EXAMEN LICENCE 2, MODULE I31, 15-12-2016

1 Quizz

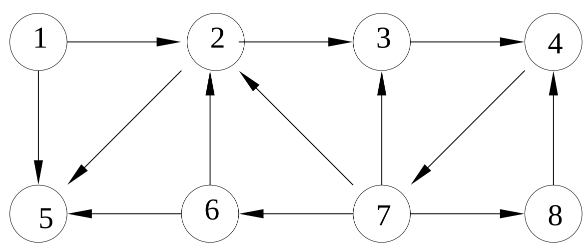
1. Citer 6 structures de données.

Solution : pile, liste, tas, file, arbre, graphe, table de hachage, tableau

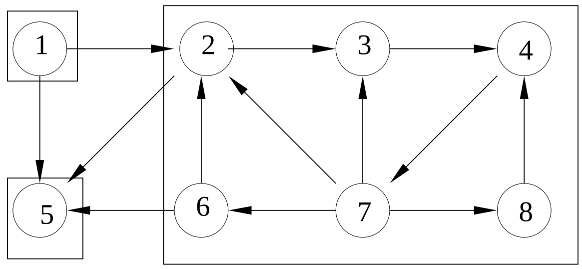
2. En détaillant les trois étapes, triez avec la méthode du tri par base ("radix sort") les nombres :

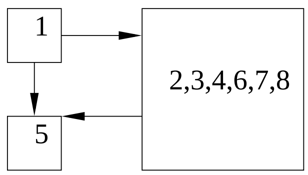
$$321, 231, 123, 221, 113, 213, 131, 311$$

3. Dessinez le graphe réduit, R, du graphe G ci-dessous. Indiquez sur chaque sommet de R quels sont les sommets correspondant dans G.



Solution.





4. Quelle est la complexité (très probable) pour trouver le k ième élément dans un tableau non trié de n éléments ? Quelle est la formule récusive pour $T(n)$? La méthode n'est pas demandée. Par convention, le premier élément est le 1 ième, et le plus petit.

Solution. $O(n)$. Utiliser le tri rapide (quicksort) "d'un seul côté". La formule est donc : $T(n) = T(n/2) + n$.

5. Peut-on utiliser l'algorithme de Dijkstra quand les arcs portent des coûts négatifs ? Même question pour l'algorithme de Ford (ou Ford-Bellman, ou Bellman-Ford, ou Bellman–Ford–Moore [1]) ?

Solution. Non pour Dijkstra. Oui pour Ford.

6. Un graphe orienté a des arcs étiquetés avec des coûts négatifs. Existe-t-il forcément des circuits de coût global négatif ? Si oui, prouvez-le ; sinon, prouvez-le.

Solution. Non, pas forcément. Un contre-exemple suffit pour le prouver. Le graphe qui ne contient que l'arc : $a \to b$ de coût -1 n'a pas de cycle donc pas de cycle de coût global négatif. Autre contre-exemple : le graphe avec deux arcs : $a \to b$ de coût -1 et $b \to a$ de coût 2.

7. Rappelez, par une formule, la définition de la date au plus tôt et de la date au plus tard dans un graphe orienté sans cycle où les arcs sont étiquetés par des durées. Quand un sommet est-il critique ? Quel problème sur des séquences a été réduit à un problème de chemin critique ?

Solution.

$$tôt(s) = 0 \textit{ quand } s \textit{ est une source.}$$

1. En fait, Alfonso Shimbel l'a proposé avant, en 1955 [Wikipedia].

$$tôt(s) = \max_{\{r \mid \exists r \to s\}} tôt(r) + durée(r \to s)$$

$$tard(s) = tôt(s) \text{ quand } s \text{ est un puits.}$$

$$tard(s) = \min_{\{t \mid \exists s \to t\}} tard(t) - durée(s \to t)$$

8. Le chemin critique est-il un chemin le plus court dans le graphe de la question précédente ?

Solution. Non, c'est le chemin le plus long entre la source (ou les sources) et le puits (ou les puits).

2 Graphe

Dans les deux graphes de la figure ci-dessous, $A_{a,k}$ et $B_{k,c}$ sont des coûts ou des longueurs. Quel est le coût minimal des chemins de a vers c ? Répondre par une formule.

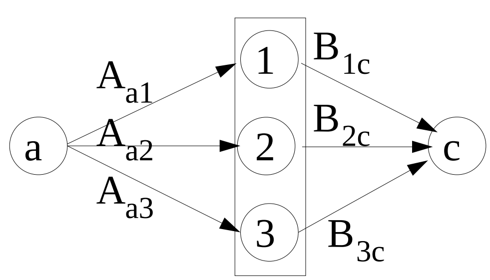
Solution. La longueur du chemin le plus court est $\min_k A_{ak} + B_{kc}$.

