Aula 11

- Representação de números inteiros com sinal: complemento para dois. Exemplos de operações aritméticas
- *Overflow* e mecanismos para a sua deteção
- Construção de uma ALU de 32 bits
- Multiplicação de inteiros no MIPS
- Divisão de inteiros no MIPS. Divisão de inteiros com sinal

Bernardo Cunha, José Luís Azevedo, Arnaldo Oliveira

Representação de inteiros

- Sendo um computador um sistema digital binário, a representação de inteiros faz-se sempre em base 2 (símbolos 0 e 1).
- **Tipicamente, um inteiro pode ocupar um número de bits igual à dimensão de um registo interno do CPU**.
- A gama de valores inteiros representáveis é, assim, finita, e corresponde ao número máximo de combinações que é possível obter com o número de bits de um registo interno.
- No MIPS, um inteiro ocupa 32 bits, pelo que o número de inteiros representável é:

$$N_{inteiros} = 2^{32} = 4.294.967.296_{10} = [0\ ,\ 4.294.967.295_{10}]$$

Representação de inteiros

- Os circuitos que realizam operações aritméticas estão igualmente limitados a um número finito de bits, geralmente igual à dimensão dos registos internos do CPU
- Os circuitos aritméticos operam assim em aritmética modular, ou seja em **`mod(2`^{n}`)`** em que "**`n`**" é o número de bits da representação
- O maior valor que um resultado aritmético pode tomar será portanto **$2^n - 1$**, sendo o valor inteiro imediatamente a seguir o valor zero (representação circular)

Representação de inteiros

- Num CPU com uma ALU de 8 bits, por exemplo, o resultado da soma dos números `11001011` e `00110111` seria:

`11001011` + `00110111` = 1 $\boxed{00000010}$

carry

resultado com 8 bits

- No caso em que os operandos são do tipo ***unsigned***, o bit ***carry,*** se igual a '1', sinaliza que o resultado não cabe num registo de 8 bits, ou seja sinaliza a ocorrência de ***overflow***
- No caso em que os operandos são do tipo ***signed*** (codificados em complemento para 2) o bit de ***carry***, por si só, não tem qualquer significado, e não faz parte do resultado

Representação em complemento para dois

- O método usado em sistemas computacionais para a codificação de quantidades inteiras com sinal (*signed*) é "complemento para dois"
- **Definição**: Se K é um número positivo, então K* é o seu complemento para 2 (complemento verdadeiro) e é dado por:

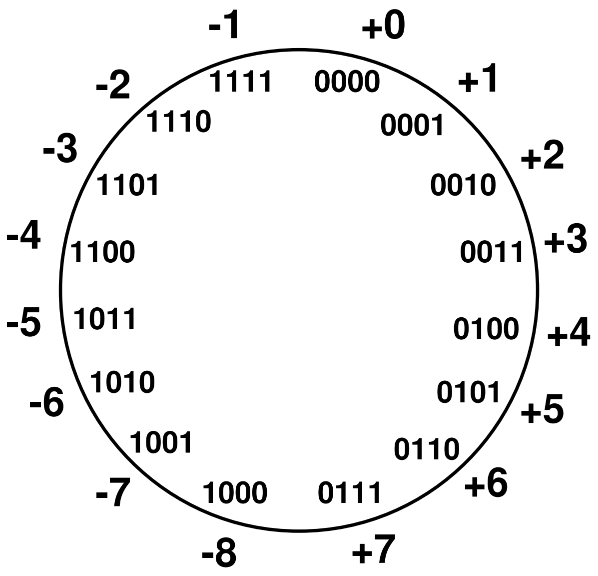
  $$K^* = 2^n - K$$

  em que "n" é o número de bits da representação
- **Exemplo**: determinar a representação de -5, com 4 bits

  $$N = 5_{10} = 0101_2$$
  $$2^n = 2^4 = 10000$$
  $$2^n - N = 10000 - 0101 = 1011 = N^*$$

- **Método prático**: inverter todos os bits do valor original e somar 1 (`0101 => 1010; 1010 + 1 = 1011`)
  - Este método é reversível: C_1(`1011)=0100; 0100+1=0101`

Representação em complemento para dois



\+

0 100 = + 4

1 100 = - 4

\-

O bit mais significativo também pode ser interpretado como sinal:
0 = valor positivo,
1 = valor negativo

