universidade de aveiro

Departamento de Física

Instrumentação e Análise de Dados Experimentais

Ano lectivo de 2014/15

1. Introdução 3
2. Medições directas e Instrumentos de medida 4
2.1. Erros experimentais 5
3. Avaliação de um resultado experimental: precisão e exactidão na medição de uma grandeza 9
i) Precisão 9
ii) Exactidão: número reduzido de medições 9
4. Resultado experimental de medições directas. 10
4.1. A grandeza é medida uma única vez. Erro de leitura ou instrumental e erro de observação 10
4.2. Análise da dispersão devida a erros acidentais num conjunto de N medidas: Histogramas e curvas de distribuição 11
4.3. Grandeza medida um número reduzido de vezes (N <10) 14
5. Medidas Indirectas 14
5.1. Combinação ou propagação de erros em grandezas independentes 14
5.2. Grandeza determinada a partir da relação entre duas grandezas não independentes. 15
Apêndice A: Algarismos significativos e arredondamentos 244
Apêndice B: Grandeza determinada a partir de um grande número de medições (N≥ 10) 266
i) Conhece-se o valor “real”, μ 27
ii) Concordância entre dois conjuntos de medidas, X e Y 29
1. Cada um dos conjuntos de medidas tem uma distribuição gaussiana e o valor do desvio padrão, σ, é conhecido. Serão os valores médios concordantes? 29
2. Cada um dos conjuntos de medidas tem uma distribuição gaussiana, cujo valor do desvio padrão, σ, é igual mas desconhecido. Serão os valores médios concordantes? 29
Apêndice C: Tabela Síntese para análise de dados 311
Apêndice D: Planificação de uma experiência e elaboração do relatório 332
Apêndice E: Tabela de derivadas consideradas fundamentais no âmbito da disciplina 365
Apêndice F: Exercícios Complementares 36
Bibliografia 4041

1. Introdução

Este documento apresenta um conjunto de conceitos teóricos relativos à análise e tratamento de observações e resultados experimentais, apoiados numa série de actividades e exercícios a realizar ao longo das primeiras aulas. Foram seleccionados apenas os conteúdos considerados fundamentais para atingir os objectivos da componente prática das disciplinas de Física leccionadas no primeiro ano.

A metodologia adoptada não explora exaustivamente os detalhes da fundamentação teórica dos conceitos abordados. O aprofundamento dos conceitos pode ser feito através da bibliografia indicada.

2. Medições directas e Instrumentos de medida

O processo de medição de uma grandeza consiste em atribuir um valor numérico à grandeza referido a um padrão (unidade). Este processo consiste na interposição do fenómeno, do observador, de um método e de instrumentos de medida. O que significa que só fica completo quando conhecidas as limitações e incertezas do método e dos instrumentos, que uma vez quantificadas representam a *incerteza* (*erro*) *da medida*. Ao longo deste documento adoptar-se-á indistintamente qualquer das designações: *incerteza* ou *erro da medida*.

O resultado final de uma medição deve ser sempre apresentado como:

Grandeza medida = valor numérico ± erro absoluto (unidades)

ou

Grandeza medida = valor numérico (unidades) ± erro relativo (%)

As **Medidas Directas** são as que resultam da leitura num instrumento de medida, que compara *directamente* a grandeza a medir com a grandeza padrão usada na *calibração* do instrumento.

Genericamente, podemos dizer que um instrumento de medida funciona como um transdutor que transforma um sinal qualitativo e inacessível (X), aos nossos sentidos, num sinal quantificável (Y). Assim as dimensões físicas do estímulo (X) e da resposta (Y) não têm de ser iguais.

Exemplo I: Num termómetro de mercúrio tem-se como resposta ao estímulo <u>variação de temperatura</u> a <u>altura da coluna de mercúrio</u>, cuja dimensão física é <u>comprimento</u>.

Torna-se então necessário proceder à *calibração* do transdutor, ou seja determinar uma tabela de correspondência entre o estímulo (X) e a resposta (Y).

Já que não existem instrumentos de medida perfeitos, é fundamental conhecer alguns dos seus atributos para que a respectiva escolha seja adequada à natureza da medida e ao objectivo da medição. De entre os vários atributos interessa-nos nesta fase analisar dois deles: a **sensibilidade** e o **rigor**. Assim:

A Sensibilidade, define-se como a razão entre a variação na resposta Y e a variação mínima do estímulo X que a provoca. A sensibilidade também pode ser caracterizada pelo *Poder Resolvente*, o qual corresponde ao menor intervalo do estímulo ΔX, que provoca uma variação na resposta, ΔY.

O Rigor, é a propriedade que caracteriza a dispersão das respostas Y a um mesmo estímulo X. Isto resulta do facto da resposta estar também dependente das limitações inerentes ao próprio instrumento de medida, como por exemplo o atrito das molas num dinamómetro, flutuações de níveis de tensão num voltímetro, atrito mecânico num relógio analógico, etc. Assim, em geral, não se obtém sempre a mesma resposta para estímulos idênticos e torna-se necessário efectuar várias medições, e analisar como é que estas se distribuem em torno de um determinado valor.

2.1.Erros experimentais

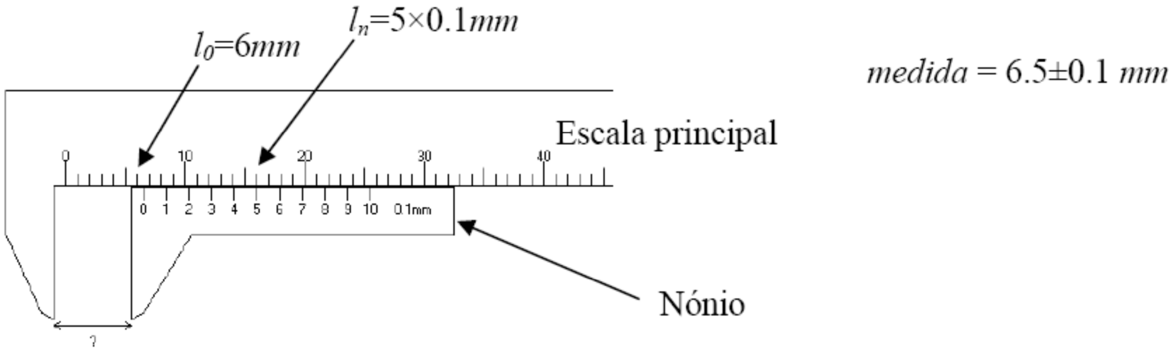
Erro Instrumental ou de leitura (Δx_{inst}) é o erro que se comete na leitura de uma medida devido à sensibilidade do instrumento de medida.

Como regra geral podemos dizer que o *Erro Instrumental ou de leitura é igual:*

-a *metade da menor divisão* da escala nos Instrumentos Analógicos
-à *menor divisão da escala* nos Instrumentos Digitais

Como excepção à regra geral temos por ex. a *Craveira* (também conhecida por *Paquímetro* ou *Palmer*), que apesar de ser um instrumento analógico, o seu erro coincide com a menor divisão do nónio. Através do exemplo seguinte torna-se mais simples compreender o porquê desta excepção.

Exemplo II: *Medição do comprimento de uma barra, usando uma craveira*



$l=[l_0 + l_n] \pm$ valor da menor divisão do nónio.

l_0 : comprimento lido por defeito, a partir do zero da escala principal até ao zero do nónio*;*

l_n : *$k \times$ (valor da menor divisão do nónio)* onde *k* é o número de divisões do nónio contadas a partir do zero do nónio até que a escala deste coincida com a escala principal.

Figura 1

Erros devidos à intervenção do observador

Medir é interagir com o instrumento de medida. Se esta interacção não for correcta, isto é, se não se utilizar correctamente o aparelho de medida, a medida efectuada surge afectada de um erro de observação. São exemplos comuns deste tipo de erros o deficiente posicionamento do observador em relação à escala (chamado erro de paralaxe), o tempo de resposta do observador, como se estabelece uma referência, etc.

Exemplo III: Como evitar o erro de paralaxe

O erro de paralaxe surge, por exemplo, quando a leitura, num instrumento de medida, é efectuada por coincidência dum ponteiro com uma escala colocada num plano diferente. Nestes casos, o valor lido vai depender da posição do observador relativamente ao plano da escala. (ver Fig. 2a). Para o evitar é necessário que o observador se coloque perpendicularmente ao referido plano. Em alguns instrumentos existe um espelho na escala, que reflecte o ponteiro, e a perpendicularidade é garantida quando a imagem e o objecto estão alinhados (ver Fig. 2b).

