

Resumo de alguns resultados importantes sobre Integrais Impróprios

Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em qualquer sub-intervalo limitado de $[0, +\infty[$.

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) \, dx \in \mathbb{R} \quad (\text{convergente})$$

- $\int_0^{+\infty} |f(x)| \, dx$ converge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ converge.

(Neste caso verifica-se a desigualdade triangular $\left| \int_0^{+\infty} f(x) \, dx \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x)| \, dx$).

- Sejam $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [0, +\infty[$.

- Se $f(x) \leq g(x)$ então: $\int_0^{+\infty} g(x) \, dx$ converge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ converge.

$$\int_0^{+\infty} f(x) \, dx \text{ diverge} \Rightarrow \int_0^{+\infty} g(x) \, dx \text{ diverge.}$$

- Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = M \in \mathbb{R}^+$, então $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ e $\int_0^{+\infty} g(x) \, dx$ têm a mesma natureza.

- Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, então: $\int_0^{+\infty} g(x) \, dx$ converge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ converge.

- Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então: $\int_0^{+\infty} g(x) \, dx$ diverge $\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ diverge.

- Se f é contínua e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \neq 0$, então $\int_0^{+\infty} f(x) \, dx$ diverge.

- Se h é limitada, $\int_a^{+\infty} |f(x)| \, dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^{+\infty} h(x)f(x) \, dx$ absoluta/ converg.

Aula 21: Transformada de Laplace (definição e propriedades)

Seja $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. A transformada de Laplace de f é a função $\mathcal{L}\{f\}$ definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(\textcolor{blue}{s}) = \int_0^{+\infty} e^{-\textcolor{blue}{s}t} f(t) dt,$$

para os valores de $\textcolor{blue}{s}$ em que o integral impróprio é convergente.

Propriedades lineares da transformadas de Laplace:

Prop. 3.1: A transformada de Laplace é uma transf. linear nas funções[†], isto é, se $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ e existem $\mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > s_f$ e $\mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > s_g$, então

(i) $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > \max\{s_f, s_g\}$.

(i) $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s)$ para $s > s_f$.

[†] É possível provar que o conjunto das funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ e de ordem exponencial constitui um espaço vectorial real (com a adição e multiplicação por números reais usuais) e que a transformada de Laplace é uma aplicação linear em tal espaço.

Aula 21: Exemplos

1. $\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$, para $s > 0$.
2. $g(t) = \begin{cases} 1 & t \neq 2, 3 \\ 0 & t = 2 \\ 6 & t = 3 \end{cases}$, $\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s}$, $s > 0$.
3. $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \mathcal{L}\{1\}(s - a) = \frac{1}{s - a}$, para $s > a$ ($a \in \mathbb{R}$).
4. $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n}{s} \mathcal{L}\{t^{n-1}\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$, para $s > 0$.
5. $\mathcal{L}\{\sin(at)\}(s) = \frac{a}{s} \mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$, para $s > 0$ ($a \in \mathbb{R}$).
6. $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{1}{s} - \frac{a}{s} \mathcal{L}\{\sin(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$, para $s > 0$ ($a \in \mathbb{R}$).
7. $\mathcal{L}\{c\}(s) = \mathcal{L}\{c \cdot 1\}(s) = c \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{c}{s}$, para $s > 0$.
8. $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$, para $s > |a|$ ($a \in \mathbb{R}$).
9. $\mathcal{L}\{\sinh(at)\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at} - e^{-at}}{2}\right\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$, para $s > |a|$ ($a \in \mathbb{R}$).

Aula 22: Exercícios 1

Determine:

1. $\mathcal{L}\{\text{sen}^2(at)\}(s)$

$$\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

2. $\mathcal{L}\{\cos^2(at)\}(s)$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

3. $\mathcal{L}\{\text{sen}^3(at)\}(s)$

$$\text{sen}^3 x = \frac{1}{4}(3\text{sen}(x) - \text{sen}(3x))$$

4. $\mathcal{L}\{\cos^3(at)\}(s)$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x))$$

