

# MATEMÁTICA DISCRETA

---

Ano Letivo 2023/24      (Versão: 10 de Março de 2024)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro  
<https://elearning.ua.pt/>

**CAPÍTULO 2**  
**PRINCÍPIOS DE ENUMERAÇÃO**  
**COMBINATÓRIA**

# **INTRODUÇÃO**

**Exemplo**

- Quantas sequências binárias de comprimento  $n$  existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos  $1, \dots, 9$ ?
- Quantas maneiras existem de colocar  $k$  bolas em  $n$  caixas?
- Quantas sequências binárias com  $k$  uns e  $n - 1$  zeros existem?
- Sejam  $k, n \in \mathbb{N}$ . A equação  $x_1 + \dots + x_n = k$  tem quantas soluções com  $x_i \in \mathbb{N}$ ?
- Sejam 50 pessoas numa sala de  $7 \text{ m} \times 7 \text{ m}$ . Então, há duas pessoas que estão a uma distância inferior a 1.5 metros entre elas?
- ...

### Definição

Seja  $f: A \longrightarrow B$  uma função. Então,  $f$  diz-se

- **injetiva** quando, para todos os  $x, y \in A$ :  $f(x) = f(y) \implies x = y$ .
- **sobrejetiva** quando todo o  $y \in B$  é imagem de algum  $x \in A$ ; isto é, para todo o  $y \in B$  existe um  $x \in A$  com  $f(x) = y$ .
- **bijetiva** quando  $f$  é injetiva e sobrejetiva.

### Definição

Uma função  $f: A \longrightarrow B$  diz-se **invertível** quando existe uma função  $g: B \longrightarrow A$  com  $g \circ f = \text{id}_A$  e  $f \circ g = \text{id}_B$ .

### Teorema

$f: A \longrightarrow B$  é invertível se e somente se  $f$  é bijetiva.

### Nota

Para um conjunto finito  $A$ , denota-se por  $|A|$  o número de elementos de  $A$ .

1. O princípio da gaiola dos pombos
2. O princípio da bijeção
3. Os princípios da adição e da multiplicação
4. Generalizações
5. O princípio da bijeção (outra vez)

# **1. O PRINCÍPIO DA GAIOLA DOS POMBOS**

## A ideia

$n$  pombos voam para  $m$  gaiolas. Se  $n > m$ , então pelo menos uma gaiola irá ter mais de um pombo.

---

Também conhecido como «o princípio das gavetas de Dirichlet». Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), matemático alemão.

## Mais formal

Sejam  $A$  um conjunto e  $(A_1, \dots, A_m)$  uma sequência de subconjuntos de  $A$  dois a dois disjunta com

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m.$$

Se  $|A| > m$ , então  $|A_i| > 1$  para algum  $1 \leq i \leq m$ .

## Formulação alternativa

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos e  $f: A \rightarrow B$  uma função. Se  $|A| > |B|$ , então existem dois elementos  $x_1, x_2 \in A$  com  $f(x_1) = f(x_2)$  ( $f$  não é injetiva).

A contraposição é «mais óbvia»: Se  $f: A \rightarrow B$  é injetiva, então  $|A| \leq |B|$ .



**Exemplo**

*Há duas pessoas aqui na sala que fazem anos no mesmo mês.*

Consideremos a função

$$\begin{aligned} f: \{\text{pessoas na sala}\} &\longrightarrow \{\text{janeiro}, \dots, \text{dezembro}\}, \\ p &\longmapsto \text{o mês do nascimento de } p \end{aligned}$$

com

$$|\{\text{janeiro}, \dots, \text{dezembro}\}| = 12$$

e

$$|\{\text{pessoas na sala}\}| > 12 \quad (\text{espero}).$$

Logo,  $f$  não é injetiva.

