

轴对称自旋液体的自由晃动动力学研究
(申请工学硕士学位论文)

导 师：包光伟
研究生：富 饶

上海交通大学 工程力学系 一般力学专业
一九九九年二月

摘要: 本文在直接方法的微幅晃动的假设基础上, 通过采取忽略 Euler 方程的哥氏加速度项的方法, 提出一种比 Pfeiffer 均匀涡旋模型更为精确的而相比直接方法较为简单的数学模型 (涡旋分解方法), 并建立起求解该模型特征问题的有限元数值计算方法, 并进一步分析了以上三种数学模型 (Pfeiffer 模型, 直接方法, 涡旋分解方法) 的关系。

关键词: 液体晃动, 轴对称贮箱, 晃动频率, 部分充液, 有限元方法, FEM

ABSTRACT: Under the minor sloshing hypothesis present by Direct Method, a new mathematic model (Vortex Model) for axis symmetric container partially filled with liquid has been given in the present thesis. The characteristic problems for that model have been solved numerically by Finite Element Method which has been given in the present thesis. Relations between Pfeiffer Model and Vortex Model, Vortex Model and Direct Model have been fully investigated through the numerical result, too.

KEYWORDS: Liquid Sloshing, axis symmetric tank, characteristic frequency, partially filled with liquid, FEM

目录

第一章 绪论	(4)
§ 1.1 课题应用背景	(4)
§ 1.2 历史发展与研究现状	(4)
§ 1.3 本文的主要研究工作及重点	(5)
第二章 直接方法的数学模型及有限元方法	(6)
§ 2.1 流体动力学基本方程与边界条件	(6)
§ 2.2 液体自由晃动的 Sobolev 解	(7)
§ 2.3 液体自由晃动特征频率的有限元算法	(7)
第三章 自旋液体晃动的涡旋分解模型及其有限元方法	(9)
§ 3.1 涡旋分解方法的数学模型	(9)
§ 3.2 液面波动分量特征值问题的变分原理	(10)
§ 3.3 液面波动分量特征值问题的有限元方法	(11)
§ 3.4 涡旋分量特征解性质	(12)
§ 3.5 涡旋分量边值问题 Sobolev 特征解	(14)
§ 3.6 涡旋分量特征频率的有限元方法	(15)
第四章 数学模型分析	(17)
§ 4.1 Pfeiffer 模型分析	(17)
§ 4.2 涡旋分解模型的分析	(18)
§ 4.1 Pfeiffer 模型与涡旋分解模型的关系	(18)
§ 4.2 涡旋分解模型与直接方法的对比	(19)
第五章 数值结果与分析	(20)
§ 5.0 结果说明	(20)
§ 5.1 数值结果	(21)
§ 5.2 结果分析	(28)
§ 5.2.1 有限元方法的收敛性分析 (圆柱腔)	(28)
§ 5.2.2 充液比对系统特征频率分布的影响 (圆柱腔)	(28)
§ 5.2.3 腔体高度对系统特征频率分布的影响 (圆柱腔)	(28)
§ 5.2.4 直接方法同涡旋分解方法的对比 (圆柱腔)	(29)
§ 5.2.5 直接方法同涡旋分解方法的对比 (椭球腔)	(29)
§ 5.3 结果讨论	(29)
§ 5.3.1 频谱稠密区域存在的合理性	(29)
§ 5.3.2 涡旋分解模型 (Pfeiffer 模型) 的近似程度	(29)
第六章 程序说明	(31)
§ 6.1 变量说明	(31)
§ 6.2 程序结构说明	(32)
§ 6.3 使用说明	(33)
参考文献	(36)
致谢	(37)

第一章 绪论

§ 1.1 课题应用背景:

在航天技术日益发展的今天,对在重力(微重力)环境下运行的航天器(运载火箭,卫星,航天飞机等)的姿态控制的精度要求不断提高。对航天器的飞行姿态如何更好地进行控制提出了越来越高的要求。因此要求对影响航天器飞行姿态的各项扰动进行分析,其中重要的一项是航天器中所含液体的晃动对其姿态的影响。

在使用液体推进剂的宇宙飞行器中,液体的低频晃动使得飞行器的运动可能与飞行器姿态控制系统产生耦合,导致飞行器出现力不稳定现象。近几年地球同步卫星的设计大多倾向于使用液体远地点发动机,这样在轨道运行中液体质量几乎构成了飞行器质量的一半。在这些飞行器中,液体的运动显著地影响飞行器姿态的稳定与控制。燃料晃动产生的附加载荷,不仅影响飞行器的运动稳定性,控制强度,结构强度等,而且可能导致重大事故。LEASAT是一个使用远地点液体推进器的地球同步飞行器,在1984年9月发射,在接近远地点喷射点火阶段是产生了姿态运动失稳^[1],突然失去控制。这个卫星的不稳定现象被确认为是流体横向晃动模态和姿态控制系统之间相互作用的结果。这个例子表明在对这类飞行器进行姿态控制时对流体的晃动和姿态控制之间的动力学作用的研究是非常重要的。这给液体平衡结构,动力学,热传导等方面带来了一系列新问题。这些新问题给航天器利用流体的许多系统,如液体发动机系统,生命保障系统,冷却润滑等系统的设计带来无法回避的影响,设计准则中要考虑这些影响。因此对于大型航天器在重力与微重力环境下充液系统的动力学,稳定性与控制的研究已经成为国内外科技界瞩目的前沿课题,是航天科技领域中的一个重要方面。对于这类问题,需要研究液体的运动规律,首先要研究液体自由晃动的运动规律。由此,本文拟对最为典型的情况:自旋轴对称充液容器中的液体自由晃动的动力学特性(特征频率)进行研究。

§ 1.2 历史发展与研究现状

虽然已有很多关于充液自旋航天器的试验方法,在地面上已有气浮台仿真实验,落塔实验,气球实验和受迫章动实验等。空间实验有飞机飞行实验,空间轨道飞行实验等。并且实验研究的效果较好,有与空间飞行数据比较吻合的优点,但是实验方法大多比较复杂,而且费用较高。因此国内国外研究人员在许多情况下还是采用理论分析与数值计算的方法,然后与实验结果进行比较。

由于缺少有效的精确模型来估计自旋飞行器中的液体动力学特性,在航天工业中曾使用了诸如刚性单摆模型之类的近似模型。然而很快发现这些模型有明显的精确性。这促使航天工业界和学术界加紧发展更好的数学模型来分析自旋航天器中流体的动力学特性。Dodge曾用待定系数法近似求解旋转对称容器中静止自由液面。方法简单,但适用范围小,有一定的误差。且需要预知静止自由液面与容器壁的接触位置。1967年Dodge首次计算了微重力状态下圆柱形平底容器中深液的晃动特性,并把计算结果与毛细管试验做了比较。

Concus用差分法求解了微重力状态下圆柱形球底容器中液体的晃动特性。Greenspan^[2]分析了充满粘性不可压缩流体的任意形状的容器的起始旋转时的瞬态运动。Stewartson^[3]提出对于自旋充液刚体的姿态稳定性判据。该稳定性判据由Wedemeyer^[4]通过考虑流体粘性而修正。Nayfeh和Meiravitch^[5]分析了有球形空腔的自旋刚体中部分充液的情况,但只在靠近容器湿表面的边界层考虑粘性的影响。Hendricks和Morton^[6]分析了部分充有粘性不可压缩液体的转子的稳定性。Skrigiopoulous和Aldridge^[7]研究了一个自旋体中部分充液的圆柱空腔的惯性波动。

这其中很重要的发展是 Pfeiffer^[8]把均匀涡旋的概念引入部分充液容器问题。在均匀涡旋假设的基础上,很多部分充液问题得以进一步研究,并取得了一些很重要的结果,如 Raheb 和 Wagner^[9]提出的基于均匀涡旋假设的有限元模型。同时 Pfeiffer 模型也成为研究部分充液问题的主要方法。但是很快地也发现了 Pfeiffer 均匀涡旋假设在本构性和自由振动稳定性方面的本质性的不精确性^[10,11,19]。这促使开始研究更好的数学模型。G.W.Bao^[12]提出了不引入 Pfeiffer 均匀涡旋假设的更为精确的液体晃动数学模型。

近几年来,各种数值方法逐渐被引入用来计算流体的晃动特性。由 MBB 主办的 INTELSAT 提出了一种有限元方法来估计带有部分充液贮箱的自旋飞行器中的流体的自振频率,模态性质,阻尼系数,章动频率及章动时间常数。在 INTELSAT VI 中利用该模型来研究带有一个液体远地点推进器的双自旋飞行器中的流体运动对姿态动力学和控制的影响。EL-Raheb 和 Wagner^[9]提出基于 Pfeiffer 均匀涡旋假设的有限元模型。J.E.MC INTYPE 和 T.M.Tanner^[13]用有限元分析充液刚体晃动的章动时间常数。A.C.Orf, A.D.Challoner 和 P.P.YIP^[14]用有限元来计算充液旋转体的稳定性。Fu Ru-De^[15]则用有限元来计算轴对称贮箱中流体的晃动频率响应。G.W.Bao^[12]在提出不引入 Pfeiffer 均匀涡旋假设的液体晃动数学模型的同时也给出了其有限元数值计算方法。

§ 1.3 本文的主要研究工作及特点

Pfeiffer 均匀涡旋模型比较简单,方便于进行理论分析和数值计算,并得到了一些很重要的结果。但其在本构性和自由振动稳定性方面的无法克服的缺陷也带来很大的局限性。而 G.W.Bao^[12]提出的液体晃动数学模型(直接方法)由于没有引入 Pfeiffer 均匀涡旋假设等近似条件而更为精确,但该模型过于复杂,尚难以进行进一步的理论分析及对其解的性态进行研究。所以本文在直接方法的微幅晃动的假设基础上,通过采取忽略 Euler 方程的哥氏加速度项的方法,提出一种比 Pfeiffer 均匀涡旋模型更为精确的而相比直接方法较为简单的数学模型(涡旋分解方法),并建立起求解该模型特征问题的有限元数值计算方法。

