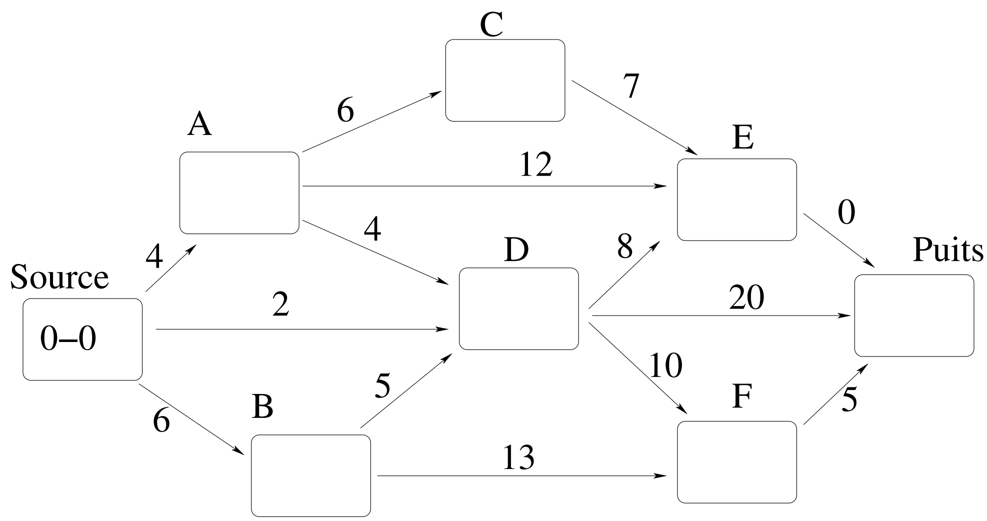
PARTIEL I31, Dijon, 2017

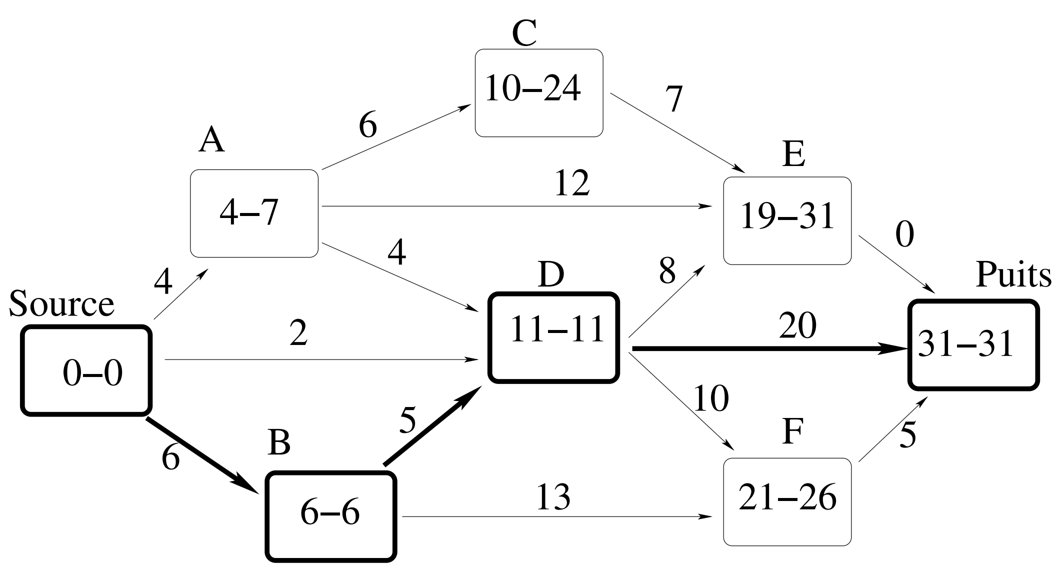
1 Problème 1 : dates au plus tôt et au plus tard

Recopiez ce graphe sur votre feuille d'examen. Indiquez les dates au plus tôt et au plus tard sur les sommets du graphe, et soulignez le chemin critique.



Quel problème concernant des séquences a été réduit en cours à un problème de dates au plus tôt et au plus tard ?

Le graphe complété est donné ci-dessous. Le calcul de la plus longue séquence commune à deux séquences données a été réduit en cours à un problème de dates au plus tôt et au plus tard.



