Probabilités discrètes

Probabilités discrètes

Sadik Boujaida
CPGE Moulay Youssef

Last Updated: January 26, 2025

Table des matières

Chapitre 1

Espaces de probabilité

1.1 Objectifs d'apprentissage

À la fin de ce chapitre, vous devriez être capable de :

- de construire un modèle qui correspond à une expérience aléatoire ;
- calculer la probabilité d'un événement dans l'espace construit ;
- utiliser un modèle pour des calculs avancés

1.2 Tribus

Dans tout le chapitre Ω désignera un ensemble non vide.

Définition 1.2.1 On appelle tribu de Ω tout ensemble $\mathcal{T}$ de parties de Ω tel que :

- $\Omega \in \mathcal{T}$;
- si $A \in \mathcal{T}$ alors $A^c \in \mathcal{T}$;
- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ alors $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$;

Si $\mathcal{T}$ est une tribu de Ω alors le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ est dit un espace probabilisable. Tout élément de $\mathcal{T}$ est dit un événement de l'espace $(\Omega, \mathcal{T})$. $\lozenge$

Remarque 1.2.2 Si $\mathcal{T}$ est une tribu de Ω alors

- $\emptyset \in \mathcal{T}$;
- si $(A_n)_{\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ alors $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$.

Exemple 1.2.3

1. $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu de Ω. C'est la plus petite tribu de Ω.
2. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω. C'est la plus grande tribu de Ω.
3. Si A est une partie de Ω alors $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est une tribu de Ω. C'est la plus petite tribu de Ω contenant A.

$\square$

Proposition 1.2.4 *Si l'ensemble Ω est au plus dénombrable et $\mathcal{T}$ est une tribu de Ω alors*

$$\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega) \Longleftrightarrow \forall \omega \in \Omega,\ \{\omega\} \in \mathcal{T}$$

Proposition 1.2.5

1. *Si $(\mathcal{T}_i)_{i\in I}$ est une famille de tribus de Ω alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est une tribu de Ω.*
2. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de Ω. L'intersection de toutes les tribus de Ω contenant $\mathcal{A}$ est une tribu de Ω. Elle est appelée la tribu engendrée par $\mathcal{A}$. On la notera $\sigma(\mathcal{A})$.*

Définition 1.2.6 La tribu engendrée par l'ensemble des segments de $\mathbb{R}$ est appelée la tribu de Borel de $\mathbb{R}$. On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. ♢

Remarque 1.2.7 La tribu de Borel de $\mathbb{R}$ contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$. Comme tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union au plus dénombrable d'intervalles ouverts, la tribu de Borel de $\mathbb{R}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$. Elle contient donc aussi tous les fermés de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.2.8 *Soit $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ un ensemble au plus dénombrable de parties de Ω qui* forment une partition *de Ω. Alors*

$$\sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{i\in I'} A_i \mid I' \subset I \right\}$$

Démonstration. Posons $\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i\in I'} A_i \mid I' \subset I \right\}$ et montrons que $\mathcal{T}$ est une tribu de Ω.

- Comme $\Omega = \bigcup_{i\in I} A_i$ alors $\emptyset, \Omega \in \mathcal{T}$.
- Si $A = \bigcup_{i\in I'} A_i \in \mathcal{T}$ alors $A^c = \bigcup_{i\in I\setminus I'} A_i \in \mathcal{T}$.
- Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ et posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \bigcup_{i\in I_n} A_i$ alors

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{i\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n} A_i \in \mathcal{T}.$$

$\mathcal{T}$ est donc bien une tribu de Ω. Elle contient $\mathcal{A}$ et toute tribu qui contient tous les ensembles A_i contient tous les éléments de $\mathcal{T}$. C'est donc la plus petite tribu de Ω contenant $\mathcal{A}$. Soit $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{T}$. ■

Définition 1.2.9 (tribu induite). Soit $\mathcal{T}$ une tribu de Ω. Pour toute élément A de $\mathcal{T}$, l'ensemble

$$\mathcal{T}_A = \{A \cap B \mid B \in \mathcal{T}\}$$

est une tribu de A. On l'appelle la tribu induite par $\mathcal{T}$ sur A. ♢

1.3 Probabilités

Note 1.3.1 Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{T})$ désignera un espace probabilisable.

Définition 1.3.2 On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{T} \to [0,1]$ telle que :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

$\Diamond$

Remarque 1.3.3 Dans la définition précédente, on a utilisé la notation $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ pour désigner la somme de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ que celle-ci soit convergente ou non avec la convention que la somme d'une série divergente à termes positifs est $+\infty$. Ce qui pose évidemment un problème puisque $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ est sensé être dans l'intervalle $[0,1]$.

