Matemática Discreta

Ano Letivo 2023/24 (Versão: 13 de Fevereiro de 2024)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo I
Lógica de primeira ordem e demonstração automática

Introdução

Algumas questões

Na matemática (e não só!!), estamos tipicamente interessados em certas afirmações e nas consequências destas afirmações.

Isto conduz-nos às seguintes questões:

- O que significa consequência? Como justificar?
- Consegue-se provar qualquer consequência, a partir de um conjunto de afirmações?
- O que é, em rigor, uma prova?

Para dar esta resposta teremos que especificar:

- o que é, em rigor, uma afirmação/asserção.
- o que é, em rigor, uma linguagem formal.

Aprender português (ou alemão ou . . .) significa . . .

1. Aprender o alfabeto. Ou seja, que símbolos podemos utilizar.
   - «A, B, C, D, E,. . . , !,?,. . . »
   - «$\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, cos, x, y, . . .»
2. Aprender ortografia e gramática. Ou seja, que palavras (isto é: sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.
   - «Futebol» conta mas «hhcdqwldb» não.
   - «Eu sou do Porto» está ótimo mas «Porto sou Eu do» não.
   - «$\forall x\,\exists y\; x < y$» está bem mas «$xy \rightarrow \forall$» não.
3. Aprender o significado das palavras (isto é, a sua interpretação).

   Por exemplo, a palavra «esquilo» significa 

Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \to q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Interpretação??

Vamos interpretar as variáveis por proposições.

- Se o Porto é campeão e está à chover, então está à chover. ✓
- Se $3 + 3 = 0$ e o céu é azul, então o céu é azul. ✓
- Se o céu é azul e $3 + 3 = 0$, então $3 + 3 = 0$. ✓
- ...

Mas não temos todo o dia!! Felizmente, basta considerar os casos «p representa algo verdadeiro», «p representa algo falso», «q representa algo verdadeiro» e «q representa algo falso».

Exemplo

A fórmula

$$(p \wedge q) \to q$$

é uma tautologia, isto é «verdadeira em todas as interpretações»?

Demonstração.

Verificamos de facto todas as interpretações:

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

□

Exemplo

A fórmula

$$((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \vee r)$$

é uma tautologia?

Para justificar esta afirmação, em lugar de criar uma tabela de verdade, é melhor(?) argumentar:

Suponha, por causa de argumento, $((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r))$, portanto $p \vee q$ e $q \rightarrow r$. Sabendo $p \vee q$, podemos distinguir em dois casos.

Se p, então $p \vee r$.

Se q, então r porque $q \rightarrow r$, logo $p \vee r$.

Portanto, obtemos $p \vee r$ em ambos os casos.

Assim, concluímos $((p \vee q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \vee r)$.

Proposições

Na lógica proposicional estudam-se afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos — as chamadas proposições.

Exemplos

- «O Porto é campeão» é uma proposição.
- «$3 < (2 + 7)$» é uma proposição.
- «$x = 6$» não é uma proposição.
- «O Porto é campeão ou não» é uma proposição.
- «Se está chover, então está chover» é uma proposição.

Nota

No que se segue, denotamos proposições por $p, q, r, \ldots$ ou por $\varphi, \psi, \theta \ldots$ e não discutimos mais a questão o que é uma proposição.

Nota

Observamos que certos conetivos ocorrem frequentemente:

- «… e …»,
- «… ou …»,
- «não …»,
- «Se … então …».

Assim, uma proposição pode ser

1. **atómica** (o valor de verdade é dado pelo contexto ou escolhido livremente) ou
2. **composta** por proposições e pelos conectivos acima, cujo valor de verdade depende do valor de verdade das componentes.

Sobre o «ou»

- Na matemática e na lógica formal, a disjunção «… ou …» é apenas falsa se ambas as componentes são falsas; ou seja, é verdadeira quando pelo menos uma das componentes é verdadeira.
- No entanto, na linguagem comum o significado de «… ou …» não é tão *determinado*: pode ter o significado inclusivo acima, também pode ter o significado exclusivo onde «… ou …» é verdadeira quando exatamente uma das componentes é verdadeira.
- Para evitar a ambiguidade, na linguagem comum acrescentam-se as vezes

  «… mas não ambos», «… ou ambos», «… e/ou …», …
- Neste curso, como é habitual na matemática, estabelecemos que «ou» tem o significado inclusivo.

Eliminar conetivos

Num discurso comum ocorrem também frequentemente

«… mas …», «… só se …», «… exceto se …».

- «… mas …» pode-se substituir por «… e …».
- «… só se …» pode-se substituir por «… implica …».
- «… exceto se …» pode-se substituir por «… ou …».

  Portanto, «exceto se» tem a mesma ambiguidade como o «ou», e estabelecemos que neste semestre tem o significado inclusivo.

1. Revisão de lógica proposicional

Fórmulas (bem formadas – «fbf»)

Consideremos

- uma coleção de variáveis (que representam as proposições),
- os símbolos $\bot$ (contradição) e $\top$ (tautologia) e os conetivos

Negação:	$\neg$	(não …),
Conjunção:	$\wedge$	(… e …),
Disjunção:	$\vee$	(… ou …),
Implicação:	$\to$	(se …, então …),
Equivalência:	$\leftrightarrow$	(… se e somente se …).

- Cada variável é uma fórmula, e $\bot$ and $\top$ são fórmulas.
- Se φ e ψ são fórmulas, então as expressões

$$(\neg\psi),\quad (\varphi\wedge\psi),\quad (\varphi\vee\psi),\quad (\varphi\to\psi),\quad (\varphi\leftrightarrow\psi)$$

são fórmulas.

