بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

رساله‌ی

ارسال‌شده به عنوان بخشی از ملزومات دریافت درجه‌ی

دکتری در رشته‌ی **ریاضی**

محاسبه پایه‌ی گروبنر

استادان راهنما

امیدعلی شهنی کرم‌زاده و مریم داودیان

استاد مشاور

مهرداد نامداری

پژوهشگر

امید غیور

یکشنبه ۱۷ اسفند ۱۳۹۳

مشخصات دانشجو

نام خانوادگی: غیور　　　　　　　　نام: امید

مشخصات پایان‌نامه:

عنوان:

محاسبه پایه‌ی گروبنر

استادان راهنما: امیدعلی شهنی کرم‌زاده و مریم داودیان

استاد مشاور: مهرداد نامداری

مقطع تحصیلی: دکتری

رشته: ریاضی　　　　　　　　گرایش: جبرجابجایی

دانشگاه: دانشگاه شهید چمران اهواز　　　　　　　　دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۶　　　　　　　　تعداد صفحات: هشت+۱۸

طبقه‌بندی موضوعی ریاضیات (۲۰۱۰): اولیه ۱۳پ۱۰؛ ثانویه ۶۸ئو۳۰ و ۱۶ز۰۵.

واژگان کلیدی: حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی یک میدان، ایده‌آل‌ها، بعد نوتری، مدول‌های آرتینی، چندجمله‌ای‌وارها، و طول

چکیده: این پایان‌نامه، به بحث در مورد محاسبه و محاسبه پذیری و پیاده سازی الگوریتم‌های محاسباتی برای ایدآل‌های چندجمله‌ای‌ها بر روی یک میدان و مدول‌های روی حلقه‌های جابجایی پرداخته‌ایم.

فهرست مطالب

چکیده **سه**

سپاسگزاری **هفت**

۰ پیش‌گفتار **۱**
۱.۰ مقدماتی ۱

۱ صفرگاه **۳**
۱.۱ قضیه‌ی صفرگاه هیلبرت ۳

۲ کرول **۵**
۱.۲ بعد کرول ۵

۳ بنیاد **۷**
۱.۳ بنیادها ۷

۴ گرویبنر **۹**
۱.۴ پایه‌های گرویبنر ۹

۵ دیکسون **۱۱**
۱.۵ لم دیکسون ۱۱

۶ مدول‌های نوتری **۱۳**
۱.۶ طول زنجیرها ۱۳

مراجع **۱۵**

سپاسگزاری

تنها خدای را شایسته‌ی سپاس می‌دانم.

از همه‌ی کسانی که با نظراتشان، مرا به اینجا رساندند، بابت هرچه که مرا مدیون سپاسگزاری از آن‌ها می‌نماید، سپاسگزارم.

اما در پایان می‌خواهم از سرکار خانم خورشیدی تشکر کنم که محبت‌هایشان در موارد فوق نمی‌گنجد!

$\dot{\alpha}\gamma\epsilon\omega\mu\acute{\epsilon}\tau\rho\eta\tau o\varsigma\ \mu\eta\delta\epsilon\grave{\iota}\varsigma\ \epsilon\grave{\iota}\sigma\acute{\iota}\tau\omega$

هر کس که هندسه نمی‌داند وارد نشود

— افلاطون(نوشته‌ی بالای درب آکادمیا)

پیش‌گفتار

در حوزه جبرجابجایی محاسباتی، گاهی نیاز است که ادبیات جبری خود را با اصطلاحات برنامه‌نویسی بازآرایی کنیم.

۱.۰ مقدماتی

تعریف ۱.۱.۰. فرض کنیم $n \geq ۱$.

۱. یک چندجمله‌ای چون $f \in R[x_۱, \ldots, x_n]$ که بصورت $f = x_۱^{\alpha_۱} \ldots x_n^{\alpha_n}$ باشد، که در آن $(\alpha_۱, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ باشد، را یک **جمله** یا **مضرب توانی** گوییم و مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های $R[x_۱, \ldots, x_n]$ با $\mathbb{T}^n$ یا $\mathbb{T}(x_۱, \ldots, x_n)$ نمایش داده می‌شود.