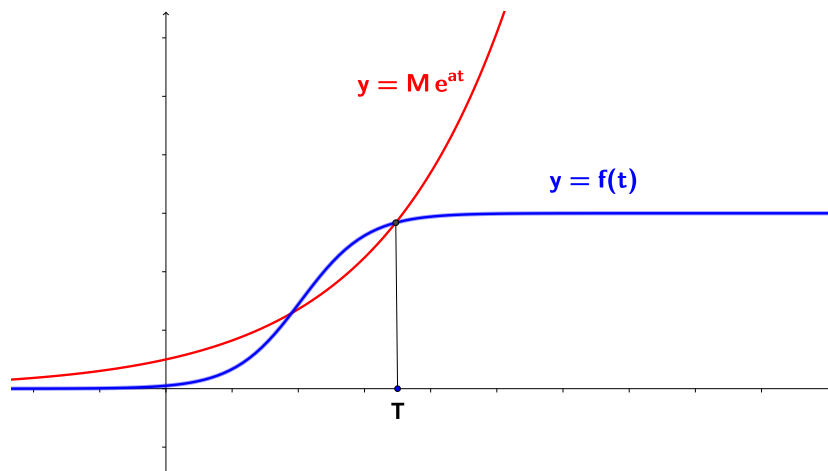
5. $\mathcal{L}\{at^3 + bt^2 + ct + d\}(s)$

Aula 22: Funções de ordem exponencial (à direita)

Um função f diz-se uma **função de ordem exponencial** $a \in \mathbb{R}$, se

$$|f(t)| \leq M e^{at}, \quad \forall t \geq T,$$

para algumas constantes M, T positivas.



Uma função f é de **ordem exponencial** se para algum $a > 0$, $\frac{|f(t)|}{e^{at}} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$.

Exemplo: Toda a função $f(t) = p(t)e^{at}h(t)$, em que $p(t)$ é um qualquer polinómio e $h(t)$ é uma função limitada (tal como $\sin(bx)$, $\cos(bx)$), é uma função de ordem exponencial.

Aula 22: Existência da transformada de Laplace

Se $f(t) = p(t)e^{at}h(t)$ admite transformada de Laplace para todo o polinómio $p(t)$ e para toda a função limitada $h(t)$ (por exemplo $f(t) = t^n e^{at} \sin(bt)$), nem toda a função admite transformada de Laplace.

Por exemplo $f(t) = e^{t^2}$ não admite transformada de Laplace:

o integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{t^2} dt = \int_0^{\infty} e^{t(t-s)} dt$ é divergente para todo o $s \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.2 Seja $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. Se

- (i) f é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ e
- (ii) f é uma função de ordem exponencial $a \in \mathbb{R}$, então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > a$.

Nota: Isto decorre do teorema: Se $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ é convergente então $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ é também convergente.

Aula 22: Transformada de Laplace inversa

Teorema 1.3: Se f e g são funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ e satisfazem

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{g\}(s), \quad \text{para } \forall s > a \quad (a \in \mathbb{R}),$$

então $f(t) = g(t)$ para todo o ponto $t \in \mathbb{R}^+$ onde f e g são contínuas.

A menos de um conjunto discreto de pontos, este teorema diz-nos que a transformada de Laplace é “injectiva” no espaço vectorial das funções seccionalmente contínuas (e de ordem exponencial) em $[0, +\infty[$, portanto “invertível” neste espaço vectorial.

Note-se que $\int_0^\infty f(t) = \int_0^\infty g(t) \not\Rightarrow f(t) = g(t)$ em \mathbb{R}^+ .

Ex: $f(t) = e^{-t}$ e $g(t) = \frac{e^{-t}}{2}$ são diferentes e temos $\int_0^\infty f(t) = \int_0^\infty g(t) = 1$.

Linearidade da transformada de Laplace inversa:

Prop 1.7: Suponha-se que F e G (definidas num mesmo domínio) admitem transformada de Laplace inversa. Então $F + G$ e αF ($\alpha \in \mathbb{R}$) também admitem transformada inversa e

$$(i) \quad \mathcal{L}^{-1}\{F + G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}; \quad (ii) \quad \mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}.$$

Aula 22: Tabela das transformadas de Laplace inversas

1. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) = 1$, para $s > 0$.
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}(t) = e^{at}$, para $s > a$ ($a \in \mathbb{R}$).
3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}(t) = t^n$, para $s > 0$.
4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}(t) = \text{sen}(at)$, para $s > 0$ ($a \in \mathbb{R}$).
5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\}(t) = \text{cos}(at)$, para $s > 0$ ($a \in \mathbb{R}$).
6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\}(t) = \text{senh}(at)$, para $s > |a|$ ($a \in \mathbb{R}$).
7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-a^2}\right\}(t) = \text{cosh}(at)$, para $s > |a|$ ($a \in \mathbb{R}$).