- Uma única representação para 0
- Codificação assimétrica (mais um negativo do que positivos)
- A subtração é realizada através de uma operação de soma com o complemento para 2 do 2.º operando: **(a−b)=(a+(−b))**
- Uma quantidade de N bits codificada em complemento para 2 pode ser representada pelo seguinte polinómio:

$$-(a_{N-1}.2^{N-1})+(a_{N-2}.2^{N-2})+...+(a_1.2^1)+(a_0.2^0)$$

Representação em complemento para dois

S

- Uma quantidade de N bits codificada em complemento para 2 pode então ser representada pelo seguinte polinómio:

$$-(a_{N-1} . 2^{N-1}) + (a_{N-2} . 2^{N-2}) + ... + (a_1 . 2^1) + (a_0 . 2^0)$$

Onde o bit indicador de sinal (a_{N-1}) é multiplicado por -2^{N-1} e os restantes pela versão positiva do respetivo peso

- **Exemplo**: Qual o valor representado em base 10 pela quantidade 10100101_2, supondo uma representação em complemento para 2 com 8 bits?
  - **R1**: $10100101_2 = -(1x2^7)+(1x2^5)+(1x2^2)+(1x2^0)$ $= -128 + 32 + 4 + 1 = -91_{10}$
  - **R2**: O valor é negativo, calcular o módulo (simétrico de 10100101): $01011010 + 1 = 01011011_2 = 5B_{16} = 91_{10}$

  o módulo da quantidade é **91**; logo o valor representado é **-91**$_{10}$

Representação em complemento para dois

- Exemplos de operações, com 4 bits

(4 + 3)

4	0100
+ 3	0011
7	0111

(−4 − 3)

-4	1100
+ (-3)	1101
-7	11001

(4 − 3)

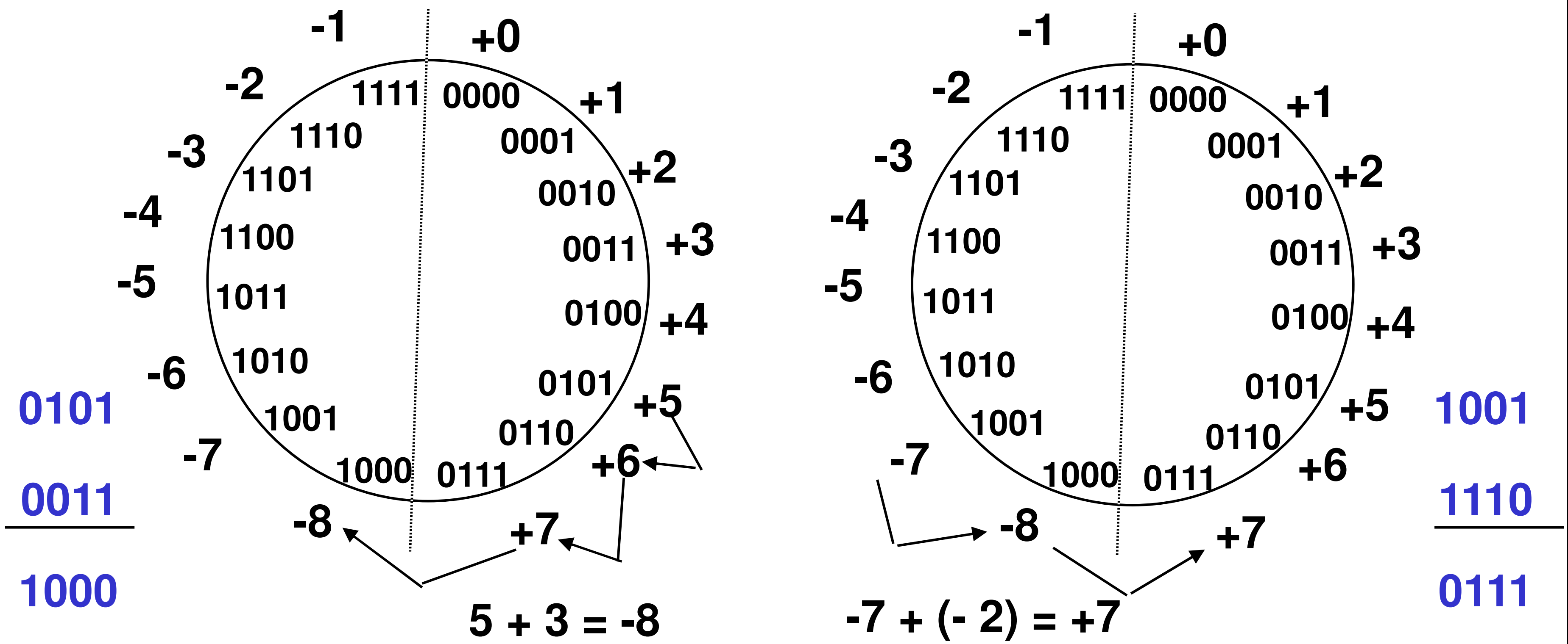
4	0100
+ (-3)	1101
1	10001

(−4 + 3)

