Conteúdo

3 Transformada de Laplace **38**
3.1 Definição da transformada de Laplace 38
3.2 Existência da Transformada de Laplace 39
3.3 Linearidade da transformada de Laplace 41
3.4 Transformadas de Laplace fundamentais 41
3.5 Deslocamento na transformada 42
3.6 Transformada do deslocamento 42
3.7 Transformada da contração/expansão de uma função 43
3.8 Derivada da transformada 43
3.9 Transformada da derivada 44
3.10 Transformada de Laplace Inversa 44
3.11 Problemas de Valor Inicial ou de Cauchy 46
3.12 Exercícios do capítulo 51
3.13 Soluções dos exercícios 53

Capítulo 3

Transformada de Laplace

3.1 Definição da transformada de Laplace

A **transformada de Laplace** de uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é a função $\mathcal{L}\{f\}$ definida por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

para os valores de $s \in \mathbb{R}$ onde o integral converge.

Exemplo 3.1.1. Determinar a transformada de Laplace da função $f(t) = t$.
Calcula-se o integral impróprio de 1ª espécie

$$\int_0^{+\infty} te^{-st}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-st}dt$$

Usando a integração por partes, considerando $u' = e^{-st}$ e $v = t$ (consequentemente, $u = -\frac{1}{s}e^{-st}$ e $v' = 1$) vem

$$\int_0^x te^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\,t\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{s}e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\,t\right]_0^x + \frac{1}{s}\int_0^x e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\,t\right]_0^x - \left[\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^x$$

Substituindo agora t pelos valores 0 e x vem,

$$\int_0^x te^{-st}dt = \left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\,x + \frac{1}{s}e^0\,0\right) - \left(\frac{1}{s^2}e^{-sx} - \frac{1}{s^2}e^0\right) = -\frac{1}{s}e^{-sx}\,x - \frac{1}{s^2}e^{-sx} + \frac{1}{s^2}$$

Tomando agora o limite,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-st}dt = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\,x - \frac{1}{s^2}e^{-sx} + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2},\ s > 0$$

Note-se que se $s > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\,x - \frac{1}{s^2}e^{-sx}\right) = -\frac{1}{s}\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \frac{1}{s}}{e^{sx}} = 0(^1)$$

Se $s < 0$, $-sx$ tende para $+\infty$ e portanto

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\,x - \frac{1}{s^2}e^{-sx}\right) = -\frac{1}{s}\lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{1}{s}\right)e^{-sx} = +\infty$$

Por último, se $s = 0$

$$\int_0^{+\infty} te^{-st}dt = \int_0^{+\infty} te^0dt = \int_0^{+\infty} tdt$$

Este integral é divergente, já que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x tdt = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{t^2}{2} = +\infty$$

[1] Podem usar a regra de Cauchy para levantar a indeterminação

Se $s \leq 0$ o integral impróprio é divergente. Se $s > 0$ o integral impróprio é convergente e o seu valor é $\dfrac{1}{s^2}$.
Podemos então concluir que a transformada de Laplace de $f(t) = t$ é

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2},\ s > 0$$

Exercício 3.1.1 Calcule as transformadas de Laplace das seguintes funções, indicando os respetivos domínios.

1. $f(t) = 1$.
2. $f(t) = e^t$.

3.2 Existência da Transformada de Laplace

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Suponhamos que

1. f é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$; [2]
2. f é de **ordem exponencial à direita**, isto é, existem $a \in \mathbb{R}$, $M > 0$ e $T > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq M e^{at}, \quad \forall t \geq T.$$

Então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > a$.

Exemplo 3.2.1. Vamos mostrar que a transformada de Laplace da função

$$f(x) = \begin{cases} 8 & \text{se} \quad x \geq 1 \\ -3\,x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

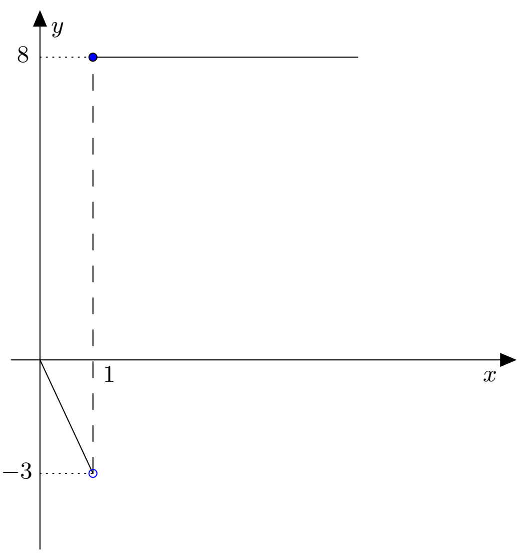
é

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{(11\,s - 3\,e^s + 3)e^{-s}}{s^2}$$

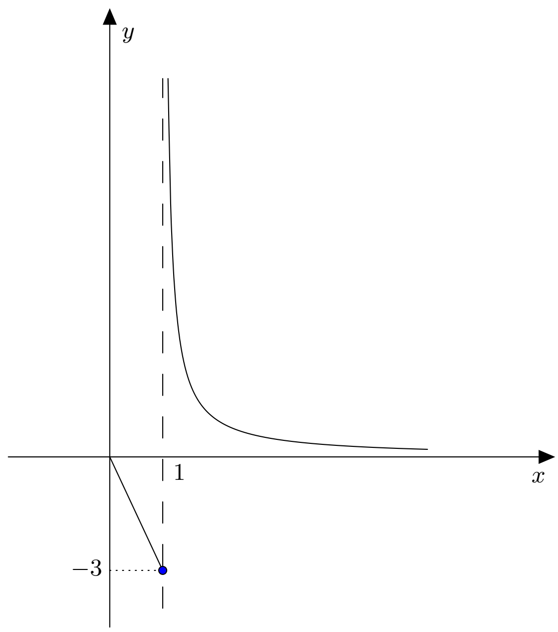
Note-se que f é seccionalmente contínua (apenas apresenta um ponto de descontinuidade em $x = 1$ e é limitada em qualquer intervalo $[0, b]$, $b > 0$) e ainda que $f(x) \leq 8$, $\forall x \geq 0$.
Assim, tomando $M = 8$ e $a = 0$, para qualquer $T > 0$ se verifica a desigualdade

$$|f(x)| \leq M e^{ax}, \quad \forall x \geq T$$

[2] Uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ diz-se seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é um conjunto numerável e a função é limitada em qualquer intervalo $[0, b]$, $b > 0$.