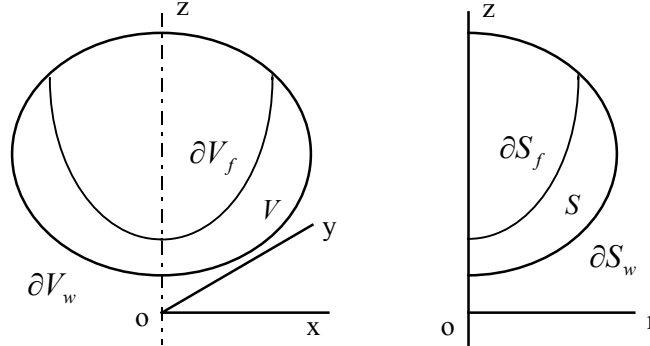
对于 G.W.Bao^[12]提出的基于直接方法的有限元方法和本文提出的涡旋分解方法的有限元方法,本文分别建立了数值计算程序,并开发了一整套的研究充液轴对称容器自由晃动频率的集成环境。

在此基础上,本文进一步分析了以上三种数学模型(Pfeiffer 模型,直接方法,涡旋分解方法)的关系。并以有限元数值计算结果(直接方法,涡旋分解方法)为基础研究了直接方法解的性态和 Pfeiffer 模型的近似程度和有效性。

考虑到计算程序的可移植性和扩展性,本文中的计算程序选择在较为成熟的 MATLAB 环境下开发并采用了模块化设计,对于不同的工况和其他形状的腔体,增加相应的模块即可进行计算。实际上,即使是有限元算法的核心部分,也可以很容易地进行修改。为了便于扩展计算程序的功能,本文对计算程序进行了详细的说明。本文的计算程序还采用了 GUI(图形用户界面)以改善程序的易用性。在数值结果的输出方面也采用了多种可视化方法以使输出结果明晰,直观。

第二章 直接方法的数学模型及有限元方法

本文首先简述一下直接方法的数学模型及有限元方法，系统简图如下：



充液容器示意图

基本模型假设

该充液容器是一个旋转对称体，其对称轴与自转轴重合。由于在实际中充液容器的结构频率远高于液体晃动频率，因此可以假设容器是刚性的。在自旋充液卫星的姿态动力学问题的研究中，首先需要研究腔内液体的自由晃动特征问题。自旋液体自由晃动是指带自由面液体在随同腔体以匀角速度自旋的稳态运动下的扰动运动，它并不考虑液体与刚体之间的耦合动力学问题。在充液卫星的姿态控制研究中，液体自由晃动的特征频率的确定是至关重要的。而在充液卫星的姿态动力学问题的研究中，则更需要确定液体自由晃动的特征模态。由此引出基本假设：

1. 容器是刚性的，并且是旋转对称的，对称轴与自转轴重合（中心贮箱）。
2. 液体是理想不可压缩流体。
3. 充液刚体的稳态运动（永久转动）是液体连同刚体以匀角速度绕自转轴转动。
4. 系统的任意扰动将引起液体自由面作微幅晃动。

§ 2.1 流体动力学基本方程与边界条件

假定腔体是旋转对称体，腔内半充理想不可压缩液体。建立惯性坐标系 $O-XYZ$ 和连体坐标系 $o-xyz$ （如上图）， z 轴（单位矢量 \mathbf{k} ）是腔体的对称轴，与旋转轴 Z 轴重合。假设系统的稳态运动为液体连同腔体以角速度 $\boldsymbol{\omega}_0$ 绕 Z 轴自旋，则当腔内液体有扰动时，其绝对速度为 $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{r} + \mathbf{u}$ ，其中 $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \mathbf{k}$ 是刚体的转动角速度， \mathbf{r} 是坐标原点 o 到液体质点的径矢， $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ 是液体相对于腔体的相对速度。

由^[12]的推导可得到腔内液体自由晃动满足下列方程和边界条件（符号同^[12]）：

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u} + \nabla \frac{p}{\rho} = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{in } V \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial V_w \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{p}{\rho} = g\zeta, & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 $g = \sqrt{\omega_0^4 r^2 + g_0^2}$, ρ, p 分别是液体质量密度和压强扰动量, $V, \partial V_f, \partial V_w$ 分别是未扰时腔内液体域、液体域的液体自由面边界部分和腔壁湿表面边界部分, \mathbf{n} 是液体域边界外法向, ζ 是扰动液面波高, 可通过未扰液面上点的径矢 \mathbf{r} 和波高 ζ 来确定扰动液面的位置 \mathbf{r}' , 即 $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \zeta \mathbf{n}$, g_0 是重力加速度, r 是液面 ∂V_f 上质点到 z 轴的距离。

§ 2.2 液体自由晃动的 Sobolev 解

对 (2.1), 由 Sobolev 假设^[20], 可知存在 Sobolev 形式特征解 $\phi(\mathbf{r}) \in \mathbf{C}$, 使成立,

$$u(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}_\sigma \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot e^{i\sigma t}, \frac{p(\mathbf{r}, t)}{\rho} = -\mathbf{E}_\sigma \phi(\mathbf{r}) \cdot e^{i\sigma t}, \zeta(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mathbf{E}_\sigma \phi(\mathbf{r}) \cdot e^{i\sigma t}}{g}$$

则 $\phi(\mathbf{r})$ 应满足如下方程

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}_\sigma \nabla \phi(\mathbf{r}) = 0 & \text{in } V \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_\sigma \nabla \phi(\mathbf{r}) = 0 & \text{on } \partial V_w \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_\sigma \nabla \phi(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{E}_\sigma' \phi(\mathbf{r})}{g} = 0 & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\text{算子 } \mathbf{E}_\sigma = -i\sigma(\sigma^2 - 4\omega_0^2), \mathbf{E}_\sigma' = (\sigma^2 - 4\omega_0^2)\sigma^2, \mathbf{D}_\sigma = -\sigma^2 - 2i\sigma\omega_0 \times + 4\omega_0\omega_0.$$

§ 2.3 液体自由晃动特征频率的有限元算法

不难验算, (2-2) 有与其等价的变分方程 $\delta L = 0$, 其中

$$L = \int_V (\sigma^2 (\nabla \phi^* \cdot \nabla \phi) - 4(\omega_0 \cdot \nabla \phi^*)(\omega_0 \cdot \nabla \phi) - 2i\sigma\omega_0 \cdot \nabla \phi^* \times \nabla \phi) dv - \int_{\partial V_f} \frac{\mathbf{E}_\sigma' \phi^* \phi}{g} ds$$

对于轴对称求解域的特殊情况, 可建立圆柱坐标系 $o-r\theta z$ 并设

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(r, z) e^{im\theta}, \phi(r, z) \in \mathbf{R}, m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.3)$$

则 L 有无量纲化后的化简形式 L'

$$L' = \frac{L}{8\pi\omega_0 \mathbf{L}^5 \mathbf{T}^2} = \int_S r' \left\{ \tau^2 \left[\left(\frac{\partial \phi'}{\partial r'} \right)^2 + \left(\frac{m\phi'}{r'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z'} \right)^2 \right] - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z'} \right)^2 \right\} + \pi m \int_{\partial S} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}^\theta) \phi'^2 - \tau^2 (\tau^2 - 1) \int_{\partial S_f} \frac{r' \phi'^2}{\sqrt{r'^2 + \lambda^2}}$$

其中 \mathbf{T} 是特征时间, \mathbf{L} 是特征长度, 无量纲坐标 (r', z') 与物理坐标 (r, z) , 函数 ϕ' 与 ϕ

的关系为 $r' = r/\mathbf{L}$, $z' = z/\mathbf{L}$, $\phi' = \phi/\mathbf{L}^2 \mathbf{T}$ (以下讨论略去上标), $\tau = \sigma/2\omega_0$ 代表无量纲固

有频率参数, $\lambda = g_0/(\omega_0^2 L)$ 是无量纲重力自旋加速度比, 代表了重力与离心力的比值。

应用有限元方法, 在液体域内划分单元, 并且在每个单元内对函数 $\phi(r, z)$ 进行插值

$$\phi^e(r, z) = \sum_{i=1}^3 f_i(r, z) \phi_i^e \quad (2.4)$$

将函数 $\phi(r, z)$ 的插值公式 (2.4) 代入 L' 的泛函式, 并由极值原理导得关于总节点变量的矩阵特征方程

$$(G - \lambda I)y = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{其中, } y = (\phi_1, \phi_2, \tau\phi_1, \tau\phi_2, \tau^2\phi_1, \tau^3\phi_1)^T \quad (2.6)$$

ϕ 是 $\phi(r, z)$ 的所有节点变量列阵, ϕ_1 是自由表面上的节点变量值, ϕ_2 是其他节点上的节点变量值。

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ \tilde{C}_{21} & \tilde{C}_{22} & -m\tilde{B}_{21} & -m\tilde{B}_{22} & -\tilde{A}_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ -\underline{D}^{-1}\hat{C}_{11}/4 & -\underline{D}^{-1}\hat{C}_{12}/4 & m\underline{D}^{-1}\hat{B}_{11}/4 & m\underline{D}^{-1}\hat{B}_{12}/4 & \underline{D}^{-1}\hat{A}_{11}/4 + I & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\hat{A}_{11} = A_{11} - A_{12}\tilde{A}_{21}, \quad \tilde{A}_{21} = A_{22}^{-1}A_{21}$$

$$\hat{B}_{11} = B_{11} - A_{12}\tilde{B}_{21}, \quad \tilde{B}_{21} = A_{22}^{-1}B_{21}$$

$$\hat{B}_{12} = B_{12} - A_{12}\tilde{B}_{22}, \quad \tilde{B}_{22} = A_{22}^{-1}B_{22}$$

$$\hat{C}_{11} = C_{11} - A_{12}\tilde{C}_{21}, \quad \tilde{C}_{21} = A_{22}^{-1}C_{21}$$

$$\hat{C}_{12} = C_{12} - A_{12}\tilde{C}_{22}, \quad \tilde{C}_{22} = A_{22}^{-1}C_{22}$$

