Talningarfræði

Bergur Snorrason

24. mars 2021

- Talningarfræði er sá angi strjállar stærðfræði sem fjallar um talningar á einhverjum fyrirbærum.
- Þegar við fjölluðum um tæmandi leit kom fram að fjöldi hlutmengja í n staka mengi er 2^n.
- Einnig kom fram að fjöldi umraðana á menginu $\{1, 2, \ldots, n\}$ er $n!$.
- Bæði eru þetta mikilvægar niðurstöður úr talningarfræði.
- Skerpum aðeins á grunnatriðum.

- Ef við erum með n hluti af einni gerð og m hluti af annari gerð þá getum við valið einn hlut af hvorri gerð á $n \cdot m$ vegu.
- Við þurfum í raun ekki meira en þetta.
- Við notuðum þessa reglu til að sanna niðurstöðurnar á glærunni á undan.
- Í talningarfræði er oft þægilegt að hugsa um endanleg mengi og fjöldatölur þeirra.
- Ef A er mengi þá táknar $|A|$ fjölda staka í A.
- Við getum þá umorðað efsta punktinn sem: Ef A og B eru mengi þá er $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

- Við vitum að það eru 2^n hlutmengi í n staka mengi, en hvað eru mörg hlutmengi af stærð k?
- Þegar við veljum fyrsta stakið höfum við um n stök að velja, síðan $n-1$ stak og svo framvegis.
- Við fáum því $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{k!}$ mengi.
- Hvert mengi er þó talið $(n-k)!$ sinnum, svo loka talan er

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

- Þessi tala er táknuð með $\binom{n}{k}$.

- Tökum eftir að $|A \cup B| \neq |A| + |B|$ því það gætu verið stök í bæði A og B.
- Ef svo er getum við einfaldlega fjarlægt þau stök sem eru tvítalin, og fáum

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

- Gerum nú ráð fyrir að

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{\substack{J \subset \{1, \ldots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

- Þá fæst

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}| &= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + |A_{n+1}| + \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J} (A_j \cap A_{n+1}) \right| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + |A_{n+1}| + \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J \cup \{n+1\}} A_j \right| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{|J|} \left| \bigcap_{j \in J \cup \{n+1\}} A_j \right| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n+1\} \\ J \neq \emptyset \\ n+1 \notin J}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| + \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n+1\} \\ n+1 \in J}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n,n+1\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|
\end{aligned}
$$

- Við höfum því sýnt með þrepun að

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right|.$$

- Vera má að þessi jafna komi spánkst fyrir sjónir en í raun lýsir hún hvernig við fjarlægjum stök sem eru tvítekin, bætum aftur við stökum sem eru þrítekin, fjarlægjum aftur stök sem eru fjórtekin og svo framvegis.
- Þessi jafna er kölluð *lögmálið um fjöldatölu sammengja* (e. *Inclusion-Exclusion principle*).

- Sjáum nú hagnýtingu á þessari jöfnu.
- Munum að gagntæk vörpun $\sigma\colon \{1, 2, ...n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ kallast *umröðun* (e. *permutation*).
- Ef við festum n þá höfum við sýnt að til séu $n!$ umraðanir.
- Næst segjum við að $k \in \{1, 2, ..., n\}$ sé *fastapunktur* σ (e. *fixed point of* σ) ef $\sigma(k) = k$.
- Með öðrum orðum hefur umröðunin ekki áhrif á þennan punkt.
- Hversu margar umraðanir hafa engan fastapunkt?

- Skoðum fyrst þegar $n = 4$:

1 2 3 4	2 1 4 3	3 1 2 4	4 1 2 3
1 2 4 3	2 1 3 4	3 1 4 2	4 1 3 2
1 3 2 4	2 3 1 4	3 2 1 4	4 2 1 3
1 3 4 2	2 3 4 1	3 2 4 1	4 2 3 1
1 4 2 3	2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
1 4 3 2	2 4 3 1	3 4 2 1	4 3 2 1

- Skoðum fyrst þegar $n = 4$:

```
1 2 3 4       2 1 4 3       3 1 2 4       4 1 2 3
^ ^ ^ ^                           ^
1 2 4 3       2 1 3 4       3 1 4 2       4 1 3 2
^ ^               ^ ^                         ^
1 3 2 4       2 3 1 4       3 2 1 4       4 2 1 3
^     ^             ^         ^   ^         ^
1 3 4 2       2 3 4 1       3 2 4 1       4 2 3 1
^                             ^             ^ ^
1 4 2 3       2 4 1 3       3 4 1 2       4 3 1 2
^
1 4 3 2       2 4 3 1       3 4 2 1       4 3 2 1
^   ^             ^
```

