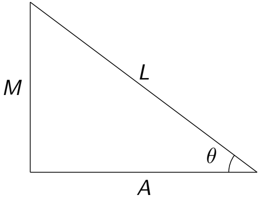
Rúmfræði

Bergur Snorrason

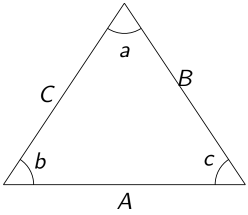
3. apríl 2021

Hornaföll

- Þessi glæra ætti að vera upprifjun fyrir flest ykkar.
- Þríhyrningur er sagður rétthyrndur ef eitt horna hans er 90°.
- Fyrir rétthyrnda þríhyrninga gildir:
  - $\dfrac{A}{L} = \cos\theta$.
  - $\dfrac{M}{L} = \sin\theta$.
  - $\dfrac{M}{A} = \dfrac{M}{L}\dfrac{L}{A} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$.
- Einnig gildir regla Pýthagorasar, $L^2 = A^2 + M^2$.



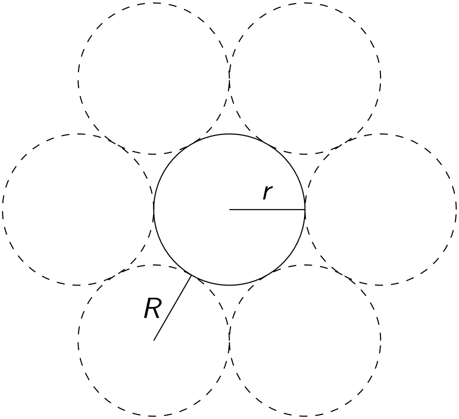
- Almennar gildir um þríhyrninga:
  - $\frac{\sin a}{A} = \frac{\sin b}{B} = \frac{\sin c}{C}$ (sínus reglan).
  - $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos a$ (kósínus reglan)
- **Æfing:** Sannið reglu Pýthagorasar með kósínus reglunni.



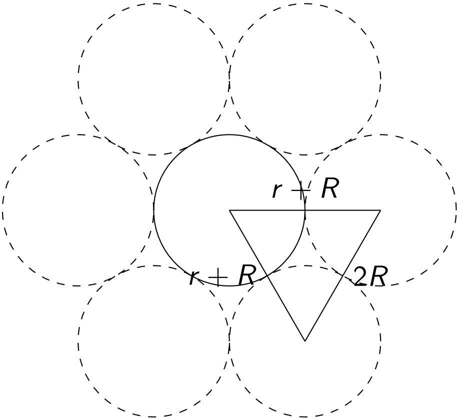
Sýnidæmi: NN and the Optical Illusion - Codeforces

- Þér eru gefnar heiltölu n og rauntölu r.
- Þú teiknar hring á blað með geilsa r.
- Síðan vilt þú teikna n jafn stóra hringi í kringum hringinn þinn þannig að þeir skeri hringinn þinn og aðlæga hringi í nákvæmlega einum punkti.
- Hver þarf geilsi ytri hringjanna að vera?
- https://codeforces.com/problemset/problem/1100/C

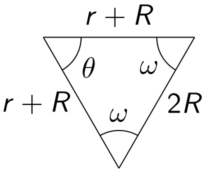
Ef $n = 6$ fæst eftirfarandi mynd, þar sem R er svarið.



Sjáum að fjarlægðin frá miðju myndarinnar að miðju ytri hringjanna er $r + R$. Við fáum því eftirfarandi jafnarma þríhyrning.

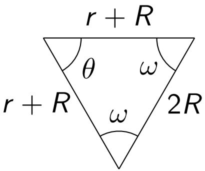


- Nú er $\theta = \dfrac{360^\circ}{n}$ og $\omega = \dfrac{180^\circ - \theta}{2}$.



- Sínus reglan gefur okkur loks að

$$
\begin{aligned}
\frac{2R}{\sin\theta} = \frac{r+R}{\sin\omega} &\Rightarrow 2R\sin\omega = r\sin\theta + R\sin\theta \\
&\Rightarrow 2R\sin\omega - R\sin\theta = r\sin\theta \\
&\Rightarrow R = \frac{r\sin\theta}{2\sin\omega - \sin\theta}.
\end{aligned}
$$



Tvinntölur

- Skilgreinum mengið $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- Skilgreinum svo samlagningu á $\mathbb{C}$ þannig að fyrir $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ þá er

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

- Skilgreinum svo margföldun á $\mathbb{C}$ þannig að fyrir $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$ þá er

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

- Við táknum iðulega $(0, 1) \in \mathbb{C}$ með i og $(x, y) \in \mathbb{C}$ með $x + yi$.
- Takið eftir að $(x, y) = (x, 0) + i \cdot (y, 0)$.
- Tölurnar í $\mathbb{C}$ köllum við *tvinntölur*.

- Ef $z = x + yi \in \mathbb{C}$ þá...
  - ...köllum við x *raunhluta* z og y *þverhluta* z.
  - ...er *lengd* z gefin með $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
  - ...köllum við $x - yi$ *samoka* z, táknað $\bar{z}$.
  - ...köllum hornið sem (x, y) myndar við jákvæða hluta x-ás í $(0, 0)$ *stefnuhorn* z og táknum það með $\operatorname{Arg} z$.

- Látum nú $z, w \in \mathbb{C}$.
- Þá er rúmfræðileg túlkun $z + w$ einfaldlega hliðrun á z um w (eða öfugt).
- Einnig, ef $|w| = 1$ þá er rúmfræðileg túlkun $z \cdot w$ snúningur á z í kringum $(0, 0)$ um Arg w gráður.
- Ef $|z| = r$ og Arg $z = \theta$ þá skrifum við oft $z = re^{i\theta}$.
- Ef $z = r_1 e^{i\theta_1}$ og $w = r_2 e^{i\theta_2}$ þá er $z \cdot w = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.
- Þetta eru dæmi um hvernig við getum stytt okkur leiðir í rúmfræði með því að nota tvinntölur.
- Fleiri (minna augljós) dæmi koma á eftir.

Rúmfræði í forritun

- Við munum bara fjalla um tvívíða rúmfræði í þessum fyrirlestri.
- Þegar leysa þarf þrívíð rúmfræði dæmi er oft góð hugmynd að byrja á að leysa dæmin í tveimur víddum (ef unnt er) og reyna svo að yfirfæra tvívíðu lausnina í þriðju víddina.
- Hingað til í námskeiðinu höfum við að mestu fengist við heiltölur og stöku sinnum þurft að vinna með fleytitölur.
- Í rúmfræði er þetta þó öfugt, við vinnum aðallega með fleytitölur og stöku sinnum heiltölur.
- Þegar við notum fleytitölur er mikilvægt að passa að samanburðir er ekki fullkomnir.
- Við látum því duga að tvær tölur sé *nógu* líkar, í vissum skilningi, til að þær séu jafnar.

Fleytitölu samanburðir

```c
#define EPS 1e-9

int eq(double a, double b)
{ // Eru |a| og |b| nogu likar?
    return fabs(a - b) < EPS;
}

int neq(double a, double b)
{ // Eru |a| og |b| nogu olikar?
    return fabs(a - b) >= EPS;
}
```

Punktar

- Þegar kemur að því að geyma punkta í forritun munum við notast við tvinntölur.
- Þó þessi aðgerð gæti verið nokkuð heimulleg þá er hún þægileg og fljótleg í útfærslu.
- Hennar helsti kostur er að grunnaðgerðir á tvinntölum eru útfærðar í mörgum forritunarmálum.

Notkun á `complex.h` úr C í rúmfræði

- Fallið `creal(p)` skilar ofanvarpi p á x-ás.
- Fallið `cimag(p)` skilar ofanvarpi p á y-ás.
- Fallið `cabs(p)` skilar fjarlægð p frá $(0, 0)$.
- Fallið `cabs(p - q)` skilar fjarlægð milli p og q.
- Fallið `carg(p)` skilar stefnuhorninu p.
- Fallið `cnorm(p)` skilar sama og `abs(p)*abs(p)`.
- Fallið `cconj(p)` speglar p um x-ás.

