

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Departamento de Matemática  Universidade de Aveiro

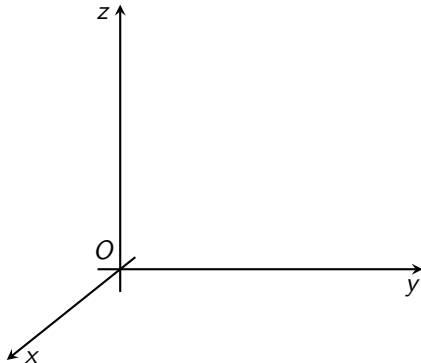
Geometria analítica em \mathbb{R}^3 : Referenciais em \mathbb{R}^3

Fixamos um sistema de coordenadas:

$O \rightarrow$ origem

$\left. \begin{array}{l} Ox \\ Oy \\ Oz \end{array} \right\} \rightarrow$ eixos coordenados

$\left. \begin{array}{l} xOy \\ xOz \\ yOz \end{array} \right\} \rightarrow$ planos coordenados



Pontos e vetores em \mathbb{R}^3

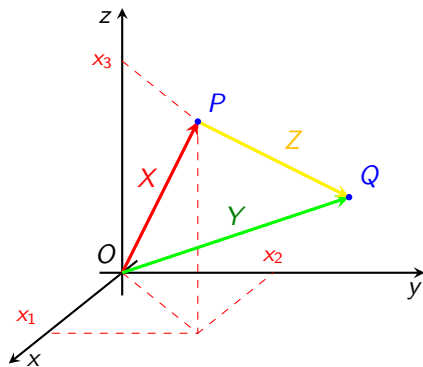
$x_1, x_2, x_3 \rightarrow$ coordenadas do ponto P

Associamos ao segmento de reta orientado \overrightarrow{OP} o vetor

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$y_1, y_2, y_3 \rightarrow$ coordenadas do ponto Q e
seja Y o vetor associado a \overrightarrow{OQ}

Ao segmento de reta orientado \overrightarrow{PQ} fica associado o vetor $Z = \begin{bmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \\ y_3 - x_3 \end{bmatrix}$



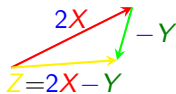
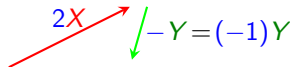
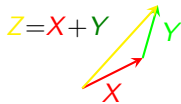
Adição, multiplicação por escalar e combinação linear

Sejam X e Y vetores em \mathbb{R}^3 e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares

$$\text{Adição: } Z = X + Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Multiplicação por escalar: } \alpha X = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Combinação linear: } Z = \alpha X + \beta Y = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + \beta y_1 \\ \alpha x_2 + \beta y_2 \\ \alpha x_3 + \beta y_3 \end{bmatrix}$$



Vetores em \mathbb{R}^n

Os vetores em \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 generalizam-se a vetores em \mathbb{R}^n :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Chamam-se **componentes** do vetor X aos números reais x_1, x_2, \dots, x_n .

Notação alternativa: $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Operações em \mathbb{R}^n (tal como em \mathbb{R}^3):

- adição de vetores: $X + Y + Z$
- multiplicação de um vetor por um escalar: $2X, -Y, \alpha Z$
- combinação linear de vetores: $2X - Y + \alpha Z$

Matrizes

Os vetores em \mathbb{R}^n podem ser generalizados àquilo a que chamamos **MATRIZES**.

Sendo a_{ij} números reais (para todos os índices $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$) considere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dizemos que A é uma **matriz** com m linhas e n colunas, tem $m \times n$ elementos
diz-se matriz $m \times n$, de ordem $m \times n$, de dimensão $m \times n$

Matriz $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{linha } i$$

\uparrow
coluna j

a_{ij} é o elemento ou entrada (i, j) da matriz A

Notação abreviada: $A = A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$

Matriz nula, matriz coluna e matriz linha

Matriz nula ($m \times n$), cujas entradas são todas iguais a 0, denota-se por

O (ou $O_{m \times n}$).

