FAMIGLIE DI FUNZIONI

Fosco Loregian A-26

La forma più generale in cui si scrive l'equazione di una conica nel piano affine è

$$\mathcal{C}_{\vec{a}}(X,Y) : a_{00} + a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{12}XY + a_{01}X + a_{02}Y = 0$$

al variare della tupla di valori $(a_{00}, \dots, a_{22})$ in $\mathbb{R}^6$; la conica si può rappresentare comodamente come una matrice

$$\left(\begin{array}{c|cc} 2a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ \hline a_{01} & 2a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & 2a_{22} \end{array}\right)$$

e alcune quantità algebriche associate a questa matrice informano sulle proprietà geometriche della conica che definisce (per esempio, la conica è degenere se, e solo se, $\det A = 0$).

La classificazione delle coniche ora si fa studiando il segno di una sottomatrice particolare, quella data dal minore $(1,1)$ della matrice in oggetto: si tratta della quantità $\Delta := -\det A' = a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}$, che incidentalmente coincide col discriminante del polinomio omogeneo

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{12}XY$$

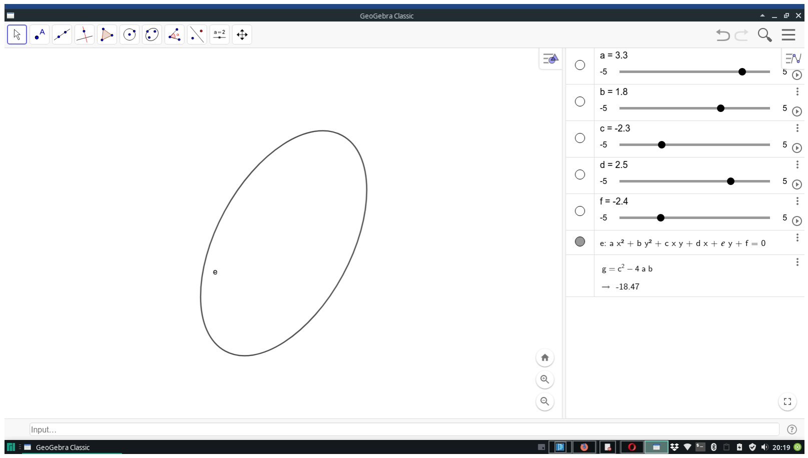
ottenuto come la parte quadratica di $\mathcal{C}_{\vec{a}}(X,Y)$.

Al variare dei coefficienti in $\vec{a}$, la conica $\mathcal{C}_{\vec{a}}$ rappresenta i vari tipi di coniche:

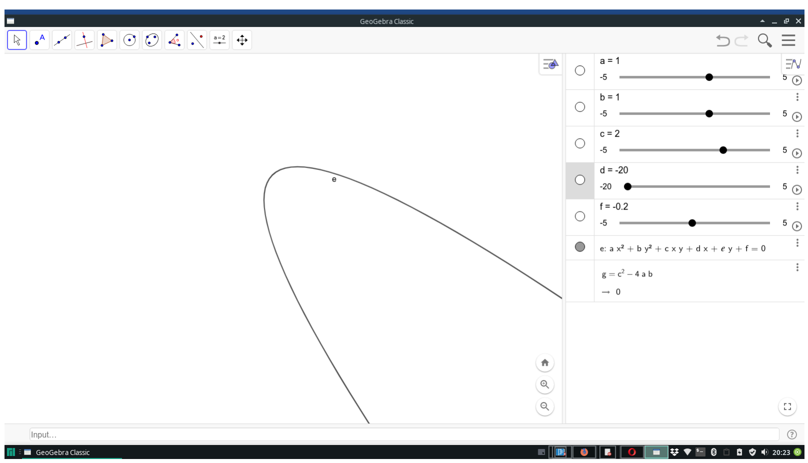
- Quando la conica è degenere,
  - Una coppia di rette incidenti quando $\Delta \neq 0$;
  - Una coppia di rette coincidenti quando $\Delta = 0$.
- Quando la conica è non degenere,
  - un'iperbole se $\Delta < 0$;
  - un'ellisse se $\Delta > 0$;
  - una parabola se $\Delta = 0$.

