EXAMEN 2017 INFO 31

? ? 2017

Répondez dans l'ordre aux questions. Répondez à chaque question en une ligne. Ecrivez lisiblement.

Question 1. Calculez le PGCD g et les coefficients de Bezout u et v de $a = 84$ et $b = 48$, avec le tableau habituel. On rappelle que $au + bv = g$. Dans la dernière ligne, $a = 12$, $b = 0$, r et q sont non définis, $g = 12$, $u = 1$ et $v = k$. Seule est demandée la première ligne du tableau : $a = 84$, $b = 48$, $r =?$, $q =?$, $g =?$, $u =?$, $v =?$. On rappelle que $q = a \div b$ et r est a modulo b.

Question 2. Quelle est la solution de l'équation : $7^{\log_2 n} = n^x$. L'inconnue est x.

Question 1. Citer deux problèmes indécidables en informatique.

Question 2. Soient $(n_i, t_i = T(n_i))$ pour $i = 1, \ldots N$. Les n_i sont les tailles des données de test pour un programme, et les t_i sont les temps que met le programme pour calculer avec n_i données. Les points (n_i, t_i) sont affichés dans un diagramme log-log : autrement dit, les points $(x_i = \log n_i, y_i = \log t_i)$ sont affichés. Si le programme est en $O(n^d)$, sur quelle courbe se trouvent les points (x_i, y_i) ?

Question 3 (suite). Même question si le programme est en $O(2^n)$?

Question 4. Parfois, il est nécessaire de fusionner des entités dans la même classe d'équivalence. Quel est le nom anglais de ce problème ?

Question 5. Citer 3 méthodes pour calculer les plus courts chemins dans un graphe.

Question 6. Le produit de deux matrices A (avec l_A lignes de 0 à $l_A - 1$ et c_A colonnes de 0 à $c_A - 1$) et B (avec l_B lignes de 0 à $l_B - 1$ et c_B colonnes de 0 à $c_B - 1$, avec $c_A = l_B$ est une matrice C de l_A lignes et c_B colonnes. Donnez la formule (donc ni un programme, ni un algorithme) définissant $C_{l,c}$ (l est la ligne, c est la colonne).

Question 7 (suite). Supposons que $A_{l,c}$ soit la distance entre l'élément numéro l d'un ensemble E et l'élément numéro c d'un ensemble F. De même, $B_{l,c}$ est la distance entre l'élément numéro l de F et l'élément numéro c d'un ensemble G. Les ensembles F, G, H sont disjoints deux à deux. Donnez en une formule la distance $C_{l,c}$ entre l'élément l de E et l'élément c de G. Vous pouvez noter e, f, g les tailles de E, F, G.

Question 8 (suite). La formule précédente est vraie quand $E = F = G$. Il n'y a plus qu'une seule matrice, carrée, disons A, avec $A_{ii} = 0$ (ce n'était pas vraie dans la question précédente). Pensez à la puissance rapide d'une matrice. Quelle méthode cela suggère-t-il pour calculer les longueurs de tous les plus courts chemins dans le graphe ?

Question 9. Une suite $f_0, f_1, f_2 \ldots$ est définie par f_0, f_1 et la relation $f_n = 3f_{n-1} - 2f_{n-2}$ pour $n > 1$. Quelle relation matricielle faut-il utiliser pour le calcul rapide de f_n ?

Question 10. Existe-t-il une valeur de f_0 et f_1 telle que $f_n = 2^n$? Si oui lesquelles ?

Question. Strassen a trouvé un algorithme pour multiplier deux matrices carrées n par n en temps $T(n)$ tel que : $T(1) = 1$, $T(n) = 7T(n/2)$. Quelle est la complexité de l'algorithme ? Utiliser la notation $O(n^?)$. La preuve n'est pas demandée.

Question. Le chemin critique dans un graphe acyclique est-il un plus court chemin ?

Question 2. Un programme est en $O(n^2)$, avec n la taille des données. Quand la taille des données est multipliée par 10, par combien est multiplié le temps de calcul ?

Question 4. Citer deux algorithmes de tri qui trient des entiers sans les comparer.

Question 5. En détaillant chaque phase, trier avec la méthode du tri par base (radix sort) les entiers : 321, 331, 132, 123, 113, 231, 233, 212.

Question 5. Citer 4 structures de données (autres que les tableaux).

Question 5. Résoudre $n^x = 3^{\log_2(n)}$. L'inconnue est x.

Question 6. Donnez un algorithme dont le temps de calcul $T(n)$ pour n données est solution de l'équation : $T(1) = 1, T(n) = 2T(n/2) + n$.

Question 7. Quelle est la solution de l'équation : $T(1) = 1, T(n) = 2T(n/2)+n$? Utilisez la notation O.

Question 8. Citer deux problèmes résolus par programmation dynamique.

Question 9. Calculer le plus grand diviseur commun g et les coefficients de Bezout u et v des deux entiers 70 et 49, c'est à dire $70u + 49v = g$. Utilisez une table avec les colonnes a, b, $r = a \bmod b$, $q = a \div b$, g, u, v.

Question 10. Donnez d'autres coefficients de Bezout pour le problème précédent. Vous les exprimerez en fonction d'un entier relatif t.

Question 15. Strassen a trouver une méthode de multiplication de deux matrices varrées de taille n par n qui nécessite 7 (et non 8) multiplications de matrices carrées de taille $n/2$ par $n/2$. Le temps de l'algorithme est donc $T(1) = 1, T(n) = 7T(n/2) + n^2$. Le n^2 est dû au temps des additions et des soustractions de matrices. Résolvez, plus simplement : $T(1) = 1, T(n) = 7T(n/2)$. Vous devez obtenir $T(n) = O(n^?)$. A titre indicatif : $\log_2(7) = ln(7)/ln(2) = 2.8073549$.