CPGE

MOULAY YOUSSEF

RABAT

Concentration

EXPONENTIELLE MATRICIELLE

SUJETS DE CONCOURS

Mars 2025

Proposé par SADIK BOUJAIDA

CLASSES MP*

TABLE DES MATIÈRES

ÉNONCÉ

Autour des exponentielles de matrices

Mines-Ponts 2022, MP, Maths 2

Introduction

Dans tout le sujet, le corps **K** sera **R** ou **C**, et n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $\|\cdot\|$ une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, vérifiant les propriétés

$$\|I_n\| = 1 \qquad (N_1)$$

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))^2 \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\| \qquad (N_2)$$

On rappelle que l'exponentielle d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est la matrice, notée e^A, ou bien $\exp(A)$, définie par

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} .$$

On rappelle que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, l'application

$$f_A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) , \quad t \mapsto f_A(t) = e^{tA}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur **R**, avec

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad f_A'(t) = A\, e^{tA} = e^{tA}\, A .$$

On admettra que, si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, plus précisément si on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbf{K})$, alors

$$e^B = P^{-1}\, e^A\, P.$$

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit leur **crochet de Lie** par

$$[A, B] = AB - BA .$$

La partie 4 du problème est indépendante des parties 2 et 3.

1 : Questions préliminaires

On se donne deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. On suppose dans les questions 1) et 2) que A et B commutent.

1 Montrer que les matrices A et e^B commutent.

2 On définit une application

$$g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad t \longmapsto g(t) = e^{t(A+B)}e^{-tB}.$$

Montrer que l'application g, et l'application f_A définie en préambule, sont solutions d'un même problème de Cauchy. En déduire une démonstration de la relation

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}. \quad (1)$$

3 Réciproquement, on suppose la relation (1) satisfaite. En dérivant deux fois cette relation par rapport à la variable réelle t, montrer que les matrices A et B commutent.

4 Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, prouver la relation $\|e^A\| \leqslant e^{\|A\|}$.

5 Montrer que $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}$.

2 : Formule de Trotter-Kato

Dans cette partie, on note A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. L'objectif est de prouver la relation

$$\lim_{k \to +\infty} \left(e^{A/k}e^{B/k}\right)^k = e^{A+B} \quad \text{ou} \quad \lim_{k \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right)^k = \exp(A + B)$$

Pour tout k entier naturel non nul, on pose

$$X_k = \exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right) \quad \text{et} \quad Y_k = \exp\left(\frac{A+B}{k}\right).$$

6 Prouver les majorations

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \|X_k\| \leqslant \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right) \quad \text{et} \quad \|Y_k\| \leqslant \exp\left(\frac{\|A\| + \|B\|}{k}\right).$$

7 On introduit la fonction

$$h : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}), \quad t \longmapsto h(t) = e^{tA}e^{tB} - e^{t(A+B)}.$$

Montrer que

$$X_k - Y_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad \text{lorsque} \quad k \longrightarrow +\infty.$$

8 Vérifier la relation

$$X_k^k - Y_k^k = \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1}.$$

En déduire la relation (2).

3 : Vers les algèbres de Lie

Dans cette partie, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Pour tout n entier naturel, $n \geqslant 2$, on introduit l'ensemble, dit **groupe spécial linéaire** :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1\}.$$

Si G est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, on introduit son **algèbre de Lie** :

$$\mathcal{A}_G = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{tM} \in G\right\}.$$

L'ensemble $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, ainsi que le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, sont bien des sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$. On ne demande pas de le démontrer.

9 Déterminer $\mathcal{A}_G$ lorsque $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$.

10 Si $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, montrer que $\mathcal{A}_G = \mathcal{A}_n(\mathbf{R})$, ensemble des matrices antisymétriques.

Dans les questions 11 à 14, G est un sous-groupe fermé quelconque de $\mathrm{GL}_n n(\mathbf{R})$.

11 En utilisant la partie 2, montrer que $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12 Soient $A \in \mathcal{A}_G$ et $B \in \mathcal{A}_G$. Montrer que l'application

$$u : \mathbf{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \quad t \mapsto u(t) = e^{tA} B e^{-tA}$$

est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$.

13 En déduire que $\mathcal{A}_G$ est stable par le crochet de Lie, c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathcal{A}_G, \forall B \in \mathcal{A}_G, \quad [A, B] \in \mathcal{A}_G.$$

On rappelle que, si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on dit que M est tangente à G en I_n s'il existe $\varepsilon > 0$ et une application $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow G$, dérivable, telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = M$. L'ensemble des matrices tangentes à G en I_n est appelé espace tangent à G en I_n, et noté $\mathcal{T}_{I_n}(G)$.
On rappelle aussi que l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est différentiable en tout point, par exemple parce qu'elle est polynomiale.

14 Prouver l'inclusion $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, que l'on pourra aussi considérer comme matrice complexe. On définit l'application

$$\delta_M : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad t \longmapsto \delta_M(t) = \det(I_n + tM).$$

En utilisant un développement limité à l'ordre 1, montrer que δ_M est dérivable en 0 et calculer $\delta'_M(0)$.

16 Montrer que la différentielle au point I_n de l'application det : $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ est la forme linéaire "trace".

17 Montrer que, dans les cas particuliers $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, on a $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

4 : Comportement asymptotique

Étude d'un exemple

18 On considère deux nombres complexes distincts α et β. On suppose qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbf{C})$ admet α pour valeur propre simple, β pour valeur propre double. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

où a est un certain nombre complexe. Calculer T^n pour n entier naturel, puis e^{tT} pour t réel. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que l'on ait $\lim_{t \to +\infty} e^{tA} = 0_3$.

Cas général

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. On pose $E = \mathbf{C}^n$. L'espace vectoriel E, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, peut être muni d'une quelconque norme notée $\|\cdot\|_E$, on rappelle qu'elles sont toutes équivalentes. On se donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice carrée à coefficients complexes, et on note u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ canoniquement associé à cette matrice. On s'intéresse au comportement asymptotique de la fonction f_A introduite dans le préambule, et à celui des fonctions vectorielles solutions du système différentiel linéaire à coefficients constants $X' = AX$. Pour tout t réel et pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on notera $v_{i,j}(t)$ le coefficient d'indices (i,j) de la matrice e^{tA}. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f_A(t) = e^{tA} = (v_{i,j}(t))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C}).$$

Pour toute valeur propre λ de la matrice A, on note m_λ sa multiplicité, et on introduit le sous-espace vectoriel

$$F_\lambda = \operatorname{Ker}\left((A - \lambda I_n)^{m_\lambda}\right) = \operatorname{Ker}\left((u - \lambda \operatorname{Id}_E)^{m_\lambda}\right).$$

On posera aussi $\alpha = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$.

19 Montrer que, si $\lim_{t \to +\infty} f_A(t) = 0_n$, alors $\alpha < 0$.

20 Montrer que $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} F_\lambda$.

21 En déduire l'existence de trois matrices P, D et N dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telles que :

- P est inversible,
- D est diagonale,
- N est nilpotente,
- $ND = DN$,
- $A = P(D + N)P^{-1}$,
- $\chi_A = \chi_D$.

22 En déduire qu'il existe un entier naturel p tel que, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on ait

$$v_{i,j}(t) = O(t^p e^{\alpha t}) \quad \text{lorsque} \quad t \longrightarrow +\infty.$$

23 Étudier la réciproque de la question 19).

24 On suppose, dans cette question seulement, que les valeurs propres de la matrice A ont toutes des parties réelles positives ou nulles. Montrer que, si $X \in \mathbf{C}^n$, on a

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{tA} X = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad X = 0.$$

25 On introduit les polynômes suivants :

$$P_s(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \\ \operatorname{Re}(\lambda) < 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

$$P_i(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \\ \operatorname{Re}(\lambda) > 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

$$P_n(X) = \prod_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \\ \operatorname{Re}(\lambda) = 0}} (X - \lambda)^{m_\lambda}.$$

On définit les sous-espaces $E_s = \operatorname{Ker}(P_s(A))$, $E_i = \operatorname{Ker}(P_i(A))$ et $E_n = \operatorname{Ker}(P_n(A))$ de $E = \mathbf{C}^n$. Les indices s, i, n signifient respectivement stable, instable et neutre.

Après avoir justifié que $E = E_s \oplus E_i \oplus E_n$, montrer que

$$E_s = \left\{ X \in E \mid \lim_{t \longrightarrow +\infty} e^{tA} X = 0 \right\}.$$

26 Montrer que

$$E_n = \left\{X \in E \mid \exists C \in \mathbf{R}_+^*, \exists p \in \mathbf{N}, \forall t \in \mathbf{R}, \quad \|e^{tA}X\|_E \leqslant C(1+|t|)^p\right\}.$$

E_n est donc l'ensemble des vecteurs X de $\mathbf{C}^n$ tels que la fonction vectorielle $t \mapsto e^{tA}X$ ait un comportement polynomial en $-\infty$ et $+\infty$.

ÉNONCÉ

Caractérisation et exponentielle des matrices normales

Mines 2020, PSI

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n), dont la matrice unité est notée I_n.
- E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X|Y) = {}^tXY \quad \text{et} \quad \|X\| = \sqrt{{}^tXX}$$

- Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note ${}^tA$, la transposée de A.
- $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.
- $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n,\ A^tA = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n.
- $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n,\ \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\mathrm{R}(\theta) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ et $\mathrm{S}(\theta) = \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$. On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{\mathrm{R}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{\mathrm{S}(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définitions

DÉFINITION 1

Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A^tA = {}^tAA$.

DÉFINITION 2

$A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable** à $B \in \mathcal{M}_n$, s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = {}^tQAQ$. (On pourra noter en abrégé : A est **ORTS** à B)

Objectifs

- Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

  (C_1) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que ${}^tA = P(A)$.

  (C_2) La matrice A est normale.

  (C_3) Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$.

  (C_4) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

  - soit de taille $(1,1)$
  - soit de taille $(2,2)$ du type $r\mathrm{R}(\theta)$, où $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

Théorèmes utilisés

THÉORÈME 1

Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.

THÉORÈME 2

Si $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $B = {}^tQAQ$, alors, pour tout polynôme P à coefficients réels, on a $P(B) = {}^tQP(A)Q$.

