Sujet de concours

Mines et Ponts

Session 2024

Mathématique 1

Rédigé par

Table des matières

Énoncé : Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application 2
Calcul d'une intégrale 2
Une expression (utile) de la fonction sinus 4
Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée 4
Calcul de $E(|S_n|)$ 5
Corrigé 7
Calcul d'une intégrale 7
Une expression (utile) de la fonction sinus 9
Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée 9
Calcul de $E(|S_n|)$ 9

■ Énoncé ■

Généralisation d'une intégrale de Dirichlet et application

Le but de ce sujet est de calculer l'intégrale de Dirichlet généralisée

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et d'utiliser ce calcul pour évaluer une espérance.

Partie I : Calcul d'une intégrale

Dans tout ce qui suit, x est un élément de $]0\,;1[$ fixé.

1 Montrer que pour tout $\theta \in\,]-\pi\,;\,\pi[$, la fonction f définie par

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^{x-1}}{1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \end{array}$$

est définie et intégrable sur $]0\,;+\infty[$.

Soit r la fonction définie par

$$r\ :\ \begin{array}{ccc}]-\pi\,;\,\pi[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \theta & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

2 Montrer que la fonction r est de classe C^1 sur $]-\pi\,;\,\pi[$ et que :

$$\forall \theta \in\,]-\pi\,;\,\pi[, \quad r'(\theta) = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\int_0^{+\infty} \frac{t^{x}}{\left(1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

INDICATION. soit $\beta \in]0\,;\,\pi[$, montrer que pour tout $\theta \in [-\beta\,;\,\beta]$ et $t \in [0, +\infty[$,

$$\left|1 + t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 \geqslant \left|1 + t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right|^2 = (t + \cos(\beta))^2 + (\sin(\beta))^2$$

Soit g la fonction définie par

$$g\ :\ \begin{array}{ccc}]-\pi\,;\,\pi[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t \end{array}$$

3 Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $]-\pi\,;\,\pi[$ et que pour tout $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$,

$$g'(\theta) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta} \int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t$$

où h est la fonction définie par

$$h\ :\ \begin{array}{ccc}]0\,;\,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^x}{1 + t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \end{array}$$

Calculer $h(0)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} h(t)$. En déduire que la fonction g est constante sur $]-\pi\,;\,\pi[$.

4 Montrer que pour tout $\theta \in]0\,;\,\pi[$,

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(g(-\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta} - g(\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\theta}\right) = \sin(\theta) \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{t^2 + 2t\cos(\theta) + 1}\,\mathrm{d}t$$

5 En déduire que :

$$\forall \theta \in]0\,;\,\pi[\quad g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\mathrm{cotan}\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta) - \cos(\theta))^x}{1 + u^2}\,\mathrm{d}u$$

où $\mathrm{cotan}\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$

6 Montrer, en utilisant le théorème de convergence dominée, que :

$$\lim_{\theta \to \pi^-} g(\theta)\sin(x\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^2}$$

7 En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1 + t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

On rappelle que x est un élément de $]0\,;\,1[$ fixé.

8 Montrer que.

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\frac{t^{x-1}}{1+t} + \frac{t^{-x}}{1+t}\right)\mathrm{d}t$$

9 Montrer que :

$$\int_1^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+x}$$

10 Établir l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}.$$

11 En déduire que l'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n x}{n^2-x^2}.$$

12 En déduire enfin que :

$$\forall y \in\ ]0\,;\,\pi[,\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n y\sin(y)}{y^2-n^2\pi^2} = 1 - \frac{\sin(y)}{y}$$

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

13 Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-(\cos(t))^{2p+1}}{t^2}\,\mathrm{d}t = (2p+1)\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

14 Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}+(n-1)\pi}^{\frac{\pi}{2}+n\pi} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\,\mathrm{d}t.$$

15 En déduire que :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} (\cos(t))^{2p}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n t\sin(t)}{t^2-n^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t.$$

16 En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} (\cos(t))^{2p} \frac{\sin(t)}{t} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^{2p} \, \mathrm{d}t.$$

Dans le cas $p = 0$, cette intégrale est communément appelée "Intégrale de Dirichlet".

