CPGE IBNGHAZI Rabat

Classes MP

Sujet de concours

Mines et Ponts

Mathématiques 2

Session 2024

Corrigé proposé par Sadik Boujaida
https://github.com/texbouja/Mines2024

ÉNONCÉ 1

Phénomènes de seuil dans les graphes

Dans ce problème, n désigne un entier supérieur à 1 . On désigne par $[\![1\,;\,n]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n.

Le groupe symétrique des permutations de $[\![1\,;\,n]\!]$ est noté $\mathcal{S}_n$.

L'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\mathrm{card}(E)$ ou $|E|$.

Un graphe G est un couple (S, A) où :

- S désigne un ensemble fini non vide d'éléments appelés sommets du graphe G
- A désigne un ensemble éventuellement vide d'éléments appelés arêtes du graphe G, une arête étant un ensemble $\{s, s'\}$ où s et s' sont des sommets distincts de S.

Un sommet n'appartenant à aucune arête est dit isolé. Par convention, le graphe vide est le couple d'ensembles vides $(\varnothing, \varnothing)$.

On peut représenter un graphe non vide dans un plan à l'aide :

- de disques schématisant les sommets du graphe
- de segments reliant ces disques pour les arêtes du graphe.

Par exemple, on a représenté sur la FIGURE 1, le graphe $G = (S, A)$ avec :

$$S = [\![1\,;\,9]\!] \text{ et } A = \big\{\{1,2\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,9\},\{2,8\}\big\}$$

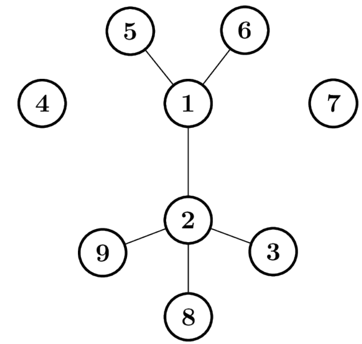


FIGURE 1 – un graphe à 9 sommets et 6 arêtes

On remarquera que les arêtes sont constituées de deux sommets distincts, ce qui interdit la présence de "boucles" reliant un sommet à lui-même.

De plus, une même arête ne peut être présente plusieurs fois dans un graphe.

Un type de graphe utilisé dans ce problème est l'étoile.

Une **étoile** de **centre** s et à d **branches** avec d entier naturel non nul, est un graphe (S, A) où $S = \{s, s_1, s_2, \ldots, s_d\}$ est de cardinal $d+1$, et A est du type

$$A = \{\{s, s_1\}, \{s, s_2\}, \ldots, \{s, s_d\}\}$$

On a représenté FIGURE 2 une étoile de centre 4 à 5 branches avec $S = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

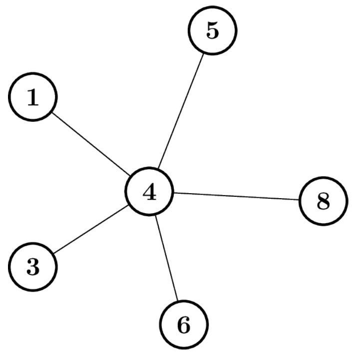


Figure 2 – une étoile à 5 branches

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes ; on dit que :

- G' est inclus dans G si $S' \subset S$ et $A' \subset A$
- G' est une copie de G s'il existe une bijection σ de S' dans S telle que :

$$\forall (s', t') \in S' \times S' \quad \{s', t'\} \in A' \Longleftrightarrow \{\sigma(s'), \sigma(t')\} \in A$$

Par exemple, le graphe de la Figure 1 contient plusieurs copies d'étoiles à une branche (correspondant aux segments), plusieurs copies d'étoiles à deux branches, mais aussi une copie d'une étoile à 3 branches (de centre 1) et une copie d'une étoile à 4 branches (de centre 2).

Dans une première partie, on étudie quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence.

On introduit ensuite la notion de fonction de seuil en probabilité des graphes aléatoires. Les deux parties qui suivent la première partie sont indépendantes de celle-ci, et sont consacrées à l'étude de deux exemples.

Partie I : Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe non vide où $|S| = n$. Indexer arbitrairement les sommets de 1 à n revient à choisir une bijection (appelée aussi indexation) σ entre $[\![1 ; n]\!]$ et S. On pourra alors noter :

$$S = \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$$

où $\sigma(i)$ est le sommet d'index i. Une indexation σ étant choisie, on définit la matrice d'adjacence $M_{G,\sigma}$ du graphe G associée à σ comme étant la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont le coefficient situé sur la i^e ligne et la j^e colonne est :

$$\left(M_{G,\sigma}\right)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{\sigma(i), \sigma(j)\} \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'une part que la matrice $M_{G,\sigma}$ est toujours symétrique (car pour tous i et j entiers, $\{i, j\} = \{j, i\}$) et d'autre part que les termes de la diagonale sont tous nuls (pas de boucle dans un graphe).

Voici par exemple la matrice d'adjacence $M_{G,\,\mathrm{Id}}$ du graphe G représenté sur la figure 1 :

$$M_{G,\mathrm{id}} = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Soit ρ une permutation du groupe symétrique S_n et $M = \left(m_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Q1 Montrer que les matrices M et $\left(m_{\rho(i),\rho(j)}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sont semblables. En déduire que si $G = (S, A)$ est un graphe non vide, et si σ et σ' sont deux indexations de S, alors $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables.

Q2 Justifier qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide est diagonalisable.

Q3 Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe non vide n'est jamais de rang 1.

Q4 Montrer qu'une matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment un graphe de type étoile est de rang 2 et représenter un exemple de graphe dont la matrice d'adjacence est de rang 2 et qui n'est pas du type précédent.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si σ et σ' sont des indexations de S, comme les matrices $M_{G,\sigma}$ et $M_{G,\sigma'}$ sont semblables, elles ont même polynôme caractéristique (ce que l'on ne demande pas de démontrer).

On notera χ_G ce polynôme caractéristique commun et on dira que χ_G est le polynôme caractéristique du graphe G. Par convention, le polynôme caractéristique du graphe vide est le polynôme constant égal à 1.

Q5 Soit G un graphe et G' une copie de G. Justifier que $\chi_G = \chi_{G'}$.

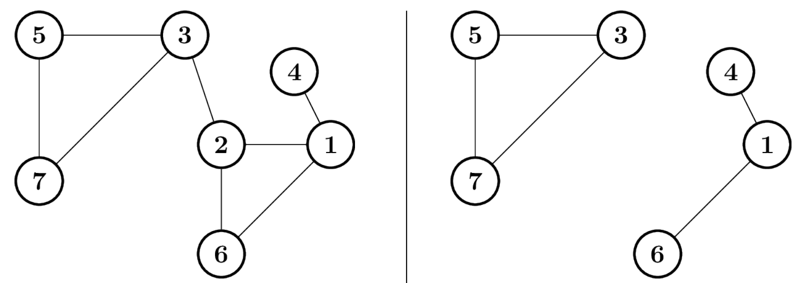
Q6 Soit $G = (S, A)$ un graphe avec $|S| = n \geqslant 2$. On note :

$$\chi_G(X) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

Donner la valeur de a_{n-1} et exprimer a_{n-2} à l'aide de $|A|$.

Q7 En déduire le polynôme caractéristique d'un graphe à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches avec $1 \leqslant d \leqslant n-1$. Déterminer alors les valeurs et vecteurs propres d'une matrice d'adjacence de ce graphe.

