EXAMEN LICENCE 2, MODULE I31, 15-12-2016

LISEZ L'ÉNONCÉ.

RÉPONDEZ AUX QUESTIONS DANS L'ORDRE.

NUMEROTEZ VOS RÉPONSES AUX QUESTIONS.

ÉCRIVEZ LISIBLEMENT.

N'ÉCRIVEZ AUCUN ALGORITHME ET AUCUN PROGRAMME.

N'UTILISEZ PAS D'INTERCALAIRE.

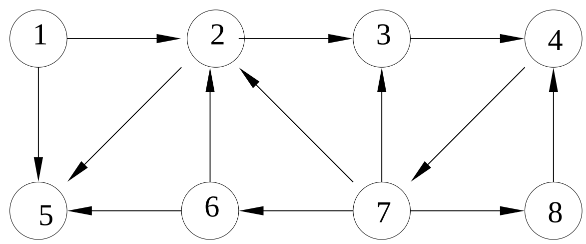
1 Quizz (sur 10 points)

1. Citer 6 structures de données.

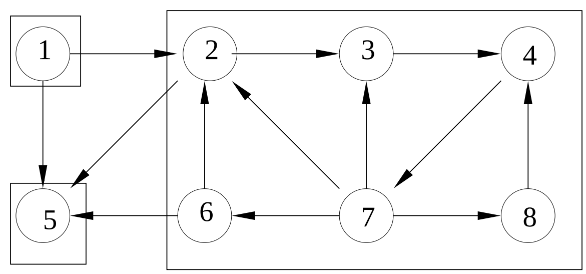
Solution : pile, liste, tas, file, arbre, graphe, table de hachage, tableau

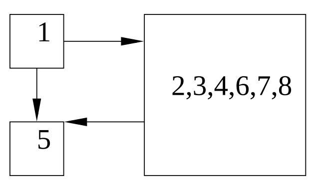
2. En détaillant les trois étapes, triez avec la méthode du tri par base ("radix sort") les nombres : $321, 231, 123, 221, 113, 213, 131, 311$.

3. Le graphe G est ci-dessous. A partir de ses composantes fortement connexes, dessinez son graphe réduit, R. Indiquez sur chaque sommet de R quels sont les sommets correspondant dans G.



Solution.





4. Quelle est la complexité du tri rapide (ou *quicksort*) d'un tableau de n éléments ? Quelle est la formule récursive pour $T(n)$? La méthode n'est pas demandée. Répondre en 1 ligne.

$O(n \log n)$. Equation : $T(n) = n + 2T(n/2)$.

5. Rappelez, par une formule, la définition de la date au plus tôt et de la date au plus tard dans un graphe orienté sans cycle où les arcs sont étiquetés par des durées. N'oubliez pas de cas.

Solution.

$$\textit{tôt}(s) = 0 \ \textit{quand } s \textit{ est une source.}$$

$$\textit{tôt}(s) = \max_{r\,:\,\exists r \to s} \textit{tôt}(r) + \textit{durée}(r \to s)$$

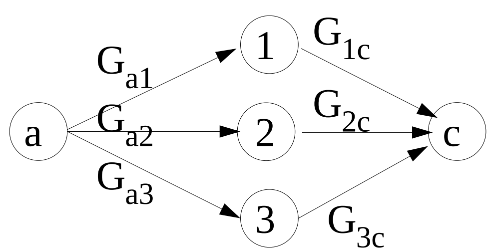
$$\textit{tard}(s) = \textit{tôt}(s) \ \textit{quand } s \textit{ est un puits.}$$

$$tard(s) = \min_{t \,:\, \exists s \to t} tard(t) - durée(s \to t)$$

6. Le chemin critique est-il un chemin le plus court dans le graphe de la question précédente ?

Solution. Non, c'est le chemin le plus long entre la source (ou les sources) et le puits (ou les puits).

