交流回路を微分方程式解法の知識で解いてみる

情報光システムコース・電気回路及び演習資料・上田

2020 年 9 月 17 日

1　複素数

まず，虚数単位を $j = \sqrt{-1}$ としたとき，複素数 $C = a + jb$ は，その共役複素数を $\bar{C} = a - jb$ とすると，次のような計算ができることを確認しておこう．教科書の図 2.2.1 を参照のこと．

$$\begin{aligned} a + jb &= r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta}, \\ r &= \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{b}{a} \end{aligned} \tag{1}$$

さて，

$$C = |C|e^{j\theta} = |C|e^{j\angle C} = a + jb, \quad |C| = r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \angle C = \theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \tag{2}$$

と書くとすると，

$$C_1 \times C_2 = |C_1|e^{j\angle C_1} \times |C_2|e^{j\angle C_2} = |C_1||C_2|e^{j(\angle C_1 + \angle C_2)} = |C_1||C_2|e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \tag{3}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{|C_1|}{|C_2|}e^{j(\angle C_1 - \angle C_2)} = \frac{|C_1|}{|C_2|}e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \tag{4}$$

複素数同士の掛け算割り算は，位相に関しては足し算引き算になっているところが興味深い．次の事実に注意しよう．

$$a = \Re[C] = \frac{1}{2}(C + \overline{C}), \quad b = \Im[C] = \frac{1}{2j}(C + \overline{C}) \tag{5}$$

ここで，$\Re$ は複素数から実数部を取り出す演算子，$\Im$ は虚数部を取り出す演算子である．式 (1) から次式を得ることができる．

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = \Re\left[e^{j\theta}\right] \\ \sin\theta &= \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) = \Im\left[e^{j\theta}\right] \end{aligned} \tag{6}$$

左辺は実数であり，右辺にみられた虚数単位はうまく消去できていることに注意せよ．

2　交流回路方程式

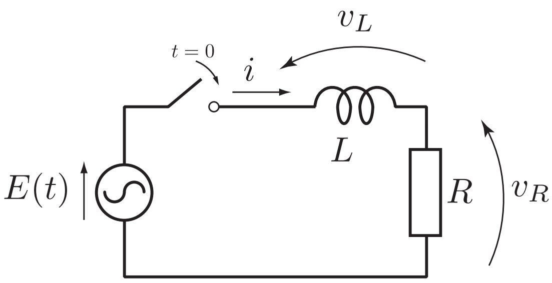

図 1　LR 直列回路に交流電源を印加した例．$t=0$ でスイッチを入れるまでは，回路には電流は流れていないはず．

図 1 に示した回路を考えていこう．$t=0$ でスイッチを閉じ，回路に流れる電流 $i(t), t \geq 0$ がどうなるかを知りたい．R に流れる電流を i とおくと，KVL より

$$E(t) = v_L(t) + v_R(t) \tag{7}$$

となる．(t) とあるのは，時間の関数であることを際立たせるだけのためで，以下，特に意識することなく，省略することがある．一方，素子の特性より，

$$v_R(t) = Ri(t) \tag{8}$$

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} \tag{9}$$

となる．また，電源は

$$E(t) = E_m \sin(\omega t + \psi) \tag{10}$$

と仮定する．ここに ψ は初期位相である．式 (7) に，式 (9) および (10) を代入し，次式を得る．

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E_m \sin(\omega t + \psi) \tag{11}$$

となる．

3　微分方程式の解法

式 (11) はもはや定係数線系微分方程式である．初期値を与えない限りは，この方程式を満たす解は無数にあり，これを一般解という．初期値 $i(0)$ を与えると解はただ一つ決まることが保証されている．このことを解の一意性という．

式 (11) の形式を，非同次方程式という．右辺をゼロとおくと同次方程式という．非同次方程式の解は以下の手順で求められる．

1. 同次方程式の一般解を求めると，過渡応答が求まる．これを零入力応答，自由システム応答などという．
2. 次に，非同次方程式を満たすただ一つの解を求めれば，それは特殊解とよばれ，定常応答が求まる．また，零状態応答とも呼ぶ．
3. 過渡応答と定常応答の和（同次方程式の一般解と非同次方程式の特殊解の和）が，もとの非同次方程式の一般解を与える．さらに初期値を反映させれば，完全解が一意に求まる．

