

大规模结构奇异值分析与综合的 优化LMI算法及其应用

富饶

申请
理学博士
学位论文

导师: 黄琳 教授

北京大学
力学与工程科学系
系统与控制中心
2003.5

献给我的父母...

致谢

本文的工作是在导师黄琳教授的悉心指导下完成的。作为一个初涉控制与电力系统领域的力学专业学生，我在研究中遇到了许多困难与挫折，黄老师始终给予我极大的鼓励和支持，并以广博的学识、睿智的思想以及严谨的治学态度，指导我在学术的道路上不断前进。黄老师踏实务实、朴实无华、淡泊名利的风格和品质，对我的工作和生活产生了深刻的影响，我深信，黄老师这些在学术领域以外对我的影响也是我读博士期间最大的收获之一，并将会使我受益终生。在此，谨向黄琳老师表达我最衷心的感谢和崇高的敬意。

在我读博士期间，还有幸得到了叶庆凯教授的指导，叶老师对我的问题给予了耐心而详细的解答，并给我提供了重要的参考文献和指导，对我的论文工作提出了很多有益的建议，在此谨向叶庆凯老师表示衷心的感谢。

同时还要感谢一般力学教研室的王龙教授、耿志勇副教授、楚天广副教授、王金枝副教授等老师给予我的帮助和鼓励，他们活跃的学术思想给了我很多有益的启示。

另外，我要感谢系统与控制研究中心的所有同窗们，特别是段志生博士和杨莹博士，和他们的交流和讨论使我开阔了思路，增进了知识，这将是我今后从事科研工作的宝贵财富。

最后，向我的家人、朋友、同学表示衷心的感谢，能取得今天的成果，也离不开你们的理解与支持。

谨把这篇博士论文献给所有关心帮助过我的人。

摘要

通过采用S-过程和正交投影的方法, 本文给出了一个新的基于LMI的大规模混合结构奇异值分析与综合方法以及相应的优化算法, 并将理论与算法的结果应用到实际控制工程(电力系统)中以验证其有效性。包括:

- 在分析现有方法在处理大规模结构奇异值分析与综合问题时所出现的不足的基础上, 通过采用S-过程给出了鲁棒LMI可解性的充分性判据, 在此基础上, 给出了一个计算复杂度更小的大规模动态系统的结构奇异值上界。该方法是基于状态空间的因而避免了频率扫描过程。基于以上结果, 给出了状态反馈控制器存在性的LMI判据。
- 在分析通常的投影迭代算法在求解大规模结构奇异值分析与综合问题时出现的病态最小二乘问题的基础上, 采用对优化空间进行正交分解的方法, 给出了优化的LMI算法, 克服了传统算法在可行解域边界附近严重病态化的问题, 同时该处理方法可以有效地利用原始问题的结构信息来加速求解, 而且适合在分布式并行环境下求解大规模的结构奇异值分析与综合问题。
- 为验证以上方法的有效性, 将所提出的结构奇异值方法应用到实际控制工程(电力系统)中, 分析了系统对运行点(平衡点)不确定性的鲁棒稳定性, 求解了针对该不确定性的鲁棒 μ 控制器并估算了系统在该不确定性影响下的稳定裕度。数值仿真结果表明, 同当前广泛应用的PSS+AVR控制方式相比, 本文所给出的 μ 鲁棒控制器可以明显地改善系统的鲁棒稳定性和鲁棒性能。

关键词: 结构奇异值; 线性矩阵不等式; 半正定规划; 电力系统; 励磁控制器

Abstract

By using S-procedure and orthogonal decomposition techniques, this paper presents a new LMI-based approach for the large-scale mixed μ (structured singular value) analysis and synthesis problem and the corresponding optimized algorithms. To demonstrate the effectiveness of the proposed method, the theoretical and algorithmic results were applied to practical control engineering(power system):

- Based on the analysis of currently available methods when dealing with large-scale μ analysis and synthesis problem, a sufficient condition of the feasibility of robust LMI was given by using S-procedure, and consequently, a less computational expensive μ upper bound for a large-scale dynamic system was derived. The proposed approach bases on state-space and requires no frequency sweeping. Based on this result, an LMI criterion for the existence of a full-state feedback μ controller was given.
- By analyzing the ill-conditioned least-squares problem when dealing with large-scale μ analysis and synthesis problem using generic projective iteration method, a specially optimized LMI algorithm is devised using orthogonal decomposition technique. The new algorithm can handle the severe illness arises when the generic algorithm approaches the boundary of feasibility domain and furthermore, the structure information can also be utilized to accelerate the algorithm, and moreover, the proposed algorithm is also parallel efficient to solve large-scale μ analysis and synthesis problem under distributed-memory parallel environment.
- In order to demonstrate the effectiveness of the proposed method, aforementioned LMI criterion and optimized LMI solver was applied to practical control engineering(power system) to analysis the robustness of system stability subject to uncertain operation conditions(equilibrium point) and solve the controller synthesis problem that guarantees the robust stability for a given variations in operation conditions and evaluate the stability margin under such uncertainty. Numerical simulation results based on the presented control strategy are compared fa-

vorably with that based on classical widely used AVR+PSS control in respect of robust stability and robust performance.

Keywords: Structured Singular Value; Linear Matrix Inequality; Semidefinite Programming; Power System; Excitation Controller

目录

致谢	v
摘要	vii
Abstract	ix
第一章 引言	1
1.1 概述	1
1.2 结构奇异值理论	2
1.2.1 鲁棒控制的一般形式	3
1.2.2 结构奇异值理论	4
1.2.3 研究现状及主要方法	6
1.2.4 实际应用	8
1.3 研究内容与研究方法	9
1.4 主要结果与论文结构	9
第二章 基于LMI的 μ 分析与综合	11
2.1 预备知识	11
2.2 基于LMI的 μ 分析综合方法	12
第三章 优化LMI算法与算例	23
3.1 预备知识	23
3.2 LMI算法的一般形式	24
3.3 优化投影迭代算法	27
3.4 算法优化	28
3.5 算法实现	37
3.6 算法并行化	37
第四章 μ 理论在电力系统中的应用	39
4.1 系统模型	39
4.2 SMIB励磁控制系统	42
4.2.1 系统模型	42
4.2.2 稳态平衡点	43
4.2.3 参数化线性模型	44
4.3 数值仿真	48
4.4 数值结果分析	51
参考文献	65

插图目录

1.1	鲁棒控制系统一般形式	3
1.2	$G(s)$ - Δ 闭环系统	5
1.3	$\mathcal{F}_u(G_P(s), \Delta)$	6
2.1	状态反馈 μ 控制器	20
4.1	SMIB系统的 μ 方法	41
4.2	4机并列SMIB系统	42
4.3	d-q坐标	43
4.4	SMIB系统等效模型	46
4.5	SMIB(AVR+PSS)系统等效模型	46
4.6	AVR+PSS	47
4.7	系统极点分布(开环系统)	52
4.8	系统极点分布(AVR+PSS闭环系统)	52
4.9	系统极点分布(μ 控制器闭环系统)	53
4.10	$\mu_{\Delta}(G)$ 上界(开环系统)	54
4.11	$\mu_{\Delta}(G)$ 上界(AVR+PSS闭环系统)	54
4.12	$\mu_{\Delta}(G)$ 上界(μ 控制器闭环系统)	55
4.13	扰动方案1	56
4.14	扰动方案2	56
4.15	扰动方案3	57

第一章

引言

1.1 概述

控制理论的形成和发展，从1932年Nyquist发表关于反馈放大器稳定性的经典论文开始，到现在为止已经经历了经典控制理论阶段和现代控制理论阶段。经典控制理论阶段所涉及的对象是线性单回路系统，而现代控制理论的研究重点是多变量线性系统。目前对线性系统的分析与设计已形成了一套完整的理论体系[1, 2, 3]，并已成功地应用于国防和工业控制问题。

我们知道，当系统中的不确定性可以用一个范数有界的摄动块刻画时，系统对不确定性的最大容许极限(鲁棒性)可以用小增益定理来描述。特别地，当我们只考虑稳定的传递函数和稳定的摄动块时，小增益定理用矩阵奇异值给出的系统鲁棒性估计是无保守的。因此，以矩阵奇异值为性能指标的设计方法在70年代末至80年代初得到了广泛的研究，并成为设计多变量控制系统的一个重要手段。稍后提出的 \mathcal{H}_∞ 控制理论更使得基于奇异值分析的设计方法得到了极大的发展和完善。

但是需要指出的是，在许多实际问题中系统的未建模动态并不能简单地用一个范数有界的摄动块来刻画。同时对于含有未建模动态的系统常常可以获得部分内部结构信息，此时若依然采用小增益定理来估计系统鲁棒性，则结论的保守性将会很大。为了克服传统的奇异值分析的这种过于“粗糙”的缺陷，[4]首先提出了结构奇异值(Structured Singular Value, μ)的概念。这一概念一经提出很快就得到了控制理论界很多学者的关注，特别是经过Doyle[4]和Safonov[5]等人的进一步研究和整理，结构奇异值理论逐步建立和完善起来，并与Kharitonov有限检验理论， \mathcal{H}_∞ 控制理论一起成为现在鲁棒控制理论中的重要组成部分。

但在一般情况下， μ 的真实值很难计算(其在本质上为N-P Hard问题)，通常只能对 μ 的上界进行估算，而要对具体系统设计 μ 控制器则更加困难。迄今为止比较有效的 μ 分析综合方法主要是以[6]为基础的频域G-D乘子(D-K迭代)方法和基于[7]的LMI方法([8]等)。G-D乘子(D-K迭代)方法是最早提出的 μ 分析综合方法，该方法理论上比较成熟，结合频率扫描技术可以得到很精确的 μ 分析结果，但是其在计算的可靠性，收敛性和控制器结构(控制器阶次无法确定)方面有很多尚未解决的问题，因而在大规模复杂系统的

控制器设计中比较难于应用。LMI方法由于提出较晚因而在理论方面尚不如G-D乘子(D-K迭代)方法研究得深入,但LMI方法在收敛性,计算精度上有更好的数值性态(其本质为凸优化问题),并且对控制器结构上的各种约束条件(阶次,反馈形式等)比较容易实现。但是一般形式的LMI方法的计算量过大,如果不进行预优化处理,即使对于中等规模的问题应用起来也很困难。

由此可见,现有的结构奇异值方法,无论是传统的频域方法还是较新提出的LMI方法,在处理复杂系统的分析与综合问题时,计算量过大(指数规模)的缺点都严重限制了其在实际控制工程中的应用。要克服这一缺点,理论分析方法目前尚无突破性的进展,而随着内点法等高效数值算法的提出,数值方法正在成为一种有效的处理手段并受到越来越多的重视,正如Packard和Doyle在[9, page 105]中所总结的:

“...These results strongly suggest that it is futile to pursue exact methods for computing μ in the purely real or mixed case for even moderate (less than 100) number of real perturbations, unless one is prepared not only to solve the real μ problem but also to make fundamental contributions to the theory of computational complexity.”

而[10]则再次确认了现代计算数学与计算技术在控制理论研究中的重要性。

本文拟通过采用S-过程和正交投影的方法,研究针对大规模系统的结构奇异值分析与综合方法以及相应的优化LMI算法,给出新的适合于处理大规模结构奇异值分析与综合问题的LMI形式判据,通过采用对优化空间进行正交分解的方法,解决算法中的病态最小二乘问题,克服传统算法在可行解域边界附近严重病态化的问题,并将理论与算法的结果结合到具体的实际应用(电力系统)中。

1.2 结构奇异值理论

我们知道,无论是建立在传递函数基础上的经典反馈控制理论,还是建立在状态空间描述基础上的现代控制理论在分析与综合系统时均要求知道被控对象精确的数学模型。但是由于建模方法的局限性及实际过程自身参数摄动现象的存在,对象数学模型中一般都不可避免地存在着各种形式的不确定性。在很多实际控制工程与系统辨识中,通常都需要考虑带有不确定参数的系统模型,甚至可能是带有未建模动态过程的系统模型。在这些模型中,参数不确定性通常表现为状态空间微分方程或者是系统传递函数矩阵中的不确定参数,而未建模动态不确定性则一般表现为频域传递函数中带有某种权函数的范数有界的摄动。因此,获得被控对象的精确数学模型在实际控制工程中通常是很困难的,甚至是不可能的。针对传统控制理论与现代控制理论的这一缺陷,控制理论界针对不确定性对系统性能影响的研究产生了鲁棒控制理论,并使其向深层次化,实用化的方向发展。

1.2.1 鲁棒控制的一般形式

所谓鲁棒性分析与鲁棒控制，就是当系统存在一定程度的参数不确定性及一定限度的未建模动态时，分析闭环系统的稳定性或动态性能品质的理论方法，或者是设计一种控制器，使得在上述参数不确定性及未建模动态存在的情况下，闭环系统仍能保持稳定，并满足一定的动态性能品质指标。

虽然不确定性是未知的，但是总可以假定其是有界的。在鲁棒控制理论中，将不确定性分为参数不确定性及未建模动态。前者通常不改变系统的结构及阶次，只是使对象的参数发生摄动，对系统的影响发生在低频段。后者则表现为高频不确定性，通常不知道其结构和阶次，但可通过频率响应实验测出其幅值界限。根据研究的需要，可将未建模动态分为加性不确定性，乘性不确定性和分子分母不确定性。为了处理上述不确定系统的鲁棒分析与鲁棒综合问题，控制理论界很早就提出了很多研究方法，这其中较早期的文献可追溯到[11]的研究工作，该文研究了带有非结构动态不确定性的系统的鲁棒稳定性分析问题，并给出了严格的稳定性判据。对于这样的系统，随后提出了一些针对单一范数有界摄动情况的类似的结论[12, 13, 14]。这些七十年代末期针对多变量鲁棒控制系统的研究工作主要集中于对小增益定理和圆判据的研究，并以矩阵奇异值的形式给出了带有单一的范数有界摄动的线性系统的鲁棒稳定性充要条件，另一个研究重点是将系统传递函数矩阵奇异值作为多变量系统的广义Bode图，以此来研究多变量系统鲁棒稳定性。这些基于矩阵奇异值的研究工作极大地促进了矩阵奇异值作为一种有效的数学工具在鲁棒控制中的广泛应用，但同时，也不能不注意到尽管这些针对非结构动态不确定性的研究成果对于参数不确定性的情况仍然有效，但在很多应用中，其结论明显过于粗糙与保守。另外在这些研究中，鲁棒性能问题也未能得到很好的解决。针对这些混合有参数不确定性的系统，更精确(更少保守性)的鲁棒分析与综合方法的研究就成为控制理论中的一个研究重点。

通过对混合有结构(参数)不确定性和非结构(未建模动态)不确定性的系统的深入分析，[15]提出了鲁棒控制系统的一般形式：

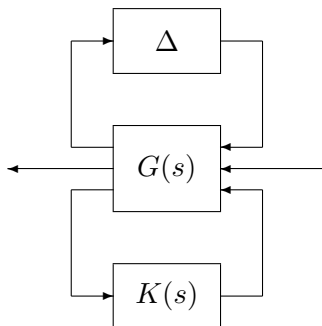


图 1.1: 鲁棒控制系统一般形式

易知任何带有(结构与非结构)不确定性的互联系统在经过重新整理后均可以具有如图 1.1所示的一般形式，其中 $G(s)$ 为(广义)标称系统， $K(s)$ 为反

馈控制器, $\Delta \in \mathbf{\Delta} \subset \mathbb{C}^{m \times m}$ 为系统不确定量且具有如下分块对角的内部结构:

定义 1.2.1 (不确定量集合). 给定非负整数 l_r, l_u 及非负整数数组 $\{k_1^r, \dots, k_{l_r}^r\}, \{k_1^u, \dots, k_{l_u}^u\}$, 其中 $\sum_{i=1}^{l_r} k_i^r + \sum_{j=1}^{l_u} k_j^u = m$, 不确定量集合 $\mathbf{\Delta} \subset \mathbb{C}^{m \times m}$ 定义为

$$\mathbf{\Delta} = \left\{ \text{diag} \left(r_1 I_{k_1^r}, \dots, r_{l_r} I_{k_{l_r}^r}, \Delta_1, \dots, \Delta_{l_u} \right) \mid \begin{array}{l} r_i \in \mathbb{R}, i \in \underline{l_r}; \Delta_j \in \mathbb{C}^{k_j^u \times k_j^u}, j \in \underline{l_u} \end{array} \right\} \quad (1.1)$$

并记

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\mathbf{\Delta}} &= \{ \Delta \mid \Delta \in \mathbf{\Delta}, \bar{\sigma}(\Delta) \leq 1 \} \\ \mathbf{\Delta}_r &= \mathbf{B}_{\mathbf{\Delta}}|_{\Delta_j \equiv 0, j \in \underline{l_u}} \\ \mathbf{\Delta}_u &= \mathbf{B}_{\mathbf{\Delta}}|_{k_i^r = 0, i \in \underline{l_r}} \end{aligned}$$

注 1.2.1. 图 1.1 所示的一般形式可以刻画相当广泛的一类控制问题, 通过选取不同形式的广义标称系统 $G(s)$ 与不确定量集合 $\mathbf{\Delta}$, 可将很多控制问题归结为图 1.1 的形式, 如 \mathcal{H}_{∞} 控制问题, 模型匹配问题, 传递函数曲线拟合等问题。

对图 1.1 所示系统, 鲁棒分析与鲁棒控制的目标为当系统存在一定程度的参数不确定性与未建模动态 $\forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$ 时, 分析闭环系统 $\mathcal{F}_u(G, \Delta)$ 的稳定性与动态性能品质, 或者是设计控制器 $K(s)$, 使得在上述参数不确定性及未建模动态存在的情况下, 闭环系统 $\mathcal{F}_l(\mathcal{F}_u(G, \Delta), K(s))$ 仍能保持稳定, 并具有一定的动态性能品质。

由小增益定理可知, 当系统具有单一的范数有界非结构不确定性 ($l_r = 0, l_u = 1$) 时, 图 1.1 所示系统对 $\forall \Delta \in \mathbf{B}_{\mathbf{\Delta}}$ 稳定当且仅当

$$\|\mathcal{F}_l(G, K)\|_{\infty} \leq 1$$

成立。但是当系统具有多种来源的不确定性或具有结构不确定性 ($l_r \neq 0, l_u \neq 1$) 时, 采用小增益定理判断系统稳定性将会带来很大的保守性。与此类似, Kharitonov 有限检验理论可以有效地处理具有结构不确定性的系统分析与综合问题, 但是对于未建模动态不确定性的情况, 其有效性则还有待于深入研究。对于这种同时具有结构和非结构不确定性的系统, 精确的稳定性分析与性能分析需要比小增益定理 (\mathcal{H}_{∞} 理论) 或 Kharitonov 区间多项式理论更加精确的判据。有鉴于此, [16] 建议对现有矩阵奇异值理论进行改进与推广。这些理论与工程实际上的需要促使了结构奇异值理论的提出与发展。

1.2.2 结构奇异值理论

结构奇异值(多变量系统稳定裕度)理论是作为矩阵奇异值理论的推广由 [4]([5]) 提出来的。

定义 1.2.2 (结构奇异值[4]). 对给定常值复矩阵 $G \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和不确定量集合 Δ , 结构奇异值 $\mu_{\Delta}(G)$ 定义为

$$\mu_{\Delta}(G) = \frac{1}{\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - G\Delta) = 0 \}}$$

对于一个复矩阵 G , 结构奇异值 $\mu_{\Delta}(G)$ 的定义来自于寻找一个具有最小的 $\bar{\sigma}(\Delta)$ (最大奇异值) 和特定内部结构的摄动阵 Δ 满足 $\det(I - G\Delta) = 0$ 。很显然, 结构奇异值 μ 取决于复矩阵 G 和摄动阵 Δ 的结构。容易证明([17]), 当 Δ 为单一复矩阵时, $\mu = \bar{\sigma}$, 而当 Δ 为复对角阵时, $\mu = \rho$ (矩阵谱半径)。所以 μ 可看作是矩阵奇异值理论和矩阵特征值理论的推广, $\mu_{\Delta}(G)$ 刻画了具有一定结构的摄动阵 Δ 对复矩阵 G 的稳定性的影响程度的一种度量。注意到对于以上 $\mu_{\Delta}(G)$ 的定义, 实际上也可以从闭环系统稳定性的角度来示意性地加以解释: 虽然在结构奇异值的定义中, G, Δ 均为常值复矩阵, 并不直接构成动态系统, 但从以后的分析中可知 $\mu_{\Delta}(G)$ 与动态系统有着非常紧密的联系, 所以将其作为闭环系统考虑也是合理的。考虑图 1.2 所示闭环系统:

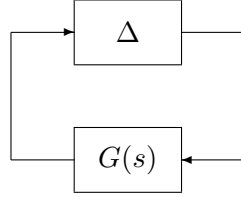


图 1.2: $G(s)$ - Δ 闭环系统

由图 1.2 可知, 当 $I - G\Delta$ 非奇异时, 该回路系统有唯一解, 即可称系统 $G(s)$ - Δ 是“稳定”的, 当 $I - G\Delta$ 奇异时, 该回路系统有无穷多解, 且解可以任意大, 即系统 $G(s)$ - Δ 是“不稳定”的。从这个意义上说, $\mu_{\Delta}(G)$ 给出了能引起系统不稳定的(范数意义上)最小的块对角结构式不确定性, 且这个使系统不稳定的 $\Delta \in \Delta$ 的范数为 $1/\mu_{\Delta}(G)$ 。对以上过程的严格论证可得以下定理:

定义 1.2.3. 对给定 Δ 如(1.1), 定义传递函数集合 $\mathcal{M}(\Delta)$:

$$\mathcal{M}(\Delta) = \{ \Delta(\cdot) \in \mathcal{RH}_{\infty} : \Delta(s) \in \Delta, \forall s \in \bar{\mathbb{C}}_+ \}$$

定理 1.2.1 (鲁棒稳定性[4]). 给定 Δ 如(1.1), $\gamma \in \mathbb{R}^+$ 及 $G(s) \in \mathcal{RH}_{\infty}$, 对 $\forall \Delta \in \mathcal{M}(\Delta), \|\Delta\|_{\infty} < 1/\gamma$, 图 1.2 所示反馈系统适定、内稳定当且仅当

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta}(G(j\omega)) \leq \gamma$$

定理 1.2.1 将混合不确定性系统的鲁棒性分析问题等价地归结为上界 $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta}(G(j\omega))$ 的判定问题。对于鲁棒性能问题, 同样可以在结构奇异值理论的统一框架下, 将其归结为某种形式的结构奇异值上界判定问题, 例如对于最典型的 \mathcal{H}_{∞} 鲁棒性能问题, 有以下结论:

定理 1.2.2 (鲁棒性能[4]). 给定 Δ 如(1.1), $\gamma \in \mathbb{R}^+$, 对 $\forall \Delta \in \mathcal{M}(\Delta)$, $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$, 图 1.3所示反馈系统适定、内稳定且 $\|\mathcal{F}_u(G_P(s), \Delta)\|_\infty \leq \gamma$ 当且仅当

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta_P}(G_P(j\omega)) \leq \gamma$$

其中:

$$\Delta_P = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_f \end{bmatrix} \middle| \Delta \in \Delta, \Delta_f \in \mathbb{C}^{l_p \times l_p} \right\}$$

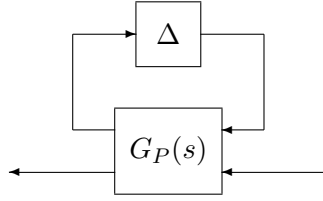


图 1.3: $\mathcal{F}_u(G_P(s), \Delta)$

由定理 1.2.1与定理 1.2.2可知, 对图 1.1中反馈控制系统的鲁棒稳定性与鲁棒性能分析综合问题可归结为:

问题 1.2.1. 对给定不确定量集合 Δ , $\gamma \in \mathbb{R}^+$ 及广义标称系统 $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$, 判断频域条件

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_\Delta(G(j\omega)) \leq \gamma \quad (1.2)$$

是否满足或是构造控制器 $K(s)$ 使之满足。其中 $G(s)$ 有以下状态空间实现

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_{l \times l} & B_{l \times m} \\ \hline C_{m \times l} & D_{m \times m} \end{array} \right] \quad (1.3)$$

不确定量集合 Δ 与结构奇异值 $\mu_\Delta(G)$ 分别如定义 1.2.1和定义 1.2.2所定义。

1.2.3 研究现状及主要方法

由上一节的分析可知, 结构奇异值理论可将具有混合不确定性的系统的鲁棒稳定性与鲁棒性能问题等价地归结为统一的结构奇异值 $\mu_\Delta(G)$ 的频域上界判定问题。由于其广泛的适用性及其可以精确地处理具有混合不确定性的系统的鲁棒分析与综合问题, 结构奇异值理论在由[4]([5])提出以后, 就一直是鲁棒控制理论研究中的重点。但在一般情况下, μ 的真实值很难计算(其在本质上为N-P Hard问题), 通常只能对 μ 的上界进行估算。Doyle[4]在最初的研究([4])中只考虑了具有未建模动态不确定性的系统($l_r = 0$)的 μ 分析问题, 随后[18]和[19]深入探讨了该系统中 μ 的计算问题并估算了 μ 的下界。在此同时, [20]考虑了 μ 综合问题并提出了著名的“D-K”迭代方法(该结果也可见[21])。这些理论研究进展直接促进了数值算法的提

出([22])与完善([23]), 使得结构奇异值方法进一步实用化并越来越广泛地应用实际控制工程中。[9]对具有未建模动态不确定性的系统的 μ 方法做了详尽的总结。对于混合不确定性的系统的 μ 分析与综合问题, [20]最先给出了基于G-D乘子方法的初步结果(符号定义见本文附录部分):

$$\mu_{\Delta}(G) \leq \inf_{D \in \mathbb{P}_{\Delta}} \bar{\sigma}(DGD^{-1})$$

其中乘子矩阵集合 \mathbb{P}_{Δ} 定义如下:

定义 1.2.4. 对给定不确定量集合 Δ 如(1.1)定义, 矩阵集合 \mathbb{P}_{Δ} 定义为

$$\mathbb{P}_{\Delta} = \left\{ \text{diag} \left(\Delta_1, \dots, \Delta_{l_r}, \delta_1 I_{k_1^u}, \dots, \delta_{l_u} I_{k_{l_u}^u} \right) \mid \Delta_i \in \mathbb{P}_{k_i^r}, i \in \underline{l_r}; \delta_j \in \mathbb{R}_+, j \in \underline{l_u} \right\} \quad (1.4)$$

在此基础上, [6]提出了基于小增益定理的改进后的结果:

引理 1.2.1 ([6]). 对给定 Δ 如(1.1), $\gamma < \sqrt{\max(0, \alpha^*)}$ 及 $G(s)$, 有(1.2)成立, 其中

$$\alpha^* = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \alpha(j\omega)$$

$\alpha(j\omega)$ 为以下广义特征值问题的最优解

$$\begin{aligned} \alpha(j\omega) &= \min \alpha \\ \text{s.t. } &\exists D \in \mathbb{S}_{\Delta}, M \in \mathbb{G}_{\Delta} : \\ &G(j\omega)^H D G(j\omega) + j(MG(j\omega) - G(j\omega)^H M) < \alpha D, D > I \end{aligned}$$

其中乘子矩阵集合 $\mathbb{S}_{\Delta}, \mathbb{G}_{\Delta}$ 定义如下:

定义 1.2.5. 对给定不确定量集合 Δ 如(1.1)定义, 矩阵集合 \mathbb{S}_{Δ} 定义为

$$\mathbb{S}_{\Delta} = \left\{ \text{diag} \left(\Delta_1, \dots, \Delta_{l_r}, \delta_1 I_{k_1^u}, \dots, \delta_{l_u} I_{k_{l_u}^u} \right) \mid \Delta_i \in \mathbb{S}_{k_i^r}, i \in \underline{l_r}; \delta_j \in \mathbb{R}, j \in \underline{l_u} \right\} \quad (1.5)$$

定义 1.2.6. 对给定不确定量集合 Δ 如(1.1)定义, 矩阵集合 \mathbb{G}_{Δ} 定义为

$$\mathbb{G}_{\Delta} = \left\{ \text{diag} \left(\Delta_1, \dots, \Delta_{l_r}, 0_{k_1^u}, \dots, 0_{k_{l_u}^u} \right) \mid \Delta_i \in \mathbb{G}_{k_i^r}, i \in \underline{l_r} \right\} \quad (1.6)$$

此后提出的其他基于矩阵乘子方法的理论结果使 μ 控制理论与算法进一步完善, [24]研究了采用全局优化(B&B)方法计算 μ 的上界, [25]考虑了采用Osborne预条件矩阵方法([26])计算混合 μ 上界(这一方法也为[23]所采用), [27]采用自适应幂迭代算法得到了 μ 下界的改进结果, 其他结果还包括对计算 μ 上界的研究: [28, 29], 对 μ 控制方法的分析: [30, 31, 32, 33, 34], 以及针对特殊情况下 μ 的精确计算: [35, 36, 37]。[38]研究了 μ 鲁棒控制器综合问题, [39]针对D-K迭代方法提出了改进后的 μ -K控制器综合迭代算

法。[40, 41]研究了在有限频率区间上 μ 上界的估算问题, 即所谓“Skewed- μ ”问题。

以上这些研究都是基于频域的方法, 因而必不可少地需要对整个频率空间进行扫描或是在有限个频率区间上对 μ 的上界进行判断, 这导致了计算量的增加而且在 ω - μ 曲线不连续的情况下很难得到准确的结果。除此之外, 在控制器综合过程中采用的频域响应曲线拟合步骤也使得该方法的数值性态更加难以预测。针对传统频域 μ 方法的这些不足, 近来提出了一些极具发展潜力的新的研究方向。[42, 43, 44]通过回路变换将 μ 分析综合问题转换为系统正实性问题并提出了基于BMI的方法, 同时给出了改进后的基于内点法的BMI算法。[45, 46]提出了基于绝对稳定性理论和NMI(Nonlinear Matrix Inequality)的 μ 方法, 并给出了一个基于同伦变换的NMI算法。但是到目前为止, BMI和NMI的数值算法还远未成熟, 即使对于中等规模的问题, 计算过程中出现的数值病态也使其难以实际应用。[47]研究了在概率意义下的 μ 分析问题(即“Randomized μ ”)并估计了其保守性。[48]采用Perron-Frobenius定理给出了基于G-D乘子的 μ 上界的严格估计。[7]提出将计算 μ 值的问题转化为矩阵乘子的存在性问题并给出了LMI形式的初步结果, [49, 50, 51]将该方法推广并采用广义严格正实引理将该方法引入时域[8], 给出了Robust-LMI形式的系统在整个频率域上 μ 的上界:

引理 1.2.2 ([8]). 对给定 Δ 如(1.1), $\gamma \in \mathbb{R}^+$ 及 $G(s)$, 其中

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

则有(1.2)成立当且仅当对 $\forall \Delta \in \mathbf{B}_\Delta$ 存在 $P(\Delta) \in \mathbb{S}_l$, $U(\Delta) \in \mathbb{R}^{m \times l}$ 及 $V(\Delta) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 满足

$$\text{He } X_r(\Delta) > 0 \quad (1.7)$$

其中

$$X_r(\Delta) = \left[\begin{array}{cc} B\Delta U - AP & B\Delta V \\ (D\Delta - \gamma I)U - CP & (D\Delta - \gamma I)V \end{array} \right] \quad (1.8)$$

有以上引理可知, 该方法是基于状态空间描述的因而不需要频率扫描过程, 同时该方法还具有良好的数值性态(多项式时间复杂度), 而且对控制器结构的各种约束条件(阶次, 多目标综合等)也比较容易实现, 并且对控制器结构上的各种约束条件(阶次, 反馈形式等)比较容易实现, 这使得该方法能够更加有效地处理处理实际控制工程中的问题。同时也需要注意到, 一般形式的Robust-LMI方法的计算量过大, 如果不进行预优化处理, 即使对于中等规模的问题应用起来也很困难。

1.2.4 实际应用

由以上分析可知, 结构奇异值理论可以统一地处理具混合不确定性的系统的鲁棒稳定性与鲁棒性能问题, 实际上, 随着结构奇异值理论的发展完善, 其应用范围已远不止如此, 结构奇异值方法被引入到越来越多的控制理论与控制工程中。[52]将结构奇异值方法应用于系统模型匹配

中, 给出了一个分布式MIMO控制器的设计方法。[53]将结构奇异值理论推广, 提出广义结构奇异值理论并将其应用于系统复频率响应曲线拟合问题中。[54, 55]的研究工作揭示了D-稳定与结构奇异值的关系并给出了系统(强)D-稳定的结构奇异值条件。其他应用研究包括: 系统故障诊断([56, 57]), 航空飞行器控制([58, 59, 60, 61])及多回路系统控制([62])。

在电力系统方面, 文献[63]最先将 μ 方法引入到单机系统PSS设计中, 随后[64, 65]探讨了将 μ 方法引入到多机系统的鲁棒稳定性分析中, 并给出了用 μ 方法分析具有不确定参数的电力系统的鲁棒稳定性的应用框架。此后其他研究进一步扩展了 μ 方法在电力系统中的应用范围[66, 67]。这些研究采用传统的G-D乘子方法并得到了一些分析性的结果, 而对于基于LMI的 μ 方法在电力系统中的应用, 特别是电力系统的 μ 综合问题则由于理论和算法上的困难至今尚未见诸于文献。

1.3 研究内容与研究方法

本文的研究内容以复杂系统的结构奇异值分析与综合以及相应的优化LMI算法为主, 并将理论与算法的结果结合到具体的实际应用(电力系统)中, 主要包括:

1. 基于凸优化(LMI)方法的结构奇异值分析问题;
2. 基于LMI方法的结构奇异值综合问题;
3. 针对结构奇异值分析与综合问题的优化LMI(并行)算法;
4. 基于优化LMI算法的结构奇异值分析与综合方法在控制工程中的应用。

本文的研究方法主要包括:

1. 通过采用S-过程给出了一个鲁棒LMI的充分性判据, 从而得到了结构奇异值分析与综合问题的LMI形式判据。
2. 采用基于正交投影的迭代办法处理LMI算法中的最小二乘问题, 克服了传统算法在可行解域边界附近严重病态的问题, 并且该处理方法可以有效地利用原始问题的结构信息来加速求解, 而且适合在并行环境下求解大规模的结构奇异值分析与综合问题。
3. 结合实际的控制工程应用背景, 将结构奇异值方法应用到复杂系统(电力系统)中, 分析了运行点(平衡点)不确定性对系统动态特性的影响并估算了系统在该不确定性影响下的稳定裕度。

1.4 主要结果与论文结构

- 本文首先在第一章中简要介绍了结构奇异值理论的提出背景, 基本理论与研究现状以及本文需要用到的一些预备引理。

- 在此基础上，本文在第二章中通过采用S-过程将现有的鲁棒LMI形式的结构奇异值上界判据简化，得到了可验证的LMI形式的判据。
- 在第三章中，通过分析现有算法的不足，本文采用正交投影的方法克服了传统方法的病态性，得到了适合在并行环境下求解大规模的结构奇异值分析与综合问题的半正定规划算法。
- 通过第四章中的数值算例与仿真结果，验证了本文所提方法的效果。

第二章

基于LMI的 μ 分析与综合

本节将在[8]中Robust-LMI判据(引理 1.2.2)的基础上, 采用S-过程将该含有不确定量的LMI简化, 得到可验证的 μ 分析的LMI判据及其简化形式, 并将其推广到状态反馈 μ 综合的情况。所得结果同广泛应用的[6, 8]中结果相比具有相同的精确程度而具有更小的计算复杂度, 适合于处理大规模复杂系统的 μ 分析与综合问题。

2.1 预备知识

在本文中采用MATLAB符号 $[x; y]$ 表示将矩阵 y 的行向量附加在矩阵 x 的行向量之后所形成的矩阵, 其中 x, y 具有相同的列数。其他符号定义参见附录。

为以下讨论方便, 首先引入几个引理。

引理 2.1.1 (Schur补引理[68]). 对给定分块矩阵

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{12}^T & \phi_{22} \end{bmatrix}$$

以下命题等价:

1. $\phi > 0$.
2. $\phi_{11} > 0, \phi_{22} > \phi_{12}^T \phi_{11}^{-1} \phi_{12}$.
3. $\phi_{22} > 0, \phi_{11} > \phi_{12} \phi_{22}^{-1} \phi_{12}^T$.

引理 2.1.2 (投影引理[69]). 对给定矩阵 $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times q}$, 以下命题等价:

1. 存在 $X \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 满足 $\text{He}(UXV^T) + G > 0$.
2. $U^{\perp T} G U^{\perp} > 0, V^{\perp T} G V^{\perp} > 0$.

引理 2.1.3 (Finsler引理[70]). 对给定矩阵 $G = G^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 及 $U \in \mathbb{R}^{n \times p}$, 以下命题等价:

$$1. U^{\perp T} G U^{\perp} > 0.$$

$$2. \exists \sigma \in \mathbb{R} : G + \sigma U U^T > 0.$$

引理 2.1.4 (S-过程[71]). 给定不确定量集合 Δ 如定义 1.2.1及恰当维数的实矩阵 $T_1 = T_1^T, T_2, T_3, T_4$, 则有

$$T_1 + \text{He}(T_2 \Delta (I - T_4 \Delta)^{-1} T_3) > 0, \forall \Delta \in \Delta$$

成立当存在 $S \in \mathbb{P}_{\Delta}, G \in \mathbb{G}_{\Delta}$ 满足

$$\begin{bmatrix} T_1 - T_2 S T_2^T & T_3^T - T_2 S T_4^T + T_2 G \\ T_3 - T_4 S T_2^T - G T_2^T & S - G T_4^T + T_4 G - T_4 S T_4^T \end{bmatrix} > 0$$

其中 $\mathbb{P}_{\Delta}, \mathbb{G}_{\Delta}$ 分别见定义 1.2.4与定义 1.2.6。

2.2 基于LMI的 μ 分析综合方法

直接根据定义 1.2.2很难判断(1.2)是否成立, [8]采用正实引理和Multi-Convexity假定将频域中的 μ 分析问题(1.2)转化为LMI可行解的存在性问题:

定理 2.2.1 ([8]). 对给定 Δ 如(1.1), $G(s)$ 如(1.3)及 $\gamma \in \mathbb{R}^+$, 如存在 $P_i \in \mathbb{S}_l, U_i \in \mathbb{R}^{m \times l}, V_i \in \mathbb{R}^{m \times m}, Q_i \in \mathbb{Q}, i \in 0 \cup \underline{l}_r, W_j \in \mathbb{S}_{l+m}, j \in \underline{l}_r$ 满足

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} X_j + \sum_{i=1}^{l_r} r_i^2 W_i & \begin{bmatrix} U^T \\ V^T \end{bmatrix} T_C \\ T_C^T \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} & -Q \end{bmatrix} < 0, \forall r_i \in \{-1, 1\} \\ & W_i - \text{He} \left(\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} J_i \begin{bmatrix} U_i & V_i \end{bmatrix} \right) \geq 0, W_i \geq 0, \forall i \in \underline{l}_r \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} X_j &= X_r + \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} T_C Q T_C^T \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}^T \\ X_r &= \text{He} \left(\begin{bmatrix} AP - B \Delta_r U & -B \Delta_r V \\ CP + (\gamma I - D \Delta_r) U & (\gamma I - D \Delta_r) V \end{bmatrix} \right) \\ J_i &= \Delta_r|_{r_j = \delta_{ij}}, \Delta_r \in \Delta_r \\ T_C &= \begin{bmatrix} 0_{(m-k) \times k} \\ I_k \end{bmatrix}, k = \sum_{i=1}^{l_u} k_i^u \\ P &= P_0 + r_1 P_1 + \cdots + r_{l_r} P_{l_r} \\ U &= U_0 + r_1 U_1 + \cdots + r_{l_r} U_{l_r} \\ V &= V_0 + r_1 V_1 + \cdots + r_{l_r} V_{l_r} \\ Q &= Q_0 + r_1 Q_1 + \cdots + r_{l_r} Q_{l_r} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \text{diag} \left(q_1 I_{k_1^u}, \dots, q_{l_u} I_{k_{l_u}^u} \right) \mid q_i \in \mathbb{R}, i \in \underline{l}_r \right\} \end{aligned}$$

则有(1.2)成立。

虽然定理 2.2.1 可以较为准确地判断系统结构奇异值的上界 γ ，但该条件不适于处理 Δ 结构比较复杂的情况(该判据包含有 $2^{l_r} + 2l_r$ 个 $\mathcal{O}(ml_r)$ 规模的 LMI)。为了处理大规模复杂系统的结构奇异值分析与综合问题，本文在[8]的基础上采用 S-过程得到了精确程度相似而形式更为简单(含有 $2l_r + 1$ 个 $\mathcal{O}(ml_r)$ 规模的 LMI)的充分性 LMI 判据。

引理 2.2.1. 给定 $\Delta, \gamma, G(s)$ 同定理 2.2.1, (1.2) 成立当且仅当对 $\forall \Delta_r \in \Delta_r$ 存在 $X \in \mathcal{X}$ 满足

$$\text{He}(MXN^T) + LL^T > 0 \quad (2.2)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \{ \text{diag}(P, Q, Q) \mid P \in \mathbb{S}_l, Q \in \mathbb{Q} \} \\ M &= - \begin{bmatrix} A & BT_C & 0 \\ C & DT_C & 0 \\ 0 & 0 & I_k \end{bmatrix} \\ N &= \begin{bmatrix} I & BT_C & 0 \\ 0 & DT_C & 0 \\ 0 & 0 & -I_k \end{bmatrix} \\ L &= L_r \Delta_r + L_u \\ L_r &= \begin{bmatrix} B \\ D \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L_u = \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma I \\ T_C^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