Si $G = (S, A)$ est un graphe non vide et si s appartient à S, on définit le graphe $G\backslash s$ comme étant le graphe dont l'ensemble des sommets est $S\backslash\{s\}$ et l'ensemble des arêtes est constitué des arêtes de A qui ne contiennent pas s. Voici par exemple FIGURE 3 un graphe G et le graphe $G\backslash 2$:



(a) Une graphe G (b) le graphe $G\backslash 2$

FIGURE 3 – Un graphe G et le graphe $G\backslash 2$

Soient $G_1 = (S_1, A_1)$ et $G_2 = (S_2, A_2)$ deux graphes non vides tels que S_1 et S_2 soient disjoints, c'est-à-dire tels que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$. Soit $s_1 \in S_1$ et soit $s_2 \in S_2$. On définit le graphe $G = (S, A)$ avec $S = S_1 \cup S_2$ et $A = A_1 \cup A_2 \cup \{\{s_1, s_2\}\}$.

Q8 Montrer que : $\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1\backslash s_1} \times \chi_{G_2\backslash s_2}$

Q9 Déterminer le polynôme caractéristique de la double étoile à $d_1 + d_2 + 2$ sommets, constituée respectivement de deux étoiles disjointes à d_1 et d_2 branches, à qui l'on a ajouté une arête supplémentaire reliant les deux centres des deux étoiles. Quel est le rang de la matrice d'adjacence de cette double étoile ?

Dans toute la suite de ce problème, on suppose que n est supérieur à 2 et on notera :

- N l'entier $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- Ω_n l'ensemble des graphes de sommets $S = [\![1\,;\,n]\!]$
- p_n un réel dépendant de n appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$ et $q_n = 1 - p_n$.

Pour tous i et j appartenant à $S = [\![1\,;\,n]\!]$ avec $i \neq j$, on note $X_{\{i,j\}}$ l'application de Ω_n dans $\{0, 1\}$ telle que pour tout $G \in \Omega_n$ avec $G = (S, A)$:

$$X_{\{i,j\}}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in A \\ 0 & \text{si } \{i, j\} \notin A \end{cases}$$

Ainsi, $\left(X_{\{i,j\}} = 1\right) = \left\{G \in \Omega_n \mid X_{\{i,j\}}(G) = 1\right\}$ est l'ensemble des graphes de Ω_n dont $\{i, j\}$ est une arête. Réciproquement, on remarquera aussi que pour $G = (S, A)$, on peut écrire

$$\{G\} = \bigcap_{\{i,j\} \in A} \left(X_{\{i,j\}} = 1\right) \bigcap_{\{i,j\} \notin A} \left(X_{\{i,j\}} = 0\right)$$

On admet l'existence d'une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n))$ telle que les applications $X_{\{i,j\}}$ soient des variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p_n et indépendantes. On note $\mathcal{E}_n = (\Omega_n, \mathcal{P}(\Omega_n), \mathbf{P})$ l'espace probabilisé ainsi construit.

Autrement dit, pour un graphe G donné appartenant à Ω_n, la probabilité qu'une arête $\{i, j\}$ soit contenue dans G est p_n, et les arêtes apparaissent dans G de façon indépendante.

Q10 Soit $G = (S, A) \in \Omega_n$. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(\{G\})$ de l'événement élémentaire $\{G\}$ en fonction de p_n, q_n, N et $a = \text{card}(A)$. Retrouver alors le fait que $\mathbf{P}(\Omega_n) = 1$.

Dans la suite du problème on étudie la notion de fonction de seuil pour une propriété $\mathcal{P}_n$ vérifiée sur une partie des graphes de Ω_n.

Une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$ est une suite $(t_k)_{k \geqslant 2}$ de réels strictement positifs tels que :

- si $p_n = o(t_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 0
- si $t_n = o(p_n)$ alors la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la probabilité pour que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée vaut 1.

Partie II : Une première fonction de seuil

Section A : Deux inégalités

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une espérance $\mathbf{E}(X)$ et une variance $\mathbf{V}(X)$.

Q11 Montrer que : $\mathbf{P}(X > 0) \leqslant \mathbf{E}(X)$

Q12 Montrer que si $\mathbf{E}(X) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(X = 0) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{(\mathbf{E}(X))^2}$.

Indication. on remarquer que $(X = 0) \subset \big(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \mathbf{E}(X)\big)$.

SECTION B : Une fonction de seuil

Q13 Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire A_n représentant le nombre d'arêtes d'un graphe de Ω_n ?

Q14 Montrer que si $p_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 0$.

Q15 Montrer que si $\frac{1}{n^2} = o(p_n)$ au voisinage de $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n > 0) = 1$.

Q16 En déduire une propriété $\mathcal{P}_n$ et sa fonction de seuil associée.

PARTIE III : Fonction de seuil de la copie d'un graphe

Si $G = (S, A)$ est un graphe, on note s_G (resp. a_G) le cardinal de S (resp. A).

Soit $G_0 = (S_0, A_0)$ un graphe particulier fixé. Par commodité d'écriture, on note $s_0 = s_{G_0}$ le cardinal de S_0, $a_0 = a_{G_0}$ le cardinal de A_0 et on suppose que $s_0 \geqslant 2$ et que $a_0 \geqslant 1$.

On va étudier la fonction de seuil de la propriété $\mathcal{P}_n$: "contenir une copie de G_0 ".

On note X_n^0 la variable aléatoire réelle discrète définie sur l'espace probabilisé $\mathcal{E}_n$ telle que pour $G \in \Omega_n$, l'entier $X_n^0(G)$ est égal au nombre de copies de G_0 contenues dans G.

On introduit :

- l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des copies de G_0 dont les sommets sont inclus dans $[\![1\,;\,n]\!]$:

$$\mathcal{C}_0 = \left\{H \mid H \text{ est une copie de } G_0 \text{ et } H = (S_H, A_H) \text{ avec } S_H \subset [\![1\,;\,n]\!]\right\}$$

- pour un graphe $H = (S_H, A_H)$ avec $S_H \subset [\![1\,;\,n]\!]$, la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli X_H définie par :

$$\forall G \in \Omega_n \quad X_H(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } H \subset G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- le réel ω_0 défini par :

$$\omega_0 = \min_{\substack{H\subset G_0 \\ a_H \geqslant 1}} \frac{s_H}{a_H}$$

Q17 Montrer que $\quad \mathbf{E}(X_H) = p_n^{a_H}$.

Q18 Soit S_0' un ensemble fixé de cardinal s_0. On note c_0 le nombre des graphes dont l'ensemble des sommets est S_0' et qui sont des copies de G_0.

Exprimer le cardinal de $\mathcal{C}_0$ à l'aide de c_0 et en utilisant un majorant simple de c_0, justifier que le cardinal de $\mathcal{C}_0$ est inférieur à n^{s_0}.

Q19 Exprimer X_n^0 à l'aide de variables aléatoires du type X_H, et montrer que :

$$\mathbf{E}\left(X_n^0\right) = \sum_{H\in\mathcal{C}_0} \mathbf{P}(H \subset G) \leqslant n^{s_0} p_n^{a_0}.$$

Q20 En déduire que si $p_n = o\left(n^{-\omega_0}\right)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(X_n^0 > 0\right) = 0$.

INDICATION. on pourra introduire $H_0 \subset G_0$ réalisant le minimum donnant ω_0.

On suppose dorénavant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^{\omega_0} p_n\right) = +\infty$.

