EXAMEN D'ALGORITHMIQUE, I31A, 12-12-2013, L2

Tous vos documents sont autorisés, mais pas la copie de votre voisin. N'écrivez aucun programme. Ecrivez lisiblement. Répondez aux questions dans l'ordre, en indiquant le numéro de chaque question.

1. Déroulez l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de 132 et 102.

2. Déroulez l'algorithme d'Euclide étendu (ou Bézout) pour $a = 132$ et $b = 102$ en remplissant un tableau comme ci-dessous. *Dans la dernière ligne, b est nul et a est le PGCD cherché.* L'algorithme vu en cours calcule g le PGCD de a et b, ainsi que u et v. u et v sont tels que $au + bv = g = PGCD(a, b)$; on note $r = a \mod b$, et $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ le quotient de a par b. Il n'y a qu'une seule réponse correcte.

a	b	r	q	g	u	v

3. (suite) Quand vous remplissez les cases des colonnes u et v, en fonction du contenu de la ligne d'après ou d'avant, quelles formules utilisez vous ? Réponse suggérée : soient (g', u', v') le contenu de la ligne en dessous (ou au dessus ?). Alors $(g, u, v) = (g', ?, ?)$. La preuve n'est pas demandée.

4. (suite) Pour a et b donnés, il existe une infinité de solutions (u, v), déductibles de la solution donnée par l'algorithme. Donnez la formule qui donne toutes les autres solutions.

5. Citez deux problèmes indécidables en informatique.

6. Quand un problème, bien que décidable, est-il jugé difficile en informatique ?

7. Citez un problème décidable mais difficile en informatique.

8. La phrase suivante est-elle vraie, ou bien fausse ? Si un problème est NP, alors il est difficile de vérifier une de ses solutions. Répondez soit : "vraie", soit : "fausse".

9. Citez les noms de 3 algorithmes *optimaux* de tri, utilisant des comparaisons. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de comparaisons, pour trier n éléments ?

10. Le tri par base ("radix sort") n'utilise pas de comparaisons pour trier des entiers. Déroulez les trois étapes de cet algorithme sur cet ensemble : 312, 323, 313, 113, 123, 213, 111, 131, 221. Vous n'utiliserez que trois tiroirs.

11. Citez un autre algorithme de tri d'entiers, qui lui non plus n'utilise pas de comparaison. Est-il plus ou moins efficace que le tri par base ?

12. Quel problème de graphes résout l'algorithme de Dijkstra ?

13. A est une matrice de l_A lignes et c_A colonnes ; B est une matrice de l_B lignes et c_B colonnes. Quand le produit $A \times B$ est-il possible ? Quelle est la taille de la matrice $C = A \times B$, quand ce produit est possible ? Donnez la formule pour $C_{l,c}$ ($C_{l,c}$ est l'élément à la ligne l et à la colonne c de $C = A \times B$) ; vous supposerez que la première ligne (ou colonne) a le numéro 1. Combien de multiplications (entre éléments des matrices) sont effectuées au total, pour calculer C ?

14. Donnez les *formules* nécessaires pour le calcul récursif et *rapide* de a^n (a est une matrice carrée, à valeurs entières ; vous noterez la matrice identité I). N'oubliez pas le ou les cas terminaux. Il est inutile de redonner les formules pour le produit de 2 matrices. Quel est l'ordre de grandeur du nombre de multiplications matricielles effectuées pour calculer a^n ?

15. Dans la question précédente, pourquoi les formules : $a^0 = I, a^1 = a, a^{k+1} = a \times a^k$ ne sont elles pas satisfaisantes ?

16. Quel est le nom de la méthode utilisée pour résoudre "le problème des reines" et "le compte est bon" ?

17. Un arbre binaire a F feuilles ; $F \geq 1$. Tous ses noeuds intérieurs (non feuilles) ont exactement deux fils. L'arbre n'est pas forcément équilibré. Est-il possible de dire combien il a de noeuds intérieurs, ou bien le nombre de noeuds intérieurs peut-il varier ? Donnez le nombre de noeuds intérieurs, si ce nombre est fixé par F. Prouvez votre réponse. *Rédigez votre preuve avec soin.*

18. La suite T est définie par : $T_0 = T_1 = 1, \quad T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + 1$ quand $n \geq 2$. En vous inspirant du cas de la suite de Fibonacci, donnez une formule matricielle exprimant le vecteur colonne : $(T_n, T_{n-1}, 1)$ en fonction d'une matrice, que vous préciserez, et du vecteur colonne $(T_1, T_0, 1)$. Donnez ensuite le principe d'une méthode rapide pour calculer T_n. Quelle est sa complexité, en fonction de n ?

19. L'équation : $ax^2 + bx + c = 0$ est résolue par l'itération de Newton (ou de Newton-Raphson) ; $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}^3$ ont des valeurs données. Donnez la formule pour l'itération de Newton ; $N(x) =?$. Il est demandé de remplacer $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $f'(x)$ par leurs valeurs.

20. (suite) Donnez des valeurs numériques de a, b, c et deux valeurs distinctes x_0, x_1 pour lesquelles $x_1 = N(x_0)$ et $x_0 = N(x_1)$. Autrement dit, l'algorithme boucle. Choisissez des valeurs simples. Illustrez votre exemple par un dessin.