直流回路を微分方程式解法の知識で解いてみる

情報光システムコース・電気回路及び演習資料・上田

2020 年 9 月 24 日

1　回路方程式

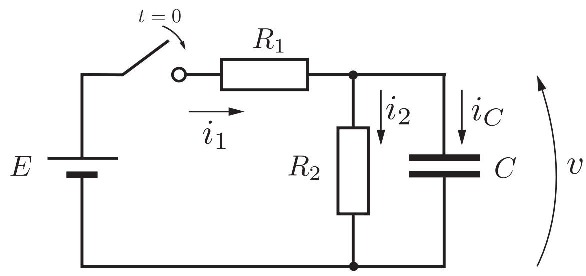

図 1　回路例．$t=0$ でスイッチを入れるまでは，回路には電流は流れていないはず．

図 1 に示した回路を考えていこう．$t=0$ でスイッチを閉たのち，C にかかる電圧 v がどのように変化するかを知りたい．仮にいま，スイッチが閉じられた直後，C に流れる電流を i_C とおき，R_2 に流れる電流を i_2 とする．また，R_1 に流れる電流を i_1 とすると，KCL より

$$i_1 = i_2 + i_C \tag{1}$$

となろう．一方，R_1 にかかる電圧（左向き）を v_1 とし，R_2 にかかる電圧（上向き）を v_2 とする．このときループは 3 つ存在し，それぞれ KVL より

$$E - v_1 - v_2 = 0, \quad v_2 - v = 0, \quad E - v_1 - v = 0 \tag{2}$$

と導出される．個々の素子の特性はそれぞれ，

$$v_1 = R_1 i_1, \quad v_2 = R_2 i_2, \quad i_C = C\frac{dv}{dt} \tag{3}$$

となる．素子の特性を KVL に代入し，KCL によって i_1 を消去，さらに $i_2 = v/R_2$ となることに注意して次式を得る．

$$R_1 C\frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} v = E \tag{4}$$

この方程式は R_1C で全体を割ると，$dx/dt + ax = b$ の形になっている．キャパシタは充電されていなかったとすると，

$$v(0) = 0 \tag{5}$$

が初期値となる．

2　微分方程式の解法

式 (4) はもはや定係数線系微分方程式である．初期値を与えない限りは，この方程式を満たす解は無数にあり，これを一般解という．初期値 $i(0)$ を与えると解はただ一つ決まることが保証されている．このことを解の一意性という．

式 (4) の形式を，非同次方程式という．一方，右辺をゼロとおいた式を同次方程式と呼ぶ．

非同次方程式の解は以下の手順で求められる．

1. 同次方程式の一般解を求めると，過渡応答が求まる．これを零入力応答，自由システム応答などという．
2. 次に，非同次方程式を満たすただ一つの解を求めれば，それは特殊解とよばれ，定常応答が求まる．これは零状態応答とも呼ぶ．
3. 過渡応答と定常応答の和（同次方程式の一般解と非同次方程式の特殊解の和）が，もとの非同次方程式の一般解を与える．さらに初期値を反映させれば，解が一意に求まる．

すこし式の上でイメージをつかんでおこう．非同次方程式を次式の形に整理したとする：

$$L(x) = b \tag{6}$$

ここで L は線型演算子とする．具体的には x に対して d^k/dt^k, $k = 1, 2 \dots$ のかかる項を含む多項式と思えばよい．$b \neq 0$ として，式 (6) の解のうち，2 つの解 x_1 と x_2 を任意に取る．この 2 つの解の差 $x_d = x_1 - x_2$ について，両辺に L を作用させると，線形であるから，

$$L(x_d) = L(x_1) - L(x_2) \tag{7}$$

となる．ところが仮定より x_1, x_2 はそれぞれ式 (6) の解であるから，

$$L(x_1) = b, \tag{8}$$

および，

$$L(x_2) = b \tag{9}$$

であるはずである．よって式 (7) の右辺は $b - b$ となり，時刻によらず常々ゼロとなる：

$$L(x_d) = 0 \tag{10}$$

この式は同次方程式であり，その解 x_d は一般解であるから任意定数を含み得る．別の言い方をすれば，非同次方程式の任意に選んだ 2 つの解の差は，同次方程式の一般解である．$x_1 = x_d + x_2$

であることを鑑みて突き詰めると，非同次方程式 (6) の一般解は，同次方程式 (10) の一般解（任意性のある部分）と，(6) の特殊解（何らかの方法で見つけた非同次方程式の一つの解）の和によって表現できるといえる．

微分方程式と初期値のセットを初期値問題という．電気回路の問題は本来，この初期値問題を解くことであるが，図 1 のような単純な回路の方程式でも，数学的に真正面から解こうとすると上記手順にしたがって計算を進める必要があり，結構な手間となる．以下にみていこう．

2.1 同次方程式の解法

まず，同次方程式は

$$R_1 C \frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} v = 0 \tag{11}$$

である．この解き方は，演算子法などがあるが，ここでは次の解を仮定する．

$$v(t) = v_x e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} \tag{12}$$

ここで，v_x は定数である．これがもしも式 (11) の解であれば，代入して関係が成立するはずである．式 (12) を式 (11) に代入すると，

$$-R_1 C \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} v_x e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} + \frac{R_1 + R_2}{R_2} v_x e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C} t} \tag{13}$$