Q21 Montrer que l'espérance $\mathbf{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right)$ vérifie :

$$\mathbf{E}\left(\left(X_n^0\right)^2\right) = \sum_{(H,H')\in C_0^2} \mathbf{P}\left(H \cup H' \subset G\right) = \sum_{(H,H')\in C_0^2} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}.$$

ERRATA. Cette formule est ambiguë puisqu'elle ne précise pas la nature du G dans « l'événement » $(H \cup H' \subset G)$, ni celle des «graphes» $H \cup H'$ et $H \cap H'$. Le développement dans le corrigé les introduira de façon naturelle.

Pour $k \in [0, s_0]$, on note :

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{(H,H')\in C_0^2 \\ s_{H\cap H'}=k}} \mathbf{P}\left(H \cup H' \subset G\right).$$

Q22 Montrer que : $\Sigma_0 \leqslant \left(\mathbf{E}\left(X_n^0\right)\right)^2$

Q23 Soit $k \in [\![1\,;\, s_0]\!]$; montrer que :

$$\Sigma_k \leqslant \sum_{H\in C_0} \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} c_0 p_n^{2a_0} p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}.$$

Q24 Justifier que pour tous entiers naturels q et r vérifiant $1 \leqslant q \leqslant r$, on a :

$$\binom{r}{q} r^{-q} \geqslant \frac{1}{q!}\left(1 - \frac{q-1}{q}\right)^q$$

et en déduire que pour $k \in [1, s_0]$, on a $\Sigma_k = o\left(\mathbf{E}(X_n^0)^2\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Q25 Montrer que : $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{V}\left(X_n^0\right)}{\left(\mathbf{E}\left(X_n^0\right)\right)^2} = 0.$$

Q26 Montrer alors que la suite $(k^{-\omega_0})_{k\geqslant 2}$ est une fonction de seuil pour la propriété $\mathcal{P}_n$.

Q27 Retrouver le résultat de la question Q16 et déterminer une fonction de seuil pour la propriété « contenir une copie de l'étoile à d branches" avec d entier fixé supérieur à 1.

FIN DU PROBLÈME

CORRIGÉ DU SUJET 1

Phénomènes de seuil dans les graphes

Partie I : Quelques propriétés algébriques des matrices d'adjacence

Q1 Considérons la matrice $P = (\delta_{\rho^{-1}(i),j})_{i,j}$, où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker d'indice (i, j), et posons $M' = (m_{\rho(i),\rho(j)})_{i,j}$. Pour tous $i, j \in [\![1\,;\,n]\!]$ on a

$$(MP)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\delta_{\rho^{-1}(k),j} = m_{i,\rho(j)}$$
$$(PM')_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\rho^{-1}(i),k}m_{\rho(k),\rho(j)} = m_{i,\rho(j)}$$

On a donc $MP = PM'$. Il reste à justifier que la matrice P est inversible pour pouvoir écrire $M = PM'P^{-1}$ et ainsi prouver que M' est semblable à M. Or si on examine le j^{eme} vecteur colonne de P on voit que Toutes ses coordonnées sont nulles sauf celle pour l'indice $i = \rho(j)$ qui vaut 1. C'est le vecteur $E_{\rho(j)}$ de la base canonique $\mathscr{B} = (E_1, E_2, \ldots, E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les vecteurs colonnes de P s'obtiennent en appliquant la permutation ρ à la matrice I_n, ils forment donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La matrice P est donc bien inversible.

$$\boxed{P = PM'P^{-1} \text{ avec } P = (\delta_{\rho^{-1}(i),j})_{i,j}}$$

Q2 Une matrice d'adjacence est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.

Q3 Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe non vide. Il existe alors des entiers $i < j$ tels que $m_{i,j} = 1$, et par symétrie, $m_{j,i} = 1$. Le déterminant d'ordre 2 extrait de M :

$$\begin{vmatrix} m_{i,i} & m_{i,j} \\ m_{j,i} & m_{j,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

est non nul donc

$$\boxed{\operatorname{rg} M \geqslant 2}$$

Q4 Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe dont les sommets non isolés forment une étoiles. Il existe donc des indices distincts $k, k_1, \ldots, k_d$ dans $[\![1\,;\,n]\!]$ tels que la k^{eme} colonne contienne des 1 sur les positions $k_1, k_2, \ldots, k_d$ et des zéros ailleurs. Par symétrie la k^{eme} ligne de M obéit à la même description. Le reste des coefficients de M sont tous nuls. Si on note $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les vecteur colonnes de M, cela signifie que pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$

$$C_j = \begin{cases} E_k & \text{si } j \in \{k_1, k_2, \ldots, k_d\} \\ E_{k_1} + E_{k_2} + \cdots + E_{k_d} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $E_k \notin \operatorname{vect}\{E_{k_1}, E_{k_2}, \ldots, E_{k_d}\}$ alors la famille $(E_k, E_{k_1} + E_{k_2} + \cdots + E_{k_d})$ est libre. C'est une famille libre maximale extraite des colonnes de M donc

$$\boxed{\operatorname{rg} M = 2}$$

Q5 $G' = (A', S')$ est une copie de $G = (A, S)$ donc par définition il exist une bijection σ de S' dans S telle que

$$\forall (s', t') \in S'^2 \quad \{s', t'\} \in A' \iff \{\sigma(s'), \sigma(t')\} \in A \tag{1}$$

Si maintenant ρ est une indexation de S, ie une bijection de $[\![1\,;\,n]\!]$, alors $\sigma^{-1} \circ \rho$ est une indexation de S' et on a selon équation (1)

$$\{\sigma^{-1} \circ \rho(i), \sigma^{-1} \circ \rho(i)\} \in A' \iff \{\rho(i), \rho(j)\} \in A$$

Ce qui signifie que $M_{G,\rho} = M_{G',\sigma^{-1}\circ\rho}$. Alors

$$\boxed{\chi_{G'} = \chi_G}$$

Q6 Soit σ une indexation de G. On a posé $\chi_G = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ donc $a_{n-1} = -\operatorname{tr} M_{G,\sigma} = 0$ puisque $M_{G,\sigma}$ est à diagonale nulle. Posons ensuite $M_{G,\sigma} = (m_{i,j})_{i,j}$. Alors

$$\chi_G(X) = \sum_{\rho\in\mathcal{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\rho)} P_\rho \quad \text{avec } P_\rho = \prod_{k=1}^{n}\Big(\delta_{\rho(k),k}X - m_{\rho(k),k}\Big)$$

Pour tout $\rho \in \mathcal{S}_n$ on a

$$\deg P_\rho = \operatorname{card}\{k \in [\![1\,;\,n]\!] \mid \rho(k) = k\}$$

on voit que seul pour $\rho = \mathrm{id}$ ou lorsque ρ est une transposition, P_ρ est de degré $\geqslant 2$ et donc peut contenir potentiellement un terme en X^{n-2}.

Toutefois $P_{\mathrm{id}} = \prod_{k=1}^{n}(X - m_{k,k}) = X^n$ et pour toute transposition $\tau = (i\ j)$ de $\mathcal{S}_n$ on a

$$P_\tau = m_{i,j}m_{j,i}\prod_{k\notin\{i,j\}}\big(X - m_{k,k}\big) = m_{i,j}^2 X^{n-2} = m_{i,j}X^{n-2}$$

Par identification de coefficients on a donc

$$a_{n-2} = -\sum_{\substack{\{i,j\}\in[\![1\,;\,n]\!]^2 \\ i\neq j}} m_{i,j}$$

Dans cette somme il ne reste que les coefficients $m_{i,j}$ qui correspondent à une arête dans A. Ainsi

$$\boxed{a_{n-2} = -|A|}$$

Q7 Soit M une matrice d'adjacence d'un graphe G à n sommets dont les sommets non isolés forment une étoile à d branches, $1 \leqslant d \leqslant n-1$.