- Við notum svo `typedef double complex pt;`.
- Eftir það getum við skilgreint punktar með `pt p = x + I*y;`.
- Þessi punktur svarar til punktsins (x, y).

Sýnidæmi

- Þú byrjar í $(0, 0)$ og færð gefnar skipanir.
- Skipanirnar eru allar einn bókstafur og ein tala.
- Ef skipunin er...
  - ...`f x` gengur þú áfram um x metra.
  - ...`b x` gengur þú aftur á bak um x metra.
  - ...`r x` snýrð þú þér um x radíana til hægri.
  - ...`l x` snýrð þú þér um x radíana til vinstri.
- Hversu langt ertu frá $(0, 0)$, eftir að hafa fylgt öllum skipunum.

- Ef við erum í $p \in \mathbb{C}$ og viljum taka r metra skref í stefnu θ getum við einfaldlega lagt $re^{i\theta}$ við p.
- Hvert við snúum í upphafi skiptir ekki mál því það hefur ekki áhrif á fjarlægðinni til $(0, 0)$.

```c
typedef double complex pt;

int main()
{
    int n;
    double x, r = 0.0;
    pt p = 0;
    scanf("%d", &n);
    while (n--)
    {
        char c = getchar();
        while (c != 'f' && c != 'b' && c != 'l' && c != 'r') c = getchar();
        scanf("%lf", &x);
        if (c == 'f')      p += x*cexp(I*r);
        else if (c == 'b') p -= x*cexp(I*r);
        else if (c == 'l') r += x;
        else if (c == 'r') r -= x;
        else assert(0);
    }
    printf("%.8f\n", cabs(p));
    return 0;
}
```

Línur

- Samkvæmt fyrstu frumsendu rúmfræðinnar skilgreina tveir ólíkir punktar nákvæmlega eina línu.
- Svo við getum einfaldlega sagt að lína sé tveir ólíkir punktar.
- Helsti ókostur þessa aðferðar er að sama línan getur verið skilgreint með mismunandi pörum af punktum.
- Stundum hentar betur að skilgreina línu með skurðpunkt við y-ás og hallatölu.
- Þá er einfaldara að bera saman línur en það þarf að höndla sérstaklega línur samsíða y-ás.

Línustrik

- Af augljósum ástæðum sést að best er að skilgreina línustrik sem par punkta, nánar tiltekið endapunkta línustriksins.
- Markmið okkar í þessum hluta af fyrirlestrinu verður að útfæra fall sem finnur fjarlægð milli línustrika.
- Við munum byrja á að útfæra góð hjálparföll sem nýtast meðal annars í að finna þessa fjarlægð, en eru einnig hentug í öðrum dæmum.

- Við munum útfæra:
  - Fall sem skoðar hvort tvö bil skerist (`bxb(...)`).
  - Fall sem skoðar hvort línustrik skerist (`lxl(...)`).
  - Fall sem finnur stystu fjarlægð punkts og línustriks (`p2l(...)`).
  - Fall sem finnur stystu fjarlægð tveggja línustrika (`l2l(...)`).

Skurður bila

- Þegar við viljum skoða skurð tveggja bila nægir okkur að skoða hvort annar endapunktur bils er í hinu bilinu.

```
int bxb(double a, double b, double c, double d)
{ // Skerast [a, b] og [c, d]?
    if (a > b) return bxb(b, a, c, d);
    if (c > d) return bxb(a, b, d, c);
    return fmax(a, c) <= fmin(b, d);
}
```

Skurður tveggja línustrika

- Látum a, b, c, d vera endapunkta línustrikanna.
- Við viljum vita hvort punktarnir c og d séu sinn hvoru megin við línuna $\langle a, b \rangle$.
- Við getum gert þetta með því að skoða í hvora áttina við beygjum ef göngum frá a til b og svo til c, og síðan frá a til b og svo til d.

- Það eru leiðinleg sértilfelli þegar þrír af endapunktunum liggja á sömu línunni.
- Ég mun eftirláta ykkur að laga þessi sértilfelli, því þar sem við höfum aðallega áhuga á að finna fjarlægð línubila nægir að segja að línustrikin skerist ekki í þessu sértilfelli.
- Þetta mun skýrast betur á eftir.

```
int ccw(pt a, pt b, pt c)
{ // I hvora attina er verid ad beygja?
    double f = cimag((c - a)/(b - a));
    if (fabs(f) < EPS) return 0;
    if (f < EPS) return -1;
    return 1;
}

int lxl(pt a, pt b, pt c, pt d)
{ // Skerast <a, b> og <c, d>?
    int a1 = ccw(a, b, c), a2 = ccw(a, b, d),
        a3 = ccw(c, d, a), a4 = ccw(c, d, b);
    if (a1*a2*a3*a4 == 0) return 0; // Taeknilega sed ekki rett.
    if (a1*a2 != -1 || a3*a4 != -1) return 0;
    return bxb(creal(a), creal(b), creal(c), creal(d))
        && bxb(cimag(a), cimag(b), cimag(c), cimag(d));
}
```

Fjarlægð punkts og línustriks

- Til að finna fjarlægð frá punkti að línustriki getum við nýtt okkur að fjarlægðin breytist ekki ef við hliðrum og snúum punktunum.
- Við byrjum því á að hliðra þannig að annar endapunktur línustriksins verði $(0, 0)$.
- Við getum svo snúið um $(0, 0)$ þannig að línustrikið verði samsíða x-ásnum.
- Ef punkturinn liggur nú beint fyrir ofan eða neðan línustrikið þá er y-hnit punktsins (án formerkis) fjarlægðin frá línustrikinu.
- Annars þurfum við að skoða hvor endapunktur línustriksins er nær punktinum.

```
double p2l(pt p, pt l1, pt l2)
{ // Finnur fjarlægð frá punkti í línustrik.
    p = (p - l1)*cexp(-I*carg(l2 - l1));
    if (-EPS < creal(p) && creal(p) < cabs(l2 - l1) + EPS)
        return fabs(cimag(p));
    return fmin(cabs(p), cabs(p - cabs(l2 - l1)));
}
```

Fjarlægð milli tveggja línustrika

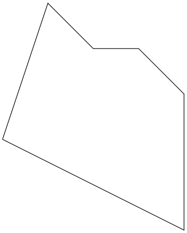
- Gefum okkur línustrikin $\langle a, b \rangle$ og $\langle c, d \rangle$.
- Ef þau skerast þá er fjarlægðin á milli þeirra 0.
- Gerum því ráð fyrir að þau skerist ekki.
- Þá er bersýnilega fjarlægð línustrikana minnst á milli
  - a og $\langle c, d \rangle$,
  - b og $\langle c, d \rangle$,
  - c og $\langle a, b \rangle$ eða
  - d og $\langle a, b \rangle$.

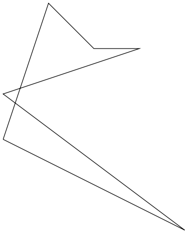
- Ég hef ekki minnst á það hingað til, en við höfum gert ráð fyrir að endapunktar línustrikana séu mismunandi.
- Ef $a = b$ og $c = d$ þá er fjarlægð línustrikana fjarlægðin milli a og c.
- Ef $a = b$ og $c \neq d$ þá er fjarlægð línustrikana fjarlægðin milli a og $\langle c, d \rangle$.
- Ef $a \neq b$ og $c = d$ þá er fjarlægð línustrikana fjarlægðin milli c og $\langle a, b \rangle$.