- Skoðum fyrst þegar $n = 4$:

2 1 4 3		4 1 2 3
	3 1 4 2	
2 3 4 1		
2 4 1 3	3 4 1 2	4 3 1 2
	3 4 2 1	4 3 2 1

- Við munum ferkar telja hversu margar umraðanir hafa fastapunkt.
- Þetta er algengt að gera í talningarfræði.
- Látum nú A_j tákna mengi þeirra umraðana þar sem j er fastapunktur.
- Þá er $\bigcap_{j \in J} A_j$ mengi þeirra umraðana þar sem allir punktar J eru fastapunktar.
- Ef við festum k punkta í umröðuninni getum við raðað restinni á $(n-k)!$ marga vegu.
- Svo $\left|\bigcap_{j \in J} A\right| = (n - |J|)!$.
- Takið eftir að seinni stærðin er bara háð fjölda staka í menginu J.
- Við vitum einnig að fjöldi hlutmengja $\{1, \ldots, n\}$ með k stök er $\binom{n}{k}$.

- Við fáum loks að fjöldi umraðana með einhvern fastapunkt er

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{\substack{J \subset \{1,\ldots,n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{|J|-1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} (n-j)! \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{n!}{(n-j)!j!} (n-j)! \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{n!}{j!} \\
&= n! \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j!}.
\end{aligned}
$$

- Fjöldi umraðana með engan fastapunkt er því

$$
\begin{aligned}
n! - n! \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j+1}}{j!} &= n! \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j}}{j!} \right) \\
&= n! \left(\frac{(-1)^{0}}{0!} + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{j}}{j!} \right) \\
&= n! \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{j}}{j!}.
\end{aligned}
$$

- Algengt er að kalla þessa tölu $!n$.
- Takið eftir að $!n/n!$ er n-ta hlutsumma veldaraðar e^x, fyrir $x = -1$.
- Svo $!n/n!$ er að stefna á e^{-1}, þegar n stefnir á ∞.

- Oft er hentugt að geta reiknað
$$\binom{n}{k} \mod m.$$
fyrir jákvæðar heiltölur $k \leq n < m$.
- Munið að
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$
- Ein leið til að gera þetta er að finna fyrst margföldunarandhverfur $(n-k)!$ og $k!$ með tilliti til m.
- Við reiknum svo $n! \cdot ((n-k)!)^{-1} \cdot (k!)^{-1} \mod m$.
- Hér þarf að passa að margföldunarandhverfan sé til.
- Helst þarf m að vera frumtala.

```
ll f[MAXN], fm[MAXN];
ll prepare_nck(ll m)
{ // Her tharf |m| ad vera frumtala.
    ll i;
    f[0] = 1;
    rep(i, MAXN) if (i != 0) f[i] = (f[i - 1]*i)%m;
    rep(i, MAXN) fm[i] = mulinv(f[i], m);
}

ll nck(ll n, ll k, ll m)
{
    return (((f[n]*fm[n - k])%m)*fm[k])%m;
}
```

- Ef við erum með fast n og m og viljum reikna fyrir q mismunandi gildi á k þá er tímaflækjan á þessari að ferð $\mathcal{O}(n \log m + q)$.

- Önnur leið til að reikna $\binom{n}{k}$ mod m byggir á kvikri bestun.
- Sjáum fyrst að ef $n > 1$ og $1 < k < n$ þá

$$
\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} \\
&= \frac{k(n-1)!}{(n-k)!k!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{k(n-1)! + n(n-1)! - k(n-1)!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

- Látum því

$$f(n,k) = \begin{cases} 0, & \text{ef } n < 1 \\ 0, & \text{ef } k < 0 \\ 0, & \text{ef } k > n \\ 1, & \text{ef } k = 0 \text{ eða } k = n \\ f(n-1,k-1) + f(n-1,k) & \text{annars.} \end{cases}$$

