TD : l'escalier

Dominique Michelucci, Université de Dijon

7 décembre 2012

Un ensemble P de n points 2D $P_i = (x_i, y_i)$ est donné. On suppose que tous les points sont dans le quadrant positif : $x_i \leq 0, y_i \leq 0$ pour tout i.

On dit que $p_i \leq q_i$ ssi $x_i \leq x_j$ et $y_i \leq y_j$.

Pourquoi cet ordre n'est il que partiel ?

On appelle escalier de P le sous ensemble des points de P qui sont des minima pour cet ordre. Il est noté E, ou $E(P)$.

Donner un exemple où E contient un seul point de P.

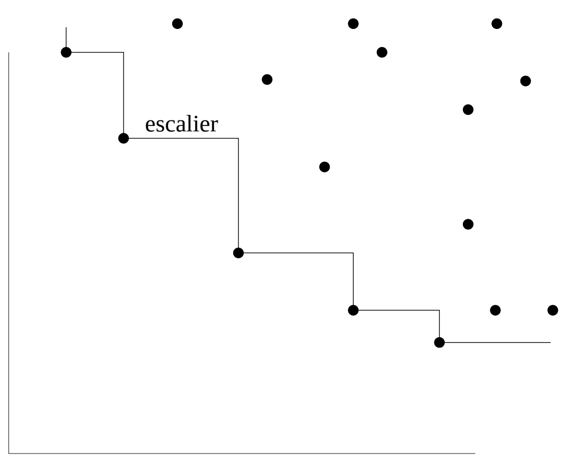
Donner un exemple où $E = P$.

Proposer des méthodes pour calculer $E(P)$. Les méthodes de tri sont une source d'inspiration possible : il y a des méthodes en $O(n^2)$ et en $O(n \log n)$.

Il y a 2 variantes : soit on veut juste E, soit en plus on veut E "dans l'ordre" (x croissant, par exemple).

Réduire le problème du tri de X, $x_i \geq 0$, au problème de l'escalier. En déduire que (si les x_i ne sont pas entiers) l'escalier ne peut être résolu plus vite que $O(n \log n)$.

Remarque : Dickson's lemma : si les P_i sont à coordonnées entières, alors $E(P)$ est fini même si E est infini. Prouvez le (En pratique, E bien qu'infini a une description finie.) Ce lemme est fondamental pour le calcul formel et les bases de Grobner (ce sera vu en M1 info).



Algo quadratique : comparer tous les P_i, P_j. Cet algo ne donne pas la structure.

Algo $O(n \log n)$: trier P par x croissant (pour le même x, par y décroissant). Balayer $P = (P_1, P_2 \dots P_n)$ ainsi trié, par indice croissant, en gérant Y, un y minimal qui ne peut que décroître au cours de l'algo : si le point P_k est au dessus de Y, l'éliminer. S'il est dessous, l'insérer en fin de l'escalier, et mettre Y à jour : $Y \leftarrow P_k.y$.

Algo $O(n \log n)$: s'inspirer du quicksort : le modifier pour éliminer les points plus grands que le pivôt. Attention à l'utilisation de 2 ordres distincts : l'ordre partiel, et l'ordre sur les x...

Algo $O(n \log n)$: S'inspirer de tri par fusion : il faut fusionner 2 escaliers (ordonnés par x croissant).

Réduire le problème du tri de X, $x_i \geq 0$, au problème de l'escalier. En déduire que (si les x_i ne sont pas entiers) l'escalier ne peut être résolu plus vite que $O(n \log n)$.

R : Considérer $P_i = (x_i, y_i = S - x_i)$ où $S = \max x_i$. Alors $E = P$. Même genre de preuve que celle qui montre que le calcul de l'enveloppe convexe ne peut être faite plus vite que en $O(n \log n)$.

Remarque : Dickson's lemma : si les P_i sont à coordonnées entières, alors $E(P)$ est fini même si E est infini. Prouvez le (En pratique, E bien qu'infini a une description finie.)

Considérer le point (ou un des points) P_q tel que $x_q + y_q$ est maximum. Ce point est dans E, et "élimine" une partie des points de P, les points P_k tels que $x_q \leq x_k$ et $y_q \leq y_k$. Il reste des points de P dans 2 bandes, une horizontale entre $y = 0$ et $y = y_q$, et une bande verticale entre $x = 0$ et $x = x_q$. La bande horizontale a une quantité finie de droites horizontales entières : donc l'escalier qui la concerne ne peut pas contenir davantage de points. Idem pour la bande verticale. Se généralise en dimension quelconque (finie, quand même).