EXAMEN 2017 INFO 31, 20 décembre 2017

Répondez **DANS L'ORDRE** aux questions. Répondez à chaque question soit **EN UNE LIGNE** soit avec un dessin. **AUCUNE PREUVE N'EST DEMANDÉE.** Ecrivez **LISIBLEMENT** SVP.

Question 1. Calculez le PGCD g et les coefficients de Bezout u et v de $a = 84$ et $b = 48$, avec le tableau habituel. Dans la dernière ligne, v vaut $k \in \mathbb{Z}$. Que valent g, u et v (u et v sont des fonctions de k) dans la première ligne de votre tableau ?

Question 2. Considérer l'équation en x : $7^{\log_2 n} = n^x$. Que vaut x ?

Question 3. La séquence commune la plus longue entre $U = CABCAB$ et $V = ACBCBA$ est le chemin critique d'un graphe orienté. Dessinez le graphe et son chemin critique. Rappel : les sommets du graphe sont les couples (i, j) tels que $U_i = V_j$. Il y a un arc de (i_1, j_1) à (i_2, j_2) ssi $i_1 < i_2$ et $j_1 < j_2$. Ne tracez pas les arcs inutiles. Les arcs doivent aller de gauche à droite en montant. Vous pouvez ajouter une source et un puits virtuels ; la durée de leurs arcs est nulle. Tous les autres arcs ont comme durée 1. Calculez les dates au plus tôt et au plus tard des sommets du graphe. Mettez en évidence le chemin critique.

Question 4. Trouvez par programmation dynamique la solution optimale de ce problème de sac à dos, avec un poids maximal de 5.

article i	0	1	2	3
poids p_i	2	1	3	2
utilité u_i	12	10	20	15

Vous remplirez les cases, ou une partie des cases, du tableau : $U(p, i)$, pour $i = 0$ à 3, et $p = 1$ à 5. $U(p, i)$ est la plus grand utilité des sac à dos utilisant les articles dans $\{1, \ldots i\}$ et de poids inférieur ou égal à p.

U(p,i)	i=1	i=2	i=3	i=4
p=1	0	10	10	10
p=2	12	12	12	15
p=3	12	22	22	25
p=4	12	22	30	30
p=5	12	22	32	37

Question 5. Soient $(n_i \in \mathbb{N}, t_i = T(n_i) \in \mathbb{R})$ pour $i = 1, \ldots N$. Les n_i sont les tailles des données de test pour un programme, et les t_i sont les temps que met le programme pour calculer avec n_i données. Les points de coordonnées $(x_i = \log_2 n_i, y_i = \log_2 t_i)$ sont affichés. Si $T(n) = n^d$, quelle est l'équation de la courbe sur laquelle se trouvent les points (x_i, y_i) ?

Question 6 (suite). Même question si le programme est en temps $T(n) = 2^n$.

Question 7. Chaque arc d'un graphe orienté est étiqueté par la probabilité de mort (ou de panne, pour être moins sinistre) en empruntant cet arc. Pour calculer le chemin le plus sûr dans ce graphe, il faut savoir calculer la probabilité de mort d'un chemin, $A \to B \to C$. Soit p la probabilité de mort de l'arc $A \to B$ et q celle de $B \to C$. Quelle est celle de $A \to B \to C$? Répondez en une ligne. Aucune preuve n'est demandée.

Question 8. Chaque arc d'un graphe orienté est étiqueté par la probabilité d'emprunter cet arc. La somme des probabilités des arcs issus d'un même sommet vaut 1. Ce graphe est appelé une chaîne de Markov. Par exemple, les sommets sont des sites du web et les arcs des hyperliens équiprobables parcourus par un robot. Soient p la probabilité de l'arc $A \to B$ et q celle de $B \to C$, quelle est la probabilité du chemin $A \to B \to C$? Répondez en une ligne. Aucune preuve n'est demandée.

Question 9. La suite f est définie par $f(0)$, $f(1)$ et la règle récursive : $f(n) = af(n-1) + bf(n-2) + cn + d$, avec a, b, c, d donnés. Que vaut la matrice M dans cette équation :

$$\begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette fois, vous avez le droit de répondre en 4 lignes.

Question 10 (suite). A quoi M peut-il servir ? Répondre en une ligne.