Aula 22: Exercícios 2

Determine a transformada de Laplace inversa das seguintes funções:

$$(1) \frac{1}{s(s-2)}$$

$$(2) \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$(3) \frac{42 - 4s}{s(s-7)}$$

$$(4) \frac{6 + 7s^2}{s^4}$$

$$(5) \frac{2s^2}{(s-a)(s^2 + a^2)}$$

Aula 22: Prop. 3.2 (Deslocamento na transformada)

Prop. 3.2: Sejam $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, com $b > 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > s_f$, então também existe

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s - \lambda), \quad \text{para } s > \lambda + s_f.$$


Invertendo o deslocamento na transformada temos:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - \lambda)\}(t) = e^{\lambda t} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).$$

$$\text{Ex. 1: } \mathcal{L}\{e^{-2t} \sin(6t)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin(6t)\}(s + 2) = \frac{6}{(s + 2)^2 + 6^2}, \quad s > -2.$$

$$\text{Ex. 2: } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-5)^2-4}\right\}(t) = e^{5t} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-4}\right\}(t) = e^{5t} \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2-2^2}\right\}(t) = \frac{e^{5t}}{2} \sinh(2t), \quad (s > 5).$$


Exercício: 1: Mostre que:

 (1) $\mathcal{L}\{e^t \sin(3t)\}(s) = \frac{3}{s^2 - 2s + 10}, \quad s > 1.$

(4) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 - 2s + 10}\right\}(t) = e^t \sin(3t).$

(2) $\mathcal{L}\{e^{\beta t} \cosh(\alpha t)\}(s) = \frac{s - \beta}{(s - \beta)^2 - \alpha^2}, \quad s > |\alpha| + \beta.$

(5) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s - \beta}{(s - \beta)^2 - \alpha^2}\right\}(t) = e^{\beta t} \cosh(\alpha t).$

 (3) $\mathcal{L}\{e^{2t} \sinh(-\sqrt{3}t)\}(s) = \frac{-\sqrt{3}}{(s - 2)^2 - 3}, \quad s > \sqrt{3} + 2.$

Formulário Transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), s > s_f; \quad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), s > s_g.$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(\textcolor{red}{s}) = \int_0^{+\infty} e^{-\textcolor{red}{s}t} f(t) dt$$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\sinh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > a $
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > a $
$f(t) + g(t)$	$F(s) + G(s), \quad s > s_f, s_g$
$\alpha f(t) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha F(s), \quad s > s_f$
$e^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s - \lambda), \quad s > s_f + \lambda$
$H_a(t)f(t-a) \quad (a > 0)$	$e^{-as}F(s), \quad s > s_f$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad s > as_f$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > \text{ordem exp. de } f$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0), \quad s > \text{ord. exp. de } f$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0), \quad s > \text{ordens exp. de } f, f'$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0), \text{ onde } f^{(0)} \equiv f, \quad s > \text{ordens exp. de } f, f', \dots, f^{(n-1)}$
$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$	$F(s)G(s)$

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$$(u^p)' = p u^{p-1} u' \quad (\arcsen(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad (\arctg(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u \quad (\sec u)' = u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)$$

$$(\sin u)' = u' \cos u \quad (\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$$

$$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u \quad (e^u)' = u' e^u$$

$$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u \quad (a^u)' = \frac{u' a^u}{\ln a}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$(\sinh^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$(\operatorname{tgh} u)' = u' \operatorname{sech}^2 u \quad (\operatorname{sech} u)' = -u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u$$

$$(\sinh^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} \quad (\operatorname{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$$

$$\int u' u^p dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C, \quad (p \neq -1)$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C$$

$$\int u' \sin u dx = -\cos u + C$$

$$\int u' \cos u dx = \sin u + C$$

$$\int u' \sec^2 u dx = \tan u + C$$

$$\int u' \operatorname{cosec}^2 u dx = -\cotg u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} dx = \sinh^{-1} u + C$$

$$\int u' \operatorname{sech}^2 u dx = \operatorname{tgh} u + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} dx = \sinh^{-1}(u) + C$$

$$\int u' \sec u dx = \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + C$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2} dx = \arctan(u) + C$$

$$\int u' \sec u \tan u dx = \sec u + C$$

$$\int u' \operatorname{cosec} u \cotg u dx = -\operatorname{cosec} u + C$$

$$\int u' e^u dx = e^u + C$$

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\int u' v + uv' dx = uv + C$$

$$\int u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u dx = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \frac{u'}{1-u^2} dx = \operatorname{tgh}^{-1} u + C$$