Dalle funzioni ai modelli matematici e viceversa, con l'uso di *GeoGebra*

Luigi Tomasi (Insegnante di Matematica e Fisica - Università di Padova)
(articolo da *Alice & Bob* n.48, Esperienze didattiche 1, Centro Pristem-Università Bocconi, Milano 2017)

Premessa

In queste pagine si presenta un'esperienza didattica condotta in alcune classi terze di Liceo scientifico, riguardante i modelli matematici e l'attività di matematizzazione. Uno dei "leit-motiv" della *Indicazioni nazionali* di matematica per i Licei (presente anche nelle *Linee guida* per gli Istituti tecnici e per gli Istituti professionali) è proprio quello di modello matematico, proposto in vari contesti come uno dei concetti fondamentali. In particolare si propone *"la costruzione e l'analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo"* (Indicazioni nazionali per i Licei, 2010).
Queste indicazioni sono particolarmente significative e innovative ma presuppongono tempi e attività di laboratorio di Matematica adeguati, un rinnovamento dei libri di testo e soprattutto della prassi didattica, oltre a un'adeguata formazione degli insegnanti.
In questo articolo si propone un'esemplificazione di alcune attività didattiche sui modelli matematici e sulla matematizzazione che si prestano a essere sviluppate in una classe terza di scuola secondaria di II grado, con l'uso delle tecnologie e in particolare con il software GeoGebra.
Anche il quadro di riferimento INVALSI per la valutazione delle conoscenze e competenze matematiche, analogamente alle Indicazioni nazionali/Linee guida, pone attenzione, tra gli altri, sul seguente processo cognitivo: *"Utilizzare la Matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...)"* (Quadro di Riferimento INVALSI di Matematica, 2011).
Queste stesse competenze sono previste pure dalle indagini internazionali sugli apprendimenti matematici, come ad esempio nell'indagine OCSE PISA che, per quanto riguarda la rilevazione svolta nel 2012 per la Matematica, fornisce la seguente definizione: *"Per competenza matematica si intende la capacità di un individuo di utilizzare e interpretare la Matematica e di darne rappresentazione mediante formule, in una varietà di contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la Matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo"* (Framework di Matematica, OCSE PISA, 2012).
Il tema dei modelli matematici può dunque permettere un rinnovamento del curricolo di Matematica. Si tratta di un tema che si presta particolarmente ad essere svolto con l'aiuto delle tecnologie e dei software. In questo articolo si propone di utilizzare il software GeoGebra, per svolgere alcune attività di Matematica per la scuola secondaria di II grado, in stretto riferimento a quanto è contenuto nelle *Indicazioni nazionali* e nelle *Linee guida* di Matematica del 2010 per la scuola secondaria di II grado. GeoGebra è un software di Matematica dinamica per la didattica, che comprende Geometria, Algebra, Analisi, Statistica, Probabilità e molto altro. Date le sue caratteristiche, può essere integrato nell'insegnamento della Matematica nella scuola secondaria di II grado, in tutte le classi.

Contenuti matematici svolti

Il modello matematico di un fenomeno del mondo reale richiede un processo di matematizzazione che ha per obiettivo la descrizione di questo fenomeno. Un fenomeno può essere esaminato in modo da fare previsioni sulla sua evoluzione nel tempo. Si tratta di un tema dominante nello studio della Matematica e delle sue applicazioni. Partendo da alcuni problemi, con l'obiettivo della loro formalizzazione, si introducono concetti e strumenti matematici in modo più motivante per gli studenti.

Lo strumento fondamentale della modellizzazione matematica è costituito dalle *funzioni* in una o più variabili; nella scuola secondaria ci si occupa quasi esclusivamente di quelle in una variabile, che potrà essere *discreta* oppure *continua*. Quando le osservazioni mostrano che una quantità varia in dipendenza di altre, può sorgere la domanda se esiste una *relazione* che esprima questo legame. Una grandezza y (per esempio la temperatura, la posizione di un corpo in moto, il valore di un titolo, il costo di una telefonata...) varia al variare di una grandezza x (per esempio, il tempo). I modelli fondamentali sono il modello lineare, il modello quadratico, il modello potenza, il modello esponenziale, il modello sinusoidale.

La variazione di un fenomeno può essere descritta in modo *discreto:* la grandezza x assume i valori (con incrementi costanti) x_0, $x_0+\Delta x$, $x_0+2\Delta x$, $x_0+3\Delta x$, ... e per ciascun valore di x osserviamo e registriamo (ad esempio, in una tabella) il corrispondente valore di y. Riportiamo questi punti in un grafico ed esaminiamo il modello che meglio si adatta a questi punti. Il concetto matematico che serve per descrivere questa variazione è quello di successione. Le nozioni teoriche necessarie riguardano l'analisi della successione delle differenze prime o della successione delle differenze seconde (o di ordine più elevato). Si tratta di differenze *finite*, un tema molto importante ma purtroppo poco presente nei programmi e nei libri di testo.

Gli strumenti informatici permettono oggi di affrontare facilmente lo studio dei modelli matematici. Per lo studio si può usare il software GeoGebra che ha anche una ambiente di lavoro "Foglio di calcolo", integrato con gli altri ambienti del software, ad esempio con le viste "Algebra" e "Grafici" (cartesiani in due dimensioni).

Il software GeoGebra può essere utilizzato in modo molto efficace dal punto di vista didattico per lo studio di famiglie di funzioni – tramite l'uso di *slider* (parametri) – partendo da esempi del mondo reale riguardanti ad esempio tariffe o semplici problemi di scelta.

Il modello lineare

Sul modello lineare riportiamo alcuni esempi dalla prova INVALSI, 2011, Classe 2^ Secondaria di II grado che possono essere ripresi nell'ambito delle funzioni in una classe terza.

Prova INVALSI 2^ Superiore, 2011, domanda 11

D11. La relazione seguente esprime la spesa annuale per l'automobile, composta da una parte fissa e da una parte proporzionale al numero di km percorsi:

$$S = F + c \cdot k$$

dove F sono le spese fisse, c è il costo al km e k è il numero di km percorsi.

Nella tabella sono riportate le spese fisse e il costo al km per alcuni tipi di automobile.

	Auto A	**Auto B**	**Auto C**	**Auto D**
Spese fisse *F*	900 euro	580 euro	650 euro	1 200 euro
Costo al km *c*	0,25 euro/km	0,33 euro/km	0,27 euro/km	0,31 euro/km

a. **Se percorro 10 000 km all'anno, quale auto è più conveniente?**

☐ A. L'auto A

☐ B. L'auto B

☐ C. L'auto C

☐ D. L'auto D

b. **Il proprietario di un'auto di tipo A ha speso 3 000 euro in un anno. Quanti km ha percorso?**

Risposta: ……………………………….. km

c. **Se confrontiamo un'auto di tipo B con una di tipo D, possiamo dire che**

☐ A. è sempre più economico utilizzare l'auto di tipo B

☐ B. è sempre più economico utilizzare l'auto di tipo D

☐ C. l'auto di tipo B conviene fino a un certo numero di km annuali, oltre questo numero conviene l'auto di tipo D

☐ D. l'auto di tipo D conviene fino a un certo numero di km annuali, oltre questo numero conviene l'auto di tipo B

Esercitazione

Esprimere graficamente, usando GeoGebra la risposta alla domanda (a). Si tratta di una funzione? Che tipo di funzione? Esprimere con una disequazione (da interpretare anche graficamente) la risposta alla domanda (c).

