EXAMEN LICENCE 2, MODULE I31, 15-12-2016

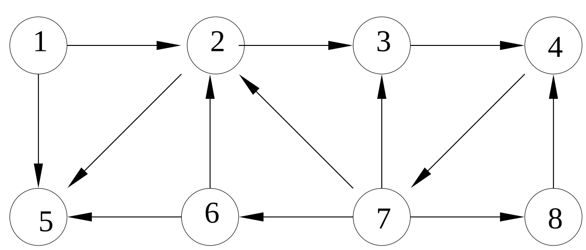
1 Quizz (sur 10 points)

1. Citer 6 structures de données.

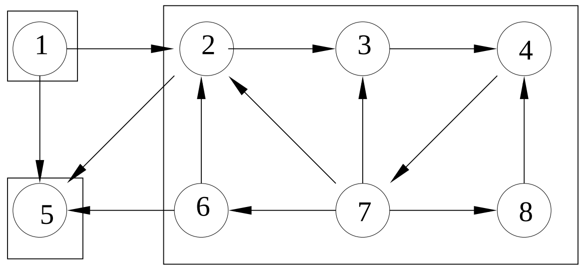
Solution : pile, liste, tas, file, arbre, graphe, table de hachage, tableau

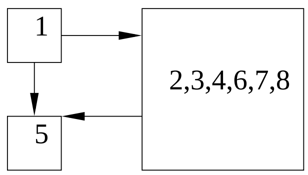
2. En détaillant les trois étapes, triez avec la méthode du tri par base ("radix sort") les nombres : $321, 231, 123, 221, 113, 213, 131, 311$.

3. Le graphe G est ci-dessous. Dessinez son graphe réduit, R. Indiquez sur chaque sommet de R quels sont les sommets correspondant dans G.



Solution.





4. Quelle est la complexité (très probable) pour trouver le k ième élément dans un tableau non trié de n éléments ? Quelle est la formule récusive pour $T(n)$? La méthode n'est pas demandée. Par convention, le premier élément est le 1 ième, et le plus petit. Répondre en 1 ligne.

Solution. $O(n)$. Utiliser le tri rapide (quicksort) "d'un seul côté". La formule est donc : $T(n) = T(n/2) + n$.

5. Rappelez, par une formule, la définition de la date au plus tôt et de la date au plus tard dans un graphe orienté sans cycle où les arcs sont étiquetés par des durées. N'oubliez pas de cas.

Solution.

$$\textit{tôt}(s) = 0 \textit{ quand } s \textit{ est une source.}$$

$$\textit{tôt}(s) = \max_{r\,:\,\exists r \to s} \textit{tôt}(r) + \textit{durée}(r \to s)$$

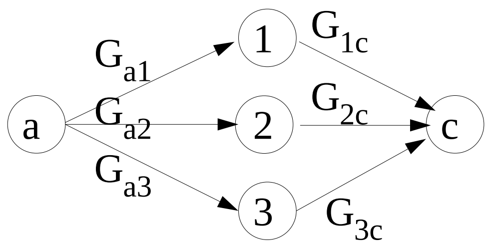
$$\textit{tard}(s) = \textit{tôt}(s) \textit{ quand } s \textit{ est un puits.}$$

$$\textit{tard}(s) = \min_{t\,:\,\exists s \to t} \textit{tard}(t) - \textit{durée}(s \to t)$$

6. Le chemin critique est-il un chemin le plus court dans le graphe de la question précédente ?

Solution. Non, c'est le chemin le plus long entre la source (ou les sources) et le puits (ou les puits).

7. Dans le graphe de la figure ci-dessous, $G_{u,v}$ est le coût ou la longueur de l'arc $u \to v$. Quel est la longueur du chemin le plus court, en 2 arcs, de a vers c ? Comme sommet intermédiaire, utilisez k (et donc G_{ak}, G_{kc}) ou b (et donc G_{ab}, G_{bc}). Répondre par une formule en 1 ligne.



Solution. La longueur du chemin le plus court est $\min_k G_{ak} + G_{kc}$.

8. (suite) $G_{u,v}$ est ici la probabilité de survivre (ou de bon fonctionnement) en parcourant l'arc $u \to v$. Quelle est la probabilité de survivre du chemin le plus sûr, en 2 arcs, de a vers c ? Répondre par une formule en 1 ligne.

Solution. La probabilité de survie du chemin le moins risqué est $\max_k G_{ak} \times G_{k,c}$.

9. (suite) $G_{u,v}$ est ici la probabilité de mourir (ou de tomber en panne) en parcourant l'arc $u \to v$. Quelle est la probabilité de mourir dans le chemin en 2 arcs le plus sûr de a vers c ? Répondre par une formule en 1 ligne.

Solution. La probabilité de mort du chemin le moins risqué est $\min_k(1-(1-G_{ak})(1-G_{k,c})) = G_{ak} + G_{k,c} - G_{ak}G_{k,c}$.