En fait avec les deux axiomes de la définition, la famille $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours sommable et sa somme est dans $[0,1]$. Voilà comment le justifier :

- En posant $A_n = \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le deuxième axiome aboutit à $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Si $A_0, A_2, \ldots, A_m$ sont des événements deux à deux disjoints en posant $A_n = \emptyset$ pour tout $n > m$, le deuxième axiome fournit

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{m} A_n\right) = \sum_{n=0}^{m} \mathbb{P}(A_n).$$

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_n\right) \leqslant 1$$

  La série à termes réels positifs $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est donc convergente et sa somme est dans $[0,1]$.

Proposition 1.3.4 *Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$. Alors :*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ *;*
2. $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ *pour tout* $A \in \mathcal{T}$ *;*
3. *Si* $A \subset B$ *alors* $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ *et* $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ *pour tout* $A, B \in \mathcal{T}$ *;*
4. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ *pour tout* $A, B \in \mathcal{T}$ *;*
5. $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ *pour toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{T}$.
6. $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i\in I}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i\in I}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ *si* $(A_i)_{i\in I}$ *est une famille au plus dénombrable de* $\mathcal{T}$ *deux à deux disjoints.*

Démonstration. Les propriétés 1, 2 et 3 sont des conséquences immédiates des axiomes de la définition de probabilité et de la remarque précédente.

1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ et posons $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus \left(\bigcup\limits_{k=0}^{n-1} A_k\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ avec $B_n \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a donc
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$
2. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux disjoints. Si I est fini alors c'est une conséquance de la remarque précédente. Si I est infini alors il existe une bijection σ entre $\mathbb{N}$ et I et il suffit de poser $B_n = A_{\sigma(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour conclure grâce au théorème de permutation des termes pour les familles sommables.

■

Théorème 1.3.5 (de continuité monotone).

1. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{T}$. Alors $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.*
2. *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{T}$. Alors $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.*

Démonstration.

1. On pose $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les événements B_n sont deux à deux disjoints et $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} B_n$. On a donc
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(B_n)\\ &= \mathbb{P}(A_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(\mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n-1})\big)\\ &= \mathbb{P}(A_0) + \lim \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_0)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$
2. On suppose que $(A_n)_n$ est décroissante. Alors $(A_n^c)_n$ est croissante et on peut ainsi écrire
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) &= 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\Big)\\ &= 1 - \lim \mathbb{P}(A_n^c)\\ &= \lim \mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.3.6 *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'éléments de $\mathcal{T}$. Alors*

1. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim \mathbb{P}\big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\big)$.

2. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \lim \mathbb{P}\big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\big)$.

Démonstration. Pour le premier point on pose $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.La suite $(B_n)_n$ et croissante et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. On applique alors la formule des probabilites continues.
Pour le second on pose $C_n = \bigcap_{k=0}^{n} A_k$. La suite $(C_n)_n$ est décroissante et on peut appliquer le théorème de continuité monotone sachant que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. ■

Définition 1.3.7 On appelle système complet d'événements (SCE) de $(\Omega, \mathcal{T})$ toute famille $(B_i)_{i\in I}$ au plus dénombrables d'éléments $\mathcal{T}$ qui forme une partition de Ω. ♢

Exemple 1.3.8 (exemples courants de SCE).

1. Pour tout événement A, (A, A^c) est un SCE de $(\Omega, \mathcal{T})$.
2. Si Ω est au plus dénombrable, alors $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ est un SCE de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
3. si X est une application définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et $X^{-1}\big(\{x\}\big) \in \mathcal{T}$ pour tout $x \in X(\Omega)$ alors $\big(X^{-1}\big(\{x\}\big)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est un SCE de $(\Omega, \mathcal{T})$.

□

Théorème 1.3.9 (Formule des probabilités totales). *Soit $(B_i)_{i\in I}$ un SCE de $(\Omega, \mathcal{T})$. Alors pour tout $A \in \mathcal{T}$, on a*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap B_i)$$

Remarque 1.3.10

1. Ce résultat reste valable si les événements B_i sont deux à deux disjoints, sans former une partition de Ω, à condition que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = 1$$

2. Cette formule est extrêmement utile. Elle stipule que si on sait calculer les probabilités des événements d'un SCE alors on peut calculer la probabilité de n'importe quel événement.

Exemple 1.3.11 (exemples génériques d'utilisation de la formule des probabilités totales).