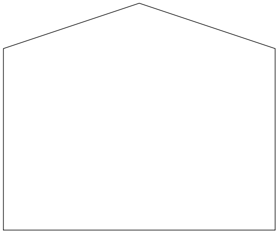
```c
double l2l(pt a1, pt a2, pt b1, pt b2)
{ // Finnur fjarlægð frá línustrikinu <a1, a2> til <b1, b2>.
    if (cabs(a1 - a2) < EPS && cabs(b1 - b2) < EPS)
        return cabs(a1 - b1);
    if (cabs(a1 - a2) < EPS) return p2l(a1, b1, b2);
    if (cabs(b1 - b2) < EPS) return p2l(b1, a1, a2);
    if (lxl(a1, a2, b1, b2)) return 0.0;
    return fmin(fmin(p2l(a1, b1, b2), p2l(a2, b1, b2)),
                fmin(p2l(b1, a1, a2), p2l(b2, a1, a2)));
}
```

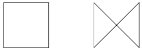
Marghyrningar

- *Marghyrningur* er samfelldur, lokaður ferill í plani sem samanstendur af endanlega mörgum beinum línustrikum.
- Ef ferillinn er einfaldur þá kallast marghyrningurinn *einfaldur*.
- Marghyrningur eru sagður vera *kúptur* ef sérhver beina lína, sem liggur ekki ofan á hlið marghyrningsins, sker mest tvo punkta á marghyrningnum.







- Þegar við viljum tákna marghyrning í tölvu notum við einfaldlega hornpunkta hans.
- Röð punktanna skiptir máli. 
- Til þæginda geymum við oft einn punkt tvisvar, nánar tiltekið er fremsti og aftasti punkturinn eins.
- Þetta er því við höfum oft meira áhuga á línustrikunum milli hornpuntkanna heldur en hornpunktunum sjálfum.
- Þar sem marghyrningar er mjög vinsælir í keppnum munum við fara í nokkur atriði sem er gott að kunna.

Ummál marghyrnings

- Ummála marghyrnings er einfalt að reikna í línulegum tíma.
- Maður leggur einfaldlega saman allar hliðarlengdirnar.

```
double ummal(pt* p, int n)
{ // p[0] == p[n - 1]
    int i;
    double r = 0.0;
    rep(i, n - 1) r += cabs(p[i] - p[i + 1]);
    return r;
}
```

Flatarmál marghyrnings

- Ummál marghyrninga er þó ekki jafnt algengt í keppnum og flatarmál marghyrninga.
- Það er einnig auðvelt að reikna flatarmálið í línulegum tíma, þó það sé ekki endilega augljóst að þetta skili flatarmálinu.
- Fyrir áhugasama er hægt að nota setningu Green til að leiða út eftirfarandi forritsbút.

```
double flatarmal(pt* p, int n)
{ // p[0] == p[n - 1]
    int i;
    double r = 0.0;
    rep(i, n - 1)
        r += creal(p[i])*cimag(p[i + 1]) - creal(p[i + 1])*cimag(p[i]);
    return fabs(0.5*r);
}
```

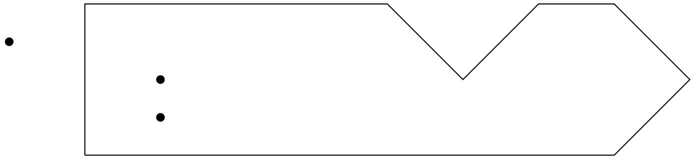
- Við þurfum að skila tölugildinu því við getum fengið neikvætt flatarmál.
- Neikvætt flatarmál hljómar kannski furðulega en það fellur eðlilega úr sönnun summunar ef notast er við setningu Green.
- Til að nota hana þarf að reikna ferilheildi og útkoman úr ferilheildum skiptir um formerki þegar breytt er um átt stikunar ferilsins.
- Þetta þýðir að formerki `r` eftir forlykkjuna er jákvætt ef punktar `p` eru gefnir rangsælis og neikvætt ef þeir eru gefnir réttsælis.

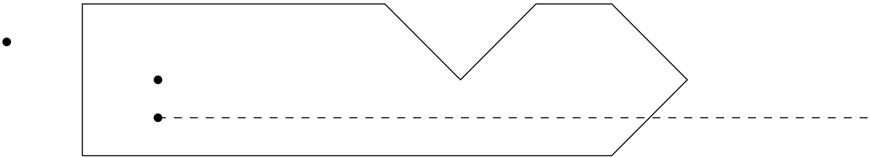
Punktur í marghyrning

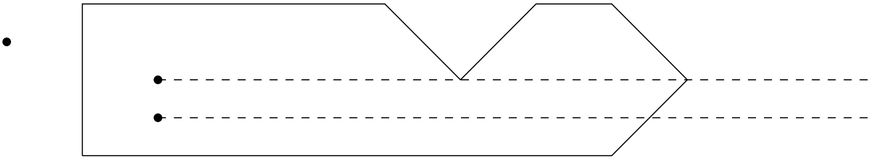
- Að ákvarða hvort punktur sé inni í marghyrning er algent undirvandamál í rúmfræði dæmum.
- Aðallega er gengist við tvær aðferðir til að leysa slík dæmi, sú fyrri er að nota *geislarakningu* (e. *raytracing*) og hin er að reikna summu aðliggjandi horna marghyrningsins miðað við punktinn.

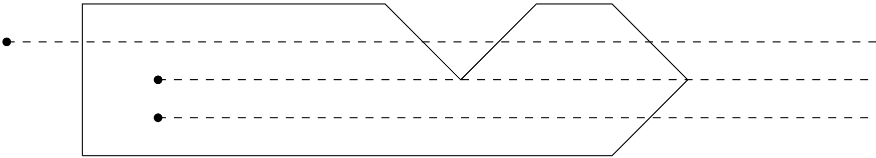
Geislarakning

- Við getum dregið geisla frá punktinum sem við viljum skoða í einhverja átt og talið hversu oft við skerum jaðar marghyrningsins.
- Ef við erum fyrir utan marghyrninginn og skerum jaðarinn erum við inni í honum, en ef við erum fyrir innan og skerum jaðarinn erum við fyrir utan (þetta er í raun skilgreining á því hvenær geislinn *sker* marghyrninginn).
- Svo ef við skerum jaðarinn slétt tölu sinnum er punkturinn fyrir innan, og annars fyrir utan (Setning Jordan).
- Við getum látið geislann vera línustrik, nógu langt til að vera út fyrir marghyrninginn, og notað síðan `lxl(...)` til að ákvarða í $\mathcal{O}(n)$ hversu oft geislinn sker marghyrninginn.





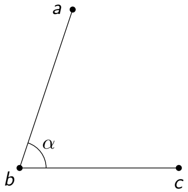


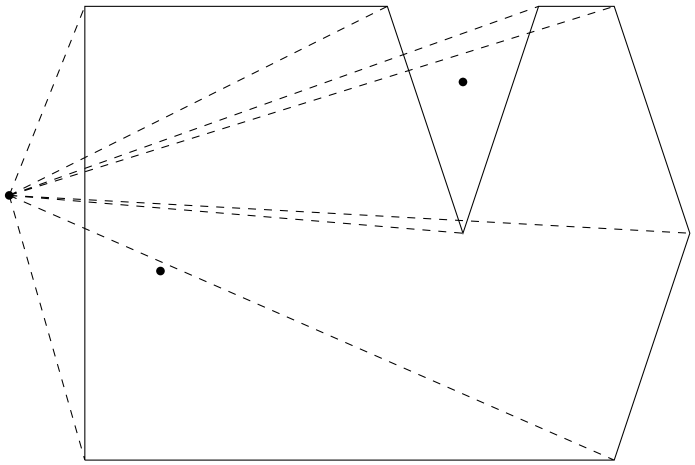


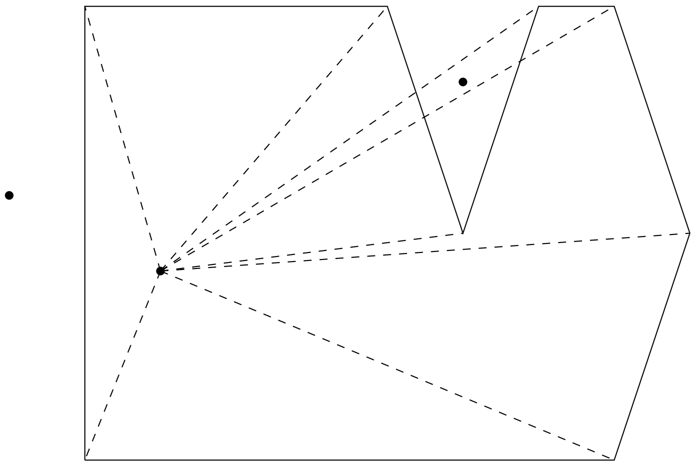
- Þessi aðferð er með nokkur sértilfelli sem gerir hana óþægilega í útfærslu.
- Öll sértilfellin eiga það sameiginlegt að vera þegar geislinn sker endapunkta línustrika marghyrningsins.
- Ef marghyrningurinn er kúptur er nokkuð auðvelt að eiga við þessi sértilfelli, en það gildir ekki í flestum dæmum.
- Þessi aðferð verður því ekki úrfærð hér.

