Alcune riflessioni sugli aspetti didattici dei concetti di definizione e di dimostrazione[1]

Giuliano Mazzanti, Valter Roselli, Luigi Tomasi
Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

Introduzione

Prendiamo spunto dal "manifesto" degli studi della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Ferrara per giustificare le considerazioni che seguiranno. In tale manifesto vengono indicate quelle che dovrebbero essere le conoscenze minime di matematica per uno studente che intenda seguire un corso di studi di tale facoltà (ma queste indicazioni possono ritenersi valide per una qualunque facoltà di carattere scientifico). Tra le indicazioni riportate mettiamo in evidenza le seguenti:

- Conoscenza del ruolo logico di esempi e controesempi.
- Capacità di distinguere tra condizione necessaria e condizione sufficiente.
- Capacità di distinguere tra definizione, postulato, teorema.

In questa nota ci proponiamo di fare alcune osservazioni sui concetti di definizione e teorema che possono risultare utili da un punto di vista didattico, per docenti della Scuola secondaria sia di primo che di secondo grado (tale materiale può però essere utilizzato proficuamente anche dagli studenti universitari dell'indirizzo didattico).

Più precisamente, per quanto riguarda la definizione, intendiamo evidenziare i seguenti punti:

a) esistono alcuni "termini" matematici il cui significato non è univocamente determinato e dipende, a volte, dal contesto in cui si opera ed altre dai testi scolastici in cui tali termini vengono riportati;

b) a volte vengono introdotti nuovi concetti senza prima accertarsi che questi abbiano effettivamente senso;

c) in alcuni casi, per meglio chiarire il significato dei nuovi termini, è opportuno "discutere" il concetto appena introdotto;

d) per evitare il formarsi di "stereotipi" non sempre corrispondenti al caso generale, è opportuno fornire varie tipologie di esempi.

Cominciamo cercando di chiarire il concetto di definizione e soprattutto le differenze che intercorrono tra questo e quello di teorema.
Consideriamo le seguenti proposizioni:

1) Un quadrato è un quadrilatero che ha i lati uguali e gli angoli uguali.
2) Un quadrato è un quadrilatero che ha le diagonali uguali.
3) Per due punti distinti passa una ed una sola retta.

È noto che le tre proposizioni sono vere (in geometria euclidea).

La proposizione 1) è una *definizione*, ossia viene attribuito un preciso significato ad una parola ("quadrato") e in questo caso dovremo supporre noti i significati di altri termini, "quadrilatero", "lati", "angoli", "uguaglianza di angoli" e "uguaglianza di lati" ; a loro volta questi ultimi termini richiederanno la conoscenza di altri termini, e così via. Ovviamente questo procedimento a ritroso dovrà necessariamente concludersi dopo un numero finito di "passi", per-

[1] Articolo tratto da AA.VV. (a cura di Giuliana Gnani e Valter Roselli), *Idee e proposte per un corso di aggiornamento in didattica della matematica* per docenti di Scuola Secondaria, Università di Ferrara, SSIS, 2008.

tanto alcuni termini non potranno essere ulteriormente definiti e saranno questi i cosiddetti "enti primitivi". Esempi di enti primitivi sono, tra gli altri, quelli di "punto", "retta",…

La proposizione 2) è un *teorema*, cioè una proprietà che va "dimostrata", e per dimostrarla dovremo sfruttare proprietà note, le quali a loro volta richiederanno la conoscenza di altre proprietà e così via. Anche in questo caso tale procedimento a ritroso dovrà avere necessariamente termine dopo un numero finito di "passi", pertanto alcune proprietà dovranno essere assunte senza dimostrazione e queste sono appunto i cosiddetti "assiomi" o "postulati".
La proposizione 3) è un esempio di *postulato*, ossia proprietà che viene assunta come vera senza alcuna dimostrazione.

Note

1. Formalmente, dal punto di vista linguistico, le proposizioni 1) e 2) sono dello stesso tipo, pertanto non è possibile, solo dalla loro formulazione, stabilirne la diversità. Quindi, da un punto di vista didattico è opportuno, nelle definizioni, usare una terminologia del tipo: "**si dice** quadrato un quadrilatero…"
2. Nelle definizioni è fondamentale che vi sia una sola parola (o una sola espressione) non nota e che essa venga univocamente determinata dalla descrizione successiva. In altri termini si può dire che una definizione è una "abbreviazione", nel senso che riassume in poche parole (spesso anche una sola) un concetto che richiederebbe, per la sua comprensione, una descrizione molto più estesa.

1. Iniziamo ora col proporre alcuni esempi relativi ad a), ossia al fatto che, a volte, in Matematica si attribuiscono ad uno stesso termine significati diversi.

Esempio 1. Concetto di rette parallele nel piano.

Definizione 1. Due rette del piano si dicono parallele se non hanno punti in comune.
Definizione 2. Due rette del piano si dicono parallele se non hanno punti in comune o coincidono.

Notiamo che, in base alla definizione 1, la relazione di parallelismo, nell'insieme delle rette del piano, risulta simmetrica, ma non riflessiva e nemmeno transitiva, mentre in base alla definizione 2, tale relazione è di equivalenza, ossia è riflessiva, simmetrica e transitiva. Proprio per questo motivo è ormai comunemente accettata questa seconda definizione di parallelismo, in quanto ciò porta alla considerazione dell'insieme quoziente, che permette l'introduzione del concetto di "direzione" (come una delle classi di equivalenza).

Esempio 2. Concetto di numero primo.

Definizione 1. Un numero naturale si dice primo se è divisibile solo per se stesso e per l'unità.
Definizione 2. Un numero naturale si dice primo se è maggiore di 1 ed inoltre è divisibile solo per se stesso e per l'unità.

La differenza tra le due definizioni sta nel fatto che, in base alla definizione 1, il numero 1 è primo, mentre non lo è per la definizione 2. Tenendo conto di alcuni teoremi dell'aritmetica (ad esempio il teorema sulla decomposizione di un numero naturale maggiore di 1, che afferma che ogni tale numero o è primo o è il prodotto di numeri primi, e tale decomposizione è unica a meno dell'ordine) la definizione di numero primo comunemente accettata è la seconda.

Si tenga presente che la definizione 2 è equivalente alla seguente: "un numero naturale si dice primo se ha soltanto due divisori e questi sono distinti".

Esempio 3. Equazioni algebriche.

In generale la definizione comunemente accettata (almeno a livello elementare) è la seguente: "per equazione algebrica si intende l'uguaglianza tra due espressioni algebriche, di cui almeno una letterale, verificata soltanto per alcuni valori attribuiti alle incognite".

A parte il significato non troppo chiaro dei termini "uguaglianza", "espressione algebrica", "verificata", "incognita", desideriamo mettere in evidenza la non coerenza di tale definizione con il concetto di "equazione impossibile" (non sarebbe un'equazione, in quanto non verificata da alcun valore delle incognite) e di "equazione indeterminata" (spesso questo termine viene utilizzato anche per equazioni sempre vere, ossia "identità").
Sarebbe opportuno, per maggiore chiarezza, precisare di ogni equazione il suo "dominio", ossia l'insieme numerico in cui ricercare le soluzioni e nel quale l'equazione abbia significato.
Questa considerazione risulta fondamentale nell'utilizzo delle equazioni per la risoluzione di problemi.
Si consideri ad esempio il seguente problema (tratto da un testo scolastico per le "scuole medie inferiori"): "In un triangolo di perimetro 140 cm, si sa che un lato è doppio di un altro ed è la metà del terzo. Trovare le misure dei tre lati del triangolo".
Indicando con x la misura del lato mediano, si giunge all'equazione $x+\frac{x}{2}+2x=140$, che ha come unica soluzione $x=40$. Pertanto le misure dei tre lati del triangolo risulterebbero, in cm, 20, 40, 80. Peccato che non ci siano triangoli i cui lati abbiano queste misure, in quanto un lato risulterebbe maggiore della somma degli altri due.
L'errore non consiste nella impostazione e risoluzione dell'equazione, ma nel fatto che l'equazione deve essere accompagnata da alcune condizioni che traducano l'esistenza geometrica del triangolo. Nel nostro caso si otterrebbe, oltre all'equazione, la condizione $2x<x+\frac{x}{2}$, che porterebbe a sua volta alla condizione $x<0$, chiaramente assurda, in quanto x è la misura di un lato. In questo caso, già in base alle sole condizioni di esistenza del triangolo, si giunge alla conclusione che il problema non ha soluzione, e quindi è inutile impostare l'equazione risolvente.

Esempio 4. Valore assoluto di *x*

Solitamente nei testi della scuola media inferiore, ma anche in alcuni della scuola media superiore, viene data la seguente "definizione" di valore assoluto di un numero reale:

"Il valore assoluto di un numero reale è quel numero senza il segno".

Tale definizione, che apparentemente è corretta, porterebbe anche ad affermare che non è vero che il valore assoluto di -3 sia uguale a $+3$, in quanto è presente il segno (ma cosa si intende per numero senza segno ? È ancora un numero ?). Questa "pseudodefinizione" crea poi grosse difficoltà quando la si vuole estendere a considerare il valore assoluto non di un nume-

ro ma di una “lettera” o più in generale di una espressione letterale (che comunque assuma valori reali).
Sarebbe opportuno dare la definizione rigorosa di valore assoluto, partendo da esempi relativi a numeri rappresentati sulla retta numerica, visualizzando tale concetto tramite la distanza dall’origine dei punti della retta.
Dopo aver dato alcuni di questi esempi risulta naturale dare la “nota” definizione di valore assoluto, ossia:
$|x| = x$ se $x \geq 0$, mentre $|x| = -x$ se $x < 0$.
Con tale definizione, calcolare il valore assoluto di un’espressione letterale o risolvere equazioni con il valore assoluto, dovrebbe comportare minori difficoltà. In particolare questa dovrebbe evitare errori (frequenti) del tipo: $|a| = a$ o $|-a| = a$.

Esempio 5. Concetto di codominio di una funzione.

Sia $f : A \to B$ una funzione dall’insieme A all’insieme B (entrambi non vuoti).

Definizione 1. L’insieme B si dice *codominio* della funzione f.
Definizione 2. Si dice codominio della funzione f l’insieme delle immagini degli elementi di A.

