# Séries et intégrales

Cours dynamique

# Séries et intégrales

Cours dynamique

Sadik Boujaida
CPGE Moulay Youssef

December 8, 2024

**Website**: cpgeX[1]



[1] texbouja.github.io
[2] creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0

# Contents

# Chapter 1

# Compléments sur les séries numériques

Compléments sur les séries numériques. Inclut des techniques hors-programmes des CPGE

## 1.1 Comparaison séries/intégrales

On considère une fonction continue par morceaux, ***décroissante et positive*** $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}^*$

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}\,t$$

La minoratiion est en fait valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors que la majoration est valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De ce fait on a le théorème suivant

**Theorem 1.1.1 de comparaison séries/intégrales.**

1. *$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}\,t$*
2. *la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$ converge et dans ce cas :*
   - $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$
   - $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}\,t$
   - *en particulier si* $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = o\left(\int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\right)$ *alors* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \sim \int_n^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

**Remark 1.1.2** On peut replacer l'intervalle $[0, +\infty[$ par un intervalle de la forme $[p, +\infty[$ où $p$ est un entier $\geqslant 0$ lorsque la fonction $f$ n'est pas définie sur

$[0, +\infty[$.

## Colophon

This book was authored in PreTeXt.