-4	1100
+ 3	0011
-1	1111

- Este esquema simples de adição com sinal torna o complemento para 2 o preferido para representação de inteiros em arquitetura de computadores

Overflow em complemento para 2



- Ocorre ***overflow*** quando é ultrapassada a gama de representação. Isso acontece quando:
  - se somam dois positivos e o resultado obtido é negativo
  - se somam dois negativos e o resultado obtido é positivo

Overflow em complemento para 2

	carry	0 0 0 0
5		0 1 0 1
2	=’S	0 0 1 0
7		0 0 1 1 1

Sem overflow

		1 1 1 1
-3		1 1 0 1
+ (-5)	=’S	1 0 1 1
-8		1 1 0 0 0

Sem overflow

		0 1 1 1
5		0 1 0 1
3	≠’S	0 0 1 1
-8		0 1 0 0 0

Overflow

		1 0 0 0
-7		1 0 0 1
+ (-2)	≠’S	1 1 1 0
7		1 0 1 1 1

Overflow

A situação de ***overflow* ocorre** quando o *carry-in* do bit mais significativo não é igual ao *carry-out*, ou seja, quando:

$$C_{n-1} \oplus C_n = 1$$

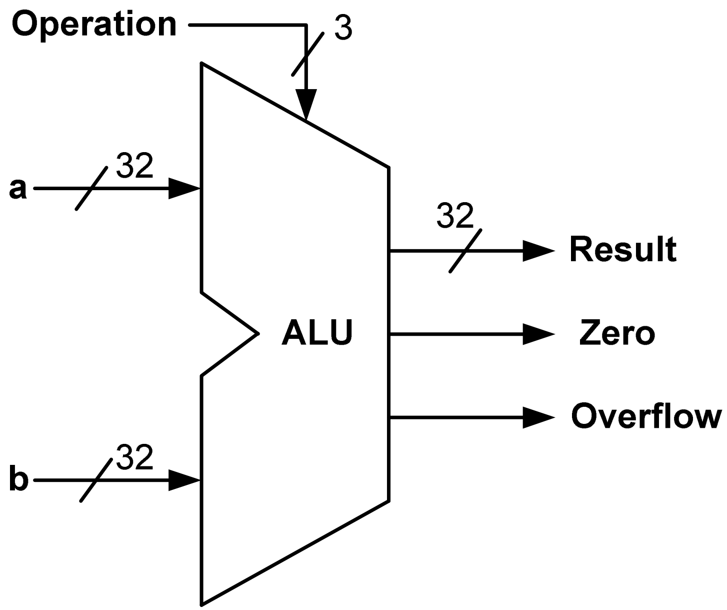
Overflow em operações aritméticas

- **Operandos interpretados em complemento para 2 (i.e. com sinal):**
  - Quando $A + B > 2^{n-1}-1$ ou $A + B < -2^{n-1}$
    - $OVF = (C_{n-1} . \overline{C_n}) + (\overline{C_{n-1}} . C_n) = C_{n-1} \oplus C_n$
  - Alternativamente, não tendo acesso aos bits intermédios de *carry*, (R = A + B):
    - $OVF = R_{n-1} . \overline{A_{n-1}} . \overline{B_{n-1}} + \overline{R_{n-1}} . A_{n-1} . B_{n-1}$
- **Operandos interpretados sem sinal:**
  - Quando $A+B > 2^n-1$ ou $A-B$ c/ $B>A$
  - O bit de *carry* $C_n = 1$ sinaliza a ocorrência de *overflow*
- O MIPS apenas deteta *overflow* nas operações de adição com sinal (ADD, SUB, ADDI) e, quando isso acontece, gera uma exceção. ADDU, SUBU e ADDIU não detetam *overflow*

Construção de uma ALU de 32 bits

- A ALU deverá realizar as operações:
  - ADD, SUB
  - AND, OR
  - SLT (set if less than)
- Deverá ainda:
  - Detetar e sinalizar *overflow* (operandos em complemento para 2)
  - Sinalizar resultado igual a zero