۲. برای جمله‌ای چون $t = x_۱^{\alpha_۱} \ldots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{T}^n$، عدد $\deg(t) = \alpha_۱ + \cdots + \alpha_n$ را **درجه‌ی** t می‌نامند.

۳. نگاشت $\log : \mathbb{T}^n \to \mathbf{N}^n$ را که با $x_۱^{\alpha_۱} \ldots x_n^{\alpha_n} \mapsto (\alpha_۱, \ldots, \alpha_n)$ تعریف می‌شود را **لگاریتم** می‌نامیم.

۴. اگر $r \geq ۱$ و $M = (R[x_۱, \ldots, x_n])^r$، همان $R[x_۱, \ldots, x_n]$–مدول تولید شده توسط پایه‌ی کانونی $\{e_۱, \ldots, e_r\}$ باشد، آن‌گاه یک **جمله** از M، یک عنصر به‌شکل te_i است، که $t \in \mathbb{T}^n$ و $e_i \in \{e_۱, \ldots, e_r\}$. مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های M را با $\mathbb{T}^n\langle e_۱, \ldots, e_r\rangle$ یا با $\mathbb{T}^n[x_۱, \ldots, x_n]\langle e_۱, \ldots, e_r\rangle$ (و گاهی هم اگر خطر سوءبرداشت پیش‌نیاید با $\mathbb{T}^{n,r}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۰. برای $n \geq ۱$، فرض کنید $f = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} c_\alpha t_\alpha \in R[x_۱, \ldots, x_n]$ یک چندجمله‌ای باشد، و $m = \sum_{i=۱}^{r} \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^n} c_{\alpha,i} t_\alpha e_i \in M = (R[x_۱, \ldots, x_n])^r$.

۱. برای هر $\alpha \in \mathbf{N}^n$ و $۱ \leq i \leq r$، $c_{\alpha,i}$ را **ضریب** جمله‌ی $t_\alpha e_i$ در m گوییم.

۲. مجموعه‌ی $\{t_\alpha e_i \in \mathbb{T}^{n,r} = \mathbb{T}^n\langle e_۱, \ldots, e_r\rangle \mid c_{\alpha,i} \neq ۰\}$ را **پشتیبان** m گویند و با $\mathrm{Supp}(m)$ نشان می‌دهند.

۳. اگر $f \neq ۰$، عدد $\max\{\deg(t_\alpha) \mid t_\alpha \in \mathrm{Supp}(f)\}$ را **درجه‌ی** f خوانیم و آن‌را با $\deg(f)$ نشان می‌دهیم.

۱

صفرگاه

در این فصل برای آغاز به یادگیری عملی کد نویسی در حوزه جبرجابجایی محاسباتی، گاهی نیاز است که ادبیات جبری خود را با اصطلاحات برنامه‌نویسی بازآرایی کنیم.

۱.۱ قضیه‌ی صفرگاه هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم $n \geq 1$.

۱. یک چندجمله‌ای چون $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ که بصورت $f = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ باشد، که در آن $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ باشد، را یک **جمله** یا **مضرب توانی** گوییم و مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های $R[x_1, \ldots, x_n]$ با $\mathbb{T}^n$ یا $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$ نمایش داده می‌شود.

۲. برای جمله‌ای چون $t = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{T}^n$، عدد $\deg(t) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ را **درجه‌ی** t می‌نامند.

۳. نگاشت $\log : \mathbb{T}^n \to \mathbf{N}^n$ را که با $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ تعریف می‌شود را **لگاریتم** می‌نامیم.

۴. اگر $r \geq 1$ و $M = (R[x_1, \ldots, x_n])^r$، همان $R[x_1, \ldots, x_n]$ـ مدول تولید شده توسط پایه‌ی کانونی $\{e_1, \ldots, e_r\}$ باشد، آنگاه یک **جمله** از M، یک عنصر به‌شکل te_i است، که $t \in \mathbb{T}^n$ و $e_i \in \{e_1, \ldots, e_r\}$. مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های M را با $\mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ یا با $\mathbb{T}^n[x_1, \ldots, x_n]\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ (و گاهی هم اگر خطر سوءبرداشت پیش‌نیاید با $\mathbb{T}^{n,r}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. برای $n \geq 1$، فرض کنید $f = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_\alpha t_\alpha \in R[x_1, \ldots, x_n]$ یک چندجمله‌ای باشد، و $m = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_{\alpha,i} t_\alpha e_i \in M = (R[x_1, \ldots, x_n])^r$.