10. (suite) $G_{u,v}$ est ici la capacité de l'arc $u \to v$; en termes imagés, $G_{u,v}$ est le diamètre d'un tuyau qui descend de u à v, dans lequel vont pouvoir rouler ou chuter des billes de diamètre au plus $G_{u,v}$. Quelle est la capacité du chemin de plus grande capacité, en 2 arcs, de a vers c ? Répondre par une formule en 1 ligne.

Solution. La capacité maximale est $\max_k(min(G_{ak}, G_{kc}))$

2 La méthode de Newton (sur 5 points)

1. La fonction f est définie par $f(x) = x^3 - 9$. Donnez $f'(x)$. Donnez $N(x)$, où N est la fonction de Newton associée à f.

Solution. $f'(x) = 3x^2$

Solution. $N(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^3 - 9)/(3x^2) = 2x/3 + 3/(x^2)$

2. Expliquez à quoi elle sert, en 1 lignes au plus.

Solution. A résoudre $f(x) = 0$, en trouvant un point fixe de N.

3. Calculez $N(1/2), N(1), N(2), N(3)$ et dessinez avec soin la courbe $(x, N(x))$ pour $0 < x \leq 3$. Dessinez aussi la droite d'équation $y = x$. En partant de $x_0 = 1$, dessinez le chemin suivi par la méthode de Newton (les valeurs exactes ne sont pas demandées).

4. La méthode de la sécante est une variante de la méthode de Newton, où $f'(x)$ est remplacée par $f'(v)$. En utilisant $v = 2$, que vaut la fonction sécante $S(x)$? Dessinez la courbe $(x, S(x))$ pour $-1 \leq x \leq 3$. Dessinez aussi la droite d'équation $y = x$. En partant de $x_0 = 1$, dessinez le chemin suivi par la méthode de la sécante (Les valeurs exactes ne sont pas demandées).

5. Quand $|N'(x)| < 1$, ou $|S'(x)| < 1$, la convergence est garantie. Résolvez $S'(x) = 1$, ainsi que $S'(x) = -1$ (vous pouvez contrôler vos solutions sur votre dessin).

Réponse. La dérivée de f est $f'(x) = 3x^2$.

La fonction de Newton est : $N(x) = x - f(x)/f'(x) = x - (x^3 - 9)/(3x^2)$.

La sécante est $S(x) = x - (x^3 - 9)/12$, et $S'(x) = 1 - 3x^2/12 = 1 - x^2/4$.

$S'(x) = 1 - x^2/4 = 1 \Rightarrow x = 0$

$S'(x) = 1 - x^2/4 = -1 \Rightarrow x = \sqrt{} = 2\sqrt{2}$

3 Algorithme d'Euclide généralisé (2 points)

Utilisez l'algorithme d'Euclide généralisé pour calculer le PGCD g de $a = 104$ et $b = 39$. Outre le PGCD, vous devez aussi calculer deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = g$. Utilisez une présentation sous forme de tableau, avec des colonnes a, b, q, r, u, v, g, comme en TD ($q = \lfloor a/b \rfloor, r = a \mod b$).

Réponse.

a	b	r	q	g	u	v
104	39	26	2	13	-1	3
39	26	13	1	13	1	-1
26	13	0	2	13	0	1
13	0	$*$	$*$	13	1	0

Donc : $u = -1, v = 3, g = 13,$ *et* $au + bv = 104 \times (-1) + 39 \times 3 = 13 = g$. *Divisons par* g *:* $8 \times (-1) + 3 \times 3 = 1$. *Alors pour tout* $t \in \mathbb{Z}$, $8 \times (-1+3t) + 3 \times (3-8t) = 1$, *donc, en multipliant par* $g = 13$ *:* $104 \times (-1+3t) + 39 \times (3-8t) = 13$. *Donc* $u = -1 + 3t$, $v = 3 - 8t$. *Bien sûr,* $u = -1 - 3t$, $v = 3 + 8t$ *est aussi correct.*

4 Produit optimal de matrices (3 points)

La matrice A a 1 ligne, 1000 colonnes. La matrice B a 1000 lignes, 2 colonnes. La matrice C a 2 lignes, 1000 colonnes.

1. Quel est le nombre de lignes et de colonnes de $(AB)C$ et de $A(BC)$? Quel est le nombre de multiplications pour calculer $(AB)C$, et pour calculer $A(BC)$?

2. Quel est le nom de l'algorithme vu en cours pour trouver le parenthésage optimal ?

3. Donnez la formule (récursive) du coût optimal $C(i, j)$ (avec $i \leq j$) pour multiplier les matrices $M_i, \ldots M_j$. Vous noterez l_i, c_i le nombre de lignes et de colonnes de la matrice M_i.

Réponse. $(AB)C = A(BC) = ABC$ *a 1 ligne et 1000 colonnes. Pour calculer*

$(AB)C$ il faut 2000+2000 multiplications de nombres flottants. Pour calculer $A(BC)$, il en faut 3×10^6. Nous avons utilisé la programmation dynamique pour trouver le parenthésage optimal. La formule est :

$$C(i,j) = 0 \ si \ i = j$$

$$C(i,j) = \min_{k=i}^{j-1} C(i,k) + C(k+1,j) + l_i \times c_k \times c_j$$