

EXAMEN D'ALGORITHMIQUE, I31A, 17-06-2014, L2

Tous vos documents sont autorisés, mais pas la copie de votre voisin. N'écrivez aucun programme. Ecrivez lisiblement. Répondez aux questions dans l'ordre, en indiquant le numéro de chaque question. Téléphone, calculatrice, tablette, ordinateur, lunettes Google sont interdits. Indication de longueur : n'utilisez pas d'intercalaire. Barème : les 3 dernières questions sont notées sur 3 points chacune, les autres sur 1 point chacune.

1. Déroulez l'algorithme d'Euclide pour calculer le PGCD de 165 et 75.
2. Déroulez l'algorithme d'Euclide étendu (ou Bézout) pour $a = 165$ et $b = 75$ en remplissant un tableau comme ci-dessous. Dans la dernière ligne, b est nul et a est le PGCD cherché. L'algorithme vu en cours calcule g le PGCD de a et b , ainsi que u et v . u et v sont tels que $au + bv = g = \text{PGCD}(a, b)$; on note $r = a \bmod b$, et $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ le quotient de a par b . Il n'y a qu'une seule réponse correcte.

a	b	r	q	g	u	v
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

3. (suite) Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels donnés. Soit une solution (u, v) , donnée elle aussi, du problème de Bézout : donc $au + bv = \text{PGCD}(a, b)$. Mais cette solution (u, v) n'est pas minimale : il existe une autre solution (u', v') telle que $au' + bv' = \text{PGCD}(a, b)$ et le vecteur (u', v') est plus court que (u, v) . Proposez un algorithme pour trouver une solution plus petite que (u, v) , s'il en existe. Attention : vous devez utiliser (u, v) , pas seulement a, b .
4. Vous avez 3 pièces d'or, une balance à deux plateaux, et vous savez qu'exactly une des pièces sur les trois est fausse : elle est plus légère. Expliquez comment vous détectez la pièce fausse en une seule pesée.
5. (suite) Vous avez 3^k pièces d'or, une balance à deux plateaux, et vous savez qu'exactly une des pièces est fausse : elle est plus légère. Expliquez comment vous détectez la pièce fausse en un minimum de pesées.
6. Quel est le nom de la méthode utilisée pour résoudre "le problème des reines" et "le compte est bon" ?
7. Quel est l'ordre de grandeur du nombre minimum de produits matriciels nécessaires pour calculer M^n , où M est une matrice carrée, et n un entier naturel ?
8. Proposez une méthode rapide pour calculer K_n , où K_0, K_1 sont donnés, et $K_n = a_1 K_{n-1} + a_2 K_{n-2} + c$ quand $n > 1$, avec des valeurs connues pour

a_1, a_2, c . Indication : utilisez une matrice de taille 3×3 et l'algorithme de puissance rapide.

9. Les paysans russes réduisaient la multiplication de deux entiers naturels à des sommes (dont des doubléments), et des divisions par deux : l'un des multiplicandes est implicitement décomposé en base 2. Donnez les formules récursives correspondantes pour $a \times b$; vous supposerez que c'est a qui est décomposé en base 2.

10. Définissez le problème SAT en 3 lignes au plus. Un algorithme rapide pour le résoudre est-il connu ?

11. Un compilateur peut-il décider si deux fonctions sont équivalentes (deux fonctions sont équivalentes si elles donnent les mêmes résultats pour tous les arguments possibles) ?

12. Soit l'équation $f(x) = x^2 - 4 = 0$. Définissez la fonction de Newton $N(x)$ associée. Quel sera le point fixe de N en partant de $x_0 = 4$? Pour $x \in [1/2, 5]$, dessinez la courbe $(x, y = N(x))$, la droite d'équation $x = y$, et les premières étapes de la méthode de Newton, en partant de $x_0 = 4$, et de $x_0 = 1$. Pour cela vous calculerez (sans calculatrice) les valeurs numériques de $N(0), N(1), N(2), N(3), N(4), N(5)$.

13. Un arbre binaire, représentant une expression arithmétique, est donné ; ses feuilles portent des nombres ou des noms de variables ; ses noeuds portent des noms d'opérations : $+$, \times . Décrivez un algorithme pour convertir cet arbre en une expression postfixe. Rappel : $1, 2, 3, \times, +$ est une expression postfixe, dont l'évaluation donne $1 + 2 \times 3 = 7$.

14. (suite). Une expression postfixe est représentée par une liste d'éléments ; chaque élément est soit un nombre, soit un nom de variable, soit un nom d'opération ($+$, \times). Décrivez un algorithme pour convertir cette expression postfixe en arbre binaire. Indication : vous pouvez vous inspirer de l'algorithme d'évaluation d'une expression postfixe.