Prova INVALSI 2^ Superiore, 2011, domanda 13

D13. L'insegnante di inglese dà ai suoi studenti un test formato da 25 domande e spiega che il punteggio totale *p* è calcolato assegnando 4 punti per ogni risposta esatta e togliendo 2 punti per ogni risposta sbagliata o mancante.

a. **Il punteggio massimo possibile è** ………………………

b. **Scrivi la formula che fornisce il punteggio *p* complessivo, indicando con *n* il numero di risposte esatte.**

p = ………………………………………

c. **Se la sufficienza si ottiene con più di 60 punti, qual è il numero minimo di domande al quale occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza?**

Risposta: ………………………

Esercitazione

- Esprimere graficamente, usando GeoGebra la risposta alla domanda (b).
- Il punteggio totale è una funzione? Che tipo di funzione?

- Esprimere con una disequazione (da interpretare anche graficamente) la risposta alla domanda (c).

Prova INVALSI 2^ Superiore, 2011, domanda 24
Per il noleggio giornaliero di un'automobile si può scegliere fra tre diverse tariffe:
- tariffa A: comporta una quota fissa di 30 euro e costa 0,25 euro al km percorso
- tariffa B: comporta una quota fissa di 10 euro e costa 0,60 euro al km percorso
- tariffa C: non ha una quota fissa, costa 0,40 euro al km percorso, però ha un vincolo minimo di 150 km, ovvero la spesa ha un costo minimo corrispondente a un percorso di 150 km.

Stabilire la tariffa più conveniente a seconda dei casi. Rappresentare le tariffe usando GeoGebra.

Questi quesiti, presentati con il software GeoGebra, permettono di introdurre un problema di scelta e di usare in un contesto significativo le funzioni lineari e gli argomenti di Algebra e di Geometria analitica collegati.
Altre modellizzazioni ricavate da situazioni reali sono quelle delle tariffe oppure delle aliquote IRPEF, in cui si usano delle funzioni "a gradini" o definite a tratti per modellizzare le situazioni che si presentano.

Funzioni "definite a tratti" (*piecewise functions*)
A volte una funzione non ha una sola espressione su tutto il suo dominio (talvolta anzi non ha nemmeno un'espressione, come la temperatura in funzione del tempo in un dato giorno).
Vediamo un esempio di funzione "definita a tratti" (in inglese, *piecewise functions*); in questo caso (aliquote IRPEF) si tratta di una funzione costante a tratti.

Esempio - Funzione a gradini - Redditi e aliquote IRPEF 2012

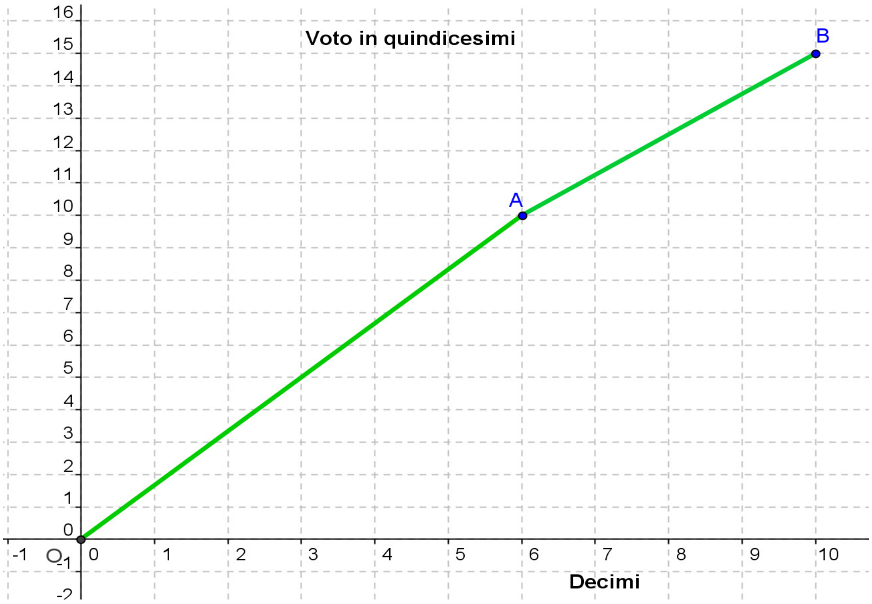
Nel sito del Ministero delle Finanze è possibile trovare le aliquote IRPEF (Imposta sui Redditi delle Persone Fisiche) sono le seguenti:

- redditi fino a 15 000 euro, aliquota al 23%;
- tra 15 000 e 28 000 euro, aliquota al 27% (più rapidamente: 3.450 + 27% della parte eccedente 15.000);
- tra 28 000 e 55 000 euro, aliquota al 38% (più rapidamente: 6.960 + 38% della parte eccedente 28.000);
- tra 55 000 e 75 000 euro, aliquota al 41% (più rapidamente: 17.220 + 41% della parte eccedente 55.000);
- oltre i 75 000 euro, aliquota al 43% (più rapidamente: 25.420 + 43% della parte eccedente 75.000).

Esercitazione
- Rappresentare graficamente la funzione tra l'imposta dovuta e il reddito imponibile.
- Se Giovanni ha un reddito annuale di 31.000 euro, quanto deve essere l'IRPEF che deve pagare (trascuriamo eventuali esenzioni).

Esempio. il voto da decimi a quindicesimi
All'esame di Stato di scuola secondaria di II grado, in base alla normativa, i voti nelle prove scritte sono in 15-esimi; la sufficienza (6 decimi) è quindi fissata a 10 quindicesimi e il voto 10 decimi diventa di 15 quindicesimi.

Si vuole costruire una funzione che permetta di trasformare velocemente il voto in decimi in quello in quindicesimi. Come possiamo definire questa funzione? Riportiamo in un grafico la situazione, supponendo un andamento "lineare a tratti".



Si vede che la funzione è lineare a tratti: il grafico è formato da due segmenti che si raccordano nel punto di coordinate (6,10). Il primo segmento (OA) appartiene alla retta di equazione $y=\frac{5}{3}x$ e il secondo segmento (AB) appartiene alla retta di equazione $y=\frac{5}{4}x+\frac{5}{2}$.