۱. برای هر $\alpha \in \mathbf{N}^n$ و $1 \leq i \leq r$، $c_{\alpha,i}$ را **ضریب** جمله‌ی $t_\alpha e_i$ در m گوییم.

۲. مجموعه‌ی $\{t_\alpha e_i \in \mathbb{T}^{n,r} = \mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle \mid c_{\alpha,i} \neq 0\}$ را **پشتیبان** m گویند و با $\mathrm{Supp}(m)$ نشان می‌دهند.

۳. اگر $f \neq 0$، عدد $\max\{\deg(t_\alpha) \mid t_\alpha \in \mathrm{Supp}(f)\}$ را **درجه‌ی** f خوانیم و آن‌را با $\deg(f)$ نشان می‌دهیم.

۲
کرول

در این فصل برای آغاز به یادگیری عملی کد نویسی در حوزه جبرجابجایی محاسباتی، گاهی نیاز است که ادبیات جبری خود را با اصطلاحات برنامه‌نویسی بازآرایی کنیم.

۱.۲ بعد کرول

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم $n \geq 1$.

۱. یک چندجمله‌ای چون $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ که بصورت $f = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ باشد، که در آن $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ باشد، را یک **جمله** یا **مضرب توانی** گوییم و مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های $R[x_1, \ldots, x_n]$ با $\mathbb{T}^n$ یا $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$ نمایش داده می‌شود.

۲. برای جمله‌ای چون $t = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{T}^n$، عدد $\deg(t) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ را **درجه‌ی** t می‌نامند.

۳. نگاشت $\log : \mathbb{T}^n \to \mathbf{N}^n$ را که با $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ تعریف می‌شود را **لگاریتم** می‌نامیم.

۴. اگر $r \geq 1$ و $M = (R[x_1, \ldots, x_n])^r$، همان $R[x_1, \ldots, x_n]$ـ‌مدول تولید شده توسط پایه‌ی کانونی $\{e_1, \ldots, e_r\}$ باشد، آنگاه یک **جمله** از M، یک عنصر به‌شکل te_i است، که $t \in \mathbb{T}^n$ و $e_i \in \{e_1, \ldots, e_r\}$. مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های M را با $\mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ یا با $\mathbb{T}^n[x_1, \ldots, x_n]\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ (و گاهی هم اگر خطر سوءبرداشت پیش‌نیاید با $\mathbb{T}^{n,r}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۲. برای $n \geq 1$، فرض کنید $f = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_\alpha t_\alpha \in R[x_1, \ldots, x_n]$ یک چندجمله‌ای باشد، و $m = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_{\alpha,i} t_\alpha e_i \in M = (R[x_1, \ldots, x_n])^r$.

۱. برای هر $\alpha \in \mathbf{N}^n$ و r $1 \leq i \leq r$، $c_{\alpha,i}$ را **ضریب** جمله‌ی $t_\alpha e_i$ در m گوییم.

۲. مجموعه‌ی $\{t_\alpha e_i \in \mathbb{T}^{n,r} = \mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle \mid c_{\alpha,i} \neq 0\}$ را **پشتیبان** m گویند و با $\mathrm{Supp}(m)$ نشان می‌دهند.

۳. اگر $f \neq 0$، عدد $\max\{\deg(t_\alpha) \mid t_\alpha \in \mathrm{Supp}(f)\}$ را **درجه‌ی** f خوانیم و آن‌را با $\deg(f)$ نشان می‌دهیم.

۳

بنیاد

در این فصل برای آغاز به یادگیری عملی کد نویسی در حوزه جبرجابجایی محاسباتی، گاهی نیاز است که ادبیات جبری خود را با اصطلاحات برنامه‌نویسی بازآرایی کنیم.

۱.۳ بنیادها

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم $n \geq 1$.