1 : Question préliminaire

2.1 Montrer que la relation ORTS est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

2 : Exemples

2.2 Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions (C_1), (C_2), (C_3) et (C_4), et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions (C_1), (C_2) et (C_3).

2.3 Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions (C_2) et (C_3).

2.4 Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$. Montrer que les matrices rT, où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions (C_1) et (C_4).

3 : Deux premières implications

2.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n$. Montrer que si A vérifie la condition (C_1), alors A vérifie la condition (C_2).

2.6 Montrer que si A vérifie la condition (C_2), alors A vérifie la condition (C_3).

4 : La condition C_3 implique la condition C_4

2.7 Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition C_3. Montrer que $c = b$ ou bien $(b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d)$. On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de E_2. En déduire que A vérifie la condition C_4.

2.8 Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition C_3. Montrer que, pour tout réel λ, la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie C_3.

2.9 En déduire que A et ${}^tA$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.

2.10 En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.

2.11 Pour $n \geqslant 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient C_3, avec $p \in \{1, 2\}$. On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie C_3.

2.12 Montrer que si A vérifie la condition C_3, alors A vérifie la condition C_4.

5 : La condition (C4) implique la condition (C1)

2.13 Soit $Z = \{z_1, \ldots, z_n\}$, une famille de n complexes deux à deux distincts. Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, \quad P(z_k) = \overline{z_k}.$$

On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$. Montrer alors que le polynôme P est réel.

2.14 Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(re^{i\theta}) = re^{-i\theta}$. Montrer que $P(r\mathrm{R}(\theta)) = {}^t(r\mathrm{R}(\theta))$. Lorsque $\sin\theta \neq 0$, on pourra utiliser la division euclidienne de P par le polynôme caractéristique χ de la matrice $r\mathrm{R}(\theta)$ de $\mathcal{M}_2$.

2.15 Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition (C4), alors A vérifie la condition (C1).

6 : Exponentielle d'une matrice normale

2.16 Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$ convergent et calculer leur somme.

2.17 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n, \quad \|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |A_{i,j}|.$$

Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$, on a $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

2.18 Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose $S_p(A) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}A^k$. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\mathrm{Exp}(A)$, et que :

$$\forall Q \in \mathcal{O}_n, \quad \mathrm{Exp}({}^tQAQ) = {}^tQ\,\mathrm{Exp}(A)Q.$$

On pourra montrer que, pour tous $1 \leqslant i,j \leqslant n$, la série numérique $\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ est absolument convergente.

2.19 Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\mathrm{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?

2.20 Soit $(r,\theta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Exp}(r\mathrm{R}(\theta)) = e^{r\cos\theta}\mathrm{R}(r\sin\theta)$. En déduire que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblables aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

- soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$,
- soit du type $\alpha\mathrm{R}(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

2.21 On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ à valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les deux conditions :

- les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire,
- il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

Démontrer que $\mathrm{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

2.22 La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par :

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i+1 = j \leqslant n \text{ ou } (i,j) = (n,1), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$?

ÉNONCÉ

Sur quelques questions de calcul différentiel

X 2010, MP, Maths 2

Notations et conventions

Pour tout entier $n > 0$, on note $\langle . ; . \rangle$ le produit scalaire euclidien usuel et $\|.\|$ la norme associée sur $\mathbf{R}^n$, S^{n-1} la sphère de rayon 1 dans $\mathbf{R}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices réelles à n lignes et n colonnes, I_n la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices inversibles, et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ celui des matrices de déterminant 1 . On note $\mathrm{Tr}(M)$ la trace d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, ${}^tM$ sa transposée, $\widetilde{M}$ la matrice de ses cofacteurs, et l'on rappelle la formule

$$M\,{}^t\widetilde{M} = \det(M) I_n$$

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on désigne par $\exp M$ son exponentielle, définie par $\exp M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$. On rappelle que l'application $t \mapsto \exp(tM)$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée en 0 est M. De même, si φ est un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on note $\exp(\varphi)$ son exponentielle donnée par la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^k}{k!}$.
Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Si $f : U \longrightarrow \mathbf{R}^p$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$, on note df_x sa différentielle au point x, soit :

$$\forall h \in \mathbf{R}^n, \quad df_x(h) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x)\right)$$

Préliminaires

1 **1a** Soient α et β deux formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ telle que $\ker\beta \subset \ker\alpha$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\alpha = \lambda\beta$.

1b Soient $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_r$ des formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$ telles que $\bigcap_{i=1}^r \ker\beta_i \subset \ker\alpha$. Montrer que α est combinaison linéaire de $\beta_1, \ldots, \beta_r$. (Une méthode possible est de raisonner par récurrence sur r, en considérant, pour $r \geqslant 2$, la restriction de α et β_r à $F = \bigcap_{i=1}^{r-1} \ker\beta_i$).

1 : Première partie

2 Soit $\gamma :]-1,1[\to \mathbf{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall t \in]-1,1[, \quad \|\gamma(t)\| = 1$$

Montrer que pour tout t dans $]-1,1[$, $\langle \gamma(t), \gamma'(t)\rangle = 0$.

3 Soit $x \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et soit $v \in \mathbf{R}^n$, non nul, orthogonal à x. Montrer qu'il existe une application $\gamma :]-1,1[\to \mathbf{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall t \in]-1,1[, \|\gamma(t)\| = 1, \gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$.

4 Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit g sa restriction à S^{n-1}. Montrer que g admet des extremums. Si x est un extremum, en considérant une application γ comme ci-dessus, montrer qu'il existe un réel λ tel que

$$df_x(h) = \lambda\langle x, h\rangle, \quad (\forall h \in \mathbf{R}^n)$$

5 Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On définit

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \langle x, Ax\rangle \end{array} \right.$$

5a Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

5b Soit x un extremum de la restriction de f à S^{n-1}. Montrer que x est vecteur propre de A.

2 : Deuxième partie

Dans cette partie, on considère les fonctions suivantes :

$$q : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ M \mapsto \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{ij}^2 \end{array} \right.$$

où m_{ij} est le coefficient de M sur la i-ème ligne et j-ième colonne,

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R} \\ M \mapsto \det(M) - 1 \end{array} \right.$$

ainsi que la restriction de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, que l'on note g.

6 **6a** Montrer que $q(M) = \mathrm{Tr}\left({}^tMM\right)$.

6b Vérifier que $(A, B) \mapsto \operatorname{Tr}\left({}^t AB\right)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

6c Montrer que q est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.

7 On note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ ayant pour coefficient 1 à la i-ième ligne et j-ième colonne, et 0 partout ailleurs. Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et $t \in \mathbf{R}$. Exprimer $\det\left(M + tE_{ij}\right)$ en fonction de $\det(M)$, de t et des coefficients de la matrice $\widetilde{M}$.
En déduire que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $df_M(H) = \operatorname{Tr}\left({}^t\widetilde{M}H\right)$.

8 Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et que la restriction g de q à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ possède un minimum.

9 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\det(\exp M) = e^{\operatorname{Tr}(M)}$.

10 Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ et soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$. Montrer que l'application

$$\gamma : \left\{ \;]-1,1[\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \;\; t \mapsto M\exp\left(tM^{-1}H\right) \right.$$

est à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $\gamma(0) = M, \gamma'(0) = H$.

11 Soit $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$ un point où la fonction g atteint son minimum, et soit H dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ tels que $df_M(H) = 0$.

11a Montrer que $dq_M(H) = 0$.

11b Déduire de ce qui précède que M est une matrice orthogonale. Que vaut alors $g(M)$?

3 : Troisième partie

Dans cette partie, on se propose de calculer la différentielle en un point quelconque de l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On rappelle que $GL_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12 **12a** Soient $C_1, C_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$. Posons $B(t) = C_1(t)C_2(t)$. Montrer que B est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout t dans $\mathbf{R}$,

$$B'(t) = C_1'(t)C_2(t) + C_1(t)C_2'(t)$$

12b Soit $C : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $C(t)$ est inversible et on pose $D(t) = C(t)^{-1}$. Montrer que D est de classe $\mathcal{C}^1$ et que pour tout t dans $\mathbf{R}$,

$$D'(t) = -C(t)^{-1}C'(t)C(t)^{-1}$$

13 Soient $C_1, C_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des applications de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $C_1(0) = C_2(0) = I_n$.

13a Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Trouver une application $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $A(0) = I_n$ et $A'(0) = \alpha C_1'(0) + \beta C_2'(0)$.

13b Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $C_1(t)$ et $C_2(t)$ soient inversibles pour tout t dans l'intervalle $]-\epsilon, \epsilon[$.

13c Pour tous s, t dans $]-\epsilon, \epsilon[$, posons $L(s,t) = C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-}$
Calculer $\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0,0)$ en fonction de $C_1'(0)$ et $C_2'(0)$

14 Soit $\Phi : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})\right)$ défini, pour tout X dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ par

$$\Phi(X) : Y \mapsto XYX^{-1}$$

14a Montrer que Φ est un morphisme de groupes. Montrer que les coefficients de XYX^{-1} sont des fractions rationnelles des coefficients de X et de Y. En déduire que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

14b Montrer que $d\Phi_{I_n} : \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow L\left(\mathcal{M}_n(\mathbf{R})\right)$ est donné, pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ par

$$d\Phi_{I_n}(X)(Y) = XY - YX$$

Dans la suite du problème, on pose $\varphi(X) = d\Phi_{I_n}(X) : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\\ Y \mapsto XY - YX \end{cases}$

15 Soit V un R-espace vectoriel de dimension finie et soit $f : \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ un morphisme de groupes de classe $\mathcal{C}^1$.

15a Montrer que pour tout $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$,

$$df_X(H) = f(X) df_{I_n}\left(X^{-1}H\right) = df_{I_n}\left(HX^{-1}\right) f(X)$$

15b On fixe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On considère les applications $a, b : \mathbf{R} \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ définies pour tout $t \in \mathbf{R}$ par

$$a(t) = f(\exp tX), \quad b(t) = \exp\left(t\, df_{I_n}(X)\right)$$

Montrer que $a = b$.

15c Retrouver le résultat de la question 9 en utilisant le résultat de la question 7 .

15d Montrer qu'avec les notations de la question 14, $\Phi(\exp X) = \exp(\varphi(X))$, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

16 On fixe $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour tout $s, t \in \mathbf{R}$, on pose

$$u(s,t) = \exp(s(X+tY)), \quad A(s,t) = \exp(-sX)\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)$$

16a Montrer que $A(1,0) = \exp(-X)\, d\exp_X(Y)$.