Nota

Para tornar a notação menos pesada, suprimem-se os parêntesis mais externos. Por exemplo, escreve-se

$$\varphi \vee (\psi \to \gamma) \quad \text{em lugar de} \quad (\varphi \vee (\psi \to \gamma)).$$

Nota

Entende-se que o conetivo «$\neg$» tem uma «ligação mais forte» (ou seja, aplica-se primeiro) do que os outros conetivos. Por exemplo, escreve-se

$$\neg\varphi \vee \psi \quad \text{em lugar de} \quad (\neg\varphi) \vee \psi.$$

Exemplos (de fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

- $\top$, $\bot$, p, q, r, $\ldots$
- $(p \lor q)$ (escrevemos apenas $p \lor q$), $\quad p \to \bot$, $\quad \neg\top$, $\quad \ldots$
- $(p \land q) \to q$, $\quad (p \to q) \land (p \lor q)$, $\quad \ldots$
- $(p \land q) \to ((p \lor q) \to q)$, $\quad \ldots$

Exemplos (não são fórmulas)

Sejam p, q, r variáveis:

$$(\top\,\bot), \quad (p\,q\,r), \quad (\top\to), \quad (p \to \land), \quad \ldots$$

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada variável um valor de verdade (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\perp$ interpreta-se por 0 (falso)
- $\top$ por 1 (verdadeiro)
- os conectivos interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

φ	$\neg\varphi$
0	1
1	0

φ	ψ	$\varphi \vee \psi$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Interpretar formulas

Para interpretar as fórmulas, começamos por associar a cada variável um valor de verdade (ou seja, um valor em $\{0, 1\}$), depois estendemos recursivamente esta interpretação a todas as fórmulas:

- $\bot$ interpreta-se por 0 (falso)
- $\top$ por 1 (verdadeiro)
- os conectivos interpretam-se usando as seguintes «tabelas de verdade»:

φ	ψ	$\varphi \to \psi$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Exemplo

A interpretação da fórmula $(p \vee q) \rightarrow q$

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow q$
0	0	0	1

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 1$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \rightarrow q$
1	0	1	0

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. ✓
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. ✓
- Se $2+2=5$, então a neve é preta. ✓
- Se $2+2=4$, então a neve é preta. ✗

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para ***cada*** a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para ***alguma*** interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \to q$ é uma tautologia.

Demonstração.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \to q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

□

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para ***cada*** a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para ***alguma*** interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \rightarrow q$ é uma tautologia.

Nota

Uma fórmula é **inconsistente** (ou uma **contradição**) quando não é consistente; isto é, se tem valor lógico 0 para cada a interpretação.

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando a fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Demonstração.

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1

$\square$

Verificam-se as equivalências

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \qquad (p \vee q) \equiv (q \vee p)$$
$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)) \qquad ((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r))$$
$$(p \wedge p) \equiv p \qquad (p \vee p) \equiv p$$
$$(p \wedge \top) \equiv p \qquad (p \vee \bot) \equiv p$$
$$(p \wedge \bot) \equiv \bot \qquad (p \vee \top) \equiv \top$$

bem como as leis de distributividade

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad (p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

as leis de De Morgan

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \qquad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q),$$

e a lei da contraposição e da dupla negação

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p) \qquad \neg\neg p \equiv p.$$

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando
$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$
onde cada φ_i é da forma
$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$
com literais L_i (dizemos que φ_i é uma **cláusula**).

Exemplos

Consideremos as variáveis p, q, r.

- $p, q, \neg r$ são literais.
- $\neg\neg q$, $p \to q$ não são literais.

Definição

- Um **literal** é uma variável ou a negação de uma variável.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada φ_i é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais L_i (dizemos que φ_i é uma **cláusula**).

Exemplos

Consideremos as variáveis p, q, r.

- $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg r)$ é uma CNF (conjuntiva).
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg r)$ é uma DNF (disjuntiva).
- $p \wedge q \wedge r$ é uma CNF e uma DNF.
- $(p \wedge (q \vee r)) \vee q$ nem é uma CNF nem uma DNF.

Teorema

Cada fórmula da lógica proposicional é equivalente a uma fórmula na forma normal conjuntiva (disjuntiva).

Como obter?

Utilizar

$$\varphi \to \psi \;\equiv\; \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$$

e as leis de De Morgan

$$\neg(\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \wedge \neg\psi, \qquad \neg(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \vee \neg\psi$$

e as leis de distributividade

$$(\varphi \wedge (\psi \vee \theta)) \equiv (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \theta),$$
$$(\varphi \vee (\psi \wedge \theta)) \equiv (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \theta).$$

Definição

Um conjunto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de fórmulas diz-se **consistente** quando existe uma interpretação que avalia todas as fórmulas de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ em 1.

Exemplo

O conjunto

$$\{\neg p,\ p \to q,\ q\}$$

é consistente: podemos escolher a interpretação

$$p \longmapsto 0, \quad q \longmapsto 1.$$

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Portanto, de acordo com o quadro acima, as fórmulas

$$P_{1,2,2}, \quad P_{1,3,6}, \quad P_{2,7,1}, \quad \ldots, \quad P_{9,8,4}$$

devem ser válidas.

Exemplo (http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Cada número aparece em cada linha:

$$F_1 = (P_{1,1,1} \vee P_{1,2,1} \vee \cdots \vee P_{1,9,1}) \wedge (P_{1,1,2} \vee P_{1,2,2} \vee \ldots) \wedge \ldots$$
$$= \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigvee_{j=1}^{9} P_{i,j,k}.$$

Exemplo (http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Cada número aparece em cada coluna:

$$F_2 = \bigwedge_{j=1}^{9} \bigwedge_{k=1}^{9} \bigvee_{i=1}^{9} P_{i,j,k}.$$

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Cada número aparece em cada bloco 3×3:

$$F_3 = \bigwedge_{k=1}^{9} \bigwedge_{u=0}^{2} \bigwedge_{v=0}^{2} \bigvee_{i=1}^{3} \bigvee_{j=1}^{3} P_{3u+i,3v+j,k}.$$

Exemplo (http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \ldots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

- Nenhuma posição tem dois números:

$$F_4 = \neg(P_{1,1,1} \wedge P_{1,1,2}) \wedge \neg(P_{1,1,1} \wedge P_{1,1,3}) \wedge \ldots$$

$$= \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{i=1}^{9} \bigwedge_{1 \leq k < k' \leq 9} \neg(P_{i,j,k} \wedge P_{i,j,k'}).$$

Exemplo (`http://www.cs.ox.ac.uk/people/james.worrell/lectures.html`)

	2	6						
						1	7	
		3	1		6			
	6			5		8		3
		9	2	6	1	7		
5		4		8			6	
			8		4	3		
	4	8						
						9	4	

Para todos os $i, j, k \in \{1, \dots, 9\}$, a proposição atómica $P_{i,j,k}$ representa a afirmação

«a posição (i, j) contém o número k».