1. si on fixe un événement B alors

$$\forall A \in \mathcal{T},\ \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

2. Si $B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$ sont des événements quelconques alors

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\Big) + \mathbb{P}\Big(\Big(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\Big) \cap B_{n+1}^c\Big)$$

3. Le théorème suivant donne une application importante de la formule des probabilités totales.

□

Théorème 1.3.12 *On suppose que* Ω *est au plus dénombrable et on le munit de la tribu* $\mathcal{P}(\Omega)$.

1. *Soit* $\mathbb{P}$ *une probabilité de* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. *Pour tout* $A \in \mathcal{T}$, *on a*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

   $\mathbb{P}$ *est entièrement détérminée par les probabilités des singletons* $\{\omega\}$.

2. *Soit* $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ *une famille de nombres réels positifs de somme* 1. *Alors il existe une unique probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $\mathcal{T}$ *telle que*

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$$

Remarque 1.3.13 Si Ω est au plus dénombrable alors pour toute famille sommable $x = (x_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de nombre réels positifs de somme $S > 0$, on peut définir une probabilté sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$ en posant

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}_x(A) = \frac{1}{S}\sum_{\omega\in A} x_\omega$$

Cette remarque peut avoir des applications analytiques intéressantes même dans des cas où la probabilité $\mathbb{P}_x$ ne correspond pas réellement à une expérience aléatoire.

1.4 Indépendance des événements

Note 1.4.1 Dans tout la suite, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé.

Définition 1.4.2

1. Deux événements A et B de $\mathcal{T}$ sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

2. Une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'événements de $\mathcal{T}$ est dite mutuellement indépendante (MI) si pour toute partie finie J de I,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

◊

Explication.

- *Indépendance de deux événements.*

  En partant du principe que l'événement A s'est réalisé, si B est «indépendant» de A alors la probabilité de réalisation de B ne doit pas être affectée par cette hypothèse. L'hypothèse en question revient à changer l'univers des résultats possible de l'expérience pour ne s'intersser qu'à ceux favorables à A. Dans ces conditions la probabilité pour qu'un événement \$B\$ se réalise se confond avec le quotient

- *Indépendance mutuelle.*

  Souvent dans la pratique l'indépendance mutuelle des événements est une indépendance «physique» postulée par l'énoncé du problème, dans le sens où les événements sont supposés ne pas s'influencer les uns les autres. La probabilité pour qu'un événement A_i se réalise au même temps que tous les événements d'indices dans une partie finie J de I qui ne contient pas i est donnée par :

$$\mathbb{P}\left(A_i \cap \left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)\right) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$$

■

Remarque 1.4.3

1. Si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$ alors tout événement B est indépendant de A.
2. deux événements incompatibles A et B ne peuvent être indépendants que si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(B) = 0$.
3. Si A et B sont indépendants alors A^c et B sont indépendants, A et B^c sont indépendants et A^c et B^c sont indépendants.
4. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille MI alors $(A_i)_{i\in I'}$ est MI pour toute partie I' de I. En particulier les événements A_i sont deux à deux indépendants.
5. Dans un SCE $(B_i)_{i\in I}$ les événements B_i ne peuvent être deux à deux indépendants, et a fortiori MI, que s'il existe $i_0 \in I$ tel que

$$\mathbb{P}(B_{i_0}) = 1 \text{ et } \forall i \neq i_0,\ \mathbb{P}(B_i) = 0.$$

Théorème 1.4.4 *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille MI d'événements de $\mathcal{T}$.*

1. *Soit I' une partie de I. On pose $B_i = A_i$ si $i \in I'$ et $B_i = A_i^c$ si $i \notin I'$. Alors la famille $(B_i)_{i\in I}$ est MI.*
2. *Lemme des coalitions.*

   Soit $(I_k)_{k\in K}$ une famille de parties deux à deux disjointes de I. On pose pour tout $k \in K$, $C_k = \bigcap_{i\in I_k} A_i$. Alors la famille $(C_k)_{k\in K}$ est MI.

1.5 Modélisation de phénomènes aléatoires

Pour modéliser une expérience aléatoire on se place dans un ensemble Ω qui contient tous les résultats possibles de l'expérience et on choisi une tribu de Ω dans laquelle on peut exprimer tous les «événements» qui nous intéressent. Il reste ensuite à définir une probabilité sur cette tribu qui rend compte de la fréquence de réalisation de ces événements.

On adopte alors le vocabulaire suivant :

- Ω est dit l'univers de l'expérience ;
- pour une instance de l'expérience, un évenement A se réalise si le résultat obtenu est dans A ;
- un événement A est dit presque sûr si $\mathbb{P}(A) = 1$ et négligeable si $\mathbb{P}(A) = 0$;

- deux événements A et B sont dits incompatibles si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$;

Exemple 1.5.1 (signification de certains événements courants). Soit $(A_n)_n$ une suite quelconque d'événements.

