

## GeoGebra: funzioni, grafici e foglio di calcolo (con l'uso di slider)

Useremo GeoGebra 5 classic. GeoGebra è un software di matematica dinamica per la didattica, che comprende geometria, algebra, analisi, statistica e molto altro.

Oltre a costruire oggetti in modo interattivo tramite le caselle di strumenti, in GeoGebra è possibile gestire direttamente coordinate ed equazioni. GeoGebra consente quindi di inserire coordinate, variabili, equazioni, funzioni tramite la barra di inserimento oltre ad avere la possibilità di usare un foglio di calcolo.

GeoGebra ha molti strumenti dedicati alle funzioni. In queste esercitazioni si propone talvolta di usare lo **slider** (cursore, serve per fare variare un parametro) che permette varie esplorazioni dinamiche, in particolare di famiglie di curve e di funzioni.

In queste esercitazioni si userà prevalentemente la **vista Grafici** di GeoGebra, talvolta assieme alla **vista Foglio di calcolo**. Occorre inoltre visualizzare la **Barra di inserimento**.

Eeguire le seguenti costruzioni, salvare i file e successivamente trasformarlo in una scheda di lavoro per la classe.

- 1) Usare la vista Foglio di calcolo. La proporzionalità diretta tra due grandezze; un esempio: spazio percorso e tempo nel moto rettilineo uniforme:  $s = v t$ ; considerare, per esempio,  $v=30$  m/s. Nella prima colonna scrivere il tempo in secondi, ad esempio 0, 1, 2, fino a 10 secondi. Nella seconda colonna scrivere lo spazio percorso (in m): 0, 30, 60, 90, ecc. Significato della pendenza della retta ottenuta. Costruire una scheda didattica su questo esempio da usare in classe.
- 2) Usare la vista Grafici. Inserire uno slider (cursore); chiamarlo  $m$ ; disegnare le rette di equazione  $y=mx$  (scrivere nella riga di inserimento l'equazione  $y=m*x$ ). Trascinare lo slider. Usare la traccia della retta e trascinare lo slider. Come useresti questo file per introdurre in classe la retta nel piano cartesiano, il significato di pendenza (coefficiente angolare)? Costruire una scheda didattica da usare in classe.  
NB. Se si scrive nella riga di inserimento  $y=m*x$ , GeoGebra interpreta questa equazione come retta. Se invece si scrive  $f(x)=m*x$  (oppure semplicemente si scrive  $m*x$ ), GeoGebra interpreta questa equazione come una funzione.
- 3) Creare due slider ( $m$  e  $q$ ) e disegnare il grafico dell'equazione  $y=mx+q$ . Selezionare la traccia della retta. Far variare  $m$ ; far variare  $q$ . Notare i due tipi di fasci di rette (proprio oppure improprio).
- 4) Andamenti lineari tra due grandezze. Esempio da una Prova INVALSI, 2<sup>a</sup> superiore (modificata).

Per il noleggio giornaliero di un'automobile si può scegliere tra tre diverse tariffe:  
Tariffa A: comporta una quota fissa di 30 euro e costa 0,25 euro al km percorso  
Tariffa B: comporta una quota fissa di 10 euro e costa 0,60 euro al km percorso  
Tariffa C: non ha una quota fissa, costa 0,50 euro al km percorso, però ha un vincolo minimo di 80 km, ovvero la spesa ha un costo minimo corrispondente a un percorso di 80 km.  
Stabilire la tariffa più conveniente se si percorrono 100 km.

Rappresentare graficamente le tariffe con GeoGebra (nello stesso grafico).

- 5) Rettangoli con lo stesso perimetro; andamento dell' "altezza" rispetto alla "base". Se  $p=12$  è il semiperimetro (costante), allora  $x+y=12$ . Quindi  $y=12-x$ . Creare un foglio di calcolo con la misura della base sulla prima colonna e la misura dell'altezza nella seconda colonna. Grafico. Qual è la condizione su  $x$ ? Come si può creare una funzione con un dominio più ristretto? Scrivere nella riga di inserimento la funzione **se( $0 \leq x \leq 12$ ,  $12-x$ )**.
- 6) Visualizzare un sistema lineare formato da due equazioni nel piano cartesiano. Usare sei slider e disegnare il grafico di  $ax+by+c=0$  e  $a'x+b'y+c'=0$ . Trascinare  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  ed esplorare dinamicamente i casi possibili.

