EXAMEN LICENCE 2, MODULE I31, 18-12-2014

1 La méthode de Newton

1. La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 4$. Donnez $f'(x)$.
2. Donnez $N(x)$, où N est la fonction de Newton associée.
3. Expliquez à quoi elle sert, en 2 lignes au plus.
4. Calculez (à la main ou avec une calculette) $N(1/2)$, $N(1)$, $N(2)$, $N(3)$, $N(4)$ et dessinez approximativement, mais avec soin, la courbe $(x, N(x))$ pour $1/2 \leq x \leq 4$. Dessinez aussi la droite d'équation $y = x$. En partant de $x_0 = 4$, donnez les valeurs de $x_k = N(x_{k-1})$ pour $k = 1$ à 3 et dessinez le "trajet" correspondant sur la courbe, comme vous l'avez vu en cours.

2 L'erreur d'Arthur

Pour tracer le triangle de Sierpinski (Fig. 1) de sommets donnés (A, B, C) au niveau de récursion n, Arthur remplit le triangle ABC, et quand n est plus grand que 0, il trace récursivement trois triangles de Sierpinski au niveau $n - 1$, qui sont : (A, B', C'), (B, A', C') et (C, A', B') où A' est le milieu de BC, B' celui de AC et C' celui de AB.

1. Arthur s'est trompé. Que voit-il sur son dessin ? Quelle est son erreur ? Comment la corriger ?

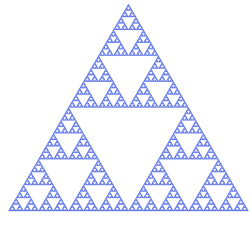

FIGURE 1 – Un triangle équilatéral de Sierpinski.

3 Les ensembles non consécutifs

Un ensemble d'entiers est dit non consécutif s'il ne contient pas deux entiers consécutifs (n et $n+1$ sont consécutifs, pour $n \in \mathbb{N}$). Par définition, F_k est l'ensemble des sous-ensembles non consécutifs d'entiers dans l'intervalle $[1 \dots k]$ (zéro est inutilisé, pour simplifier).

On note f_k le nombre d'éléments (de sous ensembles) de F_k. Rappelons que $\emptyset$ est l'ensemble vide. Ce dernier ne contient rien (même pas zéro).

Par exemple :
$F_0 = \{\emptyset\}$, $f_0 = 1$,
$F_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$, $f_1 = 2$,
$F_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$, $f_2 = 3$,
$F_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$, $f_3 = 5$,
$F_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, $f_4 = 8$.
Définissons :

$$F_k \oplus v = \bigcup_{E \in F_k} \{v\} \cup E$$

Par exemple,

$$F_2 \oplus 4 = \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$$

1. Quel est le plus petit entier $v \in \mathbb{N}$ qui assure que $F_k \oplus v$ est un ensemble non consécutif ?

2. Calculez $(F_1 \oplus 3) \cup F_2$. Comparez avec F_3. Calculez $(F_2 \oplus 4) \cup F_3$. Comparez avec F_4. Que constatez-vous ?

3. En généralisant pour tout $k \geq 2$, conjecturez une définition récursive de F_k en fonction de F_{k-1} et F_{k-2}. Aucune preuve n'est demandée (mais donnez une conjecture exacte !).

4. En déduire une formule récursive pour f_k.

5. Reconnaissez vous f_k ? Si oui, qui est f_k ?

4 Algorithme d'Euclide

Utilisez l'algorithme d'Euclide généralisé pour calculer le PGCD g de $a = 210$ et $b = 66$. Outre le PGCD, vous devez aussi calculer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = g$. Utilisez une présentation sous forme de tableau, avec des colonnes a, b, q, r, u, v, g, comme en TD.

5 Matrices

Soient A et B deux matrices données. A a l_A lignes et c_A colonnes. B a l_B lignes et c_B colonnes. Soit $M = AB$. La matrice M a l_M lignes et c_M colonnes.

1. Définissez l_M et c_M en fonction de l_A, c_A, l_B, c_B. Y-a-t-il des contraintes sur l_A, c_A, l_B, c_B pour que le produit AB soit possible ? Si oui, lesquelles ? (il est inutile de mentionner que l_A, c_A, l_B, c_B sont des entiers de $\mathbb{N}$).

2. Définissez $M_{l,c}$ (ou $M[l][c]$ en Java ou en C), pour que $M = AB$, par une formule avec un signe $\sum$ (les indices commencent à 0 ; l est le numéro de ligne et c le numéro de colonne). Combien de multiplications (entre nombres flottants) sont nécessaires pour calculer $M_{l,c}$?

3. Calculez :

$$(1 \quad 2)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Calculez :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}(3 \quad 4)$$

6 Algorithme d'Euclide matriciel

Une autre méthode de calcul du PGCD de a et b utilise des matrices, dites d'Euclide :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} \text{ pour } a = bq + r \text{ où } q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor, r = a \bmod b$$

Par exemple, pour $a = 35$ et $b = 10$:

$$\begin{pmatrix} 35 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme a terminé car le reste est nul. Donc :

$$\begin{pmatrix} 35 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice carrée finale M contient, dans sa colonne gauche, $\frac{a}{g}$ et $\frac{b}{g}$, et dans sa colonne droite deux entiers U et V tels que $|M| = \frac{a}{g}U - \frac{b}{g}V = \pm 1 \Rightarrow aU - bV = \pm g$. On a $|M| = \pm 1$ car le déterminant de chaque matrice d'Euclide vaut -1, et le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants des matrices. On déduit de : $35 \times 1 - 10 \times 3 = 5$ les deux nombres de Bézout $u = 1$ et $v = -3$ tels que $au + bv = g$.