۱. یک چندجمله‌ای چون $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ که بصورت $f = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ باشد، که در آن $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ باشد، را یک **جمله** یا **مضرب توانی** گوییم و مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های $R[x_1, \ldots, x_n]$ با $\mathbb{T}^n$ یا $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$ نمایش داده می‌شود.

۲. برای جمله‌ای چون $t = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{T}^n$، عدد $\deg(t) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ را **درجه‌ی** t می‌نامند.

۳. نگاشت $\log : \mathbb{T}^n \to \mathbf{N}^n$ را که با $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ تعریف می‌شود را **لگاریتم** می‌نامیم.

۴. اگر $r \geq 1$ و $M = (R[x_1, \ldots, x_n])^r$، همان $R[x_1, \ldots, x_n]$ــمدول تولید شده توسط پایه‌ی کانونی $\{e_1, \ldots, e_r\}$ باشد، آنگاه یک **جمله** از M، یک عنصر به‌شکل te_i است، که $t \in \mathbb{T}^n$ و $e_i \in \{e_1, \ldots, e_r\}$. مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های M را با $\mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ یا با $\mathbb{T}^n[x_1, \ldots, x_n]\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ (و گاهی هم اگر خطر سوءبرداشت پیش‌نیاید با $\mathbb{T}^{n,r}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۳. برای $n \geq 1$، فرض کنید $f = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_\alpha t_\alpha \in R[x_1, \ldots, x_n]$ یک چندجمله‌ای باشد، و $m = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_{\alpha,i} t_\alpha e_i \in M = (R[x_1, \ldots, x_n])^r$.

۱. برای هر $\alpha \in \mathbf{N}^n$ و $1 \leq i \leq r$، $c_{\alpha,i}$ را **ضریب** جمله‌ی $t_\alpha e_i$ در m گوییم.

۲. مجموعه‌ی $\{t_\alpha e_i \in \mathbb{T}^{n,r} = \mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle \mid c_{\alpha,i} \neq 0\}$ را **پشتیبان** m گویند و با $\mathrm{Supp}(m)$ نشان می‌دهند.

۳. اگر $f \neq 0$، عدد $\max\{\deg(t_\alpha) \mid t_\alpha \in \mathrm{Supp}(f)\}$ را **درجه‌ی** f خوانیم و آن‌را با $\deg(f)$ نشان می‌دهیم.

۴

گروبنر

در این فصل برای آغاز به یادگیری عملی کد نویسی در حوزه جبرجابجایی محاسباتی، گاهی نیاز است که ادبیات جبری خود را با اصطلاحات برنامه‌نویسی بازآرایی کنیم.

۱.۴ پایه‌های گروبنر

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنیم $n \geq 1$.

۱. یک چندجمله‌ای چون $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ که بصورت $f = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ باشد، که در آن $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ باشد، را یک **جمله** یا **مضرب توانی** گوییم و مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های $R[x_1, \ldots, x_n]$ با $\mathbb{T}^n$ یا $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$ نمایش داده می‌شود.

۲. برای جمله‌ای چون $t = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{T}^n$، عدد $\deg(t) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ را **درجه‌ی** t می‌نامند.

۳. نگاشت $\log : \mathbb{T}^n \to \mathbf{N}^n$ را که با $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ تعریف می‌شود را **لگاریتم** می‌نامیم.

۴. اگر $r \geq 1$ و $M = (R[x_1, \ldots, x_n])^r$، همان $R[x_1, \ldots, x_n]$ـ‌مدول تولید شده توسط پایه‌ی کانونی $\{e_1, \ldots, e_r\}$ باشد، آنگاه یک **جمله** از M، یک عنصر به‌شکل te_i است، که $t \in \mathbb{T}^n$ و $e_i \in \{e_1, \ldots, e_r\}$. مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های M را با $\mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ یا با $\mathbb{T}^n[x_1, \ldots, x_n]\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ (و گاهی هم اگر خطر سوءبرداشت پیش‌نیاید با $\mathbb{T}^{n,r}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۴. برای $n \geq 1$، فرض کنید $f = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_\alpha t_\alpha \in R[x_1, \ldots, x_n]$ یک چندجمله‌ای باشد، و $m = \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_{\alpha,i} t_\alpha e_i \in M = (R[x_1, \ldots, x_n])^r$.