Resolver o jogo significa de facto verificar que o conjunto das fórmulas

$$\{P_{1,2,2}, P_{1,3,6}, P_{2,7,1}, \dots, P_{9,8,4}, F_1, F_2, F_3, F_4\}$$

é consistente. O número de variáveis é $9^3 = 729$, portanto, a tabela de verdade correspondente tem $2^{729} > 10^{200}$ linhas ...

No entanto, podem utilizar um SAT-solver como `www.minisat.se`.

Definição

A fórmula ψ diz-se **consequência (semântica ou lógica)** das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ têm o valor 1 em I, então ψ tem o valor 1 em I.

Neste caso escrevemos: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo

Verificamos: $p \vee q,\ p \to q \models q \vee \neg p$.

p	q	$p \vee q$	$p \to q$	$\neg p$	$q \vee \neg p$
0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1

Nota

$\ldots, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \models \psi$ se e só se $\ldots, \varphi_1, \varphi_2 \models \psi$.

Exemplo

Consideremos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \models \varphi \to \theta$

Podemos validar esta consequência verificando todas as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade). No entanto, como veremos, na lógica de primeira ordem não é possível verificar todas as interpretações pois em geral há uma infinidade …

Em alternativa, podemos fazer uma prova (= argumentação), ou seja, escrevemos uma sequência de fórmulas

$$\varphi \to \psi, \psi \to \theta, \quad \dots \quad \text{algo esperto}^{a} \quad \dots \quad \varphi \to \theta.$$

[a] Justificado pelo anterior utilizando certas regras (as regras de inferência).

Nota

Se existe uma prova de ψ a partir de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, escreve-se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi.$$

Saltar

As regras de inferência (lógica proposicional)

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}\,\wedge\mathcal{I} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}\,\wedge\mathcal{E}_1 \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}\,\wedge\mathcal{E}_2$$

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}\,\vee\mathcal{I}_1 \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi}\,\vee\mathcal{I}_2 \qquad \frac{\varphi \vee \psi \quad \boxed{\begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ \theta\end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix}\psi\\ \vdots\\ \theta\end{matrix}}}{\theta}\,\vee\mathcal{E}$$

$$\frac{\boxed{\begin{matrix}\varphi\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}}{\varphi \to \psi}\,\to\mathcal{I} \qquad \frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}\,\to\mathcal{E} \qquad \frac{\bot}{\varphi}\,\bot\mathcal{E} \qquad \frac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\,\text{EM}$$

$\mathcal{E}$ – Eliminação, $\mathcal{I}$ – Introdução

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Exemplo

Verificamos: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$.

Formulês:

1	$\varphi \to \psi$	
2	$\psi \to \theta$	
3	φ	H
4	ψ	$\Rightarrow$E, 1, 3
5	θ	$\Rightarrow$E, 2, 4
6	$\varphi \to \theta$	$\Rightarrow$I, 3, 5

Português:

Por hipótese, $\varphi \to \psi$ e $\psi \to \theta$.

Com o objetivo de provar $\varphi \to \theta$, suponha-se φ (temporariamente!!). Como $\varphi \to \psi$, conclua-se ψ; como $\psi \to \theta$, conclua-se θ.

Portanto, $\varphi \to \theta$ (e retire-se φ).

A matéria deste slide é complementar e não faz parte da avaliação.

Teorema (As regras são corretas)

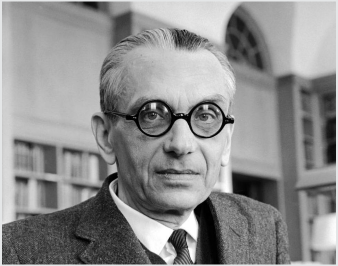
«Tudo o que se prova é válido.»

Teorema (As regras são suficientes)

«Tudo o que é válido se pode provar.»

Um pouco de história …

O Kurt Gödel apresentou o resultado correspondente para a lógica de primeira ordem numa conferência em Königsberg (Kaliningrad) em 1930 … um dia antes de anunciar o seu famoso resultado de incompletude.



Kurt Friedrich Gödel (1906 – 1978), matemático austríaco e norte-americano.

Nota

No que se segue, apresentamos um algoritmo para verificar se a fórmula ψ é consequência das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Começamos por observar:

Teorema

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$ *se e só se* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ *é inconsistente.*

A questão

Como verificar se o conjunto de fórmulas $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ é inconsistente?

A preparação

- Consideremos que cada fórmula está na forma normal conjuntiva.
- Como

  $\{\ldots\ \psi_1 \wedge \psi_2\}$ é consistente se e só se $\{\ldots\ \psi_1, \psi_2\}$ é consistente,

  podemos supor que $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ é um conjunto de cláusulas.
- É conveniente identificar uma cláusula com o conjunto de literais que ocorrem na cláusula (por causa da associatividade, comutatividade e idempotência da disjunção). Assim, não distinguimos entre

$$p \vee \neg q \vee p, \quad \neg q \vee p \vee p, \quad \neg q \vee p,$$

  e a fórmula $\perp$ corresponde ao conjunto vazio de literais.

A questão

Como verificar se o conjunto de cláusulas $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ é inconsistente?

O método

Deduzimos uma «contradição»: $\theta_1, \dots, \theta_n \vdash \bot$.

Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \bot$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ ou ψ_i é «consequência» das fórmulas anteriores.