- Við höfum svo að $f(n,k) = \binom{n}{k}$.
- Útfærslan notar ofansækna kvika bestun.

```
ll d[MAXN][MAXN], m;
ll dp_lookup(ll x, ll y)
{
    if (x < 0 || y < 0 || y > x) return 0;
    if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
    if (y == 0 || y == x) return 1;
    return d[x][y] = (dp_lookup(x - 1, y - 1) + dp_lookup(x - 1, y))%m;
}
```

- Sjáum að það eru n^2 stöður.
- Við reiknum hverja stöðu í $\mathcal{O}(\,1\,)$ tíma, svo við getum svarað q fyrirspurnum í $\mathcal{O}(n^2 + q)$ tíma.
- Það sem forritið okkar er í rauninni að gera er að reikna gildin í þríhyrningin Pascals.
- Þekkt er að k-ta talan í n-tu línu þríhyrnings Pascals er $\binom{n}{k}$.

Þríhyrningur Pascals

```
                1
              1   1
            1   2   1
          1   3   3   1
        1   4   6   4   1
      1   5  10  10   5   1
    1   6  15  20  15   6   1
  1   7  21  35  35  21   7   1
1   8  28  56  70  56  28   8   1
```

Fjöldi umhverfinga í umröðun

- Látum σ vera umröðun á $\{1, ..., n\}$.
- Þá kallast par $(i, j) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ þannig að $i < j$ og $\sigma(i) > \sigma(j)$, *umhverfing* (e. *inversion*) í σ.
- Látum a tákna n staka lista þannig að j-ta stak listans sé $\sigma(j)$.
- Svona táknum við iðulega umraðanir þegar við útfærum þær í tölvu.
- Gerum nú ráð fyrir að eina leiðin okkar til að breyta a er að skipta á aðlægum stökum.
- Hvað tekur það minnst margar aðgerðir að raða listanum?
- Það vill svo til að fjöldi umhverfinga í umröðununni er einmitt fjöldi aðgerða sem þarf til að raða listanum.
- Við getum notað okkur þetta til að finna fjölda umhverfinga.

Fjöldi umhverfinga í umröðun

- Ein leið til að gera þetta er að færa fyrst minnsta stakið fremst, síðan næst minnsta stakið næst fremst og svo framvegis.
- Þetta tekur $\mathcal{O}(n^2)$ tíma.
- Þetta er því of hægt ef $n > 10^4$.
- Við getum þó notað biltré til að gera þetta hraðara.
- Tökum eftir að þegar við höfum sett stak á sinn stað getum við hætt að hugsa um það.
- Við þurfum í raun að geta sagt til um hversu mörg stök í listanum eru fyrir framan það stak sem við viljum færa (við teljum ekki þau stök sem eru komin á sinn stað).
- Við byrjum því með 1 í hverju staki í biltrénu okkar.
- Þegar við höfum fært stak á sinn stað setjum við tilheyrandi gildi sem 0.
- Summa fyrst $j - 1$ stakanna í trénu er því fjöldi staka sem j-ta stakið í listanum þarf að sipta á til að komast á sinn stað.

Hæga aðferðin

```
4 1 6 5 7 3 2

svar:  0
```

Hæga aðferðin

```
4 1 6 5 7 3 2
  ^
svar:  0
```

Hæga aðferðin

```
1 4 6 5 7 3 2
^
svar:  1
```

Hæga aðferðin

```
1 4 6 5 7 3 2
            ^
svar:  1
```

Hæga aðferðin

```
1 4 6 5 7 2 3
          ^
svar:  2
```

Hæga aðferðin

```
1 4 6 5 2 7 3
        ^
svar:  3
```

Hæga aðferðin

```
1 4 6 2 5 7 3
      ^
svar:  4
```

Hæga aðferðin

```
1 4 2 6 5 7 3
    ^
svar:  5
```

Hæga aðferðin

```
1 2 4 6 5 7 3
  ^
svar:  6
```

Hæga aðferðin

```
1 2 4 6 5 7 3
            ^
svar:  6
```

Hæga aðferðin

```
1 2 4 6 5 3 7
          ^
svar:  7
```

Hæga aðferðin

```
1 2 4 6 3 5 7
        ^
svar:  8
```

Hæga aðferðin

```
1 2 4 3 6 5 7
      ^
svar:  9
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 6 5 7
    ^
svar: 10
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 6 5 7
      ^
svar: 10
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 6 5 7
          ^
svar: 10
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 5 6 7
        ^
svar: 11
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 5 6 7
          ^
svar: 11
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 5 6 7
            ^
svar: 11
```