矩阵 A, B, C, D 的单元矩阵表达式分别为:

$$A_{ij}^e = \int_{S^e} r \left(\frac{\partial f_i}{\partial r} \frac{\partial f_j}{\partial r} + \frac{mf_i}{r} \frac{mf_j}{r} + \frac{\partial f_i}{\partial z} \frac{\partial f_j}{\partial z} \right) dS, \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$B_{ij}^e = \int_{\partial S^e} n_k f_i f_j ds, \quad i, j = 1, 2$$

$$C_{ij}^e = \int_{S^e} r \frac{\partial f_i}{\partial z} \frac{\partial f_j}{\partial z} dS, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

$$D_{ij}^e = \int_{\partial S_f^e} \frac{rf_i f_j}{B} ds, \quad i, j = 1, 2$$

对标准特征值问题 (2.5), 采用 QR 算法可求得所有特征值和特征向量。

第三章 自旋液体晃动的涡旋分解模型及其有限元方法

本章研究部分充液的自旋轴对称刚体内液体的自由晃动特征频率问题的涡旋分解模型及其有限元方法，系统模型简图，基本假设及符号约定同第二章。

§ 3.1 涡旋分解方法的数学模型

由^[12]的推导可得液体自由晃动方程和边界条件(无粘液体的 Euler 水动力学方程、液体不可压缩的连续性方程、液体在腔壁上的不可渗透性条件、在液体自由面上的运动学和动力学条件，符号同^[12])如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u} + \nabla \frac{p}{\rho} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{in } V \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial V_w \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \frac{p}{\rho} = g\zeta, & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (3.1)$$

现在考虑另一种解法。

$$\text{首先将 } \mathbf{u}, p, \zeta \text{ 作如下形式分解: } \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}^s + \mathbf{u}^v \\ p = p^s + p^v \\ \zeta = \zeta^s + \zeta^v \end{cases} \quad (3.2)$$

其中 $\mathbf{u}^s, p^s, \zeta^s$ (液面波动分量) 满足如下方程和边界条件

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial t} + \nabla \frac{p^s}{\rho} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0, & \text{in } V \\ \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial V_w \\ \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \zeta^s}{\partial t}, \frac{p^s}{\rho} = g\zeta^s, & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (3.3)$$

$\mathbf{u}^v, p^v, \zeta^v$ (涡旋分量) 满足如下方程和边界条件：

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^v}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u}^v + \nabla \frac{p^v}{\rho} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{u}^v = 0, & \text{in } V \\ \mathbf{u}^v \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial V \\ p^v = 0, & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (3.4)$$

按以上分解，可知 \mathbf{u}, p, ζ 在忽略 $2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u}^s$ 项时，满足方程和边界条件 (3.1)。所以由

(3.2)，可将 \mathbf{u}, p, ζ 分解为液面波动分量 $\mathbf{u}^s, p^s, \zeta^s$ 及涡旋分量 $\mathbf{u}^v, p^v, \zeta^v$ 两部分。以上模型的提出没有依赖于 Pfeiffer 均匀涡旋假设。下面将分别导出两部分分量的变分原理和有限元方法。

§ 3.2 液面波动分量特征值问题的变分原理

液面波动分量 $\mathbf{u}^s, p^s, \zeta^s$ 应满足如下方程和边界条件:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^s}{\partial t} + \nabla \frac{p^s}{\rho} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0, & \text{in } V \\ \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial V_w \\ \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \zeta^s}{\partial t}, \frac{p^s}{\rho} = g\zeta^s, & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (3.3)$$

首先分离变量, 设其在复数域内有如下形式的特征解:

$$\mathbf{u}^s(\mathbf{r}, t) = i\sigma \mathbf{U}(\mathbf{r})e^{i\sigma t}, p^s(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r})e^{i\sigma t}, \zeta^s(\mathbf{r}, t) = H(\mathbf{r})e^{i\sigma t}$$

特征频率 $\sigma \in \mathbf{R}$, 则 $\mathbf{U}, P, H \in \mathbf{C}$ 应满足方程:

$$\begin{cases} -\sigma^2 \mathbf{U} + \nabla \frac{P}{\rho} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, & \text{in } V \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial V_w \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = H, \frac{P}{\rho} = gH, & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (3.5)$$

由^[16]中有势假设, 对 (3.5), $\exists \Phi = \Phi(\mathbf{r}) \in \mathbf{C}$, 满足:

$$\mathbf{U} = \nabla \Phi, \frac{P}{\rho} = \sigma^2 \Phi, \sigma^2 \Phi = gH, \text{ 则 } \Phi \text{ 应满足边值问题:}$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0, & \text{in } V \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, & \text{on } \partial V_w \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\sigma^2 \Phi}{g}, & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (3.6)$$

由此将方程 (3.3) 变换为方程 (3.6)。

但为了使用有限元方法求解, 还需要导出与 (3.6) 等价的变分方程。

$$\text{引入泛函 } L = \int_V \nabla \Phi^* \cdot \nabla \Phi - \frac{\sigma^2}{g} \int_{\partial V_f} \Phi^* \Phi, \text{ 则有}$$

$$\begin{aligned}
\delta L &= \int_V 2\nabla \Phi \cdot \delta \nabla \Phi - 2 \frac{\sigma^2}{g} \int_{\partial V_f} \Phi \delta \Phi \\
&= 2 \int_V (\nabla \cdot (\delta \Phi \nabla \Phi) - \delta \Phi \nabla^2 \Phi) - 2 \frac{\sigma^2}{g} \int_{\partial V_f} \Phi \delta \Phi \\
&= 2 \int_{\partial V} \delta \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} - 2 \int_V \delta \Phi \nabla^2 \Phi - 2 \frac{\sigma^2}{g} \int_{\partial V_f} \Phi \delta \Phi \\
&= 2 \left(\int_{\partial V_w} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \delta \Phi - \int_V \nabla^2 \Phi \delta \Phi - \int_{\partial V_f} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\sigma^2}{g} \Phi \right) \delta \Phi \right)
\end{aligned}$$

易知变分问题 $\delta L = 0$ 同 (3.6) 等价, 由此将边值问题 (3.6) 变为泛函极值问题, 由该泛函极值问题则可得到相应的有限元方法。

§ 3.3 液面波动分量特征值问题的有限元方法

当旋转对称贮箱的对称轴重合于系统的自旋轴时, 称之为中心贮箱。对于中心贮箱问题, 可建立对应于直角坐标系 $o-xyz$ 的圆柱坐标系 $o-r\theta z$ (坐标矢量 $\mathbf{r}^0, \boldsymbol{\theta}^0, \mathbf{z}^0$), 而对于特征模态 $\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r, \theta, z)$, 由于

$$\Phi(r, \theta, z) = \Phi(r, \theta + 2\pi, z)$$

因此, 可取特征模态如以下形式:

$$\Phi(r, \theta, z) = \phi(r, z)e^{im\theta}, \phi(r, z) \in \mathbf{R}, m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

对于轴对称容器, 令 $\theta = \text{常数}$, 则泛函式 $\delta L = 0$ 可化为二维积分式。记横截面上二维液体域为 S , 对应于边界 $\partial V_f, \partial V_w$ 的 S 的边界分别记为 $\partial S_f, \partial S_w$ 。

为建立液体自由晃动固有频率的有限元算法, 首先对泛函式 (66) 进行无量纲化。引入特征时间 \mathbf{T} 和特征长度 \mathbf{L} , 则无量纲坐标 (r', z') 与物理坐标 (r, z) , 函数 ϕ' 与 ϕ 的关系为

$$r' = r/\mathbf{L}, \quad z' = z/\mathbf{L}, \quad \phi' = \phi/\mathbf{L}^2 \mathbf{T}$$

将上式代入泛函式 L , 则有 (为书写简洁, 省略上标符号)

$$L' = \frac{L}{8\pi\omega_0 \mathbf{L}^5 \mathbf{T}^2} = \tau^2 \int_{\partial S_f} \frac{r\phi'^2}{g'} - \int_S r \left\{ \left(\frac{\partial \phi'}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{m\phi'}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z} \right)^2 \right\}$$

其中 $\tau = \sigma/2\omega_0$ 代表无量纲固有频率参数, $g' = \sqrt{r^2 + \lambda^2}$, $\lambda = g_0/(\omega_0^2 \mathbf{L})$ 是无量纲重力自旋加速度比, 代表了重力与离心力的比值。对液体域进行单元划分并在每个单元内对函数 $\phi(r, z)$ 进行形函数插值, 例如采用有限元三角形单元三节点线性插值方法, 单元内:

$$\phi^e(r, z) = \sum_{i=1}^3 f_i(r, z) \phi_i^e$$

代入 $\delta L' = 0$ ，由极值原理，导得矩阵特征方程：

$$\tau^2 \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

其中 ϕ_1 是自由表面上的节点变量值， ϕ_2 是其他节点上的节点变量值，

$$A_{ij} = \int_{\mathcal{S}_f} \frac{r f_i f_j}{g'}, \quad B_{ij} = \int_S r \left(\frac{\partial f_i}{\partial r} \frac{\partial f_j}{\partial r} + \frac{m f_i}{r} \frac{m f_j}{r} + \frac{\partial f_i}{\partial z} \frac{\partial f_j}{\partial z} \right)$$

