1. Séries numéricas

(Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no Capítulo 3 dos Apontamentos de Cálculo II da Prof. Doutora Virgínia Santos (disponíveis no Moodle))

Universidade de Aveiro, 2023/2024

Cálculo II – C

Séries numéricas

Definição: Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de números reais. A expressão

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

chama-se série gerada pela sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. A série também pode ser representada por

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n\geq 1} a_n.$$

Dizemos que a_n é o termo geral da série.
Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

A sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chama-se sucessão das somas parciais

Convergência de uma série

Definição: Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se

$$\lim_{n\to+\infty} S_n$$

existe e é finito. Neste caso, chama-se soma da série ao valor desse limite e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

Se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ não existe ou é infinito, dizemos que a série é divergente.

Séries numéricas

Exercício: Indique a natureza das seguintes séries e, em caso de convergência, calcule a sua soma:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

Observação: O estudo das séries numéricas é composto por duas vertentes:

- determinar a natureza da série (convergência ou divergência da série);
- no caso de convergência, calcular a soma da série.

O cálculo da soma de uma série convergente não é, em geral, possível dada a dificuldade em determinar o limite da sucessão das somas parciais.

Há dois exemplos de séries para as quais é possível calcular a sua soma, caso sejam convergentes: são as séries geométricas e as séries de Mengoli.

Séries geométricas

Definição: Chama-se série geométrica a toda a série que é gerada por uma progressão geométrica, ou seja, trata-se de uma série do tipo:

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1},$$

onde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ é o primeiro termo da série e $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a razão.

Observação: Note-se que o termo geral da sucessão de somas parciais é dado por

$$S_n = \begin{cases} na & \text{se } r = 1 \\ \\ \dfrac{1-r^n}{1-r}a & \text{se } r \neq 1. \end{cases}$$

Séries geométricas

Proposição: A série geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ converge se e só se $|r| < 1$. Em caso de convergência, a soma é dada por $\dfrac{a}{1-r}$.

Exercício: Verifique se as seguintes séries são convergentes e, em caso afirmativo, determine a sua soma:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{e}\right)^n$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$

Séries de Mengoli

Definição: Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se série de Mengoli (ou redutível ou telescópica) se o seu termo geral se puder escrever numa das seguintes formas:

$$a_n = u_n - u_{n+p} \quad \text{ou} \quad a_n = u_{n+p} - u_n$$

onde $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão e $p \in \mathbb{N}$.

Observação: No caso em que $a_n = u_n - u_{n+p}$, temos que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+p}) = u_1 + \cdots + u_p - (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}).$$

No caso em que $a_n = u_{n+p} - u_n$, temos que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_{k+p} - u_k) = u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} - (u_1 + \ldots + u_p).$$

Séries de Mengoli

Exercício: Estude a natureza das seguintes séries e, em caso de convergência, determine a sua soma:

1. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$
2. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(\frac{n}{n+2} \right)$$
3. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right)$$
4. $$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+2} \right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n} \right) \right)$$
5. $$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$$

Séries numéricas

Observação: O estudo da natureza de uma série pode ser feito sem recurso à construção explicita da sucessão das somas parciais $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, recorrendo a **testes** ou **critérios de convergência**.

Teorema: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente se e só se a série

$$R_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n$$

(série dos termos após m) é convergente. Adicionalmente, se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, então

$$\lim_{m\to+\infty} R_m = 0.$$

Nota: A R_m chamamos **resto de ordem** m da série.

Propriedades das séries numéricas

Observação: O teorema anterior afirma que a natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos, isto é, as séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n$$

ou são ambas convergentes ou ambas divergentes.

Teorema: A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e só se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m, n \in \mathbb{N} : m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Condição necessária de convergência

Teorema (Condição necessária de convergência): Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Observação: O resultado anterior é considerado como um primeiro critério para estudar a natureza de uma série. Na verdade, o critério é útil na sua forma contrapositiva, isto é:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} a_n \text{ não existe} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ é divergente}}$$

revelando-se, assim, como um "critério de divergência".

Note-se que se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, nada se pode concluir sobre a natureza da série.