16b Déduire du calcul de $\frac{\partial A}{\partial s}(s,t)$ que $\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = \exp(-s\varphi(X))(Y)$.

16c Montrer que $A(s,0) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n s^{n+1}\frac{\varphi(X)^n}{(n+1)!}(Y)$.

16d En déduire une formule (sous forme de série) pour $d\exp_X(Y)$.

Corrigés

CORRIGÉ
Autour des exponentielles de matrices

1 On a $AB = BA$ et les applications $\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) : M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ sont continues. Donc,

$$Ae^B = A\sum_{p=0}^{\infty}\frac{B^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{AB^p}{p!} = \left(\sum_{p=0}^{\infty}\frac{B^p}{p!}\right)A = e^B A.$$

Ainsi, A et e^B commutent.

2 On définit $g(t) = e^{t(A+B)}e^{-tB}$. On montre que g est C^1 sur $\mathbf{R}$ et que :

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^{t(A+B)}(A+B)e^{-tB} + e^{t(A+B)}(-B) \\ &= e^{t(A+B)}Ae^{-tB}. \end{aligned}$$

Comme A et e^B commutent, on a :

$$\begin{aligned} g'(t) &= e^{t(A+B)}e^{-tB}A \\ &= g(t)\cdot A. \end{aligned}$$

Ainsi, g et f_A sont solutions du même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = yA, \\ y(0) = I_n. \end{cases}$$

Par unicité de la solution, on a $g(t) = f_A(t)$, d'où :

$$e^{t(A+B)}e^{-tB} = e^{tA}.$$

En multipliant à droite par e^{tB}, on obtient :

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}.$$

3 On suppose que $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. En dérivant cette relation par rapport à t, on obtient :

$$e^{t(A+B)}(A+B) = e^{tA}Ae^{tB} + e^{tA}e^{tB}B.$$

En évaluant en $t = 0$, on a :

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

En développant, on obtient :

$$A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

d'où $AB = BA$. Ainsi, A et B commutent.

4 L'application norme est continue, donc :

$$\begin{aligned} \|e^A\| &= \left\| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} \right\| \\ &\leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|A^p\|}{p!} \\ &\leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\|A\|^p}{p!} \\ &= e^{\|A\|}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\|e^A\| \leqslant e^{\|A\|}$.

5 On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, donc A est trigonalisable. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et une matrice triangulaire supérieure Δ telle que :

$$A = P\Delta P^{-1}, \quad \text{avec} \quad \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$e^A = Pe^{\Delta}P^{-1}, \quad \text{avec} \quad e^{\Delta} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\det(e^A) &= \det(e^\Delta)\\ &= \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i}\\ &= e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\\ &= e^{\operatorname{tr}(A)}.\end{aligned}$$

Cette égalité reste valable pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

6 D'après la question 4 de la partie 1, on a $\|e^A\| \leqslant e^{\|A\|}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\|X_k\| &= \left\|\exp\left(\frac{A}{k}\right)\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right\|\\ &\leqslant \left\|\exp\left(\frac{A}{k}\right)\right\|\cdot\left\|\exp\left(\frac{B}{k}\right)\right\|\\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|A\|}{k}\right)\cdot\exp\left(\frac{\|B\|}{k}\right)\\ &= \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\|Y_k\| &= \left\|\exp\left(\frac{A+B}{k}\right)\right\|\\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|A+B\|}{k}\right)\\ &\leqslant \exp\left(\frac{\|A\|+\|B\|}{k}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, les majorations sont vérifiées.

7 La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. En utilisant un développement limité à l'ordre 1 en $t = 0$, on a :

$$\begin{aligned}h(t) &= h(0) + th'(0) + O(t^2)\\ &= 0 + t(A+B-(A+B)) + O(t^2)\\ &= O(t^2).\end{aligned}$$

Ainsi, pour $t = \frac{1}{k}$, on obtient :

$$X_k - Y_k = h\left(\frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

8 On a :

$$\begin{aligned}X_k^k - Y_k^k &= \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i X_k Y_k^{k-i-1} - \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i Y_k Y_k^{k-i-1}\\ &= \sum_{i=0}^{k-1} X_k^i (X_k - Y_k) Y_k^{k-i-1}.\end{aligned}$$

En utilisant la majoration de la question 6 et le résultat de la question 7, on a :

$$\begin{aligned}\left\|X_k^k - Y_k^k\right\| &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \left\|X_k^i\right\| \cdot \|X_k - Y_k\| \cdot \left\|Y_k^{k-i-1}\right\|\\ &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \exp\left(\frac{i(\|A\|+\|B\|)}{k}\right) \cdot O\left(\frac{1}{k^2}\right) \cdot \exp\left(\frac{(k-i-1)(\|A\|+}{k}\right.\\ &= O\left(\frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{k\to+\infty}\left(X_k^k - Y_k^k\right) = 0$, ce qui prouve la relation (2) :

$$\lim_{k\to+\infty}\left(e^{\frac{A}{k}} e^{\frac{B}{k}}\right)^k = e^{A+B}.$$

9 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On a $M \in \mathcal{A}_G$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$, $e^{tM} \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, c'est-à-dire $\det(e^{tM}) = 1$.
D'après la question 5 de la partie 1, on a :

$$\det(e^{tM}) = e^{t\cdot\mathrm{tr}(M)}.$$

Ainsi, $\det(e^{tM}) = 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ si et seulement si $\mathrm{tr}(M) = 0$.
Par conséquent,

$$\mathcal{A}_G = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid \mathrm{tr}(M) = 0\}.$$

10 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On a $M \in \mathcal{A}_G$ si et seulement si pour tout $t \in \mathbf{R}$, $e^{tM} \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, c'est-à-dire $(e^{tM})^\top e^{tM} = I_n$.
En dérivant cette relation par rapport à t en $t = 0$, on obtient :

$$M^\top + M = 0.$$

Ainsi, M est antisymétrique. Réciproquement, si M est antisymétrique, alors pour tout $t \in \mathbf{R}$, e^{tM} est orthogonale. Par conséquent,

$$\mathcal{A}_G = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \mid M^\top = -M\right\} = \mathcal{A}_n(\mathbf{R}).$$

11 Soient $A, B \in \mathcal{A}_G$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On doit montrer que $A + \lambda B \in \mathcal{A}_G$.

Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$e^{t(A+\lambda B)} = \lim_{k\to+\infty} \left(e^{\frac{tA}{k}} e^{\frac{\lambda tB}{k}}\right)^k .$$

Comme $A, B \in \mathcal{A}_G$, on a $e^{\frac{tA}{k}}, e^{\frac{\lambda tB}{k}} \in G$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$. Puisque G est un groupe, $\left(e^{\frac{tA}{k}} e^{\frac{\lambda tB}{k}}\right)^k \in G$. Comme G est fermé, la limite $e^{t(A+\lambda B)}$ appartient également à G. Ainsi, $A + \lambda B \in \mathcal{A}_G$, et $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

12 Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$e^{tA} \in G \quad \text{et} \quad e^{-tA} \in G,$$

car $A \in \mathcal{A}_G$. De plus, $B \in \mathcal{A}_G$, donc pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $e^{\alpha B} \in G$. Ainsi,

$$e^{\alpha u(t)} = e^{tA} e^{\alpha B} e^{-tA} \in G.$$

Par conséquent, $u(t) \in \mathcal{A}_G$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

13 D'après la question précédente, l'application $u(t) = e^{tA} B e^{-tA}$ est à valeurs dans $\mathcal{A}_G$. En dérivant $u(t)$ par rapport à t en $t = 0$, on obtient :

$$u'(0) = AB - BA = [A, B].$$

Comme $\mathcal{A}_G$ est un sous-espace vectoriel fermé, $u'(0) \in \mathcal{A}_G$. Ainsi, $[A, B] \in \mathcal{A}_G$.

14 Soit $A \in \mathcal{A}_G$. Par définition, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $e^{tA} \in G$. Considérons l'application :

$$\gamma : \mathbf{R} \to G, \quad t \mapsto \gamma(t) = e^{tA}.$$

Cette application est dérivable, et on a :

$$\gamma(0) = I_n \quad \text{et} \quad \gamma'(0) = A.$$

Ainsi, A est tangente à G en I_n, c'est-à-dire $A \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$. Par conséquent, $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$.

15 La fonction δ_M est polynomiale en t, donc elle est dérivable en 0. En utilisant un développement limité à l'ordre 1, on a :

$$\delta_M(t) = \delta_M(0) + t\delta'_M(0) + o(t).$$

Or, $\delta_M(0) = \det(I_n) = 1$. Pour calculer $\delta'_M(0)$, on utilise la différentielle du déterminant en I_n :

$$\delta_M(t) = \det(I_n + tM) = 1 + t \cdot \operatorname{tr}(M) + o(t).$$

Ainsi, en identifiant les termes, on obtient :

$$\delta'_M(0) = \mathrm{tr}(M).$$

16 La différentielle de det en I_n est l'application linéaire $d(\det)_{I_n}$: $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R}$ qui vérifie :

$$\det(I_n + H) = \det(I_n) + d(\det)_{I_n}(H) + o(\|H\|).$$

Or, $\det(I_n) = 1$, et d'après la question précédente, on a :

$$\det(I_n + H) = 1 + \mathrm{tr}(H) + o(\|H\|).$$

Ainsi, en identifiant les termes, on obtient :

$$d(\det)_{I_n}(H) = \mathrm{tr}(H).$$

La différentielle de det en I_n est donc la forme linéaire "trace".

17 Cas 1 : $G = \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$

D'après la question 14, on a $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$. Il existe une application dérivable $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow G$ telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$. Comme $\gamma(t) \in \mathrm{SL}_n(\mathbf{R})$, on a $\det(\gamma(t)) = 1$ pour tout t. En dérivant en $t = 0$, on obtient :

$$d(\det)_{I_n}(A) = \mathrm{tr}(A) = 0.$$

Ainsi, $A \in \mathcal{A}_G$, et donc $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

Cas 2 : $G = \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$

De même, on a $\mathcal{A}_G \subset \mathcal{T}_{I_n}(G)$. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{T}_{I_n}(G)$. Il existe une application dérivable $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow G$ telle que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$. Comme $\gamma(t) \in \mathrm{O}_n(\mathbf{R})$, on a $\gamma(t)^\top \gamma(t) = I_n$. En dérivant en $t = 0$, on obtient :

$$A^\top + A = 0.$$

Ainsi, A est antisymétrique, c'est-à-dire $A \in \mathcal{A}_G$, et donc $\mathcal{T}_{I_n}(G) = \mathcal{A}_G$.