**Exemplo**

*Sejam 50 pessoas numa sala de  $7\text{ m} \times 7\text{ m}$ . Então, há duas pessoas que estão a uma distância inferior a 1.5 metros entre elas.*

Dividimos a sala em quadrados «unitários» e consideremos a função

$$\begin{aligned} f: \{\text{as pessoas na sala}\} &\longrightarrow \{\text{os quadrados}\} \\ p &\longmapsto \text{o quadrado onde } p \text{ está} \end{aligned}$$

(se  $p$  está na fronteira, escolhemos um dos quadrados). Como

$$|\{\text{as pessoas na sala}\}| = 50 \quad \text{e} \quad |\{\text{os quadrados}\}| = 49,$$

há duas pessoas  $p$  e  $q$  no mesmo quadrado ( $f$  não é injetiva). Logo:

$$\begin{aligned} \text{«a distância entre } p \text{ e } q\text{»} &\leq \text{o comprimento do diagonal do quadrado} \\ &= \sqrt{2} < 1.5. \end{aligned}$$

## Teorema

Para todos os  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , existem números inteiros  $p$  e  $q$  com  $q \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$ .

## Nota

Logo,  $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn} \leq \frac{1}{n}$ .

## Notação

Para  $x \in \mathbb{R}$ , denota-se por  $\lfloor x \rfloor$  o maior número inteiro  $a$  com  $a \leq x$ .

**Teorema**

Para todos os  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , existem números inteiros  $p$  e  $q$  com  $q \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $|q\alpha - p| < \frac{1}{n}$ .

**Demonstração.**

- Para cada  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ , consideremos  $r_k = k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor \in [0, 1[$ .
- Consideremos a função

$$f: \{0, 1, \dots, n\} \longrightarrow \left\{ \left[0, \frac{1}{n}[, \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[, \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right[ \right\}$$

$$k \longmapsto \text{o intervalo } \mathcal{I} \text{ com } r_k \in \mathcal{I}$$

- Pelo princípio da gaiola dos pombos, existem números  $l$  e  $k$  em  $\{0, 1, \dots, n\}$  (digamos  $l < k$ ) tal que  $|r_l - r_k| < \frac{1}{n}$ .
- Portanto,

$$\frac{1}{n} > |k\alpha - \lfloor k\alpha \rfloor - l\alpha + \lfloor l\alpha \rfloor| = |(k-l)\alpha - (\lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor l\alpha \rfloor)|$$

e escolhemos  $q = k - l \in \{1, \dots, n\}$  e  $p = \lfloor k\alpha \rfloor - \lfloor l\alpha \rfloor$ .



**Exemplo**

*Num torneio em que participam  $n \geq 2$  equipas de futebol, todas as equipas jogam uma vez umas com as outras. Mostre que em cada jornada pelo menos duas equipas realizaram o mesmo número de jogos até esta jornada.*

Fixamos uma jornada, e consideremos

$$N: \{\text{as } n \text{ equipas}\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, n-2, n-1\}.$$

$$e \longmapsto \text{o número total de jogos de } e$$

**Caso 1:** Cada equipa realizou pelo menos um jogo. Então, podemos considerar acima o conjunto de chegada  $\{1, \dots, n-1\}$ ; pelo princípio da gaiola dos pombos,  $N$  não é injetiva.

**Caso 2:** Pelo menos uma equipa não realizou nenhum jogo. Logo, nenhuma equipa realizou  $n-1$  jogos e por isso (ver acima), pelo princípio da gaiola dos pombos,  $N$  não é injetiva.

**Ideia**

Suponhamos que temos  $m$  caixas. Se em cada caixa há no máximo  $k$  bolas, então temos no máximo  $mk$  bolas.

**Contraposição:** Se temos mais do que  $mk$  bolas, então uma caixa tem mais do que  $k$  bolas.

**Mais formal**

Sejam  $A$  um conjunto e  $(A_1, \dots, A_m)$  uma sequência de subconjuntos de  $A$  dois a dois disjunta com

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_m.$$

Se  $km < |A|$ , então,  $|A_i| > k$  para algum  $1 \leq i \leq m$ .