۱. برای هر $\alpha \in \mathbf{N}^n$ و $1 \leq i \leq r$، $c_{\alpha,i}$ را **ضریب** جمله‌ی $t_\alpha e_i$ در m گوییم.

۲. مجموعه‌ی $\{t_\alpha e_i \in \mathbb{T}^{n,r} = \mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle \mid c_{\alpha,i} \neq 0\}$ را **پشتیبان** m گویند و با $\mathrm{Supp}(m)$ نشان می‌دهند.

۳. اگر $f \neq 0$، عدد $\max\{\deg(t_\alpha) \mid t_\alpha \in \mathrm{Supp}(f)\}$ را **درجه‌ی** f خوانیم و آن‌را با $\deg(f)$ نشان می‌دهیم.

۵

دیکسون

در این فصل برای آغاز به یادگیری عملی کد نویسی در حوزه جبرجابجایی محاسباتی، گاهی نیاز است که ادبیات جبری خود را با اصطلاحات برنامه‌نویسی بازآرایی کنیم.

۱.۵ لم دیکسون

تعریف ۱.۱.۵. فرض کنیم $n \geq 1$.

۱. یک چندجمله‌ای چون $f \in R[x_1, \ldots, x_n]$ که بصورت $f = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ باشد، که در آن $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ باشد، را یک **جمله** یا **مضرب توانی** گوییم و مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های $R[x_1, \ldots, x_n]$ با $\mathbb{T}^n$ یا $\mathbb{T}(x_1, \ldots, x_n)$ نمایش داده می‌شود.

۲. برای جمله‌ای چون $t = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{T}^n$، عدد $\deg(t) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ را **درجه‌ی** t می‌نامند.

۳. نگاشت $\log : \mathbb{T}^n \to \mathbf{N}^n$ را که با $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ تعریف می‌شود را **لگاریتم** می‌نامیم.

۴. اگر $r \geq 1$ و $M = (R[x_1, \ldots, x_n])^r$، همان $R[x_1, \ldots, x_n]$ـ‌مدول تولید شده توسط پایه‌ی کانونی $\{e_1, \ldots, e_r\}$ باشد، آنگاه یک **جمله** از M، یک عنصر به‌شکل te_i است، که $t \in \mathbb{T}^n$ و $e_i \in \{e_1, \ldots, e_r\}$. مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های M را با $\mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ یا با $\mathbb{T}^n[x_1, \ldots, x_n]\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$ (و گاهی هم اگر خطر سوءبرداشت پیش‌نیاید با $\mathbb{T}^{n,r}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۵. برای $n \geq 1$، فرض کنید $f = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_\alpha t_\alpha \in R[x_1, \ldots, x_n]$ یک چندجمله‌ای باشد، و $m = \sum_{i=1}^r \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_{\alpha,i} t_\alpha e_i \in M = (R[x_1, \ldots, x_n])^r$.

۱. برای هر $\alpha \in \mathbf{N}^n$ و $1 \leq i \leq r$، $c_{\alpha,i}$ را **ضریب** جمله‌ی $t_\alpha e_i$ در m گوییم.

۲. مجموعه‌ی $\{t_\alpha e_i \in \mathbb{T}^{n,r} = \mathbb{T}^n\langle e_1, \ldots, e_r\rangle \mid c_{\alpha,i} \neq 0\}$ را **پشتیبان** m گویند و با $\mathrm{Supp}(m)$ نشان می‌دهند.

۳. اگر $f \neq 0$، عدد $\max\{\deg(t_\alpha) \mid t_\alpha \in \mathrm{Supp}(f)\}$ را **درجه‌ی** f خوانیم و آن‌را با $\deg(f)$ نشان می‌دهیم.

۶

مدول‌های نوتری

در این فصل برای آغاز به یادگیری عملی کد نویسی در حوزه جبرجابجایی محاسباتی، گاهی نیاز است که ادبیات جبری خود را با اصطلاحات برنامه‌نویسی بازآرایی کنیم.