证明. 由[8]可知(1.2)成立当且仅当对 $\forall \Delta \in \Delta$ 存在 $P \in \mathbb{S}_l, U \in \mathbb{R}^{m \times l}, V \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 满足

$$\text{He } X_r(\Delta) > 0 \quad (2.3)$$

其中

$$X_r(\Delta) = \begin{bmatrix} B\Delta U - AP & B\Delta V \\ (D\Delta - \gamma I)U - CP & (D\Delta - \gamma I)V \end{bmatrix}$$

易知对 $\forall \Delta \in \Delta$ 有

$$\Delta = \Delta_r + T_C \Delta_u T_C^T, \quad \Delta_r \in \Delta_r, \Delta_u \in \Delta_u$$

即

$$\text{He } X_r(\Delta) = \text{He } X_r(\Delta_r) + \text{He} \left(\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} T_C \Delta_u T_C^T \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} \right)$$

采用S-过程[70, page 23]易证(2.3)成立当且仅当对 $\forall \Delta_r \in \Delta_r$ 存在 $P \in \mathbb{S}_l, U \in \mathbb{R}^{m \times l}, V \in \mathbb{R}^{m \times m}, Q' \in \mathbb{Q}$ 满足

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \text{He } X_r(\Delta_r) - \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} T_C Q' T_C^T \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}^T & [U \quad V]^T T_C \\ T_C^T [U \quad V] & Q' \end{bmatrix} \\ = & \text{He} \left(- \begin{bmatrix} A & B T_C & 0 \\ C & D T_C & 0 \\ 0 & 0 & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & & \\ & Q & \\ & & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & B T_C & 0 \\ 0 & D T_C & 0 \\ 0 & 0 & -I_k \end{bmatrix}^T \right) \\ & + \text{He} \left(\begin{bmatrix} B \Delta_r \\ D \Delta_r - \gamma I \\ T_C^T \end{bmatrix} [U \quad V] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right) > 0 \end{aligned}$$

其中

$$Q = Q'/2 \in \mathbb{Q}$$

对上式中 U, V 项应用引理 2.1.2, 则由Finsler引理[70, page 22]有 (2.2)成立。□

引理 2.2.1中乘子 X 依赖于(参数)不确定量 Δ_r 的选取, 因而R-LMI条件(2.2) 难于直接验证。参考[72], 可假定 X 为 Δ_r 的仿射线性函数, 即

$$X(\Delta_r) = X_0 + r_1 X_1 + \cdots + r_{l_r} X_{l_r}, \quad X_0, X_i \in \mathcal{X}, \quad i \in \underline{l_r} \quad (2.4)$$

则由该假定及以下引理可得(2.2)成立的充分条件:

引理 2.2.2. 给定 Δ 如(1.1)及适当维数实矩阵 $T_1 = T_1^T, T_2, T_3, T_4$, 如存在 T 满足

$$\begin{bmatrix} (I - \Delta^T T_4^T)^{-1} \Delta^T T_2^T \\ (I - T_4^T \Delta^T)^{-1} T_2^T \end{bmatrix}^T T \begin{bmatrix} (I - \Delta^T T_4^T)^{-1} \Delta^T T_2^T \\ (I - T_4^T \Delta^T)^{-1} T_2^T \end{bmatrix} \geq 0, \quad \forall \Delta \in \Delta \quad (2.5)$$

且

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & T_4 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & T_4 \end{bmatrix}^T > 0 \quad (2.6)$$

则有

$$T_1 + \text{He} (T_2 \Delta (I - T_4 \Delta)^{-1} T_3) > 0, \quad \forall \Delta \in \Delta \quad (2.7)$$

证明. 对 $\forall \Delta \in \Delta$ 及任意适当维数矢量 u 定义 p, q :

$$\begin{aligned} p &= (I - \Delta^T T_4^T)^{-1} \Delta^T T_2^T u \\ q &= (I - T_4^T \Delta^T)^{-1} T_2^T u \end{aligned}$$

易证 p, q 满足

$$q = T_2^T u + T_4^T p$$

由(2.5)有

$$u^T \begin{bmatrix} (I - \Delta^T T_4^T)^{-1} \Delta^T T_2^T \\ (I - T_4^T \Delta^T)^{-1} T_2^T \end{bmatrix}^T T \begin{bmatrix} (I - \Delta^T T_4^T)^{-1} \Delta^T T_2^T \\ (I - T_4^T \Delta^T)^{-1} T_2^T \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T T \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.8)$$

由(2.6)有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & T_4 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & T_4 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & T_4 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & T_4 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}^T T \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

考虑到(2.8)则有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T_1 & T_3^T \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} \\ &= u^T T_1 u + \text{He}(p^T T_3 u) \\ &= u^T T_1 u + \text{He}(u^T T_2 \Delta (I - T_4 \Delta)^{-1} T_3 u) \\ &= u^T (T_1 + \text{He}(T_2 \Delta (I - T_4 \Delta)^{-1} T_3)) u > 0 \end{aligned}$$

即有(2.7)成立。 \square

定理 2.2.2. 给定 $\Delta, \gamma, G(s)$ 同定理 2.2.1, 令 $a = l + m + k$, 如存在 $X_0, X_i \in \mathcal{X}, S_i \in \mathbb{S}_a, R_i \in \mathbb{P}_a, G_i \in \mathbb{G}_a, i \in \underline{l_r}$ 满足

$$R_i + S_i \geq 0, i \in \underline{l_r}$$

及

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_{31}^T & H_{32}^T & \dots & H_{3l_r}^T \\ H_{31} & H_{41} & 0 & \dots & 0 \\ H_{32} & 0 & H_{42} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{3l_r} & 0 & 0 & \dots & H_{4l_r} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.9)$$

则有(1.2)成立, 其中

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{He}(M X_0 N^T) - \sum_{i=1}^{l_r} R_i + L_u L_u^T \\ H_{3i} &= M X_i N^T + G_i + L_i L_u^T \\ H_{4i} &= \text{He} D_i - S_i \\ D_i &= L_i L_i^T / 2 \\ L_i &= L_r \Delta_r|_{r_j=\delta_{ij}}, \Delta_r \in \mathbf{\Delta}_r, i, j \in \underline{l_r} \end{aligned}$$

证明. 已知

$$L = L_r \Delta_r + L_u = \sum_{i=1}^{l_r} (r_i L_i) + L_u$$

注意到

$$L_i L_j^T = 0, \quad i, j \in \underline{l_r}, \quad i \neq j$$

则由(2.4), (2.2)可表示成

$$\begin{aligned} & \text{He}(MXN^T) + LL^T \\ &= \text{He}(MX_0N^T) + \text{He} \sum_{i=1}^{l_r} (r_i MX_i N^T) \\ & \quad + (\sum_{i=1}^{l_r} (r_i L_i) + L_u)(\sum_{i=1}^{l_r} (r_i L_i) + L_u)^T \\ &= \text{He}(MX_0N^T) + L_u L_u^T \\ & \quad + \text{He}(\sum_{i=1}^{l_r} r_i (MX_i N^T + L_i L_u^T)) \\ & \quad + \text{He}(\sum_{i=1}^{l_r} r_i^2 L_i L_i^T / 2) \\ &= T_1 + \text{He}(T_2 \tilde{\Delta} (I - T_4 \tilde{\Delta})^{-1} T_3) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{He}(MX_0N^T) + L_u L_u^T \\ T_2 &= [T_2^1 \quad T_2^2 \quad \dots \quad T_2^{l_r}], \quad T_2^i = [I \quad 0] \\ T_3 &= [T_3^1; T_3^2; \dots; T_3^{l_r}], \quad T_3^i = [MX_i N^T + L_i L_u^T; I] \\ T_4 &= \text{diag}(T_4^1, T_4^2, \dots, T_4^{l_r}), \quad T_4^i = [0 \quad D_i; 0 \quad 0] \\ \tilde{\Delta} &= \text{diag}(r_1 I_{2a}, r_2 I_{2a}, \dots, r_{l_r} I_{2a}) \end{aligned}$$

即(2.2)等价于判断

$$T_1 + \text{He} \left(T_2 \tilde{\Delta} (I - T_4 \tilde{\Delta})^{-1} T_3 \right) > 0, \quad \forall \tilde{\Delta} \in \tilde{\Delta}$$

其中

$$\tilde{\Delta} = \{ \text{diag}(r_1 I_{2a}, r_2 I_{2a}, \dots, r_{l_r} I_{2a}) \mid r_i \in \mathbb{R}, |r_i| \leq 1, i \in \underline{l_r} \}$$

根据 $\tilde{\Delta}$ 结构, 构造矩阵乘子集合

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_{\tilde{\Delta}} &= \{ \text{diag}(S_1, \dots, S_{l_r}) \mid S_i \in \mathbb{S}_{2a}, i \in \underline{l_r} \} \\ \mathbb{R}_{\tilde{\Delta}} &= \{ \text{diag}(R_1, \dots, R_{l_r}) \mid R_i \in \mathbb{P}_{2a}, i \in \underline{l_r} \} \\ \mathbb{G}_{\tilde{\Delta}} &= \{ \text{diag}(G_1, \dots, G_{l_r}) \mid G_i \in \mathbb{G}_{2a}, i \in \underline{l_r} \} \end{aligned}$$

其中记

$$\begin{aligned} S_i &= [S_{11i} \quad S_{12i}; S_{12i}^T \quad S_{22i}], \quad S_{11i} \in \mathbb{S}_a \\ R_i &= [R_{11i} \quad R_{12i}; R_{12i}^T \quad R_{22i}], \quad R_{11i} \in \mathbb{P}_a \\ G_i &= [G_{11i} \quad G_{12i}; -G_{12i}^T \quad G_{22i}], \quad G_{11i} \in \mathbb{G}_a, \quad i \in \underline{l_r} \end{aligned}$$

则易证对任意 T

$$T = \begin{bmatrix} S & G \\ G^T & R \end{bmatrix}, \quad S \in \mathbb{S}_{\tilde{\Delta}}, R \in \mathcal{R}_{\tilde{\Delta}}, G \in \mathbb{G}_{\tilde{\Delta}} \quad (2.10)$$

且满足

$$\begin{aligned} G_{12i} + I_a &= 0 \\ D_i G_{22i} - S_{12i} &= 0 \\ S_{22i} &= R_{22i} = 0 \\ D_i R_{12i}^T &\in \mathbb{G}_a \\ R_i + S_i &\geq 0, \quad i \in \underline{l_r} \end{aligned} \quad (2.11)$$

时有(2.5)成立(对 $\forall \Delta \in \tilde{\Delta}$)。将 T 带入(2.6)并记

$$\begin{aligned} S_i &= S_{11i} \\ R_i &= R_{11i} \\ G_i &= -D_i R_{12i}^T - G_{11i}, \quad i \in \underline{l_r} \end{aligned}$$

即可得(2.9)，由引理 2.2.2该定理得证。 \square

当对精度要求不高或问题规模较大时，可对矩阵乘子 T 的结构进一步附加约束(同时也会带来一定的保守性)，得到以下定理 2.2.2简化形式：

推论 2.2.1. 给定 $\Delta, \gamma, G(s)$ 同定理 2.2.1，如存在 $X_0, X_i \in \mathcal{X}, Y_i \in \mathbb{R}^{a \times a}, i \in \underline{l_r}$ 满足

$$\text{He } Y_i \geq 0, \quad i \in \underline{l_r}$$

及

$$\begin{bmatrix} H_1 & H_{31}^T & H_{32}^T & \dots & H_{3l_r}^T \\ H_{31} & H_{41} & 0 & \dots & 0 \\ H_{32} & 0 & H_{42} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{3l_r} & 0 & 0 & \dots & H_{4l_r} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.12)$$

则有(1.2)成立，其中

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{He}(MX_0N^T - \sum_{i=1}^{l_r} Y_i) + L_u L_u^T \\ H_{3i} &= MX_i N^T + Y_i - Y_i^T + L_i L_u^T \\ H_{4i} &= \text{He}(D_i + Y_i) \end{aligned}$$

证明. 推导过程略。 \square

推论 2.2.2. 给定 $\Delta, \gamma, G(s)$ 同定理 2.2.1, 如存在 $X_0, X_i \in \mathcal{X}, R_i = \text{diag}(R'_i, R''_i), R'_i \in \mathbb{P}_{l+m}, R''_i \in \mathbb{P}_k, i \in \underline{l_r}$ 及 $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$ 满足(2.9)及

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \eta \end{bmatrix} \geq 0$$

则有(1.2)成立, 其中

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{He}(MX_0N^T) - \sum_{i=1}^{l_r} R_i + \tilde{H}_1 \\ \tilde{H}_1 &= \begin{bmatrix} 0_l & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^2 I - \lambda T_C T_C^T & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \gamma^2 \eta) I_k \end{bmatrix} \\ H_{3i} &= MX_i N^T + L_i L_u^T \\ H_{4i} &= \text{He } D_i + R_i, \quad i \in \underline{l_r} \end{aligned}$$

证明. 对(2.10)附加以下约束

$$\begin{aligned} S_i &= -R_i \\ D_i R_{12i}^T &= -G_{11i}, \quad i \in \underline{l_r} \end{aligned} \tag{2.13}$$

考虑到

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \eta \end{bmatrix} \geq 0 \iff \begin{bmatrix} \lambda T_C T_C^T & -\gamma T_C \\ -\gamma T_C^T & \gamma^2 \eta I \end{bmatrix} \geq 0$$

将右式代入 $L_u L_u^T$ 中消掉非对角项, 考虑到 $\text{He}(MX_0N^T), \text{He } D_i$ 项的对角结构即可得证(推导过程略)。 \square

当对求解效率有更高要求时, 可以直接由引理 1.2.2得以下判据:

定义 2.2.1. 对给定不确定量集合 Δ 如(1.1)定义, 矩阵集合 \mathbb{T}_Δ 定义为

$$\mathbb{T}_\Delta = \left\{ \begin{bmatrix} S & -G \\ G & -S \end{bmatrix} \middle| S \in \mathbb{P}_\Delta, G \in \mathbb{G}_\Delta \right\} \tag{2.14}$$

其中 $\mathbb{P}_\Delta, \mathbb{G}_\Delta$ 见定义 1.2.4与定义 1.2.6。

定理 2.2.3. 给定 $\Delta, \gamma, G(s)$ 同定理 2.2.1, 如存在 $Y \in \mathcal{Y}$ 满足

$$\text{He}(UYV^T) > 0 \tag{2.15}$$

则有(1.2)成立, 其中

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} -A & 0 & B \\ -C & \gamma I & D \end{bmatrix} \\ V &= \begin{bmatrix} I & 0 & B \\ 0 & \gamma I & D \end{bmatrix} \\ \mathcal{Y} &= \{ \text{diag}(P, T) \mid P \in \mathbb{S}_l, T \in \mathbb{T}_\Delta \} \end{aligned} \tag{2.16}$$

证明. 易知

$$\begin{aligned}
& \text{He } X_r(\Delta) \\
&= \text{He} \begin{bmatrix} B\Delta U - AP & B\Delta V \\ (D\Delta - \gamma I)U - CP & (D\Delta - \gamma I)V \end{bmatrix} \\
&= \text{He} \left(\begin{bmatrix} B\Delta \\ D\Delta - \gamma I \end{bmatrix} [U \ V] - \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} P [I \ 0] \right) \\
&= \text{He} \left(\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \Delta [U \ V] - \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma I \end{bmatrix} [U \ V] - \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} P [I \ 0] \right) \\
&= T_1 + \text{He}(T_2 \Delta (I - T_4 \Delta)^{-1} T_3)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

其中

$$\begin{aligned}
T_1 &= \text{He} \left(- \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma I \end{bmatrix} [U \ V] - \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} P [I \ 0] \right) \\
&= \text{He} \left(- \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma I \end{bmatrix} [U \ V] \right) + \text{He} \left(- \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} P [I \ 0] \right) \\
T_2 &= \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \\
T_3 &= [U \ V] \\
T_4 &= 0
\end{aligned} \tag{2.18}$$

则由引理 2.1.4可知

$$\text{He } X_r(\Delta) > 0, \forall \Delta \in \mathbf{\Delta}$$

成立的充分条件为存在 $S \in \mathbb{P}_{\mathbf{\Delta}}, G \in \mathbb{G}_{\mathbf{\Delta}}$ 满足:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} T_1 - T_2 S T_2^T & T_3^T - T_2 S T_4^T + T_2 G \\ T_3 - T_4 S T_2^T - G T_2^T & S - G T_4^T + T_4 G - T_4 S T_4^T \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T_3^T \\ T_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} \text{He} \left(- \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} P [I \ 0] \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \\
&\quad + \begin{bmatrix} \text{He} \left(- \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma I \end{bmatrix} [U \ V] \right) & [U \ V]^T \\ \begin{bmatrix} U & V \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \text{He} \left(- \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} P [I \ 0] \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \\
&\quad + \text{He} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma I \\ I \end{bmatrix} [U \ V] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^T \right) > 0
\end{aligned} \tag{2.19}$$

其中

$$T = \begin{bmatrix} S & -G \\ G & -S \end{bmatrix} \in \mathbb{T}_\Delta$$

则由引理 2.1.2 可知，其等价于

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma I \\ I \end{bmatrix}^{\perp T} \left(\begin{bmatrix} \text{He} \left(- \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma I \\ I \end{bmatrix}^{\perp} > 0 \\ & \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\perp T} \left(\begin{bmatrix} \text{He} \left(- \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \right) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & T_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\perp} > 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

考虑到

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma I \\ I \end{bmatrix}^{\perp} &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & \gamma I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{\perp} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

则有：

$$\text{He} \left(- \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 & B \\ \gamma I & D \end{bmatrix} T \begin{bmatrix} 0 & B \\ \gamma I & D \end{bmatrix}^T > 0 \quad (2.22)$$

由引理 1.2.2 即有(2.16)成立。 \square

下面考虑如图 2.1 所示状态反馈 μ 控制器的综合问题，其中

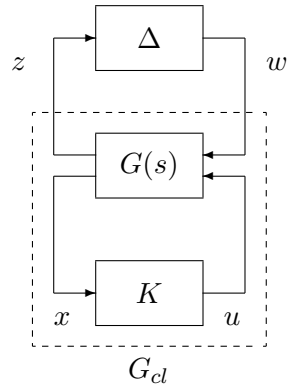


图 2.1: 状态反馈 μ 控制器

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bw + B_1u \\
z &= Cx + Dw + B_2u \\
u &= Kx \\
w &= \Delta z, \Delta \in \mathbf{B}_\Delta
\end{aligned} \tag{2.23}$$

定义

$$G_{cl}(s) \sim \left[\frac{A + B_1K}{C + B_2K} \middle| \frac{B}{D} \right] \tag{2.24}$$

很显然如果直接对 $G_{cl}(s)$ 应用定理 2.2.2, 将出现BMI形式的状态反馈控制器存在性条件。而一般形式的BMI问题通常是NP-Hard问题, 从而难以数值求解。为避免求解BMI问题, 需要对定理 2.2.2 中的 P 的形式附加约束, 即假定 X 矩阵中的 P 分块不依赖于不确定量 Δ 的选取, 即假定

$$P_i \equiv 0, i \in \underline{l}_r \tag{2.25}$$

由该假定及变量代换 $R = KP_0$ 有以下状态反馈 μ 控制器的存在性判据, 当然该判据有一定的保守性。

推论 2.2.3. 给定 $\Delta, \gamma, G(s)$ 同定理 2.2.1 及反馈矩阵 $B_1 \in \mathbb{R}^{l \times n}, B_2 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 如存在 $R \in \mathbb{R}^{n \times l}, X_0, X_i \in \mathcal{X}, Y_i \in \mathbb{R}^{a \times a}, i \in \underline{l}_r$ 满足(2.9), 则有(1.2)成立, 其中

$$\begin{aligned}
H_1 &= \text{He}(MX_0N^T - \sum_{i=1}^{l_r} Y_i + \hat{M}R\hat{N}^T) + L_u L_u^T \\
H_{3i} &= M'X_iN^T + Y_i - Y_i^T + L_i L_u^T \\
M' &= - \begin{bmatrix} 0_l & BT_C & 0 \\ 0 & DT_C & 0 \\ 0 & 0 & I_k \end{bmatrix} \\
\hat{M} &= -[B_1; B_2; 0] \\
\hat{N} &= [I; 0; 0]
\end{aligned}$$

并且状态反馈控制器可由 $K = RP_0^{-1}$ 构造。

证明. 将上式直接代入并考虑(2.25)即可得证。 \square

第三章

优化LMI算法与算例

在上一节，通过采用S-过程的方法，已将现有结构奇异值上界的LMI判据(包含有 $2^{l_r} + 2l_r$ 个 $\mathcal{O}(ml_r)$ 规模的LMI判据(2.2.1)) 简化到新的精确程度相似(见本节算例)而形式更为简单(含有 $2l_r + 1$ 个 $\mathcal{O}(ml_r)$ 规模的LMI)的充分性LMI判据(如(2.12)等)，这是本文算法研究的理论出发点，下面首先将现有LMI算法结合所得到的判据的结构进行优化，以进一步提高求解效率，使之更适合于处理大规模复杂系统的 μ 分析与综合问题。本章首先采用迭代方法对现有LMI算法进行了优化，解决了现有算法对系统硬件资源(如内存)需求过大的问题；为进一步提高求解效率，针对优化后的算法在计算中出现的病态问题，采用正交分析的方法解决了在迭代中出现的病态最小二乘问题；最后还考虑了以上算法的并行化。本节构造的优化LMI算法满足了求解大规模LMI问题在空间复杂度(内存)与时间复杂度(计算效率)两个方面的要求。

