CORRECTION EXAMEN I31 SESSION 2, 2015 - 2016

Tous vos documents sont autorisés, mais pas la copie de votre voisin. N'écrivez aucun programme. Ecrivez lisiblement. Répondez aux questions dans l'ordre, en indiquant le numéro de chaque question.

1. Euclide et Bézout

En utilisant l'algorithme d'Euclide étendu, calculez le pgcd de 128 et 100 ainsi que les coefficients de Bezout u et v, tels que :

$$u \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}, 128u + 100v = \mathrm{PGCD}(128, 100)$$

Complétez le tableau ci-dessous. Attention ! u et v sont des fonctions de k, le coefficient v à la dernière ligne.

Solution.

a	b	r=a%b	q=a÷ b	pgcd(a,b)	u	v
128	100	28	1	4	25k-7	-32k+9
100	28	16	3	4	-7k+2	25k-7
28	16	12	1	4	4k-1	-7k+2
16	12	4	1	4	-3k+1	4k-1
12	4	0	3	4	k	3k+1
4	0	–	–	4	1	k

2. Equation de récurrence et complexité

A. Pour le tri par fusion, quelle est l'équation récursive donnant le temps (ou le nombre d'instructions élémentaires) $T(n)$ nécessaire pour trier n éléments ? Vous prendrez $T(0) = 1$.

Réponse. $T(n) = 2T(n/2) + n$. La solution est $T(n) = O(n \log n)$.

B. Quelle est la solution de cette équation ? Indication : ce n'est pas $O(n^2)$.

Réponse. La solution est $T(n) = O(n \log n)$.

C. Quelle est la complexité des tris optimaux, en ne considérant que les tris effectuant des comparaisons ?

Réponse. $(n \log n)$.

D. Citez deux algorithmes qui trient des entiers sans les comparer.

Tri par tiroir ("bucket sort"), et tri par base ("radix sort").

E. Quelle est la complexité du tri naïf ?

Réponse. $O(n^2)$.

3. Sous mot commun le plus long

Soit un mot A et un mot B. Par exemple $A = 6878568$ et $B = 857686$. Les indices commencent à 1, par commodité : $A_1 = 6, A_2 = 8$. Les sous-mots les plus longs et communs à A et à B sont 8786, 8768, et 8568. Les lettres ne sont pas forcément consécutives, mais l'ordre des lettres dans les deux mots doit être préservé.

Trouver le mot commun le plus long se ramène à calculer le chemin critique dans un graphe défini comme suit. Il y a un sommet S_{ij} chaque fois que A_i égale B_j. Par commodité, un sommet source S_{00} et un sommet puits $S_{\infty\infty}$ sont ajoutés. Il y a un arc entre S_{ij} et S_{kl} ssi $i < k$ et $j < l$. Les arcs de transitivité sont facultatifs. C'est une bonne idée de dessiner le sommet S_{lc} à l'intersection d'une ligne horizontale l et d'une droite verticale c : ainsi tous les arcs vont dans la même direction (de gauche à droite et en montant).

A. Dessinez le graphe pour l'exemple $A = 6878568$ et $B = 857686$. En supposant que tous les arcs ont une durée de 1, notez les dates au plus tôt et au plus tard sur chaque sommet du graphe. Déduisez-en les chemins critiques. Quels sont-ils ?

Réponse. A un renommage près, le problème est le même que dans

`http://ufrsciencestech.u-bourgogne.fr/master1/mi1-tc5/EN_VRAC/PLSSC/pluslongcommun.pdf`

Une des solutions a été oubliée Fig. 1.

B. Supposons que A et B sont deux ensembles – l'ordre entre les lettres n'a pas d'importance. Cependant, chaque lettre de A ne peut être appariée qu'avec une seule lettre (identique) dans B. Décrivez **en français** une méthode efficace pour résoudre ce problème.

Réponse. Pour chaque lettre de A, compter combien de fois elle apparaît dans A et dans B (en utilisant une table de hachage par exemple). Si une lettre apparaît a fois dans A et b fois dans B, alors elle apparaît $\min(a, b)$ dans le multi-ensemble intersection de A et de B.

C. Quand le graphe est sans cycle, trouver le chemin le plus long est possible en temps polynômial. Pour un graphe général (qui peut avoir des cycles), est-ce toujours vrai ? Le chemin doit être sans répétition de sommet.

Réponse. Non, c'est un problème difficile, qui généralise le problème du chemin hamiltonien.

D. En A, nous avons utilisé de la programmation dynamique. Citez un autre problème soluble avec de la programmation dynamique.

Réponse. Pour le sac à dos, pour le parenthésage optimal de produits de matrices, pour la séquence croissante la plus longue, pour la distance d'édition entre deux mots, pour le calcul des chemins critiques dans les graphes, et beaucoup d'autres.

4. Résoudre

A. Résoudre $2^x = 3^k$. L'inconnue est x.

Solution :

$$2^x = 3^k \Rightarrow x \log 2 = k \log 3 \Rightarrow x = k \log 3 / \log 2$$

B. Résoudre $2^k = \exp x$, où l'inconnue est x. Remarque : $\exp x$ est aussi noté e^x, avec e la base des logarithmes naturels.

Solution :

$$2^k = \exp x \Rightarrow k \log 2 = \log \exp x = x$$

C. Résoudre $a = \log x$. L'inconnue est x.

Solution :

$$\exp a = \exp(\log x) = x$$

5. Suite

On note $S_{a,b}$ une suite vérifiant : $S_{a,b}(0) = a, S_{a,b}(1) = b$ et la relation de récurrence : $S_{a,b}(n) = 3S_{a,b}(n-1) - 2S_{a,b}(n-2)$ pour $n \geq 2$.

