Inngangur að netafræði

Bergur Snorrason

23. febrúar 2021

Net

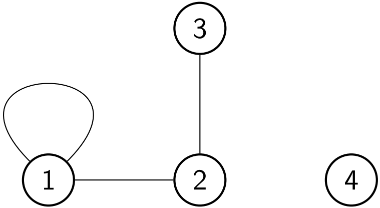
- Tvennd (V, E), þar sem V er endanlegt mengi og $E \subset V \times V$, kallast *net* (e. *graph*).
- Stökin í V köllum við *hnúta* (e. *node*) og stökin í E köllum við *leggi* (e. *edge*).
- Ef venslin E eru samhverf, það er að segja ef

$$(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \in E,$$

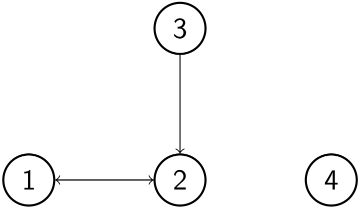
  þá segjum við að netið sé *óstefnt* (e. *undirected*).
- Net sem er ekki óstefnt kallast *stefnt* (e. *directed*).
- Við segjum að hnúturinn v sé *nágranni* (e. *neighbour*) hnútsins u ef (u, v) er í E.
- Við segjum að hnútar u og v í óstefndu neti séu *nágrannar* ef (u, v) er í E.
- Við segjum einnig að það liggi leggur á milli u og v.

- Takið eftir að netið $G = (V, E)$ hefur $|V|$ fjölda hnúta og $|E|$ fjölda leggja (ögn flóknara ef netið er óstefnt).
- Tímaflækjur reinkirita í netafræði eru því iðulega gefnar sem föll af $|V|$ og $|E|$ (hingað til höfum við aðalega notað n).
- Þegar ég forrita netafræði dæmi læt ég yfirleitt n tákna fjölda hnúta og m tákna fjölda leggja.
- Því kemur fyrir að ég lýsa tímaflækjum reikniritana með þessum breytum.
- Ég mun einnig leyfa mér að nota V í stað $|V|$ og E í stað $|E|$, því þetta ætti aldrei valda ruglningi.
- Sem dæmi skrifa ég $\mathcal{O}(E + V)$ í stað $\mathcal{O}(|E| + |V|)$.

- Oft hjálpar að skilja tiltekið net með því að teikna það.
- Við byrjum á að teikna punkta fyrir hnútana.
- Ef netið er óstefnt teiknum við svo línu á milli nágranna (svo hver lína svarar til leggs).
- Ef netið er stefnt þá teiknum við ör í stað línu.
- Leggur (u, v) er þá táknaður með ör frá hnút u til hnúts v.



- Hér má sjá teikningu sem svarar til $V = \{1, 2, 3, 4\}$ og $E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.



- Hér má sjá teikningu sem svarar til $V = \{1, 2, 3, 4\}$ og $E = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$.

- Leggir af gerðinni (u, u) kallast *lykkjur* (e. *loop*) (ástæða nafngiftarinnar sést af fyrri myndinni).
- Net án leggja kallast *einfalt* (e. *simple*).
- Í umfjöllun okkar gerum við ráð fyrir að öll net séu einföld nema annað sé tekið fram.
- Yfirleitt eru net skilgreind á veg sem leyfa fleiri en einn legg milli hnúta.
- Einföld net þurfa þá líka að hafa í mesta lagi einn legg milli hnúta.

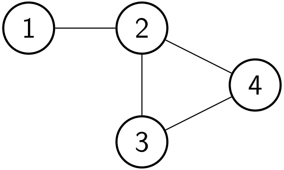
- Runa hnúta $v_1, v_2, ..., v_n$ kallast *vegur* (e. *path*) ef $(v_j, v_{j+1}) \in E$, fyrir $j = 1, 2, ..., n-1$.
- Vegur kallast *rás* (e. *cycle*) ef $v_1 = v_n$.
- Vegur kallast *einfaldur* (e. *simple*) ef engir tveir hnútar í $v_1, v_2, ..., v_n$ eru eins.
- Rás kallast *einföld* (e. *simple*) ef engir tveir hnútar í $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ eru eins.
- Við segjum að vegurinn $v_1, v_2, ..., v_n$ *liggi á milli hnútanna* v_1 *og* v_n.
- Óstefnt net er sagt vera *samanhangandi* (e. *connected*) ef til er vegur milli sérhverja tveggja hnúta.
- Óstefnt net er sagt vera *tré* (e. *tree*) ef það er samanhangandi og inniheldur enga rás.