となり，t **の値に関わらず左辺は恒等的にゼロとなる**ことが示される．よって，確かに式 (12) は，式 (11) の解となっていることがわかった（実は式 (12) の形式以外の解は存在しないことも保証されている）．ところで，式 (12) は十分時間が経過すると $v(t) \to 0$ となることが分かる．すなわち，過渡応答は十分時間が経過すれば消失するということになる．

2.2 非同次方程式の特殊解

次に特殊解を求める．解き方は様々あるが，ここで線形な電気回路の性質を考慮しよう．図 1 においてはスイッチ投入後，過渡応答が終わると電流も電圧も一定値になると仮定できる．別の表現では，dv/dt, di_1/dt, di_2/dt などの導関数はゼロになるということである．印加するエネルギー源（この場合電池 E）も一定値である線形回路では，この仮定が成り立つ．

式 (4) において，$dv/dt = 0$ とおくと，

$$\frac{R_1 + R_2}{R_2} v = E \tag{14}$$

であるので，これを解いて

$$v = \frac{E R_2}{R_1 + R_2} \tag{15}$$

を得る．これが C ならびに R_2 にかかる電圧の最終値である．

2.3　非同次方程式の一般解，初期値問題の解

非同次方程式 (4) の一般解は，式 (12) および式 (15) の和となり，

$$v(t) = v_x e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} + \frac{ER_2}{R_1+R_2} \tag{16}$$

となる．これが解となっているかどうかは，元の微分方程式 (4) に代入して確かめればよい．代入した左辺は，

$$-R_1C\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}v_x e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} + \frac{R_1+R_2}{R_2}v_x e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t} + \frac{R_1+R_2}{R_2}\cdot\frac{ER_2}{R_1+R_2} \tag{17}$$

となる．第一項と第二項の和は式 (13) より常にゼロであり，第三項を整理するとたしかに E となる．任意の時刻に対して，この解 (16) が式 (4) を満たしていることが示された．

初期値問題を解くには，初期条件を一般解に当てはめて定数 v_x を求める必要がある．スイッチを入れた直後で $t=0$, またこのとき C にかかる電圧をゼロとすると，$v(0)=0$ である．これらを式 (16) に代入し，次式を得る．

$$v_x = -\frac{ER_2}{R_1+R_2} \tag{18}$$

$e^0=1$ であることに留意せよ．この v_x を式 (16) に代入し，整理すると，

$$v(t) = \frac{ER_2}{R_1+R_2}\left(1-e^{-\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C}t}\right) \tag{19}$$

となる．これが完全解である．$t\to\infty$ とし，また，$R_1=R_2=R$ とすれば，$v(\infty)=E/2$ となり，教科書図 1.4.1 (c) のグラフの落ち着く先と一致する．

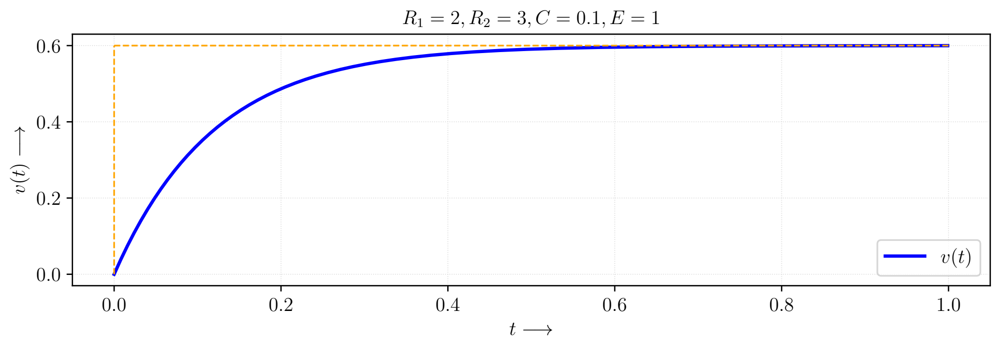

図 2　波形の例．$ER_2/(R_1+R_2)=0.6$ となる．

3　本講義で求めるべき『解』

上記でみたように，電気回路は微分方程式の初期値問題となる．**本講義では求めたい対象を，定常応答（定常解）に絞ることにする．** すなわち，過渡応答が十分減衰したのちの回路の状態を求

める．

具体的には教科書 10〜12 頁で述べられているが，インダクタの電圧をゼロ，キャパシタの電流をゼロにする．よってインダクタは短絡除去，キャパシタは開放除去を行う．すると残りは必然的に直流抵抗回路になり，回路方程式は線形代数方程式（連立方程式）になる．

図 1 についてみれば，キャパシタを開放除去することになり，R_1 と R_2 の直列抵抗回路になるので，v の定常解は，分圧比で $ER_2/(R_1+R_2)$ と直ちに求まる．

過渡応答を含めた初期値問題は別の講義でカバーされるが[*1]，おそらくラプラス変換が用いられるのではないだろうか．微分方程式という難題が積分変換で代数方程式に変換され，計算が簡単になる．

本講義の 2 章以降，交流回路解析においても同様に，定常解をある方法に従って微分方程式を代数方程式に置き換える．その後の解く手順は機械的になって，問題が「簡単に」なったと言えるが，問題は逆変換である．これは講義において時間をかけて述べる．

[*1] とはいえ，教科書の 8 章に詳述されているので，興味のあるひとは読んでみてほしい．