18 Soit u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ canoniquement associé à A. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a :

$$\mathbf{C}^3 = \mathrm{Ker}(u - \alpha\,\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \beta\,\mathrm{Id})^2.$$

Le premier espace est de dimension 1, et le second est de dimension 2. Soit (e_1) une base de $\mathrm{Ker}(u - \alpha\,\mathrm{Id})$, et soit $e_2 \in \mathrm{Ker}(u - \beta\,\mathrm{Id})$. On complète avec e_3 tel que (e_2, e_3) soit une base de $\mathrm{Ker}(u - \beta\,\mathrm{Id})^2$. La matrice de u dans cette base est de la forme

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & a \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on montre que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & na\beta^{n-1} \\ 0 & 0 & \beta^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$e^{tT} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t\beta} & ate^{t\beta} \\ 0 & 0 & e^{t\beta} \end{pmatrix}.$$

Comme A est semblable à T, on a $e^{tA} = Pe^{tT}P^{-1}$ pour une certaine matrice inversible P. Par continuité, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0_3 \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{t\to+\infty} e^{tT} = 0_3.$$

Cela équivaut à $\mathrm{Re}(\alpha) < 0$ et $\mathrm{Re}(\beta) < 0$.

19 Supposons que $\lim_{t\to+\infty} f_A(t) = 0_n$. Soit λ une valeur propre de A de partie réelle maximale, c'est-à-dire $\mathrm{Re}(\lambda) = \alpha$. Soit X un vecteur propre associé à λ. Alors,

$$e^{tA}X = e^{t\lambda}X.$$

Comme $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$, on a nécessairement $\lim_{t\to+\infty} e^{t\lambda} = 0$, ce qui implique $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. Ainsi, $\alpha < 0$.

20 Cela découle directement du théorème de Cayley-Hamilton et du lemme des noyaux. En effet, le polynôme caractéristique de A s'écrit :

$$\chi_A(X) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)^{m_\lambda}.$$

Ainsi, $\mathbf{C}^n$ est la somme directe des sous-espaces caractéristiques F_λ.

21 D'après la question précédente, $\mathbf{C}^n$ est la somme directe des sous-espaces caractéristiques F_λ. Dans chaque sous-espace F_λ, la restriction de u à F_λ peut s'écrire sous la forme $\lambda\,\mathrm{Id} + N_\lambda$, où N_λ est nilpotente. En choisissant une base adaptée à cette décomposition, on obtient une matrice A semblable à une matrice de la forme $D + N$, où D est diagonale, N est nilpotente, et $ND = DN$. De plus, $\chi_A = \chi_D$ car N est nilpotente.

22 D'après la question précédente, on a $A = P(D+N)P^{-1}$, où D est diagonale, N est nilpotente, et $ND = DN$. Ainsi,

$$e^{tA} = Pe^{tD}e^{tN}P^{-1}.$$

Comme N est nilpotente, e^{tN} est un polynôme en t de degré au plus $p = n-1$. De plus, e^{tD} est diagonale avec des coefficients de la forme $e^{t\lambda}$, où λ est une valeur propre de A. Ainsi, les coefficients de e^{tA} sont de la forme $O(t^p e^{\alpha t})$.

23 La réciproque de la question 19) est : si $\alpha < 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} f_A(t) = 0_n$.
D'après la question 22), les coefficients de e^{tA} sont de la forme $O(t^p e^{\alpha t})$. Comme $\alpha < 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} t^p e^{\alpha t} = 0$ pour tout entier p. Ainsi, $\lim_{t\to+\infty} e^{tA} = 0_n$.

24 Supposons que $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$. D'après la question 22), les coefficients de $e^{tA}X$ sont de la forme $O(t^p e^{\alpha t})$, où $\alpha \geqslant 0$. Si $X \neq 0$, alors au moins une composante de $e^{tA}X$ ne tend pas vers 0, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, $X = 0$.
Réciproquement, si $X = 0$, alors $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$ est trivialement vérifié.

25 D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a :

$$E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} F_\lambda.$$

En regroupant les sous-espaces F_λ selon les signes des parties réelles de λ, on obtient :

$$E = E_s \oplus E_i \oplus E_n.$$

Montrons que $E_s = \left\{X \in E \mid \lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0\right\}$.
<u>Inclusion $\subset$</u> : Soit $X \in E_s$. Alors, X appartient à un sous-espace F_λ avec $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$. D'après la question 22), $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$.
<u>Inclusion $\supset$</u> : Soit $X \in E$ tel que $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = 0$. Écrivons $X = X_s + X_i + X_n$ avec $X_s \in E_s$, $X_i \in E_i$ et $X_n \in E_n$. Alors,

$$\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X = \lim_{t\to+\infty}\left(e^{tA}X_s + e^{tA}X_i + e^{tA}X_n\right) = 0.$$

Comme $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X_s = 0$ (car $X_s \in E_s$), et $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}X_i$ et $\lim_{t\to+\infty} e^{tA}$ ne tendent pas vers 0 sauf si $X_i = 0$ et $X_n = 0$, on a $X = X_s \in E_s$.

26 Soit $X \in E_n$. Alors, X appartient à un sous-espace F_λ avec $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. D'après la question 22), les coefficients de $e^{tA}X$ sont de la forme $O(t^p)$ pour un certain entier p. Ainsi, il existe $C > 0$ tel que

$$\|e^{tA}X\|_E \leqslant C(1+|t|)^p.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $C > 0$ et $p \in \mathbf{N}$ tels que $\|e^{tA}X\|_E \leqslant C(1+|t|)^p$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Écrivons $X = X_s + X_i + X_n$ avec $X_s \in E_s$, $X_i \in E_i$ et $X_n \in E_n$. Alors,

$$\|e^{tA}X\|_E \leqslant \|e^{tA}X_s\|_E + \|e^{tA}X_i\|_E + \|e^{tA}X_n\|_E.$$

Comme $\|e^{tA}X_s\|_E \to 0$ et $\|e^{tA}X_i\|_E \to +\infty$ lorsque $t \to +\infty$, la condition $\|e^{tA}X\|_E \leqslant C(1+|t|)^p$ implique $X_s = 0$ et $X_i = 0$. Ainsi, $X = X_n \in E_n$.

CORRIGÉ

Caractérisation et exponentielle des matrices normales

2.1 La relation ORTS est une relation d'équivalence car elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- **Réflexivité** : Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$, on a $A = I_n A I_n$, où $I_n \in \mathcal{O}_n$. Donc A est ORTS à elle-même.
- **Symétrie** : Si A est ORTS à B, alors il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = {}^tQAQ$. En prenant $Q' = {}^tQ$, on a $Q' \in \mathcal{O}_n$ et $A = {}^tQ'BQ'$. Donc B est ORTS à A.
- **Transitivité** : Si A est ORTS à B et B est ORTS à C, alors il existe $Q, Q' \in \mathcal{O}_n$ tels que $B = {}^tQAQ$ et $C = {}^tQ'BQ'$. En posant $Q'' = QQ'$, on a $Q'' \in \mathcal{O}_n$ et $C = {}^tQ''AQ''$. Donc A est ORTS à C.

Ainsi, la relation ORTS est bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

2.2

- **Matrices symétriques ($\mathcal{S}_n$)** :
  - (C_1) : Pour $S \in \mathcal{S}_n$, on a ${}^tS = S = P(S)$ où $P(X) = X$.
  - (C_2) : S est normale car $S\,{}^tS = S^2 = {}^tSS$.
  - (C_3) : Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^tSX\| = \|SX\|$ car ${}^tS = S$.

- (C_4) : D'après le théorème spectral, S est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, donc S vérifie $((C_4))$.

- **Matrices antisymétriques $(\mathcal{A}_n)$** :
  - (C_1) : Pour $A \in \mathcal{A}_n$, on a ${}^tA = -A = P(A)$ où $P(X) = -X$.
  - (C_2) : A est normale car $A^tA = -A^2 = {}^tAA$.
  - (C_3) : Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$ car ${}^tA = -A$.

2.3

- (C_2) : Pour $Q \in \mathcal{O}_n$, on a $Q^tQ = I_n = {}^tQQ$, donc Q est normale.
- (C_3) : Pour tout $X \in E_n$, $\|{}^tQX\| = \|QX\|$ car Q est une isométrie (elle conserve la norme).

2.4

- **Cas** $T = \mathrm{S}(\theta)$: La matrice $M = rT$ est symétrique réelle, donc elle vérifie (C_1) et (C_4) d'après la question précédente.
- **Cas** $T = \mathrm{R}(\theta)$: La matrice $M = rT$ vérifie (C_4) car elle est orthogonalement semblable à elle-même. Pour (C_1), on a :

$$ {}^tM = r\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = 2r\cos(\theta)I_2 - r\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} $$

Donc ${}^tM = P(M)$ où $P(X) = 2r\cos(\theta) - X$.

2.5 Si A vérifie (C_1), alors il existe un polynôme P à coefficients réels tel que ${}^tA = P(A)$. Comme A commute avec tout polynôme en A, on a :

$$ A^tA = AP(A) = P(A)A = {}^tAA. $$

Ainsi, A est normale, c'est-à-dire qu'elle vérifie (C_2).

2.6 Supposons que A vérifie (C_2), c'est-à-dire que A est normale. Alors, pour tout $X \in E_n$, on a :

$$ \|{}^tAX\|^2 = {}^t({}^tAX){}^tAX = {}^tX{}^tAAX. $$

Comme A est normale, ${}^tAA = A^tA$, donc :

$$ \|{}^tAX\|^2 = {}^tXA^tAX = {}^t(AX)AX = \|AX\|^2. $$

Ainsi, $\|{}^tAX\| = \|AX\|$, ce qui montre que A vérifie (C_3).

2.7

- Pour $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, on a :

$$ \|AX\| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad \|{}^tAX\| = \sqrt{a^2 + c^2}. $$

Comme A vérifie C_4, on a $\|AX\| = \|{}^tAX\|$, donc $b^2 = c^2$, c'est-à-dire $b = \pm c$.

