

Università degli Studi di Padova
Dipartimento di Matematica "T. Levi-Civita"
Corso per l'acquisizione dei 24 CFU (5^ciclo)



**Metodologie e tecnologie didattiche
per l'insegnamento della matematica
nella scuola secondaria**

Introduzione alla Didattica della Matematica

10 maggio 2019

prof. Luigi Tomasi
luigi.tomasi@unipd.it

'Scaletta' dell'incontro



- Presentazione iniziale
- *Syllabus* del corso
- Che cos'è la *Didattica della matematica* e di cosa si occupa la ricerca in didattica della matematica
- Alcuni aspetti generali della *Didattica della matematica* oggi

Le prove d'esame del concorso a cattedre per la scuola secondaria



Per il concorso a cattedre, per i posti comuni, *sembra* che saranno previste le seguenti prove d'esame:

- **prima prova scritta:** ha l'obiettivo di valutare il grado di conoscenze e competenze del candidato sulle discipline afferenti alla classe di concorso
- **seconda prova scritta:** ha l'obiettivo di valutare il grado delle conoscenze e competenze del candidato sulle discipline antropo-psico-pedagogiche e sulle *metodologie e tecnologie didattiche*.

Le prove d'esame del concorso a cattedra per la scuola secondaria



- Sia per i posti comuni che per i posti di sostegno è prevista una **prova orale** che consiste in un colloquio sulle discipline specifiche della classe di concorso.
- La prova orale ha anche l'obiettivo di verificare la conoscenza di una **lingua straniera** europea almeno al livello B2 del quadro comune europeo, nonché il possesso di adeguate competenze didattiche nelle tecnologie dell'informazione e della comunicazione.

Classi di concorso riguardanti la matematica nella scuola secondaria



- A-26: Matematica (Scuola secondaria di II grado)
- A-27: Matematica e Fisica (Scuola secondaria di II grado)
- A-47: Scienze matematiche applicate (Scuola secondaria di II grado)
- A-28: Matematica e Scienze (Scuola secondaria di I grado)

Leggere i programmi d'esame.

Syllabus del corso (vedi il Moodle del corso)



- Alcuni problemi generali della didattica della matematica
- Temi specifici dell'insegnamento della matematica nella scuola secondaria
- Insegnamento della matematica e tecnologie; software di matematica (in particolare GeoGebra)
- Curricoli, Indicazioni nazionali, Linee guida per la matematica nella Scuola secondaria
- Esercitazioni
- Modalità d'esame

Materiali e libro di testo (prevalentemente) seguito



-Appunti del docente

-A. Baccaglini-Frank, P. Di Martino, R. Natalini, G. Rosolini, *Didattica della matematica*, Mondadori Università, Milano 2018.

-B. D'Amore, *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna 1999.

-Alcuni articoli scelti da riviste di didattica della matematica.



Date del corso ed esami (vedi il Moodle)



Incontri in presenza

- Venerdì 10 maggio – ore 14:30-18:30
- Venerdì 17 maggio – ore 14:30-18:30
- Venerdì 24 maggio – ore 14:30-18:30
- Venerdì 31 maggio – ore 14:30-18:30

+ attività online sulla piattaforma Moodle del corso.

Appelli d'esame:

- Venerdì 7 giugno: 1° appello esame (15:00-17:30)
- Venerdì 5 luglio: 2° appello esame (15:00-17:30)

Didattica generale e didattica disciplinare



- Esistono le didattiche specifiche (disciplinari) ed esiste la didattica generale.
- Si tratta di due approcci diversi al problema di analizzare le azioni, le scelte, le posizioni assunte dall'insegnante, così come l'apprendimento da parte dell'allievo
- L'insegnamento è una attività *intenzionale* finalizzata a produrre un apprendimento da parte di un allievo.