A. Complétez le tableau suivant. Pour alléger, on écrit s_0 pour $S_{a,b}(0)$, et s_i pour $S_{a,b}(i)$.

Solution.

	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
$S_{0,1}$	0	1	3	7	15	31
$S_{1,0}$	1	0	-2	-6	-14	-30
$S_{1,1}$	1	1	1	1	1	1
$S_{1,2}$	1	2	4	8	16	32
$S_{2,1}$	2	1	-1	-5	-13	-29

B. Que remarquez-vous entre d'une part : $S_{0,1}(n)$ et $S_{1,0}(n)$, et d'autre part : $S_{a,b}(n)$?

Réponse. $S_{0,1}(n)$ et $S_{1,0}(n)$, et d'autre part : $S_{a,b}(n)$?

C. Complétez la matrice :

Solution.

$$\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_0 \end{pmatrix}$$

D. Complétez la matrice et la puissance :

$$\begin{pmatrix} s_n \\ s_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_0 \end{pmatrix}$$

Rappel. Le déterminant de

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est $AD - BC$.

E. Le déterminant de $M - \lambda I_{2,2}$, où M est la matrice précédente, et $I_{2,2}$ la matrice identité, est un polynôme en la variable λ. Que vaut-il ? Quelles sont les deux racines de ce polynôme en λ ? Appelons les λ_1 pour la plus petite, et λ_2 pour la plus grande.

Réponse. $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Les deux racines sont 1 et 2.

F. En fait, $S_{a,b}(n) = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$. Quelles sont les valeurs de α_1 et α_2 (en fonction de a et b) qui sont telles que $S_{a,b}(0) = a$, et $S_{a,b}(1) = b$?

Réponse. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Donc $S(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = a, S(1) = \alpha_1 + 2\alpha_2 = b \Rightarrow \alpha_1 = 2a - b, \alpha_2 = b - a$. Donc

$$S_{a,b}(n) = 2a - b + (b - a)2^n$$

G. Toutes les suites $S_{a,b}$ sont périodiques modulo m, un nombre entier non nul. Quelle est la longueur maximale de la période, en fonction de m ? Expliquez pourquoi ?

Réponse : m^2. La suite est complètement fixée par deux termes consécutifs. Appelons couple deux termes consécutifs. Par exemple, dans 10, 20, 30, 40, les couples sont : (10, 20), (20, 30), (30, 40)... Donc la suite est complètement déterminée par le premier couple. Mais il y a au plus m^2 couples distincts, modulo m. Donc la période ne peut pas être plus longue que m^2 couples, donc m^2 éléments (prendre le premier entier de chaque couple).

6. Puissance de matrice

A. Quel est l'ordre de grandeur du nombre minimal de produits de matrices pour calculer M^k, où M est une matrice donnée, et $k \in \mathbb{N}$ est un entier donné ? Rappelez les formules récursives. La matrice peut-elle être non carrée ?

Réponse. $O(\log k)$ produits matriciels sont nécessaires. $M^0 = I$, où I est la matrice identité. Cas des puissances paires : $M^{2k} = (M^2)^k$. Cas des puissances impaires : $M^{2k+1} = M(M^{2k})$, ou bien $M^{2k+1} = M(M^2)^k$. Donc chaque appel récursif divide la puissance par 2. Au bout de $O(\log k)$ appels récursifs, on termine sur M^0. La matrice doit être carrée : dans un produit, le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la seconde. Donc si les deux matrices sont identiques, le nombre de ligne doit égaler le nombre de colonnes.

B. Supposons M diagonale. D'ailleurs appelons la D, et notons la $\text{diag}(d_1, d_2, \dots d_n)$. Ainsi la matrice identité est $\text{diag}(1, \dots 1)$. Que vaut D^k, avec $k \in \mathbb{N}$, et $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots d_n)$? Quel est l'intérêt, relativement à la question précédente ?

Réponse.

$$D^k = \text{diag}(d_1^k, d_2^k, \dots d_n^k)$$

L'intérêt est que cette formule ne nécessite aucun produit matriciel (un produit de matrice carrée de taille n par n est en $O(n^3)$, avec la méthode naïve).

Soient les trois matrices M, D, V :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont telles que $MV = VD$, la matrice V est inversible, et D est diagonale.

C. Déduisez-en une formule explicite pour M^k, avec $k \in \mathbb{Z}$, où les seules puissances de matrices sont des puissances de D. Ne remplacez pas D, V, V^{-1} par leur valeur.

Réponse : $M^k = (VDV^{-1})^k = (VDV^{-1})(VDV^{-1})\dots = VD^kV^{-1}$. D est une matrice diagonale, et son vecteur diagonal est $(1, 2)$. Donc D^k est une matrice diagonale, et son vecteur diagonal est $(1, 2^k)$.

D. La matrice M a déjà été rencontrée. Donnez une formule matricielle explicite pour calculer $S_{a,b}(n)$, où les seules puissances de matrices sont des puissances de D. Ne remplacez pas D, V, V^{-1} par leur valeur.

Réponse. La première ligne est suffisante :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} s_n \\ s_{n-1} \end{pmatrix} &= M^{n-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_0 \end{pmatrix} = V D^{n-1} V^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_0 \end{pmatrix} \\
&= V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} V^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_0 \end{pmatrix} \\
&= V \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp((n-1)\log 2) \end{pmatrix} V^{-1} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$