- Si $b = c$, alors A est symétrique et vérifie C_4 d'après la question 2.
- Si $b = -c \neq 0$, alors pour $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, on a :

  $$\|AX\|^2 = (a+b)^2 + (d-b)^2 \quad \text{et} \quad \|{}^tAX\|^2 = (a-b)^2 + (b+d)^2.$$

  En égalisant ces deux expressions, on obtient $(a-d)b = (d-a)b$, ce qui implique $a = d$ car $b \neq 0$. Ainsi, A est de la forme :

  $$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = r\mathrm{R}(\theta),$$

  où $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ est un argument de $a + ib$. Par conséquent, A vérifie C_4.

2.8 Pour tout $X \in E_n$, on a :

$$\|(A - \lambda I_n)X\|^2 = \|AX - \lambda X\|^2 = \|AX\|^2 + \lambda^2\|X\|^2 - 2\lambda(AX|X),$$

et

$$\|{}^t(A - \lambda I_n)X\|^2 = \|{}^tAX - \lambda X\|^2 = \|{}^tAX\|^2 + \lambda^2\|X\|^2 - 2\lambda({}^tAX|X).$$

Comme A vérifie C_3, on a $\|AX\| = \|{}^tAX\|$ et $(AX|X) = ({}^tAX|X)$. Ainsi, $\|(A - \lambda I_n)X\| = \|{}^t(A - \lambda I_n)X\|$, ce qui montre que $A - \lambda I_n$ vérifie C_3.

2.9

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \mathrm{Ker}({}^tA - \lambda I_n)$ car $A - \lambda I_n$ vérifie C_3. Ainsi, A et ${}^tA$ ont les mêmes sous-espaces propres.
- Soient $\lambda \neq \mu$ dans $\mathbb{R}$, et soient $X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ et $Y \in \mathrm{Ker}(A - \mu I_n)$. Alors :

  $$\lambda(X|Y) = (AX|Y) = ({}^tAX|Y) = (X|{}^tAY) = \mu(X|Y).$$

  Comme $\lambda \neq \mu$, on a $(X|Y) = 0$. Ainsi, les sous-espaces propres de A sont deux à deux orthogonaux.

2.10

- Si A est symétrique, alors elle est diagonalisable d'après le théorème spectral.
- Supposons que A est diagonalisable. Alors ses sous-espaces propres sont supplémentaires dans E_n, et d'après la question précédente, ils sont deux à deux orthogonaux. En concaténant des bases orthonormales des sous-espaces propres de A, on obtient une base orthonormale de diagonalisation de A. Ainsi, la matrice de passage P de la base canonique à cette base de diagonalisation est orthogonale, et $D = P^{-1}AP = {}^tPAP$ est diagonale. Par conséquent, $A = PD{}^tP$ est symétrique.

2.11 ◆ Soit $Q \in \mathcal{O}_n$ et $B = {}^tQAQ$. Pour tout $X \in E_n$, on a :

$$\begin{aligned}\|BX\|^2 &= {}^t(BX)BX \\ &= {}^tX{}^tBBX \\ &= {}^tX{}^tQ{}^tAQ{}^tQAQX \\ &= {}^tX{}^tQ{}^tAAQX \\ &= \|AQX\|^2\end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned}\|{}^tBX\|^2 &= {}^t({}^tBX){}^tBX \\ &= {}^tXB{}^tBX \\ &= {}^tX{}^tQAQ{}^tQ{}^tAQX \\ &= {}^tX{}^tQA{}^tAQX \\ &= \|{}^tAQX\|^2.\end{aligned}$$

Comme A vérifie $\boldsymbol{C_3}$, on a $\|AQX\| = \|{}^tAQX\|$, donc $\|BX\| = \|{}^tBX\|$. Ainsi, B vérifie $\boldsymbol{C_3}$.

◆ D'après le théorème 1, l'endomorphisme canoniquement associé à A admet une droite ou un plan stable. Soit F ce sous-espace stable, $p \in \{1,2\}$ sa dimension, et Q la matrice de passage de la base canonique à une base orthonormale adaptée à F. Alors Q est orthogonale, et la matrice $B = {}^tQAQ$ est de la forme :

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$. Comme B vérifie $\boldsymbol{C_3}$, on montre que $A_3 = 0$ et que A_1 et A_2 vérifient $\boldsymbol{C_3}$.

2.12 On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

◆ **Initialisation** : Pour $n = 1$ et $n = 2$, le résultat est déjà démontré.

◆ **Hérédité** : Supposons que toute matrice de taille $\leqslant n-1$ vérifiant $\boldsymbol{C_3}$ vérifie aussi $\boldsymbol{C_4}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant $\boldsymbol{C_3}$. D'après la question précédente, A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient $\boldsymbol{C_3}$. Par hypothèse de récurrence, A_1 et A_2 vérifient $\boldsymbol{C_4}$, donc A vérifie $\boldsymbol{C_4}$.

2.13 ◆ **Existence et unicité** : L'application $\varphi : \mathbb{C}_{n-1}[X] \to \mathbb{C}^n$, définie par $\varphi(P) = (P(z_1), \ldots, P(z_n))$, est linéaire et injective (car un polynôme de degré $\leqslant n-1$ ayant n racines distinctes est nul). Comme $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{C}^n$ ont la même dimension finie (n), φ est un isomorphisme. Ainsi, il existe un unique polynôme $P \in$

$\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $\varphi(P) = (\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_n})$, c'est-à-dire $P(z_k) = \overline{z_k}$ pour tout k.

◆ **Polynôme réel** : Supposons que $\overline{z_k} \in Z$ pour tout k. Alors, pour tout k, on a $P(\overline{z_k}) = \overline{\overline{z_k}} = z_k$. Pour montrer que P est réel, il suffit de montrer que $\overline{P} = P$, où $\overline{P}$ est le polynôme obtenu en conjuguant les coefficients de P. Par unicité, il suffit de vérifier que $\overline{P}(z_k) = \overline{z_k}$ pour tout k. Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$, donc :

$$\overline{P}(z_k) = \overline{P(\overline{z_k})} = \overline{z_k}.$$

Ainsi, $\overline{P} = P$, et P est un polynôme réel.

2.14 ◆ Le polynôme caractéristique de $r\mathrm{R}(\theta)$ est :

$$\chi(X) = X^2 - 2r\cos(\theta)X + r^2.$$

Effectuons la division euclidienne de P par χ :

$$P(X) = \chi(X)Q(X) + aX + b,$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Comme $\chi(re^{i\theta}) = 0$, on a :

$$P(re^{i\theta}) = are^{i\theta} + b = re^{-i\theta}.$$

En séparant les parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$ar\cos(\theta) + b = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad ar\sin(\theta) = -r\sin(\theta).$$

Comme $\sin\theta \neq 0$, on en déduit $a = -1$ et $b = 2r\cos(\theta)$. Ainsi :

$$P(r\mathrm{R}(\theta)) = \chi(r\mathrm{R}(\theta))Q(r\mathrm{R}(\theta)) + ar\mathrm{R}(\theta) + bI_2.$$

Comme $\chi(r\mathrm{R}(\theta)) = 0$, on a :

$$P(r\mathrm{R}(\theta)) = -r\mathrm{R}(\theta) + 2r\cos(\theta)I_2 = {}^t(r\mathrm{R}(\theta)).$$

2.15 ◆ Si A vérifie (C4), alors A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs B, où chaque bloc diagonal est soit de taille $(1,1)$ (de la forme (λ)), soit de taille $(2,2)$ (de la forme $r\mathrm{R}(\theta)$). Soit $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = {}^tQAQ$.

◆ Pour chaque bloc diagonal de B, on peut trouver un polynôme P tel que $P(B) = {}^tB$. En effet :

- Pour un bloc (λ), on a ${}^t(\lambda) = \lambda$, donc $P(\lambda) = \lambda$.
- Pour un bloc $r\mathrm{R}(\theta)$, on a $P(r\mathrm{R}(\theta)) = {}^t(r\mathrm{R}(\theta))$ d'après la question précédente.

- En concaténant ces polynômes, on obtient un polynôme P tel que $P(B) = {}^tB$. Par le théorème 2, on a :

$$P(A) = QP(B)^tQ = Q^tB^tQ = {}^t(QB^tQ) = {}^tA.$$

Ainsi, A vérifie (C1).

2.16

- **Convergence** : Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!}\right| \leqslant \frac{|r|^k}{k!} \quad \text{et} \quad \left|\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!}\right| \leqslant \frac{|r|^k}{k!}.$$

Comme la série exponentielle $\sum \frac{|r|^k}{k!}$ converge, les séries $\sum \frac{r^k\cos(k\theta)}{k!}$ et $\sum \frac{r^k\sin(k\theta)}{k!}$ convergent absolument, donc convergent.

- **Calcul de la somme** : En utilisant la formule d'Euler $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} + i\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(re^{i\theta})^k}{k!} = e^{re^{i\theta}}.$$

En séparant les parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} = e^{r\cos\theta}\cos(r\sin\theta),$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} = e^{r\cos\theta}\sin(r\sin\theta).$$

2.17 Soient $A = (A_{i,j})$ et $B = (B_{i,j})$. Le coefficient (i,j) de AB est :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}.$$

Ainsi, pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$, on a :

$$|(AB)_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|A_{i,k}||B_{k,j}| \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty.$$

Par conséquent, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.

2.18

- **Convergence** : Pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$, on a :

$$\left|\frac{(A^k)_{i,j}}{k!}\right| \leqslant \frac{\|A^k\|_\infty}{k!} \leqslant \frac{(n\|A\|_\infty)^k}{k!}.$$

Comme la série exponentielle $\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(n\|A\|_\infty)^k}{k!}$ converge, la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$ converge absolument, donc converge. Ainsi, la suite $(S_p(A))_{p\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$.

- **Propriété de conjugaison** : Soit $Q \in \mathcal{O}_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_p({}^tQAQ) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!}({}^tQAQ)^k = {}^tQ\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!}A^k\right)Q = {}^tQS_p(A)Q.$$

En passant à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$\operatorname{Exp}({}^tQAQ) = {}^tQ\operatorname{Exp}(A)Q.$$

2.19 - **Fermeture de $\mathcal{E}_n$** : Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices normales convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $A_p{}^tA_p = {}^tA_pA_p$. En passant à la limite, on obtient $A{}^tA = {}^tAA$, donc A est normale. Ainsi, $\mathcal{E}_n$ est fermé.