**Formulação alternativa**

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos finitos e  $f: A \rightarrow B$  uma função.

Se  $k|B| < |A|$ , então existem  $k + 1$  elementos em  $A$  com a mesma imagem.

**Exemplo**

*Na área metropolitana de Lisboa, há pelo menos 15 pessoas com o mesmo número de fios de cabelo na cabeça.*

(Cada pessoa tem no máximo 200000 fios de cabelo na cabeça e na área metropolitana de Lisboa residem 2,870,208 pessoas<sup>a</sup>.)

Agora consideremos a função «número de fios de cabelo na cabeça»:

$$f: \{\text{Lisboetas}\} \longrightarrow \{0, 1, \dots, 200000\}.$$

Como  $14 \cdot 200001 < 2870208$ , existem pelo menos 15 Lisboetas com «a mesma imagem», isto é, com o mesmo número de fios de cabelo na cabeça.

---

<sup>a</sup>fonte: Wikipédia.

## **2. O PRINCÍPIO DA BIJEÇÃO**



### O princípio da bijecção

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos (finitos). Se existe uma função **bijetiva**  $f: A \longrightarrow B$  entre  $A$  e  $B$ , então  $A$  e  $B$  têm o mesmo número de elementos.

### Nota

Tipicamente utilizamos este princípio quando é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

### Exemplo

Existe uma bijecção entre o conjunto  $C$  dos números naturais de 4 algarismos em  $A = \{1, 2, \dots, 9\}$  e o conjunto  $A^4$ .

De facto, a função

$$f: A^4 \longrightarrow C, \quad (a_1, a_2, a_3, a_4) \longmapsto a_1 10^3 + a_2 10^2 + a_3 10 + a_4$$

é bijetiva.

### O princípio da bijecção

Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos (finitos). Se existe uma função **bijetiva**  $f: A \rightarrow B$  entre  $A$  e  $B$ , então  $A$  e  $B$  têm o mesmo número de elementos.

### Nota

Tipicamente utilizamos este princípio quando é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

### Exemplo

*Determinamos o número de subconjuntos de  $X = \{1, \dots, n\}$ .*

A função

$$P(X) \rightarrow \{\text{as sequências binárias de comprimento } n\}$$

$$A \mapsto a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

é bijetiva (porque é invertível).

Falta determinar o número de tais sequências ...

### **3. OS PRINCÍPIOS DA ADIÇÃO E DA MULTIPLICAÇÃO**

### O princípio da adição

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos finitos **dois a dois disjuntos** (isto é, tais que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , para  $i \neq j$ ). Então

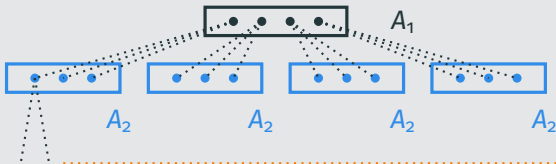
$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|.$$

### O princípio da multiplicação

Sejam  $A_1, A_2, \dots, A_n$  conjuntos finitos. Então

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

### Ilustração



## Exemplo

- O número de sequências binárias de comprimento  $n$  é  $2^n$ .

Contamos os elementos de  $\underbrace{\{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1\}}_{n \text{ vezes}}$ .

- Logo, para um conjunto  $X$  com  $n$  elements:  $|P(X)| = 2^n$ .
- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos  $1, \dots, 9$ ?

Determinamos o tamanho do conjunto

$$\{1, \dots, 9\}^4;$$

ou seja, existem  $9^4 = 6561$  tais números.

- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos  $0, \dots, 9$  e que são divisíveis por 5?

O conjunto

$$\{1, \dots, 9\} \times \{0, 1, \dots, 9\}^2 \times \{0, 5\}$$

tem 1800 elementos.