۱.۶ طول زنجیرها

تعریف ۱.۱.۶. فرض کنیم $n \geq 1$.

۱. یک چندجمله‌ای چون $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ که بصورت $f = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ باشد، که در آن $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ باشد، را یک **جمله** یا **مضرب توانی** گوییم و مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های $R[x_1, \dots, x_n]$ با $\mathbb{T}^n$ یا $\mathbb{T}(x_1, \dots, x_n)$ نمایش داده می‌شود.

۲. برای جمله‌ای چون $t = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{T}^n$، عدد $\deg(t) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ را **درجه‌ی** t می‌نامند.

۳. نگاشت $\log : \mathbb{T}^n \to \mathbf{N}^n$ را که با $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \mapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ تعریف می‌شود را **لگاریتم** می‌نامیم.

۴. اگر $r \geq 1$ و $M = (R[x_1, \dots, x_n])^r$، همان $R[x_1, \dots, x_n]$ـ مدول تولید شده توسط پایه‌ی کانونی $\{e_1, \dots, e_r\}$ باشد، آنگاه یک **جمله** از M، یک عنصر به‌شکل te_i است، که $t \in \mathbb{T}^n$ و $e_i \in \{e_1, \dots, e_r\}$. مجموعه‌ی همه‌ی جمله‌های M را با $\mathbb{T}^n\langle e_1, \dots, e_r\rangle$ یا با $\mathbb{T}^n[x_1, \dots, x_n]\langle e_1, \dots, e_r\rangle$ (و گاهی هم اگر خطر سوءبرداشت پیش‌نیاید با $\mathbb{T}^{n,r}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۶. برای $n \geq 1$، فرض کنید $f = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_\alpha t_\alpha \in R[x_1, \dots, x_n]$ یک چندجمله‌ای باشد، و $m = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} c_{\alpha,i} t_\alpha e_i \in M = (R[x_1, \dots, x_n])^r$.

۱. برای هر $\alpha \in \mathbf{N}^n$ و $1 \leq i \leq r$، $c_{\alpha,i}$ را **ضریب** جمله‌ی $t_\alpha e_i$ در m گوییم.

۲. مجموعه‌ی $\{t_\alpha e_i \in \mathbb{T}^{n,r} = \mathbb{T}^n\langle e_1, \dots, e_r\rangle \mid c_{\alpha,i} \neq 0\}$ را **پشتیبان** m گویند و با $\mathrm{Supp}(m)$ نشان می‌دهند.

۳. اگر $f \neq 0$، عدد $\max\{\deg(t_\alpha) \mid t_\alpha \in \mathrm{Supp}(f)\}$ را **درجه‌ی** f خوانیم و آن‌را با $\deg(f)$ نشان می‌دهیم.

مراجع

[1] Albu, T., Rizvi, S. (2001). Chain conditions on quotient finite dimensional mod- ules.Comm. Algebra 29 (5): 1909-1928

[2] Albu, T., and Smith, P. F., *Localization of modular lattices, Krull dimension, and the Hopkins-Levitzki Theorem (I)*, Math. Proc Cambridge Philos Soc. 120 (1996), 87-101.

[3] Albu, T., and Smith, P. F., *Localization of modular lattices, Krull dimension, and the Hopkins-Levitzki Theorem (II)*, Comm. Algebra 25 (1997), 1111-1128.

[4] Albu, T., and Smith, P.F., *Dual Krull dimension and duality*, Rocky Mountain J.Math. 29 (1999), 1153-1165.

[5] Albu, T., and Teply, L., *Generalized deviation of posets and modular lattices*, Discrete Math. 214 (2000), 1-19.

[6] Albu, T., and Vamos, P., *Global Krull dimension and global dual Krull dimension of valuation rings*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Vol 201 (1998), 37-54.

[7] Anderson, F.W., and Fuller, K.R., *Rings and categories of modules*, Springer-Verlag, 1992.

[8] Armendariz, P., *Rings with an almost Noetherian ring of fractions*, Math. Scand. 41 (1977), 15-18

[9] Atiyah, M., MacDonald, I.G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, London, 1969.