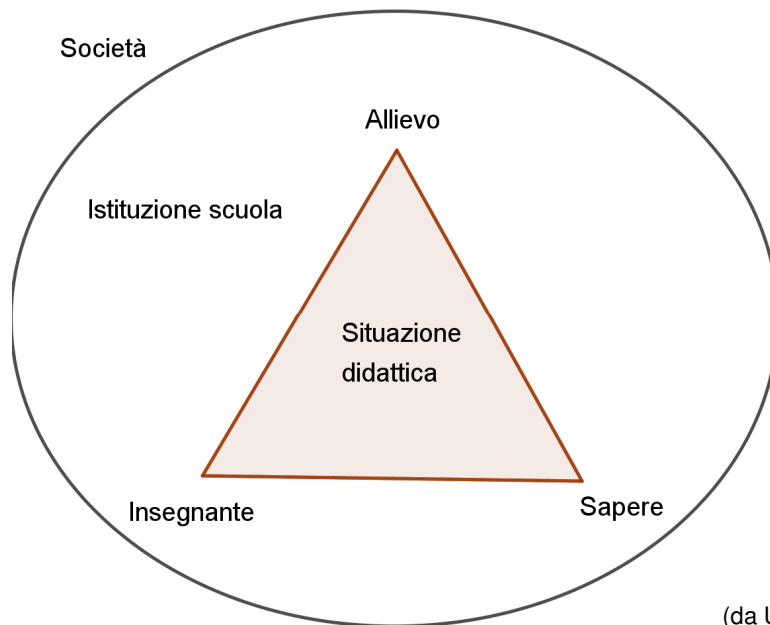
La didattica disciplinare



- La didattica della matematica, e in generale di una disciplina, studia l'insegnamento e l'apprendimento in ciò che essi hanno di specifico per la disciplina stessa (la matematica nel nostro caso).
- La didattica disciplinare (della matematica) si distingue dalla pedagogia e dalla psicologia dell'apprendimento, perché tratta di fenomeni e problemi collegati con le particolarità e i dettagli dei contenuti disciplinari oggetto di apprendimento e insegnamento.
- Essa pone al centro del suo interesse il «triangolo della didattica», formato da allievo-insegnante-sapere (A-I-S).

(da U. Besson)

Il triangolo della didattica



La didattica disciplinare nasce in contrasto a due idee piuttosto diffuse

La didattica delle singole discipline nasce in contrasto con due idee molto diffuse (e sbagliate), opposte e simmetriche, sull'insegnamento:

- l'idea di una didattica generale indipendente dai contenuti, una pedagogia generale, secondo cui se si sa insegnare, allora si sa insegnare qualunque cosa;
- l'idea simmetrica (e altrettanto sbagliata), di una didattica basata solo sui contenuti, secondo cui se conosci bene la materia, la sai anche insegnare bene («sapere è saper insegnare»).

(da U. Besson)

La didattica disciplinare



La didattica disciplinare si basa invece sull'idea che occorre studiare problemi e (eventuali...) soluzioni relativi all'apprendimento di specifici contenuti, il che comporta i seguenti filoni principali di ricerca:

- Una riflessione critica sull'organizzazione concettuale e i fondamenti dei contenuti in vista di una sua ricostruzione finalizzata all'insegnamento
- Lo studio dei processi cognitivi specifici necessari per l'apprendimento dei contenuti, con gli ostacoli, le difficoltà, i modelli mentali, i ragionamenti, ecc.

(da U. Besson)

La didattica disciplinare



- La definizione, sulla base dei due precedenti tipi di ricerca, di percorsi cognitivi che comportino obiettivi specifici graduati secondo l'età degli allievi;
- La realizzazione e la sperimentazione di percorsi di insegnamento e apprendimento su particolari segmenti del curriculum (di matematica), indicando contenuti, obiettivi, metodi, strumenti, strategie cognitive;
- La progettazione di e sperimentazioni di materiali didattici particolari, che prevedono l'uso delle tecnologie (dispense, schede didattiche, audiovisivi, modelli, software, video, ecc.)
- L'organizzazione di percorsi di formazione degli insegnanti coerenti con quanto detto in precedenza.

(da U. Besson)

La didattica disciplinare



- La definizione, sulla base dei due precedenti tipi di ricerca, di percorsi cognitivi che comportino obiettivi specifici graduati secondo l'età degli allievi;
- La realizzazione e la sperimentazione di percorsi di insegnamento e apprendimento su particolari segmenti del curriculum (di matematica), indicando contenuti, obiettivi, metodi, strumenti, strategie cognitive;
- La progettazione di e sperimentazioni di materiali didattici particolari, che prevedono l'uso delle tecnologie (dispense, schede didattiche, audiovisivi, modelli, software, video, ecc.)
- L'organizzazione di percorsi di formazione degli insegnanti coerenti con quanto detto in precedenza.

