ウィーナー・フィルタの導出

2024 年 11 月 7 日

工学部計数工学科　システム情報工学コース

03-240641　山田哲士

未知の原信号 $X(\omega)$ にフィルタ $H(\omega)$ が掛かり、さらにノイズ $N(\omega)$ が加わった劣化信号 $Y(\omega)$ が得られたとする。

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) + N(\omega) \tag{1}$$

ノイズが定常で信号と無相関な場合、劣化信号にウィーナー・フィルタ $G(\omega)$ を掛けると、復元誤差（誤差パワー・スペクトルの期待値）を最小にできる。

$$E\left[|X(\omega) - G(\omega)Y(\omega)|^2\right] \to \min \tag{2}$$

煩雑なので、以下では $X(\omega)$ などの (ω) を省略する。式 (2) を

$$l = E\left[|X - GY|^2\right] \tag{3}$$

と表すことにして、式 (1) を代入して展開していく。

$$\begin{aligned} l &= E\left[|X - GY|^2\right] \\ &= E\left[|X - G(HX + N)|^2\right] \\ &= E\left[|(1 - GH)X - GN|^2\right] \end{aligned}$$

一般に $|z|^2 = zz^*$ だから、

$$\begin{aligned} l &= E\left[\{(1 - GH)X - GN\}\{(1 - GH)^*X^* - G^*N^*\}\right] \\ &= (1 - GH)(1 - GH)^*E[XX^*] - G(1 - GH)^*E[NX^*] - G^*(1 - GH)E[XN^*] + |G|^2E[NN^*] \end{aligned}$$

ここで、G と H は確定値なので期待値演算 $E[\ ]$ の外に出せる。また、原信号 X とノイズ N が無相関であるとすると、$E[NX^*] = E[N^*X] = 0$ となる。

原信号 X のパワー・スペクトルを

$$P_S = E[|X|^2] = E[XX^*] \tag{9}$$

ノイズ N のパワー・スペクトルを

$$P_N = E[|N|^2] = E[NN^*] \tag{10}$$

とする。以上を踏まえて、式を整理すると：

$$l = (1 - GH)(1 - GH)^*P_S + |G|^2P_N \tag{12}$$

展開すると、

$$\begin{aligned} l &= P_S - (GH + G^*H^*)P_S + |G|^2|H|^2P_S + |G|^2P_N \\ &= P_S - 2\Re\left[GH\right]P_S + |G|^2\left(|H|^2P_S + P_N\right) \end{aligned}$$

ここで、$\Re\left[GH\right]$ は GH の実部を表す。

誤差 l を $|G|$ の二次式として整理すると、

$$l = a|G|^2 + bG + b^*G^* + c \tag{17}$$

ただし、

$$\begin{aligned} a &= |H|^2 P_S + P_N \\ b &= -HP_S \\ c &= P_S \end{aligned}$$

一般に、$a > 0$ のとき、二次形式 $a|G|^2 + bG + b^*G^* + c$ は次のように変形できる。

$$a|G|^2 + bG + b^*G^* + c = a\left|G + \frac{b^*}{a}\right|^2 + c - \frac{|b|^2}{a} \tag{22}$$

したがって、誤差 l は次のように表される。

$$l = \left(|H|^2 P_S + P_N\right)\left|G - \frac{H^* P_S}{|H|^2 P_S + P_N}\right|^2 + \frac{P_S P_N}{|H|^2 P_S + P_N} \tag{29}$$

このとき、誤差 ε が最小になるのは次式を満たすときである。

$$G = \frac{H^* P_S}{|H|^2 P_S + P_N} \tag{30}$$

従って、

$$\varepsilon = \frac{P_N}{P_S} \tag{31}$$

とすれば良いこととなる。

参考文献

https://www.allisone.co.jp/html/Notes/DSP/Filter/Wiener-filter/index.html