

# Презентация по лабораторной работе №4

Компьютерный практикум по статистическому анализу данных

---

Еюбоглу Тимур

25 октября 2025 г.

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

- Еюбоглу Тимур
- Студент группы НПИбд-01-22
- Студ. билет 1032224357
- Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы

- Изучить возможности специализированных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры.

## Выполнение лабораторной работы

---

# Поэлементные операции над многомерными массивами

Для матрицы  $4 \times 3$  рассмотрим поэлементные операции сложения и произведения её элементов:

```
[1]: # Массив 4x3 со случайными целыми числами (от 1 до 20):
```

```
a = rand(1:20,(4,3))
```

```
[1]: 4x3 Matrix{Int64}:
```

```
17  6 18
18 16 14
 5 19 18
 6  1  5
```

```
[2]: # Поэлементная сумма:
```

```
sum(a)
```

```
[2]: 143
```

```
[3]: # Поэлементная сумма по столбцам:
```

```
sum(a,dims=1)
```

```
[3]: 1x3 Matrix{Int64}:
```

```
46 42 55
```

```
[4]: # Поэлементная сумма по строкам:
```

```
sum(a,dims=2)
```

```
[4]: 4x1 Matrix{Int64}:
```

```
41
48
42
12
```

```
[6]: # Поэлементное произведение:
```

```
prod(a)
```

```
[6]: 379761177600
```

```
[7]: # Поэлементное произведение по столбцам:
```

```
prod(a,dims=1)
```

```
[7]: 1x3 Matrix{Int64}:
```

```
9180 1824 22680
```

```
[8]: # Поэлементное произведение по строкам:
```

```
prod(a,dims=2)
```

```
[8]: 4x1 Matrix{Int64}:
```

```
1836
4832
1710
```

Для работы со средними значениями можно воспользоваться возможностями пакета Statistics:

```
[10]: # Подключение пакета Statistics:  
      using Statistics  
  
      # Вычисление среднего значения массива:  
      mean(a)
```

```
[10]: 11.916666666666666
```

```
[11]: # Среднее по столбцам:  
      mean(a,dims=1)
```

```
[11]: 1×3 Matrix{Float64}:  
      11.5  10.5  13.75
```

```
[12]: # Среднее по строкам:  
      mean(a,dims=2)
```

```
[12]: 4×1 Matrix{Float64}:  
      13.666666666666666  
      16.0  
      14.0  
      4.0
```

## ▼ 2. Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы

```
[14]: # Подключение пакета LinearAlgebra:
      using LinearAlgebra

      # Массив 4x4 со случайными целыми числами (от 1 до 20):
      b = rand(1:20,(4,4))
```

```
[14]: 4x4 Matrix{Int64}:
       2  20  16   4
       4  11  10   3
      10   3  14   6
      19   8   5  14
```

```
[15]: # Транспонирование:
      transpose(b)
```

```
[15]: 4x4 transpose{::Matrix{Int64}} with eltype Int64:
       2   4  10  19
      20  11   3   8
      16  10  14   5
       4   3   6  14
```

```
[16]: # След матрицы (сумма диагональных элементов):
      tr(b)
```

```
[16]: 41
```

```
[17]: # Извлечение диагональных элементов как массив:
      diag(b)
```

```
[17]: 4-element Vector{Int64}:
       2
      11
      14
      14
```

## Транспонирование, след, ранг, определитель и инверсия матрицы

```
[18]: # Ранг матрицы:  
rank(b)
```

```
[18]: 4
```

```
[19]: # Инверсия матрицы (определение обратной матрицы):  
inv(b)
```

```
[19]: 4x4 Matrix{Float64}:  
-0.342422  0.650064 -0.068699 -0.0120223  
-0.052383  0.203521 -0.0888793  0.00944611  
 0.0517389 -0.0944611  0.0918849 -0.0339201  
 0.47617   -0.964792  0.111207  0.0944611
```

```
[20]: # Определитель матрицы:  
det(b)
```

```
[20]: -4657.999999999995
```

```
[21]: # Псевдообратная функция для прямоугольных матриц:  
pinv(a)
```

```
[21]: 3x4 Matrix{Float64}:  
 0.00319438  0.0652316 -0.0564106  0.00893  
-0.0643184  0.0614736  0.0222671 -0.0207411  
 0.0684769 -0.0828166  0.0473269  0.0149927
```



