

## 2.2. Sucessões e séries de funções.

### Séries de potências (revisitadas) e séries de Fourier

(Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no Capítulo 2 dos Apontamentos de Cálculo II de Alexandre Almeida (2018) e no Capítulo 4 dos Apontamentos de Cálculo II de Virgínia Santos (2009/2010) (disponíveis no Moodle))

Universidade de Aveiro, 2023/2024

Cálculo II – C

# Resumo dos Conteúdos

- 1 Sucessões de funções: convergências pontual e uniforme
  - Exemplo introdutório
  - Conceitos e propriedades básicas
  - Propriedades das sucessões convergentes uniformemente
- 2 Séries de funções: convergências pontual e uniforme
  - Conceitos e propriedades básicas
  - Propriedades das séries uniformemente convergentes
  - Critério de Weierstrass
- 3 Séries de potências/Séries de Taylor
  - Propriedades relativas à convergência uniforme
  - Desenvolvimentos de uma função em série de Taylor
- 4 Séries de Fourier
  - Definições e exemplos
  - Extensões periódicas; série dos senos e série dos cossenos
  - Convergência pontual (Teorema de Dirichlet)

## Exemplo introdutório

Para  $x \in ]-1, 1[$ , a série de potências

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

é convergente e a sua soma é, para cada  $x$ ,  $s(x) = \frac{1}{1-x}$ .

A afirmação anterior tem a seguinte interpretação usando de convergência sucessões:

Para cada  $x \in ]-1, 1[$ , a sucessão das somas parciais  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$s_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

é tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x) = \frac{1}{1-x}$ .

## Exemplo introdutório (cont.)

Essa convergência pode ainda ser encarada da seguinte forma:

Considerem-se as funções  $s_n(x) = \frac{1 - x^n}{1 - x}$ , de domínio  $] -1, 1[$ .

A sucessão (de funções)

$$s_1(x), s_2(x), s_3(x), \dots, s_n(x), \dots$$

é convergente, ponto a ponto, para a função  $s(x) = \frac{1}{1 - x}$ , no intervalo  $] -1, 1[$ .

Este conceito de convergência (convergência pontual) e outro “mais exigente” (convergência uniforme) será aqui objeto de estudo.

# Sucessão de funções

## Definição:

Sejam  $D \subseteq \mathbb{R}$  e  $\mathcal{F}(D)$  o conjunto das funções reais de variáveis reais definidas em  $D$ .

Uma **sucessão de funções definidas em  $D$**   $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma aplicação

$$\begin{aligned}(f_n)_{n \in \mathbb{N}}: \mathbb{N} &\rightarrow \mathcal{F}(D) \\ n &\mapsto f_n\end{aligned}$$

## Observação:

Note-se que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}f_n: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_n(x)\end{aligned}$$

# Exemplos

- ①  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

é uma sucessão de funções definidas em  $\mathbb{R}$ . Isto é,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é a seguinte sucessão de funções definidas em  $\mathbb{R}$ :

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{x}{2}, f_3(x) = \frac{x}{3}, \dots, f_n(x) = \frac{x}{n}, \dots$$

- ②  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$h_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1],$$

é uma sucessão de funções definidas em  $[0, 1]$ . Isto é,  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é a seguinte sucessão de funções definidas em  $[0, 1]$ :

$$h_1(x) = x, h_2(x) = x^2, h_3(x) = x^3, \dots, h_n(x) = x^n, \dots$$

# Convergência pontual

## Definição:

Sejam  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções reais definidas em  $D \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Diz-se que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge pontualmente para  $f$  em  $D$**  se, para cada  $x \in D$ ,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

## Exemplos:

- ①  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ,  $x \in [0, 1]$ , converge pontualmente para a função nula pois, para todo o  $x \in [0, 1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0.$$

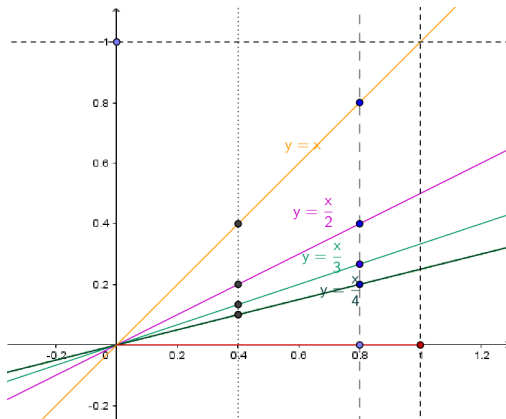
Nota: O domínio das funções pode ser alargado a  $\mathbb{R}$ , mantendo-se a convergência pontual para  $f(x) \equiv 0$ .