seccionalmente contínua



não seccionalmente contínua

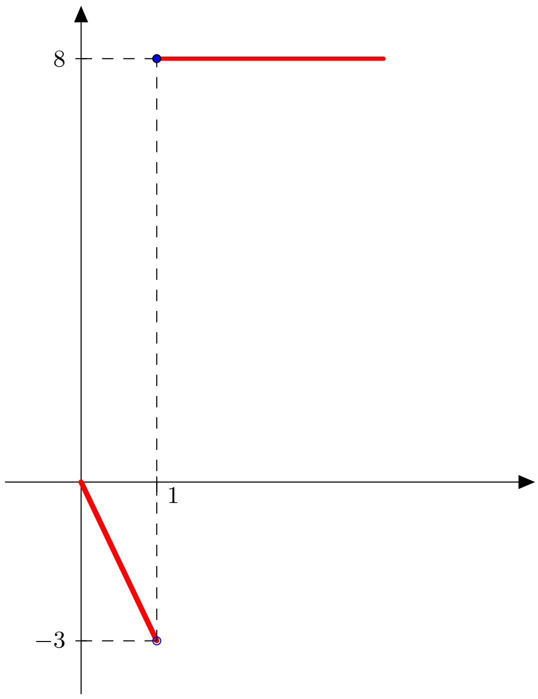


Figura 3.1: Gráfico da função f.

portanto, f admite transformada de Laplace.
Dada uma função f definida em $I = [0, +\infty[$, a sua transformada de Laplace é uma função de s, $F(s)$, dada pelo integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

para os valores de s para os quais o integral é convergente.
Como f é uma função definida por ramos, vem

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = \int_0^1 -3\, xe^{-sx}\, dx + \int_1^{+\infty} 8\, e^{-sx}\, dx$$

O primeiro integral é dado por

$$\int_0^1 -3\, xe^{-sx}\, dx = \left[\frac{3\,(sx+1)e^{-sx}}{s^2}\right]_0^1 = \frac{3\,(s+1)e^{-s}}{s^2} - \frac{3}{s^2}$$

A convergência do segundo integral pode ser estudada pela existência do limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t 8\, e^{-sx}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{8\, e^{-sx}}{s}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{8\, e^{-st}}{s} + \frac{8\, e^{-s}}{s}\right]$$

Este limite só existe em $\mathbb{R}$ se $s > 0$ e neste caso

$$\lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{8\, e^{-st}}{s} + \frac{8\, e^{-s}}{s}\right] = \frac{8\, e^{-s}}{s}$$

Se $s < 0$ o limite é $+\infty$. Observe-se que se $s = 0$ temos o integral

$$\int_1^{+\infty} 8\, dx$$

que é divergente (para $+\infty$).
Assim, para $s > 0$ temos

$$F(s) = \frac{11\, e^{-s}}{s} + \frac{3\, e^{-s}}{s^2} - \frac{3}{s^2} = \frac{(11\, s - 3\, e^{s} + 3)e^{-s}}{s^2}$$

Exercício 3.2.1 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \geq 5 \\ 9\,x & \text{se} \quad 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

Justifique que a função f admite transformada de Laplace e mostre que

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = -\frac{46\,e^{-5\,s}}{s} - \frac{9\,e^{-5\,s}}{s^2} + \frac{9}{s^2}$$

para todos os valores de $s \in \mathbb{R}^+$.

3.3 Linearidade da transformada de Laplace

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e duas funções $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Suponhamos que existem

$$\mathcal{L}\{f\}(s), \text{ para } s > s_f \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{g\}(s), \text{ para } s > s_g$$

Então:

1. $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \ s > \max\{s_f, s_g\}$
2. $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f\}(s), \ s > s_f.$

Exemplo 3.3.1. A transformada de $f(t) = 5 + 3t$ é dada por

$$\mathcal{L}\{5 + 3t\}(s) = 5\mathcal{L}\{1\}(s) + 3\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{5}{s} + \frac{3}{s^2}$$

com $s > 0$.

3.4 Transformadas de Laplace fundamentais

1. $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \dfrac{1}{s-a}, \ s > a, a \in \mathbb{R}$
2. $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}, \ s > 0, a \in \mathbb{R}$
3. $\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}, \ s > 0, a \in \mathbb{R}$
4. $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \ s > 0, n \in \mathbb{N}_0$
5. $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{s}{s^2 - a^2}, \ s > |a|, a \in \mathbb{R}$
6. $\mathcal{L}\{\text{senh}(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}, \ s > |a|, a \in \mathbb{R}$

Exercício 3.4.1 Determine a transformada de Laplace das funções, indicando os respetivos domínios:

1. $f(t) = t^2 + \cos(3t) + \pi$
2. $g(t) = 3e^{-2t} + \text{sen}\left(\dfrac{t}{6}\right) + \cosh(4t)$
3. $h(t) = t^{10} + \dfrac{e^t}{3} + \cos^2(t)$
4. $j(t) = \text{senh}(\sqrt{2}t) + \left(\frac{t}{2}\right)^2$

