



On White II, Wassily Kandinsky 1923

MCE_IM_2024-2025

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 6 Exemplos

Cap.2- Movimento oscilatório

- Movimento harmónico simples
- Movimento amortecido
- Movimento forçado
- Exemplos

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
 Gab. 13.3.16

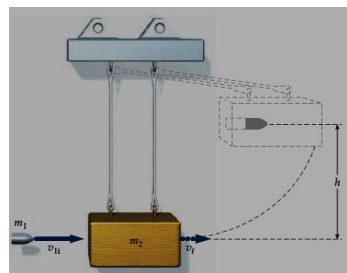
1



Capítulo 1.4.a

8. Um pêndulo balístico é constituído por um corpo suspenso dum fio. Um projétil de massa $m_1 = 30 \text{ g}$ penetra no corpo e fica cravado nele. O centro de massa do corpo eleva-se até uma altura $h = 30 \text{ cm}$. A massa do corpo é $m_2 = 3,0 \text{ kg}$.

- Deduz uma expressão para a velocidade do projétil em função destes dados.
- Calcule o valor numérico da velocidade do projétil quando este atinge o corpo.



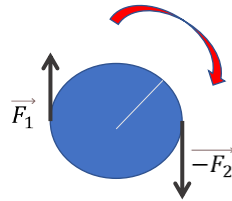
MCE_IM_2024-2025

2

ESTÁTICA

Binário de forças

$$\sum \vec{F}_i = 0$$



mas

$$\sum \vec{\tau}_i \neq 0$$

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

e, simultaneamente,

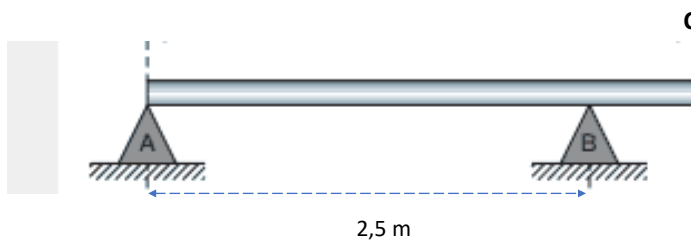
$$\sum \vec{\tau}_i = 0$$

MCE_IM_2024-2025

3

Capítulo 1.4.b

12. Uma barra uniforme AC de 4 m tem massa $m = 50$ kg. Existe um ponto fixo B em torno do qual a barra pode rodar. A barra está apoiada no ponto A. Um homem com massa igual a 75 kg anda ao longo da barra partindo de A. Calcule a distância máxima a que o homem pode deslocar-se, mantendo o equilíbrio.



Sugestão: usar as condições de equilíbrio estático
No limite, a reacção sobre A anula-se

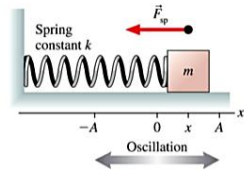
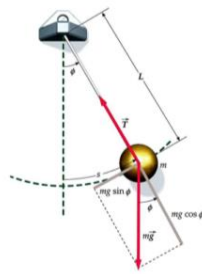
MCE_IM_2024-2025

4

MOVIMENTO HARMÓNICO SIMPLES (MHS)

Se a força que atua sobre um corpo:

- é proporcional ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio
- aponta sempre para a posição de equilíbrio