# Exemplos (cont.)

## Ilustração gráfica—Exemplo 1:

$$f_n(x) = \frac{x}{n}, \quad x \in [0, 1]$$

$$f(x) = 0$$



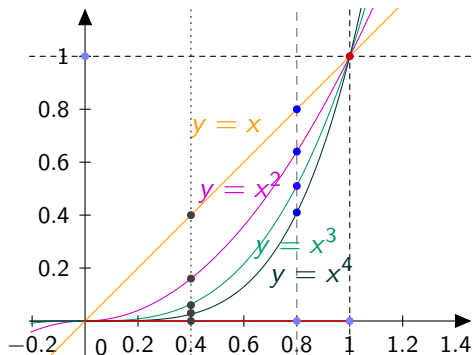


## Exemplos (cont.)

2.  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ , converge pontualmente para a função  $h(x)$  definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

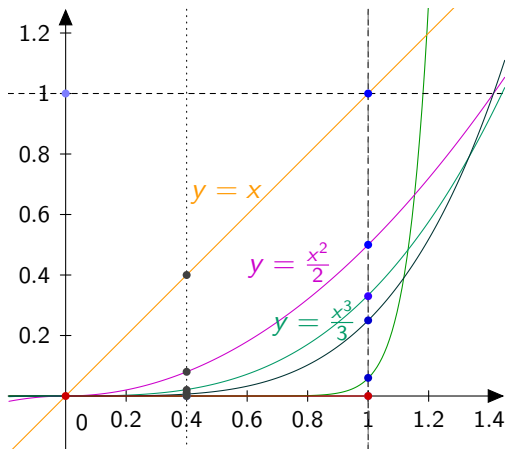
Ilustração gráfica:



## Exemplos (cont.)

3.  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $g_n(x) = \frac{x^n}{n}$ ,  $x \in [0, 1]$ , converge pontualmente para a função nula.

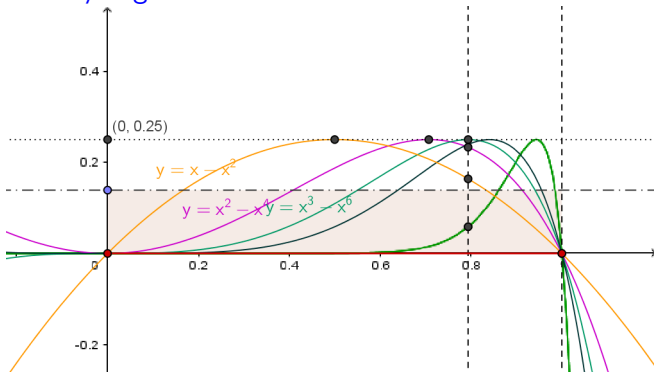
Ilustração gráfica:



## Exemplos (cont.)

4.  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n(x) = x^n(1 - x^n)$ ,  $x \in [0, 1]$ , converge pontualmente para a função nula.

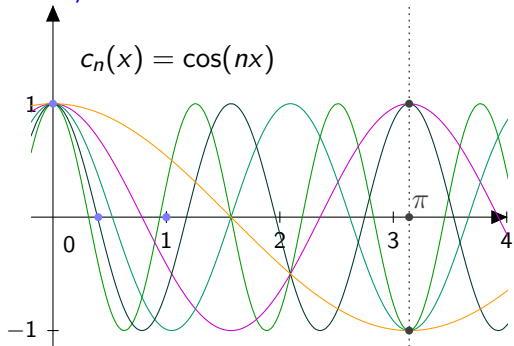
Ilustração gráfica:



## Exemplos (cont.)

5.  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n(x) = \cos(nx)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , não converge pontualmente.