- **Exponentielle d'une matrice normale** : Si $A \in \mathcal{E}_n$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p(A)$ est normale (car A commute avec ${}^tA$). Comme $\mathcal{E}_n$ est fermé, $\operatorname{Exp}(A) = \lim_{p\to+\infty} S_p(A)$ est également normale.

2.20 - **Calcul de** $\operatorname{Exp}(r\mathrm{R}(\theta))$: Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{R}(\theta)^k = \mathrm{R}(k\theta)$. Ainsi :

$$S_p(r\mathrm{R}(\theta)) = \sum_{k=0}^{p}\frac{r^k}{k!}\mathrm{R}(k\theta) = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{p}\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} & -\sum_{k=0}^{p}\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} \\ \sum_{k=0}^{p}\frac{r^k\sin(k\theta)}{k!} & \sum_{k=0}^{p}\frac{r^k\cos(k\theta)}{k!} \end{bmatrix}.$$

En passant à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$, on obtient :

$$\operatorname{Exp}(r\mathrm{R}(\theta)) = e^{r\cos\theta}\begin{bmatrix}\cos(r\sin\theta) & -\sin(r\sin\theta)\\ \sin(r\sin\theta) & \cos(r\sin\theta)\end{bmatrix} = e^{r\cos\theta}\mathrm{R}(r\sin$$

- **Caractérisation de** $\operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n)$: Si $A \in \mathcal{E}_n$, alors A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs B, où chaque bloc diagonal est soit de taille $(1,1)$ (de la forme (λ)), soit de taille $(2,2)$ (de la forme $r\mathrm{R}(\theta)$). Par la propriété de conjugaison, $\operatorname{Exp}(A)$ est orthogonalement semblable à $\operatorname{Exp}(B)$, qui est diagonale par blocs avec des blocs de type (e^λ) ou $e^{r\cos\theta}\mathrm{R}(r\sin\theta)$. Ainsi, $\operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices orthogonalement semblables à de telles matrices.

2.21 - **Inclusion** $\operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n) \subset \mathcal{F}_n$: Si $B \in \operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n)$, alors B est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs de type (e^λ) ou $e^{r\cos\theta}\mathrm{R}(r\sin\theta)$. Les valeurs propres négatives de B proviennent des blocs $e^{r\cos\theta}\mathrm{R}(r\sin\theta)$ avec $r\sin\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, et elles sont de multiplicité paire. De plus, B peut s'écrire comme $B = ST = TS$, où S est symétrique définie positive et T est orthogonale de déterminant 1.

- **Inclusion** $\mathcal{F}_n \subset \operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n)$: Si $B \in \mathcal{F}_n$, alors B est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs avec des blocs de type (μ) ou $\alpha \mathrm{R}(\beta)$, où $\mu, \alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Ainsi, $B \in \operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n)$.
- **Conclusion** : On a bien $\operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.

2.22 ◆ La matrice B est une matrice de permutation circulaire. Elle est orthogonale et son déterminant est $(-1)^{n+1}$.

- Si n est pair, B admet -1 comme valeur propre de multiplicité 1, ce qui est impair. Ainsi, $B \notin \mathcal{F}_n$, donc B n'est pas l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$.
- Si n est impair, B n'a pas de valeur propre négative et appartient à $\mathcal{SO}_n$. Ainsi, $B \in \mathcal{F}_n$, donc B est l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$.

CORRIGÉ

Sur quelques questions de calcul différentiel

1a Cela va dépendre de α.

Si $\alpha = 0$ on peut écrire $\alpha = \lambda\beta$ avec $\lambda = 0$.

Si $\alpha \neq 0$, $\operatorname{Ker}\beta$ et $\operatorname{Ker}\alpha$ serait deux hyperplans de $\mathbb{R}^n$ l'un inclus dans l'autre donc égaux. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha = \lambda\beta$.

1b Considérons plutôt $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$ une famille libre maximale extraite de $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$, qu'on complète en une base $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Pour chaque $i \in [\![\cdot ; \cdot]\!] r$, β_i est une combinaison linaires des formes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ donc $\bigcap_{j=i}^{p} \operatorname{Ker}\gamma_j \subset \operatorname{Ker}\beta_i$. Alors $\bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{Ker}\gamma_j \subset \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\beta_i$. Comme $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$ est une sous-famille de $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)$ alors nous aussi avons l'inclusion dans le sens inverse et ainsi

$$\bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{Ker}\gamma_j = \bigcap_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}\beta_i \subset \operatorname{Ker}\alpha$$

Considérons maintenant la base anté-duale $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \alpha(e_k)\gamma_k$ et comme $e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots, e_n \in \bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{Ker}\gamma_j \subset \operatorname{Ker}\alpha$ alors

$$\alpha = \sum_{k=1}^{p} \alpha(e_k)\gamma_k$$

α est une combinaison linéaire de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ donc de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$

2 La fonction $t \longmapsto \|\gamma(t)\|^2 = \langle\gamma(t), \gamma(t)\rangle$ est constante de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$, sa dérivée $t \longmapsto 2\langle\gamma(t), \gamma'(t)\rangle$ est donc nulle sur $]-1, 1[$.

3 La famille $(x, v/\|v\|)$ est orthonormale, la fonction

$$\gamma : t \longmapsto \cos(\|v\|\, t)x + \frac{1}{\|v\|}\sin(\|v\|\, t)v$$

est bien définie de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et vérifie bien $\gamma(0) = x$, $\gamma'(0) = v$ et $\|\gamma(t)\| = 1$ pour tout $t \in]-1, 1[$.

4 La fonction $g : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et la sphère unité S^{n-1} est un compact de $\mathbb{R}^n$, g est donc bornée et atteint ses bornes sur S^{n-1}.

Soit x un extrémum de g et soit h un vecteur non nul orthogonal à x.

D'après la question précédente, il existe une fonction $\gamma :]-1, 1[\longrightarrow S^{n-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = h$. La fonction $g \circ \gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall t \in]-1, 1[,\ (g \circ \gamma)'(t) = \mathrm{d}f_{\gamma(t)}\big(\gamma'(t)\big)$$

(Ne surtout pas écrire $\mathrm{d}g_{\gamma(t)}$, S^{n-1} n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^n$).

0 est un extrémum local de $g\circ\gamma$ sur l'ouvert $]-1, 1[$, donc $(g\circ\gamma)'(0) = 0$ ce qui donne en substituant 0 à t dans la formule précédente

$$\mathrm{d}f_x(h) = 0$$

ceci pour tout vecteur non nul h orthogonal à x. $\mathrm{d}f_x$ étant une forme linéaire de $\mathbb{R}^n$ nous avons donc $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker} \mathrm{d}f_x$, où φ est la forme linéaire $h \longmapsto \langle x, h\rangle$.

D'après (1.), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $df_x = \lambda\varphi$, soit

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \ \mathrm{d}f_x(h) = \lambda\langle x, h\rangle$$

N.B. Pour les élèves marocains, programme 2009, x est un extrémum de f selon la contrainte $\|x\|^2 = 1$, la fonction $x \mapsto \|x\|^2$ ayant pour gradient en x le vecteur $2x$, il existe donc $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $grad f(x) = 2\mu x$, soit $\mathrm{d}f_x(h) = 2\mu\langle x, h\rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

C'est un fruit qui vous est défendu dès que votre copie est destinée à passer les frontières.

5a f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée des applications $x \longmapsto (x, Ax)$ qui est linéaire et du produit scalaire qui est bilinéaire.

Pour le calcul de la différentielle, mieux vaut ici utiliser la définition.

$f(x+h) - f(x) = \langle x\,;\, Ah\rangle + \langle h;\, Ax\rangle + \langle h;\, Ah\rangle = 2\langle Ax\,;\, h\rangle + \langle Ah;\, h\rangle$.

L'application $h \longmapsto 2\langle Ax\,;\,h\rangle$ est linéaire et donc $\langle Ah\,;\,h\rangle = o(\|h\|)$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R}^n,\ \ \mathrm{d}f_x(h) = 2\langle Ax\,;\,h\rangle$$

5b Soit x un extrémum de la restriction de f sur S^{n-1}.
D'après (4.) il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}^n,\ \ \mathrm{d}f_x(h) = 2\langle Ax\,;\,h\rangle = \lambda x h$$

Nous avons donc $Ax = \frac{\lambda}{2}x$. x est donc un vecteur propre de A.

N.B. Nous venons de démontrer que toute matrice carrée symétrique réelle admet au moins une valeur propre réelle, étape essentielle dans la démonstration du théorème spectrale.

6a Archi-connu.

6b Idem.

6c Nous allons noter $\langle A\,;\,B\rangle$ le produit scalaire $\operatorname{tr}{}^tAB$.
Une démarche similaire à celle suivie en (5.) permet de justifier que l'application $q : M \longmapsto \langle M\,;\,M\rangle$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \mathrm{d}q_M(H) = 2\langle M\,;\,H\rangle = 2\operatorname{tr}{}^tMH$$

7 La linéarité du déterminant par rapport à la j$^{\text{ème}}$ colonne permet d'écrire

$$\det(M + tE_{ij}) = \det M + t\Delta_{ij}(M)$$

où $\Delta_{ij}(M)$ est le cofacteur du coefficient d'indice (i,j) de M.
La fonction $t \longmapsto \det(M + tE_{ij})$ est donc dérivable et sa dérivée est constante de valeur $\Delta_{ij}(M)$. Ce qui signifie que l'application f admet une dérivée partielle en M selon le coefficient a_{ij} d'indice (i,j) de M et que

$$\frac{\partial f}{\partial a_{ij}}(M) = \Delta_{ij}(M)$$

Les applications Δ_{ij} sont des fonctions polynomiales des coefficients de M et sont donc continues donc $\partial f/\partial a_{ij}$ est continue. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall H = (h_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \ \mathrm{d}f_M(H) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} h_{ij}\Delta_{ij}(M) = \operatorname{tr}{}^t\widetilde{M}H$$

8 $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par l'application continue det du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$, c'est donc un fermé.

g étant positive l'ensemble $I = \{g(M)/M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})\}$ admet une borne inférieure que nous allons noter δ. En utilisant la caractérisation de la borne inférieure on prouve l'existence d'une suite d'éléments $(\alpha_n)_n$ de I qui converge vers δ. Considérons maintenant pour tout $n \in \mathbb{N}$ un élément A_n de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ tel que $g(A_n) = \|A_n\|^2 = \alpha_n$.