Matriz linha ($1 \times n$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Matriz coluna ($m \times 1$)

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada de ordem n

matriz com o mesmo número de linhas e de colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal

Matriz diagonal e matriz identidade

Uma matriz **quadrada** $A = [a_{ij}]$ diz-se **diagonal** se $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Chama-se a **matriz identidade de ordem n** e denota-se por **I** (ou **I_n**) a uma matriz **diagonal** $n \times n$ com

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1$$

Matriz triangular

Uma matriz **quadrada** $A = [a_{ij}]$ é

triangular superior se $a_{ij} = 0$, para $i > j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

triangular inferior se $a_{ij} = 0$, para $i < j$.

Transposta de uma matriz

A **transposta** da matriz $m \times n$ $A = [a_{ij}]$ é a matriz $n \times m$

$$A^T = [a_{ji}]$$

obtida por troca da posição relativa das linhas pelas colunas da matriz A , por exemplo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Propriedade:

$$(A^T)^T = A.$$

Uma matriz A diz-se **simétrica** se $A = A^T$. (Nota: toda a matriz simétrica é quadrada.)

Igualdade, adição e multiplicação por escalar de matrizes

Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrizes $m \times n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

As matrizes A e B são iguais, $A = B$, se

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

A soma de A e B é a matriz $m \times n$ $A + B = C = [c_{ij}]$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

O produto de A pelo escalar α é a matriz $m \times n$ $\alpha A = D = [d_{ij}]$ tal que

$$d_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

A matriz $m \times n$ A é uma combinação linear das matrizes A_1, \dots, A_k $m \times n$ se

$$A = \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_k A_k, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Propriedades da adição e da multiplicação por escalar

Propriedades da adição de matrizes

- ▶ comutativa: $A + B = B + A$,
- ▶ associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- ▶ admite elemento neutro: $A + O = O + A = A$,
- ▶ A possui simétrico aditivo: $A + (-A) = (-A) + A = O$,
- ▶ $(A + B)^T = A^T + B^T$,

para quaisquer matrizes $m \times n$ A, B, C .

Propriedades da multiplicação por escalar de matrizes

- ▶ associativa: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,
- ▶ distributiva: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
- ▶ distributiva: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,
- ▶ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$,

para quaisquer matrizes $m \times n$ A, B , e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Multiplicação de matrizes – caso 1

Multiplicação de uma matriz linha por uma matriz coluna

$$\text{Dadas } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o produto da matriz linha A pela matriz coluna B é

$$AB = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Operação bem definida só se A e B possuem igual número de elementos!

Multiplicação de matrizes – caso 2

Caso geral: multiplicação de A matriz $m \times n$ e B matriz $n \times p$ sendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

o produto de A por B é a matriz $m \times p$ $AB = [c_{ij}]$ cuja entrada (i, j) resulta da multiplicação da linha i de A pela coluna j de B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

Propriedades da multiplicação de matrizes

- ▶ associativa: $(AB)C = A(BC)$,
- ▶ distributiva à esquerda e à direita, em relação à adição:

$$(A + \tilde{A})B = AB + \tilde{A}B \quad \text{e} \quad A(B + \tilde{B}) = AB + A\tilde{B},$$

- ▶ admite **elemento neutro** à esquerda e à direita: $I_m A = A = A I_n$,
- ▶ $(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B)$,
- ▶ $(AB)^T = B^T A^T$,

para quaisquer matrizes $A, \tilde{A} \ m \times n$, $B, \tilde{B} \ n \times p$, $C \ p \times q$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nota importante: A multiplicação de matrizes não é comutativa!

Potência de uma matriz quadrada

Sejam A uma matriz $n \times n$ e $p \in \mathbb{N}$.

A **potência p** de A é a matriz $n \times n$ dada por

$$A^p = A A^{p-1},$$

em que $A^0 = I_n$, por convenção.

Propriedades da potência de matrizes

► $(A^p)^q = A^{pq}$

► $A^p A^q = A^{p+q}$

Nota: Em geral $(AB)^p \neq A^p B^p$.