In GeoGebra per definire la funzione possiamo usare la struttura condizionale:

Se[<Condizione>, <Allora>]

oppure:

Se[<Condizione>, <Allora>, <Altrimenti>]

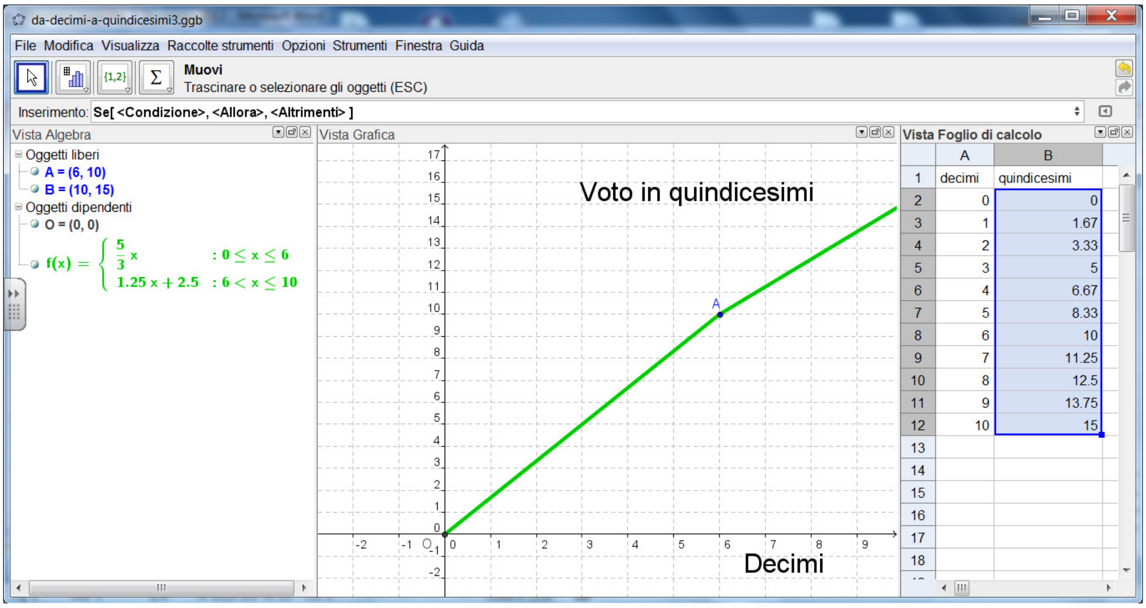
Scriviamo nella riga di inserimento:

Se[0 ≤ x ≤ 10, Se[x ≤ 6, (5/3)*x, 1.25*x + 2.5]]

Tale funzione si può scrivere nel seguente modo:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{5}{3}x & \text{se } 1\le x\le 6 \\ \frac{5}{4}x+\frac{5}{2} & \text{se } 6<x\le 10 \end{cases}$$

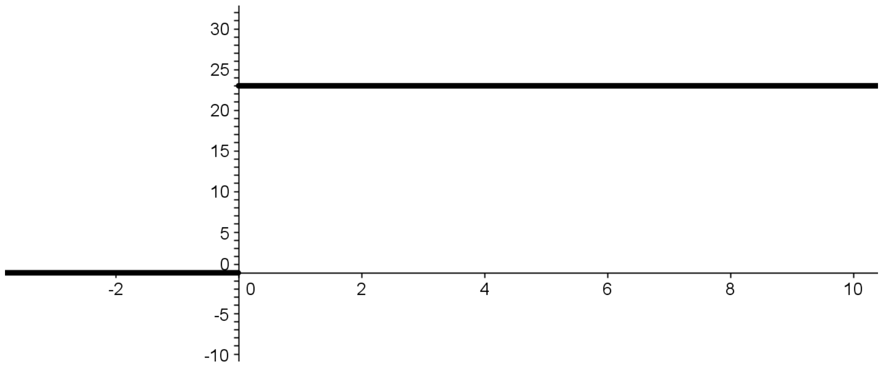
Costruire questa funzione con GeoGebra e tabularne i valori, come nella seguente figura. Usare la vista Foglio di calcolo e inserisci nella prima colonna i voti in decimi e sulla seconda colonna i voti in quindicesimi usando la funzione $f(x)$.



	A	B
1	decimi	quindicesimi
2	0	0
3	1	1.67
4	2	3.33
5	3	5
6	4	6.67
7	5	8.33
8	6	10
9	7	11.25
10	8	12.5
11	9	13.75
12	10	15

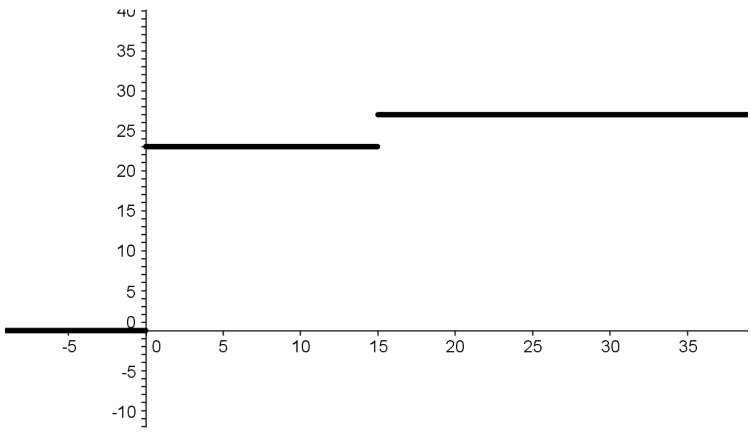
In GeoGebra per definire una funzione "a scalini" si procede con una serie di condizioni "se…, allora …, altrimenti…". Ad esempio, se definiamo la funzione

`f(x)=Se[x<0, 0, 23],` se "x<0, allora 0, altrimenti 23"; in questo caso si ha un solo scalino ed il grafico è il seguente:



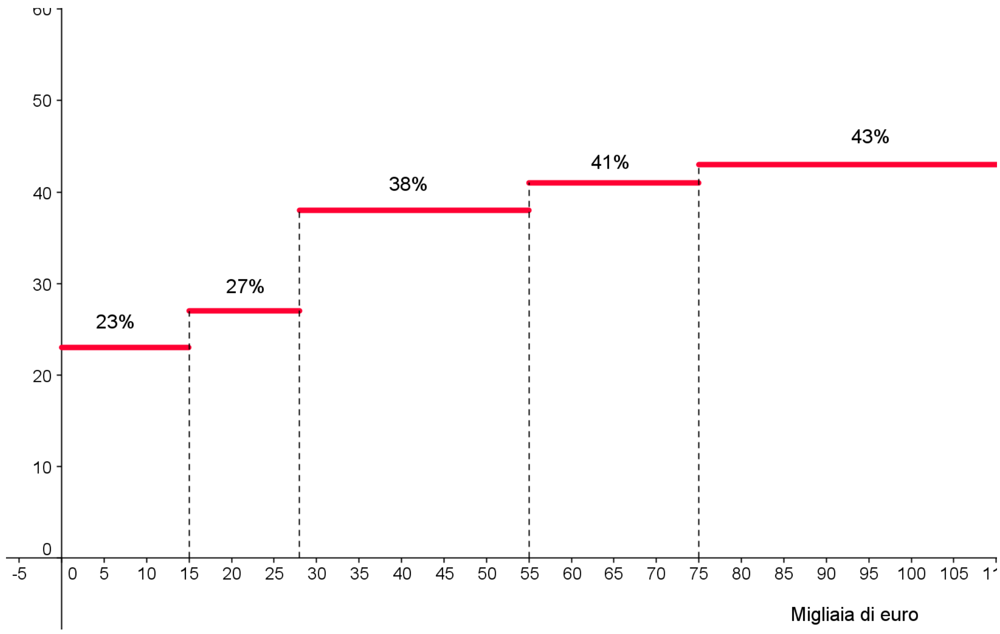
Se vogliamo creare due scalini (due scaglioni di reddito):

`Se[x<0, 0, Se[0≤x≤15, 23, 27]]`



e così via.