La suite $(\|A_n\|^2)_n$ est convergente donc $(A_n)_n$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano–Weierstrass, elle admet au moins une suite extraite $(A_{\varphi(n)})_n$ qui converge. Posons $A = \lim A_{\varphi(n)}$. Par continuité de g, $\left(g(A_{\varphi(n)})\right)_n$ converge vers $g(A)$ et donc $\delta = g(A)$. Comme $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un fermé alors $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ et donc $\delta \in I$.

g admet donc un minimum absolue en A sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

9 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considérons la fonction $\rho : t \longmapsto \det(e^{tM})$, $t \in \mathbb{R}$.

ρ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\begin{aligned}\rho'(t) &= \mathrm{d}f_{e^{tM}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tM}\right) = \mathrm{d}f_{e^{tm}}\left(Me^{tM}\right)\\ &= \operatorname{tr}{}^t\mathrm{Com}(e^{tM})Me^{tM} = \operatorname{tr}{}^t\mathrm{Com}(e^{tM})e^{tM}M\\ &= \operatorname{tr}\det(e^{tM})M\\ &= \det(e^{tM})\operatorname{tr}M\end{aligned}$$

Ainsi ρ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \operatorname{tr} M y = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \rho(t) = \lambda e^{t\operatorname{tr}M}$.

Comme $\rho(0) = \det(e^0) = \det(I_n) = 1$ alors $\lambda = 1$. Pour $t = 1$ nous obtenons alors

$$\det(e^M) = e^{\operatorname{tr}M}$$

10 $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{d}f_M(H) = 0$ et $\gamma : t \longmapsto Me^{tM^{-1}H}$, $t \in]-1,1[$.

Soit $t \in]-1,1[$

$\det\left(\gamma(t)\right) = \det M \det\left(e^{tM^{-1}H}\right) = e^{t\operatorname{tr}M^{-1}H} = e^{t\det(M)\operatorname{tr}{}^t\widetilde{M}H} = e^{t\,\mathrm{d}f_M(H)}$ = 1.

donc γ est à valeurs dans $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et

$$\gamma'(t) = M(M^{-1}H)e^{tM^{-1}H} = He^{tM^{-1}H}$$

En particulier $\gamma(0) = M$ et $\gamma'(0) = H$.

11a En considérant la fonction $g \circ \gamma$, γ étant la fonction définie dans la question précédente et qui vérifie

$$\gamma(0) = M, \gamma'(0) = H \text{ et } \forall t \in]-1,1[,\ \|\gamma(t)\| = 1$$

comme dans (4.), on démontre que si M est un extrémum de g alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}q_M(H) = \lambda\, \mathrm{d}f_M(H)$$

Il est alors trivial que si $\mathrm{d}f_M(H) = 0$ alors $\mathrm{d}q_M(H) = 0$.

11b $M \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ donc ${}^t\widetilde{M} = M^{-1}$ et donc

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{d}f_M(H) = \operatorname{tr} M^{-1}H = \left\langle {}^tM^{-1}\,;\, H\right\rangle \text{ et } \mathrm{d}q_M(H) = 2\langle M\,;$$

La relation $\mathrm{d}q_M = \lambda\,\mathrm{d}f_M$ donne alors

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \left\langle {}^tM^{-1} - 2\lambda M\,;\, H\right\rangle = 0$$

et donc ${}^tM^{-1} = 2\lambda M$. En appliquant le déterminant nous obtenons $(2\lambda)^n = 1$ et donc $2\lambda = \pm 1$.

Ainsi ${}^tMM = \pm I_n$, mais ${}^tMM$ est une matrice symétrique positive, ses valeurs propres sont donc positives et donc nous ne pouvons avoir ${}^tMM = -I_n$.

Alors ${}^tMM = I_n$ ie que M est ume matrice orthogonale.

Maintenant, M étant orthogonale, ses vecteurs colonnes sont unitaires donc $q(M) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ij}^2 = n$.

12a L'application $(X,Y) \longmapsto XY,\ (X,Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, est bilinéaire et C_1 et C_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc B est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\forall t \in \mathbb{R},\ B'(t) = C_1'(t)C_2(t) + C_1(t) + C_2'(t)$$

12b Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $D(t) = \frac{1}{\det(C(t))}\,{}^t\widetilde{C(t)}$

Les coefficient de $\widetilde{C(t)}$ sont des fonctions polynomiales de ceux de $C(t)$. Ces derniers sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de t donc aussi ceux de $\widetilde{C(t)}$ et donc $t \longmapsto \widetilde{C(t)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

L'application $t \longmapsto \det(C(t))$ est la composée de la fonction de plusieurs variable det et de C qui sont toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc $t \longmapsto 1/\det(C(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi D est de classe $\mathcal{C}^1$ et en dérivant la relation $C(t)D(t)$ selon le résultat de la question précédente, nous obtenons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ C'(t)D(t) + C(t)D'(t) \text{ soit } D'(t) = -C(t)^{-1}C'(t)C(t)^{-1}$$

13a Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considérons l'application

$$A : t \longmapsto \exp\left(t\alpha C_0'(t) + t\beta C_2'(0)\right)$$

A est de classe $\mathcal{C}^1$, $A(0) = I_n$ et $A'(0) = \alpha C_1'(0) + \beta C_2'(0)$

13b La fonction $t \longmapsto \det(C_1(t))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vaut 1 en 0 donc il existe $\epsilon_1 > 0$ tel que

$$\forall t \in]-\epsilon_1, \epsilon_1[,\ \det(C_1(t)) \geqslant \frac{1}{2}$$

De même, il existe $\epsilon_2 > 0$ tel que

$$\forall t \in]-\epsilon_2, \epsilon_2[,\ \det(C_2(t)) \geqslant \frac{1}{2}$$

Il suffit ensuite de prendre $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$.

13c $\forall (t,s) \in]-\epsilon, \epsilon[^2,\ L(s,t) = C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}$.
Par bilinéarité, l'application L est bien de classe $\mathcal{C}^2$ et pour tout $(s,t) \in]-\epsilon, \epsilon[^2$
$\partial L/\partial t(s,t) = C_1(s)C_2'(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1} - C_1(s)C_2(t)C_1(s)^{-1}C_2(t)^{-1}C$
$\partial L/\partial t(s,0) = C_1(s)C_2'(0)C_1(s)^{-1} - C_2'(0)$, et en particulier $\partial L/\partial t(0,0) =$ 0.

Maintenant

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0,0) &= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{\partial L}{\partial t}(s,0) - \frac{\partial L}{\partial t}(0,0)\right) \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{1}{s}\left(C_1(s)C_2'(0)C_1(s)^{-1} - C_2'(0)\right) \\
&= E'(0)
\end{aligned}$$

avec $E(s) = C_1(s)C_2'(0)C_1(s)^{-1}$ on a

$$E'(s) = C_1'(s)C_2'(0)C_1(s)^{-1} - C_1(s)C_2'(0)C_1(s)^{-1}C_1'(s)C_1(s)^{-1}$$

donc $E'(0) = C_1'(0)C_2'(0) - C_2'(0)C_1'(0)$. Ainsi

$$\boxed{\frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0,0) = C_1'(0)C_2'(0) - C_2'(0)C_1'(0)}$$

14a Pour tout $(X, X') \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^2$, et pour tout $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$\Phi(XX')(Y) = XX'YX'^{-1}X^{-1} = \Phi(X)(X'YX'^{-1}) = \Phi(X) \circ \Phi(X')(Y)$
donc $\Phi(XX') = \Phi(X) \circ \Phi(X')$. Φ est bien un morphisme de groupes.
Maintenant, les coefficient de XYX^{-1} sont des fonctions polynomiales des coefficients de ceux de X,Y et X^{-1}. Ceux de X^{-1} sont des fonctions rationnelles de ceux de X. Donc les coefficients de XYX^{-1} sont des fonctions rationnelles de ceux de X et de Y.

14b Soit X un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout réel t voisin de 0, $I_n + tX$ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, puisque ce dernier est un ouvert.

Fixons $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La fonction définie au voisinage de 0, $t \longmapsto \Phi(I_n + tX)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc la fonction $t \longmapsto \Phi(I_n+tX)(Y)$ est de classe C^1 car l'application $L \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \longmapsto L(Y)$ est linéaire

En dérivant l'égalité $\Phi(I_n + tX)(Y) = (I_n + tX)Y(I_n + tX)^{-1}$ via les formules établies en (12b.) nous obtenons

$$\mathrm{d}\Phi_{(I_n+tX)}(X)(Y) = XY(I_n + tX)^{-1} - (I_n + tX)Y(I_n + tX)^{-1}X(I_n + t$$

et en particulier pour $t = 0$

$$\mathrm{d}\Phi_{I_n}(X)(Y) = XY - YX$$

15a Soit $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $X + H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, sachant que f est un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} f(X+H) - f(X) &= f(X)\big(f(I_n + X^{-1}H) - f(I_n)\big) \\ &= f(X)\big(\mathrm{d}f_{I_n}(X^{-1}H) + o(\|H\|)\big) \\ &= f(X)\,\mathrm{d}f_{I_n}(X^{-1}H) + o(\|H\|) \end{aligned}$$

L'application $H \longmapsto f(X)df_{I_n}(X^{-1}H)$ est linéaire par linéarité de la différentielle $\mathrm{d}f_{I_n}$, donc

$$\mathrm{d}f_X(H) = f(X)\,\mathrm{d}f_{I_n}(X^{-1}H)$$

De même, on obtient l'expression $\mathrm{d}f_X(H) = \mathrm{d}f_{I_n}(HX^{-1})f(X)$ en écrivant $f(X+H) - f(X) = \big(f(I_n + HX^{-1}) - f(I_n)\big)f(X)$.

N.B. En fait il suffit que f soit différentiable en I_n pour qu'elle soit différentiable en tout élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et même de classe $\mathcal{C}^1$, car dans ce cas pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nul l'application $X \longmapsto f(X)df_{I_n}(X^{-1}H)$ va être continue.