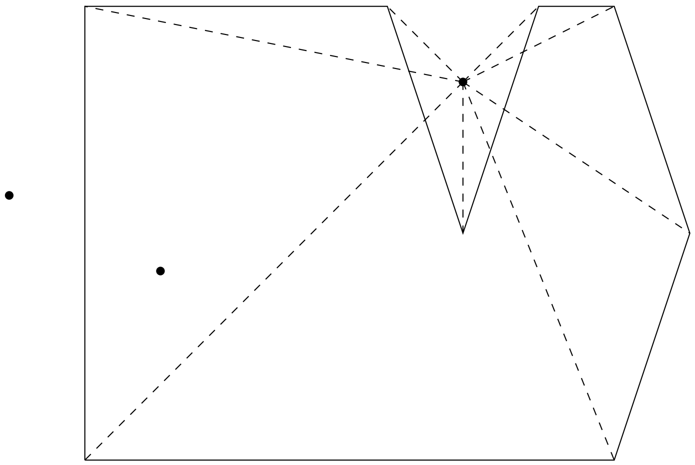
Afstæð hornasumma

- Látum p_i, $i < n$, tákna hornpunkta marghyrnings, q einhvern punkt, $\alpha(a, b, c)$ vera hornið milli a, b og c og $\beta(a, b, c)$ vera 1 ef brotna línustrikið $\langle a, b, c\rangle$ „beygir'' til vinstri en -1 annars.
- *Afstæð hornsumma marghyrnings með tilliti til punkts q* er $\sum_{i=0}^{n} \beta(q, p_i, p_{i+1})\alpha(p_i, q, p_{i+1})$.
- Ef q er inni í marghyrningnum þá er þessi summa bersýnilega 2π.
- Ef q er fyrir utan marghyrninginn þá verður summan hins vegar 0.









```
double angle(pt a, pt o, pt b)
{ // Fallid alpha(a, b, c) i glaerunum.
    double r = fabs(carg(a - o) - carg(b - o));
    return r < M_PI ? r : 2*M_PI - r;
}

int ccw(pt a, pt b, pt c)
{ // Fallid beta(a, b, c) i glaerunum.
    if (cabs(a - b) < EPS || fabs(cimag((c - a)/(b - a))) < EPS)
        return 0;
    return cimag((c - a)/(b - a)) > 0.0 ? 1 : -1;
}

int is_in(pt* p, pt q, int n)
{
    int i;
    double s = 0.0;
    rep(i, n - 1) s += ccw(q, p[i], p[i + 1])*angle(p[i], q, p[i + 1]);
    return (fabs(s) > M_PI ? 1 : 0);
}
```

Kútpur hjúpur punktasafns

- *Kúptur hjúpur punktasafns* er minnsti kúpti marghyrningur sem inniheldur all punkta punktasafnsins.
- Maður getur ímyndað sér að maður taki teygju og strekki hana yfir punkta safnið og sleppi henni svo.
- Við munum nota aðferð sem kallast *Graham's scan* til að finna kúpta hjúp punktasafns.

Kútpur hjúpur punktasafns

- *Kúptur hjúpur punktasafns* er minnsti kúpti marghyrningur sem inniheldur all punkta punktasafnsins.
- Maður getur ímyndað sér að maður taki teygju og strekki hana yfir punkta safnið og sleppi henni svo.
- Við munum nota aðferð sem kallast *Graham's scan* til að finna kúpta hjúp punktasafns.

Kútpur hjúpur punktasafns

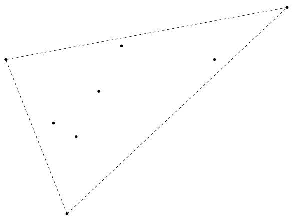
- *Kúptur hjúpur punktasafns* er minnsti kúpti marghyrningur sem inniheldur all punkta punktasafnsins.
- Maður getur ímyndað sér að maður taki teygju og strekki hana yfir punkta safnið og sleppi henni svo.
- Við munum nota aðferð sem kallast *Graham's scan* til að finna kúpta hjúp punktasafns.

Kútpur hjúpur punktasafns

- *Kúptur hjúpur punktasafns* er minnsti kúpti marghyrningur sem inniheldur all punkta punktasafnsins.
- Maður getur ímyndað sér að maður taki teygju og strekki hana yfir punkta safnið og sleppi henni svo.
- Við munum nota aðferð sem kallast *Graham's scan* til að finna kúpta hjúp punktasafns.

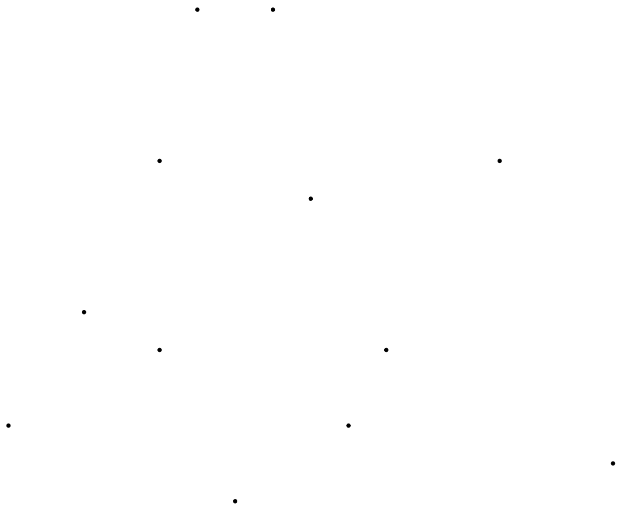
Kútpur hjúpur punktasafns

- *Kúptur hjúpur punktasafns* er minnsti kúpti marghyrningur sem inniheldur all punkta punktasafnsins.
- Maður getur ímyndað sér að maður taki teygju og strekki hana yfir punkta safnið og sleppi henni svo.
- Við munum nota aðferð sem kallast *Graham's scan* til að finna kúpta hjúp punktasafns.