(da U. Besson)

Una prima concezione della Didattica della Matematica



- Che cos'è, dunque, la didattica della matematica?
- Come possiamo intendere lo studio e la ricerca in didattica della matematica?
- Iniziamo a presentare una prima concezione della didattica della matematica, secondo la quale lo scopo centrale dell'azione e della ricerca didattica è il miglioramento dell'insegnamento.
- La logica sottintesa a tale interpretazione è evidente:
a un miglioramento del nostro insegnamento farà inevitabilmente riscontro un miglioramento dei risultati che potremo ottenere dai nostri allievi.

La ricerca in didattica della matematica: Didattica A e Didattica B



Sono essenzialmente venute a prodursi due modi diversi di intendere la didattica della matematica, che Bruno D'Amore codifica come Didattica A (da "Ars") e Didattica B

1. Didattica A, o "Divulgazione delle Idee" che fissa l'attenzione sulla fase dell'insegnamento
2. Didattica B, o "Epistemologia dell'apprendimento" ricerca empirica, che fissa l'attenzione sulla fase dell'apprendimento

La didattica A è la didattica come si è sviluppata nella sua prima fase, che ha come "focus" l'insegnamento, si collega alla concezione dell'insegnamento come arte, vocazione,...

Ha l'obiettivo di creare situazioni (sotto forma di lezioni, attività, oggetti, ambienti, giochi...) che rendano migliore l'insegnamento della matematica.

La ricerca in didattica della matematica Didattica A e Didattica B



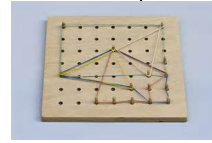
La logica sottintesa a tale interpretazione è:

ad un miglioramento del nostro insegnamento farà inevitabilmente riscontro un miglioramento dei risultati che potremo ottenere dai nostri allievi.

Appartengono a questo tipo di ricerca, che ha prodotto molti e utili risultati, ad esempio:

- la **matematica vivente** di Zoltan Dienes, in cui l'allievo "vive" la matematica e l'insegnante crea per lui ambienti favorevoli e strutturati e attività come giochi logici, giochi di movimento ecc. predisposti per acquisire determinati concetti in modo piacevole manipolando oggetti dialogando ecc.

- gli artefatti come il *parallelogramma articolato* di Emma Castelnuovo, o il *geopiano* o altre esperienze che si ispirano a Maria Montessori. I *numeri in colore (regoli)* di Galeb Gattegno, che sono regoli colorati per la rappresentazione visiva dei numeri naturali.
- Le aule attrezzate denominate *laboratori di matematica* (molto diffuse negli anni Settanta e Ottanta) e che contengono macchine elettriche per fare calcoli, macchine per la costruzione di curve e lo studio di trasformazioni geometriche, macchine logiche per studiare i connettivi ecc.
- il *minicomputer* di Georges Papy (per giochi di trasformazione da base due a base dieci)
- l'*abaco multibase* (adatto a far calcoli da passando da una base numerica all'altra,



per venire ad esempi più recenti,

- I *software didattici*,
- le *mostre didattiche*...

- Dunque appartengono alla didattica A tutti gli studi e le ideazioni di strumenti (concreti o no) che possono migliorare l'insegnamento della matematica
- Lo sforzo del didatta è sensibile all'allievo e lo pone al centro dell'attenzione ma la sua azione didattica è rivolta prevalentemente all'argomento in questione
- La didattica A può servire a risolvere problemi di grande importanza, come migliorare l'immagine della matematica, l'immagine di sé nel fare matematica, dunque l'autostima, migliorare l'attenzione, suscitare interesse e motivazione...



La Didattica della Matematica come *divulgazione delle idee*



- La concezione della didattica della matematica come *divulgazione delle idee* ha portato a risultati importanti.
- Molti ricercatori, seguendo questa impostazione, hanno brillantemente indicato agli insegnanti concrete possibilità di migliorare significativamente l'insegnamento attraverso sussidi innovativi, accorgimenti, attività (Emma Castelnuovo, Lucio Lombardo Radice,...),...
- La possibilità di presentare la matematica ai nostri allievi anche mediante riferimenti alla **Storia della Matematica** può essere inquadrata in questo tipo di impostazione della didattica.

Il “decalogo dell'insegnante” secondo George Polya



In questa concezione della didattica della matematica si può forse inquadrare anche il decalogo per gli insegnanti di matematica di George Polya (*La scoperta matematica*, trad. it.).



George Polya (1887 - 1985)

Il “decalogo dell’insegnante” (di matematica) di George Polya



Il seguente documento, di **George Polya**, è stato scritto diversi anni fa, ma contiene ancora una certa validità.

Oggi però l’insegnamento della matematica è cambiato molto...