Operation	ALU Action
0 0 0	And
0 0 1	Or
0 1 0	Add
1 1 0	Subtract
1 1 1	Set if less than



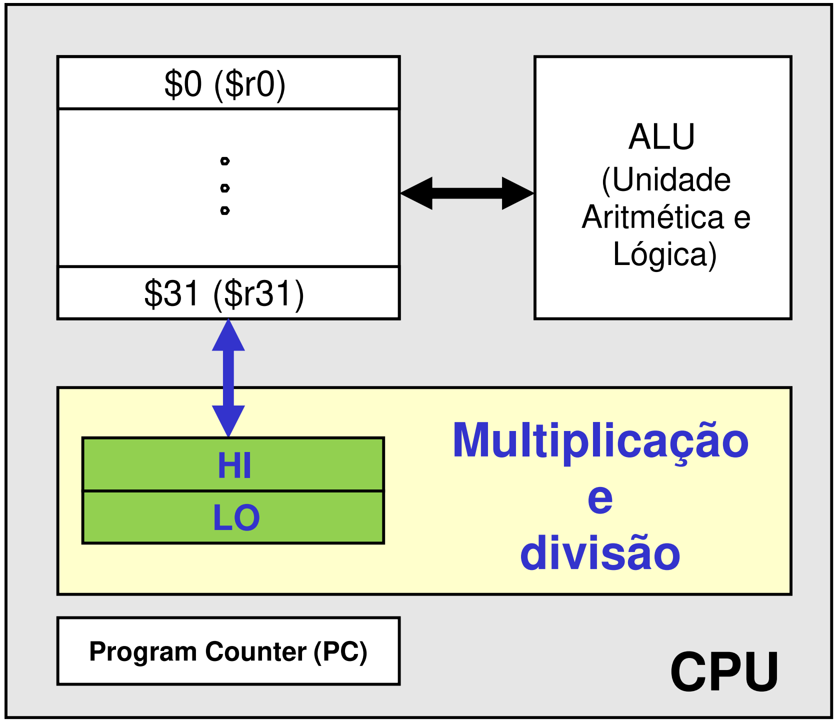
Bloco funcional correspondente a uma ALU de 32 bits

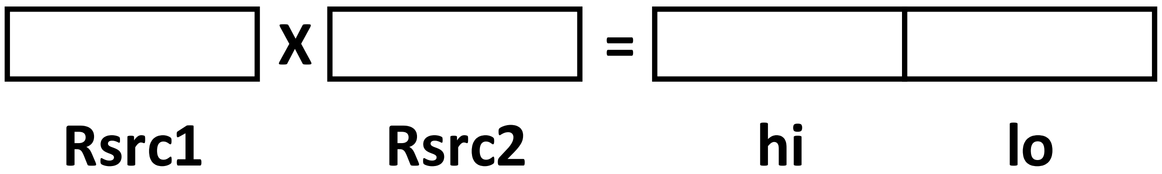
Multiplicação de inteiros

- Devido ao aumento de complexidade que daí resulta, nem todas as arquiteturas suportam, ao nível do *hardware*, a capacidade para efetuar operações aritméticas de multiplicação e divisão de inteiros
- Multiplicação de quantidades **sem sinal**: algoritmo clássico que é usado na multiplicação em decimal
- Multiplicação de quantidades **com sinal** (representadas em complemento para dois): algoritmo de Booth
- Uma multiplicação que envolva **dois operandos de *N* bits** carece de um espaço de armazenamento, para o resultado, de **2*N bits**

A Multiplicação de inteiros no MIPS

- No MIPS, a multiplicação e a divisão são asseguradas por um módulo independente da ALU
- Os operandos são registos de 32 bits. Na multiplicação, tal implica que o **resultado** tem de ser armazenado com **64 bits**
- Os resultados são armazenados num par de registos especiais designados por **HI** e **LO**, cada um com 32 bits
- Estes registos são de uso específico da unidade de multiplicação e divisão de inteiros





A Multiplicação de inteiros no MIPS

- O registo **HI** armazena os **32 bits mais significativos do resultado**
- O registo **LO** armazena os **32 bits menos significativos do resultado**
- A transferência de informação entre os registos HI e LO e os restantes registos de uso geral faz-se através das instruções **mfhi** e **mflo**:

```
mfhi    Rdst    # move from hi: copia HI para Rdst
mflo    Rdst    # move from lo:  copia LO para Rdst
```