Rappresentare graficamente la generica conica $\mathcal{C}_{\vec{a}}(X,Y)$ nel piano di `geogebra` permette di apprezzare che il passaggio da una conica a centro a una parabola, e tra una conica a punti ellittici e una a punti iperbolici avviene con continuità nel parametro Δ:

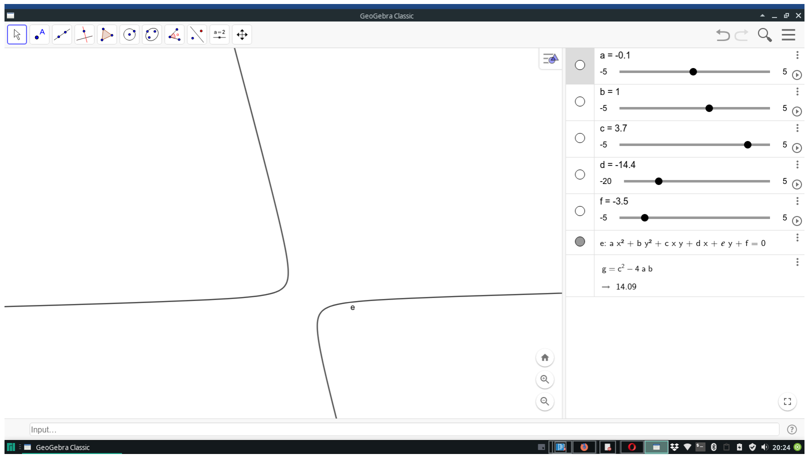
- Quando Δ è negativo, si ottengono ellissi



- Per scelte peculiari dei coefficienti, per esempio $c = 2, a = b = 1$, si ha una parabola:



- Quando Δ è positivo, si ottiene una famiglia di iperboli:



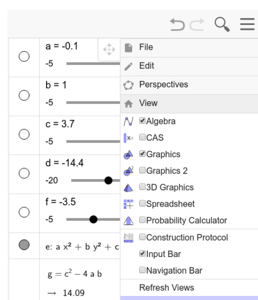
Si può consecutivamente giocare con i parametri: per quali valori le iperboli sono equilatere? Quali coefficienti comandano l'equazione degli asintoti dell'iperbole?

0.1. **Per preparare l'attività.**

- Nel menu laterale selezionare `View -> Input Bar`
- Scrivere l'equazione della conica generica nella `Input Bar`

```
Input Bar |  a * x^2 + b * y^2 + c * x * y + d * x + e * y + f = 0
```

  `geogebra` creerà gli slider all'uopo.
- Nel menu laterale selezionare la casella `Algebra` spuntando in positivo la casella:



- Questo posizionerà gli slider nel lato destro dello schermo e permetterà di manipolarli facilmente.

0.2. **Per svolgere l'attività.**

- Giocare con gli slider in libertà:
  - notare che la forma della conica varia sensibilmente se si fanno variare i parametri (a, b, c);

  - notare che lo stesso non accade se si fanno variare i parametri (d, e, f): perché? Qual è la differenza tra loro?
  - notare che il parametro f trasla unicamente la conica: è ovvio il motivo!
- Ora, studiare con più criterio cosa succede; trovare tre valori per (a, b, c) che rendono positivo il discriminante (si otterranno quindi iperboli); inserirli a mano nella barra degli slider; si riesce a cambiare la forma della conica agendo su (d, e)?
- trovare tre valori che annullano il discriminante; inserirli a mano nella barra degli slider: si riesce a cambiare la forma della conica agendo su (d, e)? La figura ottenuta in questo caso è una parabola: come si calcolano a partire da (a, b, c) le coordinate del suo fuoco?
- trovare tre valori che rendono negativo il discriminante (si otterranno quindi ellissi): come si calcolano a partire da (a, b, c) le coordinate dei suoi due fuochi? (detto anche "una parabola è solo un'ellisse con un fuoco molto molto lontano")
- "Perché" per un'ellisse i fuochi sono due? A che condizione sui coefficienti i fuochi sono uno solo? (detto anche "una circonferenza è solo un'ellisse che non ha mai smesso di concentrarsi").

Da ultimo, si può visualizzare il discriminante come una ulteriore quantità

- Si scrive nella `Input Bar`

```
Input Bar |  c ^ 2 - 4 * a * b
```

- con ciò viene creato un ulteriore slider (che però non è associato a un oggetto geometrico);
- ora si osserva il risultato per i valori precedentemente scelti che rendono il discriminante positivo, negativo o nullo.