La ricerca didattica relativa alla matematica sta attraversando un periodo di grande sviluppo.

Mai come negli ultimi anni ci si è dedicati all’indagine sui processi di apprendimento, mai prima d’ora sono caduti tanti principi considerati sacrosanti, si sono rovesciate convinzioni considerate inamovibili e sono cadute illusioni.

Un decalogo per l’insegnante



1. **Abbi interesse per la tua materia.**
2. **Conosci la tua materia. Conosci i modi secondo i quali si impara**
3. **Cerca di leggere sul viso degli studenti; cerca di capire le loro aspettative e le loro difficoltà; metti al loro posto.**
4. **Conosci i modi secondo i quali si impara: il migliore modo per imparare qualsiasi cosa è scoprirla da soli.**

...

G. Polya, La scoperta matematica

Vedi il sito: www.matematica.it/tomasi/

Un decalogo per l'insegnante



5. Dai loro non soltanto informazioni, ma anche “know-how”, attitudini mentali, abitudine al lavoro metodico (non dare solo definizioni, teoremi, dimostrazioni di teoremi, fornisci anche metodi e strumenti).
6. Fai loro imparare a congetturare.
7. Fai loro imparare a dimostrare.

....

G. Polya, La scoperta matematica

Un decalogo per l'insegnante



8. Cerca quegli aspetti del problema in questione che possono essere utili per problemi futuri, cerca di mettere in evidenza lo schema generale che sta dietro la situazione concreta presente.
9. Non rivelare subito il tuo procedimento, cerca di farlo *congetturare* dagli studenti prima di dirlo, fai loro scoprire da soli quanto più è possibile.
10. Suggerisci il tuo procedimento, ma non forzare gli allievi a seguirlo.

G. Polya, La scoperta matematica

Quali competenze e conoscenze per un insegnante di matematica ?



- Competenza nella disciplina
- Conoscenza degli aspetti storico-epistemologici della matematica
- Padronanza delle tecniche didattiche e docimologiche (misurazione e valutazione degli apprendimenti)
- Sensibilità psicologica
- Capacità comunicativa
- Marcato interesse per l'insegnamento
- Capacità di lavorare con gli altri.

Competenza nella disciplina



- Un insegnante di Matematica ha bisogno di una forte competenza disciplinare.
- Questo non significa però “cultura” ottenuta per banale accumulazione, bensì per approfondimento (anche e) soprattutto personale.
- L'insegnante dovrà conoscere la Matematica non solo grazie a corsi seguiti e ad esami superati all'Università, ma per ripensamento personale, per analisi e per ricostruzione critica.
- L'insegnante deve padroneggiare le basi della matematica e voler apprendere sempre più matematica... (matematica per l'insegnamento)

Che cos'è la Didattica della Matematica



È una disciplina che si è resa indipendente da non molto tempo (circa mezzo secolo...) e che si occupa, da un punto di vista scientifico, dell'insegnamento e apprendimento della Matematica a tutti i livelli scolari.

Si parte dall'assunto che per insegnare matematica non basta conoscere la Matematica, anche se questo è imprescindibile e fondamentale. La conoscenza della matematica è una **condizione necessaria, ma non sufficiente**, per poter insegnare.

Risultati della Didattica della Matematica



- C'è quindi differenza tra la Matematica e la Didattica della Matematica...
- La Didattica della Matematica è quella che in realtà si mette in gioco nell'aula e nella quale si mettono in evidenza le difficoltà, le interpretazioni, le immagini, gli ostacoli che porta con sé un certo concetto che si desidera insegnare e che allo stesso tempo si desidera che gli studenti apprendano.
- Il riconoscimento della natura dei concetti della matematica e la necessità di molti "registri" (numerico, simbolico, grafico,...) per rappresentare ciascuno di essi e poi per impossessarsene.

Altri temi della didattica della matematica



- Il riconoscimento dell'influenza (e della differenza) esistente tra la lingua comune e il linguaggio della matematica.
- Il riconoscimento della conoscenza matematica come fatto culturale
- L'accettazione di nuove teorie che pongono in forte relazione l'insegnamento e l'apprendimento come *l'ingegneria didattica* e la *trasposizione didattica*.