1. Faites de même pour $a = 210$, $b = 66$. Déduisez en le PGCD g et les nombres de Bézout u, v de a et b, tels que $au + bv = g$.

7 Réseau

Les vecteurs sont notés en ligne, comme : $A = (5, 3)$. Deux vecteurs A, B donnés, à coordonnées dans $\mathbb{Z}$, génèrent un réseau de points $aA + bB$, avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$. Il est parfois noté $\mathbb{Z}A + \mathbb{Z}B$. Sur la figure 2, $A = (5, 3)$ et $B = (4, 1)$ et chaque disque noir représente un élément (un sommet, ou vecteur, ou point) du réseau. Le réseau est infini, et la figure n'en montre qu'une partie finie. Les vecteurs $I = (1, 2)$ et $J = (-3, 1)$ sont plus courts que A et B, et génèrent le même réseau : $\mathbb{Z}A + \mathbb{Z}B = \mathbb{Z}I + \mathbb{Z}J$. Il n'existe pas de vecteurs strictement plus courts que I, J pour ce réseau. On rappelle que la longueur, ou norme, de $v = (x, y)$ est $||v|| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On peut calculer deux vecteurs les plus courts par une variante de la méthode d'Euclide : on suppose que A est plus long que B (sinon, vous échangez A et B). Soit R le vecteur le plus court parmi les deux vecteurs : $A + B$ et $A - B$. Si R n'est pas plus court que A, alors (A, B) est une paire la plus courte ; sinon l'algorithme recommence sur la paire (B, R) ou (R, B).

1. Effectuez les diverses étapes de cet algorithme pour : $A = (5, 3)$, $B = (4, 1)$.

2. Cet algorithme termine en un nombre fini d'étapes. Pourquoi ? (2 lignes).

3. Pour accélérer la méthode précédente, nous allons calculer l'entier $q \in \mathbb{Z}$ qui minimise la taille du reste R dans $A = qB + R \Rightarrow R = A - qB$. Proposez une méthode ou une formule pour trouver la valeur optimale de q. Vous pouvez vous inspirer de la figure 3.

4. On suppose que A est plus long que B, et que $R = A - qB$ est plus court que A. En notant $R = (R_x, R_y)$, $A = (A_x, A_y)$, et $B = (B_x, B_y)$, écrivez l'équation : $A = qB + R$ sous forme matricielle, avec des matrices de taille 2 par 2. Une matrice d'Euclide doit apparaître.

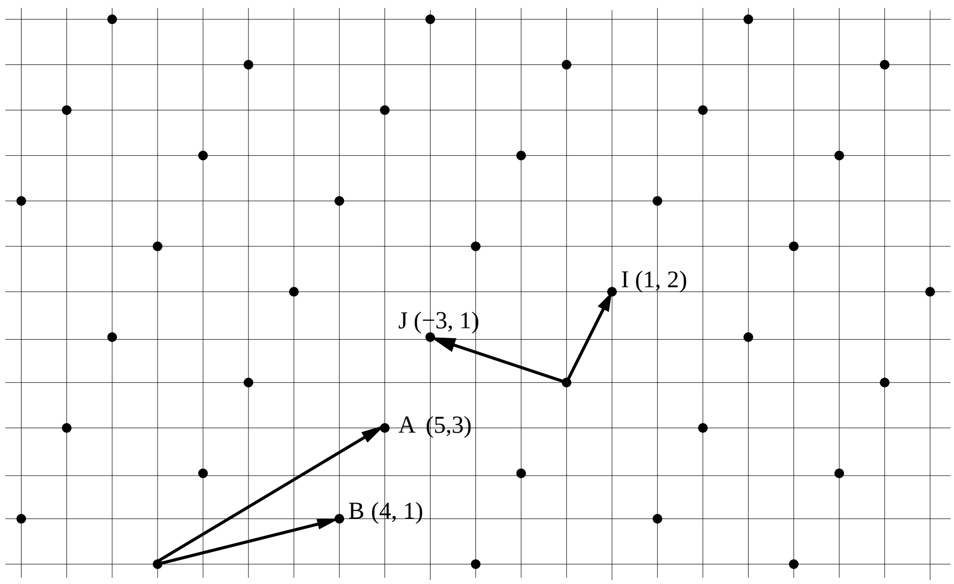

FIGURE 2 – Un réseau généré par deux vecteurs A et B. Le même réseau est généré par I, J, plus courts que A et B.

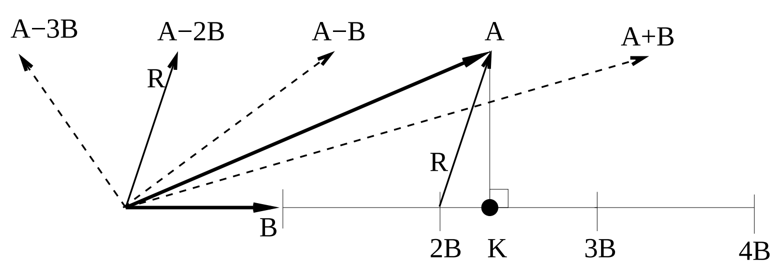

FIGURE 3 – Pour A, B deux vecteurs donnés, on cherche le vecteur $R = A - qB$ le plus court, avec $q \in \mathbb{Z}$. La solution est obtenue en projetant orthogonalement l'extrémité de A sur la droite supportée par B, en K, puis en arrondissant K sur le multiple entier de B le plus proche, ici $2B$.