# CT の原理とフーリエスライス定理による説明

2024 年 11 月 19 日

工学部計数工学科　システム情報工学コース

03-240641　山田哲士

## 1. 投影データの取得

まず、被写体の断面を表す 2 次元関数を $f(x, y)$ とする。CT スキャンでは、様々な角度 $\theta$ から X 線を照射し、その投影データ（ラドン変換）を取得する。投影データ $p_\theta(s)$ は、線 $L$ 上での $f(x, y)$ の積分で表される。

$$p_\theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(s - x\cos\theta - y\sin\theta)\, dx\, dy$$

ここで、$\delta$ はディラックのデルタ関数であり、積分は線 $L : x\cos\theta + y\sin\theta = s$ 上で行われる。

## 2. フーリエスライス定理の定式化

フーリエスライス定理は、投影データの 1 次元フーリエ変換が、被写体の 2 次元フーリエ変換の特定の断面に等しいことを示している。

投影データ $p_\theta(s)$ のフーリエ変換 $P_\theta(\omega)$ は次のように定義される。

$$P_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(s)e^{-j2\pi\omega s}\, ds$$

被写体 $f(x, y)$ の 2 次元フーリエ変換 $F(u, v)$ は以下の通りである。

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)e^{-j2\pi(ux+vy)}\, dx\, dy$$

フーリエスライス定理は、次の関係を示す。

$$P_\theta(\omega) = F(u, v) \quad \text{ただし} \quad u = \omega\cos\theta, \quad v = \omega\sin\theta$$

つまり、投影データのフーリエ変換 $P_\theta(\omega)$ は、被写体の 2 次元フーリエ空間における角度 $\theta$ の直線（スライス）上の値に等しい。

## 3. フーリエスライス定理の証明

$$
\begin{aligned}
P_\theta(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_\theta(s) e^{-j2\pi\omega s}\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \delta(s - x\cos\theta - y\sin\theta)\, dx\, dy \right) e^{-j2\pi\omega s}\, ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \delta(s - x\cos\theta - y\sin\theta) e^{-j2\pi\omega s}\, ds \right) dx\, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi\omega(x\cos\theta + y\sin\theta)}\, dx\, dy \\
&= F(\omega\cos\theta, \omega\sin\theta)
\end{aligned}
$$

最後の等式は、2 次元フーリエ変換 $F(u,v)$ において $u = \omega\cos\theta,\ v = \omega\sin\theta$ と置いた結果である。

## 4. CT 画像の再構成

CT 画像を再構成する手順は以下の通りである。

1. **投影データの取得**：様々な角度 $\theta$ での投影データ $p_\theta(s)$ を収集する。
2. **フーリエ変換の実施**：各投影データ $p_\theta(s)$ に対して 1 次元フーリエ変換 $P_\theta(\omega)$ を計算します。
3. **周波数空間の構築**：フーリエスライス定理に基づき、得られた $P_\theta(\omega)$ を 2 次元周波数空間 $F(u,v)$ の対応する直線上に配置する。
4. **逆フーリエ変換**：周波数空間 $F(u,v)$ に対して 2 次元逆フーリエ変換を行い、被写体の断面像 $f(x,y)$ を再構成する。

## 5. 参考文献


`http://racco.mikeneko.jp/Kougi/2011a/IPPR/2011aippr12.pdf`