Ilustração Gráfica:



## Voltando aos exemplos 3 e 4

$(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergem pontualmente para a função nula (ex. 3 e 4, resp.). **Haverá alguma diferença na forma como convergem?**

Analisando os esboços gráficos respetivos nota-se os seguintes comportamentos distintos:

- Em  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , o gráfico de  $g_n(x)$  vai-se *aproximando* do gráfico da *função limite*, à medida que  $n$  cresce. Isto é, fixada uma faixa (qualquer, tão "pequena" quanto se queira) em torno do gráfico da função limite, é sempre possível encontrar uma ordem a partir da qual, todos os pontos de interseção da reta  $x = x_0$  (com  $x_0 \in [0, 1]$  arbitrário) com os gráficos das funções  $g_n$  se situam nessa faixa. Assim, a partir de uma determinada ordem, *todos os gráficos das funções  $g_n$  situam-se na faixa considerada.* [▶ ver applet](#)
- Em  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal não acontece. Isto é, é possível definir uma faixa em torno do gráfico da função limite para a qual não existe uma ordem, a partir da qual os gráficos de  $p_n(x)$  se situem nessa faixa. [▶ ver applet](#)

# Convergência uniforme

## Definição:

Sejam  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções reais definidas em  $D \subseteq \mathbb{R}$  e  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Diz-se que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge uniformemente para  $f$  em  $D$**  se a sucessão numérica de termo geral

$$M_n := \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$$

é um infinitésimo, ou seja,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$ .

## Exemplo:

A sucessão de funções  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  do Exemplo 3 converge uniformemente para a função nula em  $[0, 1]$ . De facto,

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n} - 0 \right| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{|x^n|}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

## Nos outros exemplos a convergência é uniforme?

Ex. 1  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = \frac{x}{n}$ ,  $x \in [0, 1]$ , converge uniformemente para a função nula (porquê?) [▶ ver applet](#)

Ex. 2  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $h_n(x) = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ , não converge uniformemente para a função  $h(x)$  definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad (\text{porquê?})$$

[▶ ver applet](#)

Ex. 4  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n(x) = x^n(1 - x^n)$ ,  $x \in [0, 1]$ , converge pontualmente para a função nula, mas não converge uniformemente. (porquê?) [▶ ver applet](#)

Ex. 5  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , onde para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_n(x) = \cos(nx)$ ,  $x \in [0, \pi]$ , nem sequer converge pontualmente. [▶ ver applet](#)

# A convergência uniforme implica a convergência pontual

## Proposição:

Se  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para  $f$  num conjunto  $D$ , então  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge pontualmente para  $f$  nesse conjunto.

Prova:

Para cada  $x \in D$ ,

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y \in D} |f_n(y) - f(y)| = M_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para  $f$  em  $D$ , então,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$ .  
Logo, para cada  $x \in D$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

e, portanto,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ .



# Propriedades das sucessões convergentes uniformemente

**Teorema:** Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções contínuas em  $[a, b]$ .

Se  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente para  $f$  em  $[a, b]$ , então:

(i)  $f$  é contínua em  $[a, b]$  e

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(c) = f(c),$$

$c \in [a, b]$ ;

(ii)  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx;$$

(iii) Adicionalmente, se as funções  $f_n$  têm derivadas contínuas em  $[a, b]$  e a sucessão  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformemente em  $[a, b]$ , então

$$f \text{ é diferenciável em } [a, b] \quad \text{e} \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

## Observações relativas ao teorema anterior

- 1 As propriedades anteriores podem funcionar como critérios para provar que uma dada sucessão não converge uniformemente.
- 2 O resultado em (iii) do teorema anterior mantém-se válido se, em vez da convergência uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , apenas assumirmos a sua convergência pontual (na verdade, basta que exista um ponto  $x_0 \in [a, b]$  tal que a sucessão numérica  $(f_n(x_0))$  seja convergente).
- 3 A continuidade e a diferenciabilidade nos extremos do intervalo devem ser tomadas como laterais.

# Série de funções

## Definição:

Seja  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções definidas em  $D \subseteq \mathbb{R}$ . Chama-se série de funções de termo geral  $f_n$  ao par  $((f_n), (S_n))_{n \in \mathbb{N}}$ , onde, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x), \quad x \in D.$$

Representa-se por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n \quad \text{ou, em alternativa, por} \quad f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$$

## Observação:

Tal como nas série numéricas, a  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  chamamos a sucessão (de funções) das somas parciais da série de termo geral  $f_n$ .

# Convergência pontual/uniforme de uma série de funções

**Definição:** Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  uma série de funções definidas em  $D$  tal que  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é a sua sucessão de somas parciais.

- 1 A série de funções **converge pontualmente** em  $D$  se  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergir **pontualmente** em  $D$ .
- 2 A série de funções **converge uniformemente** em  $D$  se  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergir **uniformemente** em  $D$ .

Caso a série seja convergente, a função  $S$  limite da sucessão  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  designa-se por **soma da série** e escreve-se  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n = S$ .