$A_{a,k}$ et $B_{k,c}$ sont respectivement la probabilité de survivre (ou de bon fonctionnement) en parcourant l'arc $a \to k$ et l'arc $k \to c$. Quelle est la probabilité de survivre dans le chemin le plus sûr de a vers c ? Répondre par une formule.

Solution. La probabilité de survie du chemin le moins risqué est $\max_k A_{ak} \times B_{k,c}$.

$A_{a,k}$ et $B_{k,c}$ sont respectivement la probabilité de mourir (ou de panne) en parcourant l'arc $a \to k$ et l'arc $k \to c$. Quelle est la probabilité de mourir dans le chemin le plus sûr de a vers c ? Répondre par une formule.

Solution. La probabilité de mort du chemin le moins risqué est $\min_k(1 - (1 - A_{ak})(1 - B_{k,c}))$.



3 La méthode de Newton

1. La fonction f est définie par $f(x) = x^3 - 9$. Donnez $f'(x)$.

Solution. $f'(x) = 3x^2$

2. Donnez $N(x)$, où N est la fonction de Newton associée.

Solution. $N(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^3 - 9)/(3x^2) = 2x/3 + 3/(x^2)$

3. Expliquez à quoi elle sert, en 2 lignes au plus.

Solution. A résoudre $f(x) = 0$, en trouvant un point fixe de N.

4. Calculez $N(1), N(2), N(3)$ et dessinez avec soin la courbe $(x, N(x))$ pour $0 < x \leq 3$. Dessinez aussi la droite d'équation $y = x$. En partant de $x_0 = 1$, dessinez le chemin suivi par la méthode de Newton. Les valeurs exactes ne sont pas demandées.

5. La méthode de la sécante est une variante de la méthode de Newton, où $f'(x)$ n'est pas remis à jour. En utilisant $x_0 = 2$, on obtient la fonction sécante : $S(x) = x - f(x)/f'(x_0) = x - f(x)/12$. Que vaut $S'(x)$? Evaluez par intervalle $S'([2, 5/2])$. Est-ce que $|S'([2, 5/2])| < 1$? Si oui, il y a un point fixe au plus de S dans l'intervalle $[2, 5/2]$.

Réponse. La dérivée de f est $f'(x) = 3x^2$.

La fonction de Newton est : $N(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^3 - 9)/(3x^2)$.

La sécante est $S(x) = x - (x^3 - 9)/12$, et $S'(x) = 1 - 3x^2/12 = 1 - x^2/4$.

$S'([2, 5/2]) = 1 - [4, 25/4]/4 = [-9/16, 0]$ *a donc une valeur absolue inférieure à 1. Donc* $[2, 5/2]$ *contient au plus une racine.*

4 Algorithme d'Euclide

Utilisez l'algorithme d'Euclide généralisé pour calculer le PGCD g de $a = 210$ et $b = 66$. Outre le PGCD, vous devez aussi calculer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = g$. Utilisez une présentation sous forme de tableau, avec des colonnes a, b, q, r, u, v, g, comme en TD.

Réponse.

a	b	r	q	g	u	v
104	39	26	2	13	-1	3
39	26	13	1	13	1	-1
26	13	0	2	13	0	1
13	0	$*$	$*$	13	1	0

Donc : $u = -1, v = 3, g = 13$, *et* $au + bv = 104 \times (-1) + 39 \times 3 = 13 = g$. *Divisons par g :* $8 \times (-1) + 3 \times 3 = 1$. *Alors pour tout* $t \in \mathbb{Z}$, $8 \times (-1 + 3t) + 3 \times (3 - 8t) = 1$, *donc, en multipliant par* $g = 13$ *:* $104 \times (-1 + 3t) + 39 \times (3 - 8t) =$

13. *Donc* $u = -1 + 3t$*,* $v = 3 - 8t$*. Bien sûr,* $u = -1 - 3t$*,* $v = 3 + 8t$ *est aussi correct.*

5 Produit optimal de matrices

La matrice A a 1 ligne, 1000 colonnes. La matrice B a 1000 lignes, 2 colonnes. La matrice C a 2 lignes, 1000 colonnes.

Quel est le nombre de lignes et de colonnes de $(AB)C$ et de $A(BC)$? Quel est le nombre de multiplications pour calculer $(AB)C$, et pour calculer $A(BC)$?

Quel est le nom de l'algorithme vu en cours pour trouver le parenthésage optimal ?