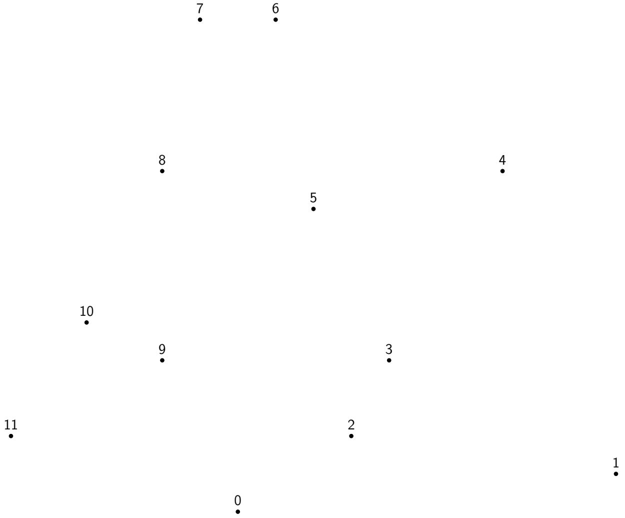


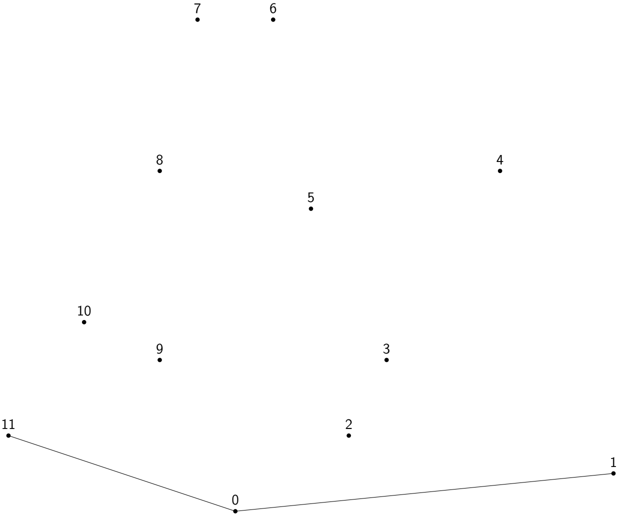
Graham's Scan

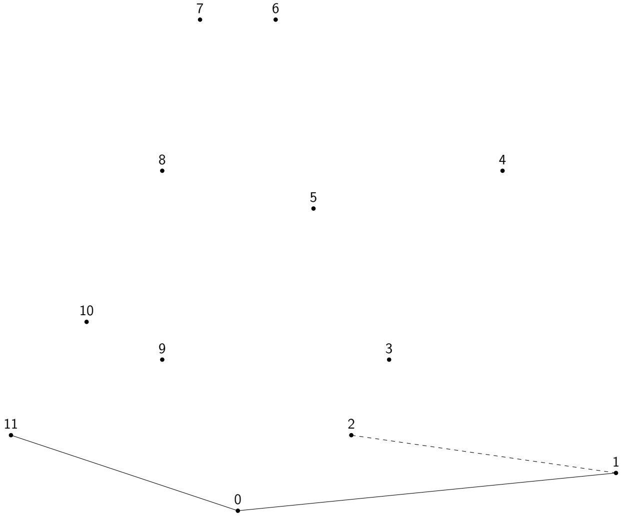
- Við byrjum á að velja vendipunkt, yfirleitt látinn vera punkturinn neðst til vinstri.
- Við látum hann fremst í safnið og röðum svo restin miðið við hornið sem þeir mynda við vendipunktinn.
- Við gefum okkur svo hlaða og látum aftasta, fremsta og næst fremsta punktinn á hlaðann.
- Við göngum síðan í gegnum raðaða punkta safnið okkur og fyrir hvert stak fjarlægjum við ofan af hlaðanum á meðan efstu tvö stökin á hlaðanum og stakið sem við erum á í listanum mynda hægri beygju. Þegar þau mynda vinstri beygju bætum við stakinu úr safninu á hlaðan.
- Þegar við erum búin að fara í gegnum allt safnið er hlaðinn kúpti hjúpurinn.