Sistema de m equações lineares com n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matriz dos
coeficientes

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

coluna das
incógnitas

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

coluna dos
termos independentes

Forma matricial de um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Leftrightarrow AX = B,$$

em que A é a **matriz** ($m \times n$) **dos coeficientes** do sistema,

X é a **coluna** ($n \times 1$) das incógnitas,

B é a **coluna** ($m \times 1$) dos **termos independentes** e

$$M = [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

é uma matriz $m \times (n + 1)$ e é a **matriz ampliada, aumentada ou completa** do sistema.

Matriz escalonada por linhas

A primeira entrada **não nula** de cada linha é designada por **pivot**.

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & a_1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_2 & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_3 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3, \dots \neq 0$$

- ▶ Abaixo de **cada pivot** só ocorrem **zeros**,
- ▶ Dadas duas linhas não nulas consecutivas, o **pivot da linha $i + 1$** está numa coluna à **direita da coluna que contém o pivot da linha i** ,
- ▶ As **linhas nulas**, caso existam, ocorrem **só na parte inferior** da matriz.

Matriz escalonada por linhas reduzida

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & * & \dots & 0 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ A matriz está na forma **escalonada por linhas**,
- ▶ Os **pivots** são **todos iguais a 1**,
- ▶ **Acima** de cada pivot **só** ocorrem **zeros**.

Operações elementares

Operações elementares nas linhas de uma matriz

1. Troca da posição relativa de duas linhas, p.e. i e j :
$$L_i \leftrightarrow L_j$$
2. Multiplicação de uma linha, p.e. i , por um escalar $\alpha \neq 0$:
$$L_i := \alpha L_i$$
3. Substituição de uma linha, p.e. i , pela que dela se obtém adicionando-lhe outra linha, p.e. j , multiplicada por um escalar $\beta \in \mathbb{R}$:
$$L_i := L_i + \beta L_j$$

Matrizes equivalentes por linhas

Duas matrizes A e C são **equivalentes por linhas** e escreve-se

$$A \sim C$$

se C resulta de A por aplicação de uma sequência finita de operações elementares nas linhas de A .

Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 1

Teorema

Toda a matriz $m \times n$ é equivalente por linhas a uma matriz escalonada por linhas (reduzida).

Exemplo ilustrativo do teorema anterior

Passo 1: Encontrar, na 1.^a coluna não nula, o 1º elemento não nulo **pivot**.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 2

Passo 2: Trocar linhas para colocar o pivot como 1.º elemento da coluna.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$

Passo 3: Operar com as linhas para obter zeros abaixo do pivot.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$L_4 := L_4 - L_1$

Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 3

Passo 4: Considerar a **submatriz** que se obtém eliminando a 1.^a linha e aplicar os passos 1 a 4 até esgotar as linhas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

\vdots

Fim Passo 4: Obtém-se uma **matriz escalonada por linhas** equivalente a A .

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 4

Passo 5: Multiplicar as linhas não nulas pelos inversos dos pivots de modo a obter pivots iguais a 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{aligned} L_1 &:= \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 &:= \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 &:= \frac{1}{2} L_3 \end{aligned}$$

Obtenção de uma matriz escalonada por linhas (reduzida) – 5

Passo 6: Operar com as linhas de modo a obter zeros acima dos pivots.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{aligned} L_2 &:= L_2 - \frac{3}{2}L_3 \\ L_1 &:= L_1 + \frac{5}{2}L_3 \end{aligned}$$

$$L_1 := L_1 - L_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se uma matriz escalonada por linhas reduzida equivalente a A .

Aplicação à resolução de sistemas

Teorema

Se as matrizes ampliadas de dois sistemas lineares são $[A|B]$ e $[C|D]$, tais que

$$[A|B] \sim [C|D],$$

então os dois sistemas têm o mesmo conjunto de soluções.

Nota: Se $B = D = 0$, basta que $A \sim C$ para que os sistemas possuam o mesmo conjunto de soluções.

Métodos de eliminação

Método de eliminação de Gauss

1. Dado o sistema $AX = B$, formar a sua matriz ampliada $[A | B]$.
2. Transformar $[A | B]$ numa **forma escalonada por linhas** $[C | D]$.
3. Escrever o sistema $CX = D$, ignorando as linhas nulas, e resolver por substituição ascendente.

