TP : Plus longue séquence croissante

D. Michelucci, E. Gavignet, L. Druoton, N. Gastineau, Université de Dijon

Un tableau non trié d'entiers naturels $E[0], \ldots E[n-1]$ est donné. Il est généré par la méthode `exemple`. Le problème est de calculer la longueur de la séquence croissante la plus longue. Dans cette séquence, tout élément (sauf le dernier) est inférieur ou égal à son élément suivant. En première approximation, vous pouvez supposer pour simplifier que tous les éléments sont différents. Par exemple, ci dessous, pour

$$E = [61; 44; \mathbf{15}; \mathbf{28}; \mathbf{31}; 20; \mathbf{57}; 4; 10; 28]$$

la séquence croissante la plus longue a 4 éléments. C'est :

$$E[2] = 15; E[3] = 28; E[4] = 31; E[6] = 57$$

Question 1. 8 points. Programmez la méthode suivante. Définissez $LT[i]$, comme étant la longueur de la séquence croissante la plus longue qui se termine (et utilise) E_i. $LT[0] = 1$; ensuite exprimez, pour l'indice i croissant de 1 à $n-1$, $LT[i]$ en fonction de $LT[0], \ldots LT[i-1]$; avant de tenter de le programmer, faites le "à la main" sur l'exemple ci-dessus ; vous devez obtenir (ignorez la ligne V) :

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
E	61	44	15	28	31	20	57	4	10	28
LT	1	1	1	2	3	2	4	1	2	3
V	$--$	4	10	28	57	$--$	$--$	$--$	$--$	$--$

L'exemple ci-dessus est obtenu avec `exemple( 10)`.

Question 2. 4 points. Modifiez la méthode d'affichage qui est fournie pour que la séquence soit écrite dans le bon sens (croissant). Par exemple, au lieu d'écrire sur le terminal les termes de la séquence, vous les copiez dans un tableau auxiliaire, puis vous parcourez ce tableau auxiliaire en ordre inverse et imprimez ces éléments.

Question 3 et 4. 2 points pour la question 3, 6 points pour la question 4. La méthode naïve est en temps $O(n^2)$. Programmez une méthode en $O(n \log n)$. Pour cela, stockez dans un tableau $V[l]$ la dernière valeur de la séquence de longueur l (Attention, le tableau V a un élément de plus que E...). Il faut aussi gérer L, la plus grande longueur courante des séquences croissantes. Quand vous cherchez quelle est la plus longue séquence croissante que peut prolonger E_i, au lieu de tester $E_0, \ldots E_{i-1}$, vous chercherez, séquentiellement d'abord, par dichotomie ensuite, dans le tableau $V_1, \ldots V_L$ l'indice l (l est une longueur, $1 \leq l \leq L$) le plus grand tel que $V_l \leq E_i$; en effet V est toujours trié par ordre croissant : $V_1 \leq V_2 \leq V_3 \ldots$, etc ; faites à la main l'exemple ci-dessus pour vous en rendre compte. Si un tel l n'existe pas (quand $E[i]$ est plus petit que tous ses précédents, ou que i est nul), alors votre recherche, séquentielle ou dichotomique, rendra 0. Attention : n'oubliez pas de mettre à jour le tableau $V[l]$ à chaque fois que vous trouvez une séquence de longueur l ; autrement dit, après avoir calculé $LT[i]$, il faut affecter : $V[LT[i]] = E[i]$ (et éventuellement mettre à jour L). Vérifiez que les 2 méthodes retournent les mêmes tableaux LT, pour des E identiques, et que la seconde méthode avec une recherche dichotomique est nettement plus rapide pour des tailles de cent mille ou un million.

Bonus, 2 points (pour rattraper des points sur votre partiel, si vous avez les 20 points). La méthode d'affichage est en $O(n)$, et on préférerait une méthode qui prenne un temps proportionnel à la longueur de la séquence. Dans la méthode naïve, stockez dans un tableau P_i l'indice k de l'élément E_k précédant immédiatement E_i dans la plus longue séquence qui utilise E_i (-1 s'il n'y en a pas de tel k). Ecrivez une méthode d'affichage (en ordre inverse, si c'est le plus simple) qui utilise P. Remarque : P_i est similaire au prédécesseur du sommet i dans les méthodes de plus court chemins.

Bonus, 2 points (pour rattraper des points sur votre partiel, si vous avez les 22 points). Faites de même dans la méthode rapide.