## 3. Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения

```
[22]: # Создание вектора X:  
X = [2, 4, -5]  
  
[22]: 3-element Vector{Int64}:  
      2  
      4  
     -5  
  
[23]: # Вычисление евклидовой нормы:  
norm(X)  
  
[23]: 6.708203932499369  
  
[24]: # Вычисление p-нормы:  
p = 1  
norm(X,p)  
  
[24]: 11.0  
  
[25]: # Расстояние между двумя векторами X и Y:  
X = [2, 4, -5];  
Y = [1, -1, 3];  
norm(X-Y)  
  
[25]: 9.486832980505138  
  
[26]: # Проверка по базовому определению:  
sqrt(sum((X-Y).^2))  
  
[26]: 9.486832980505138  
  
[27]: # Угол между двумя векторами:  
acos((transpose(X)*Y)/(norm(X)*norm(Y)))  
  
[27]: 2.4404307889469252
```

# Вычисление нормы векторов и матриц, повороты, вращения

Вычисление нормы для двумерной матрицы:

```
[28]: # Создание матрицы:  
d = [5 -4 2 ; -1 2 3; -2 1 0]
```

```
[28]: 3x3 Matrix{Int64}:  
 5 -4 2  
-1 2 3  
-2 1 0
```

```
[29]: # Вычисление Евклидовой нормы:  
opnorm(d)
```

```
[29]: 7.147682841795258
```

```
[30]: # Вычисление p-нормы:  
p=1  
opnorm(d,p)
```

```
[30]: 8.0
```

```
[31]: # Поворот на 180 градусов:  
rot180(d)
```

```
[31]: 3x3 Matrix{Int64}:  
 0  1 -2  
 3  2 -1  
 2 -4  5
```

```
[32]: # Переборачивание строк:  
reverse(d,dims=1)
```

```
[32]: 3x3 Matrix{Int64}:  
-2  1  0  
-1  2  3  
 5 -4  2
```

```
[33]: # Переборачивание столбцов  
reverse(d,dims=2)
```

```
[33]: 3x3 Matrix{Int64}:  
 2 -4  5  
 3  2 -1  
 0  1 -2
```

## 4. Матричное умножение, единичная матрица, скалярное произведение

```
[34]: # Матрица 2x3 со случайными целыми значениями от 1 до 10:  
A = rand(1:10,(2,3))
```

```
[34]: 2x3 Matrix{Int64}:  
 2  1  1  
 8  7 10
```

```
[35]: # Матрица 3x4 со случайными целыми значениями от 1 до 10:  
B = rand(1:10,(3,4))
```

```
[35]: 3x4 Matrix{Int64}:  
 3  4 10  8  
 2  6  3  9  
 1  1  2  2
```

```
[36]: # Произведение матриц A и B:  
A*B
```

```
[36]: 2x4 Matrix{Int64}:  
 9 15 25 27  
48 84 121 147
```

```
[37]: # Единичная матрица 3x3:  
Matrix{Int}(I, 3, 3)
```

```
[37]: 3x3 Matrix{Int64}:  
 1  0  0  
 0  1  0  
 0  0  1
```

```
[38]: # Скалярное произведение векторов X и Y:  
X = [2, 4, -5]  
Y = [1, -1, 3]  
dot(X,Y)
```

```
[38]: -17
```

```
[39]: # тоже скалярное произведение:  
X*Y
```

```
[39]: -17
```

## 5. Факторизация. Специальные матричные структуры

```
[40]: # Задаём квадратную матрицу 3x3 со случайными значениями:  
A = rand(3, 3)
```

```
[40]: 3x3 Matrix{Float64}:  
 0.882431  0.943103  0.605134  
 0.640795  0.0451344 0.635614  
 0.690356  0.246666  0.592887
```

```
[41]: # Задаём единичный вектор:  
x = fill(1.0, 3)
```

```
[41]: 3-element Vector{Float64}:  
 1.0  
 1.0  
 1.0
```

```
[42]: # Задаём вектор b:  
b = A*x
```

```
[42]: 3-element Vector{Float64}:  
 2.430669297689036  
 1.3215433484125134  
 1.5299083315262747
```

```
[43]: # Решение исходного уравнения получаем с помощью функции \  
# (убеждаемся, что x - единичный вектор):  
A\b
```

```
[43]: 3-element Vector{Float64}:  
 1.0000000000000069  
 0.9999999999999984  
 0.9999999999999929
```

# Факторизация. Специальные матричные структуры

Julia позволяет вычислять LU-факторизацию и определяет составной тип факторизации для его хранения:

```
[44]: # LU-факторизация:  
Alu = lu(A)
```

```
[44]: LU{Float64, Matrix{Float64}, Vector{Int64}}  
L factor:  
3x3 Matrix{Float64}:  
 1.0      0.0      0.0  
 0.726169  1.0      0.0  
 0.782334  0.767769  1.0  
U factor:  
3x3 Matrix{Float64}:  
 0.882431  0.943103  0.605134  
 0.0      -0.639719  0.196184  
 0.0      0.0      -0.0311543
```

```
[45]: # Матрица перестановок:  
Alu.P
```

```
[45]: 3x3 Matrix{Float64}:  
 1.0  0.0  0.0  
 0.0  1.0  0.0  
 0.0  0.0  1.0
```

```
[46]: # Вектор перестановок:  
Alu.p
```

```
[46]: 3-element Vector{Int64}:  
 1  
 2  
 3
```

```
[47]: # Матрица L:  
Alu.L
```

```
[47]: 3x3 Matrix{Float64}:  
 1.0      0.0      0.0  
 0.726169  1.0      0.0  
 0.782334  0.767769  1.0
```

```
[48]: # Матрица U:  
Alu.U
```

```
[48]: 3x3 Matrix{Float64}:  
 0.882431  0.943103  0.605134  
 0.0      -0.639719  0.196184  
 0.0      0.0      -0.0311543
```