3.1 预备知识

定义 3.1.1. 对于矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ，定义内积 $\langle A, B \rangle$ 为

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B)$$

注 3.1.1. 易证定义 3.1.1所定义内积有以下性质:

$$\langle A, B + C \rangle = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$$

$$\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$$

$$\langle A, B \rangle = \langle A^T, B^T \rangle$$

$$\langle A, BC \rangle = \langle AC^T, B \rangle = \langle B^T A, C \rangle$$

在引进了线性矩阵空间的内积以后，即可引入线性矩阵空间上线性算子的转置算子：

定义 3.1.2. 对于线性矩阵空间上的线性算子 $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{m \times n} \mapsto \mathbb{R}^{p \times q}$ ，定义其转置算子 $\mathcal{A}^T : \mathbb{R}^{p \times q} \mapsto \mathbb{R}^{m \times n}$ 为满足

$$\langle Y, \mathcal{A}(X) \rangle = \langle \mathcal{A}^T(Y), X \rangle, \forall X \in \mathbb{R}^{m \times n}, \forall Y \in \mathbb{R}^{p \times q}$$

的线性算子。

定义 3.1.3. 对于给定矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 定义算子 $A \circledast B : \mathbb{S}_n \mapsto \mathbb{S}_m$:

$$(A \circledast B)(X) = (AXB^T + BXA^T) / 2, \forall X \in \mathbb{S}_n$$

注 3.1.2. 易证定义 3.1.3 所定义算子 $A \circledast B$ 的转置算子 $(A \circledast B)^T$ 为

$$(A \circledast B)^T = A^T \circledast B^T$$

3.2 LMI算法的一般形式

给定 $E_i \in \mathbb{S}_t, i \in \underline{r}$, 定义线性算子 $\mathcal{E} : \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{S}_t$: 对给定

$$x = (x_1, \dots, x_r)^T \in \mathbb{R}^r$$

有

$$\mathcal{E}(x) = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_r E_r \quad (3.1)$$

则线性矩阵不等式(可行解问题)有以下一般形式:

问题 3.2.1. 判断是否存在 $x \in \mathbb{R}^r$ 满足

$$\mathcal{E}(x) > 0 \quad (3.2)$$

易知该问题等价于判断 \mathbb{S}_t 中 r 维线性子空间

$$\text{Im } \mathcal{E} = \{\mathcal{E}(x) | x \in \mathbb{R}^r\}$$

同正定矩阵锥 \mathbb{P}_t 的交集 $\text{Im } \mathcal{E} \cap \mathbb{P}_t$ 是否为空集[3, 70]。该问题可采用投影迭代法[73]判断, 具体过程见算法 1。

由算法 1 可知, 上一章给出的定理 2.2.2(推论 2.2.1, 推论 2.2.2) 中矩阵形式的 LMI 判据(2.9)已经比较适合于理论分析, 但是为了应用算法 1 判断可解性, 需要将矩阵形式的 LMI 变换为一般形式的 LMI(如(3.2)所示), 这一过程会显著地增加算法的计算量并且丢失了原有 LMI 中的矩阵结构信息, 从而导致后续步骤无法利用这些矩阵结构信息来加速求解。而且当所求解的问题的规模较大时, 系统资源的限制也使得很难显式地生成判据(3.2)。算法 1 在求解不同规模的定理 2.2.1 与推论 2.2.1 时所占用的计算资源如表 3.1 和表 3.2 所示。由表 3.1 可知, 当应用定理 2.2.1 计算 μ 上界时, 其计算规模(内存占用量)随着问题规模的增大按指数速度增加, 即使对于初等规模的问题($m = 16, l_r = 4$), 其计算规模也超过了大多数计算机系统的内存资源, 而当问题规模进一步增大时, 现有的计算手段则无能为力。而从表 3.2 可知, 采用推论 2.2.1 计算 μ 上界, 即使对于中等规模的问题($m = 32, l_r = 8$), 现有的计算手段依然可以处理, 而且其计算复杂度为问题规模的多项式函数, 高性能计算技术的发展和运用使得该问题在更大规模的情况下依然可以得到有效的解决。表 3.3 给出了当前广泛应用的频域方法 FTD91([6])和时域 LMI 方法 CS98([8]) 算法描述, 表 3.4 给出了算法 FTD91, CS98 和算法

Algorithm 1: 投影迭代算法[73]

Data : $E_i \in \mathbb{S}_t, i \in \underline{r}$.
Result : $\text{Im } \mathcal{E} \cap \mathbb{P}_t$.
Input: κ (足够大正数)
begin
 $k \leftarrow 0$
 $W_{(0)} \leftarrow I_t$
 repeat
 $k \leftarrow k + 1$
1.1 $\bar{X} \leftarrow \underset{X \in \text{Im } \mathcal{E}}{\text{argmin}} \|W_{(k-1)}^{1/2} X W_{(k-1)}^{1/2} - I\|_F$
1.2 **begin**
 $\psi \leftarrow W_{(k-1)}^{1/2} (\bar{X} - W_{(k-1)}^{-1}) W_{(k-1)}^{1/2}$
 $\rho \leftarrow \max_{1 \leq i \leq t} |\lambda_i(\psi)|$
 $\gamma \leftarrow 1/(1 + \rho)$
 $W_{(k)} \leftarrow W_{(k-1)} - \gamma W_{(k-1)} (\bar{X} - W_{(k-1)}^{-1}) W_{(k-1)}$
 end
 $\alpha \leftarrow \|W_{(k)}^{1/2} \bar{X} W_{(k)}^{1/2} - I\|_F$
 $\beta \leftarrow \|W_{(k)}\|$
 until $\alpha < 1$ **or** $\beta > \kappa$
 if $\alpha < 1$ **then**
 $\text{Im } \mathcal{E} \cap \mathbb{P}_t \neq \emptyset$
 else
 $\text{Im } \mathcal{E} \cap \mathbb{P}_t = \emptyset$
end

表 3.1: 投影迭代算法计算规模

	m	l_r	r	t	占用内存(MB)
1	4	1	250	52	0.69
2	8	2	1596	208	34
3	16	4	11224	1280	2992
4	32	8	83760	30208	1082827
5	64	16	646240	14686208	8145547226

表 3.2: 投影迭代算法计算规模

	m	l_r	r	t	占用内存(MB)
1	4	1	157	28	0.58
2	8	2	1040	112	27
3	16	4	7528	448	1457
4	32	8	57200	1792	85378
5	64	16	445792	7168	5224506

表 3.3: μ 方法描述

μ 方法	算法描述
FTD91	算法见[6], 算法实现采用MATLAB LMI Control Toolbox[74]中mubnd命令(缺省设置), 频率扫描范围: 在 10^{-3} - 10^2 rad/s中按指数分布均匀选取200个频率值。
CS98	算法见[8]或定理 2.2.1, 算法实现采用MATLAB LMI Control Toolbox, 使用Fortran MEX技术优化, μ 上界采用二分法搜索, 初始搜索区间设为[0, 100], 绝对误差界设为 10^{-3} 。

表 3.4: μ 上界与平均计算耗时

	Problem	FTD91	CS98	算法 1
1	μ 上界	15.204	15.216	15.216
	计算耗时(s)	29.95	17.80	16.94
2	μ 上界	3.452	3.472	3.472
	计算耗时(s)	154.72	236.65	161.54

1求解随机生成的问题1和问题2时的平均CPU时间，其中可以看出算法 1与算法FTD91，CS98具有类似的计算复杂度。

为提高算法 1的求解效率及进一步减小内存需求，考虑对算法 1的优化，注意到(3.2)显式表达式的生成只影响步骤 (1.1)的求解，同时算法分析与数值计算结果表明在算法 1中，步骤 (1.1)本质上作为最小二乘问题是该算法中计算复杂度最高的步骤，基于以上考虑，本节主要考虑步骤 (1.1)的优化求解方法，同时还需要考虑的是当 W 接近奇异的情况下步骤 (1.2)的精确计算方法。

3.3 优化投影迭代算法

算法 1的核心步骤是求解最小二乘问题(步骤 (1.1))。该问题通常是采用正交分解(QR分解，SVD分解)方法求解，在不考虑计算误差的情况下，正交分解法得到的是精确解。但是当 $\mathcal{E}(x)$ 维数很高时(实际应用中 $\mathcal{E}(x)$ 的维数可达到 10^3 - 10^4 数量级)，计算误差的存在使得精确解失去意义，而且在实际应用中系统资源的限制使得 $\mathcal{E}(x)$ 的显式表达式一般很难得到。而且对特殊形式的 $\mathcal{E}(x)$ (稀疏对角分块， $\text{He}(\cdot)$ 结构等)，正交分解法无法利用 $\mathcal{E}(x)$ 的内部结构信息来加速求解，在这种情况下，可考虑采用迭代法来代替正交分解法求步骤 (1.1)的近似解。迭代法求解步骤 (1.1)只需要对给定 $x \in \mathbb{R}^r, y \in \mathbb{S}_m$ 求解 $\mathcal{E}(x)$ 与 $\mathcal{E}^T(y)$ 而无需构造 $\mathcal{E}(x)$ 的显式表达式，从而摆脱了系统资源对求解问题规模的限制，同时该方法还可以有效利用问题的内部结构信息来加速求解，同时也保持了问题原有的分块结构和稀疏性，从而提高了求解效率。

首先对矩阵形式的LMI判据做以下变换(以推论 2.2.1为例)：

推论 3.3.1. 给定 $\Delta, \gamma, G(s)$ 如引理 2.2.1，如存在 $Y \in \mathcal{Y}$ 满足

$$\text{He}(\tilde{M}Y\tilde{N}^T) > 0 \quad (3.3)$$

及

$$\text{He} Y_i > 0, i \in \underline{l_r} \quad (3.4)$$

则有(1.2)成立，其中

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} = \{ & \text{diag}(X_0, X_1, \dots, X_{l_r}; Y_1, \dots, Y_{l_r}; \sigma I_m) | \\ & X_0, X_i \in \mathcal{X}, Y_i \in \mathbb{R}^{a \times a}, i \in \underline{l_r}; \sigma \in \mathbb{R} \} \\ \tilde{M} = & [\tilde{M}_1 \quad \tilde{M}_2 \quad \tilde{L}] \\ \tilde{N} = & [\tilde{N}_1 \quad \tilde{N}_2 \quad \tilde{L}] \\ \tilde{M}_1 = & \text{diag}(M, I_{l_r} \otimes M) \\ \tilde{N}_1 = & [1; 0_{l_r \times 1}] \otimes (1_{1 \times (l_r+1)} \otimes N) \\ \tilde{M}_2 = & [-1_{1 \times l_r} \otimes I_a; I_{al_r}] \\ \tilde{N}_2 = & [1_{1 \times l_r} \otimes I_a; I_{al_r}] \\ \tilde{L} = & [L_u; L_1; L_2; \dots; L_{l_r}] \end{aligned} \quad (3.5)$$

证明. 将上式直接代入即可得证。 \square

由推论 3.3.1可知, 判据(2.9)可写成以下形式(对判据(2.12)也具有类似结果):

$$\text{He}(A_i \mathcal{L}(x) B_i^T) > 0, i \in \underline{n} \quad (3.6)$$

其中 $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times p}$, $B_i \in \mathbb{R}^{m_i \times q}$ 为已知, $x \in \mathbb{R}^r$ 为优化变量, 线性算子 $\mathcal{L} : \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^{p \times q}$ 将 \mathbb{R}^r 映射到 $\mathbb{R}^{p \times q}$ 中的线性子空间, $\mathcal{L}^T \mathcal{L} = \mathcal{I}_r$ 。 A_i, B_i 及 \mathcal{L} 的具体形式可由(3.5)确定。

令

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

定义线性算子 $\mathcal{E} : \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{S}_m$

$$\mathcal{E} : x \mapsto \text{diag}_{i=1}^n \text{He}(A_i \mathcal{L}(x) B_i^T)$$

则判据(3.6)等价于判断 \mathbb{S}_m 中 r 维线性子空间

$$\text{Im } \mathcal{E} = \{\mathcal{E}(x) | x \in \mathbb{R}^r\}$$

同正定矩阵锥 \mathbb{P}_m 是否存在交集。

对判据(3.6)应用算法 1, 考虑到

$$\begin{aligned} \psi &= W_{(k)}^{1/2} (\bar{X} - W_{(k)}^{-1}) W_{(k)}^{1/2} \\ &= W_{(k)}^{1/2} \bar{X} W_{(k)}^{1/2} - I \end{aligned}$$

而当 $k \rightarrow +\infty$ 时, 有 $\bar{X} \rightarrow W_{(k)}^{-1}$, 即随着迭代次数的增加, ψ 越来越接近于奇异, 为避免直接求解 ψ , 构造优化投影迭代算法(算法 2)。

在算法 2 中, 对于步骤 (2.1), 本文采用 CGLS 共轭梯度法来求解。考虑到线性算子 \mathcal{E} 的分块结构, 可令

$$W = \text{diag}_{i=1}^n W_i, W_i \in \mathbb{S}_{m_i}$$

构造共轭梯度算法(算法 CGLS)。

数值结果(表 3.5)表明当求解精度要求不高时, 对于(2.9)该方法比广泛使用的 LMI Control Toolbox[74]中采用的正交分解方法具有更好的求解效率。

3.4 算法优化

对算法 2(算法 CGLS)进一步的分析可知, 步骤 (2.1)(算法 CGLS)等价于求解

$$\bar{X} = \mathcal{F}(\bar{x}) \quad (3.7)$$

Algorithm 2: 优化投影迭代算法

Data : $A_i, B_i, \mathcal{L}, i \in r$.
Result : $\text{Im } \mathcal{E} \cap \mathbb{P}_m$.
Input: κ
begin
 $k \leftarrow 0$
 $W_{(0)} \leftarrow I_m$
 repeat
 $k \leftarrow k + 1$
 2.1 $\bar{X} \leftarrow \text{CGLS}(A_i, B_i, \mathcal{L}, W_{(k-1)})$
 begin
 $\phi \leftarrow W_{(k-1)}^{1/2} \bar{X} W_{(k-1)}^{1/2}$
 $\rho \leftarrow \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i(\phi) - 1|$
 $\gamma \leftarrow 1/(1 + \rho)$
 $W_{(k)} \leftarrow (1 + \gamma)W_{(k-1)} - \gamma W_{(k-1)}^{1/2} \phi W_{(k-1)}^{1/2}$
 end
 $\alpha \leftarrow \|W_{(k)}^{1/2} \bar{X} W_{(k)}^{1/2} - I\|_F$
 $\beta \leftarrow \|W_{(k)}\|$
 until $\alpha < 1$ **or** $\beta > \kappa$
 if $\alpha < 1$ **then**
 $\text{Im } \mathcal{E} \cap \mathbb{P}_t \neq \emptyset$
 else
 $\text{Im } \mathcal{E} \cap \mathbb{P}_t = \emptyset$
end

Function CGLS(A_i, B_i, \mathcal{L}, W)	
<hr/>	
Data : $A_i, B_i, i \in r; \mathcal{L}, W$.	
Result : $\bar{X} = \operatorname{argmin}_{X \in \operatorname{Im} \mathcal{E}} \ W^{1/2} X W^{1/2} - I\ _F$	
Input: ϵ	
begin	
	$k \leftarrow 0$
	$x_{(0)} \leftarrow 0_r$
	$s_{(0)} \leftarrow I_m$
3.1	$r_{(0)} \leftarrow \mathcal{L}^T \left(\sum_{i=1}^n \left((W_i^{1/2} A_i)^T \operatorname{He}(s_{(0)}) W_i^{1/2} B_i \right) \right)$
	repeat
	$k \leftarrow k + 1$
	if $k = 1$ then
	$p_{(1)} \leftarrow r_{(0)}$
	else
	$\beta_{(k)} \leftarrow \langle r_{(k-1)}, r_{(k-1)} \rangle / \langle r_{(k-2)}, r_{(k-2)} \rangle$
	$p_{(k)} \leftarrow r_{(k-1)} + \beta_{(k)} p_{(k-1)}$
3.2	$q_{(k)} \leftarrow \operatorname{diag}_{i=1}^n \operatorname{He} \left(W_i^{1/2} A_i \mathcal{L}(p_{(k)}) (W_i^{1/2} B_i)^T \right)$
	$\alpha_{(k)} \leftarrow \langle r_{(k-1)}, r_{(k-1)} \rangle / \langle q_{(k)}, q_{(k)} \rangle$
	$x_{(k)} \leftarrow x_{(k-1)} + \alpha_{(k)} p_{(k)}$
	$s_{(k)} \leftarrow s_{(k-1)} - \alpha_{(k)} q_{(k)}$
3.3	$r_{(k)} \leftarrow \mathcal{L}^T \left(\sum_{i=1}^n \left((W_i^{1/2} A_i)^T \operatorname{He}(s_{(k)}) W_i^{1/2} B_i \right) \right)$
	until $\langle r_{(k)}, r_{(k)} \rangle / \langle r_{(0)}, r_{(0)} \rangle < \epsilon$
	$\bar{X} \leftarrow \operatorname{diag}_{i=1}^n \operatorname{He} (A_i \mathcal{L}(x_{(k)}) B_i^T)$
end	

表 3.5: μ 上界与平均计算耗时

	Problem	FTD91	CS98	算法 2
1	μ 上界	15.204	15.216	15.216
	计算耗时(s)	29.95	17.80	15.85
2	μ 上界	3.452	3.472	3.472
	计算耗时(s)	154.72	236.65	128.94
3	μ 上界	5.154	—	5.186
	计算耗时(s)	950.87	—	765.84
4	μ 上界	1.891	—	1.911
	计算耗时(s)	7142.01	—	5862.45

表 3.6: μ 上界与平均计算耗时

	计算耗时(s)		
γ	FTD91	CS98	算法 2
20	—	170.56	18.85
12	—	195.32	23.56
8	—	210.95	37.25
3.5	—	228.91	43.64
3.47	154.72	236.65	128.94

其中

$$\bar{x} = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^r} \|\mathcal{F}(x) - I\|_F \quad (3.8a)$$

$$\mathcal{F} = \left(W^{1/2} \oplus W^{1/2} \right) \mathcal{E} \quad (3.8b)$$

当求解精度要求比较高时(系统的鲁棒稳定域比较小时), 直接采用(3.8b) 构造迭代方法会导致迭代次数急剧增加(表 3.6给出了判断不同精度的上界 γ 时的平均CPU时间), 从而使求解效率急剧下降。这主要是因为随着求解精度与迭代次数的增加 W 越来越接近于奇异($\|W\| \rightarrow +\infty$), 导致最小二乘问题(3.8a)急剧病态化(算子 $\mathcal{F}^T \mathcal{F}$ 的条件数为 \mathcal{F} 条件数的平方), 从而导致迭代次数剧增, 所以对于大规模和精度要求较高的(2.9)问题, 采用LMI高效求解的关键是要解决病态最小二乘问题(3.8a)。本节采用以下正交分解的方法改善了最小二乘问题(3.8a)的病态性。

对于最小二乘问题(3.8a), 已知 \bar{x} 满足(3.8a)当且仅当

$$\mathcal{F}^T \mathcal{F}(\bar{x}) = \mathcal{F}^T(I) \quad (3.9)$$

即

$$\mathcal{E}^T(W\mathcal{E}(\bar{x})W) = \mathcal{E}^T(W) \quad (3.10)$$

参考[75], 可设 W 有以下SVD分解:

$$W = USU^T, U \in \mathcal{U}$$

根据 S 对角元素的相对大小做以下分解:

$$S = \operatorname{diag}(S_1, S_2), S_1 \in \mathbb{S}_{p_1}, S_2 \in \mathbb{S}_{p_2}$$

其中 $p_1 + p_2 = \sum_{i=1}^n m_i = m$, 对 U 做相应分解, 即:

$$U = [U_1 \ U_2], U_1 \in \mathbb{R}^{m \times p_1}, U_2 \in \mathbb{R}^{m \times p_2}$$