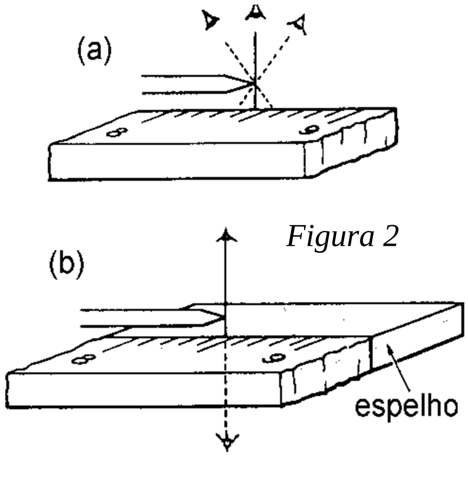


Figura 2

Erros de calibração e de zero da escala dos instrumentos

A calibração assegura que o instrumento de medida possui escalas correctas, de acordo com os padrões utilizados, e garante que não são introduzidos erros sistemáticos quando correctamente utilizado. Um instrumento de medida é usado correctamente quando:

- a grandeza a ser medida se encontra dentro dos limites de operação/calibração desse aparelho.
- para um estímulo nulo a resposta do instrumento é igualmente nula. Quando isto não acontece temos o chamado erro do zero da escala. São exemplos comuns desta situação: uma balança que sem massas no prato já indica um valor na escala, um voltímetro que com as pontas de teste em contacto já indica uma diferença de potencial, etc. Habitualmente estes instrumentos possuem um botão (dito de calibração) que permite corrigir estas situações e eliminar o erro do zero.

Exemplo IV: Como evitar o erro do zero de uma régua

Quando numa régua a escala junto ao zero está rasurada (ou deteriorada) deve-se fazer a medida utilizando como início de escala outro valor que não o zero. Para obter a medida correcta basta subtrair o valor inicial utilizado.

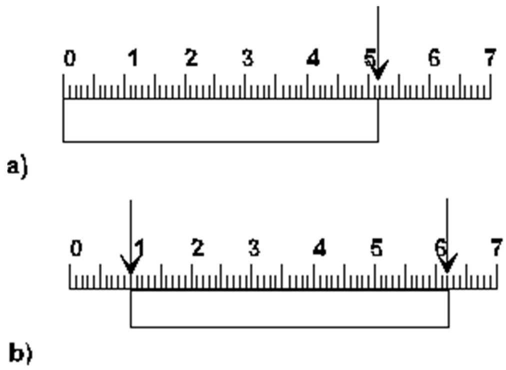


Figura 3

Alterações ambientais que influenciam o desenrolar da experiência

Outro dos factores que influencia a qualidade da medida obtida é a alteração ambiental no local da experiência (normalmente o laboratório). São exemplos destas alterações a variação da temperatura, da pressão, da tensão da rede, etc.

Exemplo V: Expansão térmica do instrumento de medida

Ao usar uma régua de cobre para fazer uma medida de comprimento L num local cuja temperatura varie de 20ºC a 200ºC comete-se um erro de 0.3%.

$L_{T=20ºC} = 1.000\ m$

$L_{T=200ºC} = L_{T=20ºC} + L_{T=20ºC} \times \alpha \times \Delta T =$

$1.000 + 1.000 \times 17 \times 10^{-6} \times 180 = 1.003\ m$

Coeficiente de expansão linear $\alpha/(10^{-6}\ ºC^{-1})$	
Cobre	*17*
Aço	*11*
Invar	*1*
Vidro Comum	*9*
Sílica fundida	*0.5*

Tabela I

Outro tipo de erros a considerar

- De natureza teórica (ex. desprezar o atrito na determinação da aceleração da gravidade usando o tempo que um corpo demora a cair de uma altura *h*);
- De natureza estatística, inerentes ao próprio fenómeno (ex. desintegração de núcleos radioactivos num dado intervalo de tempo);

Os erros experimentais podem ser classificados em duas classes:

Erros sistemáticos, são erros constantes que influenciam (por excesso ou por defeito) todas as medições. Por exemplo, um erro de calibração é difícil de eliminar se o instrumento em questão não for confrontado com o padrão. Já *o erro do zero* na escala, na medição de um comprimento, pode ser facilmente eliminado se a medida for feita entre dois pontos distintos da escala (ver Fig. 3).

Erros aleatórios* ou *estatísticos, são os que se revelam quando se repete a medição de uma grandeza e se obtêm valores diferentes, reflexo por ex. da falta de precisão do instrumento de medida, ou por outras flutuações não controladas pelo observador. Estes só têm significado para um número de medições (observações) da mesma grandeza superiores a um. Para um número razoavelmente grande de medidas é possível controlar este tipo de erros recorrendo à análise estatística.

Nota: numa experiência real podem ocorrer as duas classes de erros.

3. Avaliação de um resultado experimental: precisão e exactidão na medição de uma grandeza

i) Precisão

Na maior parte das vezes, o experimentador não conhece o valor "real" da grandeza que pretende determinar, ou então tem apenas uma ideia aproximada dada por outros métodos. Neste caso, a avaliação da experiência faz-se conhecendo a *precisão* com que o resultado foi determinado.

Um resultado de uma medição é tanto *mais preciso quanto menor* o *erro relativo*, definido por $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$, que geralmente se exprime em percentagem:

$$\text{Erro relativo} = \left|\frac{\Delta x}{x}\right| \times 100 \ \ (\%)$$

ii) Exactidão: número reduzido de medições

A *exactidão* de uma experiência é uma medida do grau de proximidade entre o valor "real" e o resultado experimental ($X \pm \Delta X$).

Sabermos se o valor da grandeza que determinámos está próximo do valor esperado -"valor real"- é fundamental na discussão de um trabalho experimental. No entanto a situação mais comum numa experiência é não conhecermos o valor "real" da grandeza que se determinou, mas sim de uma determinação obtida por outrem, também ela com um erro. **Pretendemos então estabelecer um critério que nos permita saber se o valor medido deve ou não ser rejeitado.**

Como na prática, o aluno só realiza um conjunto muito limitado de medições de uma mesma grandeza, a estimativa da incerteza, Δx_A, é feita pelo máximo dos desvios, erro de observação erro de leitura (medida directa) ou limite superior do erro ("medida" indirecta), é aceitável uma discussão qualitativa da exactidão. Para isso o aluno terá que verificar se o "valor real", μ, ou uma outra determinação, $\bar{x}_B \pm \Delta x_B$, da mesma grandeza intercepta o intervalo da sua medição $\bar{x}_A \pm \Delta x_A$. Este exercício dá-lhe de imediato a noção sobre o sucesso da sua experiência.

Um estudo rigoroso deste assunto exigiria um formalismo que está fora do âmbito desta disciplina. A título de curiosidade, o aluno poderá encontrar no apêndice B informação sobre a avaliação quantitativa da exactidão em duas das situações mais comuns

No âmbito destas disciplinas serão consideradas *precisas*, todas as medições cujo erro relativo não exceda os 10%. Isto significa que um resultado deve ter uma precisão igual ou superior a 90%.
Note que a discussão da *exactidão* de um resultado só faz sentido ser analisada se este corresponder a uma medição com uma precisão considerada razoável.

Vimos então que, no contexto científico, as expressões ***exactidão* e *precisão*** não têm o mesmo significado.

4. Resultado experimental de medições directas.

4.1. A grandeza é medida uma única vez. Erro de leitura ou instrumental e erro de observação

Numa experiência em que se faz uma única medição x, o erro que se comete é normalmente limitado pelo poder resolvente do instrumento de medida, ou seja, corresponde ao erro de leitura ou instrumental. Neste caso o resultado de X será:

$$X = x \pm \Delta x \equiv x \pm \Delta x_{\text{inst}}$$

Pode acontecer que o observador durante a medição se aperceba que está a cometer um erro aleatório (Δx_{obs}) que não consegue controlar, mas que consegue estimar. Neste caso ele deve utilizar o maior de entre o erro de observação (Δx_{obs}) e o erro de leitura ou instrumental (Δx_{inst}).

Algarismos significativos e arredondamentos

Quando determinamos uma grandeza, seja medindo directamente com um instrumento de medida, ou através de cálculos que envolvam outras grandezas medidas, o valor numérico final deve expressar a incerteza com que foi efectuada a determinação. Por exemplo, cada uma das determinações individuais da tabela II tem associada a incerteza correspondente ao erro de leitura do instrumento com que foi feita, ou seja, o último algarismo com significado físico pertence à classe das décimas de segundo. Isto significa que t =18s e t=18.0s não têm a mesma incerteza e por isso não foram medidos com o mesmo instrumento.