Neste caso, diz-se que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge para  $S$  (pontual ou uniformemente, conforme o caso).

### Exemplo:

Já vimos que a série de potências, definidas em  $\mathbb{R}$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

converge pontualmente em  $] - 1, 1[$  e a sua soma é  $S(x) = \frac{1}{1-x}$ .

Além disso, esta série converge uniformemente em qualquer intervalo fechado e limitado contido em  $] - 1, 1[$  ( ver a justificação mais à frente, no slide 28). Veja a seguinte [▶ applet](#) .

### Note que:

Se uma série de funções converge uniformemente em  $D$ , então converge pontualmente em  $D$ . O recíproco não é verdadeiro.

# Domínio de Convergência de uma série de funções

## Observação:

Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  é convergente (pontualmente) em  $D$  com soma  $S$ , então

$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  é convergente e tem soma  $S(x)$ , para cada  $x \in D$ , e vice-versa.

## Definição:

Considere-se a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ , onde  $f_n$  estão definidas em  $D$ . Ao conjunto dos pontos  $x \in D$  para os quais a série numérica correspondente é convergente chama-se **domínio de convergência da série**.

**Exemplo:** A série de funções  $\sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-nx}$  (definidas em  $\mathbb{R}$ ) tem domínio de convergência  $\mathbb{R}^+$ .

# Propriedades das séries uniformemente convergentes

## Teorema:

Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  uma série de funções contínuas em  $[a, b]$ . Suponha-se que  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente em  $[a, b]$  com soma  $S$ . Então:

- (i) A soma  $S$  é contínua em  $[a, b]$ ;
- (ii) A soma  $S$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

[integração termo a termo];

- (iii) Adicionalmente, se cada  $f_n$  é de classe  $C^1$  em  $[a, b]$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$  converge uniformemente em  $[a, b]$ , então  $S$  é diferenciável neste intervalo e

$$(S(x))' = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x))', \quad x \in [a, b]$$

[derivação termo a termo].

## Observações relativas ao teorema anterior

- 1 As propriedades anteriores podem funcionar como critérios para provar que uma dada série de funções não converge uniformemente. Isto é, se a função limite  $f$  não satisfizer alguma das propriedades listadas, a convergência da série não é uniforme no intervalo em causa.
- 2 O resultado em (iii) do teorema anterior mantém-se válido se, em vez da convergência uniforme de  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ , assumirmos apenas a sua convergência pontual (na verdade, basta que exista um ponto  $x_0 \in [a, b]$  tal que a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$  seja convergente).



## Observações relativas ao teorema anterior

- Como podemos constatar, a convergência uniforme permite preservar certas propriedades importantes como são a integração e a derivação termo a termo.
- Contudo, provar a convergência uniforme de uma série de funções por definição torna-se, em geral, complicado devido à dificuldade em lidar com a sucessão das somas parciais.
- O resultado seguinte, conhecido como **Crítério de Weierstrass**, é bastante útil na prática pois fornece uma condição suficiente para a convergência uniforme.

# Critério de Weierstrass

(condição suficiente de convergência uniforme de uma série de funções)

## Teorema:

Sejam  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sucessão de funções definidas em  $D$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série numérica de termos não negativos, tais que

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in D.$$

Se a série numérica  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  for convergente, então a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$  converge uniformemente em  $D$ .

## Exemplo:

(aplicação do Critério de Weierstrass, integração e derivação termo a termo)

Pelo Critério de Weierstrass, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$  converge uniformemente em  $\mathbb{R}$  (Porquê?).

Neste caso, é possível integrar e derivar termo a termo a sua função soma, i.e.,

$$\int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \int_0^1 \frac{1}{n^2 + x^2} dx \right) = \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n}$$

$$\left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n^2 + x^2} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2} \quad (\text{Confirme!})$$

## Exercício:

Faça uma análise análoga ao exemplo anterior usando a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ .

# Séries de Potências: convergência uniforme

## Teorema:

Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  uma série de potências com raio de convergência  $R \neq 0$ . Então a série converge uniformemente em qualquer subintervalo fechado e limitado do seu intervalo de convergência  $I_c = ]c - R, c + R[$ .

**Prova para o caso  $c = 0$ :** Seja  $[a, b] \subset ]-R, R[$ .

Note-se que, para todo o  $x \in [a, b]$ ,  $|x| \leq M$ , onde  $M = \max\{|a|, |b|\}$ .

