INFO I31, examen 2012

Question 1 – Algorithme d'Euclide étendu. Soient $a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq a \leq b$. La fonction $BZ : (a,b) \rightarrow (x,y,g)$ est telle que g est le PGCD de a et b, et x, y sont deux entiers relatifs (de $\mathbb{Z}$) tels que $ax + by = g$. Complétez la définition suivante : $BZ(0,b) = (0,1,b)$; et $BZ(a>0,b) = (?,?,g)$ où q est le quotient de b par a (division euclidienne), $r = b \mod a$, et $(x', y', g) = BZ(r,a)$.

Question 2 – Pour (a,b) donnés, les (x,y) de Bezout ne sont pas uniques. Décrivez tous les (x_k, y_k) solutions pour (a,b) quelconque et un couple (X,Y) solution.

Question 3 – Déroulez la méthode d'Euclide étendue pour $(a,b) = (55,89)$, dans un tableau avec les colonnes $a, b, q = \lfloor \frac{b}{a} \rfloor, r = b \mod a, x, y, g$ (à chaque ligne, $ax + by = g$ doit être vraie)

Question 4 – Citez un premier problème indécidable (insoluble).

Question 5 – Citez en un second.

Question 6 – Citez un premier problème difficile sur les graphes ("difficile" : dont on ne connait pas de méthode en temps polynomial dans le pire des cas)

Question 7 – Citez en un second.

Question 8 – Pour quelle valeur de $k > 1$ est il toujours facile de décider si un graphe non orienté donné est coloriable en k couleurs, et facile de trouver un tel coloriage s'il en existe un ?

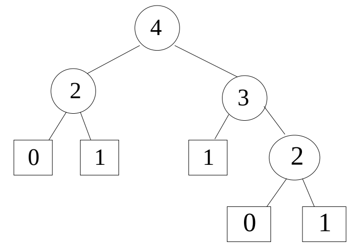
Question 9 – Donnez les formules récursives pour le calcul **rapide** de a^k, où a est une matrice carrée, et $k \in \mathbb{N}$

Question 10 – Donnez la formule matricielle permettant de calculer F_n, où F_n est le n ième nombre de Fibonacci : $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ quand $n > 1$

Question 11 – Le problème SAT consiste à trouver les valeurs des inconnues booléennes $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ (vrai ou faux) qui rendent vraie une formule donnée, telle que : $(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$ et $x_4 \vee x_5 \vee \neg x_7)$ et .... Aucune méthode en temps polynomial en n n'est connue. Donnez le nombre de valeurs possibles pour x (qui satisfasse ou non la formule) pour n quelconque

Question 12 – Pour $n = 30000$, convertissez le nombre précédent en puissance de 10, en utilisant $2^{10} \approx 10^3$.

Question 13 – $2^{10} \approx 10^3 \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 10} \approx ??$



Question 14 – L'arbre de Fibonacci T_4 est dessiné cidessus. T_0 est une feuille portant l'étiquette 0, T_1 est une feuille portant l'étiquette 1 ; pour $n > 1$, T_n est un noeud binaire, dont le fils gauche est T_{n-2} et dont le fils droit est T_{n-1}. Remplissez un tableau avec les lignes n, I_n, U_n, Z_n et les colonnes $n = 0, 1 \ldots 8$: U_n est le nombre de feuilles étiquetées 1 de T_n, Z_n le nombre de feuilles étiquetées 0 de T_n, I_n le nombre de noeuds intérieurs (non feuilles) de T_n. Donnez des formules récursives définissant U_n, Z_n, I_n. Quelle relation remarquez vous entre U_{n+1} et I_n ? Aucune preuve n'est demandée.

Question 15 – Le temps d'exécution d'un algorithme est $T(n)$ pour une donnée de taille n, où $T(1) = 1$ et $T(n) = 3T(n/2) + n$. **Prouver par récurrence** que $T(2^k) = 3^{k+1}\alpha + 2^{k+1}\beta$ pour des constantes α, β que vous dévinerez. Pour vous aider, remplissez d'abord le tableau : $n = 2^k, k, T(n), 3^{k+1}, 2^{k+1}$ pour k de 0 à 4. Inutile d'écrire ce tableau sur votre copie

Question 16 – Prouvez que $3^{\log_2 n}$ est en $O(n^{log_3 2})$ (Remarque : $\log_3 2 \approx 1.5849625$)