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est l'événement «au moins un des événements A_n se réalise» ;
- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est l'événement «tous les événements A_n se réalisent» ;
- $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right)$ est l'événement «les événements A_k se réalisent tous à partir d'un certain rang n pour pour au moins un indice n». La probabilité de cet événement est

$$\mathbb{P}(U) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k \right)$$

- $V = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$ est l'événement «l'événement A_n se réalise pour une infinité d'indices n». La probabilité de cet événement est

$$\mathbb{P}(V) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c \right) \right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{n+m} A_k^c \right)$$

□

Deux approches sont en fait possibles pour modéliser une expérience aléatoire :

1. Définir un espace $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ où Ω représente exactement l'ensemble des résultats possibles de l'expérience.
2. La précédente méthode risque d'être inadéquate si certains événements qui nous intéresse sont inexprimables dans la tribu considérée. C'est pour cela qu'en général on préfère se placer dans un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$ où Ω est beaucoup plus large et on modélise l'expérience non pas avec $(\Omega, \mathcal{T})$ mais avec une application X définie sur Ω qu'on appellera «variable aléatoire». L'avantage est qu'on peut combiner entre les résultats de différentes expériences aléatoires.

Remarque 1.5.2 Cas où l'univers est au plus dénombrable. Dans la pratique si l'ensemble Ω qui contient les résultats de l'expérience est au plus plus dénombrable alors on le munit de la tribu $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ de telle sorte que tout ensemble formé de résultats possibles de l'expérience soit un événement. Ce choix de tribu n'est pas adéquat lorsque l'ensemble des résultats est non dénombrable car cela pose des difficultés insurmontables pour définir une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exemple 1.5.3 Lancer un dé. On lance un dé à 6 faces. On peut modéliser cette expérience par $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. On peut définir une probabilité sur $\mathcal{T}$ en posant $\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in \Omega$. □

Exemple 1.5.4 Lancer deux dés. On lance deux dés à 6 faces. On peut modéliser cette expérience par $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. On peut définir une probabilité sur $\mathcal{T}$ en posant $\mathbb{P}(\{(i, j)\}) = \frac{1}{36}$ pour tout $(i, j) \in \Omega$.

Si on s'intéresse à l'événement A : «la somme des résultats est paire», on peut créer un espace spécifique sous la forme $(\Omega = \{0, 1\}, \mathcal{P}(\Omega))$ et y adjoindre la probabilité adéquate ou bien on peut rester dans l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ et définir la variable aléatoire X sur Ω en posant $X(i, j) = i+j$ pour tout $(i, j) \in \Omega$. On peut alors exprimer l'événement A par

$$A = \{(i, j) \in \Omega \mid X(i, j) \text{ est paire}\}$$

□

Exemple 1.5.5 Suite de lancers d'une pièce de monnaie. On lance indéfiniment une piece de monnaie. Si on ne s'intéresse qu'au numéro du premier lancer qui donne «face» alors peut modéliser cette expérience par $\Omega = \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. On peut définir une probabilité sur $\mathcal{T}$ en posant $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Mais dans ce cas les événements «obtenir trois face successivement au moins une fois» ou «obtenir face une infinité de fois» ne peuvent être exprimés dans $\mathcal{T}$.

On peut alors se placer dans l'espace beaucoup plus vaste $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Le résultat de chaque séquence infinie de lancers est modélisé par une suite de zéros et de uns. C'est un ensemble non dénombrable et y définir une tribu sur laquelle on doit ensuite définir une probabilité est non aisé. L'approche peut être la suivante : on identifie une famille d'événements élémentaires avec lesquels on peut construire d'autre événements plus complexes et qui couvrent nos besoins et on n'aura qu'à se placer dans la tribu engendrée par ces événements élémentaires.

Par exemple, on peut considérer pour tout $n \in N^*$ l'événement E_n : «le n^{e} lancer donne face», ou encore

$$E_n = \{(\omega_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mid \omega_n = 1\}$$

On peut alors exprimer

- l'événement «le premier face apparaît au n^{e} lancer» par

$$A_n = E_1^c \cap \cdots E_{n-1}^c \cap E_n$$

- l'événement «obtenir trois face successivement au moins une fois» par

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big(E_n \cap E_{n+1} \cap E_{n+3}\big)$$

- et l'événement «obtenir face une infinité de fois» par

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big(\bigcup_{k\geqslant n} E_k\Big).$$

□

Chapitre 2

Variables aléatoires discrètes

Colophon

Ce cours a été crée avec PreTeXt.