Assim,

$$|a_n x^n| \leq |a_n| M^n, \forall x \in [a, b].$$

Como  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| M^n$  é convergente, pois  $M \in [0, R[$ , pelo Critério de

Weierstrass, a série de funções  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  converge uniformemente em  $[a, b]$ .

## Teorema de Abel:

Seja  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  uma série de potências com raio de convergência  $R \in \mathbb{R}^+$ . Se a série converge no ponto  $x = c + R$  (respetivamente, no ponto  $x = c - R$ ), então ela converge uniformemente em  $[c, c + R]$  (respetivamente, em  $[c - R, c]$ ).

## Exemplo de aplicação:

O domínio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{5^n \sqrt{n+1}}$  é  $[-7, 3[$  (verifique!).

Então, pelo Teorema de Abel, a série converge uniformemente em  $[-7, -2]$ . Conjugando com o Teorema do slide 28, conclui-se que, esta série é uniformemente convergente em qualquer intervalo da forma

$$[-7, b], \text{ com } -7 \leq b < 3.$$

### Observações:

Consequentemente, uma série de potências é uniformemente convergente em qualquer intervalo limitado e fechado do seu domínio de convergência.

Deste modo:

- A função soma de uma série de potências é contínua.
- Pode-se derivar termo a termo.
- Pode-se integrar termo a termo.

Mais precisamente, do teorema do slide 23 resulta o teorema do slide seguinte.

**Teorema:** Sejam  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$  uma série de potências,  $I_c = ]c-R, c+R[$

o seu intervalo de convergência, e  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n$ . Então:

- (i) A função  $f$  é contínua em todo o domínio (de convergência da série).
- (ii) A função  $f$  é diferenciável em  $I_c$  e  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(x-c)^{n-1}$ ,  $\forall x \in I$ .
- (iii) A função  $F$ , definida por  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$ , é a primitiva de  $f$  em  $I_c$  tal que  $F(c) = 0$ .
- (iv) A função  $f$  é integrável em qualquer subintervalo  $[a, b]$  do domínio de convergência e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n(x-c)^n dx.$$

## Unicidade de representação de uma função em série de potências

### Teorema:

Se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-c)^n, \quad x \in I_c = ]c-R, c+R[,$$

então  $f$  possui derivadas finitas de qualquer ordem em  $I_c$  e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

### Observações:

1. Para se provar o teorema anterior basta considerar a propriedade (ii) do Teorema do slide 31 e fazer alguns cálculos adicionais.
2. O teorema anterior mostra que sempre que uma série de potências convirja para  $f(x)$  numa vizinhança do seu centro  $c$ , ela é a série de Taylor de  $f(x)$  centrada em  $c$ .



## Exemplos de aplicação das propriedades das séries de potências



obtenção de desenvolvimentos de Taylor de uma função recorrendo ao desenvolvimento em Taylor de outra função (adequada).

- 1 Partindo deste desenvolvimento de MacLaurin

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

podemos concluir que (Porquê?)

- 1 
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n, \quad -1 < x < 1;$$

- 2 
$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \quad -1 \leq x < 1,$$

- 3 
$$\ln x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1}, \quad 0 < x \leq 2.$$

2 Partindo deste desenvolvimento de MacLaurin

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad -1 < x < 1,$$

podemos concluir que (Porquê?)

$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

# Séries Trigonométricas

## Definição:

As série de funções com a seguinte forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] \quad (1)$$

onde  $\omega \in \mathbb{R}^+$  e  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  são sucessões numéricas, têm a designação genérica de **séries trigonométricas**.

## Observações:

- Se as séries numéricas  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$  forem absolutamente convergentes, então a série (1) é absolutamente e uniformemente convergente em  $\mathbb{R}$ .
- Caso (1) seja convergente, a sua soma  $S(x)$  é periódica de período  $\frac{2\pi}{\omega}$ .

# Revisão do conceito de função periódica

## Definição:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  diz-se **periódica** se existir  $T > 0$  tal que  $f(x + T) = f(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . O **período** de  $f$  é o menor valor de  $T$  que verifica a igualdade anterior. Neste caso, dizemos que,  $f$  é  **$T$ -periódica**.

## Observações:

- Se  $f$  é  $T$ -periódica, então pode converter-se, por mudança de variável, numa  $2\pi$ -periódica, para tal basta considerar-se

$$F(x) := f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$$

- Por esse motivo, passamos a considerar apenas funções  $2\pi$ -periódicas.