Os algarismos significativos são aqueles cujos valores são conhecidos com certeza, mais o algarismo coberto pela estimativa do erro na determinação. Consequentemente, o ***número de algarismos a reter*** no valor numérico de uma medição ***depende do erro da determinação***.

Nota: Como no decorrer de uma aula prática o conjunto de medições é normalmente ≤10, convencionamos que o erro no resultado final da medição deve ter apenas ***UM ALGARISMO SIGNIFICATIVO****.*
No apêndice A, o aluno poderá encontrar a informação de que necessita para estabelecer correctamente o número de algarismos significativos num resultado experimental.

4.2.Análise da dispersão devida a erros acidentais num conjunto de N medidas: Histogramas e curvas de distribuição

Quando repetimos N vezes uma dada medida, podemos saber se a dispersão (ou seja, a variação dos valores obtidos) é grande ou pequena recorrendo a um método simples de representação gráfica - conhecido por Histograma. Para construir um histograma procede-se do seguinte modo:

- Divide-se o grupo de medidas em intervalos de uma dada amplitude (também chamado de *classe*). Um valor típico para este intervalo é o erro associado a cada uma das medidas individuais.

- Conta-se o número de resultados x_i que ocorrem num dado intervalo (*frequência de ocorrência*, $f(x_i)$)

- Representa-se graficamente $f(x_i)$ em função dos intervalos.

Consideremos o exemplo seguinte:

Exemplo VI. Suponhamos que um grupo de alunos preparou uma experiência com o objectivo de determinar o intervalo de tempo decorrido entre 9 oscilações completas de um pêndulo. Para isso realizou 20 ensaios, cujos resultados se apresentam na tabela II, e cujo histograma se representa na Fig. 4.

(t±0.1) / s		
17.8	*18.0*	*18.2*
18.1	*18.2*	*18.1*
17.9	*18.3*	*18.1*
18.5	*18.0*	*18.1*
18.2	*18.3*	*18.4*
17.9	*18.0*	*18.3*
18.1	*18.2*	

Tabela II

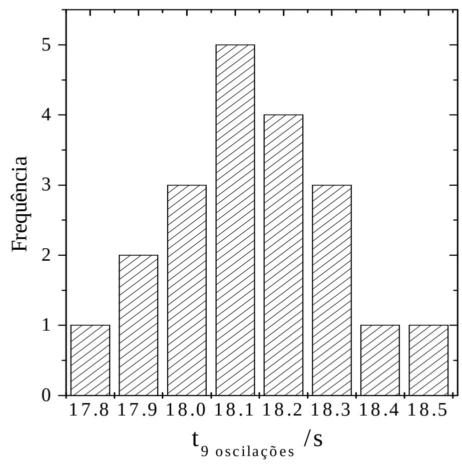


Figura 4

A distribuição de probabilidades normal ou de Gauss

Quando a distribuição de probabilidades da população (obtida para um número infinito de medidas) de uma dada grandeza é conhecida, podemos prever qual a probabilidade de uma nova medida, em condições idênticas, se situar num dado intervalo.

Geralmente um *grande número* ($N \to \infty$) de medidas aleatórias, afectadas apenas por pequenas flutuações aleatórias à esquerda e à direita do valor esperado, é descrito por uma função de distribuição de probabilidades simétrica que se designa de *Gauss ou Normal* e que é descrita pela função:

$$P(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

Algumas características importantes são:

- $P(x)\,dx$ é a probabilidade do resultado ocorrer ente *x* e *x+dx*, sendo que,

$$P(x_i)=\frac{1}{N}\,f(\,x_i\,)$$

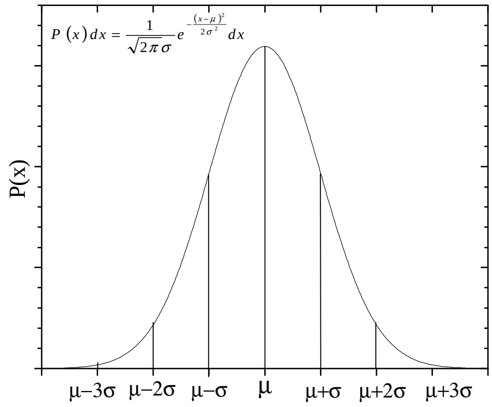


Figura 5

- μ é o valor médio da população (o chamado valor mais provável ou "real")

- σ é o desvio padrão da população (parâmetro que controla a largura da curva)

- *A largura a meia altura da curva é 2.35σ;*
- O valor máximo da curva é $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$;
- As áreas parciais da curva, correspondem a probabilidades de ocorrência de um resultado. Esta distribuição prevê que uma medida ocorra com as probabilidades P_i (%) dadas pela tabela III.

P_i (%)	*Intervalo*
19.5	*[μ; μ+σ/2]*
34.13	*[μ; μ+σ]*
68.27	*[μ-σ; μ+σ]*
95.45	*[μ-2σ; μ+2σ]*
99.73	*[μ-3σ; μ+3σ]*

Tabela III

Analisando a tabela III, verificamos que a probabilidade de ocorrerem valores para além de *μ-3σ* é extremamente baixa, apenas 0.3% das medições se encontram neste intervalo. Isto equivale a dizer que a ***probabilidade acumulada*** é de (100-0.3)% = 99.73%.

4.3.Grandeza medida um número reduzido de vezes (N <10)

Na maioria das situações práticas temos um conjunto limitado de medidas, chamado de *Amostra* (como no caso do *Exemplo VI*) e não uma população ($N \to \infty$). Quando este conjunto de medidas é inferior a 10 medidas, não têm sentido fazer um estudo da dispersão da amostra em torno da média e fazer a estimativa do *desvio padrão*. A incerteza na determinação pode ser determinada usando métodos de aproximação diferentes, consoante o objectivo a que se destina a experiência. Aquele que utilizaremos nas aulas, é considerar a incerteza na medição como o *máximo dos desvios* $d_\mathrm{i} = | x_i - \bar{x} |$.

$$X = \bar{x} \pm \{ Max\, d_i \},$$

- onde **o valor médio**, $\bar{x}$ **,** representa **o valor mais provável** dado por:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_1 + ... + x_N}{N}$$

O tratamento estatístico necessário quando estamos perante um conjunto de N (N ≥10) medidas encontra-se discutido no apêndice B.

5. Medidas Indirectas

5.1.Combinação ou propagação de erros em grandezas independentes

Na maioria das experiências, para atribuir o valor a uma grandeza, medem-se/determinam-se várias quantidades independentes que têm uma incerteza associada. Assim, quando o valor numérico da grandeza é obtido a partir de operações algébricas, feitas sobre valores medidos /determinados com um certo erro, a incerteza no resultado final traduz a propagação dos erros parciais.

Suponhamos que para determinar a grandeza F foram efectuadas medições independentes das grandezas x, y, θ, etc, tal que:

$$F=f\,(x, y\,,\theta, \ldots)$$

Cada uma das grandezas medidas, x, y e θ tem, respectivamente, uma incerteza associada δx, δy, $\delta\theta$, etc (que podem ser por ex. erros de leitura, desvios padrão da média, máximos de desvios, etc). Seja F_0 o valor "real" da grandeza F, dado por

$$F_0 = f\,(x_0, y_0\,, \theta_0, \ldots)$$

O desvio $\delta F \cong F - F_0$ na medição de F determina-se usando o conceito de derivada de uma função:

$$\delta F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{\theta},..)}\delta x \;+\; \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{\theta},..)}\delta y \;+\; \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{\theta},..)}\delta\theta \;+\ldots,$$

onde $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{\theta},..)}$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{\theta},..)}$ e $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{(\bar{x},\bar{y},\bar{\theta},..)}$ denotam, respectivamente, as derivadas parciais da função F em relação à variável x, y e z calculadas nos valores mais prováveis das grandezas medidas. Matematicamente a expressão anterior representa o **Diferencial Total** da função F calculado no ponto $\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}, \ldots\right)$.

Nota: Quando uma derivada é calculada em relação a uma variável, todas as outras "variáveis" funcionam como constantes (valores numéricos).