3.5 Deslocamento na transformada

Sejam $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s - \lambda), \quad s > s_f + \lambda.$$

Exemplo 3.5.1. Para calcular a transformada de Laplace da função $g(t) = e^{-3t} \operatorname{sen}(2t)$ começamos por determinar a transformada

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2 + 4}, \; s > 0$$

Aplicamos agora a propriedade acima referida

$$\mathcal{L}\{e^{-3t} \operatorname{sen}(2t)\}(s) = \frac{2}{(s - (-3))^2 + 4} = \frac{2}{(s + 3)^2 + 4}, \; s > -3$$

Exercício 3.5.1 Calcule as transformadas de Laplace de:

1. $f(t) = e^{2t} t^2$
2. $h(t) = e^{-t} \cosh(4t)$

3.6 Transformada do deslocamento

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$ e nula em $\mathbb{R}^-$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{L}\{f(t - a)\}(s) = e^{-as} F(s), \quad s > s_f$$

Demonstração. A transformada $\mathcal{L}\{f(t - a)\}(s)$ é dada por

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t - a) dt = \int_{-a}^{+\infty} e^{-s(t_1 + a)} f(t_1) dt_1$$

fazendo a mudança de variável $t = t_1 + a$. Aplicando agora as propriedades do integral, temos

$$\int_{-a}^{+\infty} e^{-s(t_1+a)} f(t_1) dt_1 = \int_{-a}^{0} e^{-s(t_1+a)} f(t_1) dt_1 + \int_{0}^{+\infty} e^{-s(t_1+a)} f(t_1) dt_1$$

O primeiro integral é nulo já que $f(t) = 0$ em $\mathbb{R}^-$. Então,

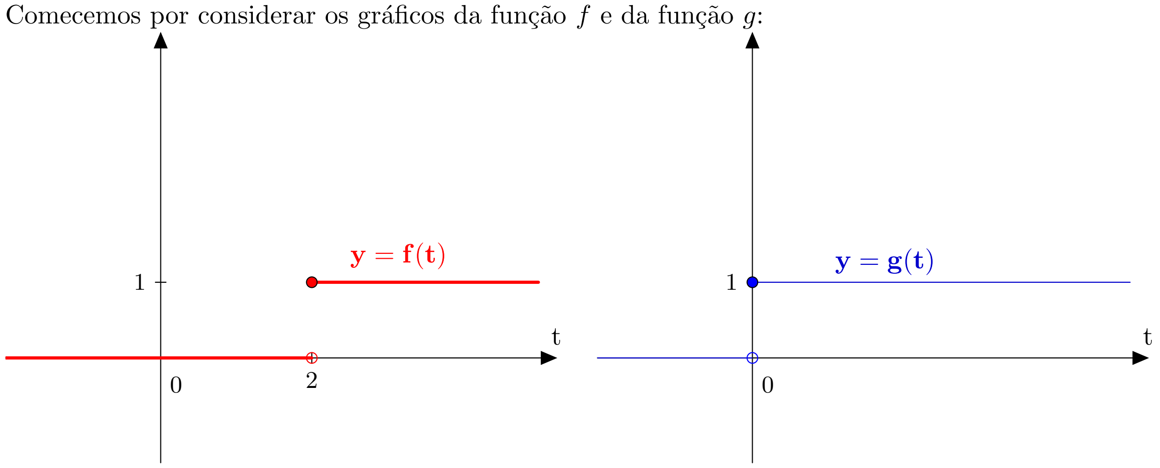
$$\int_{-a}^{+\infty} e^{-s(t_1+a)} f(t_1) dt_1 = \int_{0}^{+\infty} e^{-s(t_1+a)} f(t_1) dt_1 = e^{-sa} \int_{0}^{+\infty} e^{-st_1} f(t_1) dt_1 = e^{-sa} \mathcal{L}\{f(t_1)\}(s) = e^{-sa} F(s).$$

□

Exercício resolvido 3.6.1. Use o resultado anterior para calcular a seguinte transformada de Laplace:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ 1 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

Resolução:
Comecemos por considerar os gráficos da função f e da função g:



onde g é dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Observe-se que $f(t) = g(t-2)$. Como a transformada de Laplace de g é

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s},\ s > 0$$

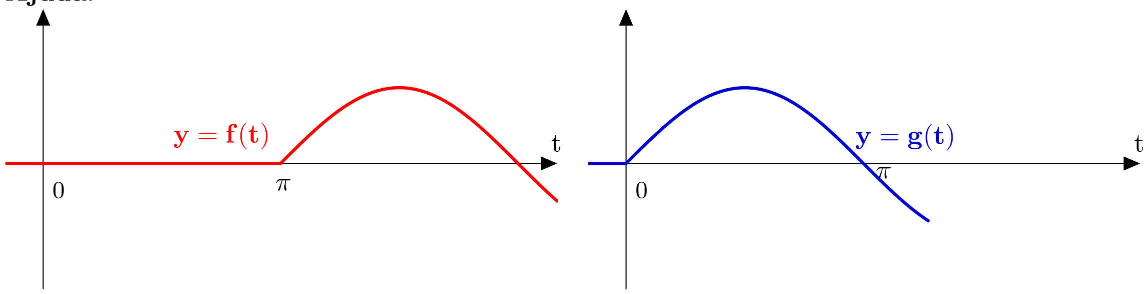
resulta que a transformada de Laplace de f é dada por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = e^{-2s}\frac{1}{s},\ s > 0$$

