EXAMEN 2017 INFO 31

20 décembre 2017

Répondez **DANS L'ORDRE** aux questions. Répondez à chaque question soit **EN UNE LIGNE** soit avec un dessin. **AUCUNE PREUVE N'EST DEMANDÉE.** Ecrivez **LISIBLEMENT** SVP.

Question 1. Calculez le PGCD g et les coefficients de Bezout u et v de $a = 84$ et $b = 48$, avec le tableau habituel. Dans la dernière ligne, v vaut $k \in \mathbb{Z}$. Que valent g, u et v (u et v sont des fonctions de k) dans la première ligne de votre tableau ?

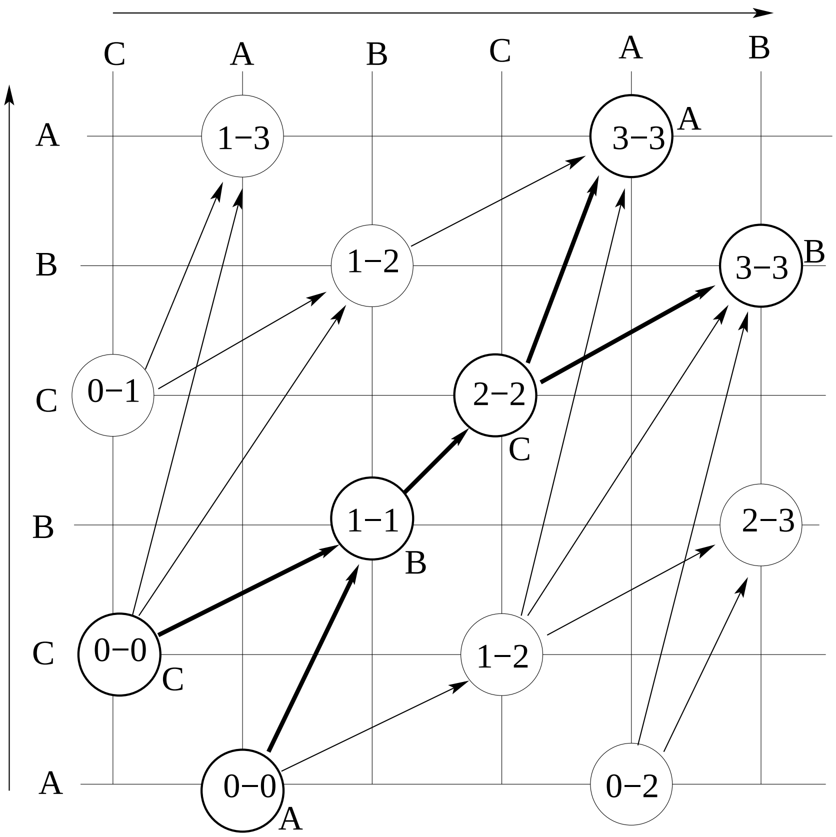
Réponse. $g = 12$, $u = -1 + 4k$, $v = 2 - 7k$.

Question 2. Considérer l'équation en x : $7^{\log_2 n} = n^x$. Que vaut x ?

Réponse. $x = \log_2 7$. Donc x est indépendant de n et vaut $2.80735492205760417\ldots$. Preuve : $7^{\log_2 n} = n^x \Rightarrow \log_2(7^{\log_2 n}) = (\log_2 n)(\log_2 7) = x \log_2 n \Rightarrow \log_2 7 = x$. Les réponses où x dépendait ou semblait dépendre de n ont été considérées comme fausses. Remarque : $\log_2 7 = (\ln 7)/(\ln 2) = (\log_b 7)/(\log_b 2)$ sont aussi justes.

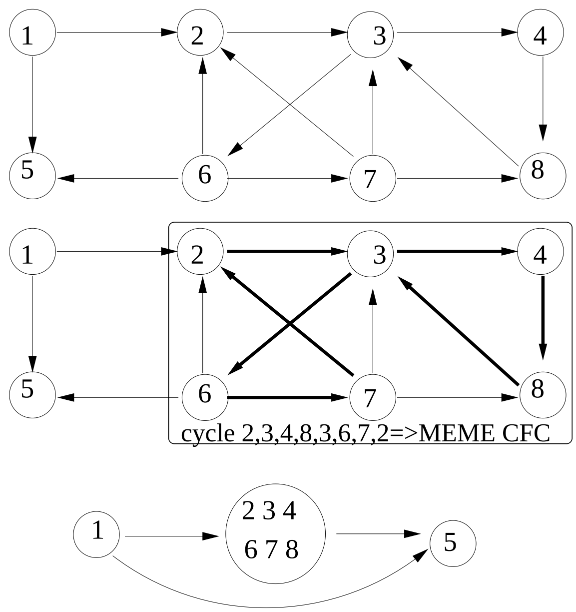
Question 3. La séquence commune la plus longue entre $U = CABCAB$ et $V = ACBCBA$ est le chemin critique d'un graphe orienté. Dessinez le graphe et son chemin critique. Rappel : les sommets du graphe sont les couples (i, j) tels que $U_i = V_j$. Il y a un arc de (i_1, j_1) à (i_2, j_2) ssi $i_1 < i_2$ et $j_1 < j_2$. Ne tracez pas les arcs inutiles. Les arcs doivent aller de gauche à droite en montant. Vous pouvez ajouter une source et un puits virtuels ; la durée de leurs arcs est nulle. Tous les autres arcs ont comme durée 1. Calculez les dates au plus tôt et au plus tard des sommets du graphe. Mettez en évidence le chemin critique.