D'après la item 4 [p. 3] (item Q4 [p. 7]), $\operatorname{rg} M = 2$. Donc $\dim\operatorname{Ker} M = n-2$. Alors 0 est une valeur propre (VAP) de M de multiplicité au moins $n-2$. Signifiant que X^{n-2} divise χ_G. Par ailleurs item 6 [p. 3] (item Q6 [p. 8]) a montré que les coefficients en X^{n-1} et en X^{n-2} de χ_G sont respectivement 0 et $-|A|$. Comme les seuls sommets non isolés de G forment une étoiles à d branches alors $|A| = d$ et ainsi

$$\boxed{\chi_G = X^{n-2}(X^2 - d)}$$

Supposons que le graphe G soit étoilé en un sommet indexé par $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ et soient $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ les autres indices des sommets qui forment une étoile avec celui-ci. Notons $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes de la matrice M de G qui correspond à cette indexation et reprenons les relations

$$ME_j = C_j = \begin{cases} E_k & \text{si } j \in \{k_1, k_2, \ldots, k_d\} \\ E_{k_1} + E_{k_2} + \cdots + E_{k_d} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

Puisque M est symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc $\dim\operatorname{Ker} M = n-2$. Tout vecteur E_j avec $j \notin \{k, k_1, \ldots, k_d\}$ est dans $\operatorname{Ker} M$. Par ailleurs pour tout $i \in [\![2\,;\,d]\!]$ on a $M(E_{k_i} - E_{k_1}) = 0$ et donc $E_{k_i} - E_{k_1} \in \operatorname{Ker} M$. La famille des vecteurs E_j avec $j \notin \{k, k_1, \ldots, k_d\}$ et $E_{k_i} - E_{k_1}$ avec $i \in [\![2\,;\,d]\!]$ est libre et contient $n-2 = (n-d-1) + (d-1)$ vecteurs. Cette famille forme donc une base de $E_0(M) = \operatorname{Ker} M$.

Constatons ensuite que si on pose $V = E_{k_1} + \cdots + E_{k_d}$ alors (E_k, V) est une base de $\operatorname{Im} M$ et on a selon les équations (2)

$$ME_k = V \qquad MV = dE_k$$

$\operatorname{Im} M$ étant stable par M, les relations précédentes signifient que la matrice de l'endomorphisme induit par M sur $\operatorname{Im} M$ dans sa base (E_k, V) est

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_{M_1} = X^2 - d$, les VAP de M_1 sont $\sqrt{d}$ et $-\sqrt{d}$ et on a

$$E_{\sqrt{d}}(M_1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}\sqrt{d}\\ 1\end{pmatrix} \qquad E_{-\sqrt{d}}(M_1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}\sqrt{d}\\ -1\end{pmatrix}$$

On en déduit que $V_1 = \sqrt{d}\,E_k + V \in E_{\sqrt{d}}(M)$ et $V_2 = \sqrt{d}\,E_k - V \in E_{-\sqrt{d}}(M)$. Puisque $\sqrt{d}$ et $-\sqrt{d}$ sont des VAP simples de M alors leurs sous-espace propre (SEP) sont de dimension 1 et donc

$$\boxed{\begin{array}{ll} E_{\sqrt{d}}(M) = \mathrm{vect}\{V_1\} & E_{-\sqrt{d}}(M) = \mathrm{vect}\{V_2\} \\ V_1 = \sqrt{d}\,E_k + \displaystyle\sum_{i=1}^{d} E_{k_i} & V_2 = \sqrt{d}\,E_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{d} E_{k_i} \end{array}}$$

Q8 Notons n_1 et n_2 les cardinaux respectifs de S_1 et de S_2 et Soient σ_1 et σ_2 des indexations respectives de S_1 et de S_2 telles que $\sigma_1(1) = s_1$ et $\sigma_2(1) = s_2$. Considérons l'indexation σ de $S = S_1 \cup S_2$ définie par

$$\sigma(k) = \left|\begin{array}{ll} \sigma_1(k) & \text{si } k \in [\![1\,;\,n_1]\!] \\ \sigma(k-n_1) & \text{si } k \in [\![n_1+1\,;\,n_1+n_2]\!] \end{array}\right.$$

Par définition du graphe G on a

$$M_{G,\sigma} = \begin{pmatrix} M_{G_1,\sigma_1} & E_{1,1} \\ {}^{\mathrm{t}}E_{1,1} & M_{G_2,\sigma_2} \end{pmatrix}$$

où $E_{1,1}$ est la première matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{R})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons pour simplifier les écritures

$$M_1(\lambda) = \lambda I_{n_1} - M_{G_1,\sigma_1} = \left(m_{i,j}^{(1)}(\lambda)\right)_{i,j}$$

$$M_2(\lambda) = \lambda I_{n_1} - M_{G_2,\sigma_2} = \left(m_{i,j}^{(2)}(\lambda)\right)_{i,j}$$

Alors

$$\lambda I_{n_1+n_2} - M_{G,\sigma} = \begin{pmatrix} M_1(\lambda) & K \\ {}^{\mathrm{t}}K & M_2(\lambda) \end{pmatrix} \quad \text{avec } K = -E_{1,1} \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{R})$$

Soit un scalaire λ qui ne soit pas une VAP de M_{G_1,σ_1}, de telle sorte que la matrice $M_1(\lambda)$ soit inversible. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{vmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -{}^{\mathrm{t}}KM_1(\lambda)^{-1} & I_{n_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_1(\lambda) & K \\ {}^{\mathrm{t}}K & M_2(\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} M_1(\lambda) & K \\ 0 & M_2(\lambda) - {}^{\mathrm{t}}KM_1(\lambda)^{-1}K \end{vmatrix}$$

Le déterminant à gauche vaut 1 donc nous avons

$$\chi_G(\lambda) = \det\Big(M_1(\lambda)\Big)\det\Big(M_2(\lambda) - {}^{\mathrm{t}}KM_1(\lambda)^{-1}K\Big) \tag{3}$$

Maintenant

$${}^{\mathrm{t}}KM_1(\lambda)^{-1}K = {}^{\mathrm{t}}E_{1,1}M_1(\lambda)^{-1}E_{1,1} = \begin{pmatrix} \nu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{R})$$

où ν est le coefficient d'indice $(1,1)$ de la matrice $M_1(\lambda)^{-1}$. Par linéarité du déterminant matriciel par rapport à chaque colonne nous avons donc

$$\det\Big(M_2(\lambda) - {}^{\mathrm{t}}KM_1(\lambda)^{-1}K\Big) = \begin{vmatrix} m_{1,1}^{(2)}(\lambda) - \nu & m_{1,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{1,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ m_{2,1}^{(2)}(\lambda) & \cdots & \cdots & m_{2,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n_2,1}^{(2)}(\lambda) & \cdots & \cdots & m_{n_2,n_2}^{(2)}(\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \chi_{G_2}(\lambda) - \nu \begin{vmatrix} 1 & m_{1,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{1,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ 0 & m_{2,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{2,n_2}^{(2)}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m_{n_2,2}^{(2)}(\lambda) & \cdots & m_{n_2,n_2}^{(2)}(\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= \chi_{G_2}(\lambda) - \nu\chi_{G_2\backslash s_2}(\lambda)$$