- A unidade de multiplicação pode operar considerando os operandos com sinal (multiplicação *signed*) ou sem sinal (multiplicação *unsigned*); a distinção é feita através da mnemónica da instrução:
  - **mult** – multiplicação "signed"
  - **multu** – multiplicação "unsigned"

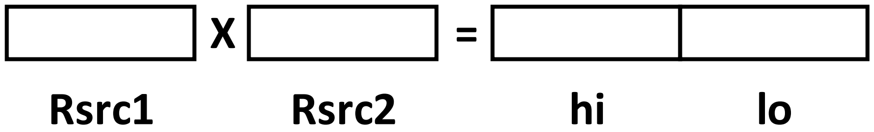
A Multiplicação de inteiros no MIPS

- Em *Assembly*, a multiplicação é então efetuada pelas instruções

```
mult    Rsrc1, Rsrc2    # Multiply (signed)
multu   Rscr1, Rsrc2    # Multiply unsigned
```

  em que **Rsrc1** e **Rsrc2** são os dois registos a multiplicar

- O **resultado** fica armazenado nos **registos HI e LO**



- **Exemplo:** Multiplicar os registos \$t0 e \$t1 e colocar o resultado nos registos \$a1 (32 bits mais significativos) e \$a0 (32 bits menos significativos); os operandos devem ser interpretados com sinal

```
mult    $t0, $t1   # resultado em hi e lo
mfhi    $a1        # copia hi para registo $a1
mflo    $a0        # copia lo para registo $a0
```

Instruções virtuais de multiplicação

S

Multiplicação *signed*

```
      mul    Rdst, Rsrc1, Rsrc2

             mult      Rsrc1, Rscr2
             mflo      Rdst
```

Multiplicação *unsigned*

```
      mulu   Rdst, Rsrc1, Rsrc2

             multu     Rsrc1, Rscr2
             mflo      Rdst
```

Multiplicação *unsigned* com deteção de overflow

```
      mulou  Rdst, Rsrc1, Rsrc2

             multu     Rsrc1, Rscr2
             mfhi      $1
             beq       $1, $0, cont
             break
cont:        mflo      Rdst
```

Multiplicação *signed* com deteção de overflow

```
      mulo   Rdst, Rsrc1, Rsrc2

             mult      Rsrc1, Rscr2
             mfhi      $1
             mflo      Rdst
             sra       Rdst, Rdst, 31
             beq       $1, Rdst, cont
             break
cont:        mflo      Rdst
```

Divisão de inteiros com sinal

- **A divisão de inteiros com sinal faz-se, do ponto de vista algorítmico, em sinal e módulo**
- Nas divisões com sinal aplicam-se as seguintes regras:
  - Divide-se dividendo por divisor, em módulo
  - O quociente tem sinal negativo se os sinais do dividendo e do divisor forem diferentes
  - O resto tem o mesmo sinal do dividendo
- Exemplo 1 (**`dividendo = -7`**, **`divisor = 3`**):

```
-7 /  3 = -2        resto = -1
```

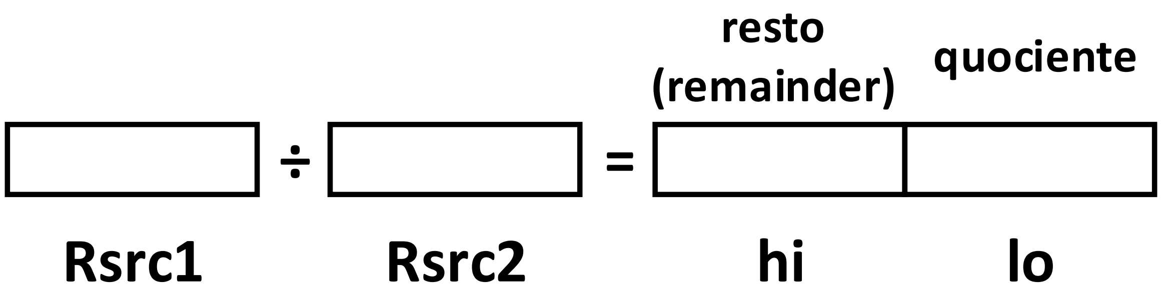
- Exemplo 2 (dividendo = 7, divisor = -3):

```
 7 / -3 = -2        resto =  1
```

Note que: **`Dividendo = Divisor * Quociente + Resto`**

A Divisão de inteiros no MIPS

- Tal como na multiplicação, continua a existir a necessidade de um registo de 64 bits para armazenar o resultado final na forma de um quociente e de um resto
- Os mesmos registos, **HI** e **LO**, que tinham já sido usados para a multiplicação, são igualmente utilizados para a divisão:
  - o registo **HI armazena o resto da divisão** inteira
  - o registo **LO armazena o quociente da divisão** inteira