7. Dans le graphe de la figure ci-dessous, $G_{u,v}$ est le coût ou la longueur de l'arc $u \to v$. Quel est la longueur du chemin le plus court, en 2 arcs, de a vers c ? Répondez par une formule en 1 ligne : utilisez une variable pour le sommet intermédiaire, par exemple $\sum_b G_{ab} \times G_{bc}$ (cette formule est fausse, quoique syntaxiquement correcte). Pour que votre formule soit tout le temps correcte (même quand il n'existe pas d'arc $u \to v$), que doit valoir $G_{u,v}$ quand il n'existe pas d'arc $u \to v$? Répondre en une ligne.



Solution. La longueur du chemin le plus court est $\min_k G_{ak} + G_{kc}$. *Quand* $u \to v$ *n'existe pas,* $G_{u,v} = \infty$.

8. (suite) $G_{u,v}$ est ici la probabilité de survivre (ou de bon fonctionnement) en parcourant l'arc $u \to v$. Quelle est la probabilité de survivre du chemin le plus sûr, en 2 arcs, de a vers c ? Répondre par une formule en 1 ligne. Pour que votre formule soit correcte quand il n'existe pas d'arc $u \to v$, que doit valoir $G_{u,v}$? Répondre en une ligne.

Solution. La probabilité de survie du chemin le moins risqué est $\max_k G_{ak} \times G_{k,c}$. *Si* $u \to v$ *n'existe pas, alors* $G_{u,v} = 0$.

9. (suite) $G_{u,v}$ est ici la probabilité de mourir (ou de tomber en panne) en parcourant l'arc $u \to v$. Quelle est la probabilité de mourir dans le chemin en 2 arcs le plus sûr de a vers c ? Répondre par une formule en 1 ligne. Pour

que votre formule soit correcte quand il n'existe pas d'arc $u \to v$, que doit valoir $G_{u,v}$? Répondre en une ligne.

Solution. La probabilité de mort du chemin le moins risqué est $\min_k(1 - (1-G_{ak})(1-G_{k,c})) = G_{ak} + G_{k,c} - G_{ak}G_{k,c}$*. Si* $u \to v$ *n'existe pas, alors* $G_{u,v} = 1$*.*

10. (suite) $G_{u,v}$ est ici la capacité de l'arc $u \to v$; en termes imagés, $G_{u,v}$ est le diamètre d'un tuyau qui descend de u à v, dans lequel vont pouvoir rouler ou chuter des billes de diamètre au plus $G_{u,v}$. Quelle est la capacité du chemin de plus grande capacité, en 2 arcs, de a vers c ? Répondre par une formule en 1 ligne. Pour que votre formule soit correcte quand il n'existe pas d'arc $u \to v$, que doit valoir $G_{u,v}$? Répondre en une ligne.

Solution. La capacité maximale est $\max_k(min(G_{ak}, G_{kc}))$*. Si* $u \to v$ *n'existe pas, alors* $G_{u,v} = 0$*.*

Remarque. Les questions 8, 9, 10 n'ont pas forcément été vues en cours. Elles vous permettent de prouver que vous savez lire, que vous comprenez ce que vous lisez, et que vous savez rédiger, autrement dit que vous pouvez programmer : la langue naturelle est le premier langage de programmation, de communication et de spécification. Les questions : "Pour que votre formule soit correcte..." sont posées car il est important d'initialiser correctement les variables.

2 La méthode de Newton (sur 5 points)

1. La fonction f est définie par $f(x) = x^3 - 9$. Donnez $f'(x)$. Donnez $N(x)$, où N est la fonction de Newton associée à f.

Solution. $f'(x) = 3x^2$

Solution. $N(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^3-9)/(3x^2) = 2x/3 + 3/(x^2)$

2. Expliquez à quoi elle sert, en 1 ligne au plus.

Solution. A résoudre $f(x) = 0$*, en trouvant un point fixe de* N*.*

3. Calculez $N(1/2), N(1), N(2), N(3)$ et dessinez avec soin la courbe $(x, N(x))$ pour $0 < x \leq 3$. Dessinez aussi la droite d'équation $y = x$. En partant de $x_0 = 1$, dessinez le chemin suivi par la méthode de Newton (les valeurs exactes ne sont pas demandées).