Hæga aðferðin

```
1 2 3 4 5 6 7

svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 1 6 5 7 3 2

biltred: 1 1 1 1 1 1 1

         svar:  0
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 1 6 5 7 3 2
           ^
biltred: 1 1 1 1 1 1 1

   svar:  0
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 1 6 5 7 3 2
           ^
biltred: 1 1 1 1 1 1 1
        | |
         svar:  0
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 x 6 5 7 3 2

biltred: 1 0 1 1 1 1 1

         svar:  1
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 x 6 5 7 3 2
                     ^
biltred: 1 0 1 1 1 1 1

         svar:  1
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 x 6 5 7 3 2
                     ^
biltred: 1 0 1 1 1 1 1
        |           |
         svar:  1
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 x 6 5 7 3 x

biltred: 1 0 1 1 1 1 0

         svar:  6
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 x 6 5 7 3 x
                   ^
biltred: 1 0 1 1 1 1 0

         svar:  6
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 x 6 5 7 3 x
                     ^
biltred: 1 0 1 1 1 1 0
        |         |
         svar:  6
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 x 6 5 7 x x

biltred: 1 0 1 1 1 0 0

   svar: 10
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 x 6 5 7 x x
         ^
biltred: 1 0 1 1 1 0 0

         svar: 10
```

Hraða aðferðin

```
listinn: 4 x 6 5 7 x x
         ^
biltred: 1 0 1 1 1 0 0
        |
         svar: 10
```

Hraða aðferðin

```
listinn: x x 6 5 7 x x

biltred: 0 0 1 1 1 0 0

   svar: 10
```

Hraða aðferðin

```
listinn: x x 6 5 7 x x
                  ^
biltred: 0 0 1 1 1 0 0

            svar: 10
```

Hraða aðferðin

```
listinn: x x 6 5 7 x x
               ^
biltred: 0 0 1 1 1 0 0
        |     |
         svar: 10
```

Hraða aðferðin

```
listinn: x x 6 x 7 x x

biltred: 0 0 1 0 1 0 0

         svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
listinn: x x 6 x 7 x x
             ^
biltred: 0 0 1 0 1 0 0

   svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
listinn: x x 6 x 7 x x
               ^
biltred: 0 0 1 0 1 0 0
        |   |
         svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
listinn: x x x x 7 x x

biltred: 0 0 0 0 1 0 0

         svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
listinn: x x x x 7 x x
                 ^
biltred: 0 0 0 0 1 0 0

         svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
listinn: x x x x 7 x x
                 ^
biltred: 0 0 0 0 1 0 0
        |       |
         svar: 11
```

Hraða aðferðin

```
listinn: x x x x x x x

biltred: 0 0 0 0 0 0 0

   svar: 11
```

```
ll invnum(ll* a, ll n)
{ // Finnur fjolda umhverfinga i umroduninni sem svarar til listans |a|.
  // G.r.f. ad |a| inni haldi 0, 1, ..., n - 1.
    ll b[n], i, r = 0;
    pn = n;
    rep(i, MAXN*5) p[i] = 0;
    rep(i, n) update(i, 1);
    rep(i, n) b[a[i]] = i;
    rep(i, n) r += b[i] != 0 ? query(0, b[i] - 1) : 0, update(b[i], -1);
    return r;
}
```

- Hver aðgerð á biltrénu er framkvæmd í $\mathcal{O}(\log n)$ tíma.
- Við finnum því fjölda umhverfinga í $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma.
- Svo við getum auðveldlega fundið fjölda umhverfinga fyrir $n < 10^6$.
- Takið þó eftir að fjöldinn gæti orðið $n \cdot (n-1)/2$, svo það þarf alltaf að nota `long long`.