# Coeficientes de Fourier

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2\pi$ -periódica tal que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)], \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se esta série trigonométrica convergir uniformemente,  $a_n$  e  $b_n$  são completamente determinadas pela função  $f$ .

- **Determinação de  $a_0$ :** Mostra-se que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0$$

e, portanto,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

## Coeficientes de Fourier (cont.)

- Determinação de  $a_m$ , com  $m \geq 1$ : Multiplica-se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] ,$$

por  $\cos(mx)$  e integra-se no intervalo  $[-\pi, \pi]$ , obtendo-se:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) f(x) dx = \pi a_m$$

e, portanto,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx , \text{ para } m = 1, 2, \dots$$

- Determinação de  $b_m$ , com  $m \geq 1$ : Usando argumentos análogos, obtém-se

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx , \text{ para } m = 1, 2, \dots$$

# Série de Fourier

## Definição:

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2\pi$ -periódica e integrável em  $[-\pi, \pi]$ .  
Chama-se **série de Fourier** associada à função  $f$  (ou da função  $f$ ) à série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)],$$

onde  $a_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) e  $b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) são dados pelas fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

$a_n$  e  $b_n$  são designados por **coeficientes de Fourier** da função  $f$ .

## Notação:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

- Os coeficientes de Fourier podem ser calculados usando um qualquer intervalo de integração de amplitude  $2\pi$  (devido à periodicidade das funções integradas em causa).
- Uma série de Fourier nem sempre converge. Caso seja convergente, a sua soma é periódica com período  $2\pi$ , mas pode ser diferente de  $f$ .
- Se  $f$  é uma função ímpar, a sua série de Fourier é uma *série de senos*.
- Se  $f$  é uma função par, a sua série de Fourier é uma *série de cossenos*.



# Exemplos

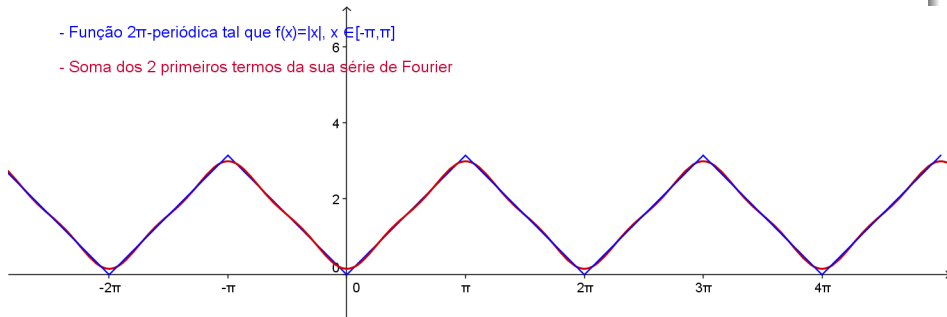
- Seja  $f$  a função  $2\pi$ -periódica definida em  $[-\pi, \pi]$  por  $f(x) = |x|$ . Neste caso,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

Ilustração gráfica:

▶ ver applet

- Função  $2\pi$ -periódica tal que  $f(x)=|x|$ ,  $x \in [-\pi, \pi]$
- Soma dos 2 primeiros termos da sua série de Fourier

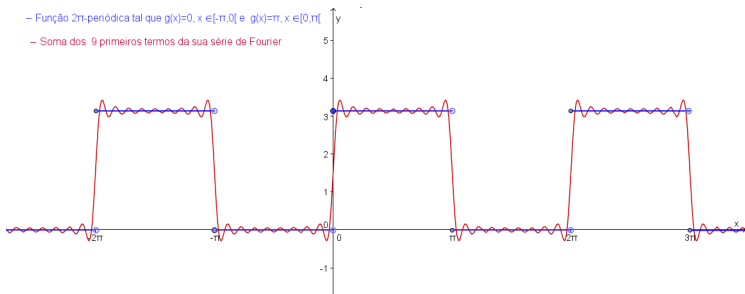


## Exemplos (cont.)

- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periódica e  $g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

Neste caso,  $g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x], \quad x \in \mathbb{R}.$

Ilustração gráfica:



► ver applet

# Extensões Periódicas

## Extensões de funções definidas em intervalos de amplitude $2\pi$ :

- Se  $f : [a, a + 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , podemos estendê-la a todo o  $\mathbb{R}$  de forma única de forma a torná-la  $2\pi$ -periódica. O mesmo se passa se  $f : ]a, a + 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $a \in \mathbb{R}$ .