## Факторизация. Специальные матричные структуры

▼ Исходная система уравнений  $Ax = b$  может быть решена или с использованием исходной матрицы, или с использованием объекта факторизации:

```
[49]: # Решение СЛАУ через матрицу A:  
      A\b  
  
[49]: 3-element Vector{Float64}:  
      1.0000000000000069  
      0.9999999999999984  
      0.9999999999999929  
  
[50]: # Решение СЛАУ через объект факторизации:  
      Alu\b  
  
[50]: 3-element Vector{Float64}:  
      1.0000000000000069  
      0.9999999999999984  
      0.9999999999999929  
  
[51]: # Детерминант матрицы A:  
      det(A)  
  
[51]: 0.017586842847094095  
  
[52]: # Детерминант матрицы A через объект факторизации:  
      det(Alu)  
  
[52]: 0.017586842847094095
```

Рис. 10: Пример решения с использованием исходной матрицы и с использованием объекта факторизации

## Факторизация. Специальные матричные структуры

Julia позволяет вычислять QR-факторизацию и определяет составной тип факторизации для его хранения:

```
[53]: # QR-факторизация:
      Aqr = qr(A)

[53]: LinearAlgebra.QRCompactWY{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}
      Q factor: 3x3 LinearAlgebra.QRCompactWYQ{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}
      R factor:
      3x3 Matrix{Float64}:
      -1.2907  -0.79913  -1.04641
       0.0     0.560104  -0.161714
       0.0     0.0      -0.0243274
```

```
[54]: # Матрица Q:
      Aqr.Q
```

```
[54]: 3x3 LinearAlgebra.QRCompactWYQ{Float64, Matrix{Float64}, Matrix{Float64}}
```

```
[55]: # Матрица R:
      Aqr.R
```

```
[55]: 3x3 Matrix{Float64}:
      -1.2907  -0.79913  -1.04641
       0.0     0.560104  -0.161714
       0.0     0.0      -0.0243274
```

```
[56]: # Проверка, что матрица Q - ортогональная:
      Aqr.Q'*Aqr.Q
```

```
[56]: 3x3 Matrix{Float64}:
      1.0      0.0      -5.55112e-17
      1.66533e-16  1.0      0.0
      0.0      2.22045e-16  1.0
```

# Факторизация. Специальные матричные структуры

Примеры собственной декомпозиции матрицы A:

```
[57]: # Симметризация матрицы A:
      Asym = A + A'

[57]: 3x3 Matrix{Float64}:
      1.76486  1.5839   1.29549
      1.5839   0.0902688  0.88228
      1.29549  0.88228   1.18577

[58]: # Спектральное разложение симметризованной матрицы:
      AsymEig = eigen(Asym)

[58]: Eigen{Float64, Float64, Matrix{Float64}, Vector{Float64}}
      values:
      3-element Vector{Float64}:
      -0.8695583384409882
      0.21485179692981338
      3.6956119617767946
      vectors:
      3x3 Matrix{Float64}:
      0.491179  -0.488132  -0.721436
      -0.868753  -0.214306  -0.446476
      0.0633308  0.84605   -0.529329

[59]: # Собственные значения:
      AsymEig.values

[59]: 3-element Vector{Float64}:
      -0.8695583384409882
      0.21485179692981338
      3.6956119617767946

[60]: # Собственные векторы:
      AsymEig.vectors

[60]: 3x3 Matrix{Float64}:
      0.491179  -0.488132  -0.721436
      -0.868753  -0.214306  -0.446476
      0.0633308  0.84605   -0.529329

[61]: # Проверяем, что получится единичная матрица:
      inv(AsymEig)*Asym

[61]: 3x3 Matrix{Float64}:
      1.0      -1.9984e-15  -3.10862e-15
      -9.99201e-16  1.0      -1.55431e-15
      4.44222e-15   3.10862e-15  1.0
```



# Факторизация. Специальные матричные структуры

Далее рассмотрим примеры работы с матрицами большой размерности и специальной структуры:

[62]: # Матрица 1000 x 1000:

```
n = 1000
A = randn(n,n)
```

[62]: 1000x1000 Matrix{Float64}:

```
0.180886 -1.53818 0.486239 - 0.758935i -1.11552 -1.37552
-0.03227 0.649888 -0.172458 1.68440 0.8001 1.04439
0.845243 1.08924 -0.337591 -0.323535 -0.338181 -0.884662
0.252898 0.162762 1.86293 0.50689 -1.07474 1.01221
-0.4357 -0.433722 0.8688926 0.32438 1.3684 0.882943
-1.27788 3.8514 -1.37849 -1.91543 0.137764 0.619376
0.637412 0.936475 1.91544 0.731247 0.985846 1.90142
0.889633 0.8857344 -1.23836 -0.119184 0.276476 -0.685794
-2.35817 -1.53724 0.324926 0.8551818 -1.11042 -0.51897
0.169373 -1.37595 0.321443 -0.897382 0.111827 1.53789
-0.208557 -1.5481 0.703383 -0.846469 -0.105929 -0.973783
-1.24089 -0.4618 1.88879 -1.73328 -0.8438121 0.732566
1.05188 1.41149 1.50767 -0.438093 1.23154 1.38083
:
1.85675 -0.092866 1.04126 -0.296344 -1.00001 0.214219
-1.97448 1.1295 0.822812 1.17699 1.12317 0.702147
-1.13883 -0.178724 -1.36866 -0.955854 0.418456 1.17483
-0.0146883 0.366683 0.253385 -0.805336 1.68599 -0.0144126
-0.481541 -1.37168 -1.85985 1.36922 -0.769374 0.431689
-0.00427183 -1.00815 0.547827 0.548881 0.158676 1.459
0.00476284 -1.34054 -0.583644 -1.21564 -1.80342 -1.89884
-0.918769 1.04183 0.743412 -1.23923 0.52895 0.036475
-0.378971 0.674633 -0.542285 -1.10648 -0.242543 0.36251
-0.234844 0.382717 -0.0889377 -0.909557 -0.434977 0.258415
0.20623 -0.773274 0.971486 2.22529 0.714398 -0.825674
0.145106 1.97052 1.15124 -0.568779 -1.11565 1.33837
```

[63]: # Симметризация матрицы:

```
Asym = A + A'
```

[63]: 1000x1000 Matrix{Float64}:

```
0.378171 -2.14455 1.33154 - 0.524891i -0.905286 1.23841
-2.14455 1.29978 1.43678 2.46718 0.0328261 0.92613
1.33154 1.43678 -0.675183 -0.404472 0.032225 1.06277
1.03899 -0.316458 1.37217 -0.931503 -1.08343 -0.222548
-0.797724 0.288088 -0.00214940 0.089433 2.01135 0.372888
-2.44661 1.72895 0.385528 -2.37482 0.247145 1.3886
-0.68267 -0.8948186 2.9525 -0.70481 0.245804 2.73885
2.1318 -1.80953 -2.38285 0.978318 -0.347693 -1.17926
-1.81651 -2.6546 -1.11886 0.585098 -0.469279 0.184827
3.31587 -0.652932 -0.179783 -0.167379 -0.51926 0.147241
0.613795 -2.31251 2.20225 -0.461816 -2.516 0.863579
-1.80864 -0.106805 0.760797 -1.48799 0.210751 1.2835
1.1911 1.73589 1.11657 0.779074 0.269166 1.24856
:
-0.412956 -0.99338 1.22839 1.01805 -1.89091 -0.172588
-2.78979 -0.13743 1.24884 0.837331 1.12259 1.66219
-2.89839 0.447319 -0.982212 -0.537558 0.140869 1.45391
-0.486158 1.4372 -0.212816 2.53235 1.62976 0.579577
-0.820229 -0.0172196 -1.37387 2.54136 -1.03185 0.869346
0.364596 1.69148 0.248808 0.661939 -1.9942 -2.66392
1.19641 -0.913173 0.376437 -0.333748 -2.93988 -0.787762
0.217823 -1.22359 0.666128 -0.863441 -0.618177 -1.63682
0.0385428 -0.18121 -0.37511 -0.975737 1.05767 0.0268845
0.524091 2.06718 -0.404472 -1.82911 1.79032 -0.338364
-0.905286 0.0328261 0.032225 1.79832 1.4288 1.93932
-1.23841 0.92613 1.06277 -0.338364 -1.93932 2.67675
```

[64]: # Проверка, является ли матрица симметричной:

```
issymmetric(Asym)
```

Пример добавления шума в симметричную матрицу (матрица уже не будет симметричной):

```
[66]: # Добавление шума:  
      Asym_noisy = copy(Asym)  
      Asym_noisy[1,2] += 5eps()  
  
[66]: -2.1445519133285655  
  
[67]: # Проверка, является ли матрица симметричной:  
      issymmetric(Asym_noisy)  
  
[67]: false
```