L'expression de v peut être prélevée dans la formule $A^{-1} = (1/\det A)\,{}^{t}\mathrm{Com}\,A$ valable pour toute matrice carrée inversible A :

$$v = \frac{\Delta_{1,1}(M_1(\lambda))}{\det M_1(\lambda)} = \frac{\Delta_{1,1}(M_1(\lambda))}{\chi_{G_1}(\lambda)}$$

$\Delta_{1,1}(M_1(\lambda))$ est le déterminant de la matrice obtenue à partir de $M_1(\lambda)$ en éliminant la première ligne et la première colonne :

$$\Delta_{1,1}(M_1(\lambda)) = \chi_{G_1\backslash s_1}(\lambda)$$

soit au final $$v = \frac{\chi_{G_1\backslash s_1}(\lambda)}{\chi_{G_1}(\lambda)}$$

En revenant maintenant à l'équations (3) nous voyons que

$$\boxed{\chi_G(\lambda) = \chi_{G_1}(\lambda) \times \chi_{G_2}(\lambda) - \chi_{G_1\backslash s_1}(\lambda) \times \chi_{G_2\backslash s_2}(\lambda)}$$

Égalité qui est valable pour tout λ de l'ensemble infini $\mathbb{R} \setminus \mathrm{Sp}(M_{G_1,\sigma_1})$. Elle implique donc l'égalité des polynômes en jeu.

Q9 Soient G_1 et G_2 deux étoiles disjointes de sommets respectifs s_1 et s_2 et soit G la réunion des deux graphes en ajoutant l'arête $\{s_1, s_2\}$. Selon la question précédente

$$\chi_G = \chi_{G_1} \times \chi_{G_2} - \chi_{G_1\backslash s_1} \times \chi_{G_2\backslash s_2}$$

Ici les graphes $G_1\backslash s_1$ et $G_2\backslash s_2$ ont tous leurs sommets isolés (et donc leurs matrices d'adjacences sont nulles) donc $\chi_{G_1\backslash s_1} = X^{d_1-1}$ et $\chi_{G_2\backslash s_2} = X^{d_2-1}$. Avec $\chi_{G_1} = X^{d_1-2}(X^2 - d_1)$ et $\chi_{G_2} = X^{d_2-2}(X^2 - d_2)$ on obtient

$$\chi_G = X^{d_1+d_2-4}(X^2 - d_1)(X^2 - d_2) - X^{d_1+d_2-2}$$

soit $$\boxed{\chi_G = X^{d_1+d_2-4}\Big(X^4 - (d_1 + d_2 + 1)X^2 + d_1 d_2\Big)}$$

Q10 Les événements $(X_{\{i,j\}} = 1)$ et $(X_{\{i',j'\}} = 0)$ avec $i, j, i', j' \in S$ sont tous mutuellement indépendants donc selon l'expression

$$\{G\} = \left(\bigcap_{\{i,j\}\in A} \Big(X_{\{i,j\}} = 1\Big)\right) \bigcap \left(\bigcap_{\{i,j\}\notin A} \Big(X_{\{i,j\}} = 0\Big)\right) \tag{4}$$

N.B. Attention ! Ne pas confondre $\{G\}$ et G.

on a $$\mathbf{P}(\{G\}) = \prod_{\{i,j\}\in A} \mathbf{P}\Big(X_{\{i,j\}} = 1\Big) \times \prod_{\{i,j\}\notin A} \mathbf{P}\Big(X_{\{i,j\}} = 0\Big)$$

soit $$\boxed{\mathbf{P}(\{G\}) = p_n^a q_n^{N-a}}$$

le cardinal de $\overline{A}$ étant effectivement $N - a$ puisque $N = \binom{n}{2}$ est le nombre de toutes les paires $\{i, j\}$ lorsque $i, j \in S$ et $i \neq j$.

Ensuite ; notons $\mathcal{A}$ *l'ensemble de toutes les parties à deux éléments de* S. L'ensemble $\mathcal{A}$ est de cardinal N. Pour tout $a \in [\![0\,;\,N]\!]$, posons

$$\Omega_{n,a} = \Big\{G = (S, A) \in \Omega_n \mid \mathrm{card}\, A = a\Big\}$$

La famille $(\Omega_{n,a})_{a\in[\![0\,;\,n]\!]}$ est une partition de Ω_n donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\Omega_n) &= \sum_{a=0}^{N} \sum_{G\in\Omega_{n,a}} \mathbf{P}(\{G\}) \\ &= \sum_{a=0}^{N} p_n^a q_n^{N-a}\, \mathrm{card}\, \Omega_{n,a}\end{aligned}$$

L'application $A \longmapsto G = (S, A)$ est une bijection de l'ensemble $\mathcal{P}_a(\mathcal{A})$ de toutes les parties de cardinal a de $\mathcal{A}$ dans $\Omega_{n,a}$ donc

$$\mathrm{card}\, \Omega_{n,a} = \mathrm{card}\, \mathcal{P}_a(\mathcal{A}) = \binom{N}{a}$$

Ainsi $$\boxed{\mathbf{P}(\Omega) = \sum_{a=0}^{N} \binom{N}{a} p_n^a (1 - p_n)^{N-a} = 1}$$

Partie II : Une première fonction de seuil

Section A : Deux inégalités

Q11 on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(X=n)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbf{P}(X=n)\\ &\geqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n)\\ &= \mathbf{P}(X>0)\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\mathbf{P}(X>0) \leqslant \mathbf{E}(X)}$$

Q12 L'inclusion $(X=0) \subset (|X-\mathbf{E}(X)| \geqslant \mathbf{E}(X))$ fournie en indication est évidente puisque pour tout $\omega \in \Omega$

$$X(\omega)=0 \Longrightarrow |X(\omega)-\mathbf{E}(X)| \geqslant |\,\mathbf{E}(X)| = \mathbf{E}(X)$$

On en déduit que $\mathbf{P}(X=0) \leqslant \mathbf{P}\big(|X-\mathbf{E}(X)| \geqslant \mathbf{E}(X)\big)$ et ensuite selon l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\boxed{\mathbf{P}(X=0) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{E}(X)^2}}$$

Section B : Une fonction de seuil

Q13 La variable A_n peut être écrite sous la forme

$$A_n = \sum_{\{i,j\}\in\mathcal{A}} X_{\{i,j\}}$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'ensemble de toutes les paires de $[\![1\,;\,n]\!]$. Les variables $X_{\{i,j\}}$ sont mutuellement indépendantes et suivent toutes la loi de Bernoulli de paramètre p_n et on a $\operatorname{card}\mathcal{A} = N$ donc

$$\boxed{\text{La variable } A_n \text{ suit la loi binomiale de paramètres } (N,p_n) : \quad A_n \sim \mathcal{B}(N,p_n)}$$

Q14 On a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_n>0) &= 1-\mathbf{P}(A_n=0) = 1-(1-p_n)^N\\ &= 1-\exp\left(\frac{n(n-1)}{2}\ln(1-p_n)\right)\end{aligned}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}\ln(1-p_n) \sim -\frac{1}{2}n^2p_n \qquad (\text{avec } n^2p_n \longrightarrow 0)$$

donc

$$\boxed{\text{si } p_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \text{ alors } P(A_n>0) \longrightarrow 0}$$