Quando o número de medidas realizadas para determinar x, y, θ, etc. é pequeno, o erro que têm associado corresponde ao erro de leitura, erro de observação ou ao máximo dos desvios. Então o erro em F é dado pelo **Limite Superior do Erro**.

$$\Delta F = \left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x,y,\theta\ldots)}\right|\Delta x + \left|\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x,y,\theta\ldots)}\right|\Delta y + \left|\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{(x,y,\theta\ldots)}\right|\Delta\theta \;+\ldots$$

5.2.Grandeza determinada a partir da relação entre duas grandezas não independentes.

Em muitas das situações práticas, o experimentador está interessado em estudar duas ou mais grandezas que não são independentes e estabelecer a expressão matemática (relação funcional) que as relaciona. Na maior parte das experiências que se vão realizar nas aulas práticas, é conhecido o enquadramento teórico (modelo) que pode ser usado para descrever os resultados experimentais.

Para explicar a metodologia a seguir, vamos discutir em detalhe o exemplo VII.

Exemplo VII: Determinação da aceleração da gravidade medindo o período, T, de um pêndulo simples para diferentes comprimentos, l, do pêndulo. Um grupo A de alunos realizou uma experiência e obteve os resultados que constam na tabela IV.

(T± 0.05) /s	1.54	1.65	1.69	1.76	1.90	1.97	2.14	2.24	2.28	2.39	2.44	2.55	2.61	2.69
(l ±0.5) /cm	60.0	65.0	70.0	80.0	90.0	100.0	110.0	120.0	130.0	140.0	150.0	160.0	170.0	180.0

Tabela IV

Esta *metodologia* pressupõe:

I. Identificar o modelo que estabelece a relação entre as grandezas medidas e a grandeza que pretendemos determinar

Exemplo VII (cont.): Como terá a oportunidade de aprender, a teoria dá-nos a relação entre as grandezas medidas e a grandeza que pretendemos determinar. Quando se despreza o atrito do ar e quando são usadas pequenas amplitudes de oscilação a relação é:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

II. Utilizar a representação gráfica das grandezas medidas para verificar a sua relação com o modelo previamente estabelecido

A representação gráfica das grandezas medidas é muito útil quando queremos estabelecer a relação entre as mesmas.

O gráfico da Fig. 6 traduz a dependência das grandezas medidas pelo grupo A de alunos. Neste caso como sabemos o valor "real" da aceleração da gravidade ($g=9.81ms^{-2}$) podemos incluir também a representação gráfica, do período "real", que seria esperada no intervalo de comprimentos usados, e assim concluir, por comparação, se a curva teórica (função) se ajusta aos pontos experimentais.

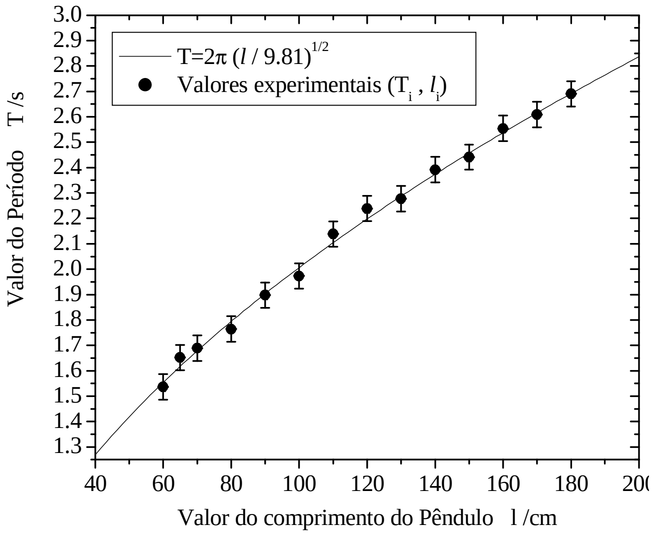


Figura 6

A comparação faz-se considerando o intervalo de incerteza associada a cada par de medidas (T_i, l_i). Este intervalo encontra-se também representado no gráfico da Fig. 6 e é designado por ***Barra de Erro****.*

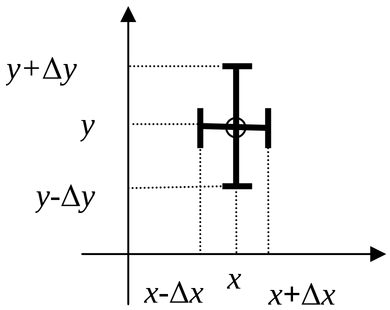
Quando confrontamos a distribuição gráfica dos pontos experimentais (x_i, y_i) com o modelo teórico (ver Fig. 6), é importante encontrar um critério razoável e prático para **rejeitar pontos experimentais** que eventualmente se afastem muito do valor esperado ("real"). Como normalmente é feita uma única medição de x_i e y_i, vamos utilizar, no âmbito das aulas práticas desta disciplina, o seguinte critério:

Um ponto experimental $y_i \pm \Delta y_i$ deve ser rejeitado quando a sua ordenada y_i se afasta do gráfico da função esperada $f(x_i)$, por um valor $\geq 3\Delta y_i$.

Notas sobre a representação gráfica

A representação gráfica de eixos cartesianos XY, vulgarmente utilizada, tem que ser realizada de forma a facilitar a sua análise e por isso deve obedecer a determinados critérios, tais como:

- Conter um título que indique qual a relação entre as variáveis que estão a ser estudadas;
- Nos eixos devem ser indicadas as variáveis e respectivas unidades, usando a notação variável/ unidade (ex. massa/g, aceleração/ ms^{-2}, etc).
- Indicação da escala utilizada em cada eixo. Sempre que possível deve ser escolhida uma escala que permita marcar o último algarismo significativo dos valores, mesmo que que para isso seja necessário manipular os algarismos (por ex. marcar o valor numérico 2.21 pode ser facilitado se observarmos que $2.21=22.1\times10^{-1}$).
- A escala escolhida deve ser tal que o conjunto de pontos experimentais representados ocupe a área disponível (normalmente uma folha de papel milimétrico).
- Os pontos experimentais devem ser marcados com a respectiva barra de erro, ou seja o ($x\pm\Delta x$, $y\pm\Delta y$).



- Conter uma legenda quando necessária, para distinguir diferentes conjuntos de medidas ou evidenciar particularidades do gráfico.

III. Determinação de uma grandeza através dos parâmetros da função de ajuste que descreve o gráfico de pontos: Método dos Mínimos Desvios Quadrados aplicados a uma função do tipo y = mx+b

O gráfico de pontos da Fig. 6 descreve uma função do tipo $y = const \times \sqrt{x}$. A determinação de g através dos parâmetros desta função, ou seja em que T é ordenada e l a abcissa, não é a mais evidente nem a mais acessível de analisar. Quando a relação é linear (isto é, a função que descreve os dados experimentais é uma recta) é relativamente simples determinar o valor de uma grandeza, pois este está relacionado com o declive e/ou com a ordenada na origem.

A. Transformação de uma expressão matemática na forma *y* = *mx* + *b* (linearização)

Quando a expressão que relaciona as grandezas não obedece à equação de uma recta devemos reescrever uma nova função onde as novas variáveis a usar para a abcissa e ordenada no novo sistema de eixos, estejam relacionadas linearmente. Este processo corresponde à linearização de uma expressão matemática. Sempre que possível deve optar-se por um processo que envolva o menor número de cálculos.

Regressando ao exemplo VII, a expressão $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ pode ser linearizada através de:

- Método 1: Representando graficamente *T em função* de $\sqrt{l}$. Neste caso reescrevendo a expressão como $T = \frac{(2\pi)}{\sqrt{g}}\sqrt{l}$, e efectuando a mudança de variáveis $y = T$ e $x = \sqrt{l}$, tem-se a equação de uma recta do tipo $y = mx + b$, cujo declive, *m*, e ordenada na origem, *b*, são respectivamente,

$$m = \frac{(2\pi)}{\sqrt{g}} \qquad \text{e} \qquad b = 0$$

- Método 2: Elevando ao quadrado ambos os termos da equação temos $T^2 = \frac{(2\pi)^2}{g} l$, que através da mudança de variáveis $y = T^2$ e $x = l$ permite a equação de uma recta do tipo $y = mx + b$, cujo declive, *m*, e ordenada na origem, *b*, são respectivamente,

$$m = \frac{(2\pi)^2}{g} \qquad \text{e} \qquad b = 0$$

- <u>Método 3</u>: Aplicação da função logaritmo *ln*.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(T) = \ln\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \ln(T) = \ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) + \frac{1}{2}\ln(l)$$

Neste caso a mudança de variáveis seria,

$$y = ln(T); \qquad x = ln(l); \qquad m = \frac{1}{2}; b = ln\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right);$$