Exercício 3.6.1 Use o resultado anterior para calcular a transformada de Laplace:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \pi \\ \operatorname{sen}(t-\pi) & \text{se } t \geq \pi \end{cases}$$

Ajuda:



3.7 Transformada da contração/expansão de uma função

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$ e $a \in \mathbb{R}^+$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad s > as_f$$

Exemplo 3.7.1. Sabendo que a transformada de $f(t) = \cos t$ é $\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$, podemos determinar a transformada de $\mathcal{L}\{\cos(4t)\}(s)$, onde $a = 4$. Assim,

$$\mathcal{L}\{\cos(4t)\}(s) = \frac{1}{4}\frac{\frac{s}{4}}{\frac{s^2}{16}+1} = \frac{s}{s^2+16}$$

Exercício 3.7.1 Use a propriedade anterior para obter a Transformada de Laplace de:

1. $n(t) = \frac{t^2}{2}$
2. $p(t) = e^{3t}$

3.8 Derivada da transformada

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > s_f.$$

Exemplo 3.8.1. Para calcular $\mathcal{L}\{t^2\cos(t)\}$, consideramos a transformada $\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \dfrac{s}{s^2+1}$; a transformada de $t^2\cos(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}\{t^2\cos(t)\} = (-1)^2\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'' = \left(\frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2}\right)' = \frac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3}$$

Exercício 3.8.1 Use a propriedade anterior para obter a Transformada de Laplace de:

1. $f(t) = te^{2t}$
2. $h(t) = (t^2 - 3t + 2)\text{sen}(3t)$.

3.9 Transformada da derivada

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua. Admita-se que as derivadas f', f'', ..., $f^{(n-1)}$ são de ordem exponencial e que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua.
Se existem

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s),\ \mathcal{L}\{f'\}(s),\ \ldots,\ \mathcal{L}\{f^{(n-1)}\}(s)$$

para $s > s_f$, $s > s_{f'}$, ..., $s > s_{f^{(n-1)}}$, respetivamente, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \\ - s^{n-3} f''(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),\end{aligned}$$

para $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''},\ \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$.

Exemplo 3.9.1. Supondo que $y = f(x)$ e as suas derivadas satisfazem as condições do Teorema anterior, vamos determinar $\mathcal{L}\{f'''(t)\}$ em função de $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$ sabendo que $f(0) = -2$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 1$.

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0) = s^3 F(s) + 2s^2 - 1$$

Exercício 3.9.1 Supondo que $y = f(x)$ e as suas derivadas satisfazem as condições do Teorema anterior, determine em função de $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$

1. $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2$.
2. $\mathcal{L}\{f''(t) + 3f'(t) - f(t)\}$ sabendo que $f(0) = 3$ e $f'(0) = 0$.
3. $\mathcal{L}\{f'''(t) - 2f''(t) - f'(t)\}$ sabendo que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 0$.

Exercício 3.9.2 Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ sabendo que

$$\begin{cases} y'' + y' = \cos(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

3.10 Transformada de Laplace Inversa

Seja $F(s)$ uma função definida para $s > \alpha$.
Chama-se **transformada de Laplace inversa de** F, que se representa por $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ ou $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, à função f, caso exista, definida em $\mathbb{R}_0^+$ tal que $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, para $s > \alpha$.

Observação 3.1. Dada F definida para $s > \alpha$, nem sempre existe $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$; no caso de existir, a transformada inversa pode não ser única e nesse caso escolhemos a solução que origina uma função contínua (o que é justificado pelo resultado seguinte)

Teorema 3.1. *Sejam f e g duas funções seccionalmente contínuas em $\mathbb{R}_0^+$ tais que*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s),$$

para $s > \alpha$. Se f e g são contínuas no ponto $t \in \mathbb{R}^+$, então $f(t) = g(t)$.

Por outras palavras, o resultado diz que não podem existir duas funções contínuas distintas com a mesma transformada de Laplace.

Exemplo 3.10.1. A função contínua cuja transformada de Laplace é $\dfrac{2}{s^2+4}$ é

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \text{sen}\,(2t),\ t \geq 0$$

Para calcularmos transformadas de Laplace inversas convém referir algumas propriedades.

Teorema 3.2. *Suponha-se que existem $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ e $\mathcal{L}^{-1}\{G\}$. Então*

1. $\mathcal{L}^{-1}\{F+G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$;
2. $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Teorema 3.3. *Se existe $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$, então*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Estas propriedades e a tabela de transformadas (tomada agora no sentido inverso) serão usadas para determinar transformadas inversas.

Exercício resolvido 3.10.1. Vamos mostrar que a inversa da transformada de Laplace da função

$$F(s) = \frac{-0.2\,s+2}{s^2+0.04}$$

é

$$f(x) = 10 \text{ sen}\left(\frac{1}{5}\,x\right) - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right)$$

Resolução:
A lineariedade permite-nos escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-0.2\,s+2}{s^2+0.04}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{0.2\,s}{s^2+0.04}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+0.04}\right]$$

Recordando a transformada de laplace das funções seno e cosseno:

$$\mathcal{L}[\cos{(ax)}](s) = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[\text{sen}\,(ax)](s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

basta observar que

$$-\frac{0.2\,s}{s^2+0.04} = -0.2\,\frac{s}{s^2+0.2^2} \quad \text{e} \quad \frac{2}{s^2+0.04} = 10\,\frac{0.2}{s^2+0.2^2}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{0.2\,s}{s^2+0.04}\right] = -\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+0.2^2}\right] = -\frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right)$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+0.04}\right] = 10\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.2}{s^2+0.2^2}\right] = 10\,\text{sen}\left(\frac{1}{5}\,x\right)$$

Efetuando os cálculos tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-0.2\,s+2}{s^2+0.04}\right] = 10 \text{ sen}\left(\frac{1}{5}\,x\right) - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right)$$