Ovviamente tali concetti coincidono solo se f è suriettiva.

Entrambe le definizioni sono largamente usate; causando a volte ambiguità. È pertanto opportuno controllare attentamente la definizione data nel testo che si sta utilizzando.
A nostro avviso la definizione più corretta di codominio è la seconda e per tale motivo sarebbe opportuno parlare di “immagine” di una funzione più che di “codominio” di una funzione, e chiamare B “insieme d’arrivo” della funzione.

Esempio 6. Concetto di trapezio.

Definizione 1. Si dice trapezio ogni quadrilatero convesso che ha due lati paralleli.
Definizione 2. Si dice trapezio ogni quadrilatero convesso che ha due lati paralleli (detti *basi*), e gli altri due non paralleli tra loro (detti *lati obliqui*).

In base alla definizione 1 i parallelogrammi sono dei particolari trapezi, mentre ciò non è vero in base alla definizione 2.
Nei testi delle scuole medie, in generale, si utilizza la definizione 1, che permette la classificazione per sottoinsiemi dei trapezi, parallelogrammi, rettangoli, rombi e, come intersezione di questi ultimi due insiemi, dei quadrati.
Una prima differenza tra le due definizioni è data dal fatto che in un parallelogrammo (che in base alla definizione 1 è un trapezio) non ha senso parlare di lati obliqui, mentre le due coppie di lati opposti paralleli possono essere indifferentemente considerate basi.
Tale differenza tra le due definizioni deve essere tenuta presente quando si introduce il concetto di trapezio isoscele. In base alla definizione 2 è sufficiente dire che un trapezio è isoscele se i due lati non paralleli (lati obliqui) sono uguali tra loro, mentre per la definizione 1 è necessario precisare che il trapezio considerato non è un parallelogrammo e che ha i due lati opposti non paralleli (che chiameremo ancora lati obliqui) uguali. Senza quest’ultima precisazione ogni parallelogrammo sarebbe un trapezio isoscele e questo non è coerente con alcune proprietà dei trapezi isosceli (ad esempio l’uguaglianza delle diagonali oppure l’uguaglianza degli angoli alla “base”).

In ogni caso, non è sufficiente dire che un trapezio è isoscele se ha due lati congruenti, perché questi potrebbero non essere i due lati obliqui.

Per Euclide, "trapezio" voleva dire quadrilatero che non è un parallelogrammo. Trapezio ha poi assunto il significato che conosciamo; ad esempio Proclo (V secolo d.C.) dice :
"Tra tutti i quadrilateri non parallelogrammi, ci sono quelli che hanno due lati paralleli, e gli altri che non hanno lati paralleli. I primi si dicono trapezi, gli altri trapezoidi" [3]. Quindi quanto affermato da Proclo corrisponde alla definizione 2.

Esempio 7. I concetti di inverso e di reciproco.

I concetti di inverso e di reciproco sono sinonimi per i numeri reali non nulli, mentre per le funzioni reali di variabile reale il significato di tali termini è completamente diverso. Precisamente, data una funzione $f : A \to B$, la funzione "inversa" esiste solo nel caso in cui f sia biiettiva e viene indicata con $f^{-1} : B \to A$. f^{-1} è quella funzione tale che se $f(x) = y$ allora $f^{-1}(y) = x$.
Se invece $f : A \subseteq R \to R$ è una funzione reale di variabile reale tale che $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, allora si definisce funzione "reciproca" della funzione f, e si indica con $\frac{1}{f}$, la funzione da A in R definita da $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$.

Si noti che il primo membro di tale uguaglianza è ciò che deve essere definito, mentre il secondo membro è noto, in quanto lo è $f(x)$.
Questa diversa interpretazione dei due termini va sottolineata da un punto di vista didattico, perché non è raro che gli studenti confondano l'inversa di una funzione con la sua reciproca.
A volte il concetto di funzione reciproca viene dato anche per funzioni $f : A \subseteq R \to R$ che si annullano in qualche punto di A. In tal caso il dominio di $\frac{1}{f}$ non è più A, ma un suo sottoinsieme proprio.

A conclusione di questa prima parte teniamo a precisare che si potrebbero fornire molti altri esempi con le stesse caratteristiche di quelli proposti. E' comunque importante non tanto stabilire quale definizione sia "migliore" (purché corretta) , ma una volta decisa quale definizione usare, mantenersi coerenti con essa. Nel caso in cui uno stesso termine possa avere significati diversi, è necessario che dal contesto si possa stabilire senza ambiguità quale ne sia il significato.

2. Proseguiamo adesso col proporre alcuni esempi relativi a b), ossia al fatto che, non sempre, viene accertata (dagli allievi) la coerenza della definizione data.

Esempio 1. Come è noto, un triangolo si dice acutangolo se ha tutti gli angoli acuti, ed è facile verificare l'esistenza di tali triangoli. Per analogia di linguaggio verrebbe naturale dire che un quadrangolo è acutangolo se esso ha tutti gli angoli acuti. Ovviamente non esistono quadrangoli con tale proprietà, poiché la somma degli angoli interni di un quadrangolo deve essere sempre di 360 gradi.

Sempre in analogia alla definizione di triangolo acutangolo verrebbe naturale dire che un triangolo è ottusangolo se esso ha tutti gli angoli ottusi. Anche in questo caso non esistono triangoli con questa proprietà, perchè la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre di 180 gradi.

Come noto, la definizione corretta di triangolo ottusangolo è quella di un triangolo che ha un (solo) angolo ottuso (è importante in queste definizioni utilizzare in modo corretto i quantificatori, "per ogni" ed "esiste", cosa che spesso non avviene).

Esempio 2. In alcuni casi, prima di dare la definizione, è necessario dimostrare un teorema che renda sensata la definizione stessa.

1. Per poter definire l'ortocentro di un triangolo è necessario dimostrare prima che, in ogni triangolo, le altezze (le rette che contengono le altezze) passano per uno stesso punto (analogamente per gli altri punti notevoli di un triangolo). In questo caso la proprietà da dimostrare può essere comprensibilmente accettata, anche a livello di scuola media, attraverso verifiche sperimentali (o con l'uso di strumenti informatici di geometria dinamica). È comunque scorretto dare la definizione di ortocentro senza aver prima dimostrato, o anche soltanto verificato oppure enunciato, la proprietà relativa alle altezze di uno stesso triangolo.

2. In altri casi è necessaria una dimostrazione matematica vera e propria, come ad esempio per l'esistenza di segmenti incommensurabili (non è possibile "verificare sperimentalmente" che il lato e la diagonale di uno stesso quadrato sono segmenti incommensurabili, ossia che non esiste un segmento che sia sottomultiplo comune, in altri termini il loro rapporto è un numero che non è razionale). In questo caso se si volesse omettere la dimostrazione della proprietà, è comunque necessario, prima di dare la definizione di segmenti incommensurabili, darne almeno l'enunciato.

3. In altri casi ancora l'esistenza dell'oggetto da definire viene assicurata da assiomi, come ad esempio l'esistenza di rette parallele, in geometria euclidea, la quale deriva da assiomi (nella geometria ellittica non esistono rette parallele).

4. Notiamo infine che la dimostrazione di teoremi di esistenza non sempre è costruttiva, nel senso che si dimostra che esiste l'oggetto con la proprietà assegnata, ma senza descriverlo esplicitamente. Un semplice esempio di tale situazione è quando si dimostra che esistono numeri primi maggiori di un qualunque numero naturale fissato. La dimostrazione si basa sull'esistenza di infiniti numeri primi, ma ovviamente non sempre è possibile dare esplicitamente un numero primo maggiore di un fissato numero naturale ("grande").

3. Passiamo adesso a proporre alcuni esempi relativi a c), ossia all'opportunità, quando sia ragionevole, di "discutere" la definizione data.

Esempio 1. Triangolo isoscele.

"Un triangolo si dice isoscele se ha due lati uguali".

Nel linguaggio comune una affermazione di questo tipo andrebbe intesa come un triangolo che ha due soli lati uguali (come l'affermazione di una persona che dica "io ho due figli"), mentre in matematica questa affermazione va intesa come "almeno" due lati uguali.

Se si volesse precisare che i lati uguali sono esattamente due bisognerebbe dire che il triangolo ha due e solo due lati uguali. Questa ambiguità di linguaggio è la causa che, a volte, porta a dire che un triangolo equilatero non è isoscele. Perciò è importante dare la definizione in questo modo (almeno a livello di scuola media) : un triangolo si dice isoscele se ha almeno due lati uguali. (Anche in matematica, a volte, si usa il linguaggio naturale inteso come sopra, ad esempio se si dice che un quadrilatero è un poligono che ha quattro lati, quel "quattro" va inteso come esattamente quattro, quindi sarebbe sempre meglio precisare se nel contesto si parla di "esattamente" o di "almeno").

Dopo aver discusso l'espressione "due lati uguali" potrebbe essere utile chiedersi cosa si intenda per "triangolo non isoscele". Per quanto detto, a volte la risposta (errata) è : un triangolo non è isoscele se è equilatero. Ovviamente la risposta esatta è : un triangolo non è isoscele se non ha due lati uguali, ossia se il triangolo è scaleno.

La difficoltà nel dare la definizione di triangolo non isoscele consiste, come in generale si verifica, nel passare da una proposizione alla sua negazione.

Esempio 2. Quadrato.

"Si dice quadrato ogni quadrilatero che ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali".

Qui possiamo fare alcune osservazioni.

Quando un quadrilatero non è un quadrato ?

Qui il passaggio dall'affermazione alla sua negazione non è affatto banale, in quanto si tratta di negare la congiunzione di due proposizioni.

La risposta corretta è la seguente:

"un quadrilatero non è un quadrato se non ha tutti i lati uguali tra loro *oppure* non ha tutti gli angoli uguali tra loro" e il significato di "oppure" è inteso in senso inclusivo ("vel").

Se nella definizione di quadrato al posto della "e" mettiamo una "o", e chiamiamo tali oggetti "quadrateri" (termine di fantasia), cosa otteniamo ?