由 (3.7) 导出矩阵特征值问题：

$$\begin{aligned} \tau^2 A \phi_1 &= (B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21}) \phi_1 \\ \phi_2 &= -B_{22}^{-1} B_{21} \phi_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 A ， $(B_{11} - B_{12} B_{22}^{-1} B_{21})$ 都是正定阵。对该标准特征问题，采用 QR 算法可求得所有特征值和特征向量。

§ 3.4 涡旋分量特征解性质

涡旋分量 $\mathbf{u}^v, p^v, \zeta^v$ 应满足如下方程和边界条件：

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}^v}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u}^v + \nabla \frac{p^v}{\rho} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{u}^v = 0, & \text{in } V \\ \mathbf{u}^v \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial V \\ p^v = 0, \zeta^v = 0 & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (3.4)$$

首先分离变量，设其在复数域内有如下形式的特征解：

$$\mathbf{u}^v(\mathbf{r}, t) = i\sigma \mathbf{U}(\mathbf{r}) e^{i\sigma t}, \quad p^v(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}) e^{i\sigma t}, \quad \zeta^v(\mathbf{r}, t) = 0$$

特征频率 $\sigma \in \mathbb{C}$ ，则 \mathbf{U}, P 应满足方程：

$$\begin{cases} -\sigma^2 \mathbf{U} + 2i\sigma \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{U} + \nabla \frac{P}{\rho} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{U} = 0, & \text{in } V \\ \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial V \\ P = 0, & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (3.9)$$

则有特征解性质：

(1) 特征频率为实数且 $|\sigma| \leq 2\omega_0$

证明：

设 (σ, U, P) 为特征解, U^*, P^* 分别是 U, P 的共轭函数。

则由: $-\sigma^2 U + 2i\sigma\omega_\theta \times U + \nabla \frac{P}{\rho} = \mathbf{0}$, 对方程点乘 U^* 然后在 V 上积分

$$-\sigma^2 \int_V U^* \cdot U - 2i\sigma\omega_\theta \cdot \int_V U^* \times U + \int_V U^* \cdot \nabla \frac{P}{\rho} = 0 \quad (3.10)$$

$$\text{由于 } U^* \cdot \mathbf{n} = 0, \text{ on } \partial V, \text{ 所以 } \int_V U^* \cdot \nabla \frac{P}{\rho} = \int_{\partial V} U^* \cdot \mathbf{n} \frac{P}{\rho} = 0 \quad (3.11)$$

由 $(U^* \times U)^* = U \times U^* = -U^* \times U$, 得

$$(U^* \times U) + (U^* \times U)^* = \mathbf{0}$$

$$\text{即 } \operatorname{Re}(U^* \times U) = \mathbf{0} \Rightarrow (U^* \times U) = i \operatorname{Im}(U^* \times U) \quad (3.12)$$

将 (3.11), (3.12) 代入 (3.10), 可推出

$$-\sigma^2 \int_V U^* \cdot U + 2\sigma\omega_\theta \cdot \int_V \operatorname{Im}(U^* \times U) = 0$$

$$-\sigma \int_V U^* \cdot U + 2\omega_\theta \cdot \int_V \operatorname{Im}(U^* \times U) = 0$$

$$\sigma = 2\omega_\theta \int_V \operatorname{Im}(U^* \times U) / \int_V U^* \cdot U$$

所以特征频率 σ 为实数, 同时

$$\begin{aligned} |\sigma| &\leq 2\omega_\theta \int_V |U^* \times U| / \int_V U^* \cdot U \\ &\leq 2\omega_\theta \int_V \|U^*\| \times \|U\| / \int_V U^* \cdot U \\ &= 2\omega_\theta \end{aligned}$$

所以: $|\sigma| \leq 2\omega_\theta$ ■

(2) 共轭解

如果 (σ, U, P) 是一组解, 则 $(-\sigma, U^*, P^*)$ 也是一组解

证明略 ■

(3) 正交性

$$\int_V U_i^* \cdot U_j = 0, \quad \omega_\theta \cdot \int_V U_i^* \times U_j = 0, \quad i \neq j$$

$$\int_V U_i \cdot U_j = 0, \quad \omega_\theta \cdot \int_V U_i \times U_j = 0, \quad \forall i, j. \text{ 证明略 } \blacksquare$$

§ 3.5 涡旋分量边值问题 Sobolev 特征解

直接求解涡旋分量边值问题 (3.4) 是很困难的, 有必要引入 Sobolev 假设进行求解。

对边值问题 (3.4) 中的第一个方程:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^v}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u}^v + \nabla \frac{p^v}{\rho} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

矢量乘 $\boldsymbol{\omega}_0$

$$\boldsymbol{\omega}_0 \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}^v}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u}^v + \nabla \frac{p^v}{\rho} \right) = \mathbf{0}$$

则有

$$\boldsymbol{\omega}_0 \times \frac{\partial \mathbf{u}^v}{\partial t} + 2(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{u}^v)\boldsymbol{\omega}_0 - 2\boldsymbol{\omega}_0^2 \mathbf{u}^v + \boldsymbol{\omega}_0 \times \nabla \frac{p^v}{\rho} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

将 (3.14) 中表达式 $\boldsymbol{\omega}_0 \times \frac{\partial \mathbf{u}^v}{\partial t}$ 代入方程 (3.13), 有

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}^v}{\partial t^2} - 2 \left(2(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{u}^v)\boldsymbol{\omega}_0 - 2\boldsymbol{\omega}_0^2 \mathbf{u}^v + \boldsymbol{\omega}_0 \times \nabla \frac{p^v}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \frac{p^v}{\rho} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

又将方程 (3.13) 点乘 $\boldsymbol{\omega}_0$, 为

$$\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}^v}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u}^v + \nabla \frac{p^v}{\rho} \right) = 0$$

则有

$$\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^v}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla \frac{p^v}{\rho} = 0 \quad (3.16)$$

又将方程 (3.16) 中的表达式代入方程 (3.15), 则有

$$\frac{\partial^3 \mathbf{u}^v}{\partial t^3} - 2 \left(2(-\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla \frac{p^v}{\rho})\boldsymbol{\omega}_0 - 2\boldsymbol{\omega}_0^2 \frac{\partial \mathbf{u}^v}{\partial t} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \frac{\partial}{\partial t} \nabla \frac{p^v}{\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla \frac{p^v}{\rho} = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

从而导出

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3} + 4\boldsymbol{\omega}_0^2 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{u}^v + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \frac{\partial}{\partial t} + 4\boldsymbol{\omega}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \right) \nabla \frac{p^v}{\rho} = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

引入算子符号

$$\mathbf{E} = \frac{\partial^3}{\partial t^3} + 4\boldsymbol{\omega}_0^2 \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{D} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \frac{\partial}{\partial t} + 4\boldsymbol{\omega}_0 \boldsymbol{\omega}_0 \cdot \quad (3.18)$$

则方程 (3.17) 可改写为

$$\mathbf{E}u^v + \mathbf{D} \nabla \frac{p^v}{\rho} = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

对 (3.19), 由 Sobolev 假设^[20], 可知存在 Sobolev 形式解 $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t) \in \mathbf{C}$, 使成立

$$\frac{p^v}{\rho} = -\mathbf{E} \varphi \quad (3.20)$$

则将表达式代入 (3.19), 有

$$\mathbf{E}u^v + \mathbf{D} \nabla (-\mathbf{E} \varphi) = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

由于算子 \mathbf{E} 仅是对时间的偏导数, 因此 (3.21) 中

$$\mathbf{D} \nabla \mathbf{E} \varphi = \mathbf{E} \mathbf{D} \nabla \varphi$$

代入方程 (3.21), 得到

$$u^v = \mathbf{D} \nabla \varphi \quad (3.22)$$

将表达式 (3.20), (3.22) 代入边值问题 (3.4), 得到关于 φ 的微分方程边值问题

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) = 0 & \text{in } V \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) = 0 & \text{on } \partial V_w \\ \varphi(\mathbf{r}, t) = 0 & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (3.23)$$

对边值问题 (3.23) 分离变量, 设其在复数域内有如下形式的特征解:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}) e^{i\sigma t} \quad (3.24)$$

则由特征解性质 (1), 特征频率 $\sigma \in \mathbf{R}$, 则 $\Phi(\mathbf{r}) \in \mathbf{C}$ 应满足方程:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}_\sigma \nabla \Phi(\mathbf{r}) = 0 & \text{in } V \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_\sigma \nabla \Phi(\mathbf{r}) = 0 & \text{on } \partial V_w \\ \Phi(\mathbf{r}) = 0 & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\text{其中 } \mathbf{D}_\sigma = -\sigma^2 - 2i\sigma\boldsymbol{\omega}_0 \times + 4\boldsymbol{\omega}_0\boldsymbol{\omega}_0. \quad (3.26)$$

为了使用有限元方法求解, 还需要导出与 (3.25) 等价的变分方程。

$$\text{对泛函 } L = \int_V \left(\sigma^2 \nabla \Phi^* \cdot \nabla \Phi - 2i\sigma\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla \Phi^* \times \nabla \Phi - 4(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla \Phi^*)(\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \nabla \Phi) \right)$$

可证明变分方程 $\delta L = 0$ 同上述边值问题 (3.25) 等价。(证明略)

则由该变分问题可得相应的有限元方法。

§ 3.6 涡旋分量特征频率的有限元方法

按本文旋转对称中心贮箱的假定, 建立圆柱坐标系 (r, θ, z) 。推导同 § 3.3, 则

$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r, \theta, z)$ 可以沿方位角进行 Fourier 展开, 即令 $\Phi(r, \theta, z) = \phi(r, z) e^{im\theta}$, 其中