Para definir «consequência», consideremos agora apenas a seguinte regra (**Resolução**):

$$\frac{\psi \to \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}\,\mathrm{Res} \qquad \text{para as fórmulas } \varphi, \psi, \theta.$$

Em particular: $\dfrac{\neg\psi \quad \psi \vee \varphi}{\varphi}\,\mathrm{Res}$ e $\dfrac{\neg\psi \quad \psi}{\bot}\,\mathrm{Res}$.

Teorema

Para as cláusulas $\theta_1, \ldots, \theta_n$,

$$\{\theta_1, \ldots, \theta_n\} \text{ é inconsistente} \quad \text{se e só se} \quad \theta_1, \ldots, \theta_n \vdash \bot.$$

Nota

Como cada resolvente a partir de $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ corresponde a um conjunto de literais, então só há um número finito destes resolventes.

O algoritmo

Para verificar se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$:

1. Converter as fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ na forma normal conjuntiva.
2. Negar a fórmula ψ e converter $\neg\psi$ na forma normal conjuntiva.
3. Aplicar a regra de resolução às cláusulas obtidas acima até ou
   - obtém-se $\bot$ e neste caso verifica-se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$, ou
   - não se aplica mais a regra de resolução (sem obter $\bot$) e neste caso não se verifica $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Exemplo

Verificamos: $p \to q,\ q \to r \models p \to r$.

Portanto, consideremos as fórmulas

$$p \to q, \quad q \to r, \quad \neg(p \to r);$$

ou seja, temos as cláusulas

$$\neg p \vee q, \quad \neg q \vee r, \quad p \wedge \neg r.$$

Agora: $\neg p \vee q, \quad p, \quad q, \quad \neg q \vee r, \quad r, \quad \neg r, \quad \perp.$

Exemplo

Em suma, provámos que

$$p \to q,\ q \to r \models p \to r$$

uma vez que o conjunto de cláusulas

$$\{\neg p \vee q, \neg q \vee r, p, \neg r\}$$

é inconsistente, tal como se verifica na seguinte dedução:

1.	$\neg p \vee q$	Hip.
2.	$\neg q \vee r$	Hip.
3.	p	Hip.
4.	$\neg r$	Hip.
5.	q	Res (1,3)
6.	r	Res (2,5)
7.	$\perp$	Res (4,6)

Exemplo

Será que $p, p \to q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$?

Aplicamos o método de resolução:

(1) p

(2) $\neg p \vee q$

(3) $\neg r \vee q$

(4) $\neg r$

(5) q (Resolvente de (1) e (2))

Não há mais resolventes. Logo, a afirmação

$$p, p \to q, \neg(r \wedge \neg q) \models r$$

é falsa.

2. A sintaxe (lógica de 1ª ordem)

Nota

Na lógica proposicional podemos expressar, por exemplo,

$$((p \wedge q) \rightarrow r).$$

Agora, na lógica de primeira ordem, podemos ser mais específicos

$$\forall x \forall y \; ((\mathsf{par}(x) \wedge \mathsf{par}(y)) \rightarrow \mathsf{par}(x + y))$$

e podemos quantificar.

Por exemplo, para expressar que «todos os gatos têm garras»:

$$\forall x \; (\mathrm{gato}(x) \rightarrow \mathrm{garras}(x)).$$

Também podemos utilizar a lógica de primeiro ordem para

representar factos (criar bases de dados) e fazer inquéritos.

Exemplo (Os factos)

1. A Ana é docente.
2. Todos os docentes são pessoas.
3. O Paulo é diretor.
4. Os diretores são docentes.
5. Todos os docentes consideram o diretor um amigo ou não o conhecem.
6. Todos têm um amigo.
7. As pessoas apenas criticam aquelas pessoas que não são suas amigas.
8. A Ana critica o Paulo.

https://www.cs.cornell.edu/courses/cs4700/2011fa/lectures/16_FirstOrderLogic.pdf

Exemplo (Os factos … mais formais)

1. docente(Ana)
2. $\forall x\,(\text{docente}(x) \rightarrow \text{pessoa}(x))$
3. diretor(Paulo)
4. $\forall x\,(\text{diretor}(x) \rightarrow \text{docente}(x))$
5. $\forall x \forall y\,((\text{docente}(x) \wedge \text{diretor}(y)) \rightarrow (\text{amigo}(y, x) \vee \neg\text{conhece}(x, y)))$
6. $\forall x \exists y\, \text{amigo}(y, x)$
7. $\forall x \forall y\,((\text{pessoa}(x) \wedge \text{pessoa}(y) \wedge \text{critica}(x, y)) \rightarrow \neg\text{amigo}(y, x))$
8. critica(Ana, Paulo)

Questão. O Paulo não é amigo da Ana?

$$\neg\text{amigo}(\text{Paulo}, \text{Ana})$$

Exemplo (Os factos … do ponto de vista de um computador)

1. $\mathrm{P1}(\mathrm{A})$
2. $\forall x\,(\mathrm{P1}(x) \rightarrow \mathrm{P3}(x))$
3. $\mathrm{P4}(\mathrm{B})$
4. $\forall x\,(\mathrm{P4}(x) \rightarrow \mathrm{P1}(x))$
5. $\forall x \forall y\,((\mathrm{P1}(x) \wedge \mathrm{P4}(y)) \rightarrow (\mathrm{P2}(x, y) \vee \neg \mathrm{P5}(x, y)))$
6. $\forall x \exists y\, \mathrm{P2}(y, x)$
7. $\forall x \forall y\,((\mathrm{P3}(x) \wedge \mathrm{P3}(y) \wedge \mathrm{P6}(x, y)) \rightarrow \neg \mathrm{P2}(y, x))$
8. $\mathrm{P6}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$

Questão. $\neg \mathrm{P2}(\mathrm{B}, \mathrm{A})$

As tarefas

- Colecionar o conhecimento.
- Escolher uma linguagem apropriada: símbolos de constantes, de predicados …
- Representar o conhecimento nesta linguagem.
- Consultar a base de dados (e o procedimento de dedução).