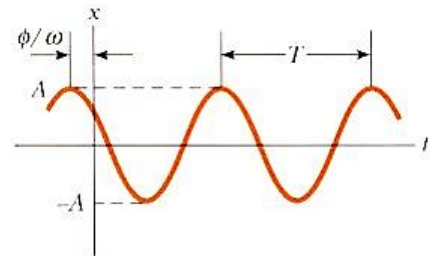


$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

O corpo tem movimento **periódico, harmónico, oscilatório ou vibratório**

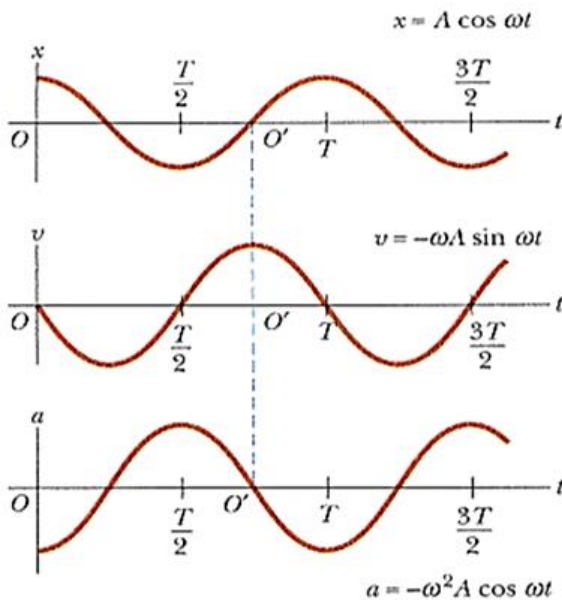
Ex: Bloco preso a uma mola, baloiço (pêndulo), corda a vibrar, moléculas a vibrar num sólido, etc...

$$\omega = 2\pi f \text{ (rad/s)}$$



MCE_IM_2024-2025

5



MCE_IM_2024-2025

6 6

Pêndulo simples

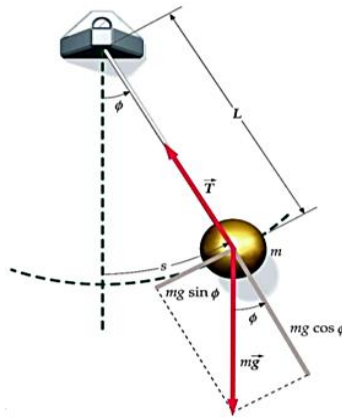
Força restauradora:

$$-mg \sin \phi$$

aceleração tangencial:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = L \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$

$$-mg \sin \phi = m \frac{d^2 s}{dt^2} = mL \frac{d^2 \phi}{dt^2}$$



$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \phi \approx -\frac{g}{L} \phi \text{ se } \phi \ll 1$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\omega^2 \phi \text{ com } \omega^2 = \frac{g}{L}$$

solução: $\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$

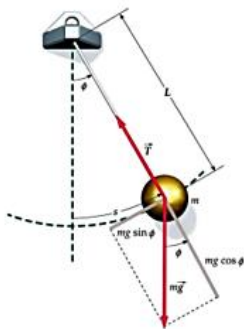
MCE_IM_2024-2025

7 7

Pêndulo simples

Para pequenos ângulos
 $\sin \phi \approx \phi$

Para pequenas oscilações, tem-se:



eq. movimento:

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = -\omega^2 \phi \text{ com } \omega^2 = \frac{g}{L}$$

solução:

$$\phi = \phi_0 \cos(\omega t + \delta)$$

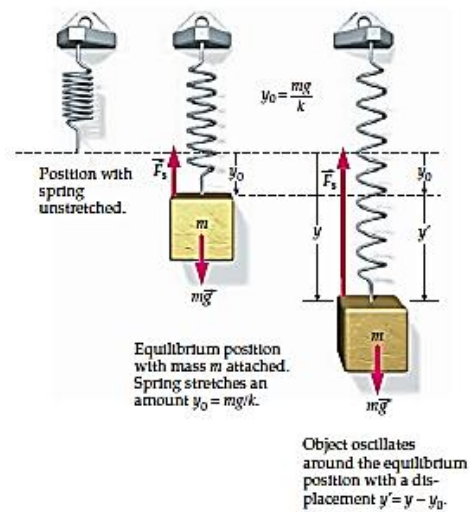
período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

MCE_IM_2024-2025

8 8

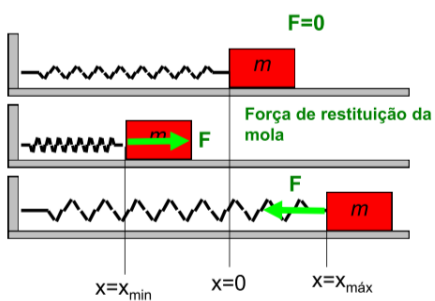
Sistema massa-mola



MCE_IM_2024-2025

9

Sistema massa-mola



F: Força restauradora

$$F = -kx$$

k: constante da mola

Equação do movimento

$$F = -kx = ma_x \Rightarrow a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\text{definimos } \omega^2 = \frac{k}{m} \text{ or } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