Q15 D'après la Q12 (sol. Q12) on a

$$P(A_n) \leqslant \frac{\mathbf{V}(A_n)}{\mathbf{E}(A_n)^2}$$

La variable A_n suit la loi $\mathcal{B}(N,p_n)$ donc

$$\mathbf{E}(A_n) = Np_n \qquad \mathbf{V}(A_n) = Np_n(1-p_n)$$

Alors

$$\frac{\mathbf{V}(A_n)}{\mathbf{E}(A_n)^2} = \frac{1-p_n}{Np_n} \leqslant \frac{1}{Np_n}$$

Puisque $1/n^2 = \mathrm{o}(p_n)$ alors $n^2p_n \longrightarrow +\infty$ et donc $1/(Np_n) \longrightarrow 0$. On en déduit que $P(A_n) \longrightarrow 0$ et ainsi

$$\boxed{\text{si } \frac{1}{n^2} = \mathrm{o}(p_n) \text{ alors } P(A_n>0) \longrightarrow 1}$$

Q16

> P_n est la propriété :
>
> «le graphe aléatoire G choisi selon le modèle du sujet possède au moins une arête»
>
> sa fonction de seuil est la suite $(1/n^2)_{n\geqslant 2}$

PARTIE III : Fonction de seuil de la copie d'un graphe

Q17 Sachant que $S_H \subset [\![1\,;\,n]\!]$ on a pour tout $G \in \Omega_n$

$$H \subset G \Longleftrightarrow A_H \subset A_G$$

donc
$$(X_H = 1) = \left\{G \in \Omega_n \mid A_H \subset A_G\right\}$$

On peut donc créer une partition de $(X_H = 1)$ sous la forme

$$(X_H = 1) = \bigcup_{b=0}^{N-a_H} \left\{G \in \Omega_n \mid A_H \subset A_G \text{ et } a_G = a_H + b\right\}$$

Or pout tout $b \in [\![1\,;\,N - a_H]\!]$, il y a $\binom{N-a_h}{b}$ façon de compléter A_H en une partie de $\mathcal{A}$ de cardinal $a_H + b$ et pour chaque partie A de $\mathcal{A}$ qui vérifie cette condition on a selon la question Q10 (solution Q10)

$$\mathbf{P}(\{(S, A)\}) = p_n^{a_H+b} q_n^{N-a_H-b}$$

donc
$$\mathbf{P}\left(\left\{G \in \Omega_n \mid A_H \subset A_G \text{ et } a_G = a_H + b\right\}\right) = \binom{N - a_h}{b} p_n^{a_H+b} q_n^{N-a_H-b}$$

par suite

$$\mathbf{P}(X_H = 1) = p_n^{a_H} \sum_{b=0}^{N-a_H} \binom{N - a_h}{b} p_n^{b}(1 - p_n)^{N-a_H-b} = p_n^{a_H}$$

La variable X_H suit une loi de Bernoulli donc

$$\boxed{\mathbf{E}(X_H) = \mathbf{P}(X_H = 1) = p_n^{a_H}}$$

Q18 Récapitulons les notations :

- Au départ il y a le graphe $G_0 = (S_0, A_0)$ avec $s_0 = \operatorname{card} S_0 \geqslant 2$ et $a_0 = \operatorname{card} A_0 \geqslant 1$;
- C_0 est l'ensemble des graphes dont les sommets sont contenus dans $[\![1\,;\,n]\!]$ et qui sont des copies de G_0 (on notera que forcément $s_0 \leqslant n$) ;
- S_0' est un (autre) ensemble de sommets de même cardinal s_0 que S_0 et c_0 est le nombre de graphes de sommets S_0' et qui sont des copies de G_0.

Notons C_0' l'ensemble des graphes de sommets S_0' qui sont des copies de G_0. Soit S une partie quelconque de $[\![1\,;\,n]\!]$ de cardinal s_0 et fixons une bijection $\sigma : S \longmapsto S_0'$. Définissons ensuite pour tout graphe (S, A) de sommets S le graphe (S_0', A_σ) de sommets S_0' par

$$A_\sigma = \left\{\{\sigma(i), \sigma(j)\} \mid \{i, j\} \in A\right\}$$

L'application $(S, A) \longmapsto (S_0', A_\sigma)$ ainsi construite est une bijection. Le graphe (S, A) est une copie de G_0 si et seulement si (S_0', A_σ) en est une. Il y a donc une bijection entre C_0' et l'ensemble des graphes de sommets S qui sont des copies de G_0. Maintenant, si on note $C(S)$ l'ensemble des graphes de sommets S qui sont des copies de G_0 alors on vient de justifier que $|C(S)| = c_0$. Grâce à la partition :

$$C_0 = \bigcup_{S \in \mathcal{P}_{s_0}([\![1\,;\,n]\!])} C(S)$$

on conclut que $\boxed{|C_0| = \binom{n}{s_0} c_0}$

Fixons maintenant un graphe (S_0', B_0) dans C_0' et posons pour toute permutation ρ de S_0'

$$B_\rho = \Big\{\{\rho(i), \rho(j)\} \mid \{i,j\} \in B_0\Big\}$$

Par définition même des copies d'un graphe, pour tout élément (S_0', B) de C_0' il existe ρ telle que $B = B_\rho$, indiquant que l'application $\rho \longmapsto (S_0', B_\rho)$ est une surjection de l'ensemble des permutations de S_0' dans C_0'. On en déduit que

$$c_0 \leqslant s_0!$$

Par suite $\boxed{|C_0| = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-s_0+1)}{s_0!} c_0 \leqslant n^{s_0}}$

Q19 Rappelons, pour tout graphe $G \in \Omega_n$, les notations

- $X_H(G)$ vaut 1 si $H \subset G$, 0 sinon ;
- $X_n^0(G)$ est le nombre de copies de G_0 contenues dans G ;
- C_0 est l'ensemble de toutes les copies de G_0 dont les sommets sont dans $[\![1\,; n]\!]$.

Visiblement $\boxed{X_n^0 = \sum_{H \in C_0} X_H}$

On en déduit par linéarité de l'espérance que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X_n^0) &= \sum_{H \in C_0} \mathbf{E}(X_H) \\ &= \sum_{H \in C_0} p_n^{a_H} \\ &= \sum_{H \in C_0} p_n^{a_0} \\ &= p_n^{a_0} |C_0| \end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathbf{E}(X_n^0) \leqslant n^{s_0} p_n^{a_0}}$

Q20 Soit H_0 un sous graphe de G_0 tel que

$$\omega_0 = \frac{s_{H_0}}{a_{H_0}}$$

On définit la variable Y_0^n liée à H_0 de la même façon que X_0^n est liée à G_0. Puisque $H_0 \subset G_0$, tout graphe G de Ω_n contient au moins autant de copies de H_0 que de copies de G_0. C'est à dire que $X_0^n \leqslant Y_0^n$ et par croissance de l'espérance on a donc

$$\mathbf{E}(X_n^0) \leqslant \mathbf{E}(Y_n^0)$$

D'après la question précédente on a donc

$$0 \leqslant \mathbf{E}(X_n^0) \leqslant n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} \tag{5}$$

Or par hypothèse $p_n = \mathrm{o}(n^{-\omega_0})$ donc

$$n^{s_{H_0}} p_n^{a_{H_0}} = \mathrm{o}\left(n^{s_{H_0} - \omega_0 a_{H_0}}\right) = \mathrm{o}(1)$$