Abbiamo quindi la seguente definizione: "si dice quadratero ogni quadrilatero che ha tutti i lati uguali oppure tutti gli angoli uguali". È immediato constatare che i rettangoli che non sono quadrati e i rombi che non sono quadrati sono quadrateri. I quadrati sono quadrateri ? Per rispondere a tale domanda bisogna precisare il significato della parola "oppure" che compare nella definizione di quadratero. Se l' "oppure" è inteso nel senso inclusivo (vel) allora anche i quadrati sono quadrateri, mentre se l' "oppure" è inteso in senso esclusivo (aut aut) allora i quadrati non sono quadrateri.

In matematica, se non c'è nessuna ulteriore precisazione, la disgiunzione (o, oppure) viene considerata in senso inclusivo, pertanto i quadrateri sono l'unione dell'insieme dei rettangoli e dell'insieme dei rombi (ovviamente quadrati inclusi).

Le precedenti considerazioni permettono di riflettere sui connettivi logici in esempi concreti e non solo in modo astratto.

Esempio 3. Rango di una matrice reale *mxn*

Si dice che il rango di una matrice reale *A mxn* è il numero intero $k \geq 0$, se esiste un minore di A di ordine k che ha determinante non nullo e ogni minore di A di ordine maggiore di k ha determinante nullo.

In questa definizione è importante osservare l'uso dei quantificatori "esiste" , "per ogni" e della congiunzione "e" e pertanto è veramente difficile per gli studenti (e non solo) darne la negazione.

Dire che il rango di A non è k vuol dire che tutti i minori di A di ordine k hanno determinante nullo (in tal caso il rango di A è minore di k), oppure esiste in A un minore di ordine maggiore di k che ha determinante diverso da zero (in questo caso il rango di A è maggiore di k). Anche questa "discussione " permette di riflettere, in esempi concreti, sull'uso di quantificatori e connettivi e sulla difficoltà nel passare da una proposizione alla sua negazione (passaggio questo che diventa fondamentale nelle cosiddette "dimostrazioni indirette", come ad esempio nella "dimostrazione per assurdo" o nel "passaggio alla contronominale").

Osserviamo che, in alcuni casi in matematica, si usa addirittura utilizzare un termine per indicare la negazione di un altro. Ad esempio "rette sghembe" invece di "rette non complanari" come negazione di "rette complanari".
Ovviamente le discussioni del tipo di quelle proposte si faranno solo in esempi "ragionevoli".

4. **Proponiamo, infine, alcuni esempi relativi al punto d), ossia all'opportunità di fornire varie tipologie di esempi riguardanti il concetto o la definizione data, al fine di evitare la formazione di "stereotipi" non sempre corrispondenti al caso generale**.

Esempio 1. Nella rappresentazione grafica di triangoli rettangoli è opportuno disegnarli con l'ipotenusa come "base orizzontale" e non come di solito uno dei cateti. Più in generale si potrebbero fornire esempi di triangoli rettangoli nei quali né l'ipotenusa né i cateti risultano "orizzontali".

Esempio 2. Poiché nel considerare un triangolo si è portati normalmente a disegnarne uno acutangolo, le cui altezze sono tutte interne al triangolo stesso, risulta poi , a volte, problematico disegnare le altezze di un triangolo ottusangolo, in quanto due di esse sono esterne al triangolo stesso. Un'altra difficoltà relativa alle altezze consiste nel fatto che di solito vengono disegnate "verticalmente" perchè relative a lati "orizzontali", e quindi quando l'altezza è relativa ad un lato "non orizzontale" la sua rappresentazione diventa più problematica, anche perché ciò contrasta con il senso comune che associa il concetto di altezza ad una "lunghezza sempre verticale".

Esempio 3. Molto spesso si disegna un quadrato con i lati "orizzontali" e "verticali" e questo porta a non riconoscere come tale un quadrato che abbia invece le diagonali "orizzontali" e "verticali". In tal caso si pensa subito ad un rombo, ma non ad un particolare rombo, cioè il quadrato.

Esempio 4. I trapezi vengono sempre disegnati con le basi orizzontali, addirittura con la base maggiore al di sotto di quella minore, ed anche con gli angoli alla base maggiore entrambi acuti, mentre è opportuno presentare e disegnare trapezi con caratteristiche diverse da quelle citate. Analogo discorso vale per i rettangoli in cui, di solito, il lato maggiore è "orizzontale" e viene detto "base" del rettangolo, come se non fosse lecito chiamare "base" l'altro lato.

Si tenga comunque presente che i concetti di base e di altezza di un triangolo o di un parallelogrammo sono relativi, ossia sarebbe corretto parlare di "una base" (che può essere un qualunque lato) e della "relativa altezza". Si noti che nel trapezio il concetto di basi e relativa altezza è riferito solamente ai lati paralleli e alla loro "distanza".

Per concludere vediamo un'ultima osservazione in cui discutiamo, tramite un esempio, come a volte definizione e teorema possano (erroneamente) confondersi.

Perché si definisce $3^0 = 1$? O più in generale $a^0 = 1$ quando $a \neq 0$?

In generale, a livello elementare, si "definisce" 3^n come segue: $3^n = 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3$ n volte.
Si tratta intanto di precisare che è il fattore 3 che compare n volte, mentre i prodotti sono in realtà $n-1$ e quindi sarebbe più corretto dire $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3$ $n-1$ volte. In questo modo rimangono esclusi i casi n=1 e n=0 e questi vanno definiti a parte.
3^1 viene definito uguale a 3 (e questo può anche essere giustificato nel vedere la sequenza di fattori uguali a 3 limitata ad un solo fattore, anche se ciò, a rigore, non avrebbe senso), mentre la definizione di 3^0 non rientra come caso particolare della precedente definizione e pertanto deve essere data in modo esplicito. Come è noto si pone $3^0 = 1$. La giustificazione di ciò deriva dal richiedere che le note proprietà delle potenze valgano anche se uno degli esponenti è zero. Deve allora essere, ad esempio, $1 = 3^2 : 3^2 = 3^{2-2} = 3^0$. Si tenga presente che quella data non è una dimostrazione ma una giustificazione della definizione. Una volta data questa definizione, possiamo intanto affermare che 3^n è definito per ogni numero naturale ≥ 0 e che tale definizione permette di dimostrare nella sua generalità la proprietà relativa al quoziente di potenze con la stessa base (anche per esponenti uguali fra di loro o almeno uno di essi uguale a zero).
Si osservi che sarebbe possibile definire in modo diverso 3^0, ad esempio $3^0 = 2$, però in tal caso le proprietà delle potenze non avrebbero la generalità che conosciamo.

Ripetiamo che, quanto detto per la base 3, vale anche per una qualunque base $a \neq 0$.

Ci si potrebbe chiedere perché non venga definita la potenza 0^0. Una possibile giustificazione di questo potrebbe risiedere nel fatto che, se si interpreta 0^0 come caso particolare di 0^n, che è uguale a 0 per ogni $n \geq 1$, verrebbe naturale porre $0^0 = 0$, mentre se lo si interpreta come caso particolare di a^0, con $a \neq 0$, che è sempre uguale ad 1, verrebbe naturale porre $0^0 = 1$. Anche per questo motivo si è deciso di non definire 0^0.

A rigore la definizione di 3^0 e in generale di a^n con $a \neq 0$, andrebbe data per induzione, ponendo $3^0 = 1$ e se $n > 0$, $3^n = 3^{n-1} \cdot 3$.
In questo caso 3^1 risulta proprio uguale a 3.

Abbiamo sottolineato il fatto che in una definizione (rigorosa) deve essere presente una sola "espressione" nuova, il cui significato verrà descritto in modo univoco utilizzando concetti noti. A volte però, per semplicità, vengono date delle "pseudodefinizioni", come ad esempio quella di funzione come "legge", senza ovviamente aver definito cosa si intenda per "legge", oppure quella di "matrice" come "tabella di numeri", senza precisare il significato di "tabella di numeri". Naturalmente queste pseudodefinizioni vengono comunemente accettate perchè le definizioni rigorose, almeno a livello di scuola secondaria, sarebbero troppo complesse e non didatticamente proponibili.

È però opportuno precisare che quella che si sta dando non è una definizione rigorosa, indicandone il motivo. Bisogna comunque evitare che questa mancanza di rigore (accettabile in alcuni casi) porti a veri e propri errori, quali ad esempio, quello di definire una retta come "un insieme di punti allineati".

5. Affrontiamo adesso l'argomento "teorema", proponendo alcune osservazioni e considerazioni sia sul concetto di "teorema" che su quello delle relative "dimostrazioni".

Prima di affrontare l'argomento indicato, ricordiamo che molti altri termini vengono utilizzati con lo stesso significato di teorema. Precisamente il termine:

Lemma viene usato per indicare un risultato utile soprattutto per dimostrare qualche teorema "importante".

Corollario viene usato per indicare una conseguenza "immediata" di altri teoremi.

Proposizione viene usato come sinonimo di teorema, anche se in logica ha un significato diverso.

Legge-Regola-Proprietà vengono usati in generale per indicare teoremi "di carattere numerico".

Criterio viene utilizzato per indicare in alcuni casi una condizione necessaria e sufficiente, ed in altri una condizione soltanto sufficiente.

Principio ha vari significati, a volte di teorema, a volte anche di assioma.

Ricordiamo infine che per **congettura** si intende una proposizione della quale non si sa ancora se sia vera o falsa.

In questa parte non vogliamo fare un discorso troppo rigoroso, ma intendiamo proporre alcune considerazioni e osservazioni sul concetto di "teorema" e relative "dimostrazioni", che riteniamo possano essere utili da un punto di vista didattico.

In termini intuitivi si può dire che un "teorema" è composto da un "enunciato" e dalla (da una) "dimostrazione".
In generale un teorema è una particolare "proposizione " che si presenta nella forma di implicazione logica da dimostrare, è perciò una proposizione del tipo:

Se "A" allora "B" che viene anche indicata con la seguente scrittura $A \Rightarrow B$. A si dice "ipotesi" e B "tesi" (del teorema).

Esempio. Se un quadrilatero Q è un quadrato allora il quadrilatero Q ha le diagonali uguali.

Il teorema precedente si può enunciare in una delle seguenti forme.
"Condizione necessaria affinché un quadrilatero Q sia un quadrato è che il quadrilatero Q abbia le diagonali uguali".

Oppure:
"Condizione sufficiente affinché un quadrilatero Q abbia le diagonali uguali è che il quadrilatero Q sia un quadrato".