- 7) Disegnare il grafico della funzione “valore assoluto”. Questa funzione è già predefinita in GeoGebra e basta scrivere nella riga di inserimento  $\text{abs}(x)$ . Occorre sottolineare che questa è una funzione definita “a tratti” e può essere definita nel seguente modo usando una istruzione condizionale:  **$\text{se}(x < 0, -x, x)$** , il cui significato è il seguente: “se  $x < 0$ , disegna  $-x$ , altrimenti disegna  $x$ ”.
- 8) Una funzione definita “a tratti” dal mondo reale. Nel sito del MEF (Ministero dell'Economia e delle Finanze) è possibile trovare le seguenti aliquote IRPEF per il 2018:

scaglioni di reddito in €	aliquota	imposta dovuta
da 0 a 15.000	23%	23% sulla parte eccedente la no tax area (vedi sotto)
da 15.001 a 28.000	27%	3.450 € + 27% sulla parte eccedente i 15.000 €
da 28.001 a 55.000	38%	6.960 € + 38% sulla parte eccedente i 28.000 €
da 55.001 a 75.000	41%	17.220 € + 41% sulla parte eccedente i 55.000 €
oltre 75.001	43%	25.420 € + 43% sulla parte eccedente i 75.000 €

Rappresentare graficamente con GeoGebra la funzione tra il reddito (in migliaia di euro) e l'IRPEF. Questa è una funzione definita “a tratti”, o meglio, costante a tratti.

Per i primi due scaglioni occorre fare il grafico della funzione  **$\text{se}(x < 0, 0, \text{se}(0 \leq x \leq 15, 23, 27))$** .

- 9) Proporzionalità inversa  $y=k/x$ ; (per la scuola secondaria di I grado, per esempio rettangoli equivalenti; altezza e base,...). Supponiamo di avere dei rettangoli tutti della stessa area 24, ossia  $xy=24$  ( $x$  è la misura della base e  $y$  dell'altezza). Visualizzare il foglio di calcolo. Nella prima colonna inserire dei valori per la base (1, 2, 3, 4, 6, 12, 24... e nella seconda colonna i corrispondenti valori per l'altezza). Grafico di  $y$  rispetto a  $x$ . Generalizzare la relazione a tutto il piano cartesiano. Creare uno slider (chiamarlo  $k$ ). Disegnare la curva di equazione  $xy=k$ . Trascinare lo slider  $k$  e osservare il grafico.  
Costruire una scheda didattica per l'uso in classe di questo esempio.
- 10) Visualizzare la vista foglio di calcolo. Inserire nella prima colonna la misura del lato di un quadrato: 0, 1, 2, 3, 4, 5,... e sulla seconda colonna la corrispondente area del quadrato. Disegnare il grafico dei punti. Fare lo stesso esercizio per l'area di un cerchio in funzione del raggio. Sono esempi di una funzione quadratica del tipo  $y=k \cdot x^2$ . Altro esempio: moto di caduta dei gravi; spazio percorso e tempo (trascurando l'attrito)  $s=4.9 \cdot t^2$ .
- 11) Usare uno slider (chiamarlo  **$a$** , come proposto da GeoGebra). Disegnare il grafico di  $y=a \cdot x^2$  (scrivere questa equazione nella riga di inserimento). Far variare  **$a$** . Significato del coefficiente  **$a$** . Come useresti questo file per proporre in classe lo studio delle funzioni quadratiche? Costruire una scheda didattica da usare in classe.
- 12) Usare tre slider (chiamarli  **$a$** ,  **$b$** ,  **$c$** , come proposto da GeoGebra). Disegnare il grafico di  $y=a \cdot x^2 + b \cdot x + c$  (scrivere questa equazione nella riga di inserimento). Far variare  **$a$** , poi  **$b$**  e infine  **$c$** . Significato dei tre coefficienti  **$a$** ,  **$b$** ,  **$c$** . Come useresti questo file per proporre in classe lo studio delle funzioni quadratiche? Costruire una scheda didattica da usare in classe.
- 13) Rettangoli con lo stesso perimetro: usare  **$p$**  per indicare il semiperimetro e porre per esempio  **$p=6$** . Usare uno slider da chiamare  **$b$**  (che varia da 0 a 6). Creare il punto  **$P=(b, b \cdot (6-b))$** . Traccia del punto  **$P$** . Trascinare lo slider. Disegnare il rettangolo di vertici  **$O=(0,0)$** ,  **$A=(b,0)$** ,  **$C=(b,6-b)$** ,  **$D=(0,6-b)$** . Qual è il rettangolo di area massima?
- 14) Disegnare la funzione  **$f(x)=x^2$**  e la funzione  **$g(x)=x^{(1/2)}$** . Scrivi le loro equazioni nella riga di inserimento. Che cosa si osserva dal grafico? La funzione  **$f(x)$**  è invertibile? È iniettiva? Usare l'istruzione  **$\text{se}(<\text{condizione}>, <\text{allora}>)$** , per restringere il dominio della funzione  **$f(x)$**  a  **$x \geq 0$** . Scrivi nella riga di inserimento di GeoGebra:  **$\text{se}(x \geq 0, x^2)$** . Che cosa si nota nel grafico? Disegna la retta di equazione  **$y=x$** . Che cosa si nota nel grafico di  **$f(x)=\text{se}(x \geq 0, x^2)$**  e di  **$g(x)$** .

