a fondo per comprendere la sua eleganza.
- *Ma non sempre la matematica è “facile”.*

35

Ostacoli di natura epistemologica



Esempi di ostacoli di natura epistemologica

- Il concetto di infinito (attuale) matematico costituisce un ostacolo epistemologico
- Lo zero costituisce un ostacolo epistemologico. Dal punto di vista didattico lo studente vede lo «zero» come un numero del tutto speciale e difficilmente lo domina.
- I numeri interi (‘relativi’) costituiscono spesso un ostacolo; ad esempio il perché il prodotto di due numeri negativi dia un numero positivo...
- La densità dei numeri razionali
- Concetto di limite: di solito crea ostacoli
- Il concetto di continuità

36

Ostacoli epistemologici



- Si ha certamente un ostacolo epistemologico a proposito di quelle idee per le quali nell'analisi storica di esse si riconosce una frattura, un passaggio brusco, una non-continuità nell'evoluzione storico-critica dell'idea stessa
- Si ha un ostacolo epistemologico a proposito di un'idea quando uno stesso errore si verifica come ricorrente più o meno negli stessi termini attorno a quell'idea.

La ricerca degli ostacoli va fatta contemporaneamente:

- a scuola, nella pratica didattica
 - nello studio della Storia della Matematica
- congiungendo l'una ricerca con l'altra.

37

Difficoltà del lato “insegnante-allievo”



■ Ostacoli ed errori

L'errore non è necessariamente frutto di mancanza di studio o di non conoscenza, ma potrebbe essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto efficacia ed esiti positivi, ma che non resiste alla prova di fatti più contingenti o più generali.

Si ha un **ostacolo** quando nell'analisi storica di un'idea, si riconosce una frattura, un passaggio brusco, una non-continuità nell'evoluzione storico-critica dell'idea stessa.

Si ha un ostacolo quando uno stesso errore si verifica come ricorrente più o meno negli stessi termini.

38

Difficoltà del lato “allievo-insegnante”



- Anche gli alunni hanno una loro “epistemologia”...

In effetti, il sistema di convinzioni dell'alunno su

- l'insegnamento/apprendimento
- cause di successo/fallimento in matematica
- le caratteristiche della matematica
- le proprie capacità

cioè la sua epistemologia personale, lo guiderà nei processi decisionali.

39

Difficoltà del lato “allievo-sapere”



- Cause di successo/fallimento in matematica

Convinzione molto diffusa negli allievi:

Per studiare matematica occorre e basta fare esercizi.

«Alessio prepara *Istituzioni di matematica*. Arriva al ricevimento con un pacco di esercizi sui complessi, zeppi di errori. Alla domanda: “Ma tu sai che cos'è un numero complesso?”, risponde quasi infastidito:

“No. Intanto imparo a fare gli esercizi. Poi, se passo lo scritto, studierò la teoria”».

(da Rosetta Zan, *Problemi e convinzioni*, Pitagora, Bologna 1998).

40

Difficoltà del lato “allievo - sapere”



- **Convinzioni errate sulla matematica (→da R. Zan):**

Molti allievi pensano:

In matematica quello che conta sono i prodotti, ossia i risultati (e non i processi), e quindi:

- se il prodotto è sbagliato, si butta via tutto, anche il processo;
- viceversa, se il prodotto (il risultato) è “giusto”, è difficile convincere che il procedimento sia errato;
- e ancora, dopo la correzione, il prodotto sbagliato (risultato) è semplicemente *sostituito* con quello giusto...

41

Difficoltà del lato “allievo - sapere”



Se importanti sono i prodotti, tutti i risultati devono essere ricordati.

E allora, di conseguenza, molti studenti pensano:

“In matematica ci vuole tanta memoria”

E, risultato scontato, arrivano a un'altra convinzione:

“La matematica è una disciplina incontrollabile”.

Quindi l'alunno rinuncia al controllo dei propri processi di pensiero, e tende ad attribuire a fattori esterni le cause del proprio fallimento.

42

Difficoltà del lato “insegnante - sapere”



Ma su questi problemi l'insegnante deve riflettere perché a volte sono anche le sue scelte e pratiche didattiche la causa di queste concezioni:

- è l'insegnante che in classe detta le “regole del gioco”: lui può dire: “è evidente...”; ...ma l'alunno?
- è l'insegnante che spesso privilegia i prodotti a discapito dei processi; che fa memorizzare troppe formule; che si perde nei mille casi particolari ...
- è l'insegnante che deve farsi carico di fornire solide basi, su cui poggia l'intero edificio.

43

Difficoltà del lato “allievo – sapere (disciplina)”



- **Convinzioni sulle proprie capacità**

Nell'alunno, **un giudizio sulle proprie capacità in matematica si forma presto**, e - se è negativo - genera un atteggiamento di disistima.

- In questo sono in parte responsabili gli insegnanti, che con fatica (se non mai...) modificano il loro giudizio su un allievo.
- Ma in parte ne sono responsabili anche i genitori e i familiari in genere, che accettano spesso come ineluttabili le difficoltà in matematica.

44

Video della prof.ssa Rosetta Zan Università di Pisa



Si consiglia questo video sulla didattica della matematica

<https://www.youtube.com/watch?v=3FigP0x8Lr8&t=6s>

Titolo del tema utilizzato dalla prof.ssa Zan per indagare sulle convinzioni degli allievi in matematica:
Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica dalle elementari ad oggi.

45

Intervista alla prof.ssa Rosetta Zan sulle difficoltà in matematica



Segnalo un'intervista, divisa in due parti, alla prof.ssa Rosetta Zan sulle difficoltà in matematica, apparsa sul blog "Math is in the air" (2017):

<http://www.mathisintheair.org/wp/2017/09/difficolta-in-matematica-intervista-alla-prof-ssa-rosetta-zan-parte1/>

<http://www.mathisintheair.org/wp/2017/09/difficolta-in-matematica-intervista-alla-prof-ssa-rosetta-zan-parte2/>

46

Bibliografia



Vedi il capitolo 4 di:

**-A. Baccaglini Frank, P. Di Martino, R. Natalini, G. Rosolini,
Didattica della Matematica, Mondadori Università, Milano
2018.**

Questa presentazione è stata ricavata in parte da:

- B. D'Amore, *Didattica della matematica*, Pitagora, Bologna 2001 capitoli 3 e 4.
- e dai seguenti altri libri o articoli:
- R. Zan, *Dalla correzione degli errori... all'intervento sulle difficoltà*, intervento al XIX Convegno nazionale UMI-CIIM, Vicenza 1997.
 - S. Baruk, *Dizionario di matematica elementare*, Zanichelli, Bologna 1998.
 - H. Maier, *Apprendimento della matematica. Difficoltà e modalità per superarle*, Atti del X Convegno "Incontri con la Matematica", Castel San Pietro T., Pitagora, Bologna 1996.
 - B. D'Amore, *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della matematica*, Pitagora, Bologna 2003
 - V. Villani, *Dal concreto della scuola dell'obbligo all'astratto. Conquista di nuovo sapere o perdita di significato?* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 20 A-B, n.5, 1997.

47