[10] Bass, H., *Descending chains and the Krull ordinal of commutative rings*, J. Pure Appl. Algebra 1: 347–360.

[11] Bilhan, G., and Gungoroglu, T., *w-coatomic modules*, Cank. Uni. J. Eng. 7(2010),No1. 17-24.

[12] Bilhan, G., and Hatipoglu, C., *Finitely coatomic modules*, Hacet. J. Math. Stat. 36(2007), 37-41.

[13] Bilhan, G., and Smith, P.F., *Short modules and almost Noetherian modules*, Math. Scand. 98 (2006), 12-18.

[14] Camillo, V. P., and Zelmanowitz, J., *On the dimension of a sum of modules*, Comm. Algebra, 6(1978), no 4, 345-352.

[15] Chambless, L., *N-Dimension and N-critical modules, Application to Artinian modules*, Comm. Algebra 8 (1980), 1561-1592.

[16] Cohen, I., *Commutative rings with restricted minimum condition*, Duke Math. J. 17 (1950), 27-42.

[17] Croisot, R., Lesieur, L., *Sur les anneaux premier a gauch*, Ann. sci. E'col. Norm. sup, 79(1959), 161-183.

[18] Dauns, J., Fuchs, L., *Infinite Goldie dimension*, J. Algebra, 115, (1983), 247-302.

[19] Davoudian, M., Karamzadeh, O. A. S., *Artinian serial modules over commu- tative (or left Noetherian) rings are at most one step away from being Noetherian.* Comm. Algebra, to appear.

[20] Davoudian, M., Karamzadeh, O. A. S., Shirali, N., *On α-short modules*, to appear.

[21] Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F., and Wisbauer, R., *Extending Modules*, Longman, Harlow, 1990.

[22] Fuchs, L., *Torsion preradical and ascending Loewy series of modules*, J. Reine und Angew. Math. 239 (1970), 169-179.

[23] Goldie, A.W., *The structure of prime rings under ascending chain conditions*, Proc. London Math. soc. VIII(1958), 589-608.

[24] Goodearl, K.R., *Von Neumann ergular rings*, Pitman, san, Francisco, 1979.

[25] Goodearl, K.R., Warfield, JR. R. B., *An Introduction to Noncommutative Noetherian rings*, Cambridge University Press, 1989.

Goodearl, K. R., Zimmermann-Huisgen, B. (1986). Lengths of submodule chain versus Krull dimension in Non-Noetherian modules. Math. Z. 191: 519-527.

Gordon, R. (1974). Gabriel and Krull dimension, in : Ring Theory (Proceeding of the Oklahoma Conference), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Vol. 7: Dekker, NewYork pp. 241-295.

[26] Gordon. R., and Robson, J.C., *Krull dimension*, Mem. Amer. Math. Soc. 133, 1973.

[27] Gungoroglu, G. *Coatomic modules*, Far East J. Math. Sci. Special Volume (1998), part II, 153-162

[28] Hashemi, J., Karamzadeh, O.A.S., and Shirali, N., *Rings over which the Krull dimension and the Noetherian dimension of all modules coincide*, Comm. Algebra 37 (2009), 650-662.

[29] Hein, J., *Almost Artinian modules*, Math. Scand. (1979) 198-204.

[30] Hirano, Y., *On rings over which each modules has a maximal submodule*, Comm. Algebra 26 (1998), 3435-3445.

[31] Karamzadeh, O.A.S., *Noetherian-dimension*, Ph.D. thesis, Exeter, 1974.

Karamzadeh, O.A.S. (1982) When are Artinian modules countable generated? Bull. Iran. Math. Soc., 9, 171-176. [14

[32] Karamzadeh, O.A.S., and Sajedinejad, A.R., *Atomic modules*, Comm. Algebra 2001, 29 (7), 2757-2773.

[33] Karamzadeh, O.A.S., and Sajedinejad, A.R., *On the Loewy length and the Noetherian dimension of Artinian modules*, Comm. Algebra 30 (2002), 1077-1084.

[34] Karamzadeh, O.A.S., and Shirali, N., *On the countablity of Noetherian dimension of Modules*, Comm. Algebra 32 (2004), 4073-4083.