则有

$$W = W_1 + W_2$$

其中

$$W_1 = U_1 S_1 U_1^T, \quad W_2 = U_2 S_2 U_2^T$$

易证

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \left(W_1^{1/2} \otimes W_2^{1/2} \right) \mathcal{E} \\
&= \left(\left(W_1^{1/2} + W_2^{1/2} \right) \otimes \left(W_1^{1/2} + W_2^{1/2} \right) \right) \mathcal{E} \\
&= \left(W_1^{1/2} \otimes W_1^{1/2} \right) \mathcal{E} + \left(W_2^{1/2} \otimes W_2^{1/2} \right) \mathcal{E} \\
&\quad + 2 \left(W_1^{1/2} \otimes W_2^{1/2} \right) \mathcal{E} \\
&= (U_1 \otimes U_1) \left(S_1^{1/2} \otimes S_1^{1/2} \right) (U_1^T \otimes U_1^T) \mathcal{E} + \\
&\quad \left(W_2^{1/2} \otimes W_2^{1/2} \right) \mathcal{E} + 2 \left(W_1^{1/2} \otimes W_2^{1/2} \right) \mathcal{E} \\
&= \mathcal{U}_1 \mathcal{D}_1 \mathcal{E}_1 + \mathcal{C}_1
\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1 &= (U_1 \otimes U_1) \\
\mathcal{D}_1 &= \left(S_1^{1/2} \otimes S_1^{1/2} \right) \\
\mathcal{E}_1 &= (U_1^T \otimes U_1^T) \mathcal{E} \\
\mathcal{C}_1 &= \left(W_2^{1/2} \otimes W_2^{1/2} \right) \mathcal{E} + 2 \left(W_1^{1/2} \otimes W_2^{1/2} \right) \mathcal{E}
\end{aligned}$$

定义算子 $\mathcal{H} : \mathbb{S}_{p_1} \mapsto \mathbb{S}_{p_1}$ 满足

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1^T \tag{3.12}$$

则 \mathcal{E}_1^T 有分解:

$$\mathcal{E}_1^T = \mathcal{P} \mathcal{R} \tag{3.13}$$

其中算子 $\mathcal{P} : \mathbb{S}_{p_1} \mapsto \mathbb{R}^r$ 满足

$$\mathcal{P}^T \mathcal{P} = \mathcal{I}$$

算子 $\mathcal{R} : \mathbb{S}_{p_1} \mapsto \mathbb{S}_{p_1}$ 满足 $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ 为上三角阵且

$$\mathcal{M}(\mathcal{H}) = \mathcal{M}(\mathcal{R})^T \mathcal{M}(\mathcal{R})$$

即 $\mathcal{M}(\mathcal{R})$ 为 $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ 的Cholesky分解因子, 定义算子 $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^r \mapsto \mathbb{R}^r$:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{I} - \mathcal{P} \mathcal{P}^T = \mathcal{I} - \mathcal{E}_1^T \mathcal{H}^{-1} \mathcal{E}_1 \tag{3.14}$$

则对 $\bar{x} \in \mathbb{R}^r$ 有分解:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \mathcal{I}(\bar{x}) \\
&= (\mathcal{P} \mathcal{P}^T + \mathcal{Q})(\bar{x}) \\
&= \mathcal{P} \mathcal{P}^T(\bar{x}) + \mathcal{Q}(\bar{x}) \\
&= \mathcal{P} \tilde{x}_1 + x_2
\end{aligned} \tag{3.15}$$

其中

$$\tilde{x}_1 = \mathcal{P}^T(\bar{x}), x_2 = \mathcal{Q}(\bar{x})$$

将(3.11)(3.13)和(3.15)代入(3.9)有

$$\mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{D}_1^2\mathcal{R}^T\tilde{x}_1 + \mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1\mathcal{P}\tilde{x}_1 + \mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1x_2 = \mathcal{E}^T(W) \quad (3.16)$$

考虑到(3.14)则有

$$(\mathcal{Q} + \mathcal{P}\mathcal{P}^T)(\mathcal{P}\mathcal{R}\mathcal{D}_1^2\mathcal{R}^T\tilde{x}_1 + \mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1\mathcal{P}\tilde{x}_1 + \mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1x_2) = (\mathcal{Q} + \mathcal{P}\mathcal{P}^T)\mathcal{E}^T(W) \quad (3.17)$$

即

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}\mathcal{D}_1^2\mathcal{R}^T + \mathcal{P}^T\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1\mathcal{P})\tilde{x}_1 + \mathcal{P}^T\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1x_2 &= \mathcal{P}^T\mathcal{E}^T(W) \\ \mathcal{Q}\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1\mathcal{P}\tilde{x}_1 + \mathcal{Q}\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1x_2 &= \mathcal{Q}\mathcal{E}^T(W) \end{aligned} \quad (3.18)$$

即

$$\begin{aligned} (\mathcal{I} + \mathcal{D}_1^{-1}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{P}^T\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1\mathcal{P}\mathcal{R}^{-T}\mathcal{D}_1^{-1})x_1 + \mathcal{D}_1^{-1}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{P}^T\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1x_2 &= \mathcal{D}_1^{-1}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{P}^T\mathcal{E}^T(W) \\ \mathcal{Q}\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1\mathcal{P}\mathcal{R}^{-T}\mathcal{D}_1^{-1}x_1 + \mathcal{Q}\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1x_2 &= \mathcal{Q}\mathcal{E}^T(W) \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中

$$x_1 = \mathcal{D}_1\mathcal{R}^T\tilde{x}_1 \quad (3.20)$$

考虑到(3.12), (3.19)可写成

$$\mathcal{K}(x) = h \quad (3.21)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \begin{bmatrix} \mathcal{I} + \mathcal{D}_1^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{E}_1\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1\mathcal{E}_1^T\mathcal{H}^{-1}\mathcal{D}_1^{-1} & \mathcal{D}_1^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{E}_1\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1\mathcal{Q} \\ \mathcal{Q}\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1\mathcal{E}_1^T\mathcal{H}^{-1}\mathcal{D}_1^{-1} & \mathcal{Q}\mathcal{C}_1^T\mathcal{C}_1\mathcal{Q} \end{bmatrix} \\ x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ h &= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1^{-1}\mathcal{H}^{-1}\mathcal{E}_1\mathcal{E}^T(W) \\ \mathcal{Q}\mathcal{E}^T(W) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

即最小二乘问题(3.8a)的解 \bar{x} 可通过求解(3.21)并由

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \mathcal{P}\tilde{x}_1 + \mathcal{Q}x_2 \\ &= \mathcal{E}_1^T\mathcal{H}^{-1}\mathcal{D}_1^{-1}x_1 + \mathcal{Q}x_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

得出。

由以上结果可构造算法 4, 其中步骤 (4.1)采用算法 Projective_CGLS。表 3.7给出了对于相同问题, 采用算法 4的平均CPU时间同算法FTD91的比较。从中可以看出, 相比算法 2, 算法 4 在计算效率上有了明显的改进, 这得益于对病态最小二乘问题(3.9)的改进算法(算法 Projective_CGLS), 这一点可以由表 3.8与表 3.6的比较看出。

注 3.4.1. 算法 4 实际上可以看作是将 \mathbb{R}^r 上的最小二乘问题(3.9) 通过合同变换转换成 $\mathbb{S}_{p_1} \otimes \mathbb{R}^r$ 上最小二乘问题(3.21), 虽然增加了问题的规模, 但数值结果表明(3.21)通常具有更好的数值性态, 通过调整 p_1 , C_1 与 D_1 的奇异性可以在很大程度上相互抵消, 进而降低了 \mathcal{K} 的奇异性。

注 3.4.2. 虽然以上处理方法是针对投影迭代算法[73]的, 但是在其他基于内点法的LMI算法中(如SDPT3[76], SDPA[77]等), 产生奇异性的原因通常是相同的(都需要求解类似于(3.10)的病态最小二乘问题, 其中矩阵 W 数值奇异), 因而以上处理方法可以无困难地推广到其他LMI算法中。

Algorithm 4: 优化投影迭代算法II

Data : $A_i, B_i, \mathcal{L}, i \in \underline{r}$.
Result : $\text{Im } \mathcal{E} \cap \mathbb{P}_m$.
Input: κ
begin
 $k \leftarrow 0$
 $W_{(0)} \leftarrow I_m$
 repeat
 $k \leftarrow k + 1$
 4.1 $\bar{X} \leftarrow \text{Projective_CGLS}(A_i, B_i, \mathcal{L}, W_{(k-1)})$
 begin
 $\phi \leftarrow W_{(k-1)}^{1/2} \bar{X} W_{(k-1)}^{1/2}$
 $\rho \leftarrow \max_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i(\phi) - 1|$
 $\gamma \leftarrow 1/(1 + \rho)$
 $W_{(k)} \leftarrow (1 + \gamma)W_{(k-1)} - \gamma W_{(k-1)}^{1/2} \phi W_{(k-1)}^{1/2}$
 end
 $\alpha \leftarrow \|W_{(k)}^{1/2} \bar{X} W_{(k)}^{1/2} - I\|_F$
 $\beta \leftarrow \|W_{(k)}\|$
 until $\alpha < 1$ **or** $\beta > \kappa$
 if $\alpha < 1$ **then**
 $\text{Im } \mathcal{E} \cap \mathbb{P}_t \neq \emptyset$
 else
 $\text{Im } \mathcal{E} \cap \mathbb{P}_t = \emptyset$
end

Function Projective_CGLS(A_i, B_i, \mathcal{L}, W)

Data : $A_i, B_i, i \in \mathcal{I}; \mathcal{L}, W$.

Result : $\bar{X} = \underset{X \in \text{Im } \mathcal{E}}{\text{argmin}} \|W^{1/2} X W^{1/2} - I\|_F$
Input: ϵ
begin

5.1

$k \leftarrow 0$
 $x_{(0)} \leftarrow \{0_{p_1 \times p_1}, 0_r\}$
 $s_{(0)} \leftarrow I_m$
 $r_{(0)} \leftarrow (\mathcal{U}_1^T + \mathcal{D}_1^{-1} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{E}_1 \mathcal{C}_1^T)(s_{(0)}) \otimes (\mathcal{C}_1^T - \mathcal{E}_1^T \mathcal{H}^{-1} \mathcal{E}_1 \mathcal{C}_1^T)(s_{(0)})$

5.2

repeat
 $k \leftarrow k + 1$
if $k = 1$ **then**
 $\quad p_{(1)} \leftarrow r_{(0)}$
else
 $\quad \beta_{(k)} \leftarrow \langle r_{(k-1)}, r_{(k-1)} \rangle / \langle r_{(k-2)}, r_{(k-2)} \rangle$
 $\quad p_{(k)} \leftarrow r_{(k-1)} + \beta_{(k)} p_{(k-1)}$

5.3

$$q_{(k)} \leftarrow \mathcal{U}_1(p_{(k)}^1) + \mathcal{C}_1 \mathcal{E}_1^T \mathcal{H}^{-1} \mathcal{D}_1^{-1}(p_{(k)}^1) + \mathcal{C}_1(p_{(k)}^2) - \mathcal{C}_1 \mathcal{E}_1^T \mathcal{H}^{-1} \mathcal{E}_1(p_{(k)}^2)$$

 $\alpha_{(k)} \leftarrow \langle r_{(k-1)}, r_{(k-1)} \rangle / \langle q_{(k)}, q_{(k)} \rangle$
 $x_{(k)} \leftarrow x_{(k-1)} + \alpha_{(k)} p_{(k)}$
 $s_{(k)} \leftarrow s_{(k-1)} - \alpha_{(k)} q_{(k)}$
 $r_{(0)} \leftarrow (\mathcal{U}_1^T + \mathcal{D}_1^{-1} \mathcal{H}^{-1} \mathcal{E}_1 \mathcal{C}_1^T)(s_{(k)}) \otimes (\mathcal{C}_1^T - \mathcal{E}_1^T \mathcal{H}^{-1} \mathcal{E}_1 \mathcal{C}_1^T)(s_{(k)})$

5.3

until $\langle r_{(k)}, r_{(k)} \rangle / \langle r_{(0)}, r_{(0)} \rangle < \epsilon$
 $\bar{X} \leftarrow \mathcal{E}_1^T \mathcal{H}^{-1} \mathcal{D}_1^{-1}(x_{(k)}^1) + x_{(k)}^2 - \mathcal{E}_1^T \mathcal{H}^{-1} \mathcal{E}_1(x_{(k)}^2)$

5.3

end

表 3.7: μ 上界与平均计算耗时

Problem		FTD91	CS98	算法 4
1	μ 上界	15.204	15.216	15.216
	计算耗时(s)	29.95	17.80	8.06
2	μ 上界	3.452	3.472	3.472
	计算耗时(s)	154.72	236.65	71.65
3	μ 上界	5.154	—	5.186
	计算耗时(s)	950.87	—	397.32
4	μ 上界	1.891	—	1.911
	计算耗时(s)	7142.01	—	3012.87

表 3.8: μ 上界与平均计算耗时

	计算耗时(s)		
γ	FTD91	CS98	算法 4
20	—	170.56	16.98
12	—	195.32	20.13
8	—	210.95	35.45
3.5	—	228.91	41.32
3.47	154.72	236.65	71.65

3.5 算法实现

在算法的具体实现中为了尽可能地减少最小二乘问题(3.8a)的奇异性, 通常还需要增加预处理的步骤, 即通过选取适当的矩阵 \mathcal{T} (预条件子)将(3.9) 变换为(详见[78]):

$$\hat{\mathcal{E}}_1^T \hat{\mathcal{D}}_1^2 \hat{\mathcal{E}}_1(\hat{x}) + \hat{\mathcal{C}}_1^T \hat{\mathcal{C}}_1(\hat{x}) = \hat{\mathcal{E}}^T(W) \quad (3.24)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}_1 &= \mathcal{E}_1 \mathcal{T}^{-T} \\ \hat{\mathcal{C}}_1 &= \mathcal{C}_1 \mathcal{T}^{-T} \\ \hat{x} &= \mathcal{T}^T \bar{x} \\ \hat{\mathcal{E}}^T(W) &= \mathcal{T}^{-1} \mathcal{E}^T(W) \end{aligned} \quad (3.25)$$

关于如何选取预条件子 \mathcal{T} 使变换后的方程(3.25)的条件数尽可能地小还是一个尚未解决的问题, 大量的数值结果表明以算子 \mathcal{F} 的Cholesky因子作为预条件子通常能得到满意的结果, 但是当问题的规模很大时, 显式地生成算子 \mathcal{F} 的矩阵表示 $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ 并做Cholesky分解会导致过多的附加计算量。考虑到问题(3.8a)的结构, 本文采用 \mathcal{C}_1 的Cholesky因子作为预条件子, 数值结果表明该处理方法同样可以有效地降低方程(3.9)的条件数并加速算法收敛速度。

根据(3.25)并采用与§ 3.4相似的推导过程可知最小二乘问题(3.8a)的解 \bar{x} 可通过求解

$$\hat{\mathcal{K}}(\hat{x}) = \hat{h} \quad (3.26)$$

并由

$$\bar{x} = \mathcal{T}^{-T} \left(\hat{\mathcal{E}}_1^T \hat{\mathcal{H}}^{-1} \mathcal{D}_1^{-1} \hat{x}_1 + \hat{\mathcal{Q}} \hat{x}_2 \right) \quad (3.27)$$

得出, 其中

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}} &= \begin{bmatrix} \mathcal{I} + \mathcal{D}_1^{-1} \hat{\mathcal{H}}^{-1} \hat{\mathcal{E}}_1 \hat{\mathcal{C}}_1^T \hat{\mathcal{C}}_1 \hat{\mathcal{E}}_1^T \hat{\mathcal{H}}^{-1} \mathcal{D}_1^{-1} & \mathcal{D}_1^{-1} \hat{\mathcal{H}}^{-1} \hat{\mathcal{E}}_1 \hat{\mathcal{C}}_1^T \hat{\mathcal{C}}_1 \hat{\mathcal{Q}} \\ \hat{\mathcal{Q}} \hat{\mathcal{C}}_1^T \hat{\mathcal{C}}_1 \hat{\mathcal{E}}_1^T \hat{\mathcal{H}}^{-1} \mathcal{D}_1^{-1} & \hat{\mathcal{Q}} \hat{\mathcal{C}}_1^T \hat{\mathcal{C}}_1 \hat{\mathcal{Q}} \end{bmatrix} \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} \\ \hat{h} &= \begin{bmatrix} \mathcal{D}_1^{-1} \hat{\mathcal{H}}^{-1} \hat{\mathcal{E}}_1 \hat{\mathcal{E}}^T(W) \\ \hat{\mathcal{Q}} \hat{\mathcal{E}}^T(W) \end{bmatrix} \\ \hat{\mathcal{H}} &= \hat{\mathcal{E}}_1 \hat{\mathcal{E}}_1^T \\ \hat{\mathcal{Q}} &= \mathcal{I} - \hat{\mathcal{E}}_1^T \hat{\mathcal{H}}^{-1} \hat{\mathcal{E}}_1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

3.6 算法并行化

算法 4采用迭代算法(算法 Projective_CGLS) 解决了经典LMI算法([73], LMI Control Toolbox[74]等) 处理大规模LMI时所遇到的系统资源要求太高, 无

表 3.9: μ 上界与平均计算耗时(4CPU)

Problem		FTD91	CS98	算法 4	
1	μ 上界	15.204	15.216	15.216	
	计算耗时(s)/并行效率	29.95	17.80	2.39	82.1%
2	μ 上界	3.452	3.472	3.472	
	计算耗时(s)/并行效率	154.72	236.65	21.55	83.4%
3	μ 上界	5.154	—	5.186	
	计算耗时(s)/并行效率	950.87	—	125.42	78.2%
4	μ 上界	1.891	—	1.911	
	计算耗时(s)/并行效率	7142.01	—	978.17	76.1%
5	μ 上界	—	—	1.911	
	计算耗时(s)/并行效率	—	—	7864.91	79.3%

法利用问题结构信息加速求解等直接(正交分解)方法的缺点,同时也有效地克服了间接(迭代)方法数值性态不稳定的不足。考虑到到目前为止尚未在文献见到应用并行算法解决 μ 分析与综合问题的尝试,本节以此为基础,采用并行化技术来进一步提高对大规模LMI问题的求解效率。

通过对算法 CGLS和算法 Projective_CGLS分析可知,在该算法中除了 $\mathcal{F}(x)$ 与 $\mathcal{F}^T(y)$ 操作(步骤(5.1),步骤(5.2)和步骤(5.3))以外,对矩阵(向量)的操作只涉及到内积运算($\langle *, * \rangle$)与数乘运算,在 $\mathcal{F}(x)$ 与 $\mathcal{F}^T(y)$ 操作中,步骤(5.1),步骤(5.2)和步骤(5.3)除了一次奇异值分解运算以外,只涉及到矩阵-向量的乘法运算和向量的内积运算与数乘运算,而这些运算步骤(基本为BLAS操作)的并行化是比较容易实现的,而且通常并行效率也比较高,所以对算法 CGLS和算法 Projective_CGLS的并行化的核心问题是对 $\mathcal{F}(x)$ 与 $\mathcal{F}^T(y)$ 操作的并行化。

考虑到程序的可移植性和与其他算法的可比性,本文对算法 4的并行化采用了ARGONNE NATIONAL LABORATORY的PETSc¹并行计算软件包。其中的算法 Projective_CGLS用并行化后的版本代替。为减少通信量,系统原始数据 A, B, C, D 与 Δ 信息在初始化过程中被复制到所有计算节点上,虽然针对特定问题精心设计的数据分布方案可以毫无疑问地提高计算效率,但考虑到尽可能地降低算法的复杂程度与提高可维护性,本文由PETSc自动完成计算过程中的大部分中间变量在计算节点上的分布和搜集,数值算例在IBM SP RS/6000²上完成,系统具有64个375MHz POWER-III CPU(本文提供的算例使用了其中的4个),共享64GB RAM,运行AIX 4.3.3, PETSc版本2.1.3。

¹<http://www-unix.mcs.anl.gov/petsc/petsc-2/>

²Center for Computational Science and Engineering, Peking University.