L'enunciato è stato dato evidenziando l'ipotesi e la tesi del teorema. Molto spesso, però, viene presentato nella seguente forma :
"Le diagonali di un quadrato sono uguali".
Notiamo che in questa seconda formulazione non sono chiaramente evidenti ipotesi e tesi, e pertanto, in questo caso, una prima difficoltà consiste nell'individuarle.

Per tradizione, ma anche nel linguaggio comune, a volte si usa una terminologia e a volte l'altra.
Ad esempio, il Teorema di Pitagora si enuncia, usualmente, affermando che "se un triangolo è rettangolo allora …. " e non usando la terminologia "condizione necessaria affinché un triangolo sia rettangolo è che …", mentre, ad esempio, il legame tra continuità e derivabilità, in analisi, viene espresso di solito in uno dei seguenti modi: "condizione necessaria affinché una funzione f sia derivabile è che f sia continua" oppure "condizione sufficiente affinché f sia continua è che f sia derivabile".
In alcuni casi si usano indifferentemente l'una o l'altra, ad esempio "se n è un multiplo di 4 allora n è pari", che può essere espresso dicendo che "condizione necessaria affinché n sia multiplo di 4 è che n sia pari" oppure "condizione sufficiente affinché n sia pari è che n sia multiplo di 4" o anche più semplicemente "un numero multiplo di 4 è pari".
Anche nel linguaggio comune si usano entrambe le terminologie, ad esempio "per andare al cinema devo uscire di casa" si può anche esprimere dicendo che "per andare al cinema è necessario uscire di casa" oppure "per uscire di casa è sufficiente andare al cinema".

Possiamo quindi concludere con la seguente:

Osservazione. Non sempre, nell'enunciato di un teorema, ipotesi e tesi vengono espresse in modo esplicito, come visto nell'esempio precedente.

Si tenga comunque presente che esistono teoremi nel cui enunciato non compare l'ipotesi, ad esempio "esistono infinite rette", oppure "esiste un punto che divide un segmento in due parti uguali" .La dimostrazione di questi teoremi richiede soltanto l'uso di assiomi della geometria euclidea.

Esistono poi teoremi nei quali ipotesi o tesi o entrambe possono essere congiunzioni o disgiunzioni di proposizioni, ad esempio "se n è un numero primo, allora n=2 **oppure** n è un numero dispari".
Oppure "se Q è un quadrato allora le diagonali di Q sono uguali **e** perpendicolari **e** si dimezzano".
In questo secondo enunciato si osservi che anche l'ipotesi ("Q è un quadrato") può essere espressa come congiunzione di più proposizioni, precisamente: "se Q è un parallelogrammo **e** Q ha tutti i lati uguali **e** tutti gli angoli uguali allora …".
In questi casi, una delle maggiori difficoltà consiste, a volte, nel passare da una proposizione alla sua negazione (cosa che risulta fondamentale nelle cosiddette dimostrazioni "indirette").

Poniamoci ora una domanda: **che cosa possiamo intendere per dimostrazione ?**

In una teoria T (dati enti primitivi e relativi assiomi), per dimostrazione di una tesi B a partire dalle ipotesi $i_1, i_2, ..., i_n$ (l'ipotesi A è in questo caso la congiunzione di queste) si intende una sequenza finita e ordinata di proposizioni (enunciati) che termina con la tesi B ed è tale che ogni proposizione della sequenza è (soddisfa una delle seguenti condizioni) un postulato (o un assioma) della teoria T, oppure una della ipotesi $i_1, ..., i_n$, oppure ottenuta da una o più proposizioni precedenti della sequenza mediante applicazione di "regole logiche".

Vediamo ora alcune tipologie di dimostrazione.

1. Dimostrazione diretta

Si consideri, ad esempio, il seguente
Teorema. Se n è un numero dispari allora n^2 è un numero dispari.
Dim.: (Ip.) n è un numero dispari $\Rightarrow$ (per definizione di numero dispari) esiste un numero naturale m tale che $n = 2m + 1 \Rightarrow n^2 = (2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$. Segue che esiste un numero naturale k $(= 2m^2 + 2m)$ tale che $n^2 = 2k + 1$ e quindi n^2 è un numero dispari (Tesi).

Prima di procedere, vediamo alcune osservazioni sul concetto di numero pari o dispari.

Note

1. Non sempre il concetto di numero pari o di numero dispari viene utilizzato in modo corretto; ad esempio nella formula risolutiva ridotta delle equazioni di secondo grado, a volte si afferma che conviene applicarla quando il coefficiente b del termine in x di primo grado è "pari", anche se il più delle volte b è un numero reale (non intero) per il quale è più comodo considerarne la metà, mentre non ha alcun senso dire che è pari perché i concetti di "numero pari" e "numero dispari" hanno senso solo per i numeri naturali o più in generale per i numeri interi.
Inoltre il concetto di numero pari (dispari) viene descritto, in generale, dagli studenti solo attraverso esempi numerici, ma non sempre viene fornita la definizione precisa e quest'ultima è evidentemente necessaria se si vogliono dare dimostrazioni inerenti tali concetti.

2. Da un punto di vista didattico, con l'uso delle nuove tecnologie o attraverso esempi, è opportuno partire da "enunciati aperti" : ad esempio "se n è un numero dispari cosa possiamo affermare di n^2?"
Dopo alcuni esempi si può **congetturare** che se n è dispari allora anche n^2 è dispari. Ovviamente, qualunque sia il numero di esempi portato a conferma di tale congettura, ciò non rappresenta una dimostrazione, ossia non è possibile escludere che vi siano casi in cui, pur essendo n dispari si abbia che n^2 non sia un numero dispari. Questo modo di procedere ha il vantaggio di presentare la matematica non come un "prodotto finito" (definizioni, teoremi, ecc.), ma permette di intravedere qual è il modo di procedere di un matematico per arrivare a congetture ed eventualmente alla loro dimostrazione o confutazione.
Ricordiamo che una "congettura" è una proposizione della quale non si sa ancora se sia vera o falsa; diventa un teorema se si dimostra che è vera, mentre basta un controesempio per poter affermare che è falsa.
Vediamo tre famosi esempi di "congettura".

Congettura di Goldbach (1690-1764) : "Qualsiasi numero naturale pari maggiore di 2 può essere espresso come somma di due numeri primi".

Esempi: 4=2+2 (e non 1+3), 6=3+3 (e non 1+5), 8=3+5 (e non 1+7) , 10=5+5=3+7. Quest'ultimo esempio permette intanto di affermare che la decomposizione (se esiste) non è unica, neppure a meno dell'ordine.

Osserviamo, però, che se il numero è dispari e maggiore di 3 una tale decomposizione non è sempre possibile. Ad esempio, 11 non si può scrivere come somma di due numeri primi, in quanto necessariamente uno di essi deve essere 2 (essendo gli altri numeri primi tutti dispari e la somma di due dispari è un pari) e l'altro necessariamente deve essere 9, che non è chiaramente primo.

Congettura dei numeri gemelli : ricordiamo che due numeri naturali si dicono "gemelli" se sono numeri primi che differiscono di due (ad esempio 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13 sono coppie di numeri gemelli).
La congettura dei numeri gemelli afferma che "esistono infinite coppie di numeri gemelli".

È invece sorprendente che esista una sola "terna di numeri gemelli", data dai numeri 3, 5, 7 (e non invece 1, 3, 5 in quanto 1 non è un numero primo).
Infatti siano *a*, *a*+2, *a*+4 tre numeri con la proprietà richiesta e dimostriamo che necessariamente *a*=3. Supponiamo a diverso da 3 e sia r il resto della divisione di a per 3. r può essere 0,1 oppure 2. Se r=0 allora a non è primo. Se r=1, allora a+2 risulta divisibile per 3 e perciò non è primo. Se infine r=2 allora a+4 risulta divisibile per 3 e perciò non è primo. In tutti e tre i casi si giunge quindi ad un assurdo, perciò necessariamente a=3.

"Congettura" di Fermat: Fermat ipotizzò che "$F_n = 2^{(2^n)} + 1$ è un numero primo per ogni naturale n".
Per

$n = 1$	$F_1 = 5$	è un numero primo
$n = 2$	$F_2 = 17$	è un numero primo
$n = 3$	$F_3 = 257$	è un numero primo
$n = 4$	$F_4 = 65537$	è un numero primo
$n = 5$	$F_5 = 641 \cdot 6700417$	**non** è un numero primo.

Pertanto quanto ipotizzato da Fermat è falso, ossia è vero il seguente teorema:
"esistono numeri del tipo $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ che non sono primi".

Dopo aver dato un esempio di dimostrazione diretta e prima di passare ad altri tipi di dimostrazione è opportuno fare alcune considerazioni sul concetto di "implicazione".
Consideriamo una proposizione del tipo

$A \Rightarrow B$ (**proposizione diretta).**

A partire da questa possiamo considerare le seguenti altre proposizioni:

$$(\text{non } A) \Rightarrow (\text{non } B)$$

detta **proposizione contraria** di $A \Rightarrow B$;

$$B \Rightarrow A$$

detta **proposizione inversa** di $A \Rightarrow B$;

$$(\text{non } B) \Rightarrow (\text{non } A)$$

detta **proposizione contronominale** di "$A \Rightarrow B$".
Attraverso esempi è "facile" convincersi che $A \Rightarrow B$ è equivalente a (non B) $\Rightarrow$(non A), mentre in generale non è equivalente alle altre due.

Da questo segue che un teorema del tipo "A implica B" fornisce due informazioni, ovviamente equivalenti, ossia che "A implica B", ma anche che "(non B) implica (non A)".

Esempio. Se il quadrilatero Q è un quadrato (A) allora le diagonali del quadrilatero Q sono uguali (B). Questa proposizione è equivalente alla seguente: se le diagonali del quadrilatero Q non sono uguali (non B) allora il quadrilatero Q non è un quadrato (non A).
Ovviamente la proposizione data non è equivalente alla seguente : se il quadrilatero Q non è un quadrato (non A) allora le diagonali del quadrilatero Q non sono uguali (non B) e nemmeno a : se le diagonali del quadrilatero Q sono uguali (B) allora il quadrilatero Q è un quadrato (A).