D'après la équations (5) on a donc $\mathbf{E}(X_0^n) \longrightarrow 0$. D'autre part, comme dans la question Q14 (solution Q14)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n^0 > 0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X_n^0 = k) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} k\, \mathbf{P}(X_n^0 = k) \\ &\leqslant \mathbf{E}(X_n^0) \end{aligned}$$

at ainsi $\boxed{\lim \mathbf{P}(X_n^0 > 0) = 0}$

Q21 Rappelons l'expression

$$X_n^0 = \sum_{H \in C_0} X_H$$

donc
$$\left(X_n^0\right)^2 = \sum_{H,H'\in C_0} X_H X_{H'}$$
et par linéarité de l'espérance
$$\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum_{H,H'\in C_0} E(X_H X_{H'})$$
Notons pour deux graphes $H = (S, A)$, $H' = (S', A')$,
$$HUH' = (S \cup S', A_H \cup A_{H'})$$
$$H \cap H' = (S \cup S', A_H \cap A_{H'})$$
On remarquera dès lors que si G est un graphe de Ω_n alors
$$\begin{aligned} H \cup H' \subset G &\iff S_H \cup S_{H'} \subset S_G \text{ et } A_H \cup A_{H'} \subset A_G \\ &\iff S_H \subset S_G \text{ et } A_H \subset A_G \text{ et } S_{H'} \subset S_G \text{ et } A_{H'} \subset A_G \\ &\iff H \subset G \text{ et } H' \subset G \end{aligned}$$
et que
$$\begin{aligned} a_{H\cup H'} &= |A_H \cup A_{H'}| \\ &= |A_H| + |A_{H'}| - |A_H \cap A_{H'}| \\ &= a_H + a_{H'} - a_{H\cap H'} \end{aligned}$$
Soient maintenant $H, H' \in C_0$. Alors la variable $X_H X_{H'}$ ne peut prendre que les valeurs 0 et 1, c'est à dire qu'elle suit une loi de Bernoulli. De plus
$$\begin{aligned} (X_H X_{H'} = 1) &= (X_H = 1) \cap (X_{H'} = 1) \\ &= \{G \in \Omega_n \mid H \subset G\} \cap \{G \in \Omega_n \mid H' \subset G\} \\ &= \boxed{\{G \in \Omega_n \mid H \cup H' \subset G\}} \\ &= (X_{H\cup H'} = 1) \end{aligned}$$
et donc
$$\boxed{\mathbf{P}(X_H X_{H'} = 1) = \mathbf{P}(X_{H\cup H'} = 1) = p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}}$$

N.B. $X_H X_{H'}$ et $X_{H\cup H'}$ étant des variables de Bernoulli, l'égalité $(X_H X_{H'} = 1) = (X_{H\cup H'} = 1)$ signifie en fait que
$$\boxed{X_H X_{H'} = X_{H\cup H'}} \tag{6}$$
et la relation
$$(X_n^0)^2 = \sum_{H,H'\in C_0} X_{H\cup H'}$$
confirme le fait que $(X_n^0)^2(G)$ est le nombre de double-copies de G_0 contenues dans le graphe G (y compris les double-copies de la forme $H \cup H$).

N.B. Finalement le curieux événement $(H \cup H' \subset G)$ pouvait être écrit de façon plus compréhensible sous la forme
$$\{G \in \Omega_n \mid H \cup H' \subset G\}$$
ou encore mieux
$$(X_H X_{H'} = 1)$$

$X_H X_{H'}$ est donc la variable de Bernoulli $X_{H\cup H'}$ de paramètre
$$\mathbf{P}(X_{H\cup H'} = 1) = \mathbf{E}(X_{H\cup H'}) = p_n^{a_{H\cup H'}} = p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}$$
finalement
$$\boxed{\mathbf{E}\Big((X_n^0)^2\Big) = \sum_{H,H'\in C_0} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}}$$

Q22 On a par définition (après adaptation des notations)
$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{(H,H')\in C_0^2 \\ S_H\cap S_{H'}=\varnothing}} \mathbf{P}\Big(\{G \in \Omega_n \mid H \cup H' \subset G\}\Big) = \sum_{\substack{(H,H')\in C_0^2 \\ S_H\cap S_{H'}=\varnothing}} \mathbf{E}(X_{H\cup H'}) \tag{7}$$
donc
$$\Sigma_0 = \sum_{\substack{(H,H')\in C_0^2 \\ S_H\cap S_{H'}=\varnothing}} p_n^{2a_0 - a_{H\cap H'}}$$
Or si $S_H \cap S_{H'} = \varnothing$ alors $A_H \cap A_{H'} = \varnothing$ et donc $a_{H\cap H'} = 0$. Ainsi
$$\Sigma_0 = \left|\Big\{(H, H') \in (C_0)^2 \mid S_H \cap S'_H = \varnothing\Big\}\right| p_n^{2a_0} \leqslant |(C_0)^2| p_n^{2a_0} = \mathbf{E}\big(X_n^0\big)^2$$
$$\boxed{\Sigma_0 \leqslant \mathbf{E}\big(X_n^0\big)^2}$$

AUTRE MÉTHODE. On peut procéder autrement en remarquant que pour tout $G \in \Omega_n$

$$X_H(G) = 1 \iff \forall \{i,j\} \in A_H \quad X_{\{i,j\}}(G) = 1$$

ce qui signifie que $\quad X_H = \prod_{\{i,j\} \in A_H} X_{\{i,j\}}$

Si maintenant $S_H \cap S_{H'} = \varnothing$ alors $A_H \cap A_{H'} = \varnothing$. Les variables $X_{\{i,j\}}$ sont mutuellement indépendantes donc par lemme des coalitions les variables X_H et $X_{H'}$ sont indépendantes. En particulier $E(X_H X_{H'}) = E(X_H)E(H')$. En reprenant à l'étape équations (7)

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 &= \sum_{\substack{(H,H') \in C_0^2 \\ S_H \cap S_{H'} = \varnothing}} \mathbf{E}(X_H)\,\mathbf{E}(X_{H'}) \\
&\leqslant \sum_{(H,H') \in C_0^2} \mathbf{E}(X_H)\,\mathbf{E}(X_{H'}) \\
&= \left(\sum_{H \in C_0} E(X_H)\right)^2 \\
&= \left(\mathbf{E}(X_n^0)\right)^2
\end{aligned}$$

Q23 D'après les questions précédentes on a

$$\Sigma_k = \sum_{\substack{H,H' \in C_0 \\ s_{H \cap H'} = k}} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$\Sigma_k = \sum_{H \in C_0} \sum_{\substack{H' \in C_0 \\ s_{H \cap H'} = k}} p_n^{2a_0 - a_{H \cap H'}}$$

Fixons maintenant un graphe $H \in C_0$ et considérons l'ensemble

$$\Omega_H = \left\{(S, A) \in C_0 \;\middle|\; |S \cap S_H| = k\right\}$$

Considérons ensuite l'application

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_H & \longrightarrow & \mathcal{P}_k(S_H) \times \mathcal{P}_{s_0-k}(⟦1\,;\,n⟧ \setminus S_H) \\
(S, A) & \longmapsto & (S \cap S_H, S \setminus (S \cap S_H))
\end{array}$$

Cette application est surjective car pour tout couple $(S_1, S_2) \in \mathcal{P}_k(S_H) \times \mathcal{P}_{s_0-k}(⟦1\,;\,n⟧ \setminus S_H)$ il y a au moins une copie du graphe G_0 de sommets $S = S_1 \cup S_2$ (moyennant une bijection $\sigma : S_0 \longrightarrow S$) et que $|S \cap S_H| = |S_1| = k$. Ensuite toute copie de G_0 de sommets $S = S_1 \cup S_2$ et un élément de Ω_H. Or d'après la question Q18 (solution Q18), le nombre de ces copies est c_0. Donc tout élément de $\mathcal{P}_k(S_H) \times \mathcal{P}_{s_0-k}(⟦1\,;\,n⟧ \setminus S_H)$ admet exactement c_0 antécédents par notre application. Alors

$$|\Omega_H| = c_0 \left|\mathcal{P}_k(S_H) \times \mathcal{P}_{s_0-k}(⟦1\,;\,n⟧ \setminus S_H)\right| = c_0 \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}$$