Limites notáveis úteis no estudo da natureza de uma série numérica

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1 \quad (p \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b \quad (b \in \mathbb{R})$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty \quad \text{se} \quad a > 1 \quad (k \in \mathbb{R})$$

Natureza de uma série

Exercício: Analise a natureza das séries seguintes:

1. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \cos(n)$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n!}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{2n}$

Propriedades aritméticas das séries numéricas

Teorema:

- Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries numéricas convergentes com somas A e B, respetivamente. Então a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e tem soma $A + B$, isto é,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = A + B.$$

- Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e tem soma A, então, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ é convergente e tem soma λA, isto é,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lambda A.$$

Propriedades aritméticas das séries numéricas

Teorema:

- Seja $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n$ é divergente.
- Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ é divergente.

Observação: Note-se que o último resultado nada afirma quanto ao caso de ambas as séries serem divergentes. Na verdade, a série resultante $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ tanto pode ser convergente como divergente.

Exercício: Verifique se as seguintes séries são convergentes e, em caso afirmativo, determine a sua soma:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 50 \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(2^n - \frac{1}{2^n}\right)$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{7}{11}\right)^n + \left(\frac{10}{3}\right)^n\right]$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n}$

Séries de termos não negativos

Definição: Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma série de termos não negativos se $a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então a sucessão das somas parciais associada à série é monótona crescente.

Teorema: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então, a série é convergente se e só se a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.

Critério do Integral

Teorema: (Critério do Integral) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função decrescente e tal que $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

têm a mesma natureza.

Exercício: Estude a natureza das seguintes séries:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$
3. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

Série harmónica de ordem p

Observação: A condição necessária de convergência e o Critério do Integral permitem concluir que a série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

converge se e só se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$.

Esta série é conhecida como série harmónica de ordem p ou série de Dirichlet de ordem p e é muito útil para estudar a natureza de outras séries numéricas.

Critério da Comparação

Teorema (Critério da Comparação): Suponha-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0.$$

Então:

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

Observação: Convém notar que, se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ for divergente ou $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ for convergente, nada se pode concluir.

Critério do Limite

Teorema (Critério do Limite): Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Suponha-se que existe o limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Então verificam-se as condições seguintes:

- se $L \in \mathbb{R}^+$, então as séries têm a mesma natureza.
- se $L = 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- se $L = +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Critério do Limite

Observação: Podemos assim concluir que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ funciona como referência, sendo necessário conhecer à partida a sua natureza. A escolha desta série é normalmente sugerida pela forma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Em muitas situações, as séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ ou as séries geométricas revelam-se de grande utilidade (como referência).

Exercícios

Exercício: Use o Critério da Comparação ou o Critério do Limite para estudar a natureza das séries seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{n^4}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^3}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{17n-13}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10n^2}{n^6+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{37n^3+2}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^4(n-1)}{n^{3/2}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{n}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\cdot\sqrt[n]{n}}$

Convergência simples e absoluta

Definição: Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a correspondente série dos módulos.

(a) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se absolutamente convergente.

(b) Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge mas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diz-se simplesmente convergente.

Teorema: Toda a série absolutamente convergente é também convergente.

Observação:

(a) Realça-se que se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ diverge, então nada se pode concluir sobre a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Esta pode ser convergente ou divergente.

(b) Como $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é uma série de termos não negativos, então podemos aplicar os critérios vistos anteriormente para estudar a sua natureza.

Convergência simples e absoluta

Exercício: Verifique se as séries seguintes são absolutamente convergentes:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{e^n}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

Critério de D'Alembert ou Critério do Quociente

Teorema (Critério de D'Alembert ou Critério do Quociente) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais não nulos e

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

- se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.
- se $L > 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Nota: se $L = 1$, nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

Critério de Cauchy ou Critério da Raiz

Teorema (Critério de Cauchy ou Critério da Raiz) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais e

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

- se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.
- se $L > 1$, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Nota: se $L = 1$, nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

Exercícios

Exercício: Estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!n^2}{(2n)!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{3^{n^2}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{4}{3}\right)^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n! + 1}{n^n}$

Critério de Leibniz

Definição: Uma série alternada é uma série onde os seus termos são alternadamente positivos e negativos, ou seja, uma série do tipo

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

onde $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema (Critério de Leibniz): Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ tal que:

- $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é monótona decrescente.

Então a série alternada é convergente.

Critério de Leibniz

Exercício: Estude a natureza das seguintes séries. Em caso de convergência, indique se a convergência é simples ou absoluta.

1. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n}$
2. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$