Réponse. Il y a quatre séquences communes de longueur maximale, quatre : $ABCA$, $ABCB$, $CBCA$, $CBCB$, visibles sur ce graphe :



Question 4. Dessinez le graphe réduit (sous-entendu : des composantes fortement connexes) de ce graphe. Etiquetez-en les sommets avec les numéros des sommets du graphe initial. Tous les arcs du graphe réduit doivent aller de gauche à droite.

Réponse. Deux sommets (distincts) font partie de la même CFC si un cycle du graphe passe par ces deux sommmets. Le dessin met en évidence un cycle maximal (il est impossible de lui ajouter un sommet), qui est non hamiltonien (il passe plus d'une fois par un sommet). Tous ses sommets font partie de la même CFC. Il n'y a pas d'autre cycle maximal. Le dernier dessin montre le graphe réduit (tous les arcs vont de gauche à droite, donc il n'y a pas de cycle) ; chaque sommet du graphe réduit est une CFC du graphe initial.



Question 5. Soient $(n_i \in \mathbb{N}, t_i = T(n_i) \in \mathbb{R})$ pour $i = 1, \dots N$. Les n_i sont les tailles des données de test pour un programme, et les t_i sont les temps que met le programme pour calculer avec n_i données. Les points de coordonnées $(x_i = \log_2 n_i, y_i = \log_2 t_i)$ sont affichés. Si $T(n) = n^d$, quelle est l'équation de la courbe sur laquelle se trouvent les points (x_i, y_i) ?

Réponse. $y = dx$. C'est l'équation d'une droite de pente d. Bien sûr, l'équation demandée doit lier x et y. Notez que d n'est pas forcément entier. Preuve : $x = \log_2 n, y = \log_2(n^d) = d \log_2 n = dx$.

Question 6 (suite). Même question si le programme est en temps $T(n) = 2^n$.

Réponse. $y = 2^x$. Ou bien : $\log_2 y = x$. La courbe reste donc exponentielle. Preuve : $x = \log_2 n \Leftrightarrow 2^x = n$, et $y = \log_2(2^n) = n \log_2 2 = n = 2^x$. Donc $y = 2^x$.

Question 7. Chaque arc d'un graphe orienté est étiqueté par la probabilité de mort (ou de panne, pour être moins sinistre) en empruntant cet arc. Pour calculer le chemin le plus sûr dans ce graphe, il faut savoir calculer la probabilité de mort d'un chemin, $A \to B \to C$. Soit p la probabilité de mort de l'arc $A \to B$ et q celle de $B \to C$. Quelle est celle de $A \to B \to C$? Répondez en une ligne. Aucune preuve n'est demandée.

Réponse. $1 - (1-p)(1-q) = p + q - pq$. Indication : $1 - p$ est la probabilité de survie sur le premier arc, et $1 - q$ la probabilité de survie sur le second arc. La probabilité de survie sur $A \to B \to C$ est le produit $(1-p)(1-q)$, et la probabilité de mort est donc $1-(1-p)(1-q)=p+q-pq$.

Question 8. Chaque arc d'un graphe orienté est étiqueté par la probabilité d'emprunter cet arc. La somme des probabilités des arcs issus d'un même sommet vaut 1. Ce graphe est appelé une chaîne de Markov. Par exemple, les sommets sont des sites du web et les arcs des hyperliens équiprobables parcourus par un robot. Soient p la probabilité de l'arc $A \to B$ et q celle de $B \to C$, quelle est la probabilité du chemin $A \to B \to C$? Répondez en une ligne. Aucune preuve n'est demandée.

Réponse. pq.

Question 9. La suite f est définie par $f(0)$, $f(1)$ et la règle récursive : $f(n) = af(n-1)+bf(n-2)+cn+d$, avec a,b,c,d donnés. Que vaut la matrice M dans cette équation :

$$\begin{pmatrix} f(n) \\ f(n-1) \\ n+1 \\ 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} f(n-1) \\ f(n-2) \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cette fois, vous avez le droit de répondre en 4 lignes.

Réponse.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 10 (suite). A quoi M peut-il servir ? Répondre en une ligne.

Réponse.

A calculer rapidement $f(n)$ en $O(\log_2 n)$ avec la puissance rapide.

A trouver une formule explicite pour $f(n)$ (non demandée). Ici, l'expression est : $f(n)=\alpha 1^n+\alpha' n 1^n+\beta\lambda^n+\beta'\lambda'^n$, où 1, $\lambda=(a-\sqrt{a^2+4b})/2$ et $\lambda'=(a+\sqrt{a^2+4b})/2$ sont les 3 valeurs propres de M, dont l'équation caractéristique est : $|M-xI|=(1-x)^2(x^2-ax-b)=0 \Rightarrow x=1$ ou $x=\lambda$ ou $x=\lambda'$. Les valeurs des constantes $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$ peuvent être trouvées en résolvant un système linéaire sur $f(0), f(1), f(2), f(3)$, ou bien en remplaçant $f(n)$, $f(n-1)$ et $f(n-2)$ par leurs expressions explicites (contenant $\alpha,\alpha',\beta,\beta'$, λ,λ') dans l'équation : $f(n)=af(n-1)+bf(n-2)+cn+d$, et en résolvant.