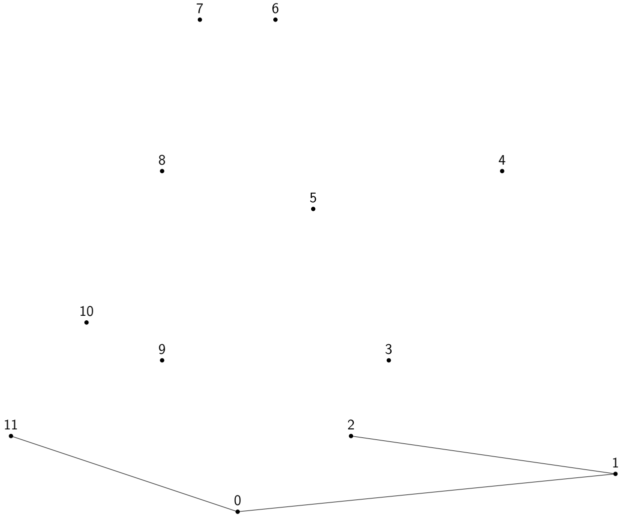


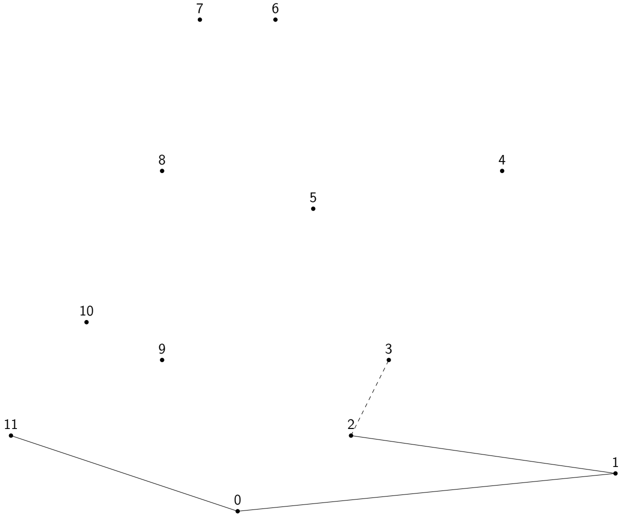

0


7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

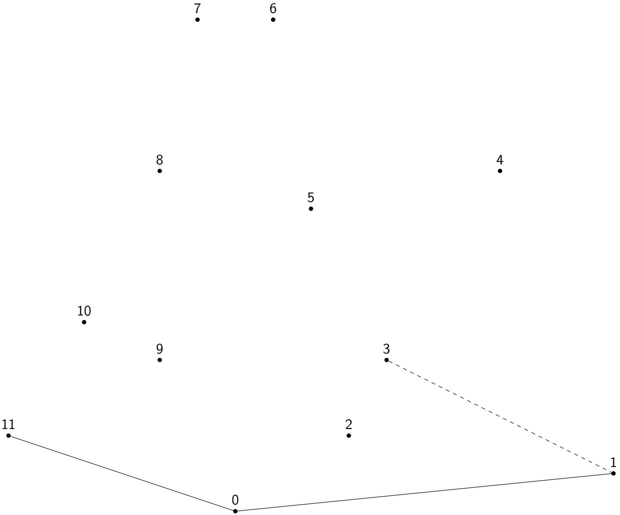

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

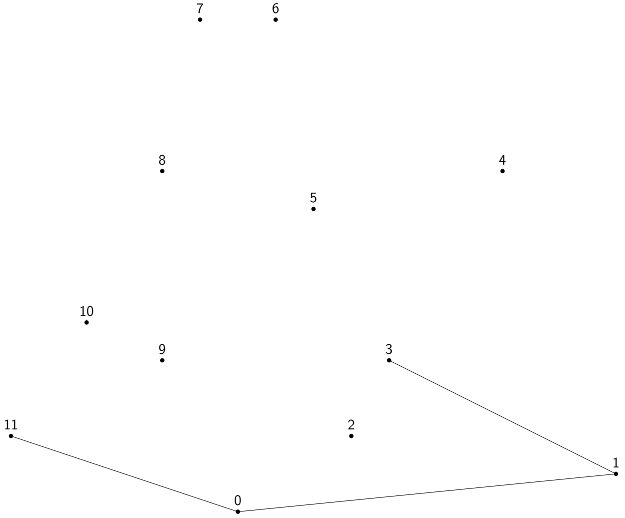

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

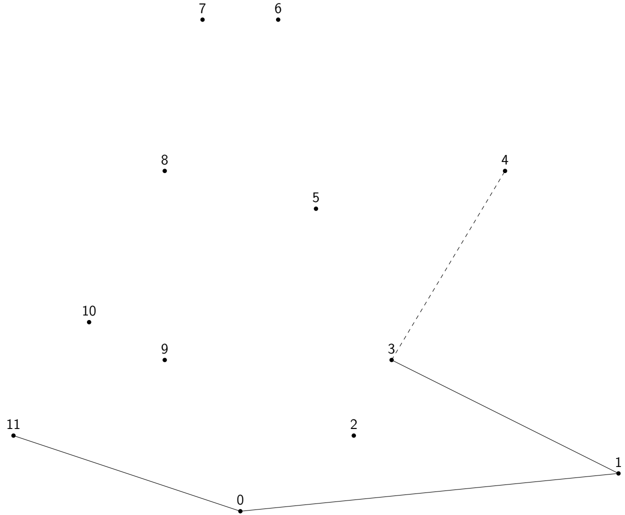

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

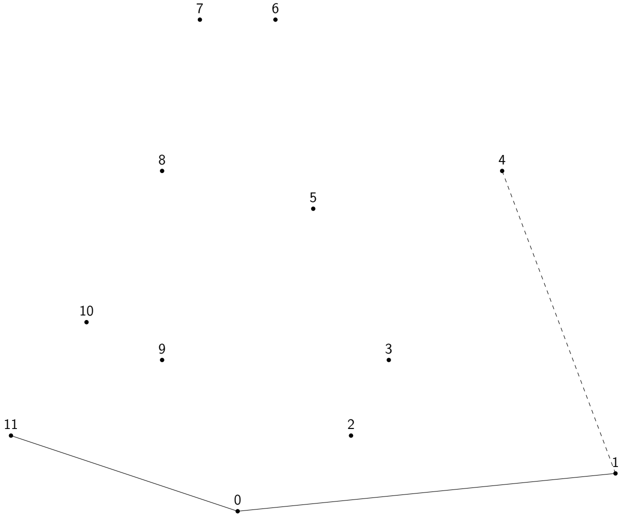


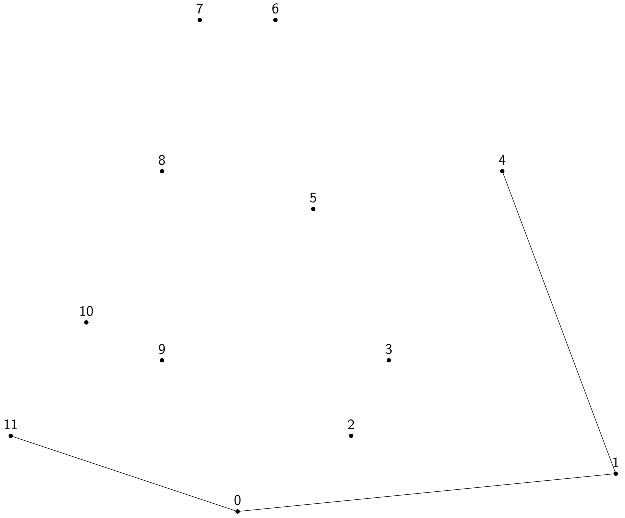
7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0


7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

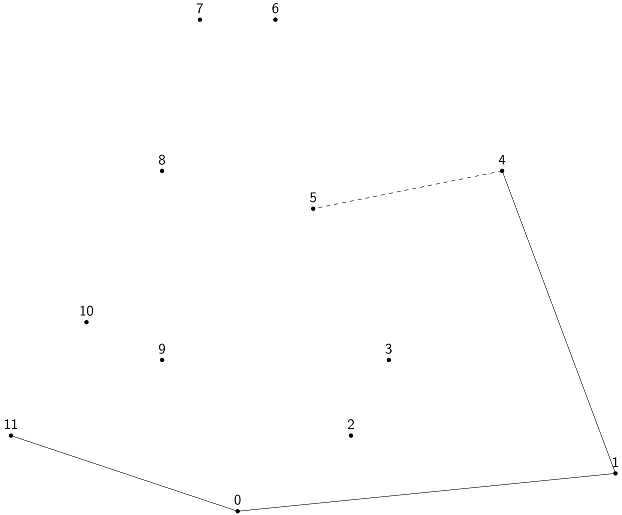

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

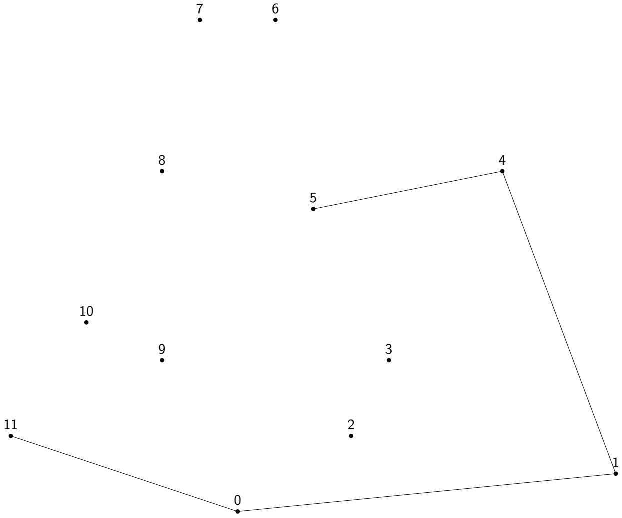

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

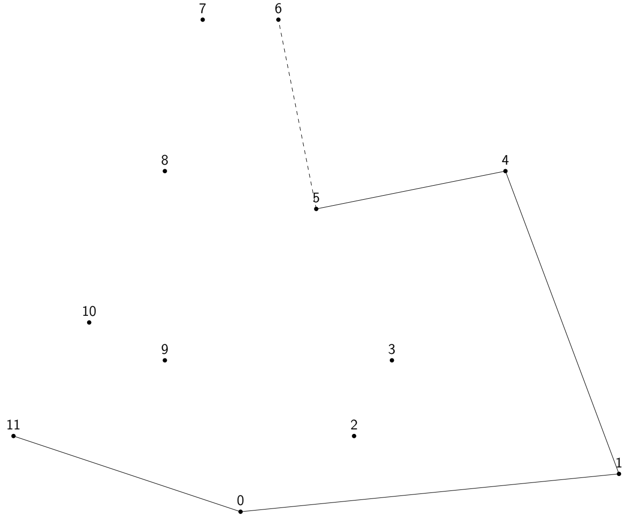

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0



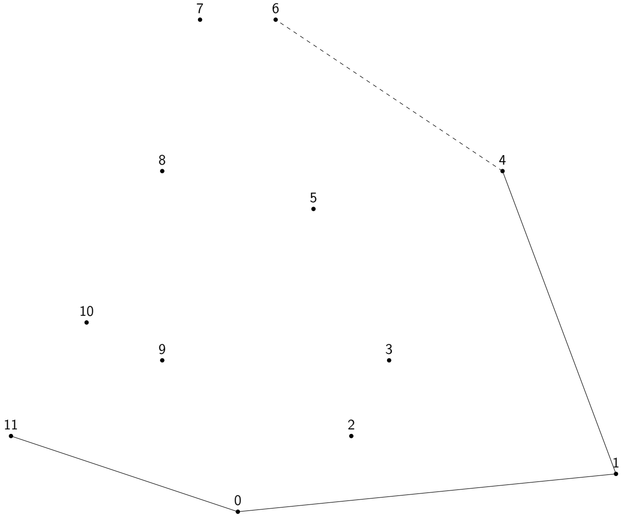
7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