B. Representação dos pontos para a função linearizada e determinação do declive e da ordenada na origem pelo Método dos Mínimos Desvios Quadrados

Suponhamos que para o caso da experiência do *Exemplo VII* escolhíamos o método de linearização tal que:

$$y = T^2$$

$$x = l$$

$$m = \frac{(2\pi)^2}{g} \text{ e } b = 0$$

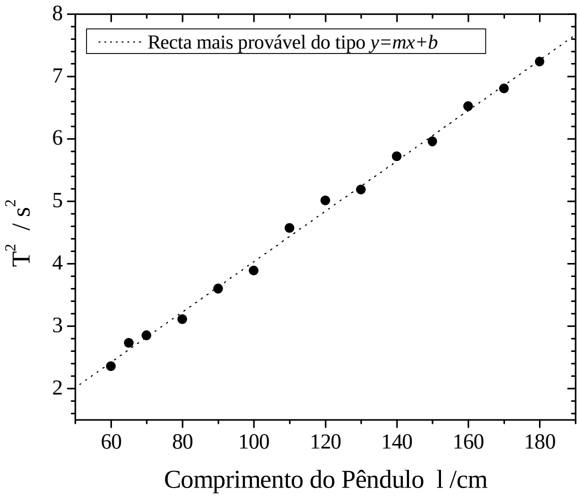


Figura 7

O valor de g pode então ser determinado uma vez conhecido o declive da recta.
No gráfico da Fig. 7 encontram-se representados os pares de valores (T^2, l).

Observando a distribuição dos pontos, verificamos que os nossos olhos conseguem visualizar uma recta média, que se ajusta aos pontos, e para a qual necessitamos de determinar o declive e a ordenada na origem. Existem no entanto métodos analíticos que nos permitem efectuar esses cálculos.

Método dos Mínimos Desvios Quadrados

Um dos métodos mais utilizados para calcular a equação de uma função, que se ajuste a um conjunto de pontos experimentais que evidenciem uma relação entre si, é o chamado Método dos Mínimos Desvios Quadrados (MMDQ). Vejamos em particular a sua aplicação a uma função linear.

Este método pressupõe que apenas a variável escolhida para o eixo dos *YY* está afectada por uma incerteza e exige que os erros que afectam as medições sejam aleatórios. Baseia-se num princípio simples segundo o qual, a recta de ajuste deve ser aquela que minimize a soma dos desvios absolutos $S^2 = \sum_1^N \left(y_i - f(x_i)\right)^2$ onde $f(x_i) = mx_i + b$ é o valor dado pela recta, calculado para a mesma abcissa x_i..

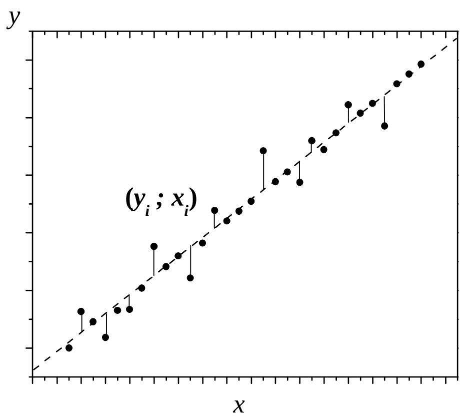


Figura 8

Minimizando S^2 nas variáveis b e m obtêm-se as seguintes expressões para o declive e ordenada na origem da recta de ajuste aos pontos experimentais:

$$b = \frac{\sum_1^N x_i^2 \sum_1^N y_i - \sum_1^N x_i \sum_1^N x_i y_i}{N\sum_1^N x_i^2 - \left(\sum_1^N x_i\right)^2} \qquad \text{e} \qquad m = \frac{N\sum_1^N x_i y_i - \sum_1^N x_i \sum_1^N y_i}{N\sum_1^N x_i^2 - \left(\sum_1^N x_i\right)^2}$$

Nota: Este método baseia-se no pressuposto de que apenas a variável y está afectada por uma incerteza (e de valor constante). Contudo, tendo em atenção os objectivos das disciplinas, admite-se que as situações propostas não colocam em causa o método. Assim nas aulas práticas vamos aplicá-lo escolhendo para o eixo dos XX uma função da variável sobre a qual actuámos directamente. No decurso da sua formação o aluno terá certamente oportunidade de aprofundar os seus conhecimentos sobre a aplicabilidade do MMDQ.

Aplicando este método ao gráfico da Fig. 7 do exemplo VII obtêm-se os seguintes valores para o declive ***m*** e para a ordenada na origem ***b***:

$$m = 0.04031\ s^2cm^{-1} \qquad \text{e} \qquad b = 0.003910\ s^2$$

C. Determinação do erro que afecta os parâmetros da recta de ajuste aos pontos experimentais

Como na prática lidamos com um número reduzido de pontos (**N≤10)** as expressões que a seguir indicamos para o cálculo de erro do declive e da ordenada na origem, devem ser usadas com cuidado, sobretudo se a dispersão dos pontos em relação à recta mais provável for elevada. Estas envolvem um parâmetro estatístico ***r*** (o coeficiente de correlação) usado na avaliação do ajuste aos pontos experimentais. Na situação ideal, ou seja quando os pontos estão todos sobre a mesma recta o valor de $r^2=1$.

$$\Delta m = |m|\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{r^2}-1\right)}{N-2}} \; ; \qquad \Delta b = \Delta m\sqrt{\frac{\sum_1^n x_i^2}{N}}$$

$$r = \frac{N\sum_1^N x_i y_i - \sum_1^N x_i \sum_1^N y_i}{\left[N\sum_1^N x_i^2 - \left(\sum_1^N x_i\right)^2\right]^{1/2}\left[N\sum_1^N y_i^2 - \left(\sum_1^N y_i\right)^2\right]^{1/2}}$$

D. Análise dos valores determinados para (m ± Δm) e (b ± Δb)

Quando comparamos a recta de ajuste determinada, com a função teórica linearizada, temos que avaliar qual o significado físico do valores encontrados para ($m \pm \Delta m$) e ($b \pm \Delta b$).

Voltando ao nosso exemplo onde $y = \frac{(2\pi)^2}{g}x$ (com y =T^2, $x = l$ e $b = 0$) espera-se que, se não existirem erros sistemáticos, o valor esperado da ordenada na origem (neste caso $b = 0$) esteja no intervalo [b - Δb; b + Δb].

Outra situação comum é a linearização efectuada conduzir imediatamente a um valor numérico para o declive. Por exemplo na 3ª hipótese de linearização da expressão em estudo, o declive esperado era $m = \frac{1}{2}$ e deveria estar contido, se não existirem erros sistemáticos, no intervalo [m - Δm; m + Δm].

E. Cálculo da grandeza determinada graficamente e do seu erro.

Conhecendo a equivalência entre os valores obtidos para os parâmetros da melhor recta de ajuste e as expressões que os relacionam com o modelo teórico é trivial obter a melhor estimativa da grandeza procurada. O erro de que vem afectada vai depender dos erros associados aos parâmetros obtidos e pode ser determinado reportando-nos ao **limite superior do erro**.

Apêndice A: Algarismos significativos e arredondamentos

A tabela seguinte mostra, através de exemplos, como se contam os algarismos significativos no valor numérico de uma grandeza

Valor	Nº de algarismos significativos	Observações
102 *s*	3	[a)] **Representação ambígua** pois o zero pode servir só para posicionar a vírgula (**Não deve ser usada**).
40 *mm*	2 ou 1 (?) [a)]	
4.0 *cm*	2	
4 *cm*	1	
4×10^1 *mm*	1	[b)] A redução de unidades deve ser feita usando potências de base 10, para garantir que o n.º de algarismos significativos não é alterado.
0.520 *s*	3	
0.061*s*	2	
2.48 *kg*	3[b)]	
2.48×10^3 *g*	3[b)]	
2480 *g*	3 ou 4 (?) [a)]	
2.480×10^{-3} *kg*	4	
50000 *m*	1 ou 5 (?) [a)]	
50.0×10^3 *km*	3	

Tabela V: Algarismos significativos

Nota: Existem outras regras que poderão ser seguidas desde que utilizadas correctamente

Habitualmente é preciso fazer arredondamentos para satisfazer os critérios quanto ao número de algarismos significativos a reter no resultado final. O arredondamento de um número obedece a determinadas convenções que precisamos de conhecer. Vejamos como utilizar as convenções dos arredondamentos sempre que se apresentar o resultado de uma medição, assumindo que o erro deve **apenas ter um algarismo significativo**.