第四章

μ 理论在电力系统中的应用

电力系统作为典型的非线性大系统，随着以大机组，超高压为特点的现代电力系统的迅速发展，以及各种新技术的广泛应用，其复杂程度日益增加，同时系统的动态特性对控制作用的要求也越来越高。由于发电机组，负荷和传输网络参数的变化，电力系统的运行条件处在持续的变化中。而设计良好的控制系统应该对各种运行条件都能够达到满意的控制效果，即控制器需要对不确定的运行条件具有良好的鲁棒性，这促进了现代鲁棒控制理论在电力系统中的应用。随着现代鲁棒控制理论的发展成熟， \mathcal{H}_∞ 理论，Kharitonov区间多项式理论， \mathcal{L}_∞ 等理论已经开始逐渐应用到电力系统中，尽管由于理论与计算方法上的困难，这些应用都还局限于小规模电力系统，而对于大规模复杂电力系统，目前尚无成功应用的实例。

但是作为现代控制理论的重要成果与研究方向之一的 μ (结构奇异值)方法由于在理论和算法方面的困难始终未能有效地应用到电力系统中。文献[63]最先将 μ 方法引入到单机系统PSS设计中，随后[64, 65]探讨了将 μ 方法引入到多机系统的鲁棒稳定性分析中，并给出了用 μ 方法分析具有不确定参数的电力系统的鲁棒稳定性的应用框架。虽然此后的其他研究扩展了 μ 方法在电力系统中的应用范围[66, 67, 79, 80, 81, 82, 83]，但这些研究都是基于传统的频域G-D乘子方法，并且只得到了一些分析性的结果，而对于基于LMI的 μ 方法在电力系统中的应用，特别是电力系统的 μ 综合问题，则由于理论和算法上的困难至今尚未见诸于文献。本章拟结合上一节所提出的基于LMI的 μ 分析与综合方法及优化LMI算法，并以[64, 65]中的应用框架为基础，将 μ 方法应用到典型SMIB系统励磁控制的鲁棒稳定性的分析和鲁棒控制器的设计上。

4.1 系统模型

电力系统的数学模型通常可表述为一组具有代数约束的非线性微分方程([84]):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, v) \\ 0 &= g(x, u, v)\end{aligned}\tag{4.1}$$

其中 x 为系统状态向量, u 为输入控制向量, v 为系统运行参数。线性控制理论通常首先要将该方程在稳态平衡点 $(x_0(u_0, v_0), u_0, v_0)$ 的邻域内线性化得到线性方程

$$\Delta \dot{x} = A(u_0, v_0)\Delta x + B(u_0, v_0)\Delta u + C(u_0, v_0)\Delta v \quad (4.2)$$

其中前缀 Δ 表示小信号扰动量, 矩阵 A, B, C 依赖于系统运行条件 (u_0, v_0) 。在实际系统中, 系统运行参数 v (包括有功功率, 无功功率, 负荷等)通常为缓变参数, 即 v 在线性化系统中近似保持不变($\Delta v \equiv 0$)。根据电力系统实际运行工况, 可假定在本文所考虑的时间尺度范围内稳态输入控制向量 u_0 和输入矩阵 B 近似为常数, 则(4.1)在平衡点 (x_0, u_0, v_0) 的邻域内可近似为(参数化)线性系统

$$\Delta \dot{x} = A(v_0)\Delta x + B\Delta u \quad (4.3)$$

其中系统状态矩阵 A 为稳态系统运行参数 v_0 的非线性函数。当系统稳态平衡点 (x_0, u_0, v_0) 依照系统实际运行状况在给定范围内变化时, 线性化模型(4.3)也在变化, 在给定的运行条件变化范围内, (4.3)对应于一族线性系统。由于在任一确定时刻, 实际运行中的系统(4.1)可近似为该系统族中的某一个线性系统, 所以一个设计良好的控制器必须能够对线性化模型族中的每一个(线性)系统都具有良好的控制效果, 即需要对不确定的系统参数 v_0 具有鲁棒性。

不失一般性, 可假定系统参数 v_0 具有以下形式:

$$v_0 = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]^T, v_i \in [-1, 1], i \in \underline{n}$$

且 $A(v_0)$ 具有以下2阶多项式逼近形式(对于多变量高阶逼近形式方法类似, 可参考[85]):

$$A(v_0) = \sum_{\sum_{i=1}^n k_i \leq 2} v_1^{k_1} v_2^{k_2} \dots v_n^{k_n} A_{k_1 k_2 \dots k_n} + E\Delta F \quad (4.4)$$

其中 $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$ 为给定系数矩阵, $\Delta \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $\|\Delta\| \leq 1$ 表示系统中的未建模动态不确定性, E, F 为给定加权系数矩阵。考虑上述不确定线性系统对于不确定参数 v_0 和未建模动态不确定性 Δ 的鲁棒稳定性问题及鲁棒综合问题, 即判断系统(4.3)(4.4)对 $\forall v_i \in [-1, 1], i \in \underline{n}$ 和 $\forall \Delta \in \mathbb{C}^{m \times m}, \|\Delta\| \leq 1$ 是否鲁棒稳定以及如何构造鲁棒控制器 $\Delta u = K\Delta x$ 使之鲁棒稳定。

容易验证, 由(4.4)有

$$\begin{aligned} A(v_0) &= \sum_{\sum_{i=1}^n k_i \leq 2} v_1^{k_1} v_2^{k_2} \dots v_n^{k_n} A_{k_1 k_2 \dots k_n} + E\Delta F \\ &= G_{11} + G_{12}\hat{\Delta}(I - G_{22}\hat{\Delta})^{-1}G_{21} \\ &= \mathcal{F}_l(\Gamma, \hat{\Delta}) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Gamma &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \\
 \hat{\Delta} &= \text{diag}(v_1 I_2 \otimes I, v_2 I_2 \otimes I, \dots, v_n I_2 \otimes I, \Delta) \\
 G_{11} &= A_{00\dots 0} \\
 G_{12} &= [G_{12}^1 \quad G_{12}^2 \quad \dots \quad G_{12}^n \quad E], \quad G_{12}^i = [I \quad 0] \\
 G_{21} &= [G_{21}^1; G_{21}^2; \dots; G_{21}^n; F], \quad G_{21}^i = [A_{\delta_{i1}\delta_{i2}\dots\delta_{in}}; I] \\
 G_{22} &= \begin{bmatrix} G_1^0 & G_1^1 & \dots & \dots & G_1^{n-1} & 0 \\ 0 & G_2^0 & \ddots & & G_2^{n-2} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & G_{n-1}^0 & G_{n-1}^1 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & G_n^0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & I \end{bmatrix} \\
 G_j^i &= \begin{bmatrix} 0 & A_{(\delta_{j1}+\delta_{(i+j)1})(\delta_{j2}+\delta_{(i+j)2})\dots(\delta_{jn}+\delta_{(i+j)n})} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

则由图 4.1与定理 1.2.1可知，不确定线性系统(4.3), (4.4)对于不确定参数 v_0 和未建模动态不确定性 Δ 的鲁棒稳定性问题及鲁棒综合问题等价于系统 $G(s)$ - Δ 的 μ 分析综合问题(1.2)，其中 $\gamma = 1$ ， $G(s)$ 和 Δ 有如下形式：

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \mathcal{F}_u(\Gamma, \frac{1}{s}I) \sim \left[\begin{array}{c|c} G_{11} & G_{12} \\ \hline G_{21} & G_{22} \end{array} \right] \\
 \Delta &= \{ \text{diag}(r_1 I_2 \otimes I, r_2 I_2 \otimes I, \dots, r_n I_2 \otimes I, \Delta) \mid \\
 &\quad |r_i| \leq 1, i \in \underline{n}; \Delta \in \mathbb{C}^{m \times m}, \|\Delta\| \leq 1 \}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

则由第二章中方法(定理 2.2.2, 推论 2.2.3)该问题即可求解。

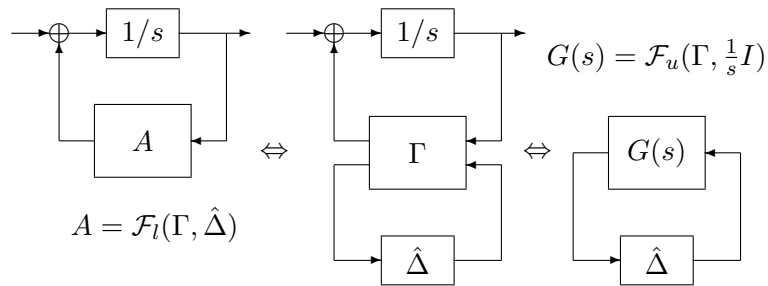


图 4.1: SMIB系统的 μ 方法

4.2 SMIB励磁控制系统

本节考虑将第二章与§ 4.1中方法应用于典型SMIB电力系统励磁控制中。

4.2.1 系统模型

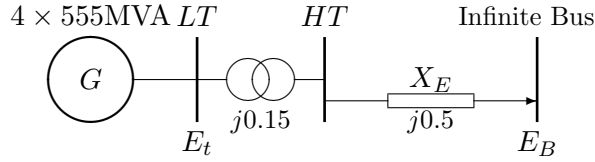


图 4.2: 4机并列SMIB系统

考虑如图 4.2所示4机并列SMIB电力系统([84, page 752]), 首先给出该系统(4.1)形式的非线性数学模型。整个系统采用d-q坐标, 并以无穷大母线电压 E_B 为参考, 系统相位图如图 4.3所示。经适当简化后, 该SMIB系统有以下3阶模型(符号定义见[84]):

$$\begin{aligned}
 e_d &= -\psi_q - R_a i_d \\
 e_q &= -\psi_d + R_a i_q \\
 e_{fd} &= \frac{1}{\omega_0} \dot{\psi}_{fd} + R_{fd} i_{fd} \\
 \psi_d &= -L_d i_d + L_{ad} i_{fd} \\
 \psi_q &= -L_q i_q \\
 \psi_{fd} &= L_{ffd} i_{fd} - L_{ad} i_d \\
 T_e &= \psi_d i_q - \psi_q i_d \\
 \dot{\delta} &= \omega_0 (\omega_r - 1) \\
 \dot{\omega}_r &= \frac{1}{2H} (T_m - T_e - K_D (\omega_r - 1))
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

在d-q坐标下, 机端电压 E_t , 输出电流 I_t 和无穷大母线电压 E_B 有以下关系:

$$\begin{aligned}
 E_t &= e_d + j e_q \\
 I_t &= i_d + j i_q \\
 E_B &= E_{Bd} + j E_{Bq}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

代入约束方程

$$E_t = E_B + Z_E I_t = E_B + (R_E + j X_E) I_t$$

则有以下网络方程:

$$\begin{aligned}
 e_d &= R_E i_d - X_E i_q + E_{Bd} \\
 e_q &= R_E i_q + X_E i_d + E_{Bq}
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

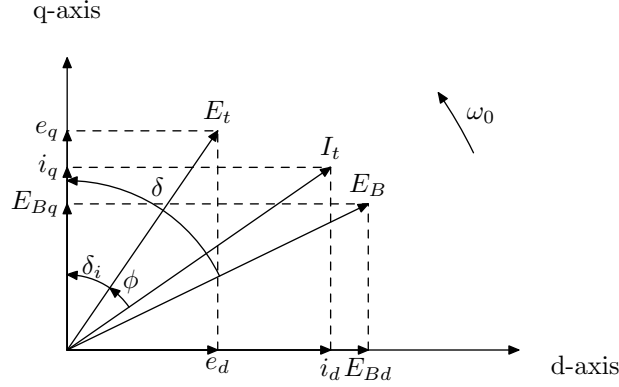


图 4.3: d-q坐标

将(4.7)和(4.9)联立，可得系统状态方程

$$\begin{aligned}\dot{\delta} &= \omega_0(\omega_r - 1) \\ \dot{\omega}_r &= \frac{1}{2H}(T_m - T_e - K_D(\omega_r - 1)) \\ \dot{\psi}_{fd} &= \omega_0(e_{fd} - R_{fd}i_{fd})\end{aligned}\quad (4.10)$$

和代数约束方程

$$\begin{aligned}e_d &= -\psi_q - R_a i_d \\ e_q &= -\psi_d + R_a i_q \\ \psi_d &= -L_d i_d + L_{ad} i_{fd} \\ \psi_q &= -L_q i_q \\ \psi_{fd} &= L_{ffd} i_{fd} - L_{ad} i_d \\ T_e &= \psi_d i_q - \psi_q i_d \\ e_d &= R_E i_d - X_E i_q + E_{Bd} \\ e_q &= R_E i_q + X_E i_d + E_{Bq}\end{aligned}\quad (4.11)$$

其中状态变量为转子角速度 ω_r ，功角 δ 和励磁绕组磁通量 ψ_{fd} 。系统采用快速静止可控硅励磁方式，则对励磁绕组电压 e_{fd} 有

$$e_{fd} = \frac{R_{fd}}{L_{ad}} E_{fd} \quad (4.12)$$

控制输入变量为励磁机输出电压 E_{fd} 和输入机械功率 T_m 。

4.2.2 稳态平衡点

对该非线性系统进行线性化，首先需要确定系统稳态平衡点。在同步发电机组的实际运行中，为了保证发电质量，通常机端电压，无穷大母线电压

和传输线路阻抗的波动很小，可近似看作恒定不变，而有功功率及无功功率则随着用电需求的变化做周期性和季节性的波动。考虑到以上系统实际运行工况，可设机端电压 E_t ，无穷大母线电压 E_B 及传输线阻抗 X_E 恒定，即对图 4.2 所示 SMIB 系统，给定如下参数：

稳态运行参数	机端电压 E_t
同步电机参数	$L_d, L_q, L_l, R_a, L_{fd}, R_{fd}, K_D, H$
网络参数	传输线路电抗 $Z_E = R_E + jX_E$

则系统稳态运行点可由有功功率 P_t 及无功功率 Q_t 唯一确定：

计算同步电机参数：

$$1. L_{ad(q)} = L_{d(q)} - L_l$$

$$2. L'_{ad(q)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{L_{ad(q)}} + \frac{1}{L_{fd}}\right)}$$

$$3. L'_{d(q)} = L_l + L'_{ad(q)}$$

计算潮流稳态值：

$$1. I_{t0} = \frac{\sqrt{P_{t0}^2 + Q_{t0}^2}}{E_{t0}}, \phi_0 = \arccos\left(\frac{P_{t0}}{E_{t0}I_{t0}}\right)$$

$$2. \delta_{i0} = \arctan\left(\frac{I_{t0}X_q \cos \phi_0 - I_{t0}R_a \sin \phi_0}{E_{t0} + I_{t0}R_a \cos \phi_0 + I_{t0}X_q \sin \phi_0}\right)$$

$$3. e_{d0} = E_{t0} \sin \delta_{i0}, e_{q0} = E_{t0} \cos \delta_{i0}$$

$$4. i_{d0} = I_{t0} \sin(\delta_{i0} + \phi_0), i_{q0} = I_{t0} \cos(\delta_{i0} + \phi_0)$$

$$5. E_{Bd0} = e_{d0} - R_E i_{d0} + X_E i_{q0}, E_{Bq0} = e_{q0} - R_E i_{q0} + X_E i_{d0}$$

$$6. \delta_0 = \arctan\left(\frac{E_{Bd0}}{E_{Bq0}}\right), E_{B0} = \sqrt{E_{Bd0}^2 + E_{Bq0}^2}$$

$$7. i_{fd0} = \frac{e_{q0} + R_a i_{q0} + L_d i_{d0}}{L_{ad}}, E_{fd0} = L_{ad} i_{fd0}$$

$$8. \psi_{ad0} = L_{ad}(-i_{d0} + i_{fd0}), \psi_{aq0} = -L_{aq} i_{q0}$$

即可得系统稳态平衡点 $(\omega_{r0}, \delta_0, \psi_{fd0})$ 。

4.2.3 参数化线性模型

将系统(4.10)(4.11)在稳态平衡点 $(\omega_{r0}, \delta_0, \psi_{fd0})$ 邻域内线性化即可得(依赖于有功功率 P_t 和无功功率 Q_t 的)线性系统：

$$\Delta \dot{x} = A(P_t, Q_t) \Delta x + B \Delta u \quad (4.13)$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta x &= [\Delta\omega_r \quad \Delta\delta \quad \Delta\psi_{fd}]^T \\ \Delta u &= [\Delta T_m \quad \Delta E_{fd}]^T \\ A &= \begin{bmatrix} \frac{-K_D}{2H} & \frac{-K_1}{2H} & \frac{-K_2}{2H} \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_0 \frac{R_{fd}}{L_{fd}} m_1 L'_{ad} & -\omega_0 \frac{R_{fd}}{L_{fd}} (1 - \frac{L_{ad}}{L_{fd}} + m_2 L'_{ad}) \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2H} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_0 R_{fd}}{L_{ad}} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}m_1 &= \frac{E_B(X_{Tq} \sin \delta_0 - R_T \cos \delta_0)}{D} \\ n_1 &= \frac{E_B(R_T \sin \delta_0 + X_{Td} \cos \delta_0)}{D} \\ m_2 &= \frac{X_{Tq}}{D} \frac{L_{ad}}{L_{ad} + L_{fd}} \\ n_2 &= \frac{R_T}{D} \frac{L_{ad}}{L_{ad} + L_{fd}} \\ R_T &= R_a + R_E \\ X_{Tq} &= X_E + X_q \\ X_{Td} &= X_E + X'_d \\ D &= R_T^2 + X_{Tq} X_{Td} \\ E_{q0} &= e_{q0} + R_a i_{q0} + X_q i_{d0} \\ K_1 &= \frac{E_{B0} E_{q0}}{D} (R_T \sin \delta_0 + X_{Td} \cos \delta_0) + \frac{E_{B0} i_{q0}}{D} (X_q - X'_d) (X_{Tq} \sin \delta_0 - R_T \cos \delta_0) \\ K_2 &= \frac{L_{ad}}{L_{ad} + L_{fd}} \left[\frac{R_T}{D} E_{q0} + \left(\frac{X_{Tq} (X_q - X'_d)}{D} + 1 \right) i_{q0} \right] \\ K_3 &= \frac{L_{ad} + L_{fd}}{L_{ad}} \frac{1}{1 + \frac{X_{Tq}}{D} (X_d - X'_d)} \\ K_4 &= L_{ad} \frac{L_{ad}}{L_{ad} + L_{fd}} \frac{E_B}{D} (X_{Tq} \sin \delta_0 - R_T \cos \delta_0) \\ T_3 &= \frac{L_{ad} + L_{fd}}{\omega_0 R_{fd}} \frac{1}{1 + \frac{X_{Tq}}{D} (X_d - X'_d)}\end{aligned}$$

系统等效模型见图 4.4。

由于同步发电机组的调速系统与气轮机控制系统的时间常数通常远大于本文所考虑的励磁控制系统的时间常数，所以可假设在励磁控制器起作用的时间尺度内，机组的输入机械功率保持不变，即假定 $\Delta T_m = 0$ 。

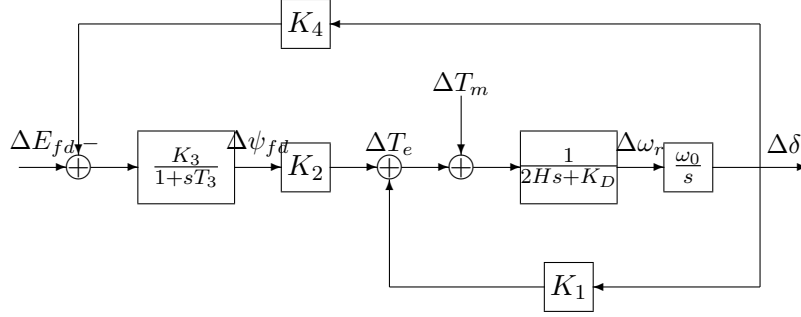


图 4.4: SMIB系统等效模型

对不确定量 P_t, Q_t , 设

$$|P_t - P_{t0}| \leq \Delta_{P_t}, |Q_t - Q_{t0}| \leq \Delta_{Q_t}$$

则可将 P_t, Q_t 归一化为 $v_1, v_2 \in [-1, 1]$, 即令:

$$P_t = P_{t0} + \Delta_{P_t} v_1, Q_t = Q_{t0} + \Delta_{Q_t} v_2 \quad (4.14)$$

将(4.14)代入(4.13), 求解最小二乘逼近问题即可得多项式逼近式(4.4)的系数矩阵 $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$, 将其代入(4.6), 即可由定理 2.2.2 分析系统的鲁棒稳定性, 并由推论 2.2.3求得状态反馈励磁控制器 K 。

作为对比, 对以上SMIB系统采用经典AVR+PSS控制器([84, page 769]), 系统等效模型见图 4.5与图 4.6。

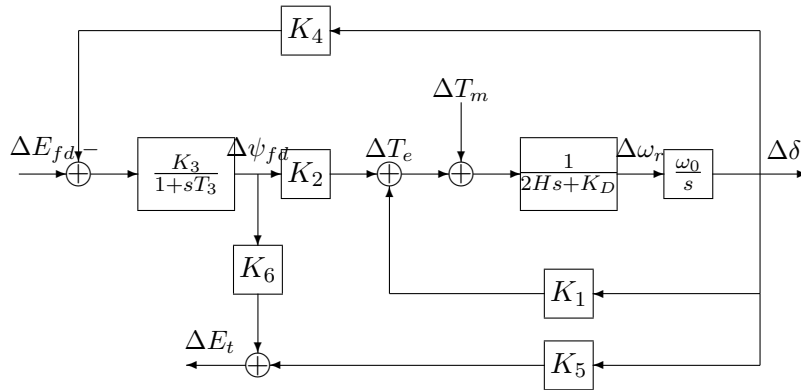


图 4.5: SMIB(AVR+PSS)系统等效模型

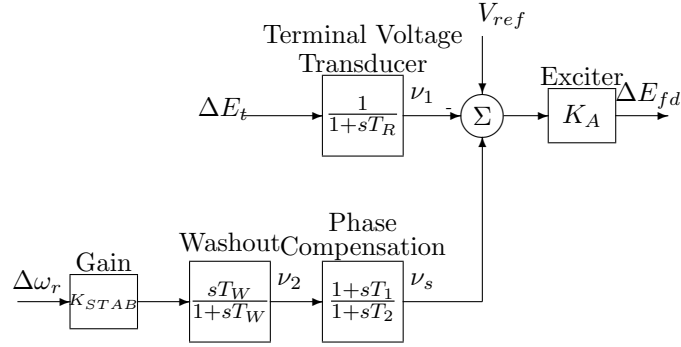


图 4.6: AVR+PSS

其中

$$\begin{aligned}
 K_5 &= \frac{e_{d0}}{E_{t0}} (-R_a m_1 + L_l n_1 + L_{aq} n_1) + \\
 &\quad \frac{e_{q0}}{E_{t0}} (-R_a n_1 - L_l m_1 - L'_{ad} m_1) \\
 K_6 &= \frac{e_{d0}}{E_{t0}} (-R_a m_2 + L_l n_2 + L_{aq} n_2) + \\
 &\quad \frac{e_{q0}}{E_{t0}} (-R_a n_2 - L_l m_2 - L'_{ad} m_2 + L'_{ad}/L_{fd})
 \end{aligned}$$