Donnez la formule (récursive) du coût optimal $C(i, j)$ (avec $i \leq j$) pour multiplier les matrices $M_i, \ldots M_j$. Vous noterez l_i, c_i le nombre de lignes et de colonnes de la matrice M_i.

Réponse. $(AB)C = A(BC) = ABC$ *a 1 ligne et 1000 colonnes. Pour calculer* $(AB)C$ *il faut 2000+2000 multiplications de nombres flottants. Pour calculer* $A(BC)$*, il en faut* 3×10^6*. Nous avons utilisé la programmation dynamique pour trouver le parenthésage optimal. La formule est :*

$$C(i, j) = 0 \text{ si } i = j$$

$$C(i, j) = \min_{k=i}^{j-1} C(i, k) + C(k + 1, j) + l_i \times c_k \times c_j$$

6 Séquence commune la plus longue

Dessinez le graphe permettant de trouver la séquence commune la plus longue entre $ABACAB$ et $ACBCBC$. Il n'est pas nécessaire de tracer les arcs de transitivité. Tracer le (ou les) chemin(s) critique(s).

7 Célébrité

n personnes, numérotées de 1 à n, sont réunies. Par définition, une célébrité est quelqu'un que tout le monde connaît, mais qui ne connaît personne (à part elle-même). La fonction connaît(a, b) dit si a connaît b. On appelle cette fonction un oracle.

Combien peut-il y avoir de célébrités au maximum, parmi n personnes ? (1 ligne)

Une célébrité au plus.

Si a connaît b (avec $a \neq b$), l'un des deux ne peut être une célébrité ; lequel ? (répondre en 1 ligne)

a ne peut pas être une célébrité.

Si a ne connaît pas b (avec $a \neq b$), l'un des deux ne peut être une célébrité ; lequel ? (répondre en 1 ligne)

b ne peut pas être une célébrité.

Combien de questions faut-il poser à l'oracle pour éliminer $n-1$ candidats à la célébrité ?

$n - 1$

Quand il ne reste plus qu'un seul candidat, combien de questions faut-il poser à l'oracle pour décider si ce candidat est une célébrité ou non ?

$2n - 2$ *si c'est une célébrité, et moins sinon.*

8 Sous-ensembles de nombres non consécutifs

Un ensemble d'entiers est dit non consécutif s'il ne contient pas deux entiers consécutifs (n et $n+1$ sont consécutifs, pour $n \in \mathbb{N}$). Soit F_n l'ensemble des sous-ensembles de nombres entiers, non consécutifs, et compris entre 1 et n (0 est inutilisé). F_n contient $f_n = |F_n|$ ensembles. Par exemple :

$F_0 = \{\emptyset\}$, $f_0 = 1$,
$F_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$, $f_1 = 2$,
$F_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$, $f_2 = 3$,
$F_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$, $f_3 = 5$,
$F_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$, $f_4 = 8$.

Que semble valoir f_n ? (réponse en une ligne).

Réponse. f_n est le n ième nombre de Fibonacci.

Proposez une définition récursive de F_n (réponse en une ligne). Vous pouvez utiliser la notation suivante :

$$F_k \oplus v = \bigcup_{E \in F_k} \{v\} \cup E$$

Par exemple,

$$F_2 \oplus 4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\} \oplus 4 = \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}\}$$

Solution.

$$n > 2 \Rightarrow F_n = F_{n-1} \cup (F_{n-2} \oplus n)$$

9 3-5-8

Un problème de transvasement typique est celui ci. Trois récipients non gradués ont des capacités de 3 litres, 5 et 8 litres. Initialement, ils contiennent respectivement 0, 3 et 5 litres d'eau. Comment en transvasant les récipients passer à 0, 4 et 4 litres d'eau dans les récipients de 3, 5 et 8 ? Comme les récipients ne sont pas gradués, quand on transvase un récipient a dans un récipient b, il faut s'arrêter dès que a est vide ou que b est plein.

Il ne vous est pas demandé de résoudre ce problème, mais de proposer une méthode capable de résoudre ce type de casse-tête. Répondez en cinq lignes maximum. Votre réponse doit être *lisible et claire.*

Solution. Il faut trouver un chemin dans le graphe des états. Chaque état $(a \leq A, b \leq B, c \leq C)$ *donne un sommet, et chaque transvasement d'un état* $e = (a, b, c)$ *vers un état* $e' = (a', b', c')$ *donne un arc* $e \rightarrow e'$ *dans le graphe. Le graphe n'est pas symétrique. Le chemin peut être trouvé par "backtrack" (parcours en profondeur ou en largeur), ou par un calcul de chemin le plus court (en nombre d'arcs par exemple).*