 ω : frequência angular (radianos/s)

período:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

solução:

$$x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

MCE_IM_2024-2025

10 10

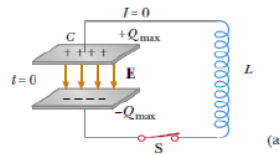
COMPARANDO...**Circuito LC**

A intensidade da corrente I funciona como análoga à velocidade v

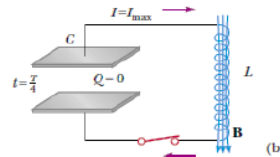
$$I = \frac{dQ}{dt} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

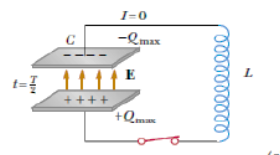
$$L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = 0 \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$



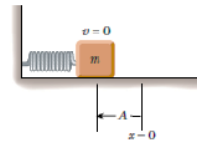
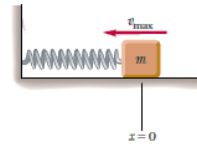
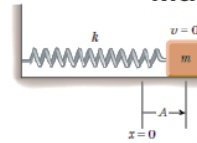
(a)



(b)



(c)

Massa/Mola

MCE_IM_2024-2025

11

Energia no Movimento Harmônico Simples (MHS)

Num M.H.S. a Energia Mecânica é constante:

$$E = \frac{1}{2} kA^2$$

Energia potencial elástica:

$E_{pe}(0)=0$ (posição de equilíbrio)

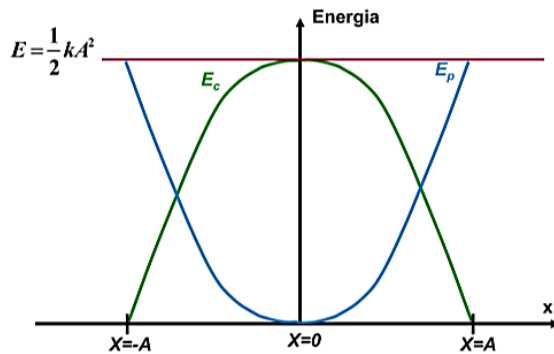
$$E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2$$

Energia cinética: $E_c = E - E_{pe} = \frac{1}{2} k(A^2 - x^2)$

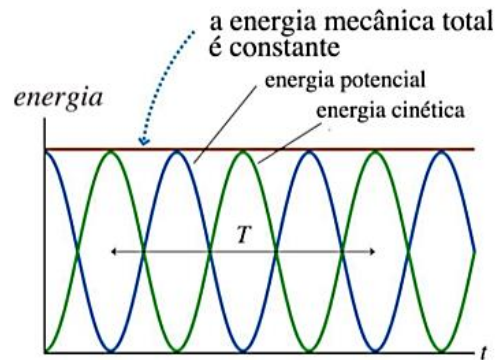
MCE_IM_2024-2025

12

Energia no MHS em função de x



Energia no MHS em função de t



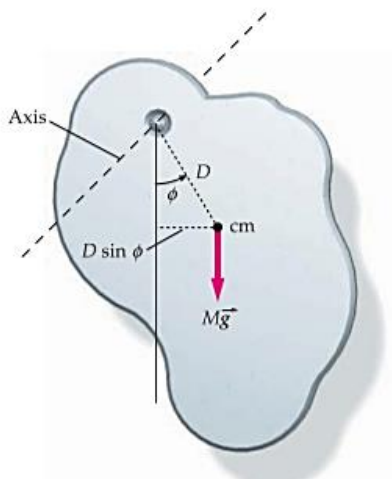
$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \text{constante}$$

MCE_IM_2024-2025

13 13

Pêndulo físico ou Pêndulo composto

Para pequenos ângulos
 $\text{sen } \phi \approx \phi$



$$\tau = -MgD \text{sen } \phi \approx -MgD\phi$$

$$\tau = I \alpha = -MgD\phi \quad \text{com } \alpha = \frac{d^2\phi}{dt^2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgD}}$$