In alcuni casi, nelle applicazioni, è più conveniente utilizzare l'enunciato nella forma " (non B) implica (non A)". Ad esempio il teorema sulle serie numeriche che afferma che : "se una serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora il limite di a_n è 0" è più utile, nelle applicazioni, nella sua formulazione "se il termine generale di una serie numerica non tende a zero, allora la serie non converge" e questo lo si applica soprattutto nelle serie a termini positivi.

2. Dimostrazione attraverso il passaggio alla contronominale

L'equivalenza tra "A $\Rightarrow$ B" e "(non B) $\Rightarrow$ (non A)" può essere utilizzata nella dimostrazione di teoremi ed è detta dimostrazione attraverso il *passaggio alla contronominale*.
Si consideri ad esempio il seguente
Teorema. Se n^2 è un numero dispari (A) allora n è un numero dispari (B).
Dim.: mostriamo tale proposizione mediante il passaggio alla contronominale, ossia dimostriamo che :
se n non è un numero dispari (non B) allora n^2 non è un numero dispari (non A).
Infatti se n non è dispari (non B), allora n è pari, cioè esiste m naturale tale che $n = 2m$. Allora $n^2 = 4m^2 = 2(2m^2)$ e perciò n^2 è un numero pari (non A), essendo il doppio del numero naturale $2m^2$. Conclusione A $\Rightarrow$ B.
Si può anche osservare che tale proposizione si può dimostrare in modo diretto. Infatti se n^2 è un numero dispari allora esiste m naturale tale che $n^2 = 2m+1$, ma allora $2m = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$. Ne consegue che, poiché 2 è primo e divide il prodotto $(n-1)(n+1)$, almeno uno tra $n-1$ e $n+1$ è divisibile per 2, ossia è un numero pari (in realtà lo sono entrambi). In ogni caso n è un numero dispari.

Note

1. L'esempio precedente mette in evidenza come sia più corretto parlare di *una* dimostrazione di un teorema piuttosto che *della* dimostrazione di un teorema.
2. Il passaggio alla contronominale non va confuso con il "ragionamento per assurdo", il quale porta ad un assurdo supponendo vera l'ipotesi e negando la tesi. Di solito l'assurdo consiste nel dimostrare che non vale una proposizione che si sa essere vera, o perché è un assioma, o perché è un teorema, o perché è una delle ipotesi.

3. Dimostrazione attraverso il ragionamento per assurdo

Consideriamo ad esempio il seguente
Teorema. Nel piano, due rette parallele ad una terza retta sono parallele tra loro.
In questo caso per rette parallele intendiamo o due rette che non hanno punti in comune, oppure due rette coincidenti.
Ip. : a,b,c rette , a // c, b // c . Tesi: a // b .

Dim.: la dimostrazione si effettua per casi.

1) Se almeno due delle tre rette sono coincidenti, allora la tesi è immediata.
2) Supponiamo che le rette a, b, c siano tutte distinte e ragioniamo per assurdo (supponiamo a // c, b // c (ipotesi) e a non // b (negazione della tesi).
   a non // b, significa che a e b sono incidenti in un punto P. Da questo segue che per P passerebbero due rette distinte (a e b) entrambe parallele a c e ciò è assurdo perché contraddice il V postulato di Euclide.

In alcuni casi si applica un ragionamento per assurdo anche senza evidenziarlo. Consideriamo ad esempio il seguente:

Teorema. Esistono infiniti numeri primi.

Dim.: la dimostrazione che viene usualmente proposta (di Euclide) è del seguente tipo: supponiamo che i primi distinti siano in numero finito e siano essi $p_1, p_2, ..., p_n$. Si consideri il numero $k = p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Allora k è sicuramente maggiore di tutti i primi esistenti, tuttavia non è divisibile per nessuno di essi perché la divisione di k per uno qualunque dei p_i dà sempre come resto 1. Poiché ogni numero maggiore di 1 o è primo oppure è divisibile per un numero primo, possiamo concludere, in entrambi i casi, che esiste un numero primo diverso dai $p_1, p_2, ..., p_n$ e questo è assurdo.

Note

1. In questo caso l'enunciato del teorema non è espresso nella forma A $\Rightarrow$ B, eppure abbiamo usato lo stesso il ragionamento per assurdo. E' possibile formulare tale enunciato in modo da evidenziare il ragionamento per assurdo ? Il teorema si può enunciare nel seguente modo:
"se X è l'insieme dei numeri primi, allora X è infinito".
La dimostrazione precedente consiste nel ragionare per assurdo supponendo che X sia l'insieme di tutti i primi (ipotesi) e che X non sia infinito (negazione della tesi). La dimostrazione precedente porta ad affermare che X non contiene tutti i primi (e questo è l'assurdo, perchè nega l'ipotesi).
2. Si noti che, nella dimostrazione del teorema, non viene dimostrato che $p_1 p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ è sempre un numero primo (come invece a volte si ritiene erroneamente), proprietà non vera (ad esempio $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$, ossia tale numero non è primo).

Osservazione. Sia nel passaggio alla contronominale che nella dimostrazione per assurdo bisogna negare almeno una proposizione e questo molto spesso crea difficoltà negli studenti (e non solo).
Vediamo ora alcuni esempi.

1) A = tutti i rombi hanno le diagonali uguali.

La sua negazione è
Non A = non è vero che tutti i rombi hanno le diagonali uguali, ossia esiste almeno un rombo che non ha le diagonali uguali.

In generale la negazione di una proposizione del tipo : “per ogni x vale $P(x)$” è “esiste almeno un x per cui non vale $P(x)$”. In simboli
“$\neg\forall x \quad P(x)$” è equivalente a “$\exists x : \neg P(x)$”.

2) A = esiste un triangolo che ha due angoli retti.

La sua negazione è
Non A = non è vero che esiste un triangolo che ha due angoli retti, ossia tutti i triangoli non hanno due angoli retti.
In generale la negazione di una proposizione del tipo: “esiste un x per cui vale $P(x)$” è “per ogni x non vale $P(x)$”, in simboli
“$\neg\exists x : P(x)$” è equivalente a “$\forall x \quad \neg P(x)$“ .

3) A = un quadrato è un quadrilatero che ha i lati uguali e gli angoli uguali.

Pertanto un quadrilatero non è un quadrato se non è vero che ha i lati uguali e gli angoli uguali, ossia se o non ha tutti i lati uguali oppure se non ha tutti gli angoli uguali.
In generale la negazione di una proposizione del tipo “P e Q” equivale a “non P oppure non Q”,
in simboli
“$\neg(P \wedge Q)$” è equivalente a “$(\neg P) \vee (\neg Q)$”.

4) A = un “quadratero” è un quadrilatero che ha i lati uguali oppure gli angoli uguali.

Pertanto un quadrilatero non è un quadratero se non è vero che ha i lati uguali o gli angoli uguali, ossia se non ha né i lati uguali, né gli angoli uguali.
In generale la negazione di una proposizione del tipo “P o Q” equivale a “non P e non Q” ,
in simboli
“$\neg(P \vee Q)$” è equivalente a “$(\neg P) \wedge (\neg Q)$”.
Si tenga presente che la “o” degli esempi precedenti è la “disgiunzione inclusiva”.

Osservazione. Un uso corretto dei connettivi e dei quantificatori è fondamentale in vari contesti matematici, anche di carattere elementare (vedi ad esempio disequazioni del tipo $|x| \leq 3$ oppure $|x| \geq 3$, nei sistemi di equazioni e di disequazioni, nelle disequazioni irrazionali e in equazioni del tipo $f(x, y)g(x, y) = 0$, oppure $f(x, y)^2 + g(x, y)^2 = 0$.
Per maggiore chiarezza riportiamo alcuni esempi.

Esempi.

1) L’insieme delle soluzioni della disequazione $|x| \leq 3$ è costituito da tutti gli x reali tali che sia $x \leq 3$ **e** $x \geq -3$, che di solito viene descritto tramite la seguente scrittura $-3 \leq x \leq 3$.
2) L’insieme delle soluzioni della disequazione $|x| \geq 3$ è costituito da tutti gli x reali tali che sia $x \geq 3$ **o** $x \leq -3$, scrittura che non è ovviamente esprimibile nella forma $3 \leq x \leq -3$, che deriva da un uso scorretto del connettivo “o”.
3) Si consideri l’equazione $(x - y + 5)(2x + y - 2) = 0$. Poiché il prodotto di due numeri è zero se e soltanto se almeno uno dei due è uguale a zero, l’equazione precedente è soddisfatta da tutte le coppie di numeri che sono soluzioni dell’equazione: $x - y + 5 = 0$ (che nel piano cartesiano rappresenta una retta r) o dell’equazione : $2x + y - 2 = 0$ (che nel piano cartesiano rappresenta una retta s**)**. Pertanto l’equazione iniziale rappresenta, nel piano cartesiano, l’*unione* delle rette r ed s.
4) Si consideri l’equazione $(x - y + 5)^2 + (2x + y - 2)^2 = 0$. Poiché la somma dei quadrati di due numeri reali è uguale a zero se e soltanto se entrambi i numeri considerati sono uguali a zero, l’equazione data equivale al sistema costituito dalle equazioni $x - y + 5 = 0$ e $2x + y - 2 = 0$. Pertanto l’equazione data rappresenta, nel piano car-

tesiano, l'*intersezione* delle rette r ed s , ossia l'insieme costituito dal punto di coordinate $(-1,4)$.

Osservazione. Nel linguaggio comune i quantificatori vengono a volte sostituiti dall'articolo indeterminativo "un", come ad esempio nella frase "*un* numero pari è il doppio di *un* numero naturale". Il primo "un" ha il significato di "per ogni", mentre il secondo ha il significato di "esiste".

Citiamo ora, a proposito della difficoltà di passare da una proposizione alla sua negazione, anche altri autori, vedi ad esempio [5].
La negazione di "tutti i triangoli isosceli sono equilateri", per "qualcuno" è "nessun triangolo isoscele è equilatero" (errore presente non solo tra gli studenti).
Oppure [12] :
«È mai possibile che….nemmeno alcuni autori di libri di testo sappiano ancora che la negazione di: "tutti gli uomini sono mortali " è "esiste (almeno) un uomo immortale " e non "tutti gli uomini sono immortali!".»