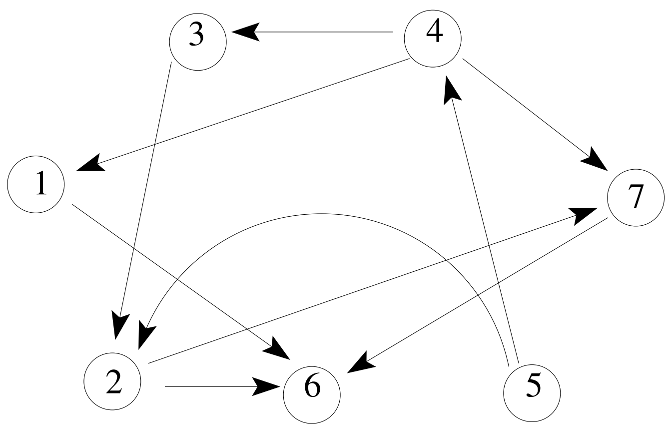
2 Problème 2 : tri topologique

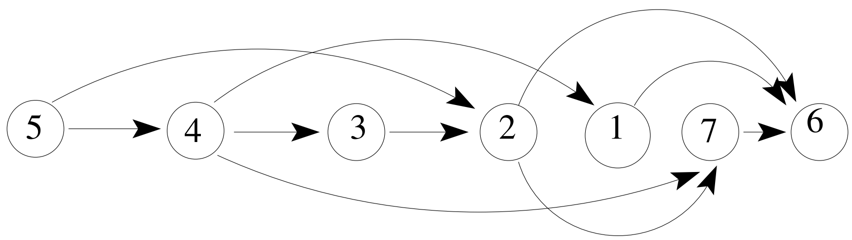
Pour redessinez le graphe ci-dessous pour que tous les arcs aillent de gauche à droite (comme ceci : $\rightarrow$) : Quels sont les premiers sommets possibles ? Quels sont les derniers sommets possibles ? Pourquoi ?

Redessinez le graphe.

Les premiers sommets possibles sont ceux sans arc entrant (5). Les derniers sommets possibles sont ceux sans arc sortant (6).

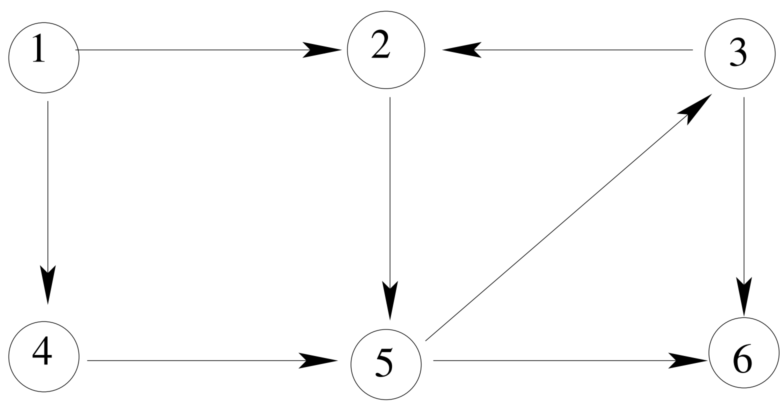
Le graphe redessiné est donné ci-dessous.





3 Problème 3 : composantes fortement connexes

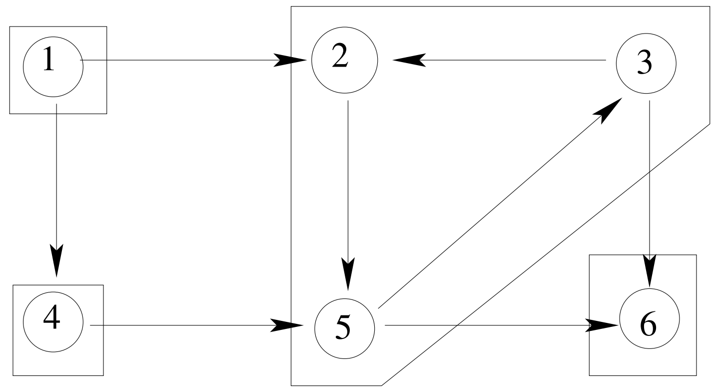
Entourez les composantes fortement connexes. Dessinez le graphe réduit (chaque sommet du graphe réduit représente une CFC).

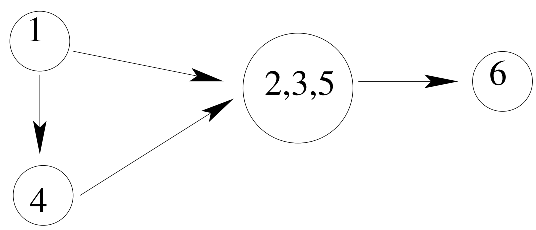


Le sommet 1 qui n'a pas d'arc entrant et le sommet 6 qui n'a pas d'arc sortant sont réduit à une CFC. Le sommet 4 n'est accessible que depuis 1, il est donc lui aussi réduit à une CFC.