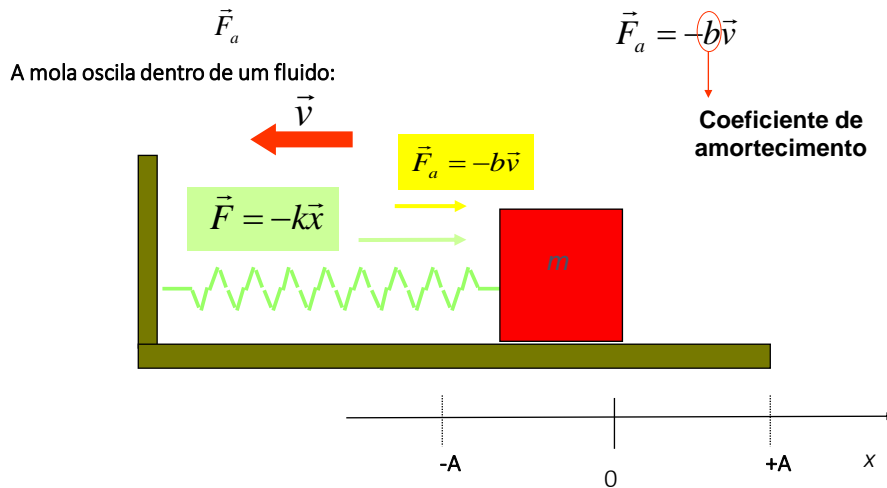
NB - O período do pêndulo físico depende da distribuição de massa, mas não da massa total, M. O momento de inércia I é proporcional a M, pelo que a razão I/M é independente de M

MCE_IM_2024-2025

14

Oscilador amortecido

EXEMPLO de força dissipativa: **Força devida à viscosidade de um fluido**



MCE_IM_2024-2025

15

Oscilador amortecido

A solução é:

$$x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

Quando o amortecimento não é muito intenso, inferior a um valor crítico (b_c), esperamos que a solução corresponda a uma oscilação cuja amplitude diminua com o tempo

E a frequência de oscilação é

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Esta solução só é válida se:

$$\frac{b}{2m} < \omega_0$$

$$b < 2m\omega_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Coeficiente de amortecimento crítico (b_c)

$$b_c = 2m\omega_0$$

MCE_IM_2024-2025

16

Oscilador amortecido

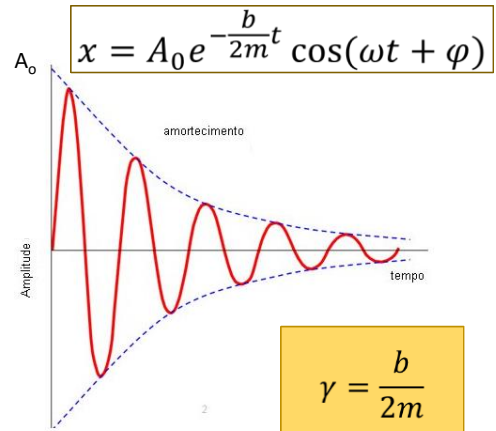


Na ausência de forças externas, a **AMPLITUDE** de um oscilador **DIMINUI** no tempo, devido a forças dissipativas (atrito, viscosidade, etc)

$$\vec{F}_a = -b\vec{v}$$

Se **A** diminui, a **Energia Mecânica** diminui também

$$\omega = \sqrt{\left[\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2\right]}$$



$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

MCE_IM_2024-2025

17

Oscilador amortecido

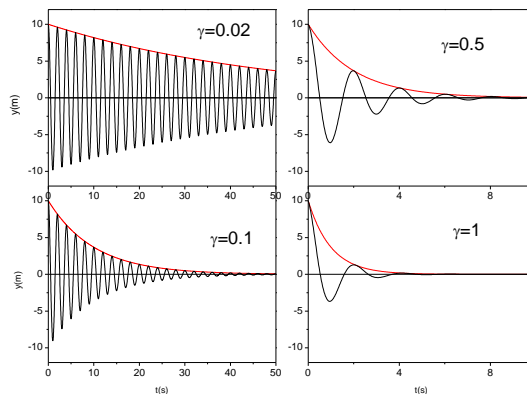
Graus de Amortecimento

$$x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Para $b < b_c$

OSCILADOR AMORTECIDO: $y=10 e^{-\gamma t} \cos(\omega t)$ $\omega=(\pi^2-(\gamma)^2)^{1/2}$ $\gamma < \pi$



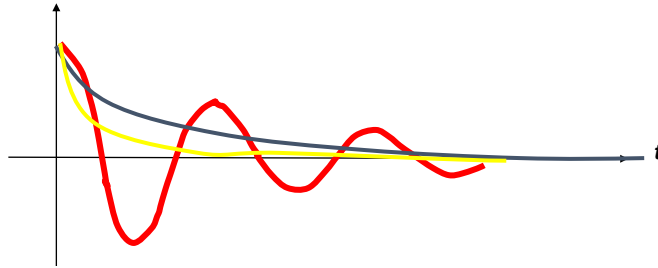
À medida que **b** aumenta, o decréscimo da amplitude das oscilações é cada vez mais rápido.