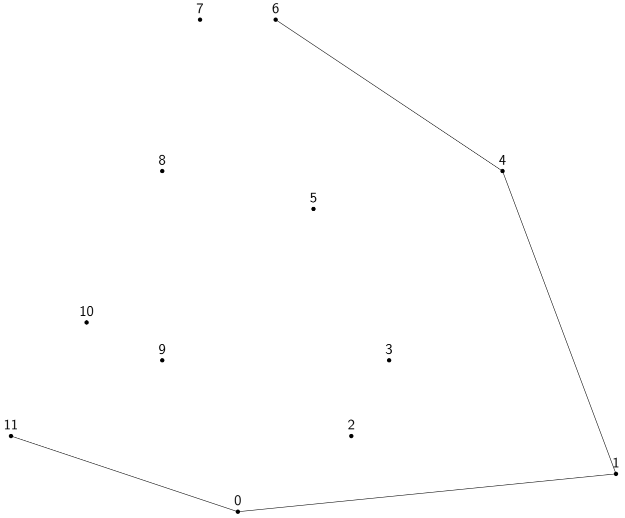

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

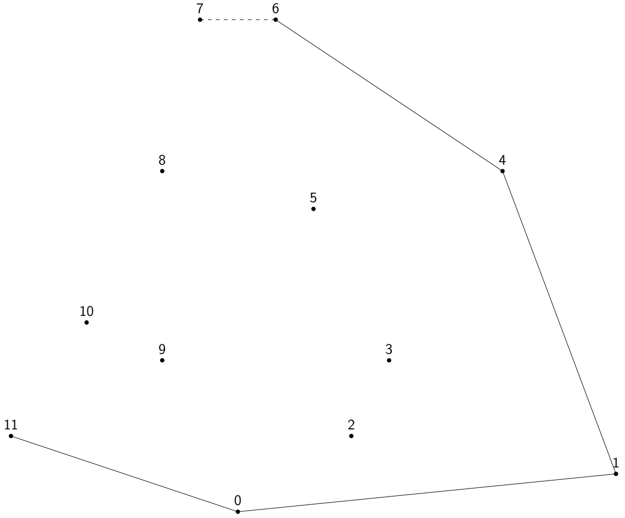

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0



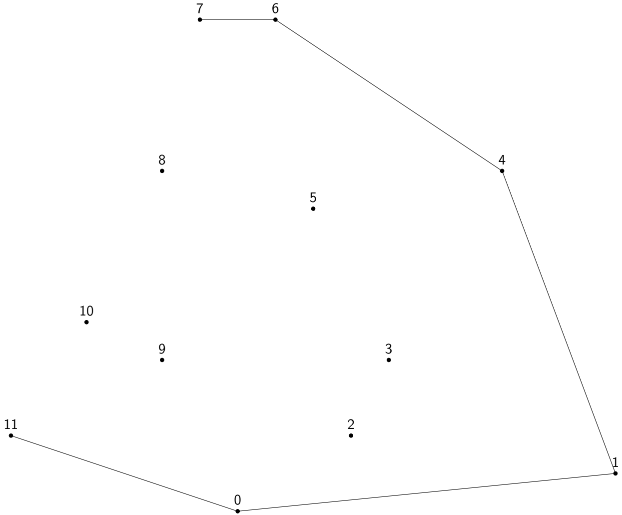
7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

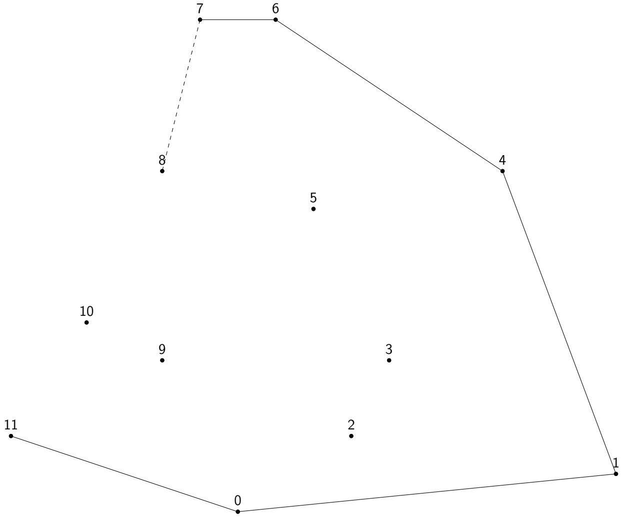

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

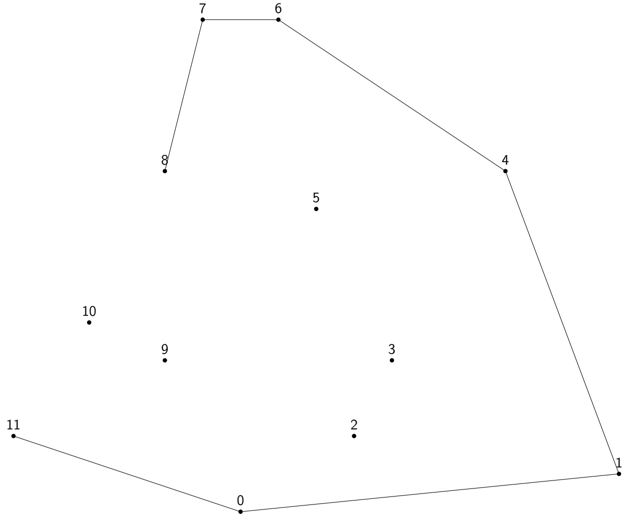

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

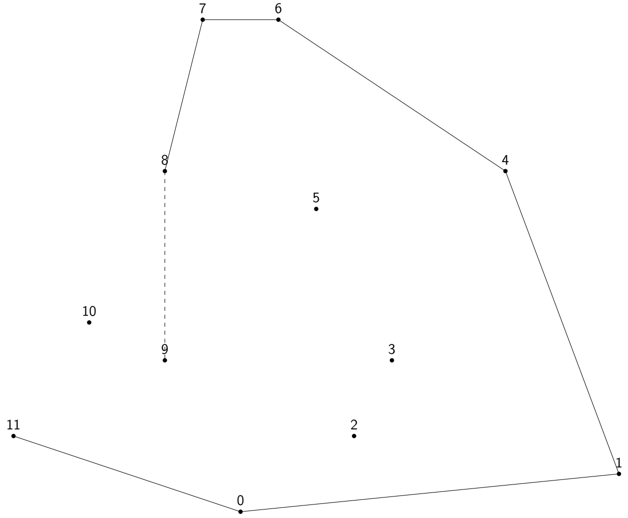


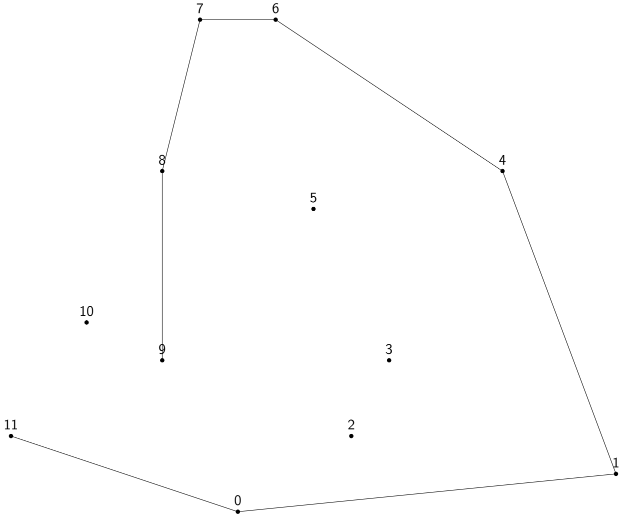
7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