Рис. 14: Пример добавления шума в симметричную матрицу

# Факторизация. Специальные матричные структуры

▼ В Julia можно объявить структуру матрица явно, например, используя Diagonal, Triangular, Symmetric, Hermitian, Tridiagonal и SymTridiagonal:

```
[68]: # Явно указываем, что матрица является симметричной:
```

```
Asym_explicit = Symmetric(Asym_noisy)
```

```
[68]: 1000x1000 Symmetric{Float64, Matrix{Float64}}:
 0.378171 -2.14455 1.33154 ... 0.524091 -0.905286 -1.23041
-2.14455 1.29978 1.43678 2.06718 0.0328261 0.92613
1.33154 1.43678 -0.675183 -0.404472 0.633225 1.06277
1.03899 -0.316458 1.37217 -0.931503 -1.68343 -0.222548
-0.797724 0.288688 -0.00214946 0.609433 2.01135 0.372868
-2.44661 1.72085 0.105528 ... -2.37402 0.247145 1.3086
-0.608267 -0.0960106 2.9525 -0.70481 0.245804 2.73805
2.1318 -1.00553 -2.30285 0.978318 -0.347693 -1.17926
-1.81651 -2.6546 -1.11806 0.585098 -0.469279 0.184027
3.31587 -0.652932 -0.179783 -0.167379 -0.513926 0.147241
0.651795 -2.31253 2.20225 ... -0.661855 -2.516 0.863578
-3.80064 -0.106805 0.760797 -1.48799 0.210751 1.2835
1.1911 1.73589 1.11657 0.779074 -0.269166 -1.24056
⋮
-0.432956 -0.99338 1.22839 1.01865 -1.89691 -0.172508
-2.70779 -0.13743 1.24084 0.637531 -1.12259 1.66219
-2.89039 0.447319 -0.982212 ... -0.537538 0.140869 1.45391
-0.406158 1.4372 -0.212816 2.51235 1.62976 0.579377
-0.820229 -0.0172196 -1.17387 2.54116 -1.03185 0.969346
0.364596 1.69348 0.268008 0.661939 -1.9942 -2.66392
1.19641 -0.911753 0.176437 -0.533748 -2.92098 -0.707762
0.217823 -1.22359 0.666128 ... 0.0614431 -0.618577 -1.63402
0.0385428 -0.150121 -0.37511 -0.975737 1.05767 0.0268845
0.524091 2.06718 -0.404472 -1.81911 1.79032 -0.310364
-0.905286 0.0328261 0.633225 1.79032 1.4288 -1.93932
-1.23041 0.92613 1.06277 -0.310364 -1.93932 2.67675
```

Рис. 15: Пример явного объявления структуры матрицы

```
[66]: import Pkg;
      Pkg.add("BenchmarkTools")

      using BenchmarkTools
      # Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
      # собственных значений симметризованной матрицы:
      @btime eigvals(Asym);

      Resolving package versions...
      No Changes to `C:\Users\timur\.julia\environments\v1.11\Project.toml`
      No Changes to `C:\Users\timur\.julia\environments\v1.11\Manifest.toml`
      47.976 ms (21 allocations: 7.99 MiB)
```

```
[67]: # Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
      # собственных значений зашумлённой матрицы:
      @btime eigvals(Asym_noisy);

      398.842 ms (27 allocations: 7.93 MiB)
```

```
[68]: # Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
      # собственных значений зашумлённой матрицы,
      # для которой явно указано, что она симметричная:
      @btime eigvals(Asym_explicit);

      48.687 ms (21 allocations: 7.99 MiB)
```

Рис. 16: Использование пакета BenchmarkTools

## Факторизация. Специальные матричные структуры

Далее рассмотрим примеры работы с разреженными матрицами большой размерности.

Использование типов `Tridiagonal` и `SymTridiagonal` для хранения трёхдиагональных матриц позволяет работать с потенциально очень большими трёхдиагональными матрицами:

[illegible]

```
[87]: # Оценка эффективности выполнения операции по нахождению
# собственных значений:
@btime eigmax(A)
```

484.820 ms (17 allocations: 183.11 MiB)