MCE_IM_2024-2025

18

Oscilador amortecido

Graus de Amortecimento



Sub-Amortecido (Amortecimento fraco)

Amortecido criticamente (Amortecimento forte)

Sobre Amortecido (Amortecimento muito forte)

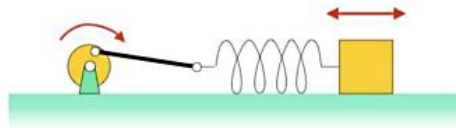
$$b < 2m\omega_0$$

$$b_c = 2m\omega_0$$

MCE_IM_2024-2025

19

Oscilador Forçado



"mola" ligada a um "motor"

MCE_IM_2024-2025

20

Oscilador Forçado

- Para manter um sistema a oscilar na presença de forças dissipativas, temos de fornecer energia, aplicando uma **força externa**. Ao fim de algum tempo, o movimento terá a **frequência da força externa**.
- Nessa altura, a energia fornecida (numa oscilação) será igual à dissipada, a **amplitude mantém-se constante**, e o seu valor depende da frequência externa.

MCE_IM_2024-2025

21

Equações do movimento

Força externa:

$$F_{ext} = F_0 \cos \omega t$$

frequência
angular da
força externa

2ª Lei de Newton:

$$\sum F = F_0 \cos \omega t - b \frac{dx}{dt} - kx = ma_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

amortec.

força elástica

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

com

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

MCE_IM_2024-2025

22

Solução geral

$$\text{solução: } x(t) = x_t(t) + x_p(t)$$

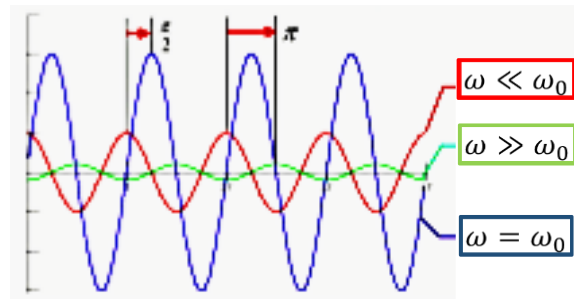
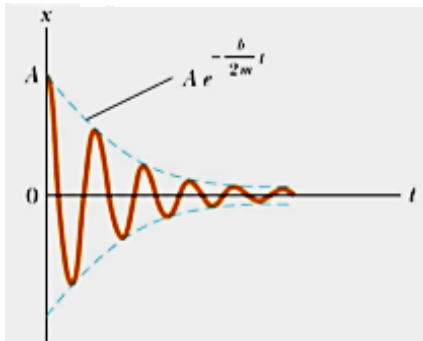
solução transiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

+

solução permanente:

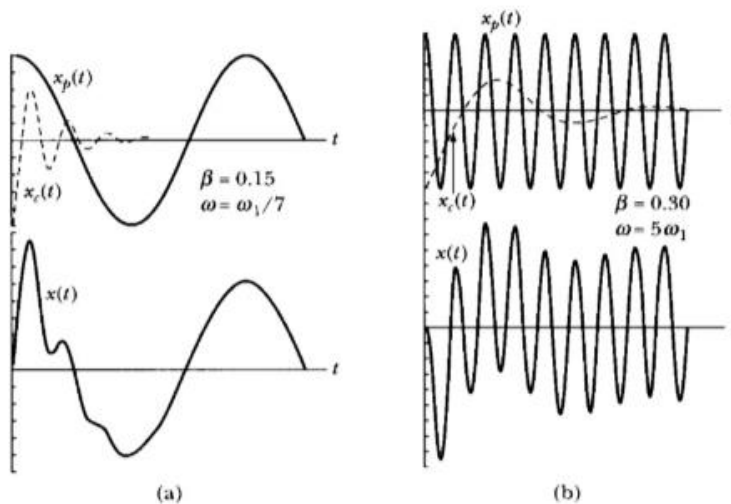
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$