$\phi(r, z) \in \mathbf{R}$ ，则泛函式 $\delta L = 0$ 可化为二维积分式，无量纲化后得到满足极值原理

$\delta L(\phi) = 0$ 的泛函式为：

$$L = \tau^2 \int_S r \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{m\phi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \pi m \int_{\partial S} n_r \phi^2 - \int_S r \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \quad (3.27)$$

其中， $\tau = \sigma / 2\omega_0$ ， $n_r = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}^0$ ， S ， ∂S ， ∂S_f 分别是腔体子午面上液体域、液体域边界和自由面边界部分。对液体域进行单元划分并在每个单元内对函数 $\phi(r, z)$ 进行形函数插值，例如采用有限元三角形单元三节点线性插值方法，单元内：

$$\phi^e(r, z) = \sum_{i=1}^3 f_i(r, z) \phi_i^e \quad (3.28)$$

$$\text{由极值原理，导得矩阵特征方程：} (\tau^2 \mathbf{A}_1 + m\tau \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_2) \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (3.29)$$

其中：

$$A_{1,ij} = \int_S r \left(\frac{\partial f_i}{\partial r} \frac{\partial f_j}{\partial r} + \frac{mf_i}{r} \frac{mf_j}{r} + \frac{\partial f_i}{\partial z} \frac{\partial f_j}{\partial z} \right), \quad A_{2,ij} = \int_S r \frac{\partial f_i}{\partial z} \frac{\partial f_j}{\partial z}, \quad A_{3,ij} = \int_{\partial S} n_r f_i f_j$$

根据 Leonard Meirovitch 理论^[21]，该特征值问题可化简为如下一般形式：

$$\tau \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -m\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

其中

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \text{ 明显为正定阵，但 } \begin{bmatrix} -m\mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ 只是对称阵。}$$

同时在数值求解过程中，考虑到 $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}$, on ∂V_f ，可对 $\boldsymbol{\phi}$ 做如下形式分解：

$$\boldsymbol{\phi} = (\boldsymbol{\phi}_1 \boldsymbol{\phi}_2)^T, \text{ 其中 } \boldsymbol{\phi}_1 \text{ 是自由表面上的节点变量值，} \boldsymbol{\phi}_2 \text{ 是其他节点上的节点变量值。}$$

所以有， $\boldsymbol{\phi}_1 = \mathbf{0}$

$$\text{得：} (\tau^2 \mathbf{A}'_1 + m\tau \mathbf{A}'_3 - \mathbf{A}'_2) \boldsymbol{\phi}_2 = 0 \quad (3.32)$$

$$\text{且：} \tau \begin{bmatrix} \mathbf{A}'_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}'_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \boldsymbol{\phi}_2 \\ \boldsymbol{\phi}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -m\mathbf{A}'_3 & \mathbf{A}'_2 \\ \mathbf{A}'_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau \boldsymbol{\phi}_2 \\ \boldsymbol{\phi}_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (3.33)$$

对该标准特征问题，采用 QR 算法可求得所有特征值和特征向量。

第四章 数学模型分析

为了分析 Pfeiffer 均匀涡旋模型，首先简述一下非自旋充液系统。

由^[16]，可知全充液的非自旋系统的方程为：

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & \text{in } V \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} & \text{on } \partial V \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ 为系统角速度， \mathbf{n} 是液体域边界外法向， $\varphi(\mathbf{r}, t)$ 为速度势函数。

方程 (4.1) 有解： $\varphi(\mathbf{r}, t) = \nabla(\Psi(\mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\omega}(t))$ ，其中 $\Psi = \Psi(\mathbf{r})$ 满足如下 Newmann 方程

$$\begin{cases} \nabla^2 \Psi = 0 & \text{in } V \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = \mathbf{r} \times \mathbf{n} & \text{on } \partial V \end{cases} \quad (4.2)$$

同时，部分充液的非自旋系统自由晃动问题满足如下方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \frac{p}{\rho} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{in } V \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, & \text{on } \partial V_w \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \frac{p}{\rho} = g\zeta, & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (4.3)$$

其中 $g = \sqrt{\omega_0^4 r^2 + g_0^2}$ ， g_0 是重力加速度， r 是液面 ∂V_f 上质点到 z 轴的距离。 ρ, p 分

别是液体质量密度和压强扰动量， $V, \partial V_f, \partial V_w$ 分别是未扰时腔内液体域、液体域的液体自

由面边界部分和腔壁湿表面边界部分， \mathbf{n} 是液体域边界外法向， ζ 是扰动液面波高。

方程 (4.3) 存在特征解 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{r}) e^{i\sigma t}$ ，其中 σ 为特征频率， Φ 满足方程：

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 & \text{in } V \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial V_w \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} & \text{on } \partial V_f \end{cases} \quad (4.4)$$

§ 4.1 Pfeiffer 模型分析

由^[8]，可知 Pfeiffer 均匀涡旋模型假设液体质点绝对速度 \mathbf{v} 有如下表达式：

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Omega}_a(t) \times \mathbf{r} + \nabla \varphi(\mathbf{r}, t)$$

其中, 平均涡 $\boldsymbol{\Omega}_a(t) = \frac{1}{V} \iiint_V \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t) dV$, $\varphi(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\Omega}_a(t)) + \Phi(\mathbf{r}) e^{i\sigma}$

其中 $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t)$ 为液体涡量, $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}), \Phi(\mathbf{r})$ 分别满足如下方程:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} \quad \text{in } V \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial n} = \mathbf{r} \times \mathbf{n} \quad \text{on } \partial V \end{array} \right\}, \text{ 和 } \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{in } V \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial V_w \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{on } \partial V_f \end{array} \right.$$

对比可知, Pfeiffer 均匀涡旋模型实质上是通过对 Euler 方程, 将自旋液体晃动近似分解为: 涡旋运动分量 $\boldsymbol{\Omega}_a \times \mathbf{r}$ (均匀涡旋运动), 全充液非自旋运动分量 $\boldsymbol{\Psi}$ 和部分充液非自旋运动分量 Φ , 通过求解 $\boldsymbol{\Psi}, \Phi$ 使得自旋液体晃动问题得以求解。

§ 4.2 涡旋分解模型的分析

考虑到部分充液的非自旋系统自由晃动问题应满足如下方程^[16]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \frac{p}{\rho} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{in } V \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \text{on } \partial V_w \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \frac{p}{\rho} = g\zeta, \quad \text{on } \partial V_f \end{array} \right. \quad (4.5)$$

及全充液自旋运动应满足的方程^[16]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u} + \nabla \frac{p}{\rho} = \mathbf{0}, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } V \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{on } \partial V \end{array} \right. \quad (4.6)$$

对比以上两式与 (3.3) 和 (3.4) 可知, 由分解式 (3.2), 涡旋分解模型实质上是在不依赖于 Pfeiffer 均匀涡旋假设的基础上, 直接将 \mathbf{u}, p, ζ 分解为部分充液非自旋运动分量

$\mathbf{u}^s, p^s, \zeta^s$ 及全充液自旋运动分量 $\mathbf{u}^v, p^v, \zeta^v$ 两部分。

§ 4.3 Pfeiffer 模型与涡旋分解模型的关系

由以上两节的分析可知, Pfeiffer 均匀涡旋模型是通过硬性截断 Euler 方程, 将自旋液体晃动近似分解为: 涡旋运动分量 $\boldsymbol{\Omega}_a \times \mathbf{r}$ (均匀涡旋运动), 全充液非自旋运动分量 $\boldsymbol{\Psi}$ 和部分充液非自旋运动分量 Φ 。而通过忽略哥氏加速度项 $2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{u}^s$ 引出的涡旋分解模型则是将 \mathbf{u}, p, ζ 分解成为全充液自旋运动分量及部分充液非自旋运动分量两部分。涡旋分解模

型的提出没有依赖于 Pfeiffer 均匀涡旋假设, 而是将 Pfeiffer 模型中涡旋运动分量 $\Omega_a \times r$ 和全充液非自旋运动分量 Ψ 用全充液自旋运动分量 u^v, p^v, ζ^v 来代替。显然分解式 (81) 具有更高的近似程度。而 Pfeiffer 均匀涡旋模型中的 Φ 和涡旋分解模型中的 u^s, p^s, ζ^s 实际上都代表部分充液非自旋运动分量, 两者是完全一致的。

§ 4.4 涡旋分解模型与直接方法的比较

直接方法的导出只引用了微幅晃动假设^[12], 显然直接方法比涡旋分解方法具有更高的近似程度。也因此导出的方程较为复杂, 难于进行进一步的理论分析。而涡旋分解模型的方程则较为简单 ((3.3) 和 (3.4) 式), 便于进行理论分析并且已经有了一些分析结果 (见 § 3.4)。同时注意到分解式 (3.2) 保留了 Pfeiffer 模型中部分充液非自旋运动分量 Φ 。由于 Φ (或 u^s, p^s, ζ^s) 是满足 Laplace 方程的 Neumann 问题 (4.2), 所以对 u^s, p^s, ζ^s (液面波动分量) 可以方便地使用边界元方法和有限元方法等数值方法, 可以最大限度地利用现有软件进行求解, 比直接方法具有更好的实用性。