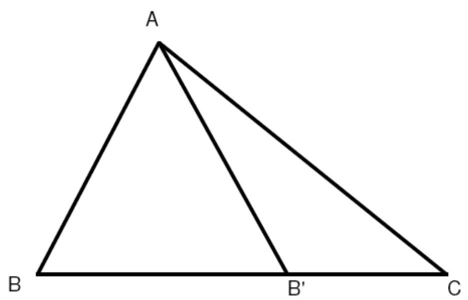
Ritorniamo ora a parlare dei teoremi, fornendo in modo schematico, alcuni suggerimenti relativi allo studio di un teorema che si presenti nella forma A implica B.

- Enunciato del teorema, precisando ipotesi (A) e tesi (B) anche se nell'enunciato queste non sono esplicitamente indicate.
- Tipo di dimostrazione (per casi, dimostrazione diretta, indiretta, cioè per assurdo o passaggio alla contronominale, per induzione,…)
- Individuare i passaggi nella dimostrazione, dove vengono utilizzate le varie ipotesi.
- Precisare quali concetti (ossia definizioni) e quali teoremi si usano nella dimostrazione (prerequisiti).
- Qualora fosse possibile, fornire una interpretazione geometrica (vedi ad esempio il teorema di Rolle oppure la formula del quadrato di un binomio).
- Fornire alcuni esempi di applicazione del teorema e non "generalizzare", ossia verificare attentamente che tutte le ipotesi del teorema siano soddisfatte.
- Chiedersi se vale l'implicazione inversa ed eventualmente fornire un controesempio .

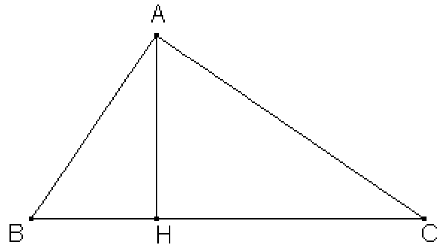
Vediamo ora alcuni esempi riguardanti questi ultimi due aspetti.

Cominciamo fornendo alcuni esempi relativi ad errate generalizzazioni di alcuni noti risultati.

Esempio1. (Primo criterio di uguaglianza dei triangoli)
Nel primo criterio di uguaglianza è opportuno sottolineare l'importanza che l'angolo uguale sia quello *compreso* fra le coppie corrispondenti di lati uguali. Ad esempio (figura) i triangoli ABC e $AB'C$ hanno due lati e un angolo uguali ($AB = AB'$, AC e l'angolo in C in comune), ma i due triangoli non sono evidentemente uguali.



Esempio 2. (Secondo criterio di uguaglianza dei triangoli)
Consideriamo il triangolo rettangolo non isoscele ABC della figura (ipotenusa BC e altezza relativa AH).



I triangoli AHB e AHC hanno: AH in comune, $H\hat{B}A = H\hat{A}C$ e $H\hat{A}B = H\hat{C}A$ in entrambi i casi perché complementari di uno stesso angolo.
Una "superficiale" applicazione del secondo criterio di uguaglianza dei triangoli porterebbe allora a concludere che i triangoli AHB e AHC sono uguali, da cui seguirebbe che $AB = AC$ e che quindi tutti i triangoli rettangoli sono isosceli. Ovviamente l'errore consiste nel fatto che il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli richiede che le coppie di angoli uguali siano quelle adiacenti al lato uguale (o, come si suol dire, "ugualmente posti rispetto a tale lato").

Esempio 3. (Terzo criterio di uguaglianza dei triangoli)
Osserviamo anche che il terzo criterio di uguaglianza viene, a volte, generalizzato ai poligoni, affermando, erroneamente, che se due poligoni hanno i lati uguali allora essi sono uguali.

Esempio 4. **(Legge di annullamento del prodotto)**
La proprietà di annullamento del prodotto, ossia che $ab = 0$ implica $a = 0$ oppure $b = 0$, a volte viene generalizzata in modo erroneo, ad esempio $ab = 6$ implica $a = 6$ oppure $b = 6$ (errore che a volte viene commesso nella risoluzione di equazioni algebriche).

Esempio 5. (Formula di Erone)
Un'altra generalizzazione errata potrebbe riguardare la formula di Erone (I sec. d.C.), che, come noto, permette di calcolare l'area A di un triangolo note le lunghezze a, b, c dei suoi lati, precisamente

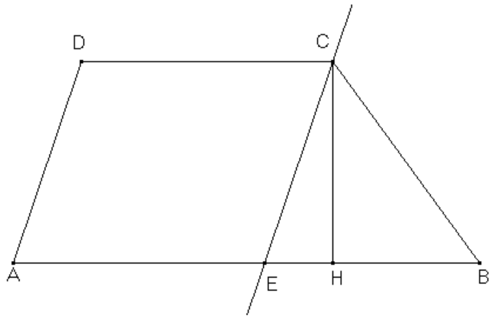
$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove con p si indica la lunghezza del semiperimetro del triangolo.
Si può notare che l'esistenza di tale formula è motivata dal fatto che se di un triangolo sono note le misure dei suoi lati, il triangolo è univocamente determinato. Notiamo che è "più difficile" il calcolo dell'area di un triangolo di cui siano noti i lati (che è unico) rispetto al calcolo dell'area di triangoli di cui siano assegnate le misure di un lato e della relativa altezza (che sono invece infiniti).
Si potrebbe pensare di estendere la formula di Erone al calcolo dell'area di un qualunque quadrilatero di cui siano noti i lati. La formula a cui si potrebbe pensare è la seguente (indicando con a, b, c, d le misure dei lati del quadrilatero e con p il suo semiperimetro)

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

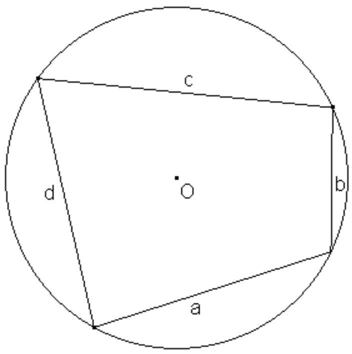
che, per motivi dimensionali, non può rappresentare un'area.
Per i quadrati e i rettangoli esiste la possibilità di calcolare l'area noti i lati, utilizzando le usuali formule.

Meno evidente, ma altrettanto possibile, è il calcolo dell'area di un trapezio che non sia un parallelogrammo, note le misure dei suoi lati.
Con riferimento alla figura seguente, tracciamo da *C* la parallela al lato *AD* e indichiamo con *E* la sua intersezione con la base *AB*.



Ricaviamo adesso le misure dei lati del triangolo *ECB*; *EC*=*AD*, *CB* è dato ed $EB = AB - AE = AB - DC$. Con la formula di Erone possiamo pertanto ricavare l'area del triangolo *ECB* e poi da questa risalire alla misura dell'altezza *CH* relativa alla base *EB*. *CH* è però anche l'altezza del trapezio *ABCD*, di cui ora possiamo ricavare l'area.
Se si passa ai parallelogrammi che non siano né quadrati né rettangoli, la possibilità di trovarne l'area conoscendo soltanto i lati viene meno, basta pensare ad esempio ad un rombo di lato assegnato ℓ. In questo caso si può solo dire che l'area è minore o uguale ad ℓ^2 e anzi può assumere qualunque valore compreso tra 0 e ℓ^2.
Una generalizzazione (628 d.C.) della formula di Erone, dovuta a Brahamagupta (598 - 668), matematico e astronomo indiano, afferma che l'area *A* di un quadrilatero **inscritto** in una circonferenza (quadrilatero di cui siano note le misure a, b, c, d dei suoi lati e indicato con p il suo semiperimetro) è data da

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$



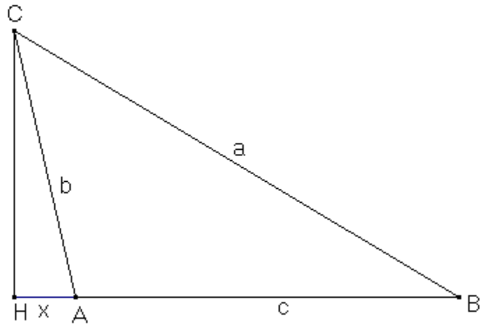
Forniamo ora alcuni esempi relativi al problema dell' "invertibilità di una implicazione" .

Esempio 6. (Equivalenza di equazioni)
Come noto, se α è soluzione di $f(x) = g(x)$ allora α è soluzione di $f(x)^2 = g(x)^2$. Ovviamente di questa proprietà non vale l'inverso, ad esempio se $f(x) = x$ e $g(x) = 2$, allora 2 è soluzione di $f(x) = g(x)$ e quindi anche di $f(x)^2 = g(x)^2, (x^2 = 4)$, ma –2 è soluzione di $f(x)^2 = g(x)^2$ ma non di $f(x) = g(x)$ e questo è uno dei motivi per i quali nella risoluzione di un'equazione irrazionale è necessaria la "verifica" (solo per potenze con esponente pari).
Non sempre la verifica è però agevole, non solo, in alcuni casi è addirittura impossibile da eseguire, ad esempio $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3} = \sqrt{x^2 - 9}$. Elevando al quadrato si ottiene $x^2 - 9 = x^2 - 9$, che è vera per ogni x reale, mentre non è vero che la relazione di partenza sia

vera per ogni x reale (deve essere $x \geq 3$). In questi casi è necessario sostituire la verifica diretta con una discussione dell'esistenza dei radicali coinvolti.
A proposito delle equazioni irrazionali, notiamo inoltre che nei testi è consuetudine, nel ricavare l'equazione canonica sia dell'ellisse che dell'iperbole, non verificare l'equivalenza tra l'equazione iniziale e quella finale, che si ottiene dopo addirittura due elevamenti a quadrato. Riteniamo che provare tale equivalenza non sia necessario perché potrebbe essere complessa, e quindi non proponibile a livello elementare, ma pensiamo che sia opportuno almeno citare che vale tale equivalenza.