電気回路の問題は本来，この完全解を求めることであるが，図 1 のような単純な回路の方程式でも，数学的に真正面から解こうとすると上記手順にしたがって計算を進める必要があり，結構な手間となる．以下にみていこう．

3.1 同次方程式の解法

まず，同次方程式は

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{12}$$

である．この解き方は，演算子法などがあるが，ここでは次の解を仮定する．

$$i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} \tag{13}$$

ここで，K は定数である．これがもしも式 (12) の解であれば，代入して関係が成立するはずである．式 (13) を式 (12) に代入すると，

$$L\left(-\frac{R}{L}\right)Ke^{-\frac{R}{L}t} + RKe^{-\frac{R}{L}t} = 0 \tag{14}$$

となり，**t の値に関わらず右辺は恒等的にゼロとなる．**よって，確かに式 (13) は，式 (12) の解となっていることがわかった（実は式 (13) の形式以外の解は存在しないことも保証されている）．ところで，式 (13) は十分時間が経過すると $i(t) \to 0$ となることが分かる．すなわち，過渡応答は十分時間が経過すれば消失するということになる．

3.2 非同次方程式の特殊解

次に定常応答を求める．式 (11) に再び戻るのだが，解き方としてはもう $\sin\omega t$ が加えられていたら特殊解も $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ を仮定する，と習ったかもしれない．ここからはちょっと新しい視点として，複素微分方程式として考えてみたい．まず電流について，複素数に拡張する：

$$z(t) = x(t) + ji(t) \tag{15}$$

ここで，$i(t)$ は定常応答としての解であり，式 (13) とは異なる．実部 x が気になるところだが，以下の式では実は鑑みることがない．次の複素微分方程式を考える：

$$L\frac{dz}{dt} + Rz = E_m e^{j(\omega t+\psi)} \tag{16}$$

これは，式 (11) に似て異なるものであろう．この方程式の複素共役な式は，

$$L\frac{d\overline{z}}{dt} + R\overline{z} = E_m e^{-j(\omega t+\psi)} \tag{17}$$

である．式 (16) から式 (17) を引いて $2j$ で割ると，

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{z-\overline{z}}{2j}\right) + R\left(\frac{z-\overline{z}}{2j}\right) = E_m\frac{e^{j(\omega t+\psi)} - e^{-j(\omega t+\psi)}}{2j} \tag{18}$$

となるが，冒頭に紹介した (5), (6), ならびに (15) を，式 (18) に適用すると次式となる．

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E_m \sin(\omega t+\psi) \quad \text{(再掲)}$$

この代入計算は必ず手計算してみること．この式は **式 (11) そのものであり，複素数はもはや混入していない．**

一方，複素微分方程式 (16) を解けば，その解は一般に複素数となるだろう．それ対して式 (5) 右式の「虚部を取り出す演算」を適用すれば，もとの微分方程式や，その実数解が得られそうだ．実際，式 (16) を解いてみよう．解を

$$z(t) = I_m e^{j(\omega t+\theta)} \tag{19}$$

と仮定し，式 (16) に代入すれば次式を得る：

$$j\omega L I_m e^{j(\omega t+\theta)} + RI_m e^{j(\omega t+\theta)} = E_m e^{j(\omega t+\psi)} \tag{20}$$

ただし，$\frac{d}{dt}e^{j(\omega t+\theta)} = j\omega e^{j(\omega t+\theta)}$ を計算できることを認めている．この式を整理して，

$$I_m e^{j(\omega t+\theta)} = \frac{E_m}{R+j\omega L}e^{j(\omega t+\psi)} \tag{21}$$

である．左辺は $z(t)$ のことであり，右辺は複素数の積であるから，式 (4) を適用して，

$$z(t) = \frac{E_m}{R+j\omega L}e^{j(\omega t+\psi)} = \frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}e^{j(\omega t+\psi-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R})} \tag{22}$$

となる．式 (15) から $i(t) = \Im[z(t)]$ であるので，

$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t+\psi-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{23}$$