Definição

Um **alfabeto de 1ª ordem** consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos «$\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$, $\perp$, $\top$» da lógica proposicional,
3. os quantificadores: os símbolos «$\exists$» (existe) e «$\forall$» (para todos),
4. o símbolo de igualdade «$=$»,
5. Além destes símbolos, e dependente do contexto, temos
   - uma coleção de símbolos de constante,
   - uma coleção de símbolos de função

     (cada símbolo de função f tem uma «aridade» $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos),
   - uma coleção de símbolos de predicado (= relação)

     (cada símbolo de predicado R tem uma «aridade» $n \in \mathbb{N}$ — o número de argumentos).

Exemplo (espaços vetoriais)

O alfabeto da teoria de espaços vetoriais reais consiste em (além dos símbolos de lógica e dos variáveis):

- o símbolo de constante 0,
- para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o símbolo de função $\alpha \cdot -$ de uma variável, e
- o símbolo de função $+$ de duas variáveis.

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **termo**:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se f é um símbolo de função de n variáveis e $t_1, \dots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \dots, t_n)$ é um termo.

Exemplo

Consideremos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolo de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a.
- $i(a)$, $i(x)$, $m(z, y)$, $m(a, z)$, $\dots$
- $m(i(x), x)$, $i(m(x, a))$, $m(m(z, a), i(x))$, $\dots$
- $\dots$

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de **fórmula**:

- $P(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.
- $t_1 = t_2$ é uma fórmula onde t_1, t_2 são termos.
- $\bot$ e $\top$ são fórmulas.

Ás fórmulas acima chamamos **átomos**.

- Se φ e ψ são fórmulas, então

$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \to \psi), \quad (\neg\varphi), \quad \bot, \quad \top$$

  são fórmulas.
- Se φ é uma fórmula e x é uma variável, então

$$\forall x\, \varphi \qquad \text{e} \qquad \exists x\, \varphi$$

  são fórmulas.

Exemplo

$$\underbrace{\forall x\,\forall y\,\forall z\,\underbrace{(\overbrace{(x<y)}^{\text{fórmula}}\to\overbrace{(\underbrace{x+z}_{\text{termo}}<\underbrace{y+z}_{\text{termo}})}^{\text{fórmula}})}_{\text{fórmula}}}_{\text{fórmula}}$$

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\, (\mathrm{gato}(x) \rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de «$\forall$» é «$(\mathrm{gato}(x) \rightarrow \mathrm{garras}(x))$».

- $(\forall x\, \exists y\, x < y) \wedge (a < x)$:

  O alcance de «$\forall$» é «$\exists y\, x < y$».

  O alcance de «$\exists$» é «$x < y$».

- $\forall x\, \exists y\, (x < y \wedge a < x)$:

  O alcance de «$\forall$» é «$\exists y\, (x < y \wedge a < x)$».

  O alcance de «$\exists$» é «$x < y \wedge a < x$».

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é **o alcance do quantificador** $\forall$ respetivamente $\exists$.

Variável livre e ligada

Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **ligada** se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se **livre** se essa ocorrência não é ligada.

Uma variável numa fórmula diz-se **livre** quando ocorre pelo menos uma vez livre na fórmula.

Nota

Uma fórmula diz-se **fechada** quando não tem variáveis livres.

Exemplos

No que se segue, gato e garras são símbolos de relação unária e a é um símbolo de constante.

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.
- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

  A variável y ocorre ligada e a variável x ocorre livre e ligada. A fórmula não é fechada.
- $\forall x\ \exists y\ (x < y \wedge a < x)$:

  As variáveis x e y ocorrem ligadas. A fórmula é fechada.

3. A semântica (lógica de 1ª ordem)

Nota

Para interpretar os termos respetivamente as fórmulas

$$M(M(x,y),I(A)), \quad R(y,A), \quad \exists y\, R(y,A),$$

precisamos de saber o significado de cada uma dos símbolos. Quais elementos denotam as variáveis? Quais funções correspondem às símbolos de funções? E às símbolos de predicados?

No que se segue, explicaremos como interpretar cada uma das componentes da fórmula.

Nota

- Sendo c um símbolo de constante que interpretamos por 3, então a interpretação da fórmula $x = c$ depende da interpretação de x.
- No entanto, para a interpretação da fórmula $\forall x\, x = c$, a interpretação de x é irrelevante. Ou seja, os quantificadores alterem o «estatuto da variável».

Definição

Uma **estrutura** $\mathcal{M}$ para um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,
- a cada símbolo de constante a associamos um elemento $a^{\mathcal{M}} \in D$,
- a cada símbolo de função f com n argumentos associamos uma função $f^{\mathcal{M}} : D^n \longrightarrow D$,
- a cada símbolo de predicado P com n argumentos associamos um subconjunto $P^{\mathcal{M}} \subseteq D^n$.

Definição

Dada uma estrutura $\mathcal{M}$, uma **valoração** V em $\mathcal{M}$ associa a cada variável x um elemento $V(x) \in D$.

O par $(\mathcal{M}, V)$ diz-se **interpretação**.

Interpretação de termos

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$V(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\mathcal{M}}(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in D.$$

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função binária M (ou seja, de dois argumentos), um símbolo de função I de um argumento e um símbolo de constante A.

Para a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com a estrutura $\mathcal{M}$ dada por

$$D = \{0, \ldots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}} : D^2 \to D,\ (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$, temos:

- $V(M(A, x)) = |1 - 2| = 1$.
- $V(M(M(x, y), I(A))) = ||2 - 1| - 1| = 0$.

Definição

Dada uma interpretação $(\mathcal{M}, V)$ de um alfabeto de 1ª ordem e uma fórmula φ, definimos recursivamente o conceito de φ **é válido em** $(\mathcal{M}, V)$, ou $(\mathcal{M}, V)$ **é modelo de** φ, denotado por $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

- $(\mathcal{M}, V) \models t_1 = t_2$ quando $V(t_1) = V(t_2)$.
- $(\mathcal{M}, V) \models R(t_1, \ldots, t_n)$ quando $(V(t_1), \ldots, V(t_n)) \in R^{\mathcal{M}}$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \top$ e ***não*** $(\mathcal{M}, V) \models \bot$
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \wedge \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ e $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \vee \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ ou $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models (\varphi \rightarrow \psi)$ quando $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$ implica $(\mathcal{M}, V) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \neg\varphi$ quando ***não*** $(\mathcal{M}, V) \models \varphi$.