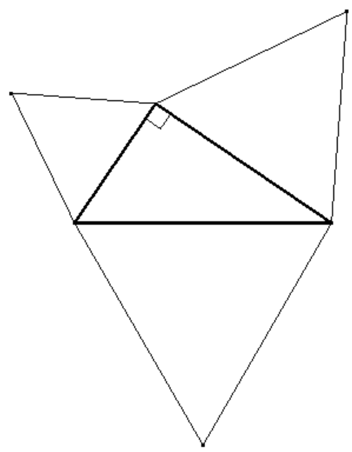
Esempio 7. (Divisibilità)
Un altro esempio è il seguente:
se due numeri naturali m,n sono tali che mn divide il numero naturale k allora sia m che n dividono k.
Il viceversa non è vero, cioè se due numeri m,n dividono k non è detto che il loro prodotto divida k. Ad esempio $m=12$ e $n=9$ dividono entrambi $k=72$, ma $mn=108$ non divide 72.

Esempio 8. (Teorema di Pitagora)
In molti testi viene riportato, in modo corretto, il seguente enunciato del Teorema di Pitagora : "in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti".
Tale teorema si può enunciare nella forma "Se….allora".
Molto spesso, però, tale teorema viene erroneamente utilizzato per verificare se un triangolo, di cui siano note le lunghezze dei lati, sia o meno rettangolo. Ovviamente, se la relazione di Pitagora non vale (ossia se il quadrato del lato maggiore non è uguale alla somma dei quadrati dei lati minori), allora si può correttamente concludere che il triangolo non è rettangolo, questo in base alla contronominale del Teorema di Pitagora (che è ad esso equivalente); mentre nulla si può dire sulla natura del triangolo qualora valga la relazione suddetta, purché non si sia prima dimostrato che vale anche l' "inverso del Teorema di Pitagora", cosa che raramente viene fatta, oppure spesso sui testi non è messa nel dovuto risalto [11]. Si osservi che, in alcuni dei primi esercizi di geometria analitica, si richiede di verificare che un triangolo, note le coordinate dei suoi vertici, è rettangolo, cosa che richiede in realtà anche l'uso dell' "inverso del Teorema di Pitagora".
Si noti che, per enunciare quest'ultimo teorema non si può parlare di "cateti" e "ipotenusa" nella sua ipotesi. Pertanto un enunciato corretto dell' "inverso del Teorema di Pitagora" può essere, ad esempio, il seguente:
"se in un triangolo il quadrato costruito su uno dei lati è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due, allora il triangolo è rettangolo e ha per ipotenusa il primo dei lati considerati".
La dimostrazione di tale teorema deriva sostanzialmente dal fatto che il triangolo è una "figura rigida". Vediamone una possibile dimostrazione di carattere algebrico, basata su un ragionamento per assurdo.
Supponiamo, ad esempio, che il triangolo sia ottusangolo in A e che valga la relazione pitagorica $(a^2 = b^2 + c^2)$ (vedi figura).



Condotta dal vertice C l'altezza CH relativa ad AB, posto $HA = x$, dovrà essere $x \neq 0$. Applicando una prima volta il Teorema di Pitagora al triangolo rettangolo CHA si ha $CH^2 = b^2 - x^2$ ed applicandolo di nuovo al triangolo rettangolo CHB si ha $CH^2 = a^2 - (x+c)^2$. Uguagliando le due espressioni, svolgendo i calcoli e tenendo presente l'ipotesi ($a^2 = b^2 + c^2$), si giunge alla condizione $c\,x = 0$, relazione falsa in quanto sia c che x sono diversi da 0. Questo è assurdo e perciò il triangolo non può essere ottusangolo in A.
In modo analogo si dimostra che, nell'ipotesi precedente, il triangolo non può neppure avere un angolo acuto in A.
Si conclude dunque che ABC è rettangolo in A.

Possiamo osservare che nell'enunciato del Teorema di Pitagora si utilizzano i quadrati costruiti sui lati soltanto per comodità, ma il teorema si può enunciare considerando una qualunque terna di poligoni simili "costruiti" sui lati.

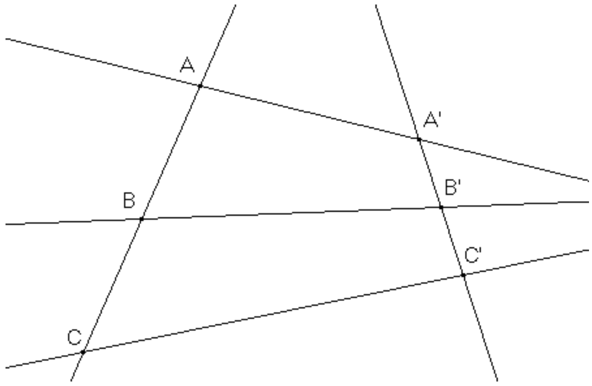


Il teorema di Pitagora, a volte, viene citato anche se in realtà si sta usando il suo inverso. Da un punto di vista matematico ciò non è corretto, anche se, valendo appunto tale inverso, si ottengono comunque risultati corretti.

Esempio 9. (Teorema di Talete)
In questo caso è necessario porre molta attenzione all'uso del Teorema di Talete e del suo "inverso". Ricordiamo l'enunciato del Teorema di Talete:
"Se un fascio di rette parallele è tagliato da due trasversali, i segmenti di una trasversale sono proporzionali ai segmenti corrispondenti dell'altra, cioè sono proporzionali i segmenti compresi fra le stesse parallele".

Cosa si intende in questo caso per "inverso del teorema di Talete" ?
Su un testo abbiamo trovato questa formulazione:

“se un fascio di rette individua su due trasversali due insiemi di segmenti direttamente proporzionali, allora le rette sono parallele”.
Prima osservazione: se si usa il termine “fascio di rette” si hanno due possibilità, o le rette sono tutte parallele (fascio improprio) e in questo caso non avremmo nulla da dimostrare, oppure le rette passano tutte per uno stesso punto (fascio proprio) e in questo caso sarebbe impossibile dimostrare che le rette sono parallele. Quindi si dovrebbe almeno sostituire la parola “fascio” con “insieme”.
Rimane però ancora il dubbio se il “teorema” così formulato sia vero.
Il testo citato riporta una dimostrazione che ha al suo interno un grossolano errore e proprio nel ragionamento per assurdo ed in particolare nella negazione di “tutte le rette sono parallele”, affermando che “tutte le rette sono parallele, tranne una, che non risulta, quindi, ad esse parallela”.
Rimane comunque il dubbio se il teorema così enunciato sia comunque vero.
La risposta è negativa ed è anche facilmente dimostrabile con un controesempio (vedi figura).



AB e *BC* sono congruenti, *A'B'* e *B'C'* sono congruenti, quindi *AB*, *BC* e *A'B'*, *B'C'* sono direttamente proporzionali, ma chiaramente le rette *AA'*, *BB'*, *CC'* non sono parallele.
È opportuno precisare che, dalla formulazione generale del Teorema di Talete, segue, come caso particolare, il seguente risultato:
“Siano date tre rette tagliate da due trasversali. Se le tre rette sono parallele allora i segmenti corrispondenti sulle due trasversali sono proporzionali”.
L'inverso “parziale” del teorema di Talete può essere allora enunciato come segue:
“Siano date tre rette tagliate da due trasversali. Se i segmenti corrispondenti sulle due trasversali sono proporzionali e **se due delle tre rette sono parallele** , allora anche la terza è parallela a quelle due”.
Questo risultato viene applicato soprattutto ai triangoli nelle seguenti formulazioni:

A) una retta parallela ad un lato di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.
B) inverso di A) – Se due lati di un triangolo sono divisi in parti proporzionali, la retta congiungente i punti di suddivisione è parallela al terzo lato.

Proponiamo ora alcune osservazioni sul ruolo di *esempi* e *controesempi* nelle dimostrazioni, tenendo presente che molto spesso gli studenti si chiedono perché in alcuni casi con un esempio si dimostra una proprietà, mentre in altri questo non è possibile (anzi si utilizzano gli esempi per smentire una proprietà). Tutto questo dipende dal tipo di enunciato del teorema da dimostrare.
Ad esempio

A) Enunciato di carattere generale : “Tutti i quadrati hanno le diagonali uguali”. Pur potendo fornire vari esempi di tale proprietà non possiamo esaurire tutti i casi possibili (che sono infiniti) e quindi questa proprietà richiede una dimostrazione generale. Si tenga però presente che se la proprietà è di carattere generale ma riguarda un insieme finito, allora teoricamente si potrebbero esaurire , con degli esempi, tutti i casi possibili.

B) Enunciato di carattere generale (falso) : "Tutti i rettangoli hanno le diagonali perpendicolari".
In questo caso è possibile fornire esempi di rettangoli con le diagonali perpendicolari (quadrati) ma è anche possibile trovare esempi di rettangoli le cui diagonali non sono perpendicolari (rettangoli non quadrati). Pertanto l'affermazione iniziale è falsa e per certificarla come tale è sufficiente dare un controesempio, ossia un rettangolo che non abbia le diagonali perpendicolari.

C) Enunciato di carattere "esistenziale" : "Esiste un numero primo pari". In questo caso per la dimostrazione è sufficiente fornire un esempio di numero primo pari (il numero 2).
"Esiste uno ed un solo numero primo pari": (proprietà vera).In questo caso oltre a fornire un esempio di numero primo pari bisogna provare che esso è unico e questa affermazione non è dimostrabile con esempi.
"Esiste un numero primo maggiore di $1000^{1000000000}$".
In questo caso l'esistenza di tale numero primo è assicurata dal teorema sull'infinità dei numeri primi, mentre fornire un esempio concreto di un tale numero è assai arduo.
"Esistono segmenti incommensurabili".
In questo caso occorre trovare l'esempio (lato e diagonale di uno stesso quadrato), ma la verifica che questi sono effettivamente incommensurabili richiede una dimostrazione (non semplice).
A volte, in matematica, si dimostra l'esistenza di "oggetti" pur non fornendo esempi concreti di essi (esistenza non costruttiva).
Vediamo un esempio di tale situazione [10]. Esistono due numeri irrazionali a e b tali che a^b sia razionale. Proviamo con $a = b = \sqrt{2}$. Se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è razionale ho trovato l'esempio, mentre se è irrazionale, ponendo $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$ si ha $a^b = 2$. Quindi viene dimostrata l'esistenza, senza però stabilire quale delle coppie di numeri proposte sia quella richiesta.
Ciò non esclude che sia possibile provare, per altra via, quale delle due coppie abbia i requisiti richiesti.