Exercício resolvido 3.10.2. Determine a função y sabendo que a sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{-36\,s^2+5\,s-144}{(s^2+4)(9\,s-6)}, \; s > \frac{2}{3}$$

Resolução:
Vamos decompor esta fração em elementos simples:

$$\frac{-36\,s^2+5\,s-144}{(s^2+4)(9\,s-6)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C}{9\,s-6}$$

Para determinar os coeficientes A, B e C podemos atender apenas aos numeradores

$$(As+B)(9\,s-6) + C(s^2+4) = -36\,s^2+5\,s-144$$

Fazendo s igual a $\frac{2}{3}$ vem $\frac{40}{9}C = -\frac{470}{3} \Leftrightarrow C = -\frac{141}{4}$; se fizermos $s=0$ obtemos imediatamente o valor de B: $-6\,B - 141 = -144 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}$. Para determinar o valor de A, toma-se, por exemplo, $s=1$ e vem $3\,A - \frac{699}{4} = -175 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{12}$.

Assim,

$$\frac{-36\,s^2+5\,s-144}{(s^2+4)(9\,s-6)}=\frac{-\frac{1}{12}\,s+\frac{1}{2}}{s^2+4}+\frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, temos

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{12}\,s+\frac{1}{2}}{s^2+4}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}\right\}$$

Calculando as inversas das transformadas de Laplace, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{12}\,s+\frac{1}{2}}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,(2\,t)-\frac{1}{12}\,\cos\,(2\,t)\quad \text{e}\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}\right\}=-\frac{47}{12}\,e^{\frac{2}{3}\,t}$$

Finalmente, a função y é dada por:

$$y=-\frac{47}{12}\,e^{\frac{2}{3}\,t}+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,(2\,t)-\frac{1}{12}\,\cos\,(2\,t)$$

Exercício 3.10.1 Determine a transformada de Laplace inversa das seguintes funções:

1. $\dfrac{5}{s^2+25}$
2. $\dfrac{3}{s-4}$
3. $\dfrac{4}{s^7}$
4. $\dfrac{s+2}{s^2+4s+40}$
5. $\dfrac{5}{s^2-6s-7}$
6. $\dfrac{1}{s^2-3s}$
7. $\dfrac{1}{(s-2)^2}$
8. $\dfrac{s^2+20s+9}{(s-1)^2(s^2+9)}$

3.11 Problemas de Valor Inicial ou de Cauchy

Chamamos **Problema de Cauchy** ou **problema de valores iniciais** ao sistema

$$\begin{cases} F(x,y,y',y'',\ \ldots,y^{(n)})=0\\ y(x_0)=y_0\\ y'(x_0)=y_1\\ \vdots\\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}\end{cases}$$

Às n condições $y(x_0)=y_0,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$ chamamos **condições iniciais**. Se estas condições respeitarem a pontos diferentes, designam-se **condições de fronteira** e ao problema chamamos **problema de valores de fronteira**.

Exemplo 3.11.1. O problema

$$\begin{cases} y''=3t+4y\\ y(0)=0\\ y(1)=0\end{cases}$$

é um problema de valores de fronteira. Contudo,

$$\begin{cases} y'' = 3t + 4y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

é um problema de valores iniciais ou de Cauchy.

A determinação da solução de um problema de Cauchy, passa pela resolução de uma equação diferencial e pela solução dessa equação que satisfaz as condições iniciais.
Vimos já algumas técnicas de resolução de EDOs, que podem ser aplicadas nestas situações.
Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

A equação diferencial $y' - y = -e^x$ é uma equação linear e podemos resolvê-la usando a técnica do fator integrante (ver secção **??**). A sua solução é

$$y = (-x + c)e^x, \ c \in \mathbb{R}$$

Pretendemos a solução que satisfaz a condição $y(0) = 0$. Vamos determinar o valor da constante c que satisfaz esta condição:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow (-0 + c)e^0 = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

Assim, a solução do problema de Cauchy será

$$y = -xe^x$$

Este exemplo pode também ser resolvido recorrendo à Transformada de Laplace.
Como $y' - y = -e^x$, se aplicarmos a transformada de Laplace a ambos os membros da equação, continuamos a obter uma igualdade:

$$\mathcal{L}\{y' - y\}(s) = \mathcal{L}\{-e^x\}(s) \tag{3.1}$$

Sabemos que

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) = s\mathcal{L}\{y\} - 0 = s\mathcal{L}\{y\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{-e^x\} = -\frac{1}{s-1}, \, s > 1$$

Substituindo agora estas igualdades em 3.1 temos a equação

$$s\mathcal{L}\{y\} - \mathcal{L}\{y\} = -\frac{1}{s-1} \tag{3.2}$$

ou seja,

$$(s-1)\mathcal{L}\{y\} = -\frac{1}{s-1} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\} = -\frac{1}{(s-1)^2}$$

Para determinar a função y basta saber a transformada de Laplace inversa de $\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$. Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2}\right\} = -x$$

aplicando o deslocamento da transformada, vem

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = -xe^x$$

Exercício 3.11.1. Resolva o seguinte problema de Cauchy usando duas técnicas diferentes:

$$\begin{cases} 3y' - 4y = x \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Quando, num problema de Cauchy temos uma equação linear de coeficientes constantes e o 2º membro é uma função que admite transformada de Laplace, podemos utilizar a transformada de Laplace para determinar a sua solução, recorrendo à transformada de Laplace inversa. Contudo, podemos também resolver a EDO recorrendo a outras técnicas e no final, escolher a solução que satisfaz as condições iniciais.
No caso particular das equações lineares o seguinte teorema permite-nos afirmar que um problema de Cauchy tem solução única.