Por isso, supondo que  $f$  é integrável, com algum abuso de linguagem, dizemos que a **série de Fourier de  $f$  é a série de Fourier da sua extensão  $2\pi$ -periódica a  $\mathbb{R}$** .

- Caso o domínio de  $f$  seja fechado, isto é,  $f : [a, a + 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , com  $a \in \mathbb{R}$ , consideramos que **a série de Fourier de  $f$  é a série de Fourier da extensão  $2\pi$ -periódica de  $f|_{[a, a + 2\pi[}$  ( ou  $f|_{]a, a + 2\pi]}$ , é indiferente, pois a série obtida é a mesma).**
- Para simplificar a escrita, com algum abuso de linguagem, é frequente representar por  $f$  estas extensões  $2\pi$ -periódicas de  $f$ .

# Extensões Periódicas (continuação)

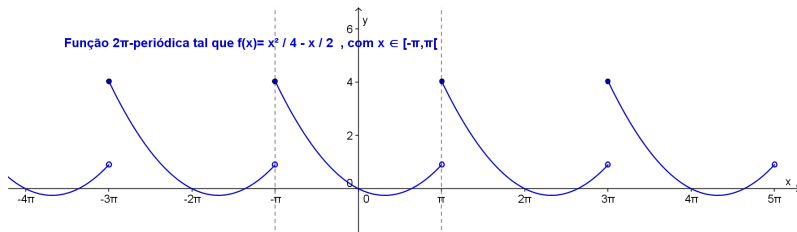
- Exemplo:

$$f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$$

a sua série de Fourier é a série de Fourier da função, de domínio  $\mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -periódica tal que  $f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2}$ , para  $x \in [-\pi, \pi]$ .

Ilustração gráfica:



► ver applet

# Extensões Periódicas (continuação)

Extensões ímpares de funções definidas no intervalo  $[0, \pi]$ :

Seja  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Considere-se a “extensão” ao intervalo  $[-\pi, \pi]$  definida da seguinte forma:

$$f_i: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_i(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ f(x) & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$



extensão ímpar de  $f$

A série de Fourier da extensão ímpar de  $f$  é uma série de senos.

# Extensões Periódicas (continuação)

Extensões pares de funções definidas no intervalo  $[0, \pi]$ :

Seja  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável. Considere-se a extensão ao intervalo  $[-\pi, \pi]$  definida da seguinte forma:

$$f_p: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f_p(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ f(x) & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$



extensão par de  $f$

A série de Fourier da extensão par de  $f$  é uma série de cossenos.

## Exemplo

$$\begin{aligned} f: [0, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned}$$

Extensão par de  $f$ :

$$\begin{aligned} f_p: [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_p(x) = |x| \end{aligned}$$

A série de Fourier da extensão par de  $f$  é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

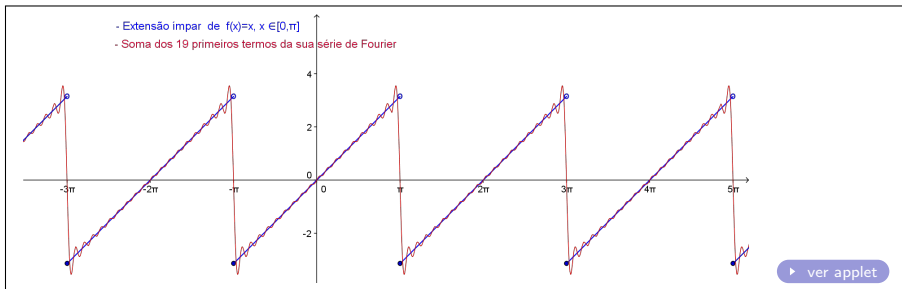
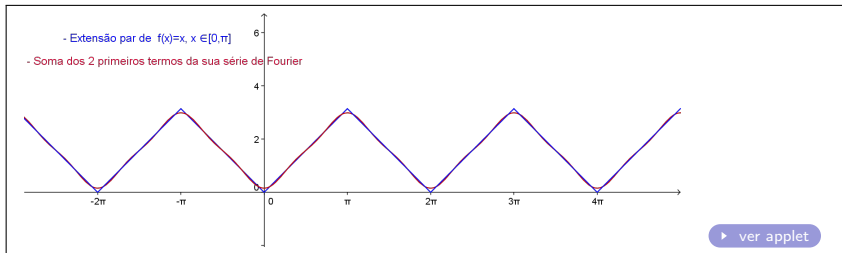
Extensão ímpar de  $f$ :

$$\begin{aligned} f_i: [-\pi, \pi] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f_i(x) = x \end{aligned}$$

