EXAMEN ALGORITHMIQUE AVANCEE

LICENCE 2, MODULE I31

18 décembre 2014

LA COPIE EST NOTEE ZERO DES QU'IL Y A UN PROGRAMME.

1 La méthode de Newton

1. La fonction f est définie par $f(x) = x^2 - 4$. Donnez $f'(x)$.

2. Donnez $N(x)$, où N est la fonction de Newton associée. Expliquez à quoi elle sert, en 2 lignes au plus.

3. Donnez $N'(x)$.

4. Calculez (à la main ou avec une calculette) $N(1/2), N(1), N(2), N(3), N(4)$ et dessinez approximativement, mais avec soin, la courbe $(x, N(x))$ pour $1/2 \leq x \leq 4$. Dessinez aussi la droite d'équation $y = x$. En partant de $x_0 = 4$, donnez les valeurs de $x_k = N(x_{k-1})$ pour $k = 1$ à 3 et dessinez le "trajet" correspondant sur la courbe, comme vous l'avez vu en cours.

2 L'erreur d'Arthur

Arthur a programmé le dessin du fractal de Sierpinski. Pour tracer le triangle de Sierpinski de trois points donnés (A, B, C) au niveau de récursion n, Arthur remplit le triangle ABC, et quand n est plus grand que 0, il trace récursivement trois triangles de Sierpinski au niveau $n - 1$, qui sont : (A, B', C'), (B, A', C') et (C, A', B') où A' est le milieu de BC, B' celui de AC et C' celui de AB.

Que voit Arthur sur son dessin, à sa grande déception ? Quelle est son erreur ?

3 Les ensembles non consécutifs

Un ensemble d'entiers est dit non consécutif s'il ne contient pas deux entiers consécutifs (n et $n+1$ sont consécutifs, pour $n \in \mathbb{N}$). Par définition, F_k est l'ensemble des sous-ensembles non consécutifs d'entiers dans l'intervalle $[1 \dots k]$ (zéro est inutilisé, pour simplifier).

On note f_k le nombre d'éléments (de sous ensembles) de F_k. Rappelons que $\emptyset$ est l'ensemble vide. Ce dernier ne contient rien (même pas zéro).

Par exemple :

$F_0 = \{\emptyset\}$, $f_0 = 1$,
$F_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$, $f_1 = 2$,
$F_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$, $f_2 = 3$,
$F_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$, $f_3 = 5$,
$F_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, $f_4 = 8$.

Définissons :

$$F_k \oplus v = \bigcup_{E \in F_k} \{v\} \cup E$$

Par exemple,

$$F_2 \oplus 4 = \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$$

1. Quel est le plus petit entier $v \in \mathbb{N}$ qui assure que $F_k \oplus v$ est un ensemble non consécutif ?

Réponse. $v \geq k + 2$

2. Calculez $(F_1 \oplus 3) \cup F_2$. Comparez avec F_3. Calculez $(F_2 \oplus 4) \cup F_3$. Comparez avec F_4. Que constatez-vous ?

3. En généralisant pour tout $k \geq 2$, conjecturez une définition récursive de F_k en fonction de F_{k-1} et F_{k-2}. Aucune preuve n'est demandée (mais donnez une conjecture exacte !).

Réponse. $F_0 = \{\emptyset\}$, $F_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$ *et pour* $k > 1$: $F_k = F_{k-1} \cup (F_{k-2} \cup k)$;

4. En déduire une formule récursive pour f_k.

Réponse. $f_0 = 1, f_1 = 2, f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$.

5. Reconnaissez vous f_k ? Si oui, qui est f_k ?

Réponse. C'est la suite de Fibonacci, décalée.

4 Algorithme d'Euclide

Utilisez l'algorithme d'Euclide généralisé pour calculer le PGCD g de $a = 210$ et $b = 66$. Outre le PGCD, vous devez aussi calculer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = g$. Utilisez une présentation sous forme de tableau, comme en TD.