Método de eliminação de Gauss-Jordan

1. Dado o sistema $AX = B$, formar a sua matriz ampliada $[A | B]$.
2. Transformar $[A | B]$ numa **forma escalonada por linhas reduzida** $[E | F]$.
3. Escrever o sistema $EX = F$, ignorando as linhas nulas, e resolver.

Classificação de sistemas

Um sistema linear representado matricialmente por $AX = B$, tal que

$$[A | B] \sim [C | D],$$

com a matriz $[C | D]$ escalonada por linhas, classifica-se em

- ▶ impossível se não possui solução;
- ▶ possível e determinado se possui uma única solução (todas as colunas de C têm pivot);
- ▶ possível e indeterminado se possui uma infinidade de soluções (sendo o grau de indeterminação do sistema = n.º de incógnitas livres = n.º de colunas de C sem pivot).

Característica e classificação de sistemas

A **característica** da matriz A , $\text{car}(A)$, é o número de pivots de uma matriz C escalonada por linhas equivalente, por linhas, a A .

O sistema linear $AX = B$ com A $m \times n$ e B $m \times 1$ é

- | | | |
|--|-------------------|--|
| 1. impossível | \Leftrightarrow | $\text{car}(A) < \text{car}([A B]);$ |
| 2. possível e determinado | \Leftrightarrow | $\text{car}(A) = \text{car}([A B]) = n;$ |
| 3. possível e indeterminado
de grau $n - \text{car}(A)$ | \Leftrightarrow | $\text{car}(A) = \text{car}([A B]) < n.$ |

Sistema homogéneo e nulidade

Um sistema diz-se **homogéneo** se os termos independentes são todos nulos:

$$AX = 0.$$

Todo o sistema **homogéneo** é **possível** pois possui pelo menos a solução nula, dita **solução trivial**. Mas pode ter outras soluções, ditas não triviais, se o sistema for indeterminado.

Se A é $m \times n$ e $m < n$, então $AX = 0$ admite uma **solução não trivial**.

A **nulidade** de A $m \times n$, $\text{nul}(A)$, é o número de incógnitas livres do sistema $AX = 0$, temos

$$\text{nul}(A) = n - \text{car}(A)$$

e é também o grau de indeterminação do sistema.

Espaço nulo de uma matriz

O **espaço nulo** de A , $\mathcal{N}(A)$, é o conjunto de todas as soluções do sistema homogêneo associado a A $m \times n$,

$$\mathcal{N}(A) = \{X \in \mathbb{R}^n : AX = 0\}.$$

O **espaço nulo** de A , $\mathcal{N}(A)$, pode escrever-se como o conjunto de todas as combinações lineares de $n - \text{car}(A)$ vetores de \mathbb{R}^n , facilmente obtidos usando colunas da forma escalonada reduzida de A .

Inversa de uma matriz quadrada

Uma matriz A $n \times n$ diz-se **invertível** se existe B $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

À única matriz B satisfazendo a relação anterior chama-se **inversa** de A e denota-se por A^{-1} .
Caso contrário (não existe B), A diz-se **singular** ou **não invertível**.

Teorema

Se A $n \times n$ é invertível, então a inversa de A é **única**.

Teorema

Se A , B $n \times n$ e $BA = I_n$, então $AB = I_n$.

Propriedades da inversa e método para obter a inversa

Propriedades

Para quaisquer A, B $n \times n$ invertíveis e $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $(aA)^{-1} = a^{-1}A^{-1}$;
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Método prático para determinar a inversa

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid A^{-1}]$$

↑

método de eliminação de Gauss-Jordan

Teorema

A $n \times n$ é **invertível** se e só se A é equivalente por linhas a I_n .

Critérios de invertibilidade de uma matriz

Teorema Dada $A \ n \times n$, são equivalentes as afirmações

1. A é invertível
2. $A \sim I_n$
3. $\text{car}(A) = n$
4. $\text{nul}(A) = 0$
5. $AX = 0$ possui apenas a solução trivial
6. $\mathcal{N}(A) = \{0\}$
7. $AX = B$ tem uma única solução $X = A^{-1}B$ para cada $B \ n \times 1$