15b On fixe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = f(e^{tX})$ et $b(t) = e^{t\,\mathrm{d}f_{I_n}(X)}$

La fonctions $t \longmapsto e^{tX}$ et $t \longmapsto e^{t\,\mathrm{d}f_{I_n}(X)}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$, de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc a et b sont de classe $\mathcal{C}^1$ et nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$a'(t) = \mathrm{d}f_{e^{tX}}\left(\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tx}\right) = \mathrm{d}f_{e^{tX}}\left(Xe^{tX}\right) = \mathrm{d}f_{I_n}\left(Xe^{tX}e^{-tX}\right)f(e^{tX}) = \mathrm{d}f_{I_n}($$

Les solutions de l'équation linéaire autonome du 1er ordre

$$x' = df_{I_n}(X)x$$

sont les fonctions de la forme $x : t \longmapsto e^{t\,\mathrm{d}f_{I_n}(X)}M$ où M est un élément quelconque de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Il existe donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $a(t) = e^{t\,\mathrm{d}f_{I_n}(X)}M = b(t)M$.
$b(0) = e^{0\,\mathrm{d}f_{I_n}(X)} = id_V$ ($\mathrm{d}f_{I_n}(X) \in GL(V)$) et $a(0) = f(I_n) = id_V$ (f est un morphisme de groupes) donc $M = I_n$ et donc $a = b$.

15c En considérant l'application det qui induit effectivement un morphisme de groupes de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^*$, nous avons , d'après la question précédente, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \det(e^{tX}) = e^{t\,\mathrm{d}(det)_{I_n}(X)} = e^{t\,\mathrm{tr}\,X}$$

Et en particulier $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}\,X}$.

15d En reprenant le résultat du (15b.) avec Φ au lieu de f nous avons

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(e^{tX}) = e^{t\,\mathrm{d}\Phi_{I_n}(X)} = e^{t\varphi(X)}$$

et en particulier $\phi(e^X) = e^{\varphi(X)}$.

16 On fixe $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose pour tout $s, t \in \mathbb{R}$

$$u(s,t) = e^{s(X+tY)}, \quad A(s,t) = e^{-sX}\frac{\partial u}{\partial t}(s,t)$$

N.B.

- Bizarrement l'énoncé parle de $\mathrm{d}(\exp)_X$ sans qu'il ne soit nulle part question de justifier que l'application exp est différentiable. Nous ferons de même en admettant que exp est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, c'est selon ...). Signalons que c'est un résultat qui est très loin d'être trivial.
- Considérons les écritures des deux dérivées partielles de u

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) = (X+tY)e^{s(X+tY)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(s,t) = sY\,e^{s(X+tY)}$$

La première est tout à fait correcte, la deuxième complètement hasardeuse. La première repose en effet sur le résultat rappelé en début de l'énoncé :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{tA}) = Ae^{tA}, \text{ si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

La deuxième sur une extension erronée de ce résultat qui voudrait que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{C(t)}) = C'(t)e^{C(t)}$$

si $C : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour s'en convaincre, appliquer le théorème de Schwarz à u en utilisant cette relation vous donnera $XY = YX$, les matrices X et Y étant quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$! (ce que votre humble serviteur à commencé par faire dans un excès de zèle avant de se rendre compte de son péché devant la grossièreté du résultat obtenu).
Une façon correcte d'exprimer cette dérivée est de faire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{C(t)} = \mathrm{d}(\exp)_{C(t)}(C'(t))$$

16a En admettant que la fonction exp est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) = \mathrm{d}(\exp)_{s(X+tY)}(sY) = s\,\mathrm{d}(\exp)_{s(X+tY)}(Y)$$

d'où $A(1,0) = e^{-X}\,\mathrm{d}(exp)_X(Y)$.

16b Maintenant pour pouvoir calculer effectivement $\partial A/\partial s$ sans dépasser la différentielle première de exp, nous allons dériver u dans un sens qui nous arrange mieux, $\partial^2 u/\partial t\partial s$ au lieu de $\partial^2 u/\partial s\partial t$. Pour cela nous allons d'abords justifier que u est de classe $\mathcal{C}^2$.

Pour tout $(s,t)\in\mathbb{R}^2$, $u(s,t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{s^p}{p!}(X+tY)^p$

On pose $v_p(s,t) = \frac{s^p}{p!}(X+tY)^p$. Les fonctions v_p sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et la série de fonctions $\sum v_p(s,t)$ converge simplement vers u sur $\mathbb{R}^2$.

De plus pour tous $p\geqslant 1$

$$\frac{\partial v_p}{\partial s}(s,t) = \frac{s^{p-1}}{(p-1)!}(X+tY)^p$$
$$\frac{\partial v_p}{\partial t}(s,t) = \frac{s^p}{p!}\sum_{k=1}^{p}(X+tY)^{k-1}Y(X+tY)^{p-k}$$

Pour les deux dérivées, en considérant une norme matricielle $\|.\|$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\left\|\frac{\partial v_p}{\partial s}(s,t)\right\| \leqslant \frac{|s|^{p-1}}{(p-1)!}\big(\,\|X\|+|t|\,\|Y\|\,\big)^p$$
$$\left\|\frac{\partial v_p}{\partial t}(s,t)\right\| \leqslant \frac{|s|^{p}}{(p-1)!}\,\|Y\|\,\big(\,\|X\|+|t|\,\|Y\|\,\big)^{p-1}$$

Soit $r>0$. Pour tout $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\|(s,t)\|_\infty\leqslant r$, en posant $K=\max(\|Y\|\,,\|X\|+r\,\|Y\|)$ nous avons donc

$$\left\|\frac{\partial v_p}{\partial s}(s,t)\right\| \leqslant K\frac{(rK)^{p-1}}{(p-1)!} \text{ et } \left\|\tfrac{\partial v_p}{\partial t}(s,t)\right\| \leqslant rK\tfrac{(rK)^{p-1}}{(p-1)!}$$

Les séries de fonctions $\sum\frac{\partial v_p}{\partial s}$ et $\sum\frac{\partial v_p}{\partial t}$ convergent donc normalement sur tout compact de $\mathbb{R}^2$.

Ceci prouve que pour un s fixé, la fonction $t\longmapsto u(s,t)$ est dérivable et vice versa. Ou encore que u admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$. Ces dérivées partielles ont pour expressions

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\partial v_p}{\partial s}(s,t)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\partial v_p}{\partial t}(s,t)$$

La convergence normale sur tout compact des séries de fonctions $\sum \frac{\partial v_p}{\partial s}$ et $\sum \frac{\partial v_p}{\partial t}$ achève de justifier qu'en fait les dérivées partielles $\partial u/\partial s$ et $\partial u/\partial t$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et donc que u est de classe $\mathcal{C}^1$.
On procède de même pour montrer que les fonctions $\partial u/\partial s$ et $\partial u/\partial t$ sont à leurs tour de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et ainsi que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ensuite. Via le théorème de Schwarz, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial s}(s,t) &= -Xe^{-sX}\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) + e^{-sX}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t}(s,t) \\
&= -XA(s,t) + e^{-sX}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s}(s,t) \\
&= -XA(s,t) + e^{-sX}\frac{\partial}{\partial t}\left((X+tY)e^{s(X+tY)}\right) \\
&= -XA(s,t) + e^{-sX}\left(Ye^{s(X+tY)} + (X+tY)\,\mathrm{d}(\exp)_{s(X+tY)}(sY)\right) \\
&= e^{-sX}Ye^{s(X+tY)} - XA(s,t) + e^{-sX}(X+tY)e^{sX}A(s,t)
\end{aligned}$$

D'où : $\partial A/\partial s(s,0) = e^{-sX}Ye^{sX} - XA(s,t) + e^{-sX}Xe^{sX}A(s,t)$.
Il est aisé de justifier que $e^{sX}X = Xe^{sX} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{s^p}{p!}X^{p+1}$ et donc que

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = e^{-sX}Ye^{sX}$$

et d'après (15d.)

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = \Phi(e^{-sX})(Y) = e^{\varphi(-sX)}(Y) = e^{-s\varphi(X)}(Y)$$

vu que l'application φ est linéaire.

N.B. Un résultat simple mais utile, si $\sum u_n$ est une série convergente à termes dans un evn de dimension finie E et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ alors la série $\sum f(u_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n) = f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$
Par exemple : L'application $M \mapsto XM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc : $Xe^{-sX} = X\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-s)^p}{p!}X^p = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-s)^p}{p!}X^{p+1}$.

16c $e^{-s\varphi(X)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-s)^p}{p!}\varphi(X)^p$ et par linéarité de l'application $\Psi : L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \longmapsto L(Y)$ nous avons donc

$$\frac{\partial A}{\partial s}(s,0) = e^{-s\varphi(X)}(Y) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-s)^p}{p!}\varphi(X)^p(Y)$$

La fonction $s \longmapsto A(s,0)$ est la primitive de $s \longmapsto {}^{\partial A}/_{\partial s}(s,0)$ qui s'annule en 0 car ${}^{\partial u}/_{\partial s}(0,0) = s\,\mathrm{d}(\exp)_{sX}(Y)\big|_{s=0} = 0$. La série de fonction $\sum \frac{(-s)^p}{p!}\varphi(X)^p(Y)$ converge normalement sur tout compacte de $\mathbb{R}$, donc

$$A(s,0) = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^s \frac{(-x)^p}{p!}\varphi(X)^p(Y) = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-s)^{p+1}}{(p+1)!}\varphi(X)^p(Y)$$

16d En comparant l'expression de $A(1,0)$ obtenue en (16a.) et celle qu'on peut avoir à partir de (16c.) nous avons

$$\boxed{\mathrm{d}(exp)_X(Y) = e^X \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)!}\varphi(X)^p(Y)}$$

N.B. Rappelons que $\varphi(X)(Y) = XY - YX$. Donc si Y commute avec X alors $\varphi(X)^p(Y) = 0$ pour tout $p \geqslant 1$ et donc

$$\mathrm{d}(\exp)_X(Y) = e^X Y = Ye^X$$

Ainsi, si $C : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $C'(t)C(t) = C(t)C'(t)$ alors pour tout $t \in I$ alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{C(t)}) = \mathrm{d}(\exp)_{C(t)}(C'(t)) = C'(t)e^{C(t)}$$

À bon entendant.