5 Matrices

Soient A et B deux matrices données. A a l_A lignes et c_A colonnes. B a l_B lignes et c_B colonnes. Soit $M = AB$. La matrice M a l_M lignes et c_M colonnes.

1. Définissez l_M et c_M en fonction de l_A, c_A, l_B, c_B. Y-a-t-il des contraintes sur l_A, c_A, l_B, c_B pour que le produit AB soit possible ? Si oui, lesquelles ? (il est inutile de mentionner que l_A, c_A, l_B, c_B sont des entiers de $\mathbb{N}$).

Réponse. M a a lignes et b' colonnes. M_{lc} est le produit scalaire de la ligne l de A par la colonne c de B ; Il faut donc que $a' = b$.

2. Définissez $M_{l,c}$ (ou $M[l][c]$ en Java ou en C), pour que $M = AB$, par une formule avec un signe $\sum$ (les indices commencent à 0 ; l est le numéro de ligne et c le numéro de colonne). Combien de multiplications (entre nombres flottants) sont nécessaires pour calculer $M_{l,c}$?

Réponse.

$$M_{l,c} = \sum_{k=0}^{b-1} A_{l,k} B_{k,c}$$

Il y a $b = a'$ multiplications pour calculer $M_{l,c}$.

3. Calculez :

$$(1 \quad 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Réponse. C'est la matrice (11), ou le vecteur (11), ou bien le nombre 11. Cet abus de langage est consacré par l'usage.

4. Calculez :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3 \quad 4)$$

C'est la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

6 Algorithme d'Euclide matriciel

Une autre méthode de calcul du PGCD de a et b utilise des matrices, dites d'Euclide :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ r \end{pmatrix} \text{ pour } a = bq + r \text{ où } q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor, r = a \bmod b$$

Par exemple, pour $a = 35$ et $b = 10$:

$$\begin{pmatrix} 35 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme a terminé car le reste est nul. Donc :

$$\begin{pmatrix} 35 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice carrée finale M contient, dans sa colonne gauche, $\frac{a}{g}$ et $\frac{b}{g}$, et dans sa colonne droite deux entiers U et V tels que $|M| = \frac{a}{g}U - \frac{b}{g}V = \pm 1$. On a $|M| = \pm 1$ car le déterminant de chaque matrice d'Euclide vaut -1, et le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants des matrices. On déduit de : $aU - bV = \pm g$ les deux nombres de Bézout u et v pour a et b ; U et u sont égaux au signe près, de même pour V et v.

Faites les calculs avec cette forme matricielle pour $a = 210$, $b = 66$. Déduisez en le PGCD g et les nombres de Bézout u, v de a et b, tels que $au + bv = g$.

7 Réseau

Ici, les vecteurs sont notés en ligne, par exemple : $A = (5, 3)$. Deux vecteurs A, B donnés, à coordonnées dans $\mathbb{Z}$, génèrent un réseau de points $aA + bB$, avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$. Ce réseau est parfois noté $\mathbb{Z}A + \mathbb{Z}B$. Sur la figure ci-dessus, $A = (5, 3)$ et $B = (4, 1)$ et chaque disque noir représente un