- Hvað gerum við þó ef tölurnar sem eru gefnar eru ekki $\{1, 2, ..., n\}$ (líkt og í dæminu *Ultra-QuickSort*)?
- Þá virkar oft að skipta minnstu tölunni út fyrir 1, næst minnstu fyrir 2 og svo framvegis.
- Ef það eru endurtekiningar þarf að passa að öllum eins tölum sé breytt í eins tölur.
- Þetta má gera með því að raða.
- Við röðum fyrst tvenndunum (a_j, j), þar sem a_j táknar j-ta stakið í listanum okkar, eftir fyrsta stakinu.
- Við getum þá labbað í gegn og breytt öllum tölunum.
- Að lokum röðum tvenndunum aftur eftir seinna stakinu.

```c
typedef struct {int x, y;} ii;

int cmpx(const void* p1, const void* p2) {return ((ii*)p1)->x - ((ii*)p2)->x;}
int cmpy(const void* p1, const void* p2) {return ((ii*)p1)->y - ((ii*)p2)->y;}

void compress(int* a, int n)
{
    int i, j, x, k;
    ii b[n];
    rep(i, n) b[i].x = a[i], b[i].y = i;
    qsort(b, n, sizeof(b[0]), cmpx);
    for (i = k = 0; i < n; i = j, k++)
        for (j = i, x = b[i].x; j < n && b[j].x == x; j++)
            b[j].x = k;
    qsort(b, n, sizeof(b[0]), cmpy);
    rep(i, n) a[i] = b[i].x;
}
```

- Reikniritið keyrir í $\mathcal{O}(n \log n)$ tíma því við þurfum að raða.

- Mörg talningarfræði dæmi má smækka á þægilegan máta.
- Ef við látum, til dæmis, $f(n)$ tákna fjölda hlutmengja í mengin $\{1, 2, ..., n\}$ þá höfum við að

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{ef } n = 0 \\ 2 \cdot f(n-1), & \text{annars.} \end{cases}$$

- Þetta gildir því það eru $f(n-1)$ hlutmengi sem innihalda n og $f(n-1)$ hlutmengi sem innihalda ekki n.
- Ef við getum smækkað dæmin á þennan máta má svo nota kvika bestun til að leysa þau.
- Oft þarf að bæta við vídd til að halda utan um önnur gögn.
- Tökum dæmi.

- Gerum ráð fyrir að þú sért með n spilastokka.
- Hver stokkur inniheldur k spil, númeruð frá 1 og upp í k.
- Á hversu marga vegu getur þú valið eitt spil úr hverjum stokk þannig að summa spilanna sé nákvæmlega m?
- Þar sem þessi tala getur verið mjög stór svo reikna skal hana mod $10^9 + 7$.

- Festum fyrsta spilið sem x.
- Við eigum þá eftir $n-1$ stokk og viljum fá summuna $m-x$ úr þeim.
- Með öðrum orðum höfum við smækkað dæmið.
- Við skilgreinum því

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ef } n = 0 \text{ og } y = 0 \\ 0, & \text{ef } n = 0 \text{ og } y \neq 0 \\ \sum_{j=1}^{k} f(x-1, y-j), & \text{annars.} \end{cases}$$

- Nú gildir að $f(x,y)$ er fjöldi leiða til að fá summuna y með x stokkum.
- Við getum svo útfært þetta eins of við höfum verið að útfæra kvikva bestun.

```
ll dp_lookup(ll x, ll y)
{
    if (y < 0) return 0;
    if (d[x][y] != -1) return d[x][y];
    if (x == 0) return y == 0 ? 1 : 0;
    ll i;
    d[x][y] = 0;
    rep(i, k) d[x][y] = (d[x][y] + dp_lookup(x - 1, y - i - 1))%MOD;
    return d[x][y];
}
```

- Við höfum $n \cdot m$ stöður og hverja stöðu má reikna í $\mathcal{O}(\ k\ )$ tíma.
- Svo tímaflækjan er $\mathcal{O}(n \cdot m \cdot k)$.
- Nú getur m ekki verið stærra en $n \cdot k$ svo við fáum $\mathcal{O}(n^2 \cdot k^2)$.

Flykjaaðgerðir

- Í stærðfræði þýðir „fylki" annað en í tölvunarfræði.
- Í stærðfræði er *fylki* (e. *matrix*) tvívíð uppröðun á tölum.
- Fylkið er sagt vera $n \times m$ ef það hefur n línur og m dálka.
- Dæmi um 2×3 fylki er

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Við táknum yfirleitt stakið í línu j og dálki k í fylki A með A_{jk}.
- Flyki í stærfræði er því eins og tvívítt fylki í tölvunarfærði.

- Þegar við viljum geyma stærðfræði fylki í tölvu notum við oftast tvívítt tölvunarfræði fylki.
- Við höfum þá að A_{jk} svarar til `a[j][k]`.
- Ef A er $n \times m$ fylki getum við líka geymt það með einvíðu tölvunarfræði fylki með samsvöruninni A_{jk} við `a[j*m + k]`.