Convenção para arredondamentos	Exemplos	
	Valor obtido	**Resultado a apresentar**
Se o algarismo à direita do último algarismo significativo a reter for > 5, este é aumentado de uma unidade.	$345.671 \pm 0.23\ m$ $2539 \pm 42.8\ g$	$345.7 \pm 0.2\ m$ $(25.4 \pm 0.4) \times 10^2\ g$
Se o algarismo à direita do último algarismo significativo a reter for = 5 e não existem ou são zero todos os algarismos seguintes, este: Aumenta de uma unidade no caso de ser ímpar. Mantém-se constante se for par.	 $247.50 \pm 3.5\ cm$ $98665 \pm 25\ g$	 $248 \pm 4\ cm$ $(986.6 \pm 0.2) \times 10^2\ g$
Se o algarismo à direita do último algarismo significativo a reter for < 5, este não sofre alterações.	$360.22 \pm 0.23\ cm$ $2539 \pm 42.8\ g$	$360.2 \pm 0.2\ cm$ $(25.4 \pm 0.4) \times 10^2\ g$

Tabela VI: Arredondamentos

Normalmente, os computadores e as máquinas de calcular não apresentam o último digito de acordo com as regras anteriores.

Para evitar erros de arredondamento em ***cálculos intermédios****, deve considerar-se sempre pelo menos mais um algarismo significativo (a.s.) do que o maior número presente nas parcelas/factores da operação algébrica. Por exemplo após o cálculo intermédio* $\frac{10000 \times 0.001cm}{1.00cm + 1.0cm}$ *o valor deverá ter 4 a.s.*

Nota: *Apenas os valores numéricos com unidades associadas devem ser usados para contabilizar o número de algarismos significativos.*

Nota: A discussão sobre algarismos significativos é geral. Aplica-se em todas as situações envolvendo medições de grandezas.

Apêndice B: Grandeza determinada a partir de um grande número de medições (N≥ 10)

1. Medidas directas

Vejamos como determinar o valor mais provável de uma amostra de N ≥ 10 medidas e respectivo erro.

Valor mais provável é dado pelo valor médio, $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_1 + ... + x_N}{N}$$

Dispersão das medidas em torno do valor mais provável: desvio padrão da amostra

Como *indicador da dispersão* das medidas em torno do valor médio é comum usar o d*esvio padrão da amostra,* σ_{N-1},

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N-1}}$$

onde $d_i = \left|x_i - \bar{x}\right|$ representa **o desvio** da determinação x_i em relação ao valor médio.

Note que quando **N→** ∞, σ_{N-1} tende para o valor do desvio padrão da população σ dado por:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N}}$$

Incerteza no valor médio: erro padrão da amostra

Quando a amostra é representativa da população (função de distribuição de probabilidades da grandeza medida), verifica-se que aumentar o número de medidas não altera significativamente o desvio padrão da amostra (*ver exercício 2*).

Então qual é o objectivo de aumentarmos o número de medições?

Verifica-se que aumentando o número de medidas diminuímos o erro (a incerteza) que temos na própria determinação do valor médio. A incerteza que afecta a média é dada pelo erro padrão da amostra, S_{N-1}:

$$S_{N-1} = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}$$

e a apresentação do resultado de duma grandeza X obtida por N determinações ($N \geq 10$) vem como:

$$X = \bar{x} \pm S_{N-1}$$

2. Medidas indirectas

Quando para determinar a grandeza F definida por:

$$F = f\,(y, x, \theta, \ \ldots),$$

cada uma das grandezas x, y, θ, etc, foi medida $N \geq 10$ vezes, torna-se possível determinar o erro estatístico (desvio padrão da amostra e erro padrão da amostra) de cada uma dessas grandezas independentes. Neste caso, uma estimativa mais realista do erro na grandeza F é obtida usando o ***erro padrão da amostra*** de cada uma das grandezas independentes, através da expressão:

$$s_{N-1}^{F} = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x,y,\theta,.)..} s_{N-1}^{x}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x,y,\theta,.)..} s_{N-1}^{y}\right)^2 + \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{(x,y,\theta,.)..} s_{N-1}^{\theta}\right)^2 + \ldots.}$$

3. Avaliação quantitativa da exactidão de um resultado experimental obtido a partir de um conjunto N ($N \geq 10$) medidas.

i) Conhece-se o valor "real", µ

A utilização da distribuição de Gauss para estabelecer intervalos de confiança de um conjunto limitado de observações não é a mais adequada. Na prática usa-se uma outra distribuição - a distribuição ***t-student*** - que depende do número de medições e que tende para a *distribuição de Gauss reduzida* quando N→∞.

Para testar se o valor médio, $\bar{x}$ é estatisticamente diferente do valor "real",μ, usa-se o parâmetro ***t*** dado por:

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{S_{N-1}};$$

O valor encontrado para o parâmetro ***t*** é comparado com os valores de $\boldsymbol{t_o}$, determinados, para *n = N-1* graus de liberdade, que constam da tabela distribuição de probabilidades ***t-student***. Os ***intervalos de confiança*** são conseguidos calculando, por exemplo, a área bilateral i.e. a probabilidade de ocorrência de $\bar{x}$, para um dado valor $\boldsymbol{t_o}$, $P(\mu - t_0 S_{N-1} < \bar{x} < \mu + t_0 S_{N-1})$. O valor de $\boldsymbol{t_o}$ tem então o significado de um desvio, $\boldsymbol{t_o \times S_{N-1}}$, em relação ao valor "real".

Para clarificar melhor a aplicação desta distribuição, vejamos como utilizar o critério *t-student* nas seguintes situações:

(1) *Medição da distância focal de uma lente convergente cujo valor indicado pelo fabricante é de 10.0 cm.* Uma vez realizados 12 ensaios foi determinado o valor médio $\bar{f} = 10.6\,cm$ e $\sigma_{N-1}=0.9\ cm$. Poderá este resultado ser estatisticamente diferente do valor dado pelo fabricante? Neste caso o valor calculado é $t = \frac{|10.6 - 10.0|}{0.9/\sqrt{12}} = 2.309$, o que, se usarmos a Tabela VII para 10-1=9 graus de liberdade, equivale a um intervalo de confiança de ~ 96%. O que significa que a probabilidade do valor indicado pelo fabricante poder estar fora do intervalo $\bar{f} \pm 0.9\,cm$ é de (100%-96%) = 4%.

(2) *Podemos ainda usar a distribuição t-student para estabelecer o intervalo dentro do qual deve ocorrer o valor esperado,* $\bar{x} - t\, s_{N-1} < \mu < \bar{x} + t\, s_{N-1}$. Suponhamos que se estabelecia um intervalo de confiança a 98 %, isto significa que se aceita o resultado de uma medição em que a probabilidade do valor esperado estar fora desse intervalo é apenas de 2%. Neste caso para 9 graus de liberdade o valor de *t* não pode exceder 2.82. Aplicado ao exemplo da medição da distância focal, teríamos um intervalo de confiança de $\bar{f} \pm (2.82 \times S_{N-1}) = 10.6 \pm \left(2.82 \times \frac{0.9}{\sqrt{12}}\right)$ e assim ter-se-ía $9.87 < f < 11.3\,cm$.

Tabela VII: Probabilidades da distribuição *t-Student: valores do parâmetro* t_0							
$P_{bilateral}$ / *n*	***Probabilidades calculadas num Intervalos de confiança***						
	0.200	***0.400***	***0.600***	***0.800***	***0.900***	***0.960***	***0.980***
5	*0.267*	*0.559*	*0.920*	*1.476*	*2.015*	*2.757*	*3.365*
9	*0.261*	*0.543*	*0.883*	*1.383*	*1.883*	*2.398*	*2.821*
10	*0.260*	*0.542*	*0.879*	*1.372*	*1.812*	*2.359*	*2.764*
20	*0.257*	*0.533*	*0.860*	*1.325*	*1.725*	*2.197*	*2.528*
30	*0.256*	*0.530*	*0.854*	*1.310*	*1.697*	*2.147*	*2.457*
50	*0.255*	*0.528*	*0.849*	*1.299*	*1.676*	*2.109*	*2.403*

ii) Concordância entre dois conjuntos de medidas, X e Y

Muitas vezes acontece não termos conhecimento do valor “real”, mas sim de uma determinação obtida por outrem, também ela com um erro. A concordância entre os dois conjuntos de medidas, *X* e *Y*, pode ser inspeccionada usando diferentes métodos de acordo com a natureza de cada uma das amostras usadas. Segue-se a discussão das situações mais comuns que o aluno encontra na sua actividade laboratorial:

1. Cada um dos conjuntos de medidas tem uma distribuição gaussiana e o valor do desvio padrão, σ, é conhecido. Serão os valores médios concordantes?