[87]: 7.228144545523525

## 6. Общая линейная алгебра

```
[81]: # Матрица с рациональными элементами:
Arational = Matrix(Rational{BigInt}}(rand(1:10, 3, 3))/10

[81]: 3x3 Matrix{Rational{BigInt}}:
 3//5  7//10  7//10
 7//10  9//10  1
 2//5  7//10  3//10

[83]: # Единичный вектор:
x = fill(1, 3)

[83]: 3-element Vector{Int64}:
 1
 1
 1

[84]: # Добавим вектор b:
b = Arational*x

[84]: 3-element Vector{Rational{BigInt}}:
 2
 13//5
 7//5

[85]: # Решение исходного уравнения получаем с помощью функции \
# (убеждаемся, что x - единичный вектор):
Arational\b

[85]: 3-element Vector{Rational{BigInt}}:
 1
 1
 1

[86]: # LU-разложение:
lu(Arational)

[86]: LU{Rational{BigInt}, Matrix{Rational{BigInt}}, Vector{Int64}}
L factor:
3x3 Matrix{Rational{BigInt}}:
 1  0  0
 4//7  1  0
 6//7 -5//13  1
U factor:
3x3 Matrix{Rational{BigInt}}:
 7//10  9//10  1
 0  13//70 -19//70
 0  0 -17//65
```

## ▼ Произведение векторов

1) Задайте вектор  $v$ . Умножьте вектор  $v$  скалярно сам на себя и сохраните результат в `dot_v`:

```
[93]: using LinearAlgebra  
  
# Задаем вектор v  
v = [1, 2, 3]  
  
# Скалярное произведение  
dot_v = dot(v, v)
```

[93]: 14

2) Умножьте  $v$  матрично на себя (внешнее произведение), присвоив результат переменной `outer_v`:

```
[94]: # Матричное (внешнее) произведение  
outer_v = v * v'
```

```
[94]: 3x3 Matrix{Int64}:  
 1  2  3  
 2  4  6  
 3  6  9
```

## Системы линейных уравнений

1) Решить СЛАУ с двумя неизвестными:

```
[95]: using LinearAlgebra

# Система a
A1 = [1 1; 1 -1]
b1 = [2; 2]
x1 = A1 \ b1
println("Система a: x = $x1")

# Система b
A2 = [1 1; 2 2]
b2 = [2; 4]
try
    x2 = A2 \ b2
    println("Система b: x = $x2")
catch e
    println("Система b: Нет решения (линейно зависимая система)")
end

# Система c
A3 = [1 1; 2 2]
b3 = [2; 5]
try
    x3 = A3 \ b3
    println("Система c: x = $x3")
catch e
    println("Система c: Нет решения (несовместная система)")
end

# Система d
A4 = [1 1; 2 2; 3 3]
b4 = [1; 2; 3]
try
    x4 = A4 \ b4
    println("Система d: x = $x4")
catch e
    println("Система d: Нет решения (линейно зависимая система)")
end

# Система e
A5 = [1 1; 2 1; 1 -1]
b5 = [2; 1; 3]
try
    x5 = A5 \ b5
    println("Система e: x = $x5")
catch e
    println("Система e: Нет решения (несовместная система)")
end

# Система f
A6 = [1 1; 2 1; 3 2]
b6 = [2; 1; 3]
try
    x6 = A6 \ b6
    println("Система f: x = $x6")
catch e
    println("Система f: Нет решения (сингулярная матрица или неопределенное решение)")
end
```

Система a: x = [2.5, -0.5]  
Система b: Нет решения (линейно зависимая система)  
Система c: Нет решения (несовместная система)  
Система d: x = [0.4999999999999999, 0.5]  
Система e: x = [1.5000000000000004, -0.9999999999999997]



2) Решить СЛАУ с тремя неизвестными:

```
[96]: using LinearAlgebra

# Система a
A1 = [1 1 1; 1 -1 -2]
b1 = [2; 3]
try
    x1 = A1 \ b1
    println("Система a: x = $x1")
catch e
    println("Система a: Нет решения (недостаточно уравнений для определения решения)")
end

# Система b
A2 = [1 1 1; 2 2 -3; 3 1 1]
b2 = [2; 4; 1]
try
    x2 = A2 \ b2
    println("Система b: x = $x2")
catch e
    println("Система b: Нет решения")
end

# Система c
A3 = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
b3 = [1; 0; 1]
try
    x3 = A3 \ b3
    println("Система c: x = $x3")
catch e
    println("Система c: Нет решения (сингулярная матрица или неопределённое решение)")
end

# Система d
A4 = [1 1 1; 1 1 2; 2 2 3]
b4 = [1; 0; 0]
try
    x4 = A4 \ b4
    println("Система d: x = $x4")
catch e
    println("Система d: Нет решения (сингулярная матрица или неопределённое решение)")
end
```

Система a: x = [2.2142857142857144, 0.35714285714285704, -0.5714285714285712]

Система b: x = [-0.5, 2.5, 0.0]

Система c: Нет решения (сингулярная матрица или неопределённое решение)