17 Montrer que :

$$(\cos(t))^{2p} = \frac{1}{2^{2p}} \left(\binom{2p}{p} + 2 \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p}{k} \cos(2(p-k)t) \right)$$

INDICATION. On pourra développer $\left(\frac{\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it}}{2}\right)^{2p}$.

18 En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - (\cos(t))^{2p+1}}{t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \frac{(2p+1)!}{2^{2p} \cdot (p!)^2}$$

Partie IV : Calcul de $E(|S_n|)$

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soient $(X_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi donnée par :

$$\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

$\partial^{4a+1} f / \partial x^{2a+3} \partial y^{2a-2}(x, y)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

19 Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

Soient S et T deux variables aléatoires indépendantes prenant toutes deux un nombre fini de valeurs réelles. On suppose que T et $-T$ suivent la même loi.

20 Montrer que :

$$\mathbf{E}\big(\cos(S+T)\big) = \mathbf{E}\big(\cos(S)\big) \, \mathbf{E}(\cos(T)).$$

21 En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et pour tout $t \in \mathbf{R}$:

$$\mathbf{E}(\cos(tS_n)) = (\cos(t))^n$$

22 Soient $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $a \neq 0$ et $|b| \leqslant |a|$. Montrer que

$$|a+b| = |a| + \mathrm{sign}(a) b$$

ou $\mathrm{sign}(a) = {}^{x}/_{|x|}$ pour x réel non nul- En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{E}(|S_{2n}|) = \mathbf{E}\big(|S_{2n-1|}\big)$$

23 Montrer que pour tout $s \in \mathbf{R}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}|s|$$

24 En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\mathbf{E}(|S_n|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{1-\left(\cos t\right)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

25 Conclure que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \mathbf{E}(|S_{2n}|) = \mathbf{E}(|S_{2n-1}|) = \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}\Big((n-1)!\Big)^2}$$

■ **CORRIGÉ** ■

Partie I : Calcul d'une intégrale

1 Soit $\theta \in \,]-\pi\,;\,\pi[$. La fonction $t \longmapsto 1 + t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ne s'annule pas sur $]0\,;\,+\infty[$ donc f est continue sur $]0\,;\,+\infty[$. En outre

$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}} \qquad |f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}}$$

avec $1-x<1$ et $2-x>1$. Donc par comparaison à des fonctions de Riemann,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est intégrable sur }]0\,;\,+\infty[}$$

2 Considérons la fonction

$$\varphi \;:\; (\theta,t) \longmapsto \frac{t^{x-1}}{1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \qquad (\theta,t) \in D = \,]-\pi\,;\,\pi[\,\times\,]0\,;\,+\infty[$$

- φ est de classe C^1 sur D et on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\theta,t) = -\frac{\mathrm{i}t^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{(1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}$$

- La fonction r est bien définie sur $]-\pi\,;\,\pi[$ selon la question précédente
- Soit comme suggéré par l'indication de l'énoncé $\beta \in \,]0\,;\,\pi[$. Fixons $t>0$

$$\left|1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 = \left(1+t\cos\theta\right)^2 + t^2\sin^2\theta = 1+2t\cos\theta+t^2$$

La fonction cos est décroissante sur $[0\,;\,\pi]$ donc

$$\forall \theta \in [0\,;\,\beta] \quad 1+2\cos\theta+t^2 \geqslant 1+2\cos\beta+t^2$$

ce qui amène, par parité de la fonction cos

$$\forall \theta \in [-\beta\,;\,\beta] \quad \left|1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 \geqslant \left|1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right|^2$$

On en déduit que

$$\forall (\theta,t) \in [-\beta\,;\,\beta]\times\,]0,+\infty[\quad \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta}(\theta,t)\right| \leqslant \frac{t^x}{|1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\,|^2}$$

La fonction $\rho = \left|\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\theta(\beta,\cdot)\right|$ est continue et elle est intégrable sur $]0\,;\,+\infty[$ car

$$\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta}(\beta,t)\right| \underset{t\to 0}{\sim} t^x \qquad \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta}(\beta,t)\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2-x}}$$

avec $x>0$ et $2-x>1$.