Neste caso, avaliar se Y e X são ou não o mesmo valor equivale a saber se $X - Y$ é compatível com o valor zero. Seja $Z = X - Y$, uma nova variável, cujo desvio padrão, σ_Z é dada por:

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \ ,$$

onde σ_X e σ_Y são os desvios padrões associados a X e Y.

Considera-se que os valores médios são concordantes quando $|X - Y| < 3\sigma_Z$.

2. Cada um dos conjuntos de medidas tem uma distribuição gaussiana, cujo valor do desvio padrão, σ, é igual mas desconhecido. Serão os valores médios concordantes?

Quando os valores médios $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ são obtidos a partir de uma amostra de N_x e N_y elementos, respectivamente, os desvios padrão da amostra, $\sigma^{X}{}_{N-1}$ e σY_{N-1} podem ser usados para estimar o σ, da população. Como estamos a usar uma estimativa de σ, teremos que utilizar a distribuição ***t-student*** à semelhança do que aconteceu anteriormente. Define-se então o parâmetro ***t*** como:

$$t = \frac{\left|\overline{X} - \overline{Y}\right|}{S\sqrt{\left(\frac{1}{N_X}\right) + \left(\frac{1}{N_Y}\right)}},$$

com $S = \frac{(N_X - 1) \times \left(\sigma_{N-1}^{X}\right)^2 + (N_Y - 1) \times \left(\sigma_{N-1}^{Y}\right)^2}{(N_X + N_Y - 2)}$.

Uma vez calculado o parâmetro ***t***, recorre-se às tabelas da distribuição ***t-student*** para obter o intervalo de confiança, determinado para $n = N_X + N_Y - 2$ graus de liberdade, uma vez que o valor "real" e desvio padrão são desconhecidos. Se o intervalo de confiança encontrado for adequado às exigências da experiência, então conclui-se que os valores médios são concordantes.

Apêndice C: Tabela Síntese para análise de dados

Resultado de uma medição	$X = \overline{X} \pm \Delta X$ (unidades)
Valor mais provável	$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \dfrac{x_1 + x_1 + \ldots + x_N}{N}$
N = 1 medições **Erro ΔX**	$>$ *de entre* $\Delta x_{\mathbf{obs}}$ / $\Delta x_{\mathbf{inst}}$
Desvio em relação à média	$d_{\mathrm{i}} = \lvert x_i - \overline{x} \rvert$
1<N <10 medições **Erro ΔX**	*É máximo dos desvios* $\{ Max\ d_i \}$
Propagação de erros **Erro ΔF numa grandeza $F=f\,(x,y,\theta,..)$**	**Limite superior do erro** $\Delta F = \left\lvert \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{(x,y,\theta \ldots)} \right\rvert \Delta x + \left\lvert \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{(x,y,\theta \ldots)} \right\rvert \Delta y + \left\lvert \left(\dfrac{\partial F}{\partial \theta}\right)_{(x,y,\theta \ldots)} \right\rvert \Delta \theta \quad + \ldots$
Ajuste linear ($y = mx + b$) a um conjunto de dados experimentais (X_i, Y_i) **Declive ($m \pm \Delta m$)**	$m = \dfrac{N\sum_1^N x_i y_i - \sum_1^N x_i \sum_1^N y_i}{N\sum_1^N x_i^2 - \left(\sum_1^N x_i\right)^2}$ $\Delta m = \lvert m \rvert \sqrt{\dfrac{\left(\dfrac{1}{r^2} - 1\right)}{N-2}}$
Ordenada na origem ($b \pm \Delta b$)	$b = \dfrac{\sum_1^N x_i^2 \sum_1^N y_i - \sum_1^N x_i \sum_1^N x_i y_i}{N\sum_1^N x_i^2 - \left(\sum_1^N x_i\right)^2}$ $\Delta b = \Delta m \sqrt{\dfrac{\sum_1^n x_i^2}{N}}$
Coeficiente de correlação r	$r = \dfrac{N\sum_1^N x_i y_i - \sum_1^N x_i \sum_1^N y_i}{\left[N\sum_1^N x_i^2 - \left(\sum_1^N x_i\right)^2\right]^{1/2} \left[N\sum_1^N y_i^2 - \left(\sum_1^N y_i\right)^2\right]^{1/2}}$

Apêndice D: Planificação de uma experiência e elaboração do relatório

1. Como planear uma experiência

Planear e realizar uma experiência é uma actividade fascinante que consome muito tempo. Movidos pela curiosidade, muitas vezes somos levados iniciar o registo de dados sem que todo o procedimento esteja bem pensado. Raramente tal atitude conduz as medições correctas e em número suficiente, que possibilitem uma boa análise dentro da precisão exigida. Para evitar que tal aconteça, é importante que um experimentalista elabore uma lista de controlo da sua experiência. Segue-se uma proposta de lista de controlo que o aluno deve ter presente na actividade laboratorial:

a) Definir os objectivos da experiência, i.e. elaborar uma lista das questões fundamentais que pretende ver respondidas.
b) Identificar todas as fontes de variabilidade, i.e. tudo que cause que o valor numérico de uma observação seja diferente de uma outra.
c) Seleccionar uma amostra que seja representativa, nas condições de variabilidade seleccionadas, para o estudo de um dado fenómeno.
d) Especificar o tipo de medidas, o procedimento experimental, e antecipar dificuldades.
e) Realizar uma experiência piloto, i.e realizar 2 ou três observações. Neste exercício adquire-se prática na técnica, identificam-se problemas imprevistos e permite estimar o número de ensaios necessários.
f) Especificar um modelo que se julga existir entre as grandezas que se vão estudar.
g) Esboçar as linhas gerais do processo de análise.
h) Estimar o número de observações necessárias.
i) Rever todas as decisões anteriores se necessário.
j) A experiência pode começar ☺

2. Como elaborar um relatório

O esquema a seguir apresentado destina-se a orientar os alunos sobre o conteúdo dos vários assuntos que compõem o relatório e, por isso, não deverá ser tomado à letra. Em muitos casos pode e deve ser simplificado. Por exemplo, é frequente que devido a particularidades ou complexidades do método experimental utilizado seja mais claro apresentar o diagrama do dispositivo na introdução teórica, etc.

Seja claro, preciso e conciso na escrita dos relatórios. Durante a elaboração do relatório tenha sempre bem presente qual é o objectivo do trabalho.

Título do trabalho

Identificação

- Autores (nome, número mecanográfico, turma e grupo)
- Data de realização

Sumário (2 parágrafos)

- Objectivos principais do trabalho e qual a metodologia adoptada para os atingir.
- Indicar se existe acordo (ou desacordo) dos resultados obtidos com os esperados, tendo em atenção a precisão e/ou exactidão dos mesmos.

Introdução Teórica (1 a 3 parágrafos)

- Leis a verificar experimentalmente.
    - Enunciado (pode ser acompanhado de breves considerações que o tornem plausível)
    - Fórmula que a traduz (e significado físico dos símbolos que nela intervêm)
- Grandezas físicas a determinar.

Procedimento experimental

- Diagrama do dispositivo usado explicando qual o papel desempenhado por cada um dos componentes da experiência
- Procedimento seguido na execução do trabalho e quais as medições a realizar
- Cuidados a ter durante a experiência para melhorar as condições de medida.

Apresentação de Resultados

- Tabelas
    - De valores lidos directamente e/ou obtidos a partir destes por cálculos simples (valores médios, desvios, etc; no caso de serem tabelas muito extensas, estas devem ser apresentadas em apêndice, anexado no final do relatório)

- As tabelas devem ser acompanhadas das explicações e legendas necessárias à sua interpretação.

- Medidas directas expressas sob a forma: $X = x \pm \Delta x$ (para a grandeza X)
- Gráficos

Análise de Resultados

- Cálculos utilizados no método dos mínimos desvios quadráticos
- Cálculos finais das grandezas físicas a determinar e respectivos erros
- Comparação dos resultados obtidos com os resultados esperados (valores tabelados, valores teóricos, valores padrão, etc.)