第五章 数值结果与分析

§ 5.0 结果说明

表1 图表说明

	几何参数	变化参数	结果	说明
图5.1-1至1-9	圆柱腔; 腔体高度 H 见表2; 充液比详见表2; 腔体半径 $R=1$; $g=0 \text{ m/s}^2$; $\omega = \pi \text{ rad/s}$;	有限元网格 No.1-No.14 参数详见表3;	系统特征频率	直接方法
图5.2-1至2-3	圆柱腔; 腔体高度 H 见表2; 腔体半径 $R=1$; $g=0 \text{ m/s}^2$; $\omega = \pi \text{ rad/s}$; 有限元网格 6×11 ;	充液比: 5%-95%;	系统特征频率	直接方法
图5.3-1至3-7	圆柱腔; 充液比见表2; $g=0 \text{ m/s}^2$; $\omega = \pi \text{ rad/s}$; 有限元网格 6×11 ;	腔体高度: 5-50; 腔体半径 5-50;	系统特征频率	直接方法, (图5.3-1至3-3为图3-4至3-6的零点放大图, 图5.3-7为图3-2的放大图)
图5.4-1至4-9	圆柱腔; 腔体高度 H 见表2; 充液比详见表2; 腔体半径 $R=1$; $g=0 \text{ m/s}^2$; $\omega = \pi \text{ rad/s}$;		系统特征频率	直接方法与涡旋分解方法的结果对比
图5.5-1至5-12	椭球腔; 长轴=1; 短轴=1; $g=0 \text{ m/s}^2$; $\omega = \pi \text{ rad/s}$; 有限元网格见附图;		系统特征频率	直接方法与涡旋分解方法的结果对比

注1: 特征时间 $T=1\text{s}$, 特征长度 $L=1\text{m}$

表2 几何参数

	腔体高度	充液比
1	4	0.75
2	1	0.50
3	1/4	0.25

注2：腔体高度数为腔体高度同腔体半径的比值

表3 有限元模型 1-14

	网格划分	节点数	单元数	说明
1	3×5	15	16	
2	4×5	20	24	
3	4×7	28	36	
4	5×7	35	48	
5	5×9	45	64	
6	6×9	54	80	
7	6×11	66	100	见图5.0-1
8	7×11	77	120	
9	7×13	91	144	
10	8×13	104	168	
11	8×15	120	196	
12	9×15	135	224	
13	9×17	153	256	
14	10×17	170	288	见图5.0-2

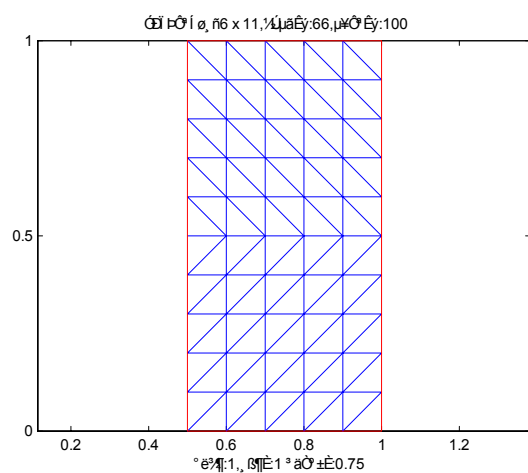


图5.0-1

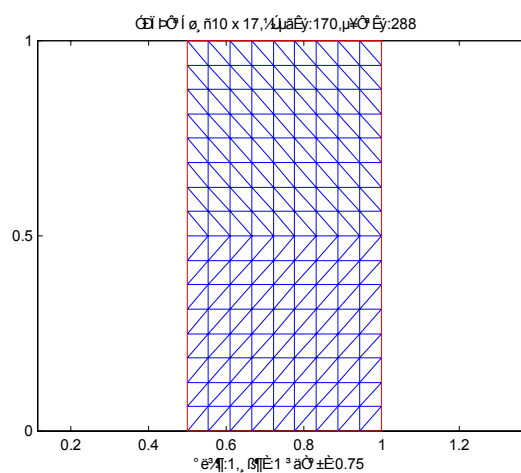


图5.0-2

§ 5.1 数值结果

图5. 3-7

§ 5.2 结果分析

§ 5.2.1 有限元方法的收敛性分析 (圆柱腔)

充液系统作为一个连续系统,具有无限多个自由度。有限元数学模型只能是系统的有限维的近似模型。随着有限元网格的加密,有限元模型逐渐逼近于系统的真实模型。所以一个好的有限元算法,必须要保证算法的收敛性,即当有限元网格趋向加密时,有限元解收敛于一有限值。

计算结果见图5.1-1至1-9,可知系统固有频率的分布同腔体高度和充液比的关系。

一:随着充液腔体高度的减小,有限元方法的收敛性愈加明显。当腔体高度大于腔体半径时(细长腔),系统特征频谱分布主要集中于低频区域,分布密集,收敛性不明显。当腔体高度小于腔体半径时(扁平腔),系统特征频谱分布逐渐向高频区域扩展,谱线结构趋向稀疏,有限元方法的收敛性逐渐明显。但是在整个参数域内,系统特征频谱中都存在谱线稠密区域(0, ± 1 的邻域等),这是自旋充液系统区别于一般线性系统和非自旋充液系统的一个特征。

二:充液比的变化对系统固有频率的分布及有限元方法的收敛性无本质上的影响。但是考虑到当充液比接近于1时(全充腔)和当充液比接近于0时(全空腔),一般有限元方法呈现较强的奇性而导致数值误差的增大,所以当充液比趋近于1或0时,需要采用新的数学模型和数值方法才能够确定系统特征频率的分布变化。

三:随着有限元网格的加密,高频分量收敛的同时,不断有新的频率分量出现,其中的高频分量随着有限元网格的进一步加密而收敛。

充液系统作为一个连续系统,具有无限多个自由度,也就有无限多个特征频率。但从以上分析可知,自旋充液系统的无限多个特征频率的分布却并非是均匀的。系统特征频谱中存在着多个谱线稠密区域,并且稠密区域的数量,宽度和位置都随着系统参数的变化而变化。以后各节将对系统特征频率的分布进行进一步的研究。

§ 5.2.2 充液比对系统特征频率分布的影响 (圆柱腔)

计算结果见图 5.2-1 至 2-3。可知:

充液比的变化对系统特征频率的分布无本质上的影响,也不改变频率稠密区域的数量。但是会影响稠密区域的宽度和位置:增加充液量会扩展稠密区域,减少充液量会压缩稠密区域。

§ 5.2.3 腔体高度对系统特征频率分布的影响 (圆柱腔)

计算结果见图5.3-1至3-6及3-7。可知:

腔体形状(高度)的变化对系统特征频率的分布有本质上的影响,虽不改变频率稠密区域的数量。但是会显著地影响稠密区域的宽度和位置:

当腔体高度大于腔体半径时(细长腔):

稠密区域主要集中在 $[-1, 1]$ 附近。随着腔体高度的增大,高频分量急剧减少。特征频谱被压缩在 $[-1, 1]$ 附近,形成稠密区域。且一部分稠密区域的位置随着腔体高度的变化而在 $[0, 1]$ 或 $[-1, 0]$ 内移动。

当腔体高度小于腔体半径时(扁平腔):

稠密区域主要集中在 $[-1, 1]$ 附近,但形式同细长腔截然不同。随着腔体高度的增大,高频分量急剧增加。特征频谱被急剧扩展,低频分量逐渐被压缩并向与细长腔稠密区域相对应的某一特定的频率收敛,且该收敛频率随着腔体高度的变化而在 $[0, 1]$ 或 $[-1, 0]$ 内变

化。

§ 5.2.4 直接方法同涡旋分解方法的对比 (圆柱腔)

计算结果见图5.4-1至4-9。可知：

充液比的变化对两种方法的对比无本质上的影响，但是腔体形状 (高度) 的变化对两种方法的对比有显著的影响。

当腔体高度大于腔体半径时 (细长腔)，直接方法同涡旋分解方法的结果有较大的差异，无论高频或低频分量均无法吻合。随着腔体高度的减小，高频分量逐渐趋向一致，但低频分量仍然明显不同。当腔体高度小于腔体半径时 (扁平腔)，高频分量则基本相同，但是低频分量由于分布过于稠密，相似性仍不明显。

§ 5.2.5 直接方法同涡旋分解方法的对比 (椭球腔)

计算结果见图5.5-1至5-12。可知：

同圆柱腔等简单情况不同，对于椭球腔，直接方法与涡旋分解方法的结果呈现出更大的差异。但是在谱线稠密区域的分布上并无本质不同。腔体形状和有限元网格的变化对于谱线稠密区域的数量，位置和宽度等无本质上的影响。

§ 5.3 结果讨论

§ 5.3.1 频谱稠密区域存在的合理性

从以上结果可以看出，自旋充液系统自由晃动的频率分布同一般线性系统和非自旋充液系统的固有频率分布有很大的不同。系统特征频谱并非由分立的谱线组成，在各种系统参数情况下，系统特征频谱中总存在一定数量的稠密区域。

首先考虑：自旋充液系统本质上作为一个连续系统，具有无限多个自由度，也就存在无限多个特征频率。但是由 § 3.4 节涡旋分量特征解性质 (1)：特征频率为实数且 $|\sigma| \leq 2\omega_0$ ，

即 $\left| \tau = \frac{\sigma}{2\omega_0} \right| \leq 1$ 。所以可知在有限闭区间 $[-1, 1]$ 内存在无穷多个特征频率，则在区间 $[-1, 1]$ 内

必存在频谱稠密区域或者无穷阶重根。由 § 4.4 的涡旋分解模型与直接方法的比较可知，用涡旋分解方法和直接方法得出的频谱稠密区域在理论上是合理的。

§ 5.3.2 涡旋分解模型 (Pfeiffer 模型) 的近似程度

由图 5.4-1 至 4-9 和图 5.5-1 至 5-12。可知，涡旋分解方法同直接方法在腔体高度相比腔体半径比较小时 (扁腔) 有较为一致的结果。在扁腔的情况下，由于液体自由面较小，液面波动对液体运动的影响也较小，所以液面波动分量和涡旋分量之间的耦合作用也较小，所以可将液体运动近似地作波动分量和涡旋分量的分解 (如 (81) 式)。在细长腔的情况下，由于液体自由面较大，液面波动对液体运动有着决定性的影响，液面波动分量和涡旋分量之间的强耦合作用也使得无法将液体运动简单分解为波动分量和涡旋分量。