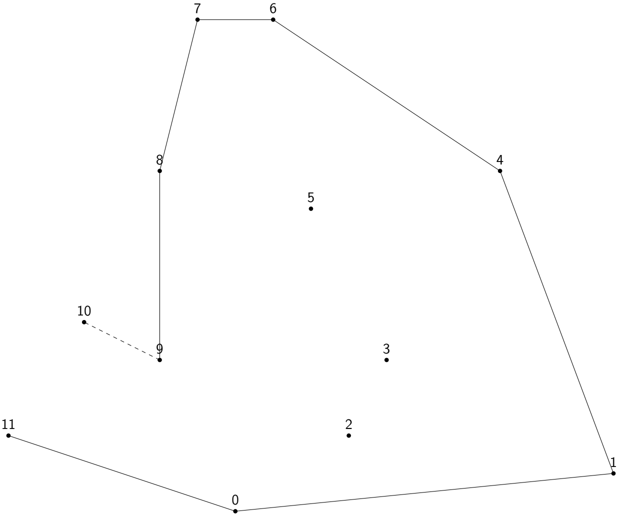

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

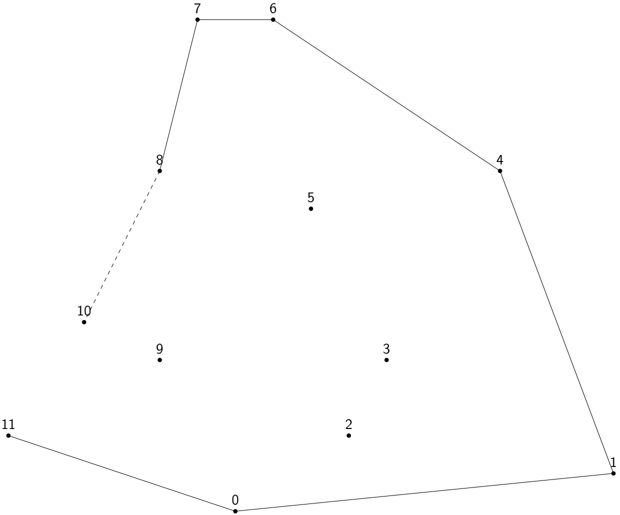

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

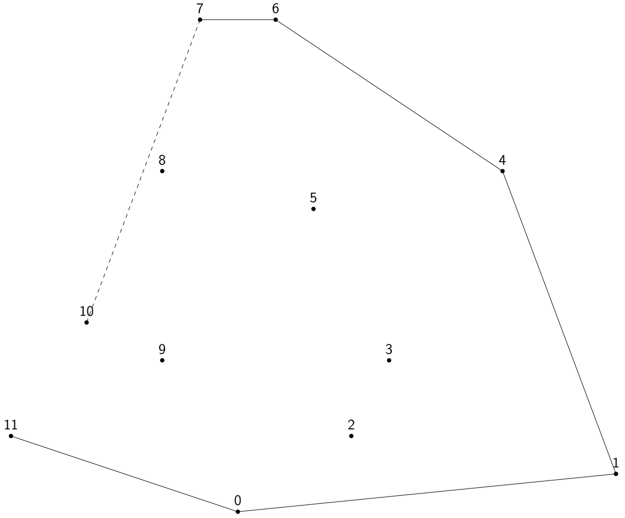

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

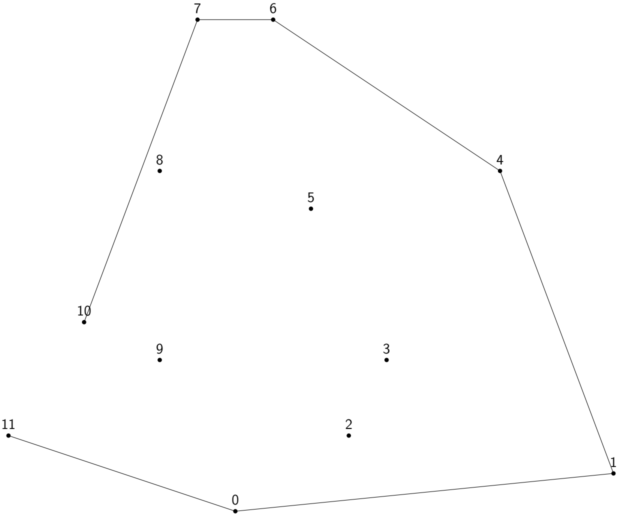

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

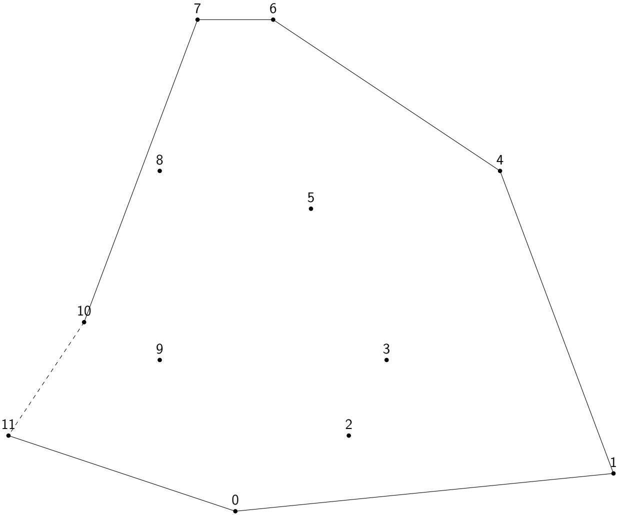

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

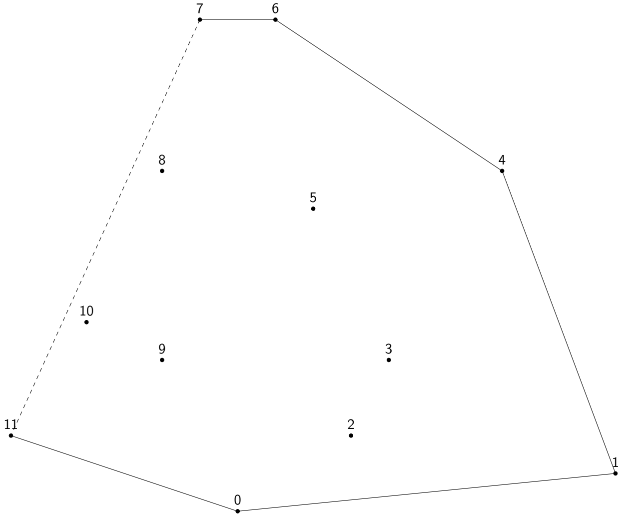

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

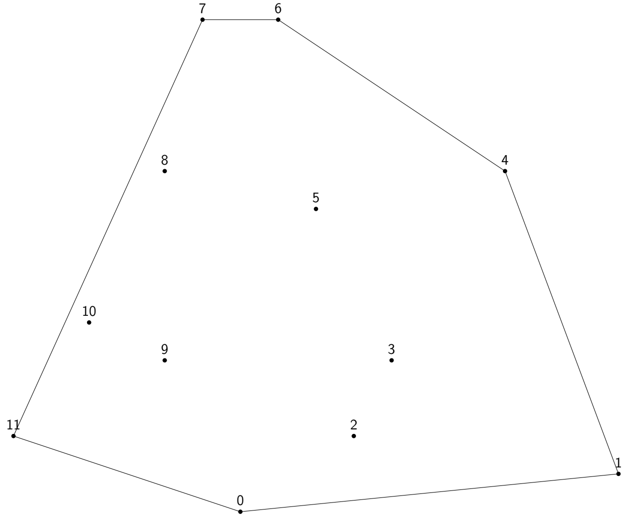

7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0


7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0


7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0


7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0


7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0


7
6
8
4
5
10
9
3
11
2
1
0

- Það er ljóst að í lok reikniritsins lýsir hlaðinn kúptum marghyrningi.
- Það er þó aðeins meira mál að sýna að þetta sé í raun kúpti hjúpur punktasafnsins.
- Við látum það ógert í þessum fyrirlestri.
- Ef punktasafnið inniheldur n punkta þá er reikniritið $\mathcal{O}(n \log n)$ út af því við þurfum að raða punktunum.

```c
int cmp(const void* p1, const void* p2)
{
    pt a = *(pt*)p1, b = *(pt*)p2;
    if (fabs(carg(a - piv) - carg(b - piv)) > EPS)
        return carg(a - piv) < carg(b - piv) ? -1 : 1;
    if (fabs(cabs(a - piv) - cabs(b - piv)) < EPS) return 0;
        return cabs(a - piv) < cabs(b - piv) ? -1 : 1;
}

int convex_hull(pt* p, pt* h, int n)
{
    int j = 0, i, mn = 0;
    for (i = 1; i < n; i++)
        if (cimag(p[i]) < cimag(p[mn]) || cimag(p[i]) == cimag(p[mn])
                && creal(p[i]) < creal(p[mn])) mn = i;
    pt t = p[mn]; p[mn] = p[0]; p[0] = t;
    piv = p[0];
    qsort(p + 1, n - 1, sizeof(p[1]), cmp);
    for (i = 1; i < n && cabs(p[0] - p[i]) < EPS; i++);
    if (i == n) h[j++] = p[0];
    else if (i == n - 1) h[j++] = p[0], h[j++] = p[n - 1];
    if (i >= n - 1) return j;
    h[j++] = p[n - 1], h[j++] = p[0], h[j++] = p[i];
    if (ccw(h[0], h[1], h[2]) == 0)
        return j - (cabs(h[0] - h[1]) < EPS ? 2 : 1);
    for (i++; i < n;)
        (cabs(h[j - 1] - p[i]) > EPS && ccw(h[j - 2], h[j - 1], p[i]) == 1)
            ? (h[j++] = p[i++]) : j--;
    return --j;
}
```