闭环系统状态方程为：

$$\Delta \dot{\hat{x}} = \hat{A} \Delta \hat{x} \quad (4.15)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \Delta \hat{x} &= [\Delta x \quad \Delta \nu]^T \\
 \Delta \nu &= [\Delta \nu_1 \quad \Delta \nu_2 \quad \Delta \nu_s]^T \\
 \hat{A} &= \begin{bmatrix} A & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \\
 \hat{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\omega_0 R_{fd}}{L_{adu}} K_A & 0 & \frac{\omega_0 R_{fd}}{L_{adu}} K_A \end{bmatrix} \\
 \hat{A}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{K_5}{T_R} & \frac{K_6}{T_R} \\ -K_{STAB} \frac{K_D}{2H} & -K_{STAB} \frac{K_1}{2H} & -K_{STAB} \frac{K_2}{2H} \\ -\frac{T_1}{T_2} K_{STAB} \frac{K_D}{2H} & -\frac{T_1}{T_2} K_{STAB} \frac{K_1}{2H} & -\frac{T_1}{T_2} K_{STAB} \frac{K_2}{2H} \end{bmatrix} \\
 \hat{A}_{22} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_R} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_W} & 0 \\ 0 & -\frac{T_1}{T_2} \frac{1}{T_W} + \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

表 4.1: SMIB系统参数[84, page 752]

$VA_{base} = 2220MVA$	$V_{base} = 24kV$	$f_0 = 60Hz$
$R_{fd} = 0.0006$	$R_a = 0.003$	$L_l = 0.16$
$L_{fd} = 0.153$	$L_{adu} = 1.65$	$L_{aqu} = 1.60$
$K_D = 0$	$H = 3.5$	$A_{sat} = 0.03125$
$B_{sat} = 6.931$	$\Psi_{T1} = 0.8$	$\Psi_{T2} = 1.3$

表 4.2: AVR+PSS参数[84, page 769]

$K_A = 200$	$T_R = 0.02$	$K_{STAB} = 9.5$
$T_W = 1.4$	$T_1 = 0.154$	$T_2 = 0.033$

同样假定 P_t, Q_t 在(4.14)的范围内变动，则由最小二乘逼近可解得多项式逼近式(4.4)的系数矩阵 $\hat{A}_{k_1 k_2 \dots k_n}$ ，将其代入(4.6)，可由定理 2.2.2分析系统的鲁棒稳定性。

4.3 数值仿真

对图 4.2所示SMIB电力系统进行数值仿真，系统参数见表 4.1，参数见表 4.2，考虑磁饱和效应，参数见表 4.3。参考系统典型工况，可假定 P_t, Q_t 在以下范围内变动：

$$P_t \in [0.5, 1], Q_t \in [0.2, 0.4] \quad (4.16)$$

表 4.3: 磁饱和效应参数[84, page 121]

$\Psi_{T1} = 0.8$	$\Psi_{T2} = 1.3$
$A_{sat} = 0.03125$	$B_{sat} = 6.931$

则有多项式逼近式(4.4)的系数矩阵 $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$:

$$\begin{aligned}
 A_{00} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0910 & -0.1009 \\ 376.99 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1694 & -0.3860 \end{bmatrix} \\
 A_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0726 & -0.0564 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1112 & -0.0817 \end{bmatrix} \\
 A_{01} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.0462 & 0.0225 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0582 & 0.0268 \end{bmatrix} \\
 A_{20} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.0033 & -0.0015 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0258 & -0.0013 \end{bmatrix} \\
 A_{02} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0024 & -0.0071 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0185 & -0.0154 \end{bmatrix} \\
 A_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.0043 & 0.0131 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0271 & 0.0206 \end{bmatrix} \\
 B &= [0 \quad 0 \quad 0.1371]^T
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

将(4.17)代入(4.6)，分析系统 $G(s)$ - Δ 的鲁棒稳定性(定理 2.2.2) 并由推论 2.2.3求得状态反馈励磁控制器 K :

$$K = [7.3109 \times 10^5 \quad 3.2084 \times 10^3 \quad -5.1130 \times 10^3]$$

同样假定 P_t, Q_t 在(4.16)的范围内变动, 则有多项式逼近式(4.4)的系数矩阵 $\hat{A}_{k_1 k_2 \dots k_n}$:

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_{00} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.0910 & -0.1009 & 0 & 0 & 0 \\ 376.99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1694 & -0.3860 & -27.42 & 0 & 27.42 \\ 0 & -6.339 & 24.40 & -50 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8642 & -0.9582 & 0 & -0.7143 & 0 \\ 0 & -4.033 & -4.472 & 0 & 26.97 & -30.30 \end{bmatrix} \\
 \hat{A}_{10} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.07265 & -0.05639 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1112 & -0.08170 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.362 & -8.573 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6902 & -0.5357 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.221 & -2.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{A}_{01} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.04619 & 0.02247 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05820 & 0.02675 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.7019 & 2.936 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4388 & 0.2135 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.048 & 0.9963 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{A}_{20} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.003275 & -0.001480 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.02580 & -0.001274 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.217 & 0.7927 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03111 & -0.01406 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1452 & -0.06559 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{A}_{02} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.002376 & -0.007065 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01848 & -0.01539 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.770 & -0.8917 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02258 & -0.06711 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1054 & -0.3132 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \hat{A}_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.004310 & 0.01308 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02712 & 0.02058 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4.156 & 1.110 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04095 & 0.1243 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1911 & 0.5798 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

将(4.18)代入(4.6)(4.5), 则对 $G(s)$ - Δ 应用定理 2.2.2即可判断该闭环系统的鲁棒稳定性。

表 4.4: $\max_{P_t, Q_t} \operatorname{Re} \lambda(A)$

Problem	$\max_{P_t, Q_t} \operatorname{Re} \lambda(A)$
开环系统	3.4330
AVR+PSS	3.6326
μ 控制器	-0.0012

4.4 数值结果分析

首先分析励磁控制器对系统极点分布的影响, 结果如图 4.7-图 4.9所示:

1. 由图 4.7可知开环系统的稳定性受有功功率 P_t 和无功功率 Q_t 的变化影响很大, 并且当 P_t 和 Q_t 在某一区间内取值时, 开环系统存在不稳定模态($\max_{P_t, Q_t} \operatorname{Re} \lambda(A) = 3.4330$), 而且即使对稳定的振荡模态, 系统提供的阻尼也太小, 不足以有效抑制在暂态过程中产生的振荡。
2. 经典AVR+PSS控制器可以显著地改善系统的鲁棒稳定性(图 4.8), 并增强了系统对稳定振荡模态的阻尼作用, 在大部分的 P_t, Q_t 变化域上, AVR+PSS 控制器都能有效地抑制系统的振荡行为, 但仍不能保证系统在整个 P_t, Q_t 变化区间上稳定, 而且在某些 P_t, Q_t 参数下, AVR+PSS控制器使得系统稳定性变得更差($\max_{P_t, Q_t} \operatorname{Re} \lambda(A) = 3.6326$)。
3. 而由推论 2.2.3所解得 μ 鲁棒控制器在整个 P_t, Q_t 变化区间上都能达到稳定的控制效果($\max_{P_t, Q_t} \operatorname{Re} \lambda(A) = -0.0012$), 并且对所有的振荡模态都具有恰当的系统阻尼作用(图 4.9)。

分别采用FTD91, CS98和算法 4计算上节所求电力系统模型(包括开环系统, AVR+PSS和 μ 控制器闭环系统)的 μ 上界。表 4.5给出系统 μ 上界与平均CPU时间(P4 1.5G, 512MB, RH Linux 7.0, MATLAB 6.0 for Linux), 图 4.10-图 4.12分别给出系统的 ω - μ 曲线。数值算例表明本文所提出的 μ 上界判据(定理 2.2.2或推论 2.2.2)与[6, 8]中结果具有相似的精确度, 但同频域方法([6])相比, 判据定理 2.2.2或推论 2.2.2是基于状态空间描述的因而不需要频率扫描过程, 且LMI判据(2.9)的规模为 $O(al_r)$ ([8]所给判据为 $O(2^l a)$ 复杂度), 从而该判据同优化LMI算法结合使用可以处理 Δ 结构比较复杂的情况。

图 4.10-图 4.12列出了励磁控制器对闭环系统 μ 值的影响:

1. 开环系统的 $\bar{\mu}$ 值大于1($\bar{\mu} = 1.3183$), 说明开环系统在给定的 P_t, Q_t 变化区间上不是鲁棒稳定的。 P_t, Q_t 变化区间范围至少缩减到 $1/\bar{\mu} = 0.7586$ 以后才能保证系统鲁棒稳定。注意到开环系统的 $\bar{\mu}$ 值虽然大于1, 但仍然具有一定的鲁棒稳定性, 这可以从极点分布图上看。

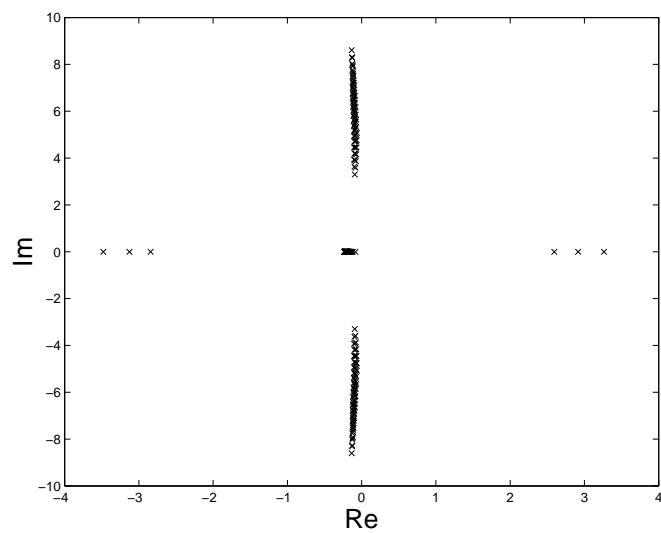


图 4.7: 系统极点分布(开环系统)

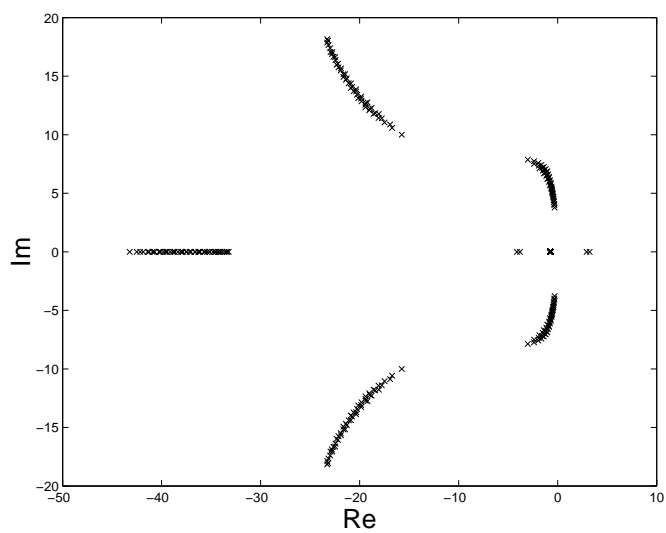
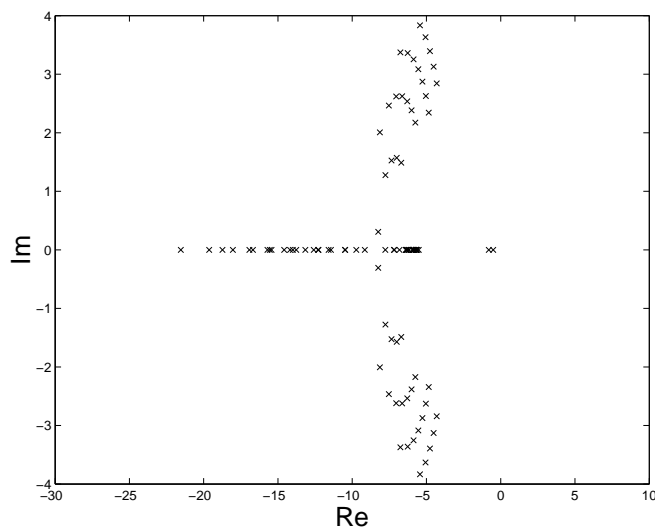


图 4.8: 系统极点分布(AVR+PSS闭环系统)

图 4.9: 系统极点分布(μ 控制器闭环系统)表 4.5: μ 上界($\bar{\mu}$)与平均CPU时间(t)

Problem		FTD91	CS98	算法 4
开环系统	$\bar{\mu}$	1.2945	1.3122	1.3183
	t	3640s	98.2s	61.1s
AVR+PSS	$\bar{\mu}$	1.2732	1.3054	1.2989
	t	4460s	124s	68.6s
μ 控制器	$\bar{\mu}$	0.9796	0.9851	0.9847
	t	3820s	106s	62.1s

- 从 μ 曲线分析, AVR+PSS控制器的控制效果并不比手动控制(开环系统)效果更好($\bar{\mu} = 1.2989$), 这也可以从系统极点的分布情况看出。但AVR+PSS控制器使系统的 μ 曲线的光滑性更好。大量数值算例表明, 具有较平坦的 μ 曲线的系统, 通常也具有更好的鲁棒性。
- μ 控制器能显著降低系统的 μ 值($\bar{\mu} = 0.9847$), 即增强系统的鲁棒性, 使上述系统在整个 P_t, Q_t 变化区间上都能达到稳定。

为了检验本文所提出控制方法在实际应用中的效果, 根据以上参数对上述SMIB系统进行仿真(MATLAB Simulink and Power System Blockset, 隐极式同步机, 电气部分采用六阶模型), 稳定平衡点: $P_t = 0.9, Q_t = 0.3$, 有如下扰动方案:

- 扰动方案1: 传输线三相短路, 持续0.1秒后切除, 仿真结果见图 4.13。

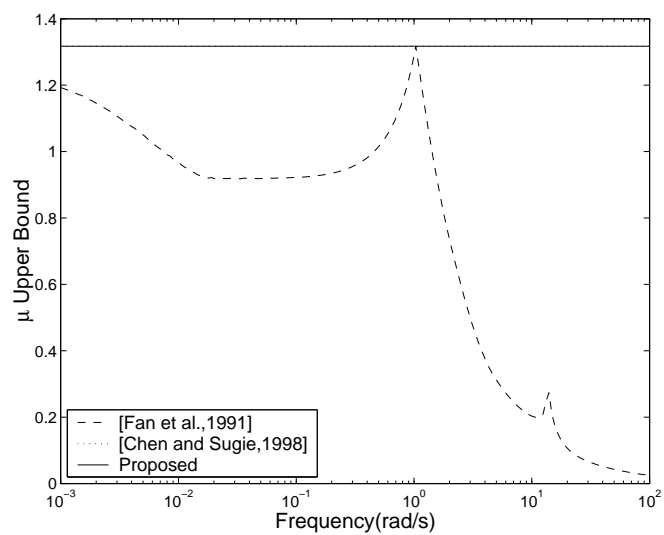


图 4.10: $\mu_{\Delta}(G)$ 上界(开环系统)

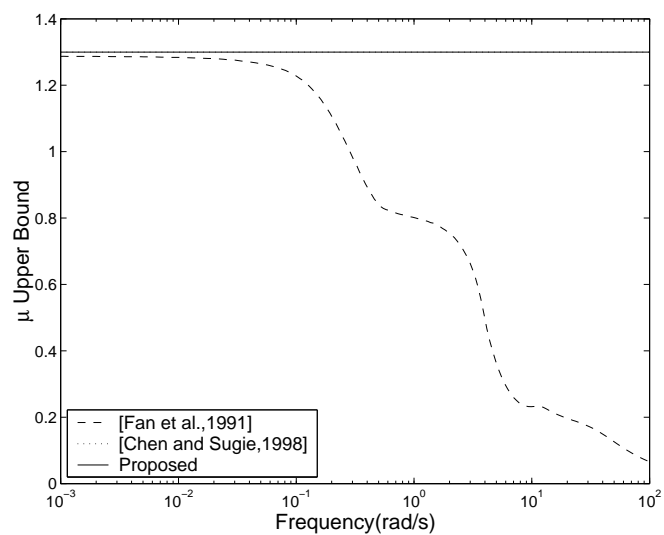


图 4.11: $\mu_{\Delta}(G)$ 上界(AVR+PSS闭环系统)

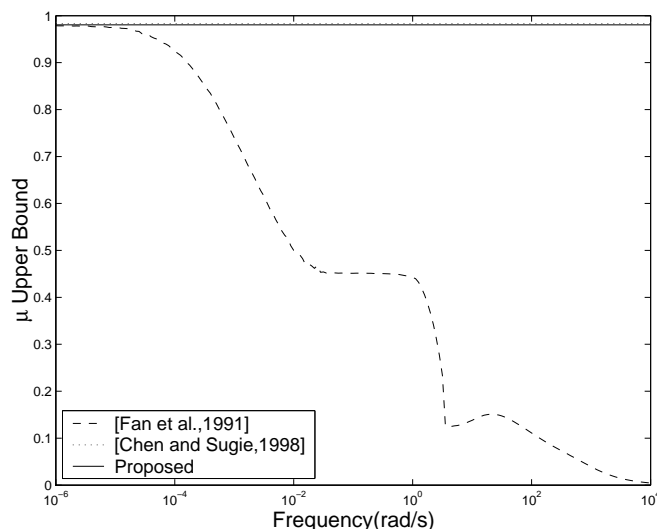


图 4.12: $\mu_{\Delta}(G)$ 上界(μ 控制器闭环系统)

- 扰动方案2: 切除20%机械输入功率, 0.4s后恢复, 仿真结果见图 4.14。
- 扰动方案3: 励磁参考电压25%波动, 持续0.2s, 仿真结果见图 4.15。

由数值仿真结果可知, 同传统AVR+PSS控制器相比, μ 控制器具有更好的动态特性, 对机端转角的漂移和转子角速度的波动都有很强的抑制作用。对机组的各种外部扰动 μ 控制器的控制效果都优于AVR+PSS控制器, 而且 μ 控制器对大范围的不确定量的变化(有功功率和无功功率)有更强的鲁棒性, 即使传统AVR+PSS控制器无法镇定系统时, μ 控制器仍然具有满意的控制效果。此外, 虽然本文所采用的控制策略是在电力系统的某一组特定的平衡点的线性化的基础上设计的, 但仿真结果表明, 这种控制方案对电力系统在较大的范围内偏离稳态平衡点的情况也有很好的控制作用。