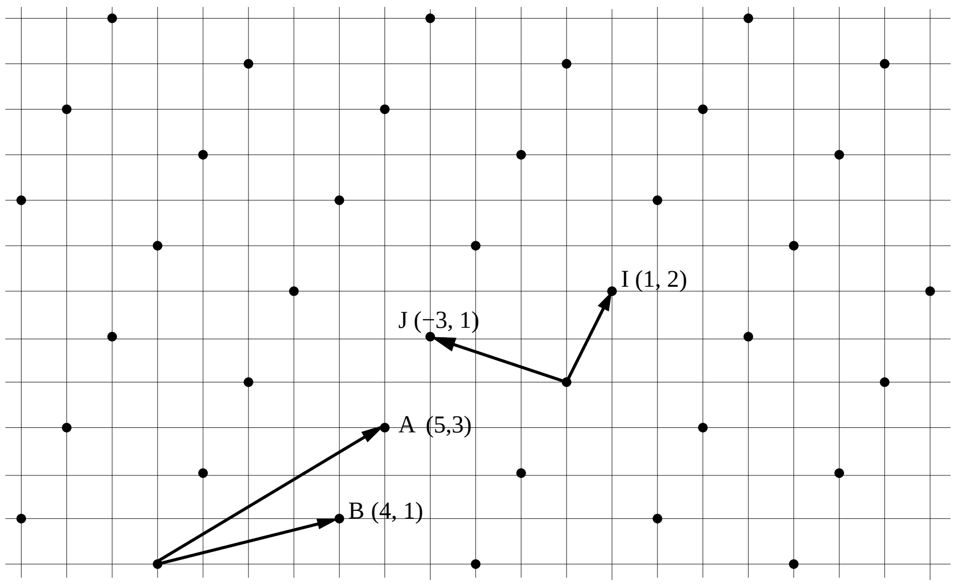

FIGURE 1 – Un réseau généré par deux vecteurs A et B. Le même réseau est généré par I, J, plus courts que A et B.

élément (un sommet, ou vecteur, ou point) du réseau. Le réseau est infini, et la figure n'en montre qu'une partie finie, dans un rectangle. Les vecteurs $I = (1, 2)$ et $J = (-3, 1)$ sont plus courts que A et B, et génèrent le même réseau : $\mathbb{Z}A + \mathbb{Z}B = \mathbb{Z}I + \mathbb{Z}J$. Il n'existe pas de vecteurs strictement plus courts que $\pm I, \pm J$ pour ce réseau.

Rappel : la longueur, ou norme, d'un vecteur $v = (x, y)$ est $||v|| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Bien sûr, pour comparer deux longueurs, vous n'avez pas besoin d'extraire les racines carrées : vous pouvez comparer les carrés des normes.

On peut calculer deux vecteurs les plus courts par une variante de la méthode d'Euclide, que voici : on suppose que A est plus long que B (sinon, vous échangez A et B). Soit R le vecteur le plus court parmi les deux vecteurs : $A + B$ et $A - B$. Si R n'est pas plus court que A, alors $(\pm A, \pm B)$ est la paire la plus courte ; sinon l'algorithme recommence sur la paire (B, R) ou (R, B).

1. Effectuez les diverses étapes de cet algorithme sur l'exemple : $A = (5, 3)$, $B = (4, 1)$, de normes respectives $\sqrt{34}$ et $\sqrt{17}$.

Réponse. Algorithme 1 : on suppose que A est plus long que B ; soit R le vecteur le plus court de $A \pm B$. Si R n'est pas plus court que A, alors (A, B)

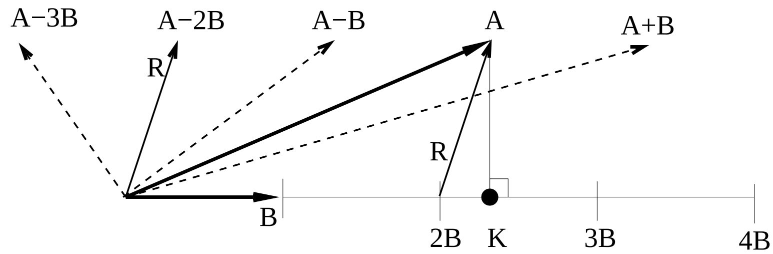

FIGURE 2 – Pour A, B deux vecteurs donnés, on cherche le vecteur $R = A - qB$ le plus court, avec $q \in \mathbb{Z}$. La solution est obtenue en projetant orthogonalement l'extrémité de A sur la droite supportée par B, en K, puis en arrondissant K sur le multiple entier de B le plus proche, ici $2B$.

est une paire la plus courte ; sinon on recommence sur la paire (B, R) *(ou bien* (R, B)*). Cette méthode est similaire à la méthode d'Euclide qui utilise la différence. Voici les étapes :*