Aspetti della Didattica della Matematica



Diversi punti di vista nel considerare la Didattica della Matematica (B. D'Amore, Università di Bologna):

- *A – come ricerca sulla divulgazione delle idee matematiche, una teoria che si occupa (perlopiù) dell'**attività di insegnamento della matematica***
- *B – come ricerca sperimentale, che fissa l'attenzione sull'apprendimento, una teoria che si potrebbe chiamare **epistemologia dell'apprendimento della matematica***
- *C – come ricerca che si occupa dell'**epistemologia dell'insegnante**: la sua formazione, le sue convinzioni, il suo ruolo.*

La Didattica della Matematica tipologia A



Strumenti efficaci per ottenere questo possono essere:

- *la Storia della Matematica in aula*
 - *come strumento didattico*
 - *per far recepire che la Matematica non è statica, ma ha subito e subisce un'evoluzione, e viene costruita anche in funzione dei problemi dell'uomo*
 - *per dare l'idea che la Matematica è cultura...*

La Didattica della Matematica tipologia A



Un'altra metodologia che può essere inquadrata in questa idea della didattica della matematica è il Laboratorio di Matematica

- *come strumento didattico, che favorisce la costruzione dei concetti, mediante la costruzione e l'uso di oggetti*
- *per mostrare "quanta matematica" sia racchiusa nel mondo reale*
- *per migliorare l'immagine della Matematica rendendola più vicina alla vita quotidiana.*

La Didattica della Matematica tipologia A



Ma per alcuni didatti della matematica:

- *‘L’insegnamento come **semplice processo di istruzione**, appesantito da ipotesi sulla capacità dello studente di assorbire quel che gli si dice “bene”, non è una concezione: è un’illusione’.*

Limiti della Didattica della *Matematica di tipo A*



- rischio di fraintendimento (la conoscenza dello strumento, ad esempio di un software, scambiato con la matematica)
- esagerazione acritica nell'utilizzo degli strumenti e degli artefatti didattici
- eccessiva fiducia negli strumenti didattici
- mancanza di una verifica effettiva dell'apprendimento.

In particolare l'apprendimento in situazioni artificiali, costruite ad arte anche se stimolanti, non dà garanzia di una conoscenza generalizzata cioè in grado di essere applicata anche in situazioni diverse.

Ossia non avviene il **transfert cognitivo**, da una conoscenza artificiale appresa in un ambiente opportuno e specifico, alla capacità di produrre abilità cognitiva e procedurale in altre situazioni.

**Didattica della matematica come
Epistemologia dell'apprendimento
(nel senso di *Teoria della conoscenza*)**



- E' concentrata sul fenomeno dell'apprendimento, ma dal punto di vista dei fondamenti e dunque non accettando un unico modello di teoria dell'apprendimento.
- Nella didattica B **l'insegnamento e l'apprendimento** della matematica ma **sono il prodotto di un'attività organizzata e razionale.**
- L'insegnante e l'allievo possono (devono) riflettere continuamente sul proprio operato, per rendersi conto delle eventuali difficoltà, per capirne le radici e dunque per migliorare la situazione.
- Nella didattica B è necessario intervenire sulla struttura e sugli scopi della ricerca didattica, inserendo una *verifica empirica* che possa rendere evidenti gli effetti delle scelte dell'insegnante.

**Alcuni temi dibattuti nella
Didattica della matematica oggi**



- La visualizzazione
- I concetti figurati
- L'argomentazione
- La dimostrazione sulle attività di matematica in classe
- La verifica dell'apprendimento
- Teorie specifiche come: la didattica della geometria, la didattica dell'algebra, la didattica del calcolo delle probabilità, ...

La Didattica della Matematica tipologia B



La Didattica della Matematica di tipo B, secondo B. D'Amore (Università di Bologna) accentra l'attenzione sul fenomeno dell'apprendimento:

- la Didattica della Matematica studia come si costituiscono le conoscenze matematiche nell'allievo
- la Didattica della Matematica come **scienza sperimentale**:
 - formula ipotesi
 - le convalida o le confuta con esperimenti, indagini.

Il contributo alla Didattica della Matematica della "Scuola francese"



Un notevole contributo al consolidarsi della Didattica della Matematica secondo questa impostazione è stato dato dalla "Scuola francese" di didattica della matematica (in particolare negli anni Ottanta e Novanta) del secolo scorso che ha creato un vero e proprio "vocabolario", che poi è diventato comune, al quale chi si occupa di questa "disciplina" ha gradualmente aderito.

La Didattica della Matematica ha relazioni strette con il campo della psicologia dell'apprendimento.