## ▼ Операции с матрицами

1) Приведите приведённые ниже матрицы к диагональному виду:

```
[100]: # a)

A = [1 -2; -2 1]

eigen_A = eigen(A) # Собственные значения и векторы
diag_matrix = Diagonal(eigen_A.values) # Диагональная матрица
```

```
[100]: 2x2 Diagonal{Float64, Vector{Float64}}:
-1.0  .
.    3.0
```

```
[98]: # b)

B = [1 -2; -2 3]

eigen_B = eigen(B) # Собственные значения и векторы
diag_matrix = Diagonal(eigen_B.values) # Диагональная матрица
```

```
[98]: 2x2 Diagonal{Float64, Vector{Float64}}:
-0.236068  .
.          4.23607
```

```
[99]: # c)

C = [1 -2 0; -2 1 2; 0 2 0]

eigen_C = eigen(C) # Собственные значения и векторы
diag_matrix = Diagonal(eigen_C.values) # Диагональная матрица
```

```
[99]: 3x3 Diagonal{Float64, Vector{Float64}}:
-2.14134  .  .
.         0.515138  .
.         .         2.62662
```

### 2) Вычислите:

```
[109]: # Исходная матрица (a)
A = [ 1 -2;
      -2 1]

# Собственные значения и векторы
eigen_decomp = eigen(A)
P = eigen_decomp.vectors # Матрица собственных векторов
D = Diagonal(eigen_decomp.values) # Диагональная матрица собственных значений

# Возводим диагональную матрицу в 10-ю степень
D_10 = D.^10

# Вычисляем A^10
A_10 = P * D_10 * inv(P)

println("Матрица A^10:")
println(A_10)

Матрица A^10:
[29525.0 -29524.0; -29524.0 29525.0]
```

Рис. 23: Решение задания “Операции с матрицами”

```
[108]: # Исходная матрица (b)
A = [5 -2;
     -2 5]

# Собственные значения и векторы
eigen_decomp = eigen(A)
eigenvalues = eigen_decomp.values
eigenvectors = eigen_decomp.vectors

# Проверяем, что собственные значения неотрицательные
if all(eigenvalues .>= 0)
    # Диагональная матрица с квадратными корнями собственных значений
    sqrt_D = Diagonal(sqrt.(eigenvalues))

    # Квадратный корень матрицы
    sqrt_A = eigenvectors * sqrt_D * inv(eigenvectors)

    println("Исходная матрица A:")
    println(A)

    println("\nКвадратный корень матрицы sqrt(A):")
    println(sqrt_A)

    # Проверка, что sqrt(A)^2 = A
    println("\nПроверка: sqrt(A)^2:")
    println(sqrt_A * sqrt_A)
else
    println("Матрица A имеет отрицательные собственные значения, квадратный корень не определён.")
end
```

Исходная матрица A:

```
[5 -2; -2 5]
```

Квадратный корень матрицы sqrt(A):

```
[2.188901059316734 -0.45685025174785676; -0.45685025174785676 2.188901059316734]
```

Проверка: sqrt(A)^2:

```
[5.000000000000002 -2.000000000000001; -2.000000000000001 5.000000000000002]
```

```
[107]: # Исходная матрица (c)
A = [1 -2;
     -2 1]

# Собственные значения и векторы
eigen_decomp = eigen(A)
eigenvalues = eigen_decomp.values
eigenvectors = eigen_decomp.vectors

# Преобразуем собственные значения в комплексные для вычисления кубического корня
complex_eigenvalues = Complex.(eigenvalues)
cube_root_D = Diagonal(complex_eigenvalues .^ (1/3))

# Кубический корень матрицы
cube_root_A = eigenvectors * cube_root_D * inv(eigenvectors)

println("Исходная матрица A:")
println(A)

println("\nКубический корень матрицы  $\sqrt[3]{A}$ :")
println(cube_root_A)

# Проверка:  $(\sqrt[3]{A})^3 = A$ 
println("\nПроверка:  $(\sqrt[3]{A})^3$ :")
println(cube_root_A * cube_root_A * cube_root_A)

Исходная матрица A:
[1 -2; -2 1]

Кубический корень матрицы  $\sqrt[3]{A}$ :
ComplexF64[0.971124785153704 + 0.4330127018922193im -0.47112478515370404 + 0.4330127018922193im; -0.47112478515370404 + 0.4330127018922193im 0.971124785153704 + 0.4330127018922193im]

Проверка:  $(\sqrt[3]{A})^3$ :
ComplexF64[0.9999999999999999 + 0.0im -1.9999999999999999 + 5.551115123125783e-17im; -1.9999999999999999 + 5.551115123125783e-17im 0.9999999999999999 + 0.0im]
```

Рис. 25: Решение задания “Операции с матрицами”