Teorema 3.4. *Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e b são funções contínuas num intervalo I, $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, $x_0 \in I$ e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$, então o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1} \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

No caso particular de $n = 1$ (equação linear de 1ª ordem), este teorema pode enunciar-se da forma

Teorema 3.5. *Se p e q são funções contínuas num intervalo I, então o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Apresentamos de seguida alguns exemplos de problemas de valor inicial, recorrendo à transformada de Laplace.

Exercício resolvido 3.11.1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} -6\,y + 9\,y' = 5\,\cos(-2\,t) \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

Mostraremos que a solução deste problema é

$$y = -\frac{47}{12}\,e^{\frac{2}{3}\,t} + \frac{1}{4}\,\operatorname{sen}(2\,t) - \frac{1}{12}\,\cos(2\,t)$$

Resolução:
Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial vem:

$$9\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{6\,y\} = \mathcal{L}\{5\,\cos(-2\,t)\}$$

Como a transformada de Laplace da derivada é dada por $\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) = s\mathcal{L}\{y\} + 4$ e a transformada de Laplace do 2º membro é $\mathcal{L}\{5\,\cos(-2\,t)\} = \dfrac{5\,s}{s^2+4}$, vem

$$9\,(s\mathcal{L}\{y\} + 4) - 6\mathcal{L}\{y\} = \frac{5\,s}{s^2+4} \Leftrightarrow (9\,s - 6)\mathcal{L}\{y\} = \frac{5\,s}{s^2+4} - 36$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\frac{5\,s}{s^2+4} - 36}{9\,s - 6} = \frac{-36\,s^2 + 5\,s - 144}{(s^2+4)(9\,s-6)}$$

Vamos decompor esta fração em elementos simples:

$$\frac{-36\,s^2 + 5\,s - 144}{(s^2+4)(9\,s-6)} = \frac{As + B}{s^2+4} + \frac{C}{9\,s-6}$$

Para determinar os coeficientes A, B e C podemos atender apenas aos numeradores

$$(As + B)(9\,s - 6) + C(s^2 + 4) = -36\,s^2 + 5\,s - 144$$

- Fazendo s igual a $\dfrac{2}{3}$ vem $\dfrac{40}{9}C = -\dfrac{470}{3} \Leftrightarrow C = -\dfrac{141}{4}$.
- Se fizermos $s = 0$ obtemos imediatamente o valor de B: $-6\,B - 141 = -144 \Leftrightarrow B = \dfrac{1}{2}$.
- Para determinar o valor de A, toma-se, por exemplo, $s = 1$ e vem $3\,A - \dfrac{699}{4} = -175 \Leftrightarrow A = -\dfrac{1}{12}$.

Assim,

$$\frac{-36\,s^2 + 5\,s - 144}{(s^2+4)(9\,s-6)} = \frac{-\frac{1}{12}\,s + \frac{1}{2}}{s^2+4} + \frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, temos

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{12}\,s + \frac{1}{2}}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}\right\}$$

Calculando as inversas das transformadas de Laplace, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{12}\,s+\frac{1}{2}}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,(2\,t)-\frac{1}{12}\,\cos\,(2\,t) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}\right\}=-\frac{47}{12}\,e^{\frac{2}{3}\,t}$$

Finalmente, a solução da equação diferencial é

$$y=-\frac{47}{12}\,e^{\frac{2}{3}\,t}+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,(2\,t)-\frac{1}{12}\,\cos\,(2\,t)$$

Exercício resolvido 3.11.2. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2\,y-4\,y'+2\,y''=\cos\,(-3\,t)\\ y(0)=6\\ y'(0)=1 \end{cases}$$

Resolução:
Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial vem:

$$2\mathcal{L}\{y''\}-4\mathcal{L}\{y'\}+2\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{\cos\,(-3\,t)\}$$

Atendendo às transformadas de Laplace das derivadas:

$$\mathcal{L}\{y''\}=s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{y'\}=s\mathcal{L}\{y\}-y(0)$$

obtemos

$$\mathcal{L}\{y''\}=s^2\mathcal{L}\{y\}-6\,s-1 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{y'\}=s\mathcal{L}\{y\}-6$$

Como a transformada de Laplace de $\cos\,(-3\,t)$ é $\dfrac{s}{s^2+9}$, efetuando os cálculos temos

$$(2\,s^2-4\,s+2)\mathcal{L}\{y\}=12\,s+\frac{s}{s^2+9}-22 \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\}=\frac{12\,s+\frac{s}{s^2+9}-22}{2\,s^2-4\,s+2}$$

vem,

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{12\,s^3-22\,s^2+109\,s-198}{(s^2+9)(2\,s^2-4\,s+2)}$$

Vamos decompor esta fração em elementos simples. Para isso vejamos se $2\,s^2-4\,s+2$ se pode decompor em elementos de 1º grau. Como a equação $2\,s^2-4\,s+2=0$ só tem uma raiz, 1, podemos escrever

$$2\,s^2-4\,s+2=2\,(s-1)^2$$

Assim,

$$\frac{12\,s^3-22\,s^2+109\,s-198}{(s^2+9)(2\,s^2-4\,s+2)}=\frac{12\,s^3-22\,s^2+109\,s-198}{2\,(s-1)^2(s^2+9)}$$

A fração decomposta em elementos simples é:

$$\frac{12\,s^3-22\,s^2+109\,s-198}{2\,(s-1)^2(s^2+9)}=-\frac{4\,s+9}{100\,(s^2+9)}+\frac{151}{25\,(s-1)}-\frac{99}{20\,(s-1)^2}$$

Nota: Recorde a decomposição em elementos simples estudada na determinação de primitivas.
Para determinar a solução da equação diferencial basta calcular a inversa da transformada de Laplace

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{4\,s+9}{100\,(s^2+9)}+\frac{151}{25\,(s-1)}-\frac{99}{20\,(s-1)^2}\right\}$$

Usando a linearidade vem:

$$y=-\frac{99}{20}\,te^t+\frac{151}{25}\,e^t-\frac{3}{100}\,\mathrm{sen}\,(3\,t)-\frac{1}{25}\,\cos\,(3\,t)$$

que é a solução do problema de valor inicial dado.