La funzione IRPEF presente nel grafico riportato qui di seguito si può definire, $x \geq 0$,e ottenere con diverse condizioni "nidificate" una dentro l'altra:



Aliquote IRPEF 2012

Esempio - Funzione a gradini - Tariffe dell'acqua

Nel sito della azienda che gestisce l'acquedotto di una certa città si trova questa tabella che riporta le tariffe aggiornate per il consumo dell'acqua per uso domestico:

Uso domestico acquedotto - in vigore dal 01.01.2012 Residenti: quota fissa mensile € 15,75		
	Consumo (m^3/mese)	**€/ m^3**
Essenziale	<= 5	0,33
Agevolata	6 - 9	0,71
Base	10 - 12	1,03
1^ Eccedenza	13 - 16	2,10
2^ Eccedenza	> 16	2,26

Esercitazione

- Modellizzare la tariffa dell'acqua e rappresentare graficamente (con GeoGebra) il prezzo dell'acqua in funzione dei metri cubi consumati.
- Rispondere alla seguente domanda: se una famiglia consuma in un mese 15 m^3, quanto deve pagare di bolletta mensile?

Il modello quadratico

Analogamente a quanto fatto per le funzioni lineari, con l'uso di GeoGebra sono stati presentati in classe problemi riguardanti il modello quadratico in contesti significativi (per esempio, si è proposto lo studio dell'area di rettangoli isoperimetrici, dello spazio di frenata di un'auto, della forma dello zampillo di una fontana ecc.). In questo paragrafo, esaminiamo alcuni problemi che sono stati analizzati tramite un modello quadratico, cioè tramite una funzione polinomiale di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, il cui grafico ($a \neq 0$) è una parabola con asse parallelo all'asse y e vertice nel punto di ascissa $x_V = -\dfrac{b}{2a}$. Il vertice è un punto di minimo (oppure di massimo) se $a > 0$ (rispettivamente $a < 0$).

Esercitazione (con GeoGebra). Una prima esercitazione con GeoGebra serve per far scoprire il ruolo dei singoli parametri *a, b, c* nella funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$. A tal fine si creano tre *slider* (da chiamare rispettivamente *a, b, c*). Facendo variare questi parametri, si scopre in modo dinamico il ruolo del parametro *a*, quello del parametro *b* e quello del parametro *c* (una traslazione).

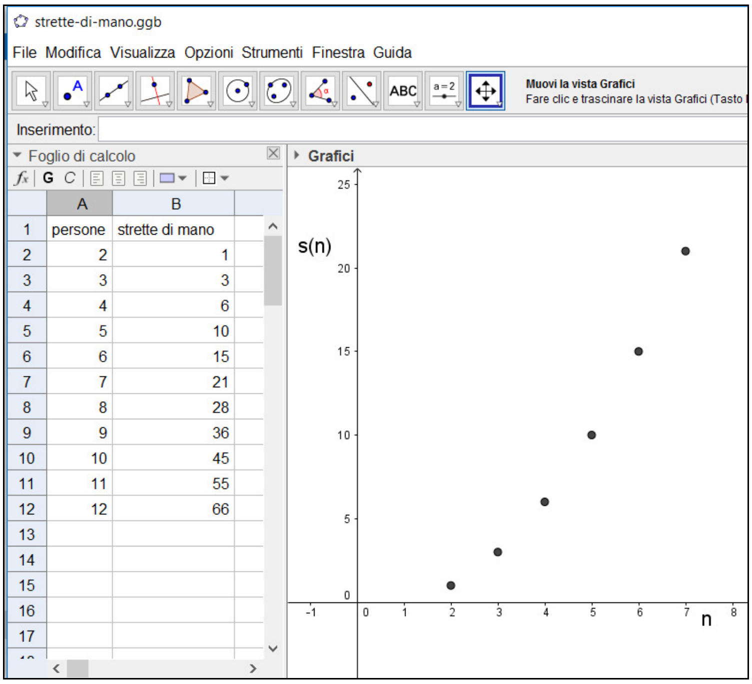
Esercitazione (con GeoGebra). Si vuole far scoprire il ruolo dei parametri *a, h, k,* nella funzione $f(x) = a(x-h)^2 + k$, creando tre *slider* (uno per *a,* uno per *h* ed uno per *k*). In questo caso *h* e *k* costituiscono le coordinate del vertice della parabola e converrà usare questa formula quando si conosce già il vertice della parabola. Per comprendere questo modello occorre conoscere le trasformazioni geometriche per ottenere questa espressione da $f(x) = ax^2$ o più semplicemente da $f(x) = x^2$.

Esempio – Numero delle strette di mano tra i partecipanti a una festa

Quante strette di mano devono darsi *n* persone che partecipano a una festa?
Iniziamo a compilare una tabella, dove abbiamo indicato con $s(n)$ il numero di strette di mano tra *n* persone.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
s(n)	0	1	3	6	10	15	21	28

La tabella è stata costruita nel seguente modo: se c'è una sola persona, il numero di strette di mano sarà 0; se arriva una seconda persona, il numero di strette di mano sarà 1; con 3 persone il numero di strette di mano sarà 3. Quanto vale *s*(4)? Possiamo immaginare che arrivi la quarta persona, dopo che le prime tre si sono già salutate; per completare il giro la quarta persona deve dare la mano alle altre tre. La quinta deve dare la mano alle altre 4, e così via.
Come facciamo a riconoscere che l'andamento non è lineare? Riportiamo questi punti in un grafico e vediamo che i punti non stanno su una retta.



La successione delle *differenze prime* (le differenze prime sono date da $\Delta s = s(n+1) - s(n)$) non è costante, ma è crescente.

n	1	2	3	4	5	6	7	8

s(n)	0	1	3	6	10	15	21	28
Δs		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**

Di che relazione si tratta? Si osserva che Δs è crescente linearmente (con pendenza 1) e dunque le differenze seconde $\Delta(\Delta s)$ sono costanti.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
s(n)	0	1	3	6	10	15	21	28
Δs		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Δ(Δs)		**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

Le uniche successioni che hanno questa proprietà, cioè di avere le differenze seconde costanti (e non nulle), sono quelle quadratiche. Consideriamo una funzione quadratica (discreta): $f(n) = an^2 + bn + c$. Si ha allora $\Delta f = f(n+1) - f(n) = 2an + a + b$.

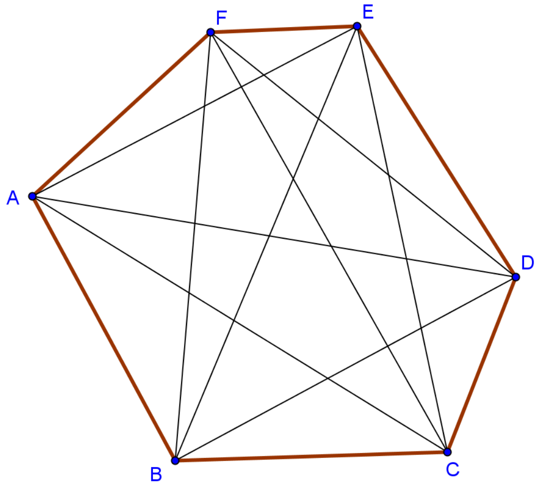
In questo problema la pendenza della successione delle differenze prime è 1 e l'intercetta è -1; dunque deve essere $2a = 1$ (che fornisce a = 1/2) e $a + b = -1$ (che fornisce $b = -1/2$). La soluzione del problema delle strette di mano è pertanto:

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n-1).$$

Il modello è quindi quadratico perché dipende dal quadrato del numero *n* dei partecipanti alla festa. I punti $(n, s(n))$ stanno dunque sul grafico di una parabola. L'equazione di questa parabola (discreta) può essere facilmente trovata con GeoGebra: scrivere in un foglio di calcolo i punti $(n, s(n))$ e poi usare Analisi di regressione bivariata e scegliere come Modello di regressione ->Polinomio.