Framsetning neta í tölvum

- Það er engin stöðluð leið til að geyma net í minni.
- Yfirleitt er notað eina af þremur gagnagrindum:
  - Leggjalista.
  - Nágrannafylki.
  - Nágrannalista (algengust).

Leggjalisti

- Látum $G = (V, E)$ tákna netið okkar.
- Þar sem V er endanlegt megum við gera ráð fyrir að $V = \{1, 2, ..., n\}$, þar sem n er fjöldi hnúta í G.
- Látum m vera fjölda leggja í G.
- Listi af tvenndum sem inniheldur nákvæmlega sömu stök og E kallast *leggjalisti* netsins G.
- Við notum leggjalist sjaldan, en það kemur fyrir (til dæmis í reikniriti Kruskals).
- Net í dæmum í keppnisforritun eru þó oftast gefin með leggja lista.
- Í óstefndum netum er hver leggur tvítekinn í E og við leyfum okkur að sleppa annari endurtekningunni í listanum.

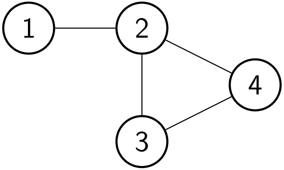


$$L = [$$
$$(1,2),$$
$$(2,3),$$
$$(2,4),$$
$$(3,4)$$
$$]$$

- Helsti galli leggjalistans er að það tekur $\mathcal{O}(\, m \,)$ tíma að ákvarða hvort hnútar séu nágrannar eða finna nágranna tiltekins hnúts.

Nágrannafylki

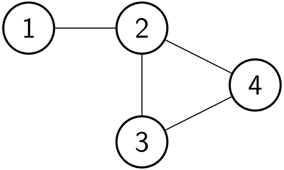
- Látum A vera $n \times n$ fylki þannig að $A_{uv} = 1$ ef (u, v) er í E, en $A_{uv} = 0$ annars.
- Við köllum A *nágrannafylki* netsins G.
- Takið eftir að það tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma að upphafsstilla A.
- Svo þessi aðferð er alferið of hæg ef, til dæmis, $n = 10^5$ (sem er oft raunin).
- Þegar n er nógu lítið eru nágrannafylki nytsamleg því við getum ákvarðað hvort tveir hnútar séu nágrannar í $\mathcal{O}(\,1\,)$ tíma.
- Einnig hefur A^p (fylkjamargföldun) hefur einnig áhugaverða talningarfræðilega merkingu sem við skoðum síðar.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nágrannalistar

- Látum nú V tákna lista af n listum.
- Táknum j-ta lista V með V_j.
- Látum nú V_u innihalda alla nágranna hnútsins u í netinu G, án endurtekningar.
- Við köllum V *nágrannalista* (fleirtölu) netsins G og V_u *nágrannalista* (eintölu) hnútsins u í netinu G.
- Helsti kostur nágrannalistanna er að við getum skoðað alla nágranna tiltekins hnúts án þess að skoða neitt annað.
- Við getum því ítrað í gegnum alla nágranna allra hnúta í $\mathcal{O}(E + V)$ tíma, óháð röð hnútanna.
- Þetta kemur að góðum notum þegar við erum að ferðast í gegnum netið.



$$L = [$$

$$[2]$$

$$[1, 3, 4]$$

$$[2, 4]$$

$$[2, 3]$$

$$]$$

- Eins og minnst var á áðan eru net oftast gefin með leggjalista, en við vinnum yfirleitt með nágrannalista.
- Til að breyta á milli látum nágrannalistann okkar vera af tagi `vector<vector<int>>`.
- Við upphafsstillum hann með n tómum listum.
- Við lesum svo í gegnum alla leggina og bætum viðeigandi hnútum í tilheyrandi nágrannalista.
- Ef leggur (u, v) er í leggjalista stefnds nets þá bætum við v við V_u.
- Ef leggur (u, v) er í leggjalista óstefnds nets þá bætum við v við V_u og u við V_v.

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
#define rep(E, F) for (E = 0; E < (F); E++)
using namespace std;
typedef vector<int> vi;
typedef vector<vi> vvi;

// Fyrsta lína inntaksins eru tvær heiltölur, fjöldi nóða og fjöldi leggja.
// Síðan koma m línur sem svara til leggjalistans.
int main()
{
    int i, j, n, m;
    cin >> n >> m;
    vvi g(n);
    rep(i, m)
    {
        int x, y;
        cin >> x >> y;
        x--, y--;
        g[x].push_back(y);
        g[y].push_back(x); // Sleppa þesari línu ef netið er stefnt.
    }
    rep(i, n)
    {
        printf("%d: ", i + 1);
        rep(j, g[i].size()) printf("%d ", g[i][j] + 1);
        printf("\n");
    }
    return 0;
}
```