A série de Fourier da extensão ímpar de  $f$  é

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n}$$

# Ilustrações Gráficas





# Convergência de uma série de Fourier

Uma série de Fourier nem sempre converge para a função que lhe deu origem. No entanto, sob certas condições podemos identificar a sua soma e, como vamos ver, nalguns desses casos a soma coincide com a função original. Analise os seguintes exemplos gráficos:

- 1 Onda Triangular [▶ ver applet](#)
- 2 Função quadrática par [▶ ver applet](#)
- 3 Onda quadrada [▶ ver applet](#)
- 4 Dente de serra [▶ ver applet](#)
- 5 Função quadrática (não par) [▶ ver applet](#)

Antes enunciar as ditas condições, precisamos de introduzir a noção de **função seccionalmente diferenciável**.

# Convergência de uma série de Fourier (cont.)

## Definições:

- $f$  diz-se **seccionalmente contínua** em  $[a, b]$  se existir uma partição  $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) de  $[a, b]$  tal que  $f$  é contínua em cada subintervalo aberto  $]a_{j-1}, a_j[$  ( $j = 1, \dots, n$ ) e existirem e forem finitos os limites laterais

$$f(a_{j-1}^+) := \lim_{x \rightarrow a_{j-1}^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(a_j^-) := \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

A função  $f$  diz-se **seccionalmente contínua** em  $\mathbb{R}$  se for seccionalmente contínua em todo o intervalo  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ .

- Uma função seccionalmente contínua diz-se **seccionalmente diferenciável** se a sua derivada é também seccionalmente contínua.

**Observação:** Se  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é  $2\pi$ -periódica, então  $f$  é seccionalmente diferenciável em  $\mathbb{R}$  sse  $f$  é seccionalmente diferenciável em  $[-\pi, \pi]$ , (ou em qualquer outro intervalo de amplitude  $2\pi$ ).

# Convergência de uma série de Fourier (cont.)

## Teorema de Dirichlet:

Sejam  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $2\pi$ -periódica e seccionalmente diferenciável (em  $\mathbb{R}$ ) e  $c \in \mathbb{R}$ . Então a série de Fourier de  $f$  converge no ponto  $c$  para  $\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$  (a média dos limites laterais de  $f$  no ponto  $c$ ).

**Observações:** Nas condições do Teorema de Dirichlet:

- A série de Fourier de  $f$  converge (pontualmente) para a função

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ se } x \text{ é ponto de continuidade de } f; \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} & , \text{ se } x \text{ não é ponto de continuidade de } f. \end{cases}$$

- $S$  é periódica com período  $2\pi$ , pelo que basta conhecer  $S(x)$  num intervalo de amplitude  $2\pi$ .

## Exemplo de função que satisfaz o Teorema de Dirichlet

Seja  $f$  a função  $2\pi$ -periódica definida em  $[-\pi, \pi]$  por  $f(x) = |x|$ . Já vimos,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2} \quad \text{▶ slide 41}.$$

Como  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e a sua derivada é seccionalmente contínua em  $\mathbb{R}$  (**Justifique!**), pelo **Teorema de Dirichlet** conclui-se que

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

## Outro exemplo de aplicação do Teorema de Dirichlet

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ } 2\pi\text{-periódica e } g(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\pi \leq x < 0 \\ \pi & , \quad 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Já vimos que

$$g(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x], \quad x \in \mathbb{R}.$$

► slide 42

Como  $g$  é seccionalmente diferenciável em  $\mathbb{R}$  (**Justifique!**), então, pelo **Teorema de Dirichlet**, para  $x \neq k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$  (pontos onde  $g$  é contínua) tem-se que

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x].$$

Nos pontos  $x = k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$  (pontos onde  $g$  é descontínua),

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] = \frac{\pi}{2}.$$

## Exemplos de aplicação ao cálculo de somas de séries numéricas

1 Já vimos que

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Tomando  $x = 0$ , obtemos  $0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ , logo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (1)$$

Partindo de (1), é possível mostrar que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  (uma vez que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}.$$

2 Já vimos que

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2n-1} \operatorname{sen}[(2n-1)x] = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad x \in \{0, \pi\} \\ \pi & , \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Tomando  $x = \frac{\pi}{2}$ , obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$