Falta considerar os quantificadores ...

Modificação da valoração

Para uma variável x e um elemento $a \in D$, $V^{\frac{x}{a}}$ denota a valoração definida por

$$V^{\frac{x}{a}}(y) = \begin{cases} V(y) & \text{se } y \text{ é diferente de } x, \\ a & \text{se } y \text{ é igual ao } x. \end{cases}$$

Definição

Continuamos:

- $(\mathcal{M}, V) \models \exists x\, \psi$ quando, para algum $a \in D$, $(\mathcal{M}, V^{\frac{x}{a}}) \models \psi$.
- $(\mathcal{M}, V) \models \forall x\, \psi$ quando, para todo o $a \in D$, $(\mathcal{M}, V^{\frac{x}{a}}) \models \psi$.

Nota

Se uma fórmula φ não tem variáveis livres, a interpretação das variáveis é irrelevante na interpretação de φ.

Exemplo

Consideremos a linguagem com um símbolo de função M de dois argumentos, um símbolo de função I de um argumento, um símbolo de constante A e um símbolo de predicado R de dois argumentos.

Consideremos ainda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$ com a estrutura $\mathcal{M}$ dada por

$$D = \{0, \dots, 10\}, \quad M^{\mathcal{M}}\colon D^2 \to D,\ (n, m) \mapsto |n - m|, \quad I^{\mathcal{M}} = \mathrm{id}_D, \quad A^{\mathcal{M}} = 1$$

e $R^{\mathcal{M}}$ é a relação «menor» em D, e com a valoração V com $V(x) = 2$ e $V(y) = 1$.

Portanto:

- $R(x, A)$ não é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\exists x\, R(x, A)$ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\forall x\, R(x, A)$ não é válida em $(\mathcal{M}, V)$.
- $\forall x\, \exists x\, R(x, A)$ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.

Exemplo

Interpretamos os seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos «comuns» têm o significado «habitual»).

Expressão	Interpretação
$\cos(\pi) + 3$	$2 \in \mathbb{R}$
$3 < 4$	válida
$x < 4$	Depende da interpretação de x
$\forall x\, x < 4$	não válida
$\forall y\, y < 4$	não válida
$\exists y\, \forall y\, y < 4$	não válida
$\forall x\, ((x < 4) \to (1 = 0))$	não válida
$\forall x\, \exists y\, x < y$	válida
$\exists x\, \forall y\, x \leq y$	não válida

Tautologias e fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- **válida** (ou uma **tautologia**) quando é válida em ***cada*** interpretação.

  Notação: Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.
- **consistente** quando é válida em ***alguma*** interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se **inválida** e uma fórmula não consistente diz-se **inconsistente**.
- Uma fórmula φ é inconsistente se e só se $\neg\varphi$ é válida.

  Portanto, uma fórmula inconsistente diz-se também uma **contradição**.

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** quando $\varphi \leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso escrevemos $\varphi \equiv \psi$.

Definição

Uma fórmula ψ diz-se **consequência** (semântica ou lógica) das fórmulas $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação $(\mathcal{M}, V)$,

se $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ são válidas em $(\mathcal{M}, V)$, então ψ é válida em $(\mathcal{M}, V)$.

Em símbolos: $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$.

Nota

As regras de dedução «natural» da lógica proposicional admitem uma extensão para a lógica de primeira ordem. Tal como na lógica proposicional, baseada nestas regras define-se $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$, e tem-se

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi \quad \text{se e só se} \quad \varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi.$$

No entanto, neste capítulo consideremos o método de resolução.

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\mathrm{gato}(x) \to \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \models \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Aqui:

- «gato, garra» são símbolos de predicado de um argumento,
- «Tom» é um símbolo de constante.

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\text{gato}(x) \to \text{garra}(x)),\ \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom}).$$

Preparar para a dedução

$$\neg\text{gato}(x) \vee \text{garra}(x),^{a} \quad \text{gato}(\text{Tom}), \quad \neg\text{garra}(\text{Tom}).$$

[a] Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos).

Deduzimos agora:

$$\text{gato}(\text{Tom}), \quad \neg\text{gato}(\text{Tom}) \vee \text{garra}(\text{Tom}),^{a} \quad \text{garra}(\text{Tom}), \quad \neg\text{garra}(\text{Tom}),\ \bot.$$

[a] Escrever «Tom» em lugar de «x» … já que a fórmula é válida «para todos».

4. Formas normais de fórmulas

Convenção

A partir de agora vamos supor que o domínio da interpretação não é vazio.

Definição

Adaptamos a definição da lógica proposicional:

- Um literal é um átomo ou a negação de um átomo.
- Uma fórmula φ diz-se na **forma normal conjuntiva (disjuntiva)** quando
$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$
onde cada φ_i é da forma
$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$
com literais L_i.

Definição

Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \dots Qx_n \quad \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores e Q denota «$\exists$» ou «$\forall$» diz-se na **na forma normal prenex**.

Como obter?

- Mover «$\neg$» mais para o interior:

$$\neg\forall x\,\varphi \equiv \exists x\,\neg\varphi \qquad \text{e} \qquad \neg\exists x\,\varphi \equiv \forall x\,\neg\varphi.$$

- Mover os quantificadores mais para o exterior:
  - $(\forall x\,\varphi) \wedge (\forall x\,\psi) \equiv \forall x\,(\psi \wedge \varphi)$,
  - $(\exists x\,\varphi) \vee (\exists x\,\psi) \equiv \exists x\,(\psi \vee \varphi)$.
  - Suponha que ψ não contém a variável x:

$$(\forall x\,\varphi) \wedge \psi \equiv \forall x\,(\varphi \wedge \psi), \qquad (\exists x\,\varphi) \wedge \psi \equiv \exists x\,(\varphi \wedge \psi),$$
$$(\forall x\,\varphi) \vee \psi \equiv \forall x\,(\varphi \vee \psi), \qquad (\exists x\,\varphi) \vee \psi \equiv \exists x\,(\varphi \vee \psi).$$

Definição

Uma fórmula na **forma normal de Skolem**[a] é uma fórmula fechada (= sem variáveis livres)

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \quad \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores na forma normal conjuntiva.