となる．もう実数の世界に戻ったので，虚数単位 j は無いことに注意．ただし，式 (1) を適用している．**狙いどおり複素微分方程式経由で，もとの非同次微分方程式の特殊解が解けた．**

3.3 一般解，完全解

非同次方程式 (11) の一般解は，式 (13) および式 (23) の和となり，

$$i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t+\psi-\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{24}$$

となる．これが解となっているかどうかは，元の微分方程式 (11) に代入して確かめればよい．$\Theta = \omega t + \psi - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$ とおけば，左辺は，

$$\begin{aligned}
L\frac{di}{dt} + Ri &= L\left(-\frac{KR}{L}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m\omega}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\cos\Theta\right) + R\left(Ke^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\Theta\right) \\
&= \frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left(\omega L\cos\Theta + R\sin\Theta\right) \\
&= E_m\sin\left(\Theta + \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \\
&= E_m\sin(\omega t + \psi)
\end{aligned}$$

となり，式 (11) の右辺と一致する．ただし，$\Theta = \omega t + \psi - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$，とおいてあり，また，三角関数の合成，

$$a\sin\Theta + b\cos\Theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\Theta + \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

を用いた．任意定数 K のかかる部分が消えることは，第 3.1 節の説明により織り込み済みである．

次に初期値を鑑みてみよう．式 (24) に $t=0$ において初期電流無しというとこで $i(0)=0$ を入れると，

$$i(0) = 0 = K + \frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\psi - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{25}$$

より， K が決定される：

$$K = -\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\psi - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{26}$$

これは定数であることに注意．これを式 (24) に代入し，次の完全解を得る．

$$i(t) = -\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\psi - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\left(\omega t + \psi - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{27}$$

この式はごちゃごちゃしているが，大局的に見れば

$$i(t) = Ae^{\alpha t} + B\sin(\omega t + \beta) \tag{28}$$

である．ここで $\alpha < 0$, β, A, B は定数である．上で述べた通り，十分時間が経過すれば第一項は消失するので，定常解は第二項となる．

図 2 は，$R = 10$ [Ω], $\omega = 377$ [rad/s], $L = 10$ [mH], $\psi = 1.0$ [rad], $E_m = 1.0$ [V] としたときの式 (27) の波形である．十分時間が経過すればもう第二項が支配的になっていることが分かる．トータルの解軌道が式 (27) であるが，時刻ゼロでは $i(0) = 0$ であることは注意が必要である (まぁそのようになるよう，式 (25) を解いたのだが)．物理的に解釈しても，スイッチを入れていない ($t < 0$) 状況では電流は流れていない．

以上の過程で重要なのは，

1. 複素微分方程式の実数部や複素解の実数部は表面上無関係

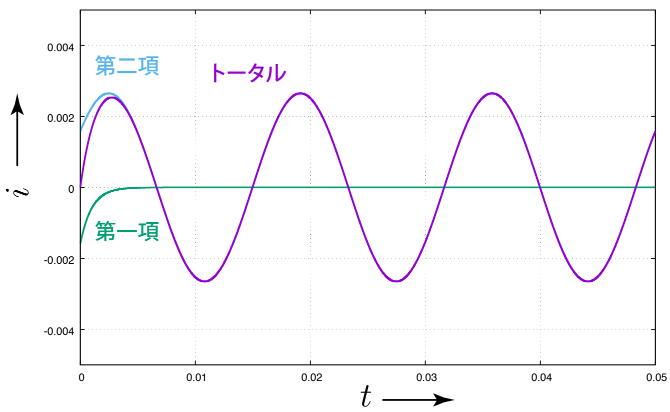

図 2　波形の例

2. 十分時間が経てばほぼ非同次方程式の特殊解が支配する
3. 途中の計算で時刻 t に関する正弦関数の各周波数は常に ω であり，他の周波数要素は登場しない

このようにきちんと解こうとすると，単純な LR 回路でも大変な手続きとなる．しかし原理追求も大切だが，工学においては「信頼できる結論だけ利用し，さっさと仕事を進める」ことも重要視される．以降の講義では，**上記手続きが数行だけになる**ようなアイディアについて学ぶ．