La Didattica della Matematica tipologia B



- Una teoria dell'apprendimento matematico si basa sugli studi cognitivi
- L'assunto di base è che l'allievo costruisce in modo attivo una sua propria conoscenza interagendo con l'ambiente ed organizzando le sue costruzioni mentali.
- L'istruzione influenza ciò che l'allievo apprende, ma non determina tale apprendimento.
- L'allievo non si limita a recepire passivamente la conoscenza, ma la rielabora costantemente in modo autonomo.

Il costruttivismo nelle teorie dell'apprendimento



Questa linea, che si potrebbe ascrivere al “costruttivismo”, è quella più seguita attualmente da chi si occupa di teorie dell'apprendimento in matematica.

Il punto di vista “costruttivista” richiede l'assunzione di due “assiomi”:

- La conoscenza non è recepita passivamente, ma costruita attivamente dal soggetto che apprende.
- Conoscere è un processo di adattamento grazie al quale il soggetto che apprende organizza il proprio dominio di esperienze.

Il costruttivismo nelle teorie dell'apprendimento



La teoria del costruttivismo parla di «insegnamento» (procedure che hanno il fine di generare conoscenza; organizzazione dell'ambiente per favorire la costruzione di conoscenze) e non di «training» (procedure che hanno il fine di ottenere un certo comportamento; organizzazione dell'ambiente per favorire la messa in atto di un certo comportamento).

Il costruttivismo nelle teorie dell'apprendimento



I processi messi in atto dagli allievi diventano più importanti dei «prodotti».

Inoltre i processi degli allievi che deviano dalle aspettative degli insegnanti diventano sono dei segnali per interpretare il loro percorso di adattamento e fanno parte del percorso di costruzione delle conoscenze.

Cambia dunque il ruolo dell'errore (come si vedrà più avanti).

La Didattica della Matematica secondo Guy Brousseau



Guy Brousseau (1989) definisce la didattica della matematica come

“una disciplina che si interessa alla produzione e comunicazione delle conoscenze matematiche ed in che cosa questa produzione ha di specifico”.

Questa scienza ha come oggetto specifico di studio

- Le operazioni essenziali della diffusione delle conoscenze, le condizioni di questa diffusione e le trasformazioni che essa produce, sia sulle conoscenze sia sui suoi utilizzatori;
- Le istituzioni e le attività che hanno come scopo quello di facilitare queste operazioni.

La Didattica della Matematica il punto di vista sistemico



Brousseau considera il fenomeno insegnamento-apprendimento da un punto di vista **sistemico** e non come lo studio separato di ciascuno dei suoi componenti.

Ha allora senso descrivere un sistema didattico, formato da tre componenti:

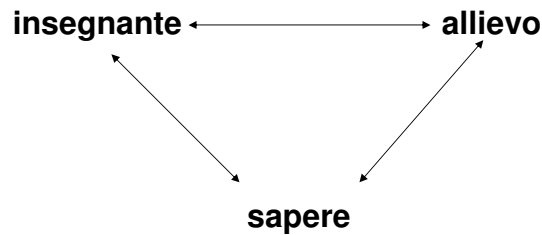
- insegnanti
- allievi
- sapere insegnato.

Ma naturalmente c'è un mondo esterno, la società in genere, i genitori, i matematici, ecc.

Il “triangolo della didattica”



Schema proposto da Yves Chevallard (1982) sulle situazioni di apprendimento.



Per “sapere” si intende quello ufficiale, universitario, quello che Chevallard chiama “savoir savant”; nel caso specifico della matematica è stato chiamato “sapere matematico”; si tratta del sapere della ricerca matematica, quello storicizzato, accademico.

Bibliografia



Vedi capitolo 3 del testo

-A. Baccaglini Frank, P. Di Martino, R. Natalini, G. Rosolini, *Didattica della Matematica*, Mondadori Università, Milano 2018.

Per strutturare meglio le idee, sono stati utilizzati i capitoli 1 e 2 del testo seguente:

- B. D'Amore, *Didattica della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna 2001.

Altri materiali sono stati ricavati da:

- B. D'Amore: *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna 2003

Un testo che a suo tempo è stato fondamentale è il seguente:

- E. Castelnuovo, *Didattica della matematica*, La Nuova Italia, Firenze 1963 (è stato ristampato nel 2017, UTET)



Possibile domanda ed esercitazione
sugli argomenti del 1 ° incontro (in presenza):

Attualmente si privilegia un approccio *costruttivista* alla conoscenza. Si chiarisca brevemente il significato di tale espressione e si espongano le possibili conseguenze di questa concezione nella prassi didattica.