Discussão e conclusão

- Resultados finais
- Conclusões baseadas nos resultados obtidos
- Comentários sobre eventual desacordo entre os resultados obtidos e os esperados (factores ligados à realização prática do trabalho susceptíveis de explicar tal desacordo, etc.)
- Crítica ao trabalho e sugestões para melhorá-lo (se necessário)

Bibliografia

- Faça referência aos documentos consultados para a realização do trabalho

Apêndice E: Tabela de derivadas consideradas fundamentais no âmbito da disciplina

Nota: As *u = u(x)* e *v = v(x)* designam funções de uma variável, *x* e *u'(x)=u'* $\equiv \frac{du}{dx}$ e *v'(x)=v'* $\equiv \frac{dv}{dx}$ as respectivas derivadas e k designa uma constante.

Função total $y\,(u,v)$	Derivada $y'(u,v) \equiv \frac{dy}{dx}$
$y = k$	$y' = 0$
$y = ku$	$y' = ku'$
$y = u + v$	$y' = u' + v'$
$y = u \times v$	$y' = [u' \times v] + [u \times v']$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \times v - u \times v'}{[v]^2}$
$y = [u]^k$	$y' = k \times [u]^{k-1} \times u'$
$y = k^u$	$y' = k^u \ln(k) \times u'$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = e^u$	$y' = e^u u'$
$y = sen\,u$	$y' = cos(u) \times u'$
$y = \cos u$	$y' = -sen(u) \times u'$
$y = tg\,u$	$y' = \sec^2(u) \times u'$

Apêndice F: Exercícios Complementares

1. Escreva correctamente cada um dos seguintes valores medidos, considerando que o erro deve ter no máximo um algarismo significativo.

$a = 345 \pm 0.251$ mm

$b = 2{,}47 \pm 0.25$ g

$c = 2534.5 \pm 48.02$ m

$d = 6000004 \pm 2700$ nm

$e = 6483750 \pm 2500$ mA

$f = 22 \pm 893$ V

2. Na tabela seguinte são apresentados 40 medidas do tempo que um corpo demorou, partindo do repouso, a cair na vertical de uma determinada altura

$(t \pm 0.01)$ / s							
1.78	1.58	1.65	1.35	1.56	1.25	1.63	1.45
1.56	1.54	1.11	1.25	1.78	1.24	1.89	1.44
1.52	1.74	1.44	1.24	1.56	1.33	1.56	1.56
1.63	1.35	1.56	1.33	1.52	1.45	1.58	1.25
1.89	1.56	1.25	1.74	1.11	1.56	1.54	1.65

i) Qual o erro associado a cada medida individual do tempo de queda?

ii) Determine, o valor médio, o desvio padrão, o desvio padrão da amostra, o erro padrão da amostra e o erro relativo do tempo de queda:

a) para as 20 primeiras medidas individuais de t (4 primeiras colunas),

b) para o conjunto total das 40 medidas individuais de t.

	$\bar{t}$ /___	$\sigma_n(\bar{t})$ /___	$\sigma_{n-1}(\bar{t})$ /___	$s_{n-1}(\bar{t})$ /___	$\frac{\Delta \bar{t}}{\bar{t}} \times 100$
$t_{(20\ medidas)}$					
$t_{(40\ medidas)}$					

iii) Compare e comente os resultados obtidos.

3. Sejam $u(x)$ e $v(x)$ duas funções. Escreva para cada uma das seguintes alíneas as expressões que dão as derivadas totais da função $f(x)$ definida por:

i) $f(x)=u(x)+v(x)$	iv) $f(x)=u(x)v(x)$
ii) $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$	v) $f(x)=u(x)\cos(v(x))$
iii) $f(x)=u(x)^{v(x)}$	

4. Escreva a expressão para o Diferencial Total das grandezas seguintes, se conhecidas as incertezas de cada uma das grandezas independentes. (Se necessário consulte a tabela de derivadas, dada em anexo).

i) $s = a + b + c$

ii) $V = abc$

iii) $\rho = \dfrac{m}{V}$

iv) $V = \pi R^2 h$

v) $h = l\cos\theta$

5. Prove que no caso de ter uma grandeza F, que depende das grandezas independentes x, y, z de acordo com a expressão:

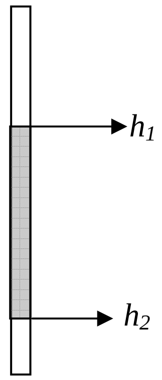
$F = x^{\alpha} y^{\beta} z^{\chi}....$ (*os índices α, β e χ poder ser positivos ou negativos*),

o erro relativo de F calculado para um número pequeno de medições de x, y e z é dado por:

$$\left|\frac{\Delta F}{F}\right| = \left|\alpha\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\beta\frac{\Delta y}{y}\right| + \left|\chi\frac{\Delta z}{z}\right| + ...$$

6. O diâmetro interno de um tubo capilar foi determinado, através da altura de uma pequena quantidade de mercúrio nele introduzida.

   As observações foram as seguintes:



h_1..109.26 ± 0.02 mm

h_2..58.26 ± 0.02 mm

massa do tubo capilar vazio (m_v)....................6.610 ± 0.002 g

massa do tubo capilar com o mercúrio (m)..... 6.884 ± 0.002 g

Assumindo que a massa volúmica do mercúrio é 13.6 g/cm^3 ±1%, calcule o diâmetro do tubo e o respectivo erro experimental.

7. A altura *h* a que se eleva uma coluna de água, num tubo de vidro de pequeno diâmetro aberto em ambas as extremidades, é dada pela expressão

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R} \text{ (Lei de Jurim), onde}$$

   - σ representa a tensão superficial do líquido;
   - ρ representa a massa volúmica do líquido
   - R é o raio interno do tubo.

Descreva uma experiência que conduza à determinação da tensão superficial da água, usando os parâmetros de uma função representada graficamente, identificando:

i) Material necessário e instrumentos de medida adequados;

ii) Montagem do dispositivo experimental;

iii) Medições directas a realizar;

iv) Tratamento de dados.

8. Para determinar o coeficiente de expansão do ar seco (a pressão constante) mediu-se a coluna de ar retida num tubo capilar uniforme, *h*, a diferentes valores de temperatura. Os resultados estão indicados na tabela seguinte.

(T ±0.1) /ºC	(h±1) /mm
23.3	71
32.0	73
41.0	75
53.0	78
62.0	80
71.2	82
87.0	86
99.0	89

Sabendo que as grandezas medidas se relacionam com o coeficiente de expansão do ar (α_{ar}) pela expressão:

$h(T) = h_0(1+\alpha_{ar}T)$, ($h_0$, a altura da coluna de ar a T=0ºC)

i) Represente graficamente as grandezas medidas.

ii) Calcule, através dos parâmetros da função de ajuste aos pontos experimentais, os valores das constantes h_0 e α_{ar}.

9. Um grupo B de alunos realizou uma experiência para determinar a velocidade do som no ar. Na tabela seguinte está indicado o conjunto de determinações obtidas.

(v_i±2) /ms^{-1}	$d_i = \lvert v_i - \overline{v} \rvert$
356	
319	
356	
375	
342	
355	
340	
337	
340	
333	
$\overline{v} =$	

a) Calcule o valor médio e o desvio associado cada determinação.

b) Considere o resultado v_4=375±2 ms^{-1}. Recordando o que aprendeu sobre as distribuições de probabilidade de uma determinação experimental, diga, se esta medição pode ser considerada pelo grupo como resultado de um erro "grosseiro" e portando deve ser desprezada.

c) Sabendo que o valor esperado é de 340 ms^{-1} (nas mesmas condições de temperatura), o que conclui quanto à exactidão do resultado quando o limite de confiança é ~95%. (consulte a tabela XIII).

Bibliografia

[1] R.M White e J.Yarwood, em *Experimental Physics for Students,* Chapman and Hall, Londres, 1973.

[2] M.C.Abreu, L.Matias e L.F. Peralta, *Em Física Experimental Uma introdução*, 1ªed, Editorial Presença, Lisboa, 1994.

[3] P. R. Bevington, em *Data Reduction and Error Analysis for the physical science*, McGraw-Hill, London, 1969.

[4] V. Bonifácio em *Guia do Tratamento dos Dados Experimentais - Apontamentos da disciplina de Física Geral*, 2003.

[5] N.C. Barford, *Experimental measurements: Precision, Error and Truth*, 2ªEd, John Wiley & Sons, New York (1985).

[6] G. Almeida, *Sistema Internacional de unidades (SI)-Grandezas e Unidades Física, terminologia, símbolos e recomendações*, 1ªEd., Plátano Editora, Lisboa (1988).