- Við getum lagt saman fylki af sömu stærð stakvíst, það er að segja $(A+B)_{jk} = A_{jk} + B_{jk}$.
- Frádráttur virkar eins.
- Við margföldum saman fylki af stærð $n \times m$ og $m \times r$ með

$$(A \cdot B)_{jk} = \sum_{l=1}^{m} A_{jl} \cdot B_{lk}.$$

- Oftast erum við að vinna með fylki sem eru af stærð $n \times n$.
- Slík fylki kallast *ferningsfylki*.
- Takið eftir að ferningsfylkið I, gefið með $I_{jk} = 0$ ef $j \neq k$ og $I_{jk} = 1$ annars, er margföldunarhlutleysa.

```c
// Utfaersla a eindfoldum ferningsfylkjaadgerdum.

void addto(int* a, int* b, int n)
{ // Baetir fylkinu |b| vid fylkid |a|. Eins og `a += b`.
    int i, j;
    rep(i, n) rep(j, n) a[i*n + j] += b[i*n + j];
}

void subfrom(int* a, int* b, int n)
{ // Dregur fylkid |b| fra fylkinu |a|. Eins og `a -= b`.
    int i, j;
    rep(i, n) rep(j, n) a[i*n + j] -= b[i*n + j];
}

void multo(int* a, int* b, int n)
{ // Eins og `a *= b`.
    int i, j, k, c[n][n];
    rep(i, n) rep(j, n) c[i][j] = 0;
    rep(i, n) rep(j, n) rep(k, n) c[i][j] += a[i*n + k]*b[k*n + j];
    rep(i, n) rep(j, n) a[i*n + j] = c[i][j];
}
```

- Takið eftir að `multo(...)` hefur tímaflækju $\mathcal{O}(n^3)$.
- Ef A er $n \times n$ ferningsfylki getum við reinkað A^p.
- Með því að nota deila og drottna aðferð, líkt og við gerðum í síðustu viku, getum við reiknað A^p í $\mathcal{O}(n^3 \log p)$ tíma.
- Þetta má nýta mikið í talningarfræði.
- Tökum dæmi.

- Látum $G = (V, E)$ vera net og A vera nágrannflyki G.
- Við munum nú leyfa netinu að hafa fleiri en einn veg á milli tveggja hnúta.
- Þá segir A_{uv} hversu margir vegir liggja frá hnúta u til hnúts v.
- Sýna má með þrepuna að $(A^p)_{uv}$ segir okkur þá hversu margir vegir liggja á milli hnúts u og hnúts v, sem eru af lengd nákvæmlega p.
- Takið eftir að við getum leyst þetta dæmi fyrir mjög stór p.
- Til dæmis væri lausnin okkar leifturhröð fyrir $n = 50$ og $p = 10^{18}$.

Úrvinnsla línulegra rakningarvensl

- Runa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kallast *k-ta stigs línulega rakningarvensl* ef til eru $c_1, \ldots, c_k$ þannig að

$$a_n = \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot a_{n-j},$$

  fyrir öll n þannig að $n - k \in \mathbb{N}$.
- Munið, til dæmis, að Fiboncci tölurnar eru línulega rakningarvensl með $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 1$.
- Látum k-ta stigs línuleg rakningarvensl vera gefnin, líkt og að ofan.

- Skilgreinum nú flykið

$$M = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{k-1} & c_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Takið eftir að

$$M \cdot \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot a_{n-j} \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \vdots \\ a_{n-k+1} \end{pmatrix}.$$

- Svo við getum notað fylkið M til að fá næstu tölu í rakningarvenslunum.

- Við þurfum þó ekki að hætta þar.
- Við getum notað M^p til að fá a_{k+p}.
- Þetta getum við reinkað í $\mathcal{O}(k^3 \log p)$ tíma.
- Við getum, til dæmis, notað þetta til að reikna n-tu Fibonacci töluna í $\mathcal{O}(\log n)$ tíma.
- Það er meiri en nógu hratt fyrir $n < 10^{18}$.

```
void matpow(ll* a, ll p, ll n)
{ // Eins og a = a^p.
    ll r[n][n], i, j;
    rep(i, n) rep(j, n) r[i][j] = 0;
    rep(i, n) r[i][i] = 1;
    while (p > 0)
    {
        if (p%2 == 1) multo(*r, a, n);
        p /= 2;
        multo(a, a, n);
    }
    rep(i, n) rep(j, n) a[i*n + j] = r[i][j];
}

int main()
{ // reiknar |n|-tu Fibonacci toluna.
    ll n, a[2][2] = {{1, 1}, {1, 0}};
    scanf("%lld", &n);
    if (n == 1 || n == 2) printf("1\n");
    else
    {
        matpow(*a, n - 2, 2);
        printf("%lld\n", (a[0][0] + a[0][1])%MOD);
    }
    return 0;
}
```

