


# Categorical Ontology I<sub>2</sub><sup>1</sup>: Functorial er- kennen

Dario DENTAMARO<sup>†</sup> and Fosco LOREGIAN<sup>‡</sup>

 **Mathematics Subject Classification (2010).** 18-03, 18B25, 18C10.

## Contents

1. Profunctors / Grothendieck construction	1
2. Nerve and realisations	1
3. Theories and models	1
4. The tension between observational and theoretical	3
5. Ramseyfication and beyond: generalised profunctors	4
References	5

## 1. Profunctors / Grothendieck construction

Sezione tecnica con solo robe di CT.

## 2. Nerve and realisations

Sezione tecnica con solo robe di CT.

## 3. Theories and models

Qui exploitiamo il linguaggio introdotto nelle precedenti due sezioni;

**Definition 3.1 (Theory).** A *theory*  $\mathcal{L}$  is the syntactic category  $\mathcal{T}_L$  (cf. [1]) of a first-order, finitely axiomatisable language  $L$ .

**Definition 3.2.** A *world* is a large category  $\mathcal{W}$ ; a *universe* is a world that, as a category, admits all small colimits.

Given a theory  $\mathcal{L}$  and a world  $\mathcal{W}$ , a  $\mathcal{L}$ -*canvas* of  $\mathcal{W}$  is a functor

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\phi} \mathcal{W}.$$

A canvas  $\phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{W}$  is a *science* if  $\phi$  is a dense functor.

**Remark 3.3.** The NR paradigm exposed in ?? now entails that

- If  $\mathcal{W}$  is a world, we obtain a *representation* functor

$$\mathcal{W} \longrightarrow [\mathcal{L}^{\text{op}}, \text{Set}];$$

this means: given a canvas  $\phi$  of the world, the latter leaves an image on the canvas.

- If  $\mathcal{W}$  is a universe, we obtain a NR-adjunction

$$\mathcal{W} \rightleftarrows [\mathcal{L}^{\text{op}}, \text{Set}];$$

this means: if  $\mathcal{W}$  is sufficiently expressive, then models of the theory that explains  $\mathcal{W}$  through  $\phi$  can be used to acquire a two-way knowledge. Phenomena have a theoretical counterpart in  $[\mathcal{L}^{\text{op}}, \text{Set}]$  via the nerve; theoretical objects strive to describe phenomena via their realisation.

- If an  $\mathcal{L}$ -canvas  $\phi : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{W}$  is a science, ‘the world’ is a full subcategory of the modes in which ‘language’ can create interpretation.

The terminology is chosen to inspire the following idea in the reader: science strives to define *theories* that allow for the creation of representations of the world; said representations are descriptive when there is dialectic opposition between world and models; when such representation is faithful, we have reduced ‘the world’ to a piece of the models created to represent it.

The tongue-in-cheek here is, la scienza (nel senso usuale) non è una scienza (nel senso della definizione ??), se non in potenza; i tentativi di generare pensiero scientifico sono i tentativi di

- Riconoscere un mondo  $\mathcal{W}$  come un oggetto sufficientemente espressivo da contenere fenomeni e informazione;
- Creare un linguaggio  $L$ , sufficientemente ‘compatto’, la cui categoria sintattica permette di rappresentare nel mondo;
- Ottenere una aggiunzione tra  $\mathcal{W}$  e modelli del mondo  $[\mathcal{L}^{\text{op}}, \text{Set}]$  ottenuti dal linguaggio  $\mathcal{L}$ , per generare modelli a partire da fenomeni, e per prevedere fenomeni a partire da modelli;
- Ottenere che ‘il linguaggio sia un sottospazio denso del mondo’, con ciò intendendo che l’aggiunzione del punto precedente è sufficientemente well-behaved da descrivere il mondo come un frammento delle rappresentazioni semantiche del linguaggio  $L$ .

Evidentemente, la tensione qui è tra due opposte qualità che  $L$  deve avere: non deve essere troppo esteso, per essere trattabile; non deve essere troppo ristretto, per parlare di “tutto” il mondo che si prefigge di descrivere.

Cf. with this definition in mind [?]:

■ Lorem ipsum dolor sit amet

We say that una *teoria S-scientifica* è il dato di

1. L un linguaggio formale
2. TL la categoria sintattica di quel linguaggio
3. La categoria dei funtori  $[TL, S]$

Dal momento che la categoria  $[TL, S]$  caratterizza completamente (up to Cauchy completion)  $L$  e  $TL$ , facciamo una crasi e chiamiamo teoria *S-scientifica* semplicemente  $[TL, S]$ . Ecco allora che "una corrispondenza coerente che collega espressioni di  $F$  con espressioni semantiche" è semplicemente un funtore.

#### 4. The tension between observational and theoretical

All based on the proportion

truth values : proposition = section : presheaf

The tension between observational and theoretical can be faithfully represented through profunctor theory;

**Remark 4.1.** One can think of propositional functions as relations  $(x, y) \in R$  iff the pair  $x, y$  renders *phi* true; we use this idea, suitably adapted to our purpose and categorified.

Yadda yadda on how questo è facile da categorificare; consideriamo la relazione  $R : T \times O \rightarrow \{0, 1\}$  per cui  $tRo \iff \dots$

**Definition 4.2.** Let  $\mathcal{T}, \mathcal{O}$  be two categories, respectively the *theoretical* and the *observational* one. A  $(1, 1)$ -ary *Ramsey map* is a profunctor  $\mathfrak{k} : \mathcal{T} \multimap \mathcal{O}$  (maybe ops have to be added for the sake of convention).