Per concludere, proponiamo alcuni "problemi" curiosi in cui si possono evidenziare alcune delle tematiche precedenti.

1) Questo problema riguarda l'aspetto della "generalizzazione", ossia dedurre una regola generale a partire da alcuni esempi per i quali quella regola è rispettata.

Una spia, al fine di introdursi in una base nemica, osserva ed ascolta, non visto, i seguenti dialoghi:

sentinella	*militare*
<sei>	*<tre>*
<otto>	*<quattro>*
<dieci>	*<cinque>*
<dodici>	*<sei>*

In ognuno dei casi precedenti, la sentinella permette al militare di entrare.

A questo punto la spia ritiene di aver scoperto “la parola d’ordine” e si presenta alla sentinella, la quale dice: <*quattordici*> e la spia risponde: <*sette*>.
Ma la sentinella non permette alla spia di entrare. Perché ?

Dalle risposte ascoltate la spia aveva dedotto che la risposta al numero proposto dalla sentinella dovesse essere la metà del numero stesso e così era stato fino a quel punto. Purtroppo, per la spia, la regola concordata consisteva nel rispondere, al numero proposto dalla sentinella, con il numero delle lettere che compongono la parola che esprime quel numero. Quindi la spia, per poter entrare, avrebbe dovuto rispondere a “quattordici” con “undici”.

2) Questo problema riguarda invece l’uso corretto delle ipotesi, anche quando queste potrebbero sembrare, a prima vista, poco significative.

Dialogo fra due amici (matematici !) A e B:

A) “Sto andando a casa dai miei figli a festeggiare un compleanno”.

B) “Quanti figli hai e che età hanno ?”

A) “Ne ho tre e invece di dirti la loro età ti dico solo che il prodotto delle loro età è 36*”*

B) “E’ troppo poco, mi devi fornire altri elementi”

A) “Ti dico ancora che la somma delle loro età corrisponde al tuo numero di casa”

Dopo averci pensato un po’ B risponde

B) “Ancora non posso stabilire la loro età”

A) “Ti do quest’ultimo indizio: il più grande ha gli occhi verdi”

B) “Adesso posso dire che i tuoi figli hanno rispettivamente 2, 2, 9 *anni”*

Vediamo quale ragionamento ha portato alla conclusione di *B*.
Poiché il prodotto dei numeri (interi) che esprimono le tre età è 36, si possono presentare i seguenti casi, indicando a fianco anche le rispettive somme.

1 , 1 , 36	somma	38
1 , 2 , 18	somma	21
1 , 3 , 12	somma	16
1 , 4 , 9	somma	14
1 , 6 , 6	somma	13
2 , 2 , 9	somma	13
2 , 3 , 6	somma	11
3 , 3 , 4	somma	10

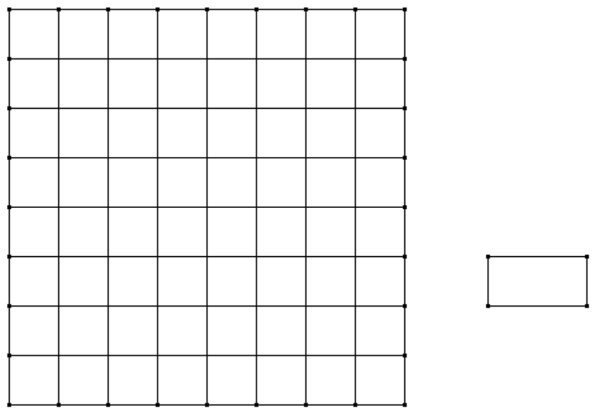
Poiché *B* conosce il proprio numero di casa, il fatto di non essere in grado di rispondere dopo aver avuto l’informazione relativa alla somma delle età, sta ad indicare che il numero di casa di *B* è 13, in quanto è l’unico a comparire due volte nella lista delle possibili somme (in tutti gli altri casi la risposta di *B* sarebbe stata possibile senza bisogno di ulteriori informazioni). A quel punto *B* aveva due alternative circa le età, precisamente 1, 6, 6 e 2, 2, 9. L'ultima informazione, apparentemente inutile, sta invece ad indicare che c'è il figlio maggiore e quindi la risposta esatta è appunto 2, 2, 9.

E se l'ultima informazione di A fosse stata:

"Il più piccolo è un maschio" ?

In tal caso, fermo restando i ragionamenti precedenti, la conclusione sarebbe stata 1, 6, 6.
3) Quest'ultimo esempio illustra l'uso o meno degli esempi nelle dimostrazioni.

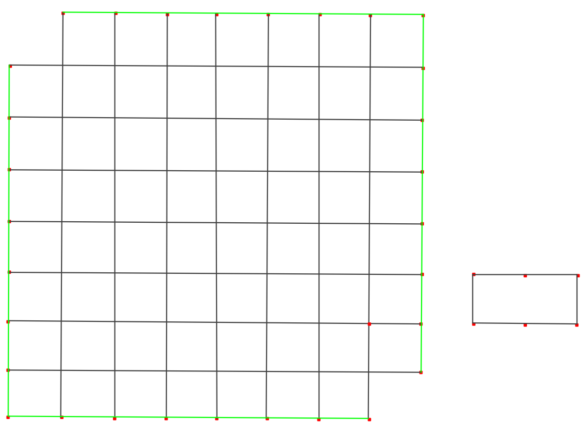
Supponiamo di avere una normale scacchiera formata quindi da 64 caselle quadrate, come in figura.



Si hanno a disposizione 32 *tasselli rettangolari di dimensioni una pari al lato di ogni casella della scacchiera e l'altra doppia (vedi figura).*
Ci chiediamo se sia possibile ricoprire con questi 32 *tasselli l'intera scacchiera.*

La risposta è affermativa, basta disporre i tasselli in orizzontale (o in verticale) a partire da uno dei vertici.
In questo caso siamo riusciti a dimostrare una certa proprietà attraverso un esempio.

Supponiamo adesso di avere una scacchiera "mutilata", ossia ottenuta eliminando due caselle che si trovano in vertici opposti, come in figura.



Si hanno ora a disposizione 31 *tasselli rettangolari delle stesse dimensioni del caso precedente.*
Ci chiediamo se sia possibile ricoprire con questi 31 *tasselli l'intera scacchiera "mutilata".*

Dopo alcuni tentativi, si fa strada l'idea che ciò non sia possibile.
Non possiamo però affermare che non sia possibile ottenere quanto richiesto utilizzando una tecnica particolare, diversa da quelle da noi usate.
Pertanto, se vogliamo convincerci che non esiste un modo per ricoprire la scacchiera "mutilata", dobbiamo fornire una dimostrazione e non possiamo invece basarci solo sulla nostra incapacità di fare quanto richiesto.
Un modo per dimostrare l'impossibilità di ricoprire la scacchiera "mutilata" con i 31 tasselli rettangolari, consiste nell'osservare che le due caselle eliminate hanno lo stesso colore, supponiamo entrambe nere. Pertanto rimangono sulla scacchiera 30 caselle nere e 32 bianche. Ora, comunque si dispongano i primi 30 tasselli, tenendo presente che ogni tassello ricopre due caselle di colore diverso, rimangono scoperte due caselle entrambe bianche e pertanto con l'ultimo tassello non sarà possibile ricoprirle.

Tale problema è riportato in: "L'ultimo Teorema di Fermat" di Simon Singh, 1998 (Rizzoli) e in "Com'è bella la Matematica" di Ian Stewart, 2006 (Bollati-Boringhieri). Vedi anche "Enigmi e giochi matematici" (Volumi 1-2-3-4) di Martin Gardner, 1966-67 (Sansoni).

Conclusioni.

Le considerazioni riportate si possono estendere a vari contesti, diversi da quelli esaminati, in quanto le tematiche trattate sono comuni a quasi tutti i rami della matematica. Desideriamo però puntualizzare che le osservazioni proposte devono comunque essere "filtrate" dal docente, che - in ogni caso - deve adattarsi (o adattarle) alle caratteristiche e alle esigenze dei suoi studenti.

Bibliografia

[1] G. Accascina, M. Barra, C. Bernardi, M. Menghini, *Movimento, percezione e dimostrazione*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. Vol. 29 A-B n. 4, Luglio-Agosto 2006, pp. 313-346.

[2] S. Antonini, M.A. Mariotti, *La dimostrazione per assurdo: un modello per un'analisi cognitiva e didattica*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 29 A-B n. 4, Luglio-Agosto 2006, pp. 385-414.

[3] S. Baruk, *Dizionario di Matematica Elementare*. Zanichelli, Bologna, 1998.

[4] F. Bellissima, P. Pagli, *La verità trasmessa. La logica attraverso le dimostrazioni matematiche*. Biblioteca Universale Sansoni, 1993.

[5] C. Bonotto, F. Ferronato, *La logica nella scuola secondaria: una proposta*. La matematica e la sua didattica, n. 2, 2003, pp. 139-169.

[6] L. Grugnetti, *Argomentare e dimostrare nella scuola media*. Atti XV convegno nazionale N.R.D. per la scuola media. Salice Terme 1996.

[7] M. Impedovo, *Errori tipici in matematica e inopportunità didattiche*. B.U.M.I. 1999, pp. 37-54.

[8] C. Marchini, *Argomentazione e dimostrazione. Alcune riflessioni sugli aspetti didattici*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. Vol. 10, n. 2, 1985, pp. 121-140.

[9] G. Mazzanti, B. Piochi , *Riflessioni sulla dimostrazione in didattica della matematica*. Didattica delle Scienze. N. 149, Ottobre 1990, pp. 45-50.

[10] G. Sambin, *Una guida alla logica*, appunti del corso di istituzioni di logica matematica, 1997-1998. Università di Padova.

[11] A. Scimone, F. Spagnolo, *Il caso emblematico dell'inverso del teorema di Pitagora, nella storia della trasposizione didattica attraverso i manuali*. La matematica e la sua didattica n. 2, 2005, pp. 217-227.

[12] V. Villani, *Errori nei testi scolastici: calcolo numerico, logica, informatica*. Archimede XLVI, 1994, pp 3-18.

[13] V. Villani, *Cominciamo da zero. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (Aritmetica e Algebra)*, Pitagora, Bologna 2003.

[14] V. Villani, *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della matematica (Geometria)*, Pitagora, Bologna 2006.