EXAMEN I31 SESSION 2, 2015 - 2016

Tous vos documents sont autorisés, mais pas la copie de votre voisin. N'écrivez aucun programme. Ecrivez lisiblement. Répondez aux questions dans l'ordre, en indiquant le numéro de chaque question.

Lisez tout l'énoncé avant de commencer à répondre aux questions.

1. Euclide et Bézout (barême : 3 pts)

En utilisant l'algorithme d'Euclide étendu, calculez le pgcd de 128 et 100 ainsi que les coefficients de Bezout u et v, tels que :

$$u \in \mathbb{Z}, v \in \mathbb{Z}, 128u + 100v = \mathrm{PGCD}(128, 100)$$

Complétez le tableau ci-dessous. Attention ! u et v sont des fonctions de k, le coefficient v à la dernière ligne.

a	b	r=a%b	q=a÷ b	pgcd(a,b)	u	v
128	100					
	0	–	–	4	1	k

2. Equation de récurrence et complexité (barême : 2.5 pts)

A. Pour le tri par fusion, quelle est l'équation récursive donnant le temps (ou le nombre d'instructions élémentaires) $T(n)$ nécessaire pour trier n éléments ?

Vous prendrez $T(0) = 1$ comme initialisation et $2n$ comme coût de la partition et de la fusion des deux moitiés d'un tableau de n éléments.

B. Quelle est la solution de cette équation ? Indication : ce n'est pas $O(n^2)$.

C. Quelle est la complexité des tris optimaux, en ne considérant que les tris effectuant des comparaisons ?

D. Citez deux algorithmes qui trient des entiers sans les comparer.

E. Quelle est la complexité du tri naïf ?

3. Sous mot commun le plus long (barême : 4 pts)

Soit un mot A et un mot B. Par exemple $A = 6878568$ et $B = 857686$. Les indices commencent à 1, par commodité : $A_1 = 6, A_2 = 8$. Les sous-mots les plus longs et communs à A et à B sont 8786, 8768, et 8568. Les lettres ne sont pas forcément consécutives, mais l'ordre des lettres dans les deux mots doit être préservé.

Trouver le mot commun le plus long se ramène à calculer le chemin critique dans un graphe. En suivant les instructions ci-dessous, tous les arcs de votre graphe vont dans la même direction (de gauche à droite et en montant) :

- tracez le graphe sur une grille ayant les chiffres de B sur les lignes et les chiffres de A sur les colonnes,
- un sommet S_{lc} est placé à l'intersection d'une ligne horizontale l et d'une droite verticale c chaque fois que A_c égale B_l,
- il y a un arc entre S_{ij} et S_{mn} ssi $i < m$ et $j < n$,
- les arcs de transitivité sont facultatifs,
- par commodité, un sommet source S_{00} et un sommet puits $S_{\infty\infty}$ sont ajoutés.

A. Dessinez le graphe pour l'exemple $A = 6878568$ et $B = 857686$. En supposant que tous les arcs ont une durée de 1, notez les dates au plus tôt et au plus tard sur chaque sommet du graphe. Déduisez-en les chemins critiques. Quels sont-ils ?

B. Dans cette question, l'ordre entre les lettres n'a plus d'importance, mais chaque lettre de A ne peut être appariée qu'avec une seule des lettres identiques de B. Par exemple, pour $A = 11223$ et $B = 421111$, le mot commun le plus long est $112 \equiv 121 \equiv 211$ (on dit que A et B sont des multi-ensembles). Décrivez **en français** une méthode efficace pour résoudre ce problème (sans utiliser de graphe).

C. Quand le graphe est sans cycle, trouver le chemin le plus long est possible en temps polynômial. Pour un graphe général (qui peut avoir des cycles), est-ce toujours vrai ? Le chemin doit être sans répétition de sommet.

D. En A, nous avons utilisé de la programmation dynamique. Citez un autre problème soluble avec de la programmation dynamique.

4. Résoudre (barême : 3 pts)

A. Résoudre $2^x = 3^k$. L'inconnue est x.

B. Résoudre $2^k = \exp x$, où l'inconnue est x. Remarque : $\exp x$ est aussi noté e^x, avec e la base des logarithmes naturels.

C. Résoudre $a = \log x$. L'inconnue est x.

5. Suite (barême : 3.5 pts)

On note $S_{a,b}$ une suite vérifiant : $S_{a,b}(0) = a, S_{a,b}(1) = b$ et la relation de récurrence : $S_{a,b}(n) = 3S_{a,b}(n-1) - 2S_{a,b}(n-2)$ pour $n \geq 2$.

Pour alléger, on écrit s_0 pour $S_{a,b}(0)$, s_1 pour $S_{a,b}(1)$ et, de façon générale, s_i pour $S_{a,b}(i)$.

A. Ecrivez s_n en fonction de s_{n-1} et s_{n-2}, pour $n \geq 2$.

B. Complétez le tableau suivant.

	$s_0 = a$	$s_1 = b$	s_2	s_3	s_4	s_5
$S_{0,1}$	0	1				
$S_{1,0}$	1	0				
$S_{1,1}$	1	1				
$S_{1,2}$	1	2				
$S_{2,1}$						

C. Que remarquez-vous sur $S_{0,1}(n)$ et $S_{1,0}(n)$? que pouvez-dire du rapport de $S_{a,b}(n)$ avec $S_{0,1}(n)$ et $S_{1,0}(n)$?

D. Complétez la matrice :

$$\begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_0 \end{pmatrix}$$

E. Complétez la matrice et la puissance :

$$\begin{pmatrix} s_n \\ s_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_0 \end{pmatrix}$$

F. En fait, $S_{a,b}(n) = c_1 + c_2 2^n$ pour des constantes c_1 et c_2 bien choisies. Lesquelles ? Indication : considérez $S_{a,b}(0) = c_1 + c_2 = a$ et $S_{a,b}(1) = c_1 + 2c_2 = b$. La preuve par récurrence n'est pas demandée.

6. Puissance de matrice (barême : 4 pts)

A. Quel est le nombre minimal de produits de matrices à effectuer pour calculer M^k, où M est une matrice donnée, et $k \in \mathbb{N}$ est un entier donné ? Rappelez les formules récursives de la puissance rapide d'une matrice. Une telle matrice peut-elle être non carrée ?

B. Travaillons maintenant sur une matrice diagonale, D, et notons la $\operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots d_n)$. Ainsi la matrice identité est $\operatorname{diag}(1, \ldots 1)$. Que vaut D^k, avec $k \in \mathbb{N}$, et $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots d_n)$? Quel est l'intérêt en terme de complexité, relativement à la question précédente ?

C. Soient trois matrices M, D, V telles que :
- $MV = VD$,
- la matrice V est inversible (sa matrice inverse est notée V^{-1} et le produit VV^{-1} est la matrice identité),
- la matrice D est diagonale.

Par exemple, les trois matrices décrites ci-dessous sont conformes à cette définition.

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déduisez-en une formule explicite pour M^k, avec $k \in \mathbb{Z}$, où les seules puissances de matrices sont des puissances de D. Vous devez travailler dans le cas général : ne remplacez pas D, V, V^{-1} par leur valeur.

D. La matrice M de l'exemple ci-dessus a déjà été rencontrée. Donnez une formule matricielle explicite pour calculer $S_{a,b}(n)$, où les seules puissances de matrices sont des puissances de D. Ne remplacez pas D, V, V^{-1} par leur valeur.