4. La méthode de la sécante est une variante de la méthode de Newton, où $f'(x)$ est remplacée par $f'(v)$. Calculez $f'(2)$ et indiquez ce que vaut la fonction sécante $S(x)$ pour $v = 2$. Dessinez la courbe $(x, S(x))$ pour $-1 \leq x \leq 3$. Dessinez aussi la droite d'équation $y = x$. En partant de $x_0 = 1$, dessinez le chemin suivi par la méthode de la sécante (Les valeurs exactes ne sont pas demandées).

5. Quand $|N'(x)| < 1$, ou $|S'(x)| < 1$, la convergence est garantie. Résolvez $S'(x) = 1$, ainsi que $S'(x) = -1$ (vous pouvez contrôler vos solutions sur votre dessin).

Réponse. La dérivée de f est $f'(x) = 3x^2$.

La fonction de Newton est : $N(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^3 - 9)/(3x^2)$.

La sécante est $S(x) = x - (x^3 - 9)/12$, et $S'(x) = 1 - 3x^2/12 = 1 - x^2/4$.

$S'(x) = 1 - x^2/4 = 1 \Rightarrow x = 0$

$S'(x) = 1 - x^2/4 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{} = 2\sqrt{2}$

3 Algorithme d'Euclide généralisé (2 points)

Utilisez l'algorithme d'Euclide généralisé pour calculer le PGCD g de $a = 104$ et $b = 39$. Outre le PGCD, vous devez aussi calculer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = g$ (coefficients de Bezout). Utilisez une présentation sous forme de tableau, avec des colonnes a, b, q, r, u, v, g, comme en TD ($q = \lfloor a/b \rfloor, r = a \mod b$).

En fait, il existe une infinité de solutions pour u, v, qu'on peut paramétrer par $t \in \mathbb{Z}$: donnez une expression paramétrée $u(t)$ et $v(t)$ (il y a deux solutions).

Réponse.

a	b	r	q	g	u	v
104	39	26	2	13	-1	3
39	26	13	1	13	1	-1
26	13	0	2	13	0	1
13	0	$*$	$*$	13	1	0

Donc : $u = -1, v = 3, g = 13,$ *et* $au + bv = 104 \times (-1) + 39 \times 3 = 13 = g$. *Divisons par* g : $8 \times (-1) + 3 \times 3 = 1$. *Alors pour tout* $t \in \mathbb{Z}$, $8 \times (-1+3t) + 3 \times (3-8t) = 1$, *donc, en multipliant par* $g = 13$: $104 \times (-1+3t) + 39 \times (3-8t) = 13$. *Donc* $u = -1 + 3t$, $v = 3 - 8t$. *Bien sûr,* $u = -1 - 3t$, $v = 3 + 8t$ *est aussi correct.*

4 Produit optimal de matrices (3 points)

La matrice A a 1 ligne, 1000 colonnes. La matrice B a 1000 lignes, 2 colonnes. La matrice C a 2 lignes, 1000 colonnes.

1. Quel est le nombre de lignes et de colonnes de $(AB)C$ et de $A(BC)$? Quel est le nombre de multiplications pour calculer $(AB)C$, et pour calculer $A(BC)$?

2. Quel est le nom de l'algorithme vu en cours pour trouver le parenthésage optimal ?

3. Donnez la formule (récursive) du coût optimal $C(i, j)$ (avec $i \leq j$) pour multiplier les matrices $M_i, \ldots M_j$ avec ce type d'algorithme. Vous noterez l_i, c_i le nombre de lignes et de colonnes de la matrice M_i.

Réponse. $(AB)C = A(BC) = ABC$ *a 1 ligne et 1000 colonnes. Pour calculer* $(AB)C$ *il faut 2000+2000 multiplications de nombres flottants. Pour calculer* $A(BC)$, *il en faut* 3×10^6. *Nous avons utilisé la programmation dynamique pour trouver le parenthésage optimal. La formule est :*

$$C(i, j) = 0 \text{ si } i = j$$

$$C(i, j) = \min_{k=i}^{j-1} C(i, k) + C(k+1, j) + l_i \times c_k \times c_j$$