**Exemplo**

Determinamos o número das palavras de **comprimento 5** que se podem escrever com os símbolos «a», «b», «c», «(», «)» de modo que

- o número de «(» é igual ao número de «)»,
- em cada parte inicial da palavra, o número de «(» é maior ou igual ao número de «)»,
- entre os símbolos «(» e «)» está pelo menos um dos símbolos «a,b,c».

Seja  $S$  o conjunto destas palavras, e consideremos

- $S_0 = \{p \in S \mid p \text{ não tem nenhuma parêntese}\},$
- $S_1 = \{p \in S \mid p \text{ tem exatamente uma vez o símbolo «(»}\},$
- $S_2 = \{p \in S \mid p \text{ tem exatamente duas vezes o símbolo «(»}\},$

logo  $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$  (dois a dois disjunto), e por isso

$$|S| = |S_0| + |S_1| + |S_2|.$$

**Exemplo**

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$ .
- $S_1 = S_1^{1,3} \cup S_1^{1,4} \cup S_1^{1,5} \cup S_1^{2,4} \cup S_1^{2,5} \cup S_1^{3,5}$  (dois a dois disjunto).

Aqui o primeiro número indica a posição de «(», o segundo número indica a posição de «)».

Portanto:  $|S_1^{i,j}| = 3^3 = 27$ , logo  $|S_1| = 6 \cdot 27 = 162$ .

- $S_2 = \{\langle\langle(a)\rangle\rangle, \langle\langle(b)\rangle\rangle, \langle\langle(c)\rangle\rangle\}$ , logo  $|S_2| = 3$ .

Conclusão:  $|S| = 243 + 162 + 3 = 408$ .

## **4. GENERALIZAÇÕES**



### O princípio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com  $n$  escolhas onde há

- $r_1$  possibilidades para a primeira escolha,
- $r_2$  possibilidades para a segunda escolha (o número de escolhas é independente da primeira escolha),
- ...
- $r_n$  possibilidades para a última escolha (o número de escolhas é independente das escolhas anteriores);

Então, existem  $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n$  maneiras de realizar o procedimento.

### Exemplo

- $|\{\text{os números com 4 algarismos distintos}\}| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ .
- Para  $A = \{\text{os números com 4 algarismos distintos em } 1, \dots, 9, \text{ um deles igual a } 5\}$ ,

$$|A| = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 1344.$$

**Nota**

O princípio da adição é apenas válido quando os conjuntos  $A_1, \dots, A_n$  são **dois a dois disjuntos**. Mais geral, temos:

**O princípio de inclusão-exclusão**

- Para os conjuntos finitos  $A_1$  e  $A_2$ :

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Para os conjuntos finitos  $A_1, A_2$  e  $A_3$ :

$$\begin{aligned} |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - \\ &\quad (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned}$$

**Teorema**

Em geral, para os conjuntos finitos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| \right).$$

---

Abraham de Moivre (1718), Daniel da Silva (1854), James Joseph Sylvester (1883), ...

**Exemplo**

Determinarmos o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

- Seja  $A_k = \{n \in \{1, \dots, 1000\} \mid k \text{ divide } n\}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).
- Assim,

$$\begin{aligned} |A_3 \cup A_5| &= |A_3| + |A_5| - |A_3 \cap A_5| \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor \\ &= 333 + 200 - 66 = 467. \end{aligned}$$

**Exemplo**

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em  $\{a, \dots, z\}$  (23 letras) existem que não contêm todas as vogais («a,e,i,o,u»)?

Sejam  $A_a, \dots, A_u$  os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem «a», ..., «u», respetivamente. Então, procuramos  $|A_a \cup \dots \cup A_u|$ .

- $|A_a| = \dots = |A_u| = 22^{10}$ .
- $|A_a \cap A_e| = \dots = |A_o \cap A_u| = 21^{10}$ .
- $|A_a \cap A_e \cap A_i| = \dots = |A_i \cap A_o \cap A_u| = 20^{10}$ .
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o| = \dots = |A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 19^{10}$ .
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 18^{10}$ .