Les sommets restants (2, 3, 5) forment une CFC.

Le graphe modifié est donné ci-dessous.





4 Problème 4 : Euclide et Bézout

Calculez, avec l'algorithme d'Euclide généralisé, (x, y, g), tels que g soit le PGCD de 72 et 39, et que $72x + 39y = g$. Donnez le détail de vos calculs (comme en TD), par exemple dans un tableau, ou avec des produits matriciels.

Cet algorithme donne le couple (x, y) tel que $x^2 + y^2$ soit minimal. Donnez une formule avec un paramètre $t \in \mathbb{Z}$ permettant de générer toutes les paires (x, y) telles que $72x + 39y = g$.

Version 1- tableau calculé avec 1 et 0.

$a = 72$	$b = 39$	$a \mod b$	$a \div b$	$pgcd$	u	v
72	39	33	1	3	6	-11
39	33	6	1	3	-5	6
33	6	3	5	3	1	-5
6	3	0	2	3	0	1
3	0			3	1	0

Version 2- tableau calculé avec 1 et t.

$a = 72$	$b = 39$	$a \mod b$	$a \div b$	$pgcd$	u	v
72	39	33	1	3	$-13t + 6$	$24t - 11$
39	33	6	1	3	$11t - 5$	$-13t + 6$
33	6	3	5	3	$1 - 2t$	$11t - 5$
6	3	0	2	3	t	$1 - 2t$
3	0			3	1	t

5 Problème 5

Rappel : Pour calculer efficacement la séquence de Fibonacci, définie par $F(0) = 0, F(1) = 1, F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, on considère l'expression matricielle :

$$\begin{pmatrix} F(n) \\ F(n-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(n-1) \\ F(n-2) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} F(1) \\ F(0) \end{pmatrix}$$

Pour calculer rapidement la séquence : $G(0) = 1, G(1) = 4, G(n) = 2 \times G(n-1) + n + 1$, quelle expression matricielle faut-il considérer ? Vous pouvez compléter la matrice ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} G(n) \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(n-1) \\ n-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Attention : la matrice ne doit contenir que des constantes.
La matrice à utiliser est :

$$\begin{pmatrix} G(n) \\ n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(n-1) \\ n-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Expliquez pourquoi cette formulation permet de calculer $F(n)$ ou $G(n)$ rapidement.
Il suffit de calculer la puissance n de la matrice ci-dessus, en utilisant un algorithme de puissance rapide.
En fait, $G(n) = a2^n + bn + c$. Comment calculeriez-vous les valeurs des constantes a, b, c ?

6 Quizz

1. Citez deux problèmes indécidables en informatique.
   La terminaison d'un algorithme (ou d'une machine de Turing), l'égalité de deux nombres réels (ou complexes), l'égalité de deux fonctions (par exemple de N dans N).
2. Quand dit-on qu'un problème, bien que décidable, est difficile en informatique ?
   Quand aucun algorithme en temps polynomial permettant de résoudre ce problème n'est connu.
3. Citez deux problèmes solubles en informatique, mais difficiles.
   Résoudre un problème SAT (où un solveur SAT est un programme qui décide automatiquement si une formule de logique propositionnelle est satisfaisable). Trouver un chemin ou un circuit hamiltonie n (passant par tous les sommets dans un graphe). Trouver une clique max ou un stable max. Factoriser un très grand entier.
4. Citez trois algorithmes efficaces pour trier des nombres, en utilisant des comparaisons. Dire quelle est la complexité de ces algorithmes.
   — tri par fusion ou mergesort, $O(nlog(n))$
   — tri par tas ou heapsort, $O(nlog(n))$
   — tri rapide ou quicksort, en moyenne complexité en $O(nlog(n))$.
5. Citez deux algorithmes qui trient des nombres entiers sans effectuer de comparaisons entre les nombres à trier :
   — le "radix sort", ou tri par base,
   — le tri par comptage lorsque le nombre de valeurs distinctes est faible.
6. Donnez le nom de deux algorithmes calculant les plus courts chemins dans un graphe. Dijkstra, Floyd, Ford (ou Ford-Bellman), Dantzig, Warshall, pseudo produit matriciel : (AB) l,c = min k (A lk + B kc).
7. Citer trois noms de structures de données vues en cours.
   Les listes, piles, files, graphes ... ainsi que les tableaux.
8. Quel est le nom (éventuellement en anglais) de la méthode vue en cours pour résoudre le "problème des reines" ?
   Les algorithmes avec backtrack.