- 15) Inserire uno slider  $n$  (selezionare un numero intero da -5 a 10). Disegnare nello stesso grafico le funzioni  $f(x)=x^n$  e  $g(x)=x^{(1/n)}$ . Tracciare la retta  $y=x$ . Trascinare lo slider  $n$ . Che cosa si osserva per  $n$  pari e per  $n$  dispari? Come useresti questo file per proporre in classe lo studio delle funzioni potenza (ad esponente intero)?
- 16) La funzione (esponenziale discreta)  $y=2^n$  con la piegatura della carta: piega un foglio A4 a metà (ottiene 2 fogli A5); e continua a piegare a metà...; chiama  $n$  il numero delle piegature e  $p$  il numero di parti ottenute. Riporta in un foglio di calcolo alcuni valori di  $n$  (0, 1, 2, 3,...) sulla prima colonna e i corrispondenti valori di  $p$  sulla seconda colonna. Traccia il grafico dei punti.  
 Altro esempio: riproduzione di batteri, ecc. (la funzione  $2^n$  è presente anche nelle indicazioni nazionali del 2012 per la Scuola secondaria di 1° grado). Traccia il grafico della funzione  $f(n)=2^n$  con GeoGebra. Puoi disegnare questa funzione anche con uno slider (intero).
- 17) Usare il foglio di calcolo (inserisci>vista foglio di calcolo) per costruire la progressione dei capitali al tasso di interesse composto del 4%; capitale iniziale di 1000 euro. Rappresentare i punti  $(n, C(n))$  al variare di  $n$ , con  $n$  che da 0 a 20. Costruire una scheda di laboratorio da usare in classe su questo esercizio (grafico di una progressione geometrica).
- 18) Costruire uno slider da chiamare " $a$ " (con  $a$  che varia da 0.001 a 10). Scrivere nella riga di inserimento  $f(x) = a^x$ . Trascinare lo slider  $a$ . Osservare il grafico e descrivere le sue proprietà al variare di  $a$ . La funzione  $f(x)$  è sempre invertibile? Costruire una scheda di laboratorio da usare in classe su questo esercizio (grafico delle funzioni esponenziali).
- 19) Disegnare il grafico della funzione  $f(x)=e^x$ ; esplorare le sue proprietà. Visualizzare la retta tangente nel punto  $A(0,1)$ . Costruire una scheda di laboratorio da usare in classe su questo esercizio (grafico delle funzioni esponenziali).
- 20) Usare il foglio di calcolo. Inserire sulla prima colonna i numeri naturali da 1 a 100. Nella seconda colonna inserire la formula  $(1+1/n)^n$ , come si fa in Excel. Si scrive nella cella " $=(1+1/A2)^{A2}$ ", se il numero  $n$  è memorizzato nella cella A2. Copiare la formula verso il basso. Cambiare eventualmente il numero di cifre da visualizzare (Opzioni>Arrotondamento>5 cifre decimali). Selezionare le due colonne (con  $n$  che va da 1 a 100) e usare lo strumento "Lista di punti". Osservare il grafico ottenuto (cambiare la scala sull'asse delle ascisse) e infine disegnare la retta  $y=e$ . Che cosa si osserva?
- 21) Costruire uno slider da chiamare  $a$  (con  $a$  che varia da 0.001 a 10). Scrivere nella riga di inserimento  $f(x)=\log(a,x)$ . Trascinare lo slider  $a$ . Osservare il grafico. Attivare la traccia del grafico. Disegnare nello stesso sistema la funzione  $g(x)=a^x$ . Disegnare la retta  $y=x$ . Costruire una scheda di laboratorio da usare in classe su questo esercizio (grafico delle funzioni logaritmiche).
- 22) Costruire uno slider da chiamare  $a$  (con  $a$  che varia da 0 a 5). Inserire nella riga di inserimento  $a*\sin(x)$ . Trascinare lo slider  $a$ . Osservare il grafico. Qual è il periodo? Costruire una scheda di laboratorio da usare in classe su questo esercizio (grafico delle funzioni sinusoidali).
- 23) Costruire due slider da chiamare  $a$  e  $\omega$  (con  $\omega$  che varia da 0 a 10). Inserire nella riga di inserimento  $a*\sin(\omega x)$ . Trascinare lo slider  $\omega$ . Osservare il grafico. Qual è il periodo? Costruire una scheda di laboratorio da usare in classe su questo esercizio (grafico delle funzioni sinusoidali).
- 24) Costruire tre slider da chiamare  $a$ ,  $\omega$  (con  $\omega$  che varia da 0.01 a 10) e  $k$ . Inserire nella riga di inserimento  $a*\sin(\omega x)+k$ . Trascinare lo slider  $k$ . Osservare il grafico. Costruire una scheda di laboratorio da usare in classe su questo esercizio (grafico delle funzioni sinusoidali).
- 25) Costruire quattro slider da chiamare  $a$ ,  $\omega$  (con  $\omega$  che varia da 0.01 a 10),  $\phi$  e  $k$ . Inserire nella riga di inserimento  $a*\sin(\omega x-\phi)+k$ . Trascinare lo slider  $\phi$ . Osservare il grafico. Cosa provoca il parametro  $\phi$ ? Costruire una scheda di laboratorio da usare in classe su questo esercizio (grafico delle funzioni sinusoidali).