Há 10 intersecções de 2 conjuntos, 10 intersecções de 3 conjuntos e 5 intersecções de 4 conjuntos. Logo,

$$|A_a \cup \dots \cup A_u| = 5 \cdot 22^{10} - 10 \cdot 21^{10} + 10 \cdot 20^{10} - 5 \cdot 19^{10} + 18^{10}.$$

### Subconjuntos vs. propriedades

Sejam  $X$  um conjunto finito,  $p_1, \dots, p_n$  propriedades aplicável aos elementos de  $X$  e  $N(i_1, i_2, \dots, i_k)$  o número de elementos de  $X$  que têm pelo menos as propriedades  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots$  e  $p_{i_k}$ .

O número de elementos de  $X$  que têm pelo menos uma das propriedades  $p_1, \dots, p_n$  é dado por

$$\begin{aligned} |A| = & N(1) + \dots + N(n) \\ & - N(1, 2) - \dots - N(n-1, n) \\ & + N(1, 2, 3) + \dots + N(n-2, n-1, n) \\ & - \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & + (-1)^{n+1} N(1, \dots, n). \end{aligned}$$

**Nota:** Sendo  $A_i = \{x \in X \mid p_i(x)\}$ ,

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n, \quad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = N(i_1, i_2, \dots, i_k).$$

### Subconjuntos vs. propriedades

Sejam  $X$  um conjunto finito,  $p_1, \dots, p_n$  propriedades aplicável aos elementos de  $X$  e  $N(i_1, i_2, \dots, i_k)$  o número de elementos de  $X$  que têm pelo menos as propriedades  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots$  e  $p_{i_k}$ .

O número de elementos de  $X$  que têm nenhuma das propriedades  $p_1, \dots, p_n$  é dado por

$$\begin{aligned} |X \setminus A| &= |X| - N(1) - \dots - N(n) \\ &\quad + N(1, 2) + \dots + N(n-1, n) \\ &\quad - N(1, 2, 3) - \dots - N(n-2, n-1, n) \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad \dots \dots \dots \\ &\quad + (-1)^n N(1, \dots, n). \end{aligned}$$

**Nota:** Sendo  $A_i = \{x \in X \mid p_i(x)\}$ ,

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n, \quad |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = N(i_1, i_2, \dots, i_k).$$

## **5. O PRINCÍPIO DA BIJEÇÃO (OUTRA VEZ)**

**Exemplo**

O número das soluções da equação  $x_1 + \cdots + x_n = k$  (com  $x_i, k, n \in \mathbb{N}$ ) coincide com o número de maneiras de colocar  $k$  bolas indistinguíveis em  $n$  caixas numeradas.

**Exemplo**

O número de maneiras de colocar  $k$  bolas indistinguíveis em  $n > 0$  caixas numeradas coincide com o número de sequências binárias com  $k$  uns e  $n - 1$  zeros.

**Exemplo**

O número de sequências binárias com  $k$  uns e  $m$  zeros coincide com o número de subconjuntos de  $k$  elementos de um conjunto de  $k + m$  elementos.



**Exemplo**

*O número de sequências binárias com  $k$  uns e  $m$  zeros coincide com o número de subconjuntos de  $k$  elementos de um conjunto de  $k + m$  elementos.*

De facto, com  $X = \{1, \dots, k + m\}$ , a função

$$\{A \subseteq X \mid |A| = k\} \longrightarrow \{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_{k+m} \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

tem a função inversa

$$\{\text{sequências binárias com } k \text{ uns e } m \text{ zero}\} \longrightarrow \{A \subseteq X \mid |A| = k\}$$

$$a_1 a_2 \dots a_{k+m} \longmapsto \{i \in X \mid a_i = 1\}.$$

Voltaremos a estas questões no

**Capítulo 3:** Agrupamentos e Identidades Combinatórias.