

3.2 Funções Reais de Várias Variáveis Reais: Extremos

(baseado em slides de edições anteriores de Cálculo II)

Universidade de Aveiro, 2023/2024

Cálculo II - C

Resumo dos Conteúdos

- 1 Definições; Teorema de Weierstrass; Teorema de Fermat
- 2 Extremos locais em pontos críticos: Testes da Hessiana
- 3 Cálculo de Extremos Globais de Funções Contínuas em Compactos
- 4 Extremos Condicionados

Extremos locais e globais

Definições: Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $P \in \mathcal{D}$.

- ❶ P é um **maximizante local** de f , se existe uma bola aberta $B_r(P)$ tal que $\forall X \in B_r(P) \cap \mathcal{D}, f(X) \leq f(P)$.
Nesse caso, $f(P)$ diz-se um máximo local de f .
- ❷ P é o **maximizante global** de f , se $\forall X \in \mathcal{D}, f(X) \leq f(P)$.
Nesse caso, $f(P)$ diz-se o máximo global de f .
- ❸ P é um **minimizante local** de f , se existe uma bola aberta $B_r(P)$ tal que $\forall X \in B_r(P) \cap \mathcal{D}, f(X) \geq f(P)$.
Nesse caso, $f(P)$ diz-se um mínimo local de f .
- ❹ P é um **minimizante global** de f , se $\forall X \in \mathcal{D}, f(X) \geq f(P)$.
Nesse caso, $f(P)$ diz-se o mínimo global de f .

Máximos e mínimos (locais ou globais) designam-se, genericamente, por **extremos** (locais ou globais); os pontos onde são atingidos designam-se, genericamente, por **extremantes** (locais ou globais, consoante o caso).

Condição suficiente para a existência de extremos globais: Teorema de Weierstrass

Teorema de Weierstrass:

Se $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e \mathcal{D} é fechado e limitado (compacto), então f admite máximo e mínimo globais em \mathcal{D} .

Exemplo 1:

Seja $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, com $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4\}$, tal que $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Uma vez que \mathcal{D} é compacto e f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass, f atinge, em \mathcal{D} , máximo e mínimo globais.

Exemplo 2: A função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ admite no seu domínio máximo global, atingido em $(0, 0)$, mas não possui mínimo global.

Isto contradiz o Teorema de Weierstrass? Porquê?

Condição necessária para a existência de extremo local num ponto interior: Teorema de Fermat

Teorema de Fermat:

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$. Se f tem derivadas parciais de 1.^a ordem em P e P é um extremante local de f , então $\nabla f(P) = (0, 0, \dots, 0)$.

Definição:

Um ponto $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ tal que $\nabla f(P) = (0, 0, \dots, 0)$ diz-se um **ponto crítico de f** .

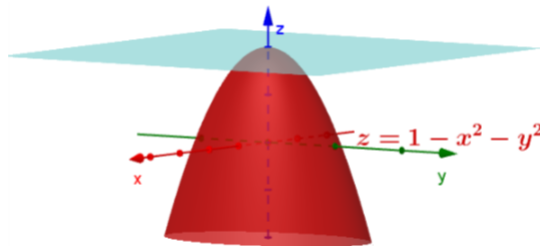
Observações:

- Se $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ é um extremante de f , então P é ponto crítico de f ou não existe alguma das derivadas parciais de 1.^a ordem de f .
- Existem pontos críticos que não são extremantes; esses pontos designam-se por **pontos de sela**.

Exemplo – Extremante e ponto crítico

$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.

Esboço Gráfico:



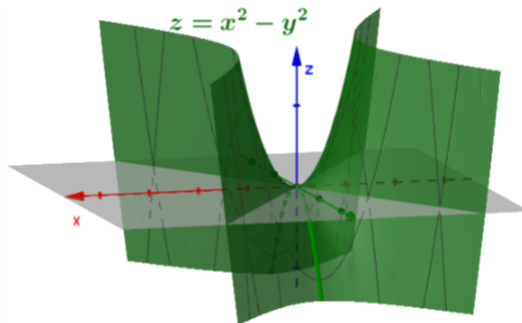
Notar que $(0, 0)$ é um maximizante (global) de f e que nesse ponto a função atinge o seu valor máximo: 1.

As derivadas parciais $f'_x(x, y) = -2x$ e $f'_y(x, y) = -2y$, existem para todo o (x, y) . De acordo com o Teorema de Fermat, essas derivadas são nulas em $(0, 0)$, o que com facilidade se verifica.

Exemplo – Ponto crítico não extremante (ponto de sela)

A função real de domínio \mathbb{R}^2 tal que $f(x, y) = x^2 - y^2$ tem um ponto de sela. De facto, $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, ou seja, $(0, 0)$ é um ponto crítico de f , mas não é extremante local de f (justifique usando a definição).

Esboço Gráfico:



Matriz Hessiana

Como verificar se um ponto crítico é um extremante local?

Uma das abordagens pode ser através da matriz Hessiana de f .