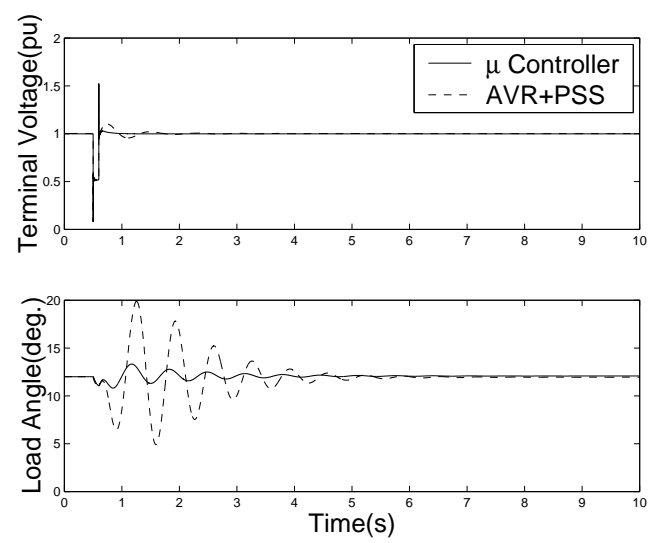


图 4.13: 扰动方案1

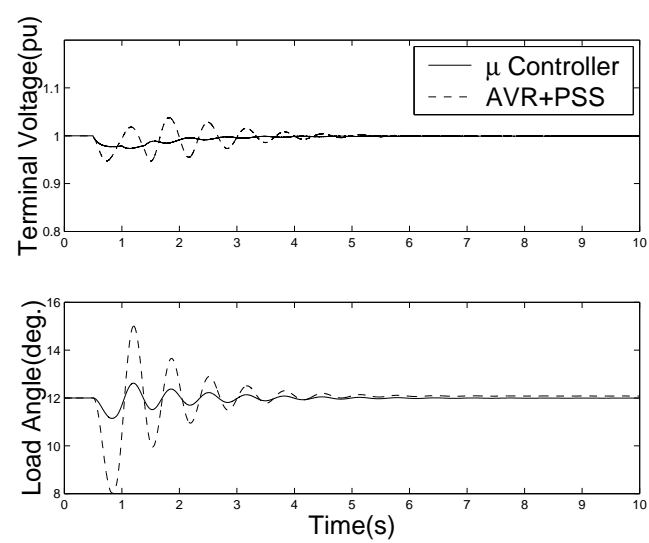


图 4.14: 扰动方案2

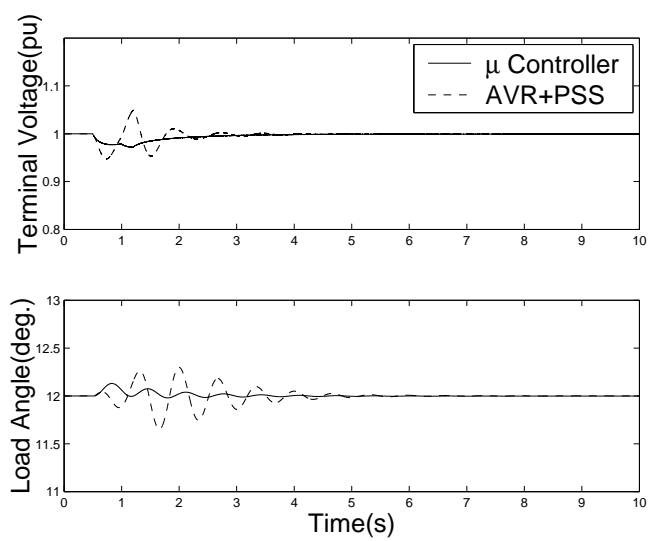


图 4.15: 扰动方案3

结束语

本文通过采用S-过程和正交投影的方法,研究了针对大规模系统的结构奇异值分析与综合方法以及相应的优化LMI算法,并将理论与算法的结果结合到具体的实际应用(电力系统)中。主要创新点有:

- 通过采用S-过程和正交投影的方法,将已有结构奇异值上界LMI判据(包含有 $2^{l_r} + 2l_r$ 个 $\mathcal{O}(ml_r)$ 规模的LMI)简化,得到新的精确程度相似而形式更为简单(含有 $2l_r + 1$ 个 $\mathcal{O}(ml_r)$ 规模的LMI)的充分性LMI判据,该判据比已有判据更适合于处理大规模复杂系统的 μ 分析与综合问题。
- 通过采用迭代方法求解最小二乘问题,解决了现有LMI算法(投影迭代方法)对系统资源需求过高的问题,同时通过采用正交投影的方法,解决了在迭代中出现的病态最小二乘问题。
- 以上述算法为基础,给出了并行求解结构奇异值分析与综合问题的实用算法,解决了大规模结构奇异值分析与综合问题的求解困难。
- 通过对实际系统(SMIB电力系统)的应用,验证了本文所提方法的有效性。

通过本文的研究,初步解决了采用LMI方法求解结构奇异值分析与综合的时出现的(指数规模)LMI维数过大,数值求解出现病态等问题,建立了在状态空间中求解结构奇异值分析综合问题的有效办法。同时,结构奇异值分析与综合的研究具有广泛的理论意义和实际应用背景,有必要在这一领域做更深入的研究,使得结构奇异值理论更加完善和成熟,以便将其应用到更广泛的工程 and 实际领域中。结合本文的工作,以下几个问题还有待于进一步研究:

1. 求解结构奇异值分析问题的保守性更小,计算复杂度更低的凸优化方法还有待于进一步研究;
2. 对于结构奇异值综合问题中出现的BMI问题,求解效率高,数值形态良好的凸优化算法还有待于进一步研究;
3. 将正交投影的方法推广到其他LMI算法([86])中以得到更高的求解效率;

博士期间完成的论文

- [1] 富饶, 杨莹, 黄琳, μ 分析的线性矩阵不等式方法及其优化算法, 控制与决策(已接受)。
- [2] 富饶, 黄琳, 基于LMI的 μ 方法及其在电力系统中的应用, 自动化学报(已接受)。
- [3] Rao FU and Lin HUANG, Parallel Algorithm for Computing Large-scale SSV Upper Bound, submitted to *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*.
- [4] 富饶, 黄琳, μ 分析与综合的LMI优化算法及其在发电机励磁控制中的应用, 中国电机工程学报, v.22, n.10, pp.7-11, 2002。
- [5] Ying YANG, Rao FU and Lin HUANG, Absolute Stabilization Based on Circle Criterion: H_∞ and LMI Approach, submitted to *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, Sep. 2002.
- [6] Rao FU and Lin HUANG, μ Analysis and Synthesis with Application in Power System: an LMI Approach, submitted to *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, Nov. 2002
- [7] Rao FU and Lin HUANG, SSV Analysis and Synthesis with Applications in Power Systems: LMI Approach, submitted to *IEEE Transactions on Power Systems*.
- [8] Rao FU, Ying YANG and Lin HUANG, Estimation of Stability Bound for Uncertain Lur'e Systems: An LMI Approach, submitted to *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Dec. 2003, Hawaii, USA.
- [9] Ying YANG, Rao FU and Lin HUANG, Global Properties of Uncertain Pendulum-like Systems, submitted to *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, Dec. 2003, Hawaii, USA.

本文所用到的符号

LMI	线性矩阵不等式
BMI	双线性矩阵不等式
SMIB	单机无穷大母线
$\mathbb{R}(\mathbb{C})$	实(复)数集
$\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$	n 维实(复)向量空间
$\mathbb{R}^{m \times n}(\mathbb{C}^{m \times n})$	$m \times n$ 维实(复)矩阵空间
\mathbb{R}_+	非负实数集
\mathbb{S}_n	表示 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的对称矩阵子空间
\mathbb{G}_n	表示 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的反对称矩阵子空间
\mathbb{P}_n	表示 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中的正定矩阵子空间
\mathcal{RH}_∞	所有稳定的传递函数矩阵构成的集合
$A_{m \times n}(0_{m \times n}, 1_{m \times n})$	表示 $\mathbb{R}^{m \times n}$ 中矩阵(0-矩阵, 1-矩阵)
$I_m(0_m, 1_m)$	表示 $m \times m$ 单位矩阵(0-矩阵, 1-矩阵)
\underline{m}	整数集 $\{1, 2, \dots, m\}$
$\lambda_i(A)$	矩阵 A 的第 i 个特征值
$\text{Ker}(A)$	矩阵 A 的化零空间
$\text{Im } A(\mathcal{A})$	矩阵 A (算子 \mathcal{A})的值域空间
$\ A\ $	矩阵 A 的算子2-范数
$A^{1/2}$	正定矩阵 A 的正定平方根矩阵
$A^T(a^T)$	矩阵 A (向量 a)的转置
$A^*(a^*)$	矩阵 A (向量 a)的Hermite转置
A^+	矩阵 A 的Moore-Penrose逆
A^\perp	满足 $\text{Ker}(A^{\perp T}) = \text{Im } A$ 且 $A^{\perp T} A^\perp = I$ 的矩阵
$A > 0 (A < 0)$	A 为正定阵(负定阵)
$\text{Det } A$	A 的行列式
$\text{He } A$	对适当阶数方阵 A , $\text{He } A = A + A^*$
$A \otimes B$	矩阵 A, B 的Kronecker积, 即 $(A \otimes B)_{ij} = (a_{ij} B)$
$\mathcal{F}_u(G, \Delta)$	上线性分式变换, 即 $\mathcal{F}_u(G, \Delta) = G_{22} + G_{21}\Delta(I - G_{11}\Delta)^{-1}G_{12}$
$\mathcal{F}_l(G, \Delta)$	下线性分式变换, 即 $\mathcal{F}_l(G, \Delta) = G_{11} + G_{12}\Delta(I - G_{22}\Delta)^{-1}G_{21}$
$\mathcal{M}(\mathcal{A})$	线性算子 \mathcal{A} 的矩阵表示
$\text{diag}_{i=1}^n A_i$	$\text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$

参考文献

- [1] M. Green and D. J. N Limebeer. *Linear robust control*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [2] 申铁龙. \mathcal{H}_∞ 控制理论及应用. 清华大学出版社, 1996.
- [3] 黄琳. 稳定性与鲁棒性的理论基础. 科学出版社, 2003.
- [4] J. C. Doyle. Analysis of feedback systems with structured uncertainties. *Proceedings of IEE, Part D*, 129:240–250, 1982.
- [5] M. G. Safonov. Stability margins of diagonally perturbed multivariable feedback systems. *Proceedings of IEE, Part D*, 129:251–256, November 1982.
- [6] M. K. H. Fan, A. L. Tits, and J. C. Doyle. Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(1):25–38, January 1991.
- [7] M. Fu and N. E. Barabanov. Improved upper bounds of the structured singular value. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, volume 34, pages 3115–3120, 1995.
- [8] G. Chen and T. Sugie. μ -Analysis and synthesis of state feedback systems based on multipliers and LMI's. In *Proceedings of the American Control Conference*, 17, pages 537–541, 1998.
- [9] A. Packard and J. C. Doyle. The complex structured singular value. *Automatica*, 29:71–109, 1993.
- [10] Laurent El Ghaoui. *Advances in Linear Matrix Inequality Method in Control*. SIAM, 2000.
- [11] G. Zames. On the input-output stability of nonlinear time-varying feedback systems, Parts I and II. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11:228–238, 465–476, 1966.
- [12] C. A. Desoer and M. Vidyasagar. *Feedback system: Input-Output Properties*. Academic Press, New York, 1975.

- [13] J. C. Willems. *The analysis of feedback systems*. MIT Press, Cambridge, MA, 1971.
- [14] M. G. Safonov. *Stability and robustness of multivariable feedback systems*. MIT Press, Boston, MA, 1980.
- [15] M. G. Safonov. Tight bounds on the response of multivariable systems with component uncertainty. In *Proceedings of the Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing*, pages 451–460, 1978.
- [16] J. S. Freudenberg, D. P. Looze, and J. B. Cruz. Robustness analysis using singular value sensitivities. *International Journal of Control*, 35:95–116, 1982.
- [17] K. M. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust & Optimal Control*. Prentice Hall, 1996.
- [18] M. K. H. Fan and A. L. Tits. Characterization and efficient computation of the structured singular value. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 31:734–743, 1986.
- [19] A. Packard, M. Fan, and J. C. Doyle. A power method for the structured singular value. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2132–2137, 1988.
- [20] J. C. Doyle. Structured uncertainty in control system design. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 260–265, 1985.
- [21] G. Stein and J. C. Doyle. Beyond singular values and loop shapes. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 14:5–16, 1991.
- [22] Gary J. Balas, Andy Packard, John C. Doyle, Keith Glover, and Roy Smith. Development of advanced control design software for researchers and engineers. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 996–1001, 1991.
- [23] Gary J. Balas, John C. Doyle, Keith Glover, Andy Packard, and Roy Smith. *μ Analysis and Synthesis Toolbox*. The MUSYN Inc. and The MathWorks Inc., 1998.
- [24] M. P. Newlin and P. M. Young. Mixed μ problem and branch and bound techniques. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 7:145–164, 1997.
- [25] C. Beck and J. C. Doyle. Mixed μ upper bound computation. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3187–3192, 1992.

- [26] E. E. Osborne. On preconditioning of matrices. *Journal of the ACM*, 7:338–345, 1960.
- [27] J. E. Tierno and P. M. Young. An improved μ lower bound via adaptive power iteration. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3181–3186, 1992.
- [28] P. Young and J. C. Doyle. A lower bound for the mixed μ problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:123–128, 1997.
- [29] P. M. Young, M. P. Newlin, and J. C. Doyle. Computing bounds for the mixed μ problem. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 5:573–590, 1995.
- [30] R. Braatz, P. Young, J. C. Doyle, and M. Morari. Computational complexity of μ calculation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39:1000–1002, 1994.
- [31] J. Demmel. The componentwise distance to the nearest singular matrix. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 13:10–19, 1992.
- [32] S. Poljak and J. Rohn. Checking robust nonsingularity is NP-complete. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 6:1–9, 1993.
- [33] A. K. Packard and P. Pandey. Continuity properties of the real/complex structured singular value. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38:415–428, 1993.
- [34] P. M. Young and J. C. Doyle. Properties of the mixed μ problem and its bounds. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41:155–159, 1996.
- [35] P. Young. The rank one mixed μ problem and Kharitonov type analysis. *Automatica*, 30:1899–1911, 1994.
- [36] L. Qiu, B. Bernhardsson, A. Rantzer, E. J. Davison, P. M. Young, and J. C. Doyle. A formula for computation of the real stability radius. *Automatica*, 31:879–890, 1995.
- [37] J. Chen, M. K. H. Fan, and C. N. Nett. The structured singular value and stability of uncertain polynomials: A missing link. *Control of Systems with Inexact Dynamic Models*, pages 15–23, 1991.
- [38] P. Young. Controller design with real parametric uncertainty. *International Journal of Control*, 65:469–509, 1996.
- [39] J. L. Lin, I. Postlethwaite, and D. W. Gu. μ -K iteration: A new algorithm for μ -synthesis. *Automatica*, 29(1):219–224, 1993.

- [40] C. T. Lawrence and A. L. Tits. A fast algorithm for the computation of an upper bound on the μ -norm. In *Proceedings of the IFAC Workshop*, pages 59–64, 1996.
- [41] G Ferreres and V Fromion. A new upper bound for the skewed structured singular value. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 9(1):33–49, January 1999.
- [42] M. G. Safonov, K. C. Goh, and J. H. Ly. Control system synthesis via bilinear matrix inequalities. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 45–49, 1994.
- [43] K. C. Goh, J. H. Ly, L. Turan, and M. G. Safonov. μ/K_m -synthesis via bilinear matrix inequalities. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2032–2037, 1994.
- [44] J. H. Ly, M. G. Safonov, and R. Y. Chiang. Real/complex multivariable stability margin computation via generalized Popov multiplier–LMI approach. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 425–429, 1994.
- [45] E. G. Collins, D. Sadhukhan, and L. T. Watson. Robust controller synthesis via non-linear matrix inequalities. *International Journal of Control*, 72(11):971–980, 1999.
- [46] E.G. Collins, W.M. Haddad, L.T. Watson, and D. Sadhukhan. Probability-one homotopy algorithms for robust controller synthesis with fixed-structure multipliers. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 17:165–185, 1997.
- [47] Onur Toker. Conservatism of randomized structured singular value. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(12):2113–2116, December 2002.
- [48] S. M. Rump. Perron-Frobenius theory for complex matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 363:251–273, April 2003.
- [49] G. Chen, T. Sugie, T. Fujinaka, and H. Shibata. Mixed- μ analysis for dynamic systems using descriptor form. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1314–1318, 1999.
- [50] G. Chen and T. Sugie. An upper bound of μ based on the parameter dependent multipliers. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 2604–2608, 1997.
- [51] G. Chen and T. Sugie. New upper bound of the real μ based on the parameter dependent multipliers. In *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*, 35, pages 1293–1294, 1996.

- [52] G Szita and C. K. Sanathanan. A model matching approach for designing decentralized MIMO controllers. *Journal of the Franklin Institute - Engineering and Applied Mathematics*, 337:641–660, September 2000.
- [53] G Ferreres and J. M. Biannic. Frequency domain curve fitting: a generalized μ approach. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16:273–288, May 2002.
- [54] Jie Chen, Michael K. H. Fan, and Cheng-Ching Yu. On D-stability and structured singular value. *Systems and Control Letters*, 24:19–24, 1995.
- [55] J Lee and T. F. Edgar. Real structured singular value conditions for the strong D-stability. *Systems and Control Letters*, 44:273–277, November 2001.
- [56] D Henry, A Zolghadri, M Monsion, and F Cazaurang. Fault diagnosis in induction machines using the generalized structured singular value. *Control Engineering Practice*, 10:587–598, June 2002.
- [57] D Henry, A Zolghadri, M Monsion, and S Ygorra. Off-line robust fault diagnosis using the generalized structured singular value. *Automatica*, 38:1347–1358, August 2002.
- [58] S Ishimoto and F Terui. Spherical μ with application to flight control analysis. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 25:1021–1028, November 2002.
- [59] T Mannchen, D. G. Bates, and I Postlethwaite. Modeling and computing worst-case uncertainty combinations for flight control systems analysis. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 25:1029–1039, November 2002.
- [60] S. L. Gatley, D. G. Bates, M. J. Hayes, and I Postlethwaite. Robustness analysis of an integrated flight and propulsion control system using μ and the ν -gap metric. *Control Engineering Practice*, 10:261–275, March 2002.
- [61] J. Y. Shin, G. J. Balas, and A. K. Packard. Worst-case analysis of the X-38 crew return vehicle flight control system. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 24:261–269, March 2001.
- [62] J. Y. Lee and T. F. Edgar. Phase conditions for stability of multi-loop control systems. *Computers & Chemical Engineering*, 23:1623–1630, January 2000.
- [63] S. Chen and O. P. Malik. Power system stabilizer design using μ synthesis. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 10(1):175–181, March 1995.

- [64] Miodrag Djukanovic, Mustafa Khammash, and Vijay Vittal. Application of the structured singular value theory for robust stability and control analysis in multimachine power systems, Part I: Framework development. *IEEE Transactions on Power System*, 13(4):1311–1316, November 1998.
- [65] Miodrag Djukanovic, Mustafa Khammash, and Vijay Vittal. Application of the structured singular value theory for robust stability and control analysis in multimachine power systems, Part II: Numerical simulations and results. *IEEE Transactions on Power System*, 13(4):1317–1322, November 1998.
- [66] Miodrag Djukanovic, Mustafa Khammash, and Vijay Vittal. Sensitivity based structured singular value approach to stability robustness of power systems. *IEEE Transactions on Power System*, 15(2):825–830, May 2000.
- [67] Mario Ríos, Nouredine Hadjsaid, Renè Feuillet, and Alvaro Torres. Power systems stability robustness evaluation by μ analysis. *IEEE Transactions on Power System*, 14(2):648–653, May 1999.
- [68] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to \mathcal{H}_∞ control. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994.
- [69] T. Iwasaki and R.E. Skelton. All controllers for the general \mathcal{H}_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Automatica*, 30(8):1307–1317, 1994.
- [70] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, 1994.
- [71] Laurent El Ghaoui and Hervé Lebret. Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 18(4):1035–1064, October 1997.
- [72] Pascal Gahinet, Pierre Apkarian, and Mahmoud Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov function and real parameter uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442, March 1996.
- [73] Arkadii Nemirovskii and Pascal Gahinet. The projective method for solving linear matrix inequalities. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 840–844, 1994.
- [74] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali. *LMI Control Toolbox User's Guide*. The MathWorks, Inc., 24 Prime Park Way, Natick, Mass. 01760-1500, May 1995.

- [75] Mitsuhiro Fukuda, Masakazu Kojima, and Masayuki Shida. Lagrangian dual interior-point methods for semidefinite programs. *SIAM Journal on Optimization*, 12(4):1007–1031, 2002.
- [76] M. J. Todd, K. C. Toh, and R. H. Tütüncü. On the Nesternov-Todd direction in semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 8:769–796, 1998.
- [77] M. Kojima, M. Shida, and S. Shindoh. Local convergency of predictor-corrector infeasible-interior-point algorithms for SDPs and SDLCPs. *Mathematical Programming*, 80(2):129–160, January 1998.
- [78] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1983.
- [79] X. C. Yu, M. Khammash, and V. Vittal. Robust design of a damping controller for static var compensators in power systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 16:456–462, August 2001.
- [80] N. Yang and J. D. McCalley. μ -analysis and synthesis for the uncertainties in static load modeling. *Electric Power Systems Research*, 56:17–25, October 2000.
- [81] S. M. Vasilic and T. B. Petrovic. Design of advanced robust decentralized control of parallel DC/DC converters. *Electrical Engineering*, 81:27–34, February 1998.
- [82] T. C. Yang. Applying structured singular value to multi-machine power system stabilizer design. *Electric Power Systems Research*, 43:113–123, November 1997.
- [83] C. K. Weng, A. Ray, and X. W. Dai. Modelling of power plant dynamics and uncertainties for robust control synthesis. *Applied Mathematical Modelling*, 20:501–512, July 1996.
- [84] P. Kundur. *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill Inc., 1994.
- [85] George E. Boukarim and Joe H. Chow. Modeling of nonlinear system uncertainties using a linear fractional transformation approach. In *Proceedings of the American Control Conference*, 1998.
- [86] Steven J. Benson, Yinyu Ye, and Xiong Zhang. Solving large-scale sparse semidefinite programs for combinatorial optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 10(2):443–461, 2000.
- [87] 黄琳. 系统与控制理论中的线性代数. 科学出版社, 1984.