由于涡旋分解模型是以 Pfeiffer 模型为基础，由 § 4.3 节的 Pfeiffer 模型与涡旋分解模型的关系可大致得出 Pfeiffer 模型的近似程度和适用范围：在细长腔的情况下，液面波动分量和涡旋分量之间存在着强耦合作用，所以 (81) 式无法近似成立，Pfeiffer 模型同样也无法适用。考虑到涡旋分解模型在扁腔的情况下才近似成立，所以 Pfeiffer 模型至多只能在扁腔的情况下近似成立。

由上所述，对于一般的线性系统和非自旋充液系统，伽辽金模态分解方法是一种很有效

的分析方法。但是对于自旋充液系统，由于稠密区域的存在，使得伽辽金模态分解方法失去意义。涡旋分解方法虽然在扁腔情况下对高频分量有较高的精度，但对于稠密分布的涡旋分量(低频)的求解也失去意义。总之，由于系统特征频谱中稠密区域的存在，经典的频域方法(伽辽金模态分解方法，傅里叶分解方法)很难进行有效的分析。需要引入新的数学模型和数值方法，或者在时域中对自旋充液系统进行分析。

第六章 程序说明

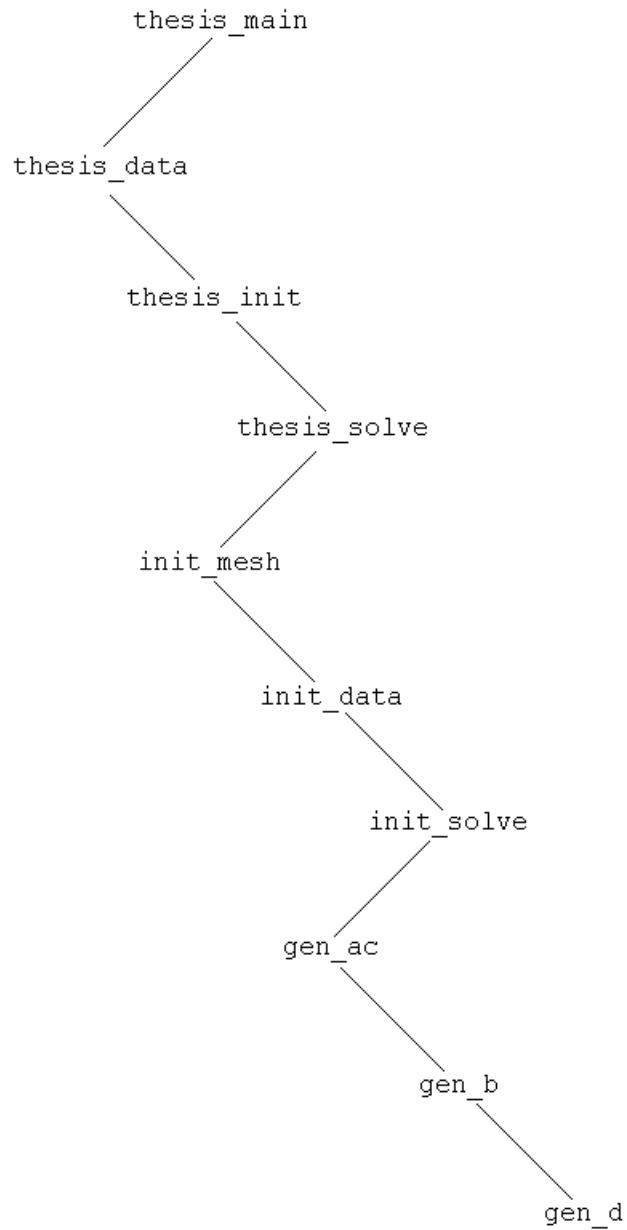
本程序用 MATLAB 软件包实现, 采用模块化的程序设计来计算重力(微重力)状态下的液体晃动频率。具有良好的通用性, 对于不同的对称旋转体充液空腔, 只要增加相应的特定模块就可以计算, 而且有较高的计算精度。使用 MATLAB 软件包来实现, 使程序具有良好的可移植性, 可运行于 PC 机(Windows, Windows 95, Windows NT 等), Macintosh 机, 大型主机(UNIX)等多种环境下。

§ 6.1 变量说明

变量	说明
CavityChoice	腔体类型: 椭球腔或圆柱腔
MethodChoice	求解方法: Miles 解析法, 直接方法, 涡旋分解方法
SpheroidDomain	求解域: 椭圆求解域或矩形求解域
RegularMesh	网格划分方法: 规则网格, 不规则网格
VORTEX	结果输出: 直接方法结果, 涡旋分解方法结果
Start_time	程序开始运行时间
Prec	浮点零
Gauss	Gauss 积分常数
G0	重力加速度
M0	圆周模态阶数
w0	腔体角速度
Fea_Len, Fea_Time	特征长度, 特征时间常数
R, H	腔体半径, 腔体高度
alpha	充液比
nodes	液体域自由面上的节点数
nodes_x, nodes_y	规则网格划分 x, y 方向的节点数
t_g	单元几何参数矩阵
t_p	单元节点参数矩阵
t_e	单元边参数矩阵
t_t	单元参数矩阵
Ae, Be, Ce, De	单元矩阵 A, B, C, D
A, B, C, D	总体矩阵 A, B, C, D
A11	系数矩阵 A11
B11, B12, B21, B22	系数矩阵 B11, B12, B21, B22
C11, C12, C21, C22	系数矩阵 C11, C12, C21, C22
D11, D12, D21, D22	系数矩阵 D11, D12, D21, D22
a41, a42, a43, a44, a45	工作数组 a41, a42, a43, a44, a45
a61, a62, a63, a64, a65	工作数组 a61, a62, a63, a64, a65
G	总体矩阵 G
e_value, e_vector	直接方法解的特征频率, 特征模态
s_mode, s_freq	涡旋分解方法解的液面波动分量的特征频率, 特征模态
u_mode, u_freq	涡旋分解方法解的涡旋分量的特征频率, 特征模态
freq_d, freq_c	直接方法, 涡旋分解方法的特征频谱

§ 6.2 程序结构说明

程序模块	说明
thesis_main	主程序，输入运算参数
thesis_data	全局变量声明
thesis_init	全局变量初始化，包括腔体形式，求解方法，网格生成规则等
thesis_solve	有限元算法主程序，包括有限元算法系数矩阵生成，求解，结果输出。
init_mesh	有限元网格参数初始化。根据腔体的几何参数和运动学参数，计算出液体域和自由面参数，生成有限元网格。
init_data	有限元算法运行参数初始化。根据有限元网格参数生成运行参数，初始化工作数组。
init_solve	有限元单元刚度阵和总体刚度阵生成，特征值 QR 法求解。
gen_ac	生成刚度阵 A, C
gen_b	生成刚度阵 D
gen_d	生成刚度阵 D



注：程序结构图遵循二叉数规则：左子树表示调用关系，右子树表示顺序执行关系。

§ 6.3 使用说明

本程序的数学模型基于^[12]中的液体晃动的直接模型和本文第三章的涡旋分解模型。可以对多种轴对称充液容器的自由振动问题进行研究,包括圆柱腔容器,椭球腔容器和一般的轴对称充液容器。对于基于直接模型和涡旋分解模型的有限元问题都可以求解。也可以采用多种方法生成有限元网格:规则网格(对于规则求解域),自动划分网格或人工划分网格。并且采用多种可视化方法输出计算结果:自振频谱图,自振模态伪彩图,自振模态等高线图,自振模态梯度场图和自振模态立体图。

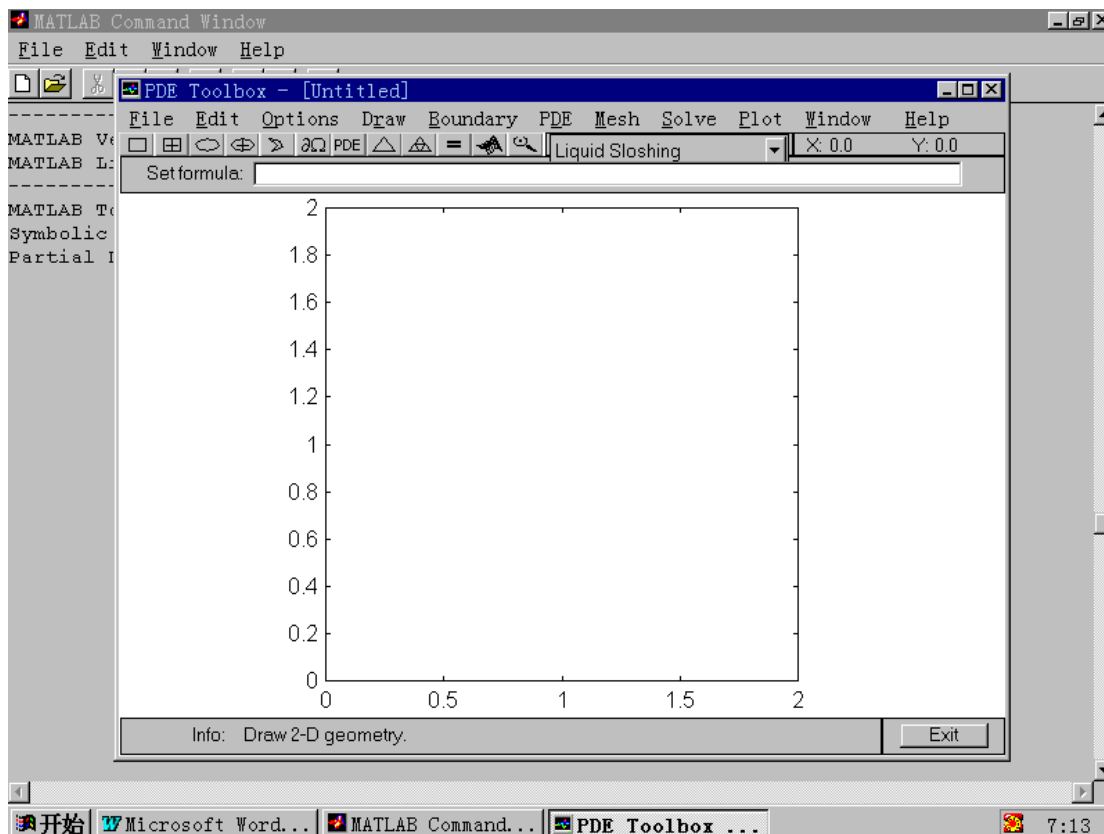
由于本程序开发时间短,理论上也有很多不成熟的地方,有待于在实际应用中加以修订。所以本程序选择在 MATLAB 环境下开发并采用了模块化设计,主要是考虑到扩展性和可移植性的要求。对于不同的工况和其他形状的腔体,增加相应的模块即可进行计算。实际上,即使是有限元算法的核心部分,也可以很容易地进行修改。