Definição:

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\text{int}(\mathcal{D})$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$. A **matriz Hessiana de f em P** é a matriz (simétrica) de ordem n :

$$H_f(P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{bmatrix}.$$

O determinante desta matriz é chamado o Hessiano de f em P .

Cadeia de menores principais líderes de uma matriz

Definição:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ e

$$M_1 = |a_{11}|$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$M_n = |A|.$$

M_1, M_2, \dots, M_n chama-se a **cadeia de menores principais líderes de A** .

Exemplo: A matriz $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ tem os menores principais líderes:

$$M_1 = |-5| = -5$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 11$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -22$$

Teste da Hessiana (versão dos menores principais líderes)

Teorema:

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\text{int}(\mathcal{D})$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ **ponto crítico de f** . Suponha-se que $\det(H_f(P)) \neq 0$, i.e., $M_n(P) \neq 0$.

- Se a cadeia de menores principais líderes de $H_f(P)$ é positiva, i.e., $M_k(P) > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, então P é um **minimizante local de f** .
- Se a cadeia de menores principais líderes de $H_f(P)$ é alternada, começando por um menor principal negativo, i.e., $M_k(P) < 0$, se k ímpar, e $M_k(P) > 0$, se k par, $k = 1, 2, \dots, n$, então P é um **maximizante local de f** .
- Se **nenhuma das situações anteriores** ocorrer, P é um **ponto de sela de f** .

Nota: se $\det(H_f(P)) = 0$, este teste **não serve** para concluir da natureza do ponto crítico.

Exemplo de aplicação do Teste da Hessiana

Seja f a função de domínio \mathbb{R}^2 tal que $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 4y = 0 \\ 4x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Assim, $P = (0, 0)$ e $Q = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ são os pontos críticos de f . A matriz Hessiana é

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

$H_f(P) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, logo P é ponto de sela de f , pois $M_2(P) \neq 0$ e $M_1(P) = 0$.

$H_f(Q) = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$, como $M_1(Q) = -8 < 0$ e $M_2(Q) = 16 > 0$, Q é maximizante local de f . O máximo local correspondente é $f(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) = \frac{59}{27}$.

Teste da Hessiana para $n = 2$

Teorema:

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 em $\text{int}(\mathcal{D})$ e $P \in \text{int}(\mathcal{D})$ ponto crítico de f . Suponha-se que $\det(H_f(P)) \neq 0$.

- ❶ Se $\det(H_f(P)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) > 0$, então P é um **minimizante** local.
- ❷ Se $\det(H_f(P)) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) < 0$, então P é um **maximizante** local.
- ❸ Se $\det(H_f(P)) < 0$, então P é **ponto de sela**.

Nota: Quando $\det(H_f(P)) = 0$, qualquer teste baseado em $H_f(P)$ é **inconclusivo**. De facto, para Hessianas “idênticas”, os pontos associados podem ter uma natureza completamente distinta (veja os exemplos do slide seguinte).

Exemplos de aplicação inconclusiva do Teste da Hessiana

Ex. 1: Determinar os extremos locais da função $f(x, y) = x^4 + x^2 + y^3$.

- Pontos críticos de f : $(0, 0)$
- $H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 + 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$ e $\det(H_f(0, 0)) = 0$. O teste da Hessiana é inconclusivo.
- Análise, recorrendo à definição, da função numa vizinhança de $(0, 0)$:
Em toda a bola aberta centrada em $(0, 0)$ existem pontos da forma $(0, b)$, com b negativo e com b positivo. Como $f(0, b) = b^3 < 0$, se $b < 0$, e $f(0, b) = b^3 > 0$, se $b > 0$, o ponto $(0, 0)$ não é extremante de f , mas sim um ponto de sela.

Ex. 2: A aplicação do Teste da Hessiana na determinação dos extremos locais da função $f(x, y) = x^4 + x^2 + y^4$ é também inconclusiva. Mas, neste caso, $(0, 0)$ é um minimizante local. Verifique, fazendo uma análise similar à do exemplo anterior.

Cálculo de Extremos Globais em Compactos

Se $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e \mathcal{D} fechado e limitado (compacto), o Teorema de Weierstrass garante a existência de extremantes globais em D . A identificação desses extremantes, e respetivos valores extremos, pode ser feita usando o seguinte procedimento:

- 1 Determinar, no interior de \mathcal{D} , os pontos críticos de f .
- 2 Determinar, no interior de \mathcal{D} , os pontos onde não exista uma das derivadas parciais.
- 3 Determinar os candidatos a extremantes da restrição de f à fronteira de \mathcal{D} .
- 4 Considerar os pontos obtidos nos passos anteriores e calcular o valor de f em cada um deles. O menor dos valores é o mínimo global de f e o maior é o máximo global de f (em \mathcal{D}).