Exercício resolvido 3.11.3. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} -3\,y - 6\,y' - 3\,y'' = 5\,e^{-t} \\ y(0) = -4 \\ y'(0) = -9 \end{cases}$$

Resolução
Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial vem:

$$-3\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{5\,e^{-t}\}$$

Atendendo às transformadas de Laplace das derivadas:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0)$$

obtemos

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} + 4\,s + 9 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} + 4$$

Como a transformada de Laplace de $5\,e^{-t}$ é $\dfrac{5}{s+1}$, efetuando os cálculos temos

$$(-3\,s^2 - 6\,s - 3)\mathcal{L}\{y\} = 12\,s + \frac{5}{s+1} + 51 \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{12\,s + \frac{5}{s+1} + 51}{-3\,s^2 - 6\,s - 3} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{12\,s^2 + 63\,s + 56}{(s+1)(-3\,s^2 - 6\,s - 3)}$$

Vamos decompôr esta fração em elementos simples. Para isso vejamos se $-3\,s^2 - 6\,s - 3$ se pode decompôr em elementos de 1º grau. Como a equação $-3\,s^2 - 6\,s - 3 = 0$ só tem uma raiz, -1, podemos escrever

$$-3\,s^2 - 6\,s - 3 = -3\,(s+1)^2$$

Assim,

$$\frac{12\,s^2 + 63\,s + 56}{(s+1)(-3\,s^2 - 6\,s - 3)} = \frac{12\,s^2 + 63\,s + 56}{-3\,(s+1)^3}$$

A fração decomposta em elementos simples é:

$$\frac{12\,s^2 + 63\,s + 56}{-3\,(s+1)^3} = -\frac{4}{s+1} - \frac{13}{(s+1)^2} - \frac{5}{3\,(s+1)^3}$$

Nota: Recorde a decomposição em elementos simples estudada na determinação de primitivas.
Para determinar a solução da equação diferencial basta calcular a inversa da transformada de Laplace

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{4}{s+1} - \frac{13}{(s+1)^2} - \frac{5}{3\,(s+1)^3}\right\}$$

Usando a lineariedade vem:

$$y = -\frac{5}{6}\,t^2 e^{-t} - 13\,te^{-t} - 4\,e^{-t}$$

que é a solução do problema de valor inicial dado.

Exercício 3.11.1 Considere os seguintes problemas de Cauchy e determine as suas soluções.

1. $\begin{cases} y' - \mathrm{e}^{ax} = 0, \; a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y'' + y' = \cos(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

3.12 Exercícios do capítulo

Exercício 3.12.1 Para cada uma das funções seguintes, determine $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$:

1. $f(t) = 2\,\mathrm{sen}(3t) + t - 5e^{-t}$;
2. $f(t) = e^{2t}\cos(5t)$;
3. $f(t) = te^{3t}$;
4. $f(t) = \pi - 5e^{-t}t^{10}$;
5. $f(t) = (3t-1)\,\mathrm{sen}\,t$.

Exercício 3.12.2 Para cada uma das funções seguintes, determine $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$:

1. $F(s) = \dfrac{2s}{s^2-9}$;
2. $F(s) = \dfrac{4}{s^7}$;
3. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+s-2}$;
4. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+6}$;

Exercício 3.12.3 Calcule o valor do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{10}\,e^{-2t}dt$.

Exercício 3.12.4 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabendo que $f'(t) + 2f(t) = e^t$ e que $f(0) = 2$, determine a expressão de $f(t)$.

Exercício 3.12.5 Calcule:

1. $\mathcal{L}\{(t-2+e^{-2t})\cos(4t)\}$;
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2-4s+6}\right\}$;

Exercício 3.12.6 Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right\}$

Exercício 3.12.7 Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

1. $xy' + y = y^2, \quad y(1) = \frac{1}{2}$;
2. $xy + x + y'\sqrt{4+x^2} = 0, \quad y(0) = 1$;
3. $(1+x^3)y' = x^2y, \quad y(1) = 2$.

Exercício 3.12.8 Resolva cada um dos seguintes problemas de Cauchy usando a transformada de Laplace.

1. $3x' - x = \cos t, \quad x(0) = -1$;
2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 36y = 0, \quad y(0) = -1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2$;
3. $y'' + 2y' + 3y = 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;
4. $y'' + y = t^2 + 1, \quad y(\pi) = \pi^2, \quad y'(\pi) = 2\pi$.
   (Sugestão: Efetue a substituição definida por $x = t - \pi$.)

Exercício 3.12.9 Resolva o problema de Cauchy $\begin{cases} y' + y\cos x = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Exercício 3.12.10 Determine uma solução contínua para os seguintes problemas de valor inicial, e represente-a graficamente:

1. $y' + 2y = f(x)\,, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x > 3 \end{cases} \quad , \quad y(0) = 0;$

2. $(x^2+1)\,y' + 2\,x\,y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -x & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad , \quad y(0) = 0\ .$

Exercício 3.12.11 Determine uma solução contínua para o problema de valor inicial $y' + P(x)\,y = 4\,x, \;\; y(0) = 3$, onde $P(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -2/x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, e represente-a graficamente.