Il modello del problema delle strette di mano è un modello quadratico. Se i partecipanti a una festa sono pensati come vertici di un poligono, la funzione trovata corrisponde al numero dei lati sommato con il numero delle diagonali, oppure direttamente come il numero di segmenti che si possono disegnare dati *n* punti, a tre a tre non allineati. Si ha infatti:

$$n.lati + n.diagonali = n + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{2n + n^2 - 3n}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$



Questo numero è il numero delle combinazioni a partire da n oggetti, presi a due a due (non conta l'ordine) dato da $\binom{n}{2}$.

In generale le successioni polinomiali di grado n hanno le differenze n-esime costanti (non nulle). In altri termini: per una successione polinomiale di grado n la successione delle differenze prime è un polinomio di grado $n-1$. Quella delle differenze seconde è un polinomio di grado $n-2$, e così via.

Esempio - Spazio di frenata di un'auto

Riportiamo qui di seguito il problema dello spazio di frenata di un'auto, da esaminare con l'uso del software.

Secondo la rivista americana "Car and Driver" un'auto che procede a 70 mil/h (circa 112,7 km/h) impiega circa 54 metri per frenare e fermarsi, con la strada in condizioni normali.

Il Ministero dei Trasporti italiano ha fornito un modello semplificato secondo cui, assunto pari ad 1 secondo il tempo di reazione, lo spazio totale di arresto (in metri) di un autoveicolo dipende all'incirca dal quadrato della velocità (in km/h) secondo la formula: $s(v)=\dfrac{v^2}{250f}$*, dove f si chiama coefficiente di aderenza e dipende dalle condizioni del manto stradale secondo la tabella seguente.*

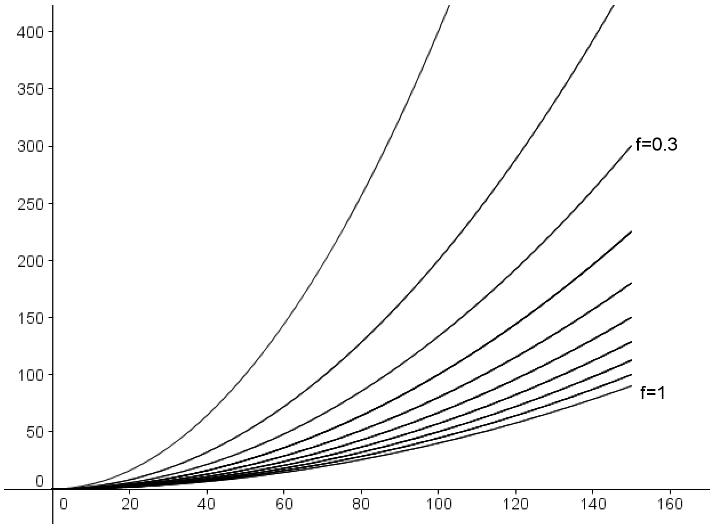
Il parametro *f* si chiama coefficiente di aderenza e dipende dalle condizioni del manto stradale, come è fornito dalla seguente tabella.

Coefficienti di aderenza	*f*
Strada asfaltata asciutta con fondo granuloso	0,8
Strada asfaltata ruvida	0,6
Strada asfaltata liscia	0,5
Strada asfaltata bagnata	0,4
Strada con fanghiglia	0,3
Strada ghiacciata	0,1

(problema tratto da P. Brandi e A. Salvadori, *Modelli matematici elementari,* B. Mondadori, Milano 2004, p. 160).

Esercizio: Esaminare il modello usando il software ipotizzando diversi valori di *f.*

Confrontiamo lo spazio totale di arresto al variare dei coefficienti di aderenza, innanzitutto per via grafica.
Costruiamo con *GeoGebra* uno *slider* da chiamare f (valori da 0.1 a 1, incremento 0.1) e scriviamo la funzione.
Che tipo di grafici si ottengono? Si ottengono degli archi di parabola con vertici comune nell'origine, via via "più ripide" al diminuire del valore di *f*.



Asse *x*: velocità in km/h   Asse *y*: spazio di frenata in m.

Perché se *f* diminuisce, allora l'arco di parabola deve diventare più ripido? Per un confronto più significativo riportiamo qui sotto una tabella con i valori dello spazio di arresto in metri, calcolati in corrispondenza alle velocità di 90 km/h e di 130 km/h.

	Spazio totale di frenata (in metri)	
f	v = 90 km/h	v = 130 km/h
0,8	40,5	84,5
0,6	54	112,6
0,5	65	135,2
0,4	81	169
0,3	108	225,3
0,1	324	675

Dalla tabella si osserva che, a parità di velocità, lo spazio di frenata è inversamente proporzionale al coefficiente f (con GeoGebra disegnare il grafico dello spazio di frenata rispetto ad f: supporre velocità costante, ad esempio, 90 km/h).

Il modello potenza

Già il modello quadratico nella sua forma più semplice $f(x) = k\,x^2$ è un modello potenza. Tuttavia, può essere generalizzata ed esaminata la famiglia di funzioni $f(x) = k\,x^n$ (*n* intero) con GeoGebra. Possibili esempi: caduta dei gravi (*h* in funzione di *t*); la legge dell'inverso del quadrato (gravitazione universale; forza elettrica); indice di massa corporea, la terza legge di Keplero ecc. Presentiamo un paio di esempi in modo sintetico.

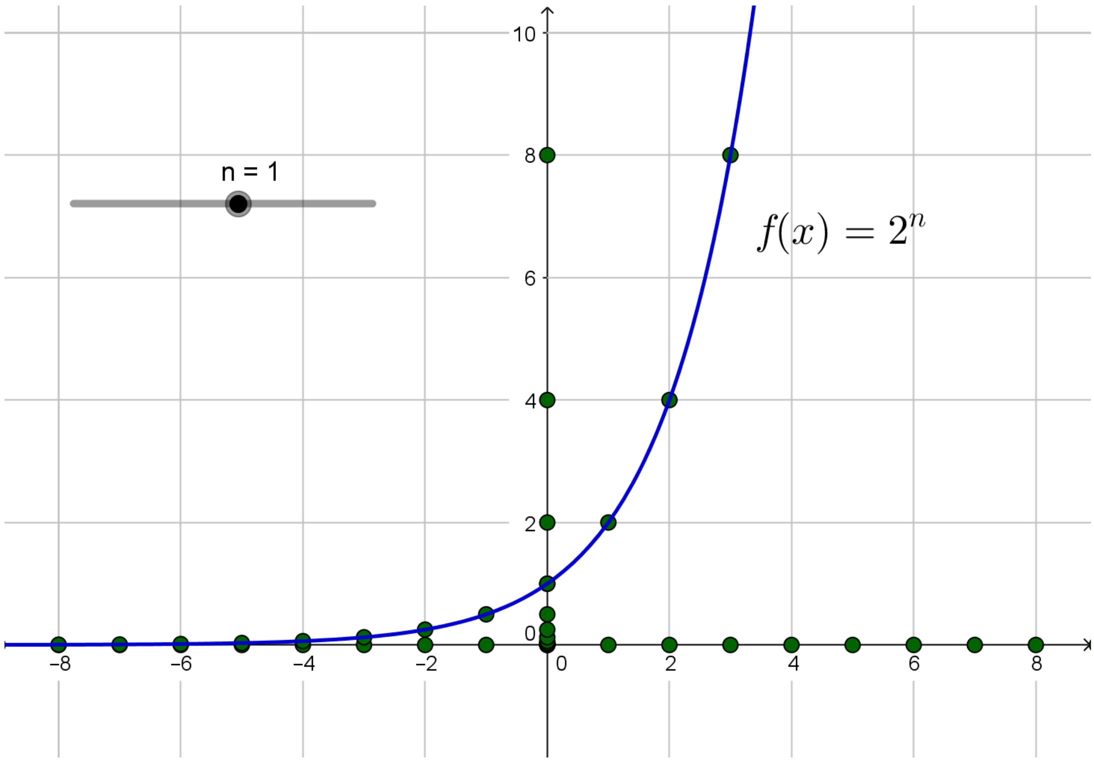
Esempio – Indice di massa corporea (IMC)