[a] Thoralf Albert Skolem (1887 – 1963), matemático norueguês.

Nota

Como

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \ (\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x_1 \ldots \forall x_n \ \varphi) \wedge (\forall x_1 \ldots \forall x_n \ \psi),$$

uma fórmula na forma normal de Skolem pode-se escrever como uma conjunção de fórmulas normais de Skolem $\forall x_1 \ldots \forall x_n \ \varphi_i$ onde φ_i é uma cláusula $L_1 \vee \cdots \vee L_n$.

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\, \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\, \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1 \ldots \forall x_{k-1}\, \exists x_k\, Q_{k+1} x_{k+1} \ldots Q_n x_n\, \varphi$ ($k > 1$):
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos f) de $k-1$ argumentos,
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1} \ldots Q_n x_n\, \varphi$ por $f(x_1, \ldots, x_{k-1})$, e
  3. eliminar $\exists x_k$.

Teorema

Sejam $\psi_1, \ldots, \psi_n$ as «skolemizações» das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, então

$$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \text{ é consistente se e só se } \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \text{ é consistente.}$$

5. Unificação

Definição

Uma **substituição** é uma função $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$.

Nota

- Se
$$\{v \mid \sigma(v) \neq v\} = \{v_1, \dots, v_n\}$$
é finito, podemos descrever a substituição σ indicando apenas as substituições «relevantes»:
$$\{t_1/v_1, \dots, t_n/v_n\}$$
sendo $t_i = \sigma(v_i)$.
- A substituição
$$\{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}, \quad v \longmapsto v$$
denotamos por ε. Portanto, escrevemos $\varepsilon = \varnothing$.

Exemplo

$\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$ corresponde à substituição

$$\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$
$$v \longmapsto \begin{cases} f(z) & \text{se a variável } v \text{ é } x, \\ A & \text{se a variável } v \text{ é } y, \\ v & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Estender substituições:

Cada substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\widehat{\sigma}\colon \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\widehat{\sigma}(v) = \sigma(v)$, para cada variável v.
- $\widehat{\sigma}(c) = c$, para cada símbolo de constante c.
- $\widehat{\sigma}(f(t_1, \dots, t_n) = f(\widehat{\sigma}(t_1), \dots, \widehat{\sigma}(t_n))$, para cada símbolo de função f de n argumentos e termos $t_1, \dots, t_n$.

Portanto, obtemos

$$\begin{tikzcd} \{\text{termos}\} \arrow[r, "\widehat{\sigma}"] & \{\text{termos}\}. \\ \{\text{variáveis}\} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Estender ainda mais

Dada uma substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$ e uma fórmula E (sem quantificadores),

$$E\sigma$$

denota a fórmula obtida aplicando $\widehat{\sigma}$ ao todos os termos em E.

Para um conjunto $\mathcal{E}$ de fórmulas (sem quantificadores), definimos:

$$\mathcal{E}\sigma = \{E\sigma \mid E \in \mathcal{E}\}.$$

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x,\ A/y\}$:

$$\widehat{\sigma}(R(x,y)) = R(f(z),A).$$

- $\sigma = \{f(z,y)/x,\ A/y\}$:

$$\widehat{\sigma}(R(x,y)) = R(f(z,y),A).$$

Definição

Sejam

$$\sigma, \theta \colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

substituições. A **composta de θ após σ** é a função

$$\theta \vartriangle \sigma = \widehat{\theta} \circ \sigma.$$

$$\begin{tikzcd}
\{\text{termos}\} \arrow[r, "\widehat{\theta}"] & \{\text{termos}\} \\
\{\text{variáveis}\} \arrow[u, "\sigma"] \arrow[ur, "\theta \vartriangle \sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Nota

Para cada expressão (= termo, fórmula) E: $E(\theta \vartriangle \sigma) = (E\sigma)\theta$.

Exemplo

Consideremos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\, g(x)/y,\, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\, z/y,\, x/u\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\theta \vartriangle \sigma &= \{\widehat{\theta}(A)/x,\, \widehat{\theta}(g(x))/y,\, \widehat{\theta}(y)/z,\, x/u\} \\
&= \{A/x,\, g(f(y))/y,\, z/z,\, x/u\} \\
&= \{A/x,\, g(f(y))/y,\; x/u\}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Consideremos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	$f(f(A))$

Nota:

$$\begin{aligned}\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\} &= \{f(f(A))/y\} \vartriangle \{y/x\} \\ &= \{f(f(A))/x\} \vartriangle \{x/y\}.\end{aligned}$$

Definição

- Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição
$$\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$
diz-se **unificador** de $\mathcal{E}$ quando, para todos as expressões $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, $E_1\sigma = E_2\sigma$.
- Um conjunto $\mathcal{E}$ de expressões diz-se **unificável** quando existe um unificador de $\mathcal{E}$.

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(z))\}$ é unificável com $\sigma = \{f(z)/x\}$.
4. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(x))\}$ não é unificável.

Definição

Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões. Um unificador σ de $\mathcal{E}$ diz-se **unificador mais geral** (abreviação: mgu) de $\mathcal{E}$ quando, para cada unificador θ de $\mathcal{E}$, existe uma substituição λ tal que

$$\theta = \lambda \vartriangle \sigma.$$

Ou seja, cada unificador de $\mathcal{E}$ se pode descrever como «acrescentar substituições acima do unificador mais geral».