3.13 Soluções dos exercícios

Exercício 3.1.1

1. $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s}, s > 0.$
2. $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s-1}, s > 1.$

Exercício 3.2.1

Exercício 3.4.1

1. $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2+9} + \frac{\pi}{s}, s > 0$
2. $\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{6}{36s^2+1} + \frac{s}{s^2-16}, s > 4$
3. $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{10!}{s^{11}} + \frac{1}{3s-3} + \frac{1}{2s} + \frac{s}{2s^2+8}, s > 1$
4. $\mathcal{L}\{j\}(s) = \frac{\sqrt{2}}{s^2-2} + \frac{1}{2s^3}, s > \sqrt{2}$

Exercício 3.5.1

1. $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{2}{(s-2)^3}, s > 2$
2. $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2-16}, s > 3$

Exercício 3.6.1

1. $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{e^{-2s}}{s}, s > 0$
2. $\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}, s > 0$

Exercício 3.7.1

1. $\mathcal{L}\{n\}(s) = \frac{1}{s^3}, s > 0$
2. $\mathcal{L}\{p\}(s) = \frac{1}{s-3}, s > 3$

Exercício 3.8.1

1. $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{(s-2)^2}, s > 2$
2. $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{18s^2-54}{(s^2+9)^3} - \frac{18s}{(s^2+9)^2} + \frac{6}{s^2+9}, s > 0.$

Exercício 3.9.1

1. $s^2F(s) - s - 2$
2. $(s^2 + 3s - 1)F(s) - 3s - 9$
3. $(s^3 - 2s^2 - s)F(s) - s + 2$

Exercício 3.9.2 $Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} + \frac{2}{s}$

Exercício 3.10.1

1. $y(x) = \operatorname{sen}(5x),\ x \geq 0$
2. $y(x) = 3e^{4x},\ x \geq 0$
3. $y(x) = \frac{x^6}{180},\ x \geq 0$
4. $y(x) = e^{-2x}\cos(6x),\ x \geq 0$
5. $y(x) = \frac{5}{4}e^{3x}\operatorname{senh}(4x),\ x \geq 0$
6. $y(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3x},\ x \geq 0$
7. $y(x) = e^{2x}x,\ x \geq 0$
8. $y(x) = \frac{8}{5}e^{-x} + 3e^x x - \frac{8}{5}\cos(3x) - \frac{18}{15}\operatorname{sen}(3x),\ x \geq 0$

Exercício 3.11.1

1. $y(x) = \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a};$
2. $y(t) = -\frac{1}{6}e^{2t} + 2te^{2t} + \frac{1}{6}e^{-4t};$
3. $y(t) = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{2} + 2.$

Exercício 3.12.1

1. $\dfrac{6}{s^2+9} + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{5}{s+1}\,, \quad s > 0;$
2. $\dfrac{s-2}{(s-2)^2+25}\,, \quad s > 2;$
3. $\dfrac{1}{(s-3)^2}\,, \quad s > 3;$
4. $\dfrac{\pi}{s} - \dfrac{5 \cdot 10!}{(s+1)^{11}}\,, \quad s > 0;$
5. $\dfrac{6s}{(s^2+1)^2} - \dfrac{1}{s^2+1}\,, \quad s > 0.$

Exercício 3.12.2

1. $2\cosh(3t) = e^{3t} + e^{-3t}\,, \quad t \geq 0;$
2. $\dfrac{t^6}{180}\,, \quad t \geq 0;$
3. $\dfrac{1}{3}e^t - \dfrac{1}{3}e^{-2t}\,, \quad t \geq 0;$
4. $\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\,, \quad t \geq 0.$

Exercício 3.12.3 $\dfrac{10!}{2^{11}}.$

Exercício 3.12.4 $f(t) = \dfrac{1}{3}e^t + \dfrac{5}{3}e^{-2t}.$

Exercício 3.12.5

1. $\dfrac{s^2-16}{(s^2+16)^2} - \dfrac{2s}{s^2+16} + \dfrac{s+2}{(s+2)^2+16}\,, \quad s > 0;$
2. $e^{2t}\left(2\cos(\sqrt{2}\,t) + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t)\right)\,, \quad t \geq 0.$

Exercício 3.12.6 $\dfrac{1}{4}e^t - \dfrac{1}{4}e^{-t}\cos(2t) + \dfrac{3}{4}e^{-t}\operatorname{sen}(2t), \quad t \geq 0.$

Exercício 3.12.7

1. $y = \frac{1}{x+1};$
2. $y = -1 + 2e^{2-\sqrt{4+x^2}};$
3. $y = \sqrt[3]{4(1+x^3)}.$

Exercício 3.12.8

1. $x(t) = \frac{3}{10}\operatorname{sen} t - \frac{1}{10}\cos t - \frac{9}{10}e^{\frac{t}{3}};$
2. $y(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(6t) - \cos(6t);$
3. $y(t) = t - \frac{2}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}}e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \frac{2}{3}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t);$
4. $y(t) = (t-\pi)^2 + 2\pi(t-\pi) + \pi^2 - 1 + \cos(t-\pi)$
$= t^2 - 1 - \cos t.$

Exercício 3.12.9 $y = 1 + e^{-\operatorname{sen} x}, x \in \mathbb{R}.$

Exercício 3.12.10

1. $y = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-2x}}{2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ -\dfrac{e^{-2x}}{2} + \dfrac{e^{-2(x-3)}}{2}, & \text{se } x > 3 \end{cases}.$
2. $y = \begin{cases} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2+1}, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{-\frac{x^2}{2}+1}{x^2+1}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$

Exercício 3.12.11 $y = \begin{cases} 2x - 1 + 4e^{-2x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 4x^2\ln x + (1+4e^{-2})x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}.$