Exemplo de aplicação do procedimento do slide anterior:

$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$, definida em $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

- ① Notar que, $\text{int}(\mathcal{D}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$.
 $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é o único ponto crítico de f em $\text{int}(\mathcal{D})$.
- ② Como f tem derivadas parciais em todos os pontos de $\text{int}(\mathcal{D})$, em relação ao ponto 2. não há pontos a acrescentar.
- ③ Notar que, $\text{fr}(\mathcal{D}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
 Tomando $x = \cos \theta$ e $y = \sin \theta$, com $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\text{fr}(\mathcal{D}) = \{(\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in [0, 2\pi]\}$$

e a restrição de f , $f|_{\text{fr}(\mathcal{D})}$ pode considerar-se como sendo a seguinte função a uma variável

$$\begin{aligned} g(\theta) &= f|_{\text{fr}(\mathcal{D})}(\theta) = f(\cos \theta, \sin \theta) \\ &= 2 - \cos \theta - \sin \theta, \quad \text{com } \theta \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Conclusão do exemplo do slide anterior

Os candidatos a extremantes de g , são os seus pontos críticos $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{5\pi}{4}$ e os pontos fronteiros do intervalo $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.

Assim, devemos considerar os pontos:

$$P_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ e } P_4 = (1, 0)$$

como candidatos a extremantes globais de f .

4 Como

$$f(P_1) = \frac{1}{2}, f(P_2) = 2 - \sqrt{2}, f(P_3) = 2 + \sqrt{2} \text{ e } f(P_4) = 1,$$

então o **máximo global** de f em \mathcal{D} é $2 + \sqrt{2}$, atingido em

$P_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e o **minímo global** de f em \mathcal{D} é $\frac{1}{2}$, atingido em $P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

O que é um extremo condicionado (ou ligado) (ou sujeito a restrição)?

Um **extremo condicionado de uma função** é um extremo de uma sua restrição a um certo conjunto, definido por uma certa condição (ou conjunto de condições). Trataremos apenas o caso em que essa condição é uma igualdade. Vamos considerar funções a duas variáveis (a generalização para $n > 2$ é a natural).

Sejam $f: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{D}: g(x, y) = 0\}.$$

Os **extremos da restrição** $f|_{\mathcal{C}}$ são designados de **extremos condicionados de f** sujeitos (ou restritos) à condição (restrição) $g(x, y) = 0$.

A condição $g(x, y) = 0$ é chamada de **condição de ligação** ou **condição de restrição** (ou simplesmente, restrição).

Exemplo: $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ e $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

Problema: Determinar os extremos de f restringida ao conjunto
 $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}.$

Em esquema:

$$\begin{array}{ll} \min/\max & f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1 \\ \text{s.a.} & x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

Nota: s.a. lê-se "sujeito a"

Usando o estudo feito no exemplo do Slide 17, para a fronteira, podemos dizer que a resposta é $2 - \sqrt{2}$ e $2 + \sqrt{2}$ para o mínimo e máximo pedidos.

Multiplicadores de Lagrange

Teorema:

Sejam \mathcal{D} um aberto de \mathbb{R}^2 , $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 em \mathcal{D} e $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{D}: g(x, y) = 0\}$.

Se $P \in \mathcal{C}$ é um extremante da restrição de f a \mathcal{C} e $\nabla g(P) \neq (0, 0)$, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$.

Nota: O escalar λ é designado por **multiplicador de Lagrange**.

Multiplicador de Lagrange:

O teorema anterior (respeitadas as condições em f e g) afirma que pontos de \mathcal{C} onde os gradientes de f e g sejam colineares são os candidatos a extremantes condicionados.

Método dos Multiplicadores de Lagrange

Problema: Sejam \mathcal{D} um aberto de \mathbb{R}^2 , $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ funções de classe C^1 em \mathcal{D} e $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathcal{D} : g(x, y) = 0\}$.

$$\begin{array}{ll} \min/\max & f(x, y) \\ \text{s.a.} & g(x, y) = 0 \end{array}$$

Método:

- 1 Determinar as soluções (x, y) do sistema^a

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}, \text{ admitindo } \nabla g(x, y) \neq (0, 0).$$
- 2 Verificar se $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$ em algum ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$; esse ponto poderá também ser extremante.
- 3 Estudar a natureza dos pontos obtidos.

^aEm geral, isso também envolve calcular λ .

Exemplo: $\min/\max \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$
 s.a. $x^2 + y^2 = 1$

Aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange:

Seja $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Observe-se que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Logo, f e g são funções de classe C^1 (porque têm derivadas parciais contínuas).

Por outro lado, $\nabla g(x, y) \neq (0, 0)$ se $g(x, y) = 0$.

Logo, basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 &= \lambda 2x \\ 2y - 1 &= \lambda 2y \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Os candidatos a extremantes são: $P = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $Q = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Como a restrição define um conjunto limitado e fechado de \mathbb{R}^2 e f é aí contínua, pelo **Teorema de Weierstrass**, P e Q terão que ser os extremantes.

Assim, conclui-se que $f(P) = 2 - \sqrt{2}$ é o mínimo e $f(Q) = 2 + \sqrt{2}$ é o máximo (condicionados).