[35] Karamzadeh, O.A.S., and Motamedi, M., *On α-$DICC$ modules*, Comm. Algebra 22 (1994), 1933-1944.

[36] Karamzadeh, O.A.S., and Motamedi, M., *a-Noetherian and Artinian modules*, Comm. Algebra 23 (1995), 3685-3703.

[37] Kasch, F., *Modules and Rings*, London Mathematical Society Monographs, Vol. 17, Academic press, London 1982.

[38] Kirby, D., *Dimension and length for Artinian modules*, Quart. J. Math. Oxford. 41 (1990), 419-429.

[39] Krause, G., *On fully left bounded left Noetherian rings*, J. Algebra 23 (1972), 88-99.

Krause, G. (1973). Descending chains of submodules and the Krull dimension of Noetherian modules. J. Pure Appl. Algebra 3: 385-397.

[40] Lemonnier, B., *Déviation des ensembles et groupes abéliens totalement ordonnés*, Bull. Sc. Math. 96 (1972), 289–303.

[41] Lemonnier, B., *Dimension de Krull et codeviation, Application au theorem d'Eakin*, Comm. Algebra 1978, 6, 1647-1665.

[42] Matlis, E., *Modules with descending chain condition*, Trans. Amer. Math. Soc. 98(1960) 459-508.

[43] Matlis, E., *Some properties of Noetherian domains of dimension one*, Canad. J. Math. 13 (1961) 569-586.

[44] McConell, J.C., and Robson, J.C., *Noncommutative Noetherian Rings*, Wiley-Interscience, New York, 1987.

[45] Puczylowsky, E.R., *On the uniform dimension of the radical of a module*, Comm. Algebra 1995, 23(2), 771-776.

[46] Rentschler, P., and Gabriel, P., *Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés*, C. R. Acad. Sci. Paris 265 (1967), 712-715.

[47] Roberts, R.N., *Krull-dimension for Artinian Modules over quasi local commutative Rings*, Quart. J. Math. Oxford. 26(1975), 269-273.

[48] Sarath, B., *Krull dimension and Noetherianess*, Illinois J. Math., 20(1976), 329-335.

[49] Sharp, R.Y., *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press, 1990.

[50] Sharp, R.Y., *A method for the study of Artinian modules with an application to asymptotic behavior*, Proceeding of micr-program(Commutative Algebra), Springer-Verlag, (1989), 443-464.

[51] Valle, A., *Goldie dimension of a sum of modules*, Comm. Algebra 1994, 22(4), 1257-1269.

[52] Vamos, P., *The dual of the notion of finitely generated*, J. London. Math. Soc, 43(1968), 643-646.

[53] Weakley, W. D., *Modules whose proper submodules are finitely generated*, J. Algebra, 84(1983), 189-219.

Wisbauer, R. Foundations of module and ring theory. Gordon and Breach, Philadel- phia, 1991.

Personal Information:

Surname: Ghayour Name: Omid

Computation of Grobner Basis

Supervisors:
Omid-Ali Shahny Karamzadeh and Maryam Davoodian

Advisor: Mehrdad Namdari

Degree: **Doctor of Philosophy**
Subject: Mathematics Field: Commutative Algebra

University: **Shahid Chamran University**
Faculty of Mathematics and Computer Sciences
Date of Graduation: **2017** Number of Pages: 18 +

2010 *Math Subject Classification:* Primary 13P10; Secondary 68W30 and 16Z05.
Keywords and Phrases: Ring of Polynomials over a Field, Ideals, Noetherian dimension, Artinian Modules, Polynomoids, & Length

Abstract: In this work we studied on comptation, computability, and implimentation of computational algorithms for ideals of polynomials over a field and commutative modules.

دانشگاه شهید چمران اهواز

Computation of Grobner Basis

By
Omid Ghayour

The Dissertation
submitted as a partial fulfilment of the requirements for the degree of
Doctor of Philosophy in **Mathematics**

Supervisors:
Omid-Ali Shahny Karamzadeh and Maryam Davoodian

Advisor:
Mehrdad Namdari

Shahid Chamran University
Faculty of Mathematics and Computer Sciences
Department of Mathematics

Sunday, March 8, 2015