同时本程序也可以方便地移植到大型主机系统或网络环境下,配合采用并行化的数学模型和计算环境进行并行计算,进一步提高计算效率。

使用说明

一: 启动 MATLAB 软件包(详见 MATLAB Manual)。

二: 输入 `pdetool`, 启动计算主程序如下图:



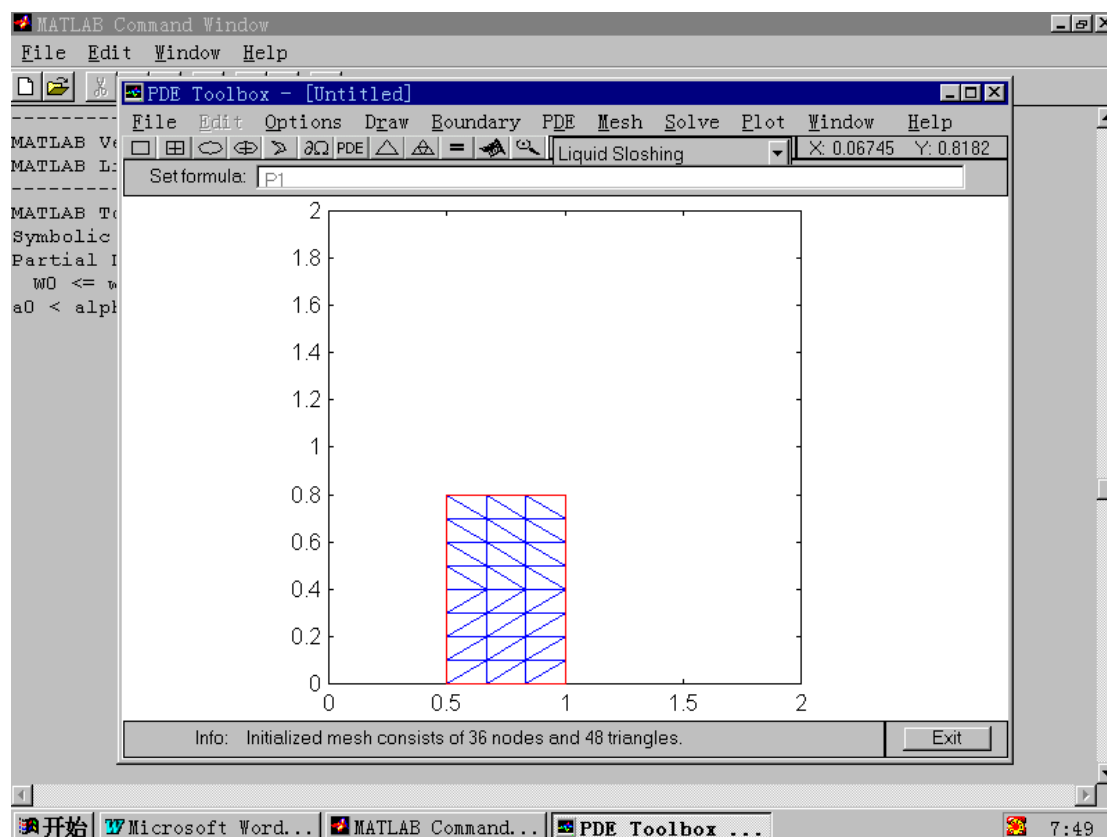
三: 选择 `Options` 菜单项, 再选择 `Application`, `Cavity Type` 或 `Method` 子菜单项以确定待求问题的类型, 充液腔体的类型或者求解方法。

- 1 可以求解的问题的类型有充液晃动问题, 结构力学, 电磁场问题和热传导问题等。
- 2 充液腔体的类型有椭球腔, 圆柱腔和一般轴对称腔。

3 求解方法有直接方法，涡旋分解方法和 Miles (解析) 方法。

四：选择 **PDE** 菜单项，再选择 **PDE Specification** 子菜单项以确定待求解的 PDE (偏微分方程) 的类型，包括 Elliptic, Parabolic, Hyperbolic, Eigenmodes 类型，分别为椭圆型，抛物型，双曲型偏微分方程和偏微分方程特征值问题。充液晃动问题对应为偏微分方程特征值问题。

五：选择 **Mesh** 菜单项，再选择 **Initialize Mesh** 子菜单项以初始化有限元网格。程序按给定参数自动生成有限元网格如下图。



六：选择 **Solve** 菜单项，再选择 **Solve PDE** 子菜单项以求解该 PDE。

七：选择 **Plot** 菜单项，再选择 **Parameters** 子菜单项以输出结果。

下图所显示为输出的结果 (最高阶固有模态和固有频率 (伪彩图, 3D 立体图))。

参考文献

1. **Slafer, L.I. Challoner, A.D.**: Propellant Interaction with the Payload Control System of Dual-Spin Spacecraft, *J. of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.11, No.4, 1988, pp.343-351
2. **Greenspan, H.P.**, On Transient Motion of a Contained Rotating Fluid, *J. of Fluid Mechanics*, Vol.20, pt4, 1964, pp673-696
3. **Stewartson, K.**, On the Stability of a Spinning Top Containing Liquid, *J. of Fluid Mechanics*, Vol.5, pt4, 1959, pp577
4. **Wedemeyer, E.H.**, Viscous Correction to Stewartson's Stability Criterion, *AGARD Conf. Processing*, No.10, 1966, pp99-116
5. **Nayfeh, A.H. and Meirovitch L.**, The Stability of Motion of a Satellite with Cavities Partially Filled with Liquid, *AIAA Aerospace Science Meeting*, Washington DC, *AIAA Paper*74-168, Jan-Feb., 1974
6. **Hendricks, S.L. and Morton, J.B.**, Stability of a Rotor Partially Filled with a Viscous Incompressible Fluid, *ASME J. of Applied Mechanics*, Vol. 46, Dec. 1979, pp913-918
7. **Stergiopoulous, S., and Aldridge, K.D.**, Inertial Waves in a Fluid Partially Filling a Cylindrical Cavity During Spin-Up from Rest, *Geophysics Astrophysics Fluid Dynamics*, Vol. 21, 1982, pp89-112
8. **Pfeiffer, F.**, Ein Näherungsverfahren für flüssigkeitsgefüllte Kreisel, *Ingenieur-Archiv*, Vol.43, 1974, pp306-316
9. **M.El-Raheb and P.Wagner**, Vibration of a Liquid with a Free Surface in a Spinning Spherical Tank, *J. of Sound and Vibration* 1981, 76(1), pp83-93
10. **包光伟** 自旋液体晃动研究 *力学学报* 1995 v27 n1 p104-109
11. **包光伟** 自旋液体晃动 Pfeiffer 方法的分析 *力学学报* 1993, 25(6): 738-743
12. **包光伟** 旋转液体晃动特征问题的有限元数值计算方法 待发表
13. **J.E.McIntyre and T.M.Tanner** Fuel Slosh in a Spinning on-axis propellant tank: An eigenmode approach 1987
14. **A.C.Orf A.D.Challoner and P.P.Yip** Stability of a Liquid-Filled Spinning Top: a numerical approach
15. **Fu Ru-De** Finite element analysis of lateral sloshing response in axisymmetric tanks with triangular elements *Computational Mechanics* 1993, 12, 51-58
16. **刘延柱** 航天器姿态动力学 国防工业出版社
17. **Н.Н莫依舍夫 В.В鲁苗采夫** (韩子鹏 译) 充液刚体动力学 宇航出版社
18. **苏铭德 黄素逸** 计算流体力学基础 清华大学出版社
19. **Bao GW**: Dynamic equations of spin spacecraft partially containing fluid in the presence of thrust. *Archive of Applied Mechanics*, 1994, 64: 111-118
20. **Sobolev SL**: The motion of a symmetrical top with a cavity completely filled by liquid. *Zh.Prikl.Mekh.* 1960, 3:20-55
21. **Meirovitch L.** A new method of solution of the eigenvalue problem for gyroscopic systems *AIAA J.*, 1974, 12(10), pp1337-1342

致谢

本文是在包光伟教授的悉心指导下完成的。如果没有包教授的耐心指导，要想在这么短的时间内得出结果是难以想象的。在论文研究期间，包教授渊博的知识，严谨的治学态度给我留下了深刻的印象，使我获益匪浅。

另外，在这两年半的学习生活中，还得到了刘延柱教授，洪嘉振教授，方之楚教授，刘锦阳老师等的指导，各位老师的敬业精神让我深深感动。

在学习，研究过程中还得到了田传兴高知，林启荣博士，马培峰，章建国，霍永哲等同学的热忱帮助。

所有这一切让我永难忘怀。

向所有帮助过我的人致以我最衷心的感谢。

富饶

1999年3月2日