- Í dæmum sem beita má þessari aðferð er oft erfitt að finna rakningarvenslin (þegar þau eru ekki gefin beint).
- Þá má nota netafræðina í staðin.
- Tökum dæmi.

- Þú vilt leggja flísar á ganginn þinn þannig að hver flís er annað hvort svört eða hvít, og engar tvær aðliggjandi flísar mega vera hvítar.
- Gerum ráð fyrir að gangurinn sé þrjár flísar á breidd og n flísar á lengd.
- Á hversu marga vegu getur þú lagt flísarnar?
- Flísar sem snertast horn í horn teljast ekki aðliggjandi.

- Hægt er að setja þessa talningu fram með fjórða stigs línuegum rakningarvenslum.
- Það er þau ekki auðséð hverjir stuðlarnir í þeim venslum erum.
- En hvað ef við breytum þessu í net.
- Látum hnútana í netinu vera mögulegir dálkar á ganginum:

```
Hnutur: 0  1  2  3  4  5  6  7

        0  0  0  0  1  1  1  1
Gangur: 0  0  1  1  0  0  1  1
        0  1  0  1  0  1  0  1
```

- Við bætum svo við legg á milli hnútanna u og v ef dálkarnir mega liggja hliðina á hvorum öðrum á ganginum.
- Látum 1 tákna hvítar flísar.
- Takið eftir að stöður 3, 6 og 7 eru alfarið ólöglegar.

- Við fáum þá nágrannafylkið:

```
      0  1  2  3  4  5  6  7
   +------------------------
0  |  1  1  1  0  1  1  0  0
1  |  1  0  1  0  1  0  0  0
2  |  1  1  0  0  1  1  0  0
3  |  0  0  0  0  0  0  0  0
4  |  1  1  1  0  0  0  0  0
5  |  1  0  1  0  0  0  0  0
6  |  0  0  0  0  0  0  0  0
7  |  0  0  0  0  0  0  0  0
```

- Köllum þetta fylki A.
- Við þurfum síðan að leggja saman $(A^{p-1})_{uv}$ fyrir öll u og v þar sem u er löglegur dálkur.
- Þá eru við að telja saman alla vegi í netinu af lengd p sem byrja í löglegum dálki.
- Við þurfum ekki að passa að síðasti hnúturinn sé löglegur því það liggur enginn leggur í ólöglegan hnút.

```
int main()
{ // reiknar |n|-ta Fibonacci toluna.
    ll i, j, n, r = 0, a[8][8] =
    {
        {1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0},
        {1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0},
        {1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0},
        {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
        {1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0},
        {1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0},
        {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0},
        {0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}
    };
    scanf("%lld", &n);
    matpow(*a, n - 1, 8);
    rep(i, 8) rep(j, 8) if (i != 3 && i != 6 && i != 7) r = (r + a[i][j])%MOD;
    printf("%lld\n", r);
    return 0;
}
```

Gauss-eyðing

- Umræða um fylkjaaðgerðir er ekki fullkláruð fyrr en minnst er á Gauss-eyðingu.
- Þið munið eflaust eftir henni úr Línulegri Algebru.
- Hún er nytsamlega til að, til dæmis, leysa jöfnuhneppi eða finna andhverfur fylkja.

```c
int gauss(double* a, int s, int n, int m)
{ // Her er |a| |n|x|m| fylki. Gauss eyding er framkvaemd upp ad dalki |s|.
    int i, j, k, t, r = 0;
    rep(i, n)
    {
        t = -1;
        while (++t < s && fabs(a[i*m + t]) < 1e-9);
        if (t == s) continue;
        r++;
        for (j = m - 1; j >= t; j--) a[i*m + j] = a[i*m + j]/a[i*m + t];
        rep(j, n) if (i != j) for (k = m - 1; k >= t; k--)
            a[j*m + k] = a[j*m + k] - a[i*m + k]*a[j*m + t];
    }
    return r;
}
```