**Remark 4.3.** Particular 1,1-ary Ramsey maps si ottengono mediante aggiunzioni; definiamo

- l'aggiunzione in Prof indotta dall'aggiunzione in Cat;
- il "core osservazionale" e il "core teoretico" come le subcat di dominio e codominio che sono rese equivalenti dall'aggiunzia col trucco dei punti fissi;
- core oss e core teo sono sempre equivalenti; come sopra, il fatto è che si cerca un modo di allargare quanto piu possibile l'equat.

There is nothing, in their mere syntactical presentation, that allows to tell the observational and the theoretical category apart; justify with the self-involution of Prof. Also, questo dà conto dell'"esistenza degli oggetti di finzione". Sherlock Holmes è l'oggetto di una categoria teorica. Gandhi è l'oggetto di una categoria osservazionale. In quanto oggetti linguistici essi non possono essere distinti, la differenza tra loro che li etichetta uno come oggetto di finzione e l'altro come personaggio storico è la specifica di un profuntore che permette di embeddare Sherlock Holmes nella realtà (di postulare, cioè, come esso compia azioni quotidiane nella Londra vittoriana), e di rappresentare un personaggio storico in un modello finzionale (scrivendo, ad esempio, un libro sulla vita di Gandhi).

A limitation of the above definition is that in practice all sorts of configurations are possible:

- una singola  $O$  si lascia descrivere da due  $T$ , e non meno
- uno stesso  $T$  descrive due  $O$  diverse
- ogni altra combinazione numerica possibile

Thus we have to admit multiple arguments in domain and codomain.

## 5. Ramseyfication and beyond: generalised profunctors

We can generalise the definition above to encompass Ramsey sentences:

**Definition 5.1.** Let  $\mathcal{T}, \mathcal{O}$  be two categories; a *Ramsey map*, or a  $(n, m)$ -ary *Ramsey map* is a profunctor  $\mathfrak{K} : \mathcal{T}^n \multimap \mathcal{O}^m$

The set  $\mathfrak{k}(\underline{T}, \underline{O})$  represents the type of proofs that the observational tuple  $\underline{O}$  admits a description in terms of the theoretical tuple  $\underline{T}$ .

This formalism allows to speak about particular worlds, obtained as presheaf categories over observational  $\mathcal{O}$ ; if  $\mathcal{T}, \mathcal{O}$  is a theoretic pair, we can instantiate ?? above in the particular case where  $\mathcal{W} = [\mathcal{O}^{\text{op}}, \text{Set}]$ ; observe that  $\mathcal{W}$  is a universe! We can thus address a certain number of questions, arising from the canonical adjunction obtained by virtue of ?? and ??:

$$[(\mathcal{O}^m)^{\text{op}}, \text{Set}] \xLeftrightarrow{\quad} [(\mathcal{T}^n)^{\text{op}}, \text{Set}];$$

Vale la pena notare che siccome il triangolo

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{O}^m)^{\text{op}} & \xrightarrow{\quad} & [(\mathcal{T}^n)^{\text{op}}, \text{Set}] \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & [(\mathcal{O}^m)^{\text{op}}, \text{Set}] & \end{array}$$

pseudocommuta, allora la composizione  $L \circ y$  fa esattamente (mate di)  $\mathfrak{K}$ . Ciò significa: gli  $\mathcal{O}$ -modelli, interpretati nei  $\mathcal{T}$ -modelli, hanno rappresentazioni corrispondenti ai termini osservazionali interpretati nei  $\mathcal{T}$ -modelli; ovvero, la rappresentazione è ‘coerente’ sui generatori dei modelli osservazionali, ovvero...

Può essere che l’operazione

$$\exists \underline{X}. \mathfrak{k}(\underline{O}, \underline{X})$$

si traduca come

$$\lambda \underline{O}. \mathfrak{k}(\underline{O}, F\underline{O})$$

quando c’è una aggiunzione  $F : \mathcal{O} \multimap \mathcal{T} : G$ ? Ossia, invece di saturare i termini teorici in una ipotetica tupla (operazione priva di senso senza una specificazione di condizione sulla tupla quantificata esistenzialmente) si sta considerando solo la controparte osservazionale ma trasportata nel modello mediante  $F$  (ed è tutto da vedere se  $F$  è fedele) cosicché la dipendenza di  $\mathfrak{k}$  da  $T$  viene ‘eliminata’ per mezzo di una aggiunzione (cf. ‘elimination of imaginaries’)

### 5.1. On the bicategory of generalised profunctors

Put a caso questo è un oggetto interessante di per sé.

## References

- [1] J. Lambek and P.J. Scott, *Introduction to higher-order categorical logic*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1988.

Dario DENTAMARO<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Università degli Studi di Firenze,  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
e-mail: [dario.dentamaro@stud.unifi.it](mailto:dario.dentamaro@stud.unifi.it)

Fosco LOREGIAN<sup>‡</sup>

<sup>‡</sup>Tallinn University of Technology,  
Institute of Cybernetics, Akadeemia tee 15/2,  
12618 Tallinn, Estonia  
e-mail: [fosco.loregian@taltech.ee](mailto:fosco.loregian@taltech.ee)