Etape 1 : Les deux vecteurs de base sont $A = (5, 3), B = (4, 1)$*. Le vecteur* $A - B = (1, 2)$ *est plus court que* A *et le remplace.*

Etape 2 : On échange les deux vecteurs de base, qui sont $A = (4, 1), B = (1, 2)$*. Le vecteur* $A - B = (3, -1)$ *est plus court que* $A + B = (5, 3)$*, et plus court que* A *et le remplace.*

Etape 3 : Les deux vecteurs de base sont $A = (3, -1)$ *et* $B = (1, 2)$*. Ni* $A + B = (4, 1)$*, ni* $A - B = (2, -3)$ *ne sont plus courts que* A*. Donc la base la plus courte est* $(3, -1)$ *et* $(1, 2)$*.*

2. Cet algorithme termine en un nombre fini d'étapes. Prouvez le (2 lignes au plus).

Comme les tailles (les carrés des longueurs des vecteurs de la paire) sont des entiers de $\mathbb{N}$*, et que chaque étape diminue une des tailles, l'algorithme termine en un nombre fini d'étapes. C'est différent de la convergence de la méthode de Newton, qui s'approche du point fixe mais ne l'atteint jamais.*

3. Pour accélérer la méthode précédente, nous allons calculer l'entier $q \in \mathbb{Z}$ qui minimise la taille du reste R dans $A = qB + R \Rightarrow R = A - qB$. Proposez une méthode ou une formule pour trouver la valeur optimale de q. Vous pouvez vous inspirer de la figure **??**.

Algorithme 2 : on calcule $Q \in \mathbb{Z}$ *tel que* $A - qB$ *est le plus court possible. Soit* K *la projection orthogonale de* A *sur* B *; alors* $K = \lambda B$*, et* q *est l'entier* *le plus proche de $-\lambda$. Si $q = 0$, alors A, B est la paire la plus courte, sinon on recommence sur $B, R = A - qB$. Détaillons le calcul de λ. $(A - \lambda B)\bullet B = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{A\bullet B}{B\bullet B} = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{B_x^2 + B_y^2}$, et $q = -\lfloor \lambda \rceil$. Autre possibilité : calculer R pour $q = -1$ et $q = 1$; en déduire le signe du q optimal ; trouver un encadrement de q en considérant des puissances de 2 pour q ; puis procéder par dichotomie dans l'intervalle des deux puissances consécutives de 2 qui contiennent le q optimal.*

4. On suppose que A est plus long que B, et que $R = A - qB$ est plus court que A. En notant $R = (R_x, R_y)$, $A = (A_x, A_y)$, et $B = (B_x, B_y)$, écrivez l'équation : $A = qB + R$ sous forme matricielle, avec des matrices de taille 2 par 2. Une matrice d'Euclide doit apparaître.

Réponse.

$$\begin{pmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x & B_y \\ R_x & R_y \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice de l'algorithme d'Euclide, celle qui contient q et qui est de déterminant -1.

Voici les étapes pour l'algorithme 2 (Ceci n'était pas demandé dans l'examen).

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ car } \lambda = \frac{23}{17}, q = 1$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ car } \lambda = \frac{6}{5}, q = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ car } \lambda = \frac{1}{10}, q = 0$$

Mais ce n'est pas fini bien que $q = 0$, car A est plus court que B. Cette étape permet donc d'échanger A et B.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ car } \lambda = \frac{1}{5}, q = 0$$

Ce coup ci, c'est terminé. A est plus long que B, et $q = 0$. Donc il est impossible de remplacer le plus long vecteur, A, par un plus court.

Donc :

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Après quelques calculs :

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Les deux vecteurs les plus courts sont donc $I = (1, 2)$ *et* $J = (3, -1)$. *De plus les deux vecteurs initiaux de base sont* $A = (5, 3) = 2I + J$ *et* $B = (4, 1) = I + J$.