Par définition du nombre ω_0 on a

$$\forall H' \in \Omega_H \quad a_{H \cap H'} \leqslant \frac{s_{H \cap H'}}{\omega_0} = \frac{k}{\omega_0}$$

Puisque $p_n \in]0\,;\,1[$ on a donc

$$\forall H' \in \Omega_H \quad p_n^{-a_{H \cap H'}} \leqslant p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}$$

Ce qui achève de justifier que

$$\boxed{\Sigma_k \leqslant \sum_{H \in C_0} c_0 \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}}$$

Noter que k et n ne dépendent pas de l'indice $H \in C_0$ donc en fait

$$\boxed{\Sigma_k \leqslant |C_0| c_0 \binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k} p_n^{2a_0 - \frac{k}{\omega_0}}}$$

Q24

$$\begin{aligned}
\binom{r}{q} r^{-q} &= \frac{r(r-1)\cdots(r-q+1)}{q!} r^{-q} \\
&= \frac{1}{q!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{2}{r}\right)\cdots\left(1 - \frac{q-1}{r}\right) \\
&\geqslant \frac{1}{q!}\left(1 - \frac{q-1}{q}\right)^q
\end{aligned}$$

Rappelons que $\mathbf{E}(X_n^0) = p_n^{a_0}|C_0|$ et $|C_0| = \binom{n}{s_0}c_0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma_k}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} &\leqslant \frac{1}{\mathbf{E}(X_n^0)^2}c_0|C_0|\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}p_n^{2a_0-\frac{k}{\omega_0}}\\ &\leqslant \frac{c_0}{|C_0|}\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\\ &\leqslant \frac{1}{\binom{n}{s_0}}\binom{s_0}{k}\binom{n-s_0}{s_0-k}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\end{aligned}$$

Maintenant $\binom{n}{s_0} = \frac{n(n-1)\cdots(n-s_0+1)}{s_0!} \geqslant \frac{1}{s_0!}(n-s_0)^{s_0}$ donc en posant $M = s_0!\binom{s_0}{k}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma_k}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} &\leqslant M\binom{n-s_0}{s_0-k}(n-s_0)^{-s_0}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\\ &\leqslant M\binom{n-s_0}{s_0-k}(n-s_0)^{k-s_0}(n-s_0)^{-k}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\\ &\leqslant \frac{M}{(s_0-k)!}\left(1-\frac{s_0-k-1}{s_0-k}\right)^{s_0-k}(n-s_0)^{-k}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}}\end{aligned}$$

et vu que $(n-s_0)^{-k} \sim n^{-k}$ il existe une constante $M' > 0$ telle que $(n-s_0)^{-k} \leqslant M'n^{-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a lors

$$0 \leqslant \frac{\Sigma_k}{\mathbf{E}(X_n^0)^2} \leqslant M''n^{-k}p_n^{-\frac{k}{\omega_0}} = M''\left(n^{\omega_0}p_n\right)^{-k/\omega_0}$$

où $M'' = \frac{MM'}{(s_0-k)!}\left(1-\frac{s_0-k-1}{s_0-k}\right)^{s_0-k}$. Puisque $n^{\omega_0}p_n \longrightarrow 0$ cela implique que

$$\boxed{\Sigma_k = \mathrm{o}\left(\mathbf{E}(X_n^0)^2\right)}$$

Q25 En partitionnant l'ensemble C_0^2 sous la forme

$$C_0^2 = \bigcup_{k=0}^{s_0}\left\{(H,H') \in C_0^2 \;\middle|\; s_{H\cap H'} = k\right\}boh$$

les formules de la Q21 (sol. Q21) signifient que

$$\mathbf{E}\left((X_n^0)^2\right) = \sum_{k=0}^{s_0}\Sigma_k$$

et donc $$\frac{\mathbf{V}\left(X_n^0\right)}{\mathbf{E}\left(X_n^0\right)^2} = \frac{\Sigma_0}{\mathbf{E}\left(X_n^0\right)^2} - 1 + \sum_{k=1}^{s_0}\frac{\Sigma_k}{\mathbf{E}\left(X_n^0\right)^2}$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\frac{\Sigma_0}{\mathbf{E}\left(X_n^0\right)^2} \longrightarrow 1$$

Or $$\Sigma_0 = \mathbf{E}\left(\sum_{\substack{H,H'\in C_0\\ S_H\cap S_{H'}=\varnothing}} X_HX_{H'}\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{H\in C_0}X_H\underbrace{\left(\sum_{\substack{H'\in C_0\\ S_{H'}\subset[\![1\,;n]\!]\setminus S_H}} X_{H'}\right)}_{Y_H}\right)$$

Par lemme des coalitions la variable Y_H est indépendante de X_H car toutes les variables $X_{H'}$ sont indépendantes de X_H. De plus elle suit la même loi que $X_{n-s_0}^0$. Donc

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \sum_{H\in C_0}\mathbf{E}(X_H)\,\mathbf{E}(Y_H)\\ &= \sum_{H\in C_0}\mathbf{E}(X_H)\,\mathbf{E}(X_{n-s_0}^0)\\ &= \mathbf{E}(X_n^0)\,\mathbf{E}(X_{n-s_0}^0)\end{aligned}$$

Des calculs effectués précédemment dans les questions Q18 et Q19 donnent

$$\mathbf{E}(X_n^0) = |C_0|p_n^{a_0} = c_0\binom{n}{s_0}p_n^{a_0}$$

c_0 étant une constante indépendante de n on a donc

$$\mathbf{E}(X_{n-s_0}^0) = c_0\binom{n-s_0}{s_0}p_n^{a_0} \sim c_0\binom{n}{s_0}p_n^{a_0} = \mathbf{E}(X_n^0)$$

et ainsi $$\Sigma_0 \sim \left(E(X_n^0)\right)^2$$
Ce qui achève la démonstration.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbf{V}(X_n^0)}{\mathbf{E}\left(X_n^0\right)^2} = 0}$$

Q26 Découle des questions Q12 (sol. Q12), Q20 (sol. Q20) et Q25 (sol. Q25)

Q27 La variable A_n est en fait égale à X_n^0 lorsque le graphe G_0 est formé de deux sommets et une arête. Dans ca cas le seul graphe $H \subset G_0$ qui contient au moins une arête est G_0 lui même et par suite

$$\boxed{\omega_0 = 2}$$

On retrouve ainsi le résultat de la question Q16 (solution Q16).

Lorsque G_0 est une étoile à $d \geqslant 1$ branches alors un sous graphe $H \subset G_0$ est soit a sommets isolés s'il ne contient pas le centre s de G_0, soit il est lui même une étoile s'il le contient. Donc

$$\omega_0 = \min_{2\leqslant k\leqslant d} \frac{k}{k-1}$$

Comme pour tout $k \in [\![2\,;\,d]\!]$,

$$\frac{k}{k-1} - \frac{d}{d-1} = \frac{k(d-1)-d(k-1)}{(k-1)(d-1)} = \frac{d-k}{(k-1)(d-1)} \geqslant 0$$

alors $$\boxed{\omega_0 = \frac{d}{d-1}}$$