L'indice di massa corporea è definito dalla formula $IMC = \frac{m}{h^2}$, dove m è la massa di una persona misurata in kg e h è l'altezza misurata in metri. Si tratta di una legge potenza; se consideriamo due individui con la stessa massa, si ottiene una legge dell'inverso del quadrato dell'altezza.
Esercizio: Usando GeoGebra disegnare una famiglia di curve al variare del parametro *m.* Un individuo è ritenuto obeso se l'indice di massa corporea è maggiore di 30 ed è invece considerato sottopeso se l'IMC è minore di 18,5. Disegnare nel grafico le rette di IMC=30 e di IMC=18,5.

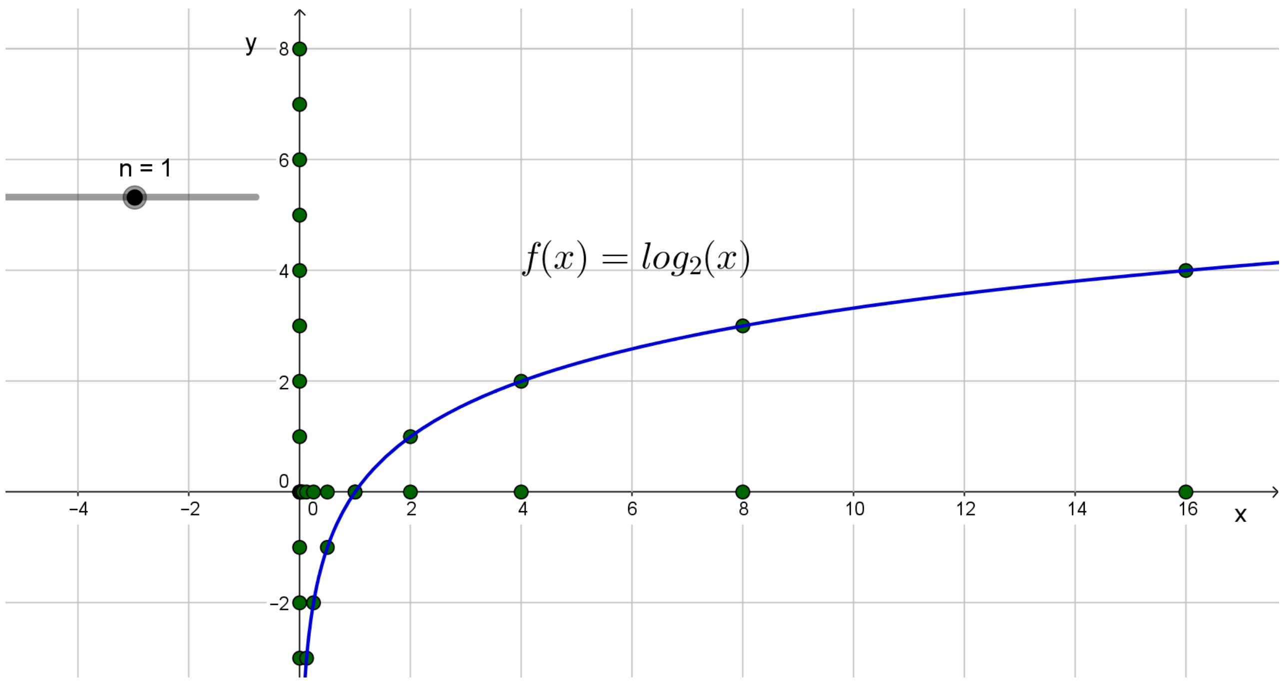
Esempio – Tempo di rivoluzione dei pianeti intorno al Sole (funzione "potenza")
Inserire in una tabella le distanze medie (in milioni di km) e il tempo di rivoluzione intorno al Sole (in milioni di secondi) dei pianeti principali del sistema solare.
Rappresentare i punti usando il foglio di calcolo di GeoGebra. Trovare la curva potenza che meglio passa per i punti dati. Si trova una potenza con esponente 1,5, che corrisponde alla terza legge di Keplero, ovvero "Il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo della distanza media dal Sole": $T^2 = K\, a^3$. Si ottiene quindi una funzione $T = k\, a^{3/2}$, una legge potenza con esponente 3/2.

Il modello esponenziale discreto e continuo
Nell'ambito dell'esperienza didattica è stato successivamente proposto un percorso verso le funzioni esponenziali, esaminando crescite di diverso tipo. Il software GeoGebra permette di proporre in classe alcuni modelli discreti di crescita (o decrescita) di una popolazione, usando la possibilità di iterare una funzione. In questo modo si possono studiare la crescita aritmetica (modello lineare discreto), la crescita geometrica (modello esponenziale discreto), come cresce un capitale depositato in banca e il modello di crescita logistica. Per esaminare i diversi tipi di crescita si può consultare l'attività "Ognuno cresce a modo suo" (Piano m@t.abel, sul sito dell'INDIRE).
Inizialmente è stato proposto lo studio delle progressioni aritmetiche e di quelle geometriche. Per queste ultime si è esaminata la crescita del capitale ad interesse composto per poi passare allo studio della dinamica di una popolazione.

Progressioni aritmetiche e progressioni geometriche
Discutiamo brevemente il legame fondamentale esistente tra le progressioni aritmetiche e le progressioni geometriche.
Consideriamo la più semplice progressione aritmetica: 0, 1, 2, 3, 4, 5,………….., *n*, ………………… (*) e la progressione geometrica formata dalle potenze di base 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... (**) che possiamo scrivere come $2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6, ..., 2^n, ...$
La funzione che trasforma la progressione aritmetica (*) nella progressione geometrica (**), si chiama funzione esponenziale: $f(x) = 2^x$.
Come si vede, la progressione aritmetica di ragione 1, è stata trasformata nella progressione geometrica di ragione 2. Nella figura riportata di seguito, sull'asse delle ascisse i punti rappresentano una progressione aritmetica, mentre sull'asse delle y i punti rappresentano una progressione geometrica.