Toutes les hypothèses sont réunies pour pouvoir appliquer la formule de Leibniz sur l'intervalle $[-\beta, \beta]$. Le réel β étant quelconque dans $]0\,;\,\pi[$ on conclut que

La fonction r est de classe C^1 sur $]-\pi\,;\,\pi[$ et

$$\forall \theta \in\,]-\pi\,;\,\pi[\quad r'(\theta) = -i\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}\,\mathrm{d}t$$

3 Notons que pour tout $\theta \in\,]-\pi\,;\,\pi[$

$$g(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\,r(\theta)$$

La fonction g est de classe C^1 comme produit de deux fonctions qui le sont et on a

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= \mathrm{i}x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\,r(x) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\,r'(\theta) \\ &= i\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\left(\int_0^{+\infty}\left[x\frac{t^{x-1}}{1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} - \mathrm{e}^{i\theta}\,\frac{t^x}{(1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2}\right]\mathrm{d}t\right) \\ &= \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta}\int_0^{+\infty} h'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

où h est la fonction indiquée dans l'énoncé :

$$h(t) = \frac{t^x}{1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

On a $h(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x$, $h(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}/t^{1-x}$ et $x \in\,]0\,;\,1[$

$$\lim_{t\to 0} h(t) = 0 \qquad \lim_{t\to+\infty} h(t) = 0$$

On en déduit que

$$g'(\theta) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\lim_{t\to+\infty} h(t) - \lim_{t\to 0} h(t)\right) = 0$$

g est de classe C^1 de dérivée nulle sur *l'intervalle* $]-\pi\,;\,\pi[$ donc

La fonction g est constante sur $]-\pi\,;\,\pi[$.

N.B. Une simple intégration par partie effectuée sur l'intégrale dans $r'(\theta)$ aboutit à la relation

$$r'(\theta) + \mathrm{i}xr(\theta) = 0$$

exprimant ainsi que $g'(\theta) = 0$.

4 Soit $\theta \in\,]0\,;\,\pi[$. La fonction g est constante et on a $\overline{g(\theta)} = g(-\theta) = g(\theta)$ donc

$$g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(g(\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta} - g(\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\theta}\right)$$

donc $$\boxed{g(\theta)\sin(x\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(g(-\theta)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\theta} - g(\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\theta}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{Im}\left(g(\theta)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\theta}\right) \qquad\qquad (\text{car } g(-\theta) = \overline{g(\theta)})\\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}(1+t\,\mathrm{e}^{-i\theta})}{|1+t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2}\,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

d'où $$\boxed{g(\theta)\sin(x\theta) = \sin(\theta)\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+2t\cos\theta+t^2}\,\mathrm{d}t}$$

5 Soit $\theta \in \,]0\,;\,\pi[$. Sachant que $\sin\theta \neq 0$ on peut poser pour tout réel $t > 0$, $t = u\sin\theta - \cos\theta$. On a alors

$$t^2 + 2t\cos\theta + 1 = (t+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta = (1+u^2)\sin^2\theta$$

L'application $u \longmapsto u\sin\theta - \cos\theta$ est une bijection de classe C^1 de $]\mathrm{cotan}\,\theta\,;\,+\infty[$ sur $]0\,;\,+\infty[$ et l'integrale $\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+2t\cos\theta+t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente donc le changement de variable $t = u\sin\theta - \cos\theta$ donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+2t\cos\theta+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sin\theta}\int_{\mathrm{cotan}\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Soit $$\boxed{g(\theta)\sin(\theta x) = \int_{\mathrm{cotan}\theta}^{+\infty} \frac{(u\sin(\theta)-\cos(\theta))^x}{1+u^2}\,\mathrm{d}u}$$

6 Dans le but d'utiliser le théorème de la convergence dominée (TCD), considérons une suite $(\theta_n)_n$ d'éléments de $[0\,;\,\pi[$ qui converge ves π. On a alors pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$g(\theta_n)\sin(x\theta_n) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x\sin(\theta_n)}{1+2t\cos\theta_n+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} h_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Partie II : Une expression (utile) de la fonction sinus

Partie III : Calcul d'une intégrale de Dirichlet généralisée

Partie IV : Calcul de $E(|S_n|)$