# Самостоятельная работа

3) Найдите собственные значения матрицы  $A$ . Создайте диагональную матрицу из собственных значений матрицы  $A$ . Создайте нижнедиагональную матрицу из матрицы  $A$ . Оцените эффективность выполняемых операций.

```
[110]: # Исходная матрица A
A = [
    148  97  74 168 131;
    97 186  89 131  36;
    74  89 152 144  71;
    168 131 144  54 142;
    131  36  71 142  36
]

# 1. Нахождение собственных значений и векторов
@btime eigen_decomp = eigen(A)
eigenvalues = eigen_decomp.values
eigenvectors = eigen_decomp.vectors

println("Собственные значения матрицы A:")
println(eigenvalues)

# 2. Создание диагональной матрицы из собственных значений
# Прямое создание переменных и вывод без использования @btime
diag_matrix = Diagonal(eigenvalues)

println("\nДиагональная матрица из собственных значений:")
println(Matrix{Float64}(diag_matrix)) # Преобразуем в стандартный массив для вывода

# 3. Создание нижнедиагональной матрицы из A
lower_triangular = LowerTriangular(A)

println("\nНижнедиагональная матрица из A:")
println(Matrix{Float64}(lower_triangular))

# 4. Оценка эффективности
println("\nЭффективность выполнения операций:")
@btime eigen(A)
@btime Diagonal(eigenvalues)
@btime LowerTriangular(A)

5.433 μs (11 allocations: 3.00 KiB)
Собственные значения матрицы A:
[-1.0, 3.0]

Диагональная матрица из собственных значений:
[-1.0 0.0; 0.0 3.0]

Нижнедиагональная матрица из A:
[148 0 0 0; 97 186 0 0; 74 89 152 0; 168 131 144 54; 131 36 71 142 36]

Эффективность выполнения операций:
5.383 μs (11 allocations: 3.00 KiB)
193.239 ns (1 allocation: 16 bytes)
177.997 ns (1 allocation: 16 bytes)

[110]: 5×5 LowerTriangular{Int64, Matrix{Int64}}:
148  -  -  -  -
 97 186  -  -  -
 74  89 152  -  -
168 131 144  54  -
131  36  71 142  36
```

## Линейные модели экономики

- 1) Матрица  $A$  называется продуктивной, если решение  $x$  системы при любой неотрицательной правой части  $y$  имеет только неотрицательные элементы  $x_i$ . Используя это определение, проверьте, являются ли матрицы продуктивными;
- 2) Критерий продуктивности: матрица  $A$  является продуктивной тогда и только тогда, когда все элементы матрицы  $(E - A)^{-1}$  являются неотрицательными числами. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными;
- 3) Спектральный критерий продуктивности: матрица  $A$  является продуктивной тогда и только тогда, когда все её собственные значения по модулю меньше 1. Используя этот критерий, проверьте, являются ли матрицы продуктивными;

```
[112]: # Матрицы
A1 = [1 2; 3 4]
A2 = (1/2) * A1
A3 = (1/10) * A1
A4 = [0.1 0.2 0.3; 0 0.1 0.2; 0 0.1 0.3]

# Функция проверки через  $(E - A)^{-1}$ 
function check_productivity_via_inverse(A)
    E = I(size(A, 1))
    B = E - A
    try
        B_inv = inv(B)
        all(B_inv .>= 0)
    catch
        false
    end
end

# Функция проверки спектрального критерия
function check_productivity_via_spectrum(A)
    eigenvalues = eigvals(A)
    all(abs.(eigenvalues) .< 1)
end

# Проверка продуктивности для всех матриц
matrices = [A1, A2, A3, A4]
for (i, A) in enumerate(matrices)
    println("Matrix A$i:")
    println(A)
    println("Via  $(E - A)^{-1}$ : ", check_productivity_via_inverse(A))
    println("Via spectrum: ", check_productivity_via_spectrum(A))
    println("-" * 30)
end

Matrix A1:
[1.0 2.0; 3.0 4.0]
Via  $(E - A)^{-1}$ : false
Via spectrum: false
-----
Matrix A2:
[0.5 1.0; 1.5 2.0]
Via  $(E - A)^{-1}$ : false
Via spectrum: false
-----
Matrix A3:
[0.1 0.2; 0.3 0.4]
Via  $(E - A)^{-1}$ : true
Via spectrum: true
-----
Matrix A4:
[0.1 0.2 0.3; 0.0 0.1 0.2; 0.0 0.1 0.3]
Via  $(E - A)^{-1}$ : true
Via spectrum: true
```

## Вывод

---



- В ходе выполнения лабораторной работы были изучены возможности специализированных пакетов Julia для выполнения и оценки эффективности операций над объектами линейной алгебры.

## Список литературы. Библиография

---

[1] Julia Documentation: <https://docs.julialang.org/en/v1/>

## Вывод

---

- В ходе выполнения лабораторной работы познакомились с инструментом для измерения пропускной способности сети в режиме реального времени — iPerf3, а также получили навыки проведения воспроизводимого эксперимента по измерению пропускной способности моделируемой сети в среде Mininet

## Список литературы. Библиография

---

[1] Mininet: <https://mininet.org/>