Generalizzando, la progressione aritmetica: $a_0,\ a_0+d,\ \ a_0+2d,\ a_0+3d,\ a_0+4d,\ \ldots..,\ a_0+nd,\ldots$
si trasforma nella progressione geometrica:
$2^{a_0},\quad 2^{a_0}\cdot 2^{d},\quad 2^{a_0}\cdot 2^{2d},\ 2^{a_0}\cdot 2^{3d},\ 2^{a_0}\cdot 2^{4d},\ \ldots..,\ 2^{a_0}\cdot 2^{nd},\ldots$
che si può scrivere anche come: $b_0,\quad b_0\cdot q,\quad b_0\cdot q^2,\ b_0\cdot q^3,\ b_0\cdot q^4,\ \ldots..,\ b_0\cdot q^n,\ldots$ dopo aver posto $b_0 = 2^{a_0}$ e $q = 2^d = \textit{ragione}$.
Quindi le funzioni esponenziali trasformano progressioni aritmetiche in progressioni geometriche.
Viceversa, se partiamo da una progressione geometrica: $2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ \ldots..,\ 2^n,\ldots$
e vogliamo ottenere la successione degli esponenti: 0, 1, 2, 3, 4, 5,………, *n*, … dobbiamo usare la funzione inversa dell'esponenziale, che si chiama funzione logaritmo (in questo caso in base 2), $f(x) = \log_2(x)$.
Quindi si ottiene la successione
$\log_2\left(2^0\right),\ \log_2\left(2^1\right),\ \log_2\left(2^2\right),\ \log_2\left(2^3\right),\ \log_2\left(2^4\right),\ \log_2\left(2^5\right),\ \ \ldots..,\ \log_2\left(2^n\right),\ldots$
ovvero 0, 1, 2, 3, 4, 5,………, *n*, …
Pertanto le funzioni logaritmiche trasformano una progressione geometrica (a termini positivi) in una progressione aritmetica. Nella figura riportata di seguito, sull'asse delle ascisse i punti rappresentano una progressione geometrica mentre i punti sull'asse delle y rappresentano una progressione aritmetica.



Per introdurre le progressioni geometriche, dapprima è stato introdotto il concetto di funzione composta (e di iterazione di una funzione), esaminando in particolare la capitalizzazione composta.

Esempio - Capitale in banca e interesse composto

Per introdurre le successioni geometriche, siamo partiti dal seguente problema.

Problema. Consideriamo un capitale di 1000 € e supponiamo di depositarlo in banca al tasso di interesse composto del 4%. In quanti anni circa raddoppia?

Lo stato del conto in banca è determinato da un numero, il valore del saldo, espresso in euro. Per conoscere il valore di tale grandezza si deve sapere la regola con cui cambia il suo stato nel tempo.

Supponiamo che la capitalizzazione degli interessi del conto avvenga a scadenza annuale (trascuriamo le spese, il bancomat, le carte di credito, le imposte…). Il tempo per questo sistema è una variabile discreta, cioè una successione di "istanti" separati uno dall'altro da un intervallo di un anno. Se conosciamo il tasso di interesse annuo del conto, diciamo *r* % (ingl. *r*=*rate*), possiamo scrivere la funzione che governa l'evoluzione del sistema.

Indicato con x_t, il saldo all'istante *t*, abbiamo il saldo all'istante successivo $x_{t+1} = \left(1+\frac{r}{100}\right)x_t$, con la condizione iniziale del conto (per $t = 0$) che indicheremo con $x_0 = D$, dove *D* è il deposito iniziale. Calcoliamo l'ammontare del saldo alla fine dell'*n*-simo annodi impiego del capitale:

$$x_1 = \left(1+\frac{r}{100}\right)D$$

$$x_2 = \left(1+\frac{r}{100}\right)x_1 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^2 D$$

$$x_3 = \left(1+\frac{r}{100}\right)x_2 = \left(1+\frac{r}{100}\right)^3 D$$

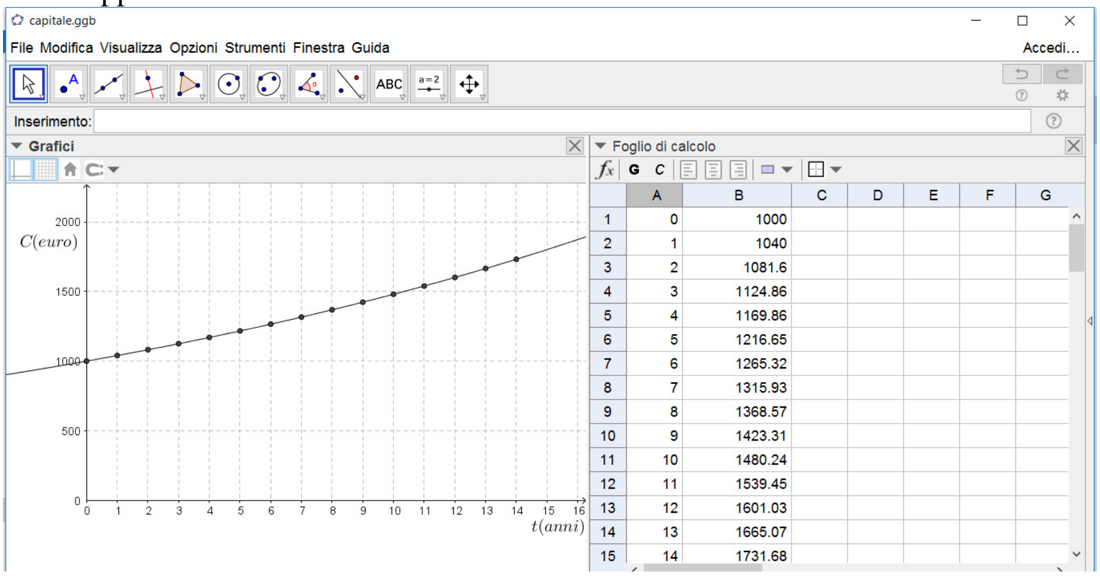
...

$$x_n = \left(1+\frac{r}{100}\right)^n D.$$

Si ottiene una progressione geometrica di ragione $q = 1 + \frac{r}{100}$. Il rapporto $\frac{r}{100}$ viene indicato con i e si chiama *tasso di interesse unitario* (ossia, riferito a 1 euro); ad esempio, se r=4%, allora il tasso unitario è i=0,04. Possiamo pertanto scrivere:

$$C_n = D \cdot (1+i)^n .$$

Esercitazione. Rappresentare in un grafico con GeoGebra la crescita del capitale e determinare il tempo di raddoppio.