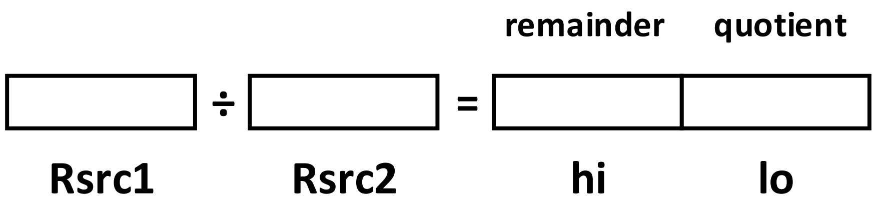


A Divisão de inteiros no MIPS

- No MIPS, as instruções *Assembly* de divisão são:

```
div     Rsrc1, Rsrc2    # Divide (signed)
divu    Rsrc1, Rsrc2    # Divide unsigned
```

- em que **Rsrc1** é o dividendo e **Rsrc2** o divisor. O **resultado** fica armazenado nos registos **HI (resto)** e **LO (quociente)**.



- **Exemplo**: obter o resto da divisão inteira entre os valores armazenados em \$t0 e \$t5, colocando o resultado em \$a0

```
div     $t0, $t5    # hi = $t0 % $t5
                    # lo = $t0  /  $t5
mfhi    $a0         # $a0 = hi
```

Instruções virtuais de divisão

S

Divisão *signed*

div Rdst, Rsrc1, Rsrc2	
div	Rsrc1, Rscr2
mflo	Rdst

Divisão *unsigned*

divu Rdst, Rsrc1, Rsrc2	
divu	Rsrc1, Rscr2
mflo	Rdst

Resto da divisão *signed*

rem Rdst, Rsrc1, Rsrc2	
div	Rsrc1, Rscr2
mfhi	Rdst

Resto da divisão *unsigned*

remu Rdst, Rsrc1, Rsrc2	
divu	Rsrc1, Rscr2
mfhi	Rdst

S

Exercícios

- Para uma codificação em complemento para 2, apresente a gama de representação que é possível obter com 3, 4, 5, 8 e 16 bits (indique os valores-limite da representação em binário, hexadecimal e em decimal com sinal e módulo).
- Determine a representação em complemento para 2 com 16 bits das seguintes quantidades:
  - **5**, **−3**, **−128**, **−32768**, **31**, **−8**, **256**, **−32**
- Determine o valor em decimal representado por cada uma das quantidades seguintes, supondo que estão codificadas em complemento para 2 com 8 bits:
  - $\mathbf{00101011_2}$, **0xA5**, $\mathbf{10101101_2}$, **0x6B**, **0xFA**, **0x80**
- Determine a representação das quantidades do exercício anterior em hexadecimal com 16 bits (também codificadas em complemento para 2).

Exercícios

- Como é realizada a deteção de *overflow* em operações de adição com quantidades sem sinal? E com quantidades com sinal (codificadas em complemento para 2)?
- Para a multiplicação de dois operandos de "**`m`**" e "**`n`**" bits, respetivamente, qual o número de bits necessário para o armazenamento do resultado?
- Apresente a decomposição em instruções nativas da instrução virtual **`mul $5,$6,$7`**
- Determine o resultado da instrução anterior, quando **`$6=0xFFFFFFFE`** e **`$7=0x00000005`**.
- Apresente a decomposição em instruções nativas das instruções virtuais **`div $5,$6,$7`** e **`rem $5,$6,$7`**
- Determine o resultado das instruções anteriores, quando **`$6=0xFFFFFFF0`** e **`$7=0x00000003`**

S

Exercícios

- As duas sub-rotinas do slide seguinte permitem detetar *overflow* nas operações de adição com e sem sinal, no MIPS. Analise o código apresentado e determine o resultado produzido, pelas duas sub-rotinas, nas seguintes situações:
  - **`$a0=0x7FFFFFF1, $a1=0x0000000E;`**
  - **`$a0=0x7FFFFFF1, $a1=0x0000000F;`**
  - **`$a0=0xFFFFFFF1, $a1=0xFFFFFFFF;`**
  - **`$a0=0x80000000, $a1=0x80000000;`**

- Ainda no código das sub-rotinas, qual a razão para não haver salvaguarda de qualquer registo na *stack*?