Question 17 – Arthur conjecture que si, dans un graphe non orienté, tous les sommets distincts soit sont voisins, soit ont un voisin en commun, alors il existe au moins un sommet qui est voisin de tous les autres. Que pensez

(tournez la page s.v.p)

vous de cette conjecture

- ☐ *elle est vraie*
- ☐ *elle est fausse et vous en dessinez un contre exemple simple*

Soient trois ensembles finis donnés E, F, G. A et B sont des matrices, telles que A_{ef} est le coût de l'arc de $e \in E$ à $f \in F$, et B_{fg} est le coût de l'arc de $f \in F$ à $g \in G$ (s'il n'y a pas d'arc, on utilise ∞). Le coût minimum C_{eg} de $e \in E$ à $g \in G$ est $\min_{f \in F} A_{ef} + B_{fg}$. Les questions suivantes généralisent ces notions.

Question 18 – *A_{ef} est la probabilité de mourir en utilisant l'arc $e \to f$; B_{fg} est la probabilité de mourir en utilisant l'arc $f \to g$. Quelle est la probabilité de mourir, en utilisant le chemin le moins risqué pour aller de $e \in E$ à $g \in G$? (on demande une formule, pas un algorithme !)*

Question 19 – *Ici, les matrices A et B sont des matrices donnant la probabilité du passage d'un sommet à un autre dans un graphe sous jacent. Ces matrices sont appelées matrices de Markov, ou matrices stochastiques. Par exemple, E, F, G sont respectivement des noms (ou groupes nominaux : "le chat"), des verbes, des adjectifs. A_{ef} est la probabilité pour que le mot $e \in E$, qui vient d'être prononcé, soit suivi du mot $f \in F$. De même B_{fg} est la probabilité pour que le mot $f \in F$, qui vient d'être prononcé, soit suivi du mot $g \in G$. Or une probabilité vérifie certaines conditions (par exemple, appartenir à $[0, 1]$). Quelle est la condition supplémentaire sur, disons, la matrice A, qui n'était pas indispensable pour la question précédente ?*

Question 20 – *(Suite) Quelle est la probabilité de la phrase sujet-verbe-adjectif la plus probable qui commence par e et se termine par g ? ou : quelle est la probabilité du chemin le plus probable qui commence en e et se termine en g ?*

Question 21 – *(Suite) Quelle est la probabilité qu'une "phrase" (un chemin) qui commence en e ($e \in E$) se termine en g ($g \in G$) ?*

Question 22 – *Vous devez additionner n nombres flottants positifs donnés, par exemple $n = 10^6$, et les n nombres sont dans un tableau $T[]$. Donnez un exemple simple où il y a une grande imprécision.*

Question 23 – *Proposez un algorithme, ou son principe, pour limiter l'imprécision numérique.*

Question 24 – *Logique. P_1 : tous les chats ne sont pas verts. Q_1 : aucun chat n'est vert. P_2 : tous les corbeaux ne sont pas blancs. Q_2 : aucun corbeau n'est blanc. Etc. Plus généralement, P : tous ces A ne sont pas B, et Q : aucun de ces A n'est B. A-t-on*

- ☐ *$P \Leftrightarrow Q$: P et Q sont équivalents*
- ☐ *$P \Rightarrow Q$: P implique Q.*
- ☐ *$Q \Rightarrow P$: Q implique P.*
- ☐ *Ça dépend des cas*

Question 25 – *Logique. Voici une preuve par récurrence que tous les corbeaux sont de la même couleur. C'est vrai pour 0 corbeau et pour 1 corbeau. Prouvons que si c'est vrai pour n corbeaux, alors c'est vrai pour $n+1$ corbeaux. Les $n+1$ corbeaux sont $C_1, C_2, \ldots C_n, C_{n+1}$. Les n premiers corbeaux : $P = (C_1, \ldots C_n)$ sont de la même couleur (par hypothèse de récurrence) ; les n derniers corbeaux : $D = (C_2, \ldots C_n, C_{n+1})$ sont de la même couleur (par hypothèse de récurrence) ; mais ces deux ensembles ont en commun $n-1$ corbeaux $I = (C_2, \ldots C_n)$, qui sont de la même couleur ; donc les corbeaux de I sont de la même couleur que ceux de P (car $I \subset P$), et ceux de D (car $I \subset D$). Que pensez vous de ce raisonnement par récurrence ?*

- ☐ *il est correct (d'ailleurs tous les corbeaux sont noirs) ;*
- ☐ *il est incorrect. Où est la faille ?*