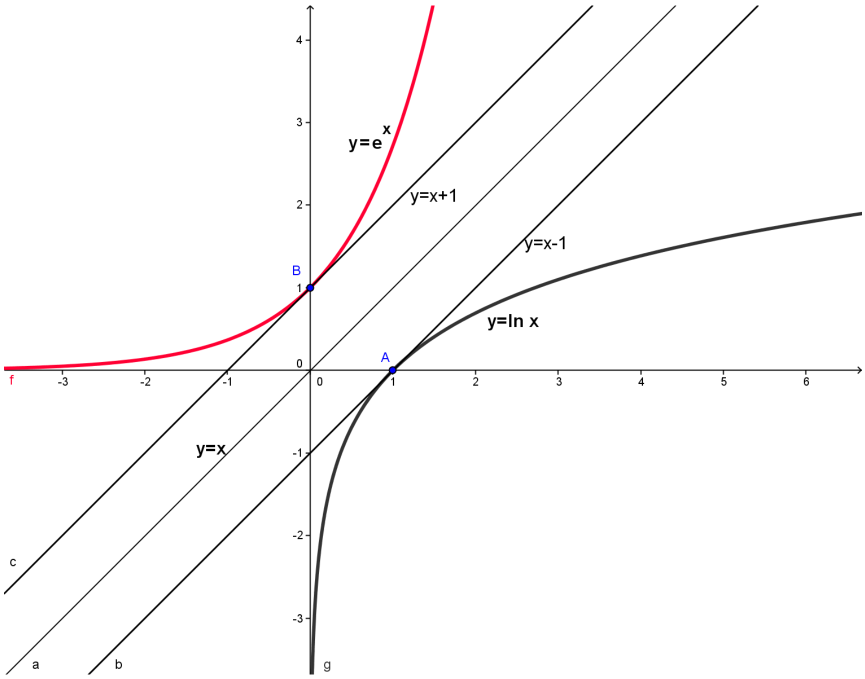


Esempio – Crescita di una popolazione di batteri

Con GeoGebra, visualizzare graficamente l'andamento di una popolazione di batteri. In genere in un ambiente di coltura la popolazione cresce, in ogni istante, in modo proporzionale al numero di batteri stessi. Fissare inizialmente una crescita percentuale del 20% per ogni ora.
Problema: Se inizialmente ci sono 1000 batteri, qual è l'evoluzione della popolazione nel tempo?

Esempio - Crescita della popolazione mondiale

Si stima che la popolazione mondiale alla fine del 2011 abbia raggiunto i 7 miliardi e che il tasso di crescita annuale sia circa dell'1,3%.
In quale anno la popolazione mondiale, se si ipotizza lo stesso tasso di crescita media, raggiungerà i 10 miliardi?
Usando GeoGebra, disegnare i grafici di funzioni esponenziali e funzioni logaritmiche, mettendone in evidenza le proprietà.
Finora abbiamo usato la base 10 e i logaritmi in base 10. La base più importante in matematica e nelle applicazioni è il numero di Nepero (e=2,718281…). Per introdurre il numero di Nepero introducendo una capitalizzazione frazionata, in periodi costanti decrescenti (semestrale, quadrimestrale, trimestrale, …, mensile, giornaliera, …) fissando un capitale iniziale di 1 euro, e un tasso di interesse annuale del 100%. Si ottiene la successione: 2, $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$, …., $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,… che lentamente si avvicina al numero di Nepero.

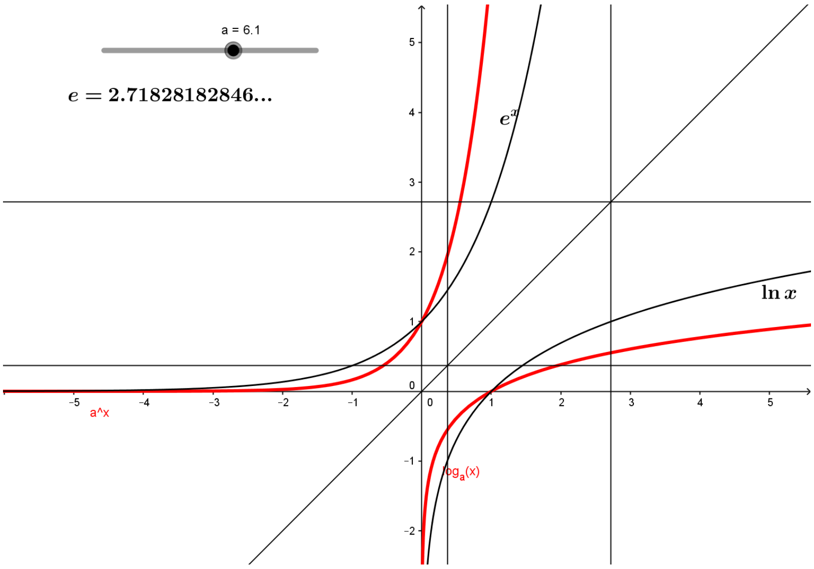


La funzione *inversa* della funzione esponenziale $f(x) = e^x$ (di base il numero *e*=2,718281… di Nepero) è la funzione $g(x) = \ln x$ (il logaritmo in base *e,* detto anche *logaritmo naturale*). I grafici delle due curve sono tra loro simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

Il dominio della funzione esponenziale (l'insieme dei numeri reali) coincide con il codominio della funzione logaritmica e, viceversa, il codominio della curva esponenziale (reali positivi) diventa il dominio della funzione logaritmica. Si può dimostrare che la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^x$ nel suo punto (0, 1) ha equazione $y = x + 1$ (la pendenza di questa retta è *m*=1). Questa proprietà caratterizza la funzione esponenziale $f(x) = e^x$. Per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, la retta tangente al grafico della funzione $g(x) = \ln x$ nel suo punto (1, 0) ha per equazione $y = x - 1$ (la pendenza di questa retta è *m*=1).

L'introduzione della curva esponenziale e dei logaritmi permette poi di affrontare lo studio di diversi problemi presi dal mondo reale o dalla Fisica, ad esempio lo studio di come varia la pressione atmosferica rispetto all'altezza (in km) dal livello del mare.

Dopo queste attività si passa alla curva esponenziale e allo studio della famiglia di curve $y = a^x$ (creando uno *slider* per *a*) e delle relative funzioni inverse $y = \log_a x$.



Riflessioni, commenti e conclusioni

Negli esempi presentati è stato proposto un approccio dinamico e interattivo ad alcuni temi di Matematica per la scuola secondaria di II grado, prevalentemente nella classe terza, con l'uso del software GeoGebra seguendo quanto è suggerito dalle *Indicazioni nazionali* e dalle *Linee guida.* Le potenzialità e la versatilità del software rendono possibile un approccio laboratoriale all'insegnamento e all'apprendimento della Matematica. Le caratteristiche implementate nel software consentono di proporre attività di scoperta di proprietà, di visualizzazione dinamica e di modellizzazione per quasi tutti i temi di Matematica. Queste caratteristiche delle nuove tecnologie possono permettere un insegnamento e un apprendimento fondati maggiormente sugli aspetti intuitivi e costruttivi dei concetti.

Bibliografia e sitografia

AA.VV., *Esplorazioni matematiche con GeoGebra*, a cura di O. Robutti, Ledizioni, Milano 2013.

Brandi P. e Salvadori A., *Modelli matematici elementari*, B. Mondadori, Milano 2004, p. 160

INVALSI, *Quadro di Riferimento - Secondo ciclo di istruzione - Prova di matematica*, 2012 https://invalsi-areaprove.cineca.it/docs/file/QdR_Mat_II_ciclo.pdf

Impedovo M., "Rinnovare i piani di studio di matematica", in *Nuova Secondaria*, n.6, 2006.

OECD (2013), PISA 2012*, Quadro di Riferimento analitico per la Matematica, la Lettura, le Scienze, il Problem Solving e la Financial Literacy.* Traduzione italiana di questo documento nel sito INVALSI: www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012.php?page=pisa2012_it_06

Piano m@t.abel di formazione dei docenti di Matematica. Vedi il sito dell'INDIRE: http://www.scuolavalore.indire.it/superguida/matabel/

MIUR-UMI-SIS (2004), *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Scuola Secondaria di secondo grado*. Lucca: Liceo Vallisneri.

Tomasi L. (2011), "La matematica nel riordino della Scuola secondaria di II grado del 2010: osservazioni e considerazioni didattiche", *Progetto Alice.* I, XII, 34, pp. 159-186.