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

1. Começar com $k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\sigma_0 = \varepsilon$.
2. **Se** $\mathcal{E}_k$ tem apenas uma expressão, **então** σ_k é unificador mais geral de $\mathcal{E}$ e podemos PARAR.
3. Determinar o conjunto das diferenças de $\mathcal{E}_k$; isto é, o conjunto $\mathcal{D}_k = \{D_1, \ldots\}$ das *primeiras* sub-expressões (a contar da esquerda) onde as expressões de $\mathcal{E}_k$ são diferentes.
4. **Se** existem uma variável v e um termo t em $\mathcal{D}$ e v não ocorre em t, **então**
   - $\sigma_{k+1} = \{t/v\} \vartriangle \sigma_k$,
   - $\mathcal{E}_{k+1} = \mathcal{E}_k\{t/v\}$,
   - $k := k + 1$ e voltar ao ponto (2);

   se não PARAR com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(y, z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

Aqui:

- x, y, z são variáveis.
- A é um símbolo de constante.
- h é um símbolo de função de um argumento.
- P é um símbolo de predicado de dois argumentos.

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(y,z),\ P(x,h(y)),\ P(A,h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{y,\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x,z),\ P(x,h(x)),\ P(A,h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_2 = \{A/x\} \vartriangle \sigma_1 = \{A/x,\ A/y\},$$
$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A,z),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\}$$

2. $\mathcal{D}_2 = \{z, h(A)\}$. Portanto:

$$\sigma_3 = \{h(A)/z\} \vartriangle \sigma_2 = \{h(A)/z,\ A/x,\ A/y\},$$
$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2\sigma_3 = \{P(A,h(A)),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\}$$

3. $\mathcal{E}_3 = \{P(A,h(A))\}$. Logo: $\mathrm{mgu} = \{A/x,\ A/y,\ h(A)/z\}$.

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \{A/x\}, \\ \mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\} \end{aligned}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_1$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(x, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ x\} = \{h(x),\ x\}$.

   Como x (a única variável em $\mathcal{D}_0$) ocorre em $h(x)$ (o único termo em $\mathcal{D}_0$ diferente do x), terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

Exemplo

Consideremos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ Q(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{P, Q\}$.

   Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem «Não é unificável».

6. O método de resolução

Convenção

A partir de agora consideremos apenas linguagens sem o símbolo «=». Além disso, continuamos supor que o domínio da interpretação não é vazio.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
(aqui: $\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

Exemplos

Consideremos $C_1 = P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y))$ e $C_2 = \neg P(f(g(a))) \vee Q(b)$.

- $P(f(y)) \vee R(g(y))$ é um fator de C_1.
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente binária de um fator de C_1 e C_2.
- $R(g(g(a))) \vee Q(b)$ é uma resolvente de C_1 e C_2.

Resolvente de cláusulas C_1 e C_2 = Resolvente binária de (um fator de) C_1 e de (um fator de) C_2.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
  (aqui: $\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

Recordamos

Para justificar que

$$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \psi$$

(ψ é consequência de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$), mostramos que

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg\psi\}$$

é inconsistente.

As regras

Consideremos as fórmulas $\varphi, \psi, \theta, \gamma$.

- **Resolvente binária:** $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
  (aqui: $\neg\psi \vee \theta$, $\varphi \vee \gamma$ sem variáveis comuns)
- **Fator:** $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

O procedimento

Para «refutar» um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ de fórmulas fechadas:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. «ignorar» os quantificadores $\forall$ (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);
3. renomear as variáveis em cada cláusula tal que são distintas;
4. aplicar sucessivamente as duas regras anteriores, até se obter uma contradição (se for possível).

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que seja completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein* (ao Luar).
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Car96.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$.

Obter a forma normal («skolemização»)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \to I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c)$, c um símbolo de constante.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

Consideremos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

1. $P(c)$,
2. $\neg P(y) \vee I(y)$, mgu de $P(c)$ e $P(y)$: $\{c/y\}$.
3. $I(c)$,
4. $\neg I(z) \vee \neg S(z)$, mgu de $I(c)$ e $I(z)$: $\{c/z\}$.
5. $\neg S(c)$,
6. $\neg B(x) \vee S(x)$, mgu de $S(c)$ e $S(x)$: $\{c/x\}$.
7. $\neg B(c)$,
8. $B(c)$,
9. $\perp$.

Exemplo

$\forall x\, P(x) \models \exists x\, P(f(x))$; ou seja $\forall x\, P(x), \forall x\, \neg P(f(x)) \vdash \bot$.

Aqui:

- x é uma variável.
- f é um símbolo de função de um argumento.
- P é um símbolo de relação de um argumento.

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

Exemplo

$\forall x\, P(x) \models \exists x\, P(f(x))$; ou seja $\forall x\, P(x), \forall x\, \neg P(f(x)) \vdash \bot$.

Consideremos as fórmulas

$$P(x), \quad \neg P(f(x)).$$

A dedução:

1. $\neg P(f(x))$
2. $P(x)$, $P(f(x))$ e $P(x)$ não são unificáveis!!?

Esquecemos renomear as variáveis: $P(x) \rightsquigarrow P(y)$ ...

Recordamos que suponhamos aqui que o domínio da interpretação não é vazio.

Exemplo

1. $\neg P(x_1) \vee \neg Q(y_1)$ (Hip)
2. $\neg P(x_2) \vee Q(y_2)$ (Hip)
3. $P(x_3) \vee \neg Q(y_3)$ (Hip)
4. $P(x_4) \vee Q(y_3)$ (Hip)
5. $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2)$ Resolvente (1,2)
6. $\neg P(x_1)$ Fator (5)
7. $P(x_3) \vee P(x_4)$ Resolvente (3,4)
8. $P(x_3)$ Fator (7)
9. $\perp$ Resolvente (6,8)

O método de resolução baseia-se no trabalho

Este método é (correto e) completo na lógica de 1ª ordem no seguinte sentido:

Se

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi,$$

então existe uma dedução de $\perp$ a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$.

Sobre a programação (em lógica):

Em particular: 4.4. «Logical Programming».

Vídeos em: `https://groups.csail.mit.edu/mac/classes/6.001/abelson-sussman-lectures/`