MCE_IM_2024-2025

23

Solução transiente + solução permanente



MCE_IM_2024-2025

24

Solução permanente

$$x_p(t) = A \cos(\omega t - \delta)$$

com $A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$ amplitude

$\delta = \arctan \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ desfasamento entre a posição x e a força
 $0 \leq \delta \leq \pi$

MCE_IM_2024-2025

25

OSCILADOR FORÇADO

Força externa: $F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Posição: $x_p(t) = A \cos(\omega t - \delta)$

Mesma
frequência!

Amplitude: $A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$

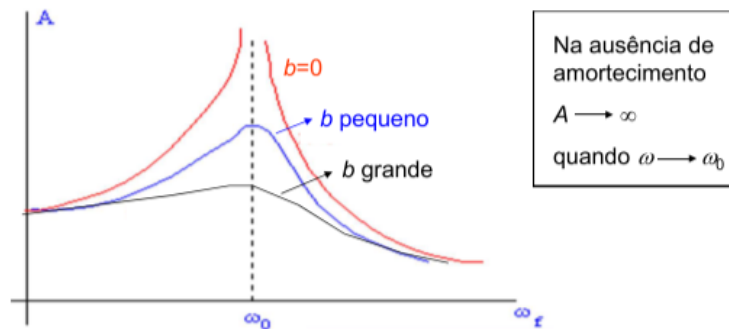
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

MCE_IM_2024-2025

26

Ressonância no oscilador forçado

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \Rightarrow A \text{ é máximo quando } \omega \approx \omega_0 \Rightarrow \text{ressonância}$$



MCE_IM_2024-2025

27

Sobre a energia

Considerando a solução permanente,

NA RESSONÂNCIA, verifica-se:

- energia máxima dissipada
- trabalho máximo realizado pelo motor
- energia mecânica máxima do oscilador

NUM PERÍODO:

energia dissipada pelo atrito = trabalho realizado pelo motor

MCE_IM_2024-2025

28

The Tacoma Narrows Bridge Collapse

1940



<https://youtu.be/7saC-DnQ9Rc?t=36>

A Ponte do Estreito de Tacoma caiu em 1940, devido a torques vibracionais induzidos pelo vento, fazendo a ponte oscilar com $\omega \approx$ frequência de ressonância!

MCE_IM_2024-2025

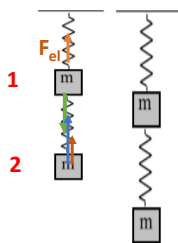
29 29

Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa m como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

- as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.
- a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Nota: não é necessário considerar a aceleração da gravidade porque esta não tem influência na oscilação.



$$1 \quad F_1 = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$2 \quad F_2 = -k_2 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

$$k_1 = k_2 = k$$

$$m_1 = m_2 = m$$



Osciladores acoplados

16 Duas molas iguais de constante K_{mola} estão penduradas e ligadas a corpos de massa m como está representado na figura ao lado. Desprezando a massa das molas calcule:

a) as frequências dos modos normais de oscilação do sistema.

$$1 \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{k}{m} x_1 - \frac{k}{m} (x_1 - x_2) \iff \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{k}{m} x_1 + \frac{k}{m} (x_1 - x_2) = 0$$

$$2 \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k}{m} x_2 - \frac{k}{m} (x_2 - x_1) \iff \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{k}{m} x_2 + \frac{k}{m} (x_2 - x_1) = 0$$

SOLUÇÕES POSSÍVEIS:

$$x_1 = A \cos \omega t$$

$$x_2 = B \cos \omega t$$

Derivar 1 e 2 vezes x_1 e x_2 e substituir nas equações diferenciais

$$\begin{array}{l} 1 \quad -mA\omega^2 \cos \omega t + 2kA \cos \omega t - kB \cos \omega t = 0 \\ 2 \quad -mB\omega^2 \cos \omega t + 2kB \cos \omega t - kA \cos \omega t = 0 \end{array} \iff \begin{array}{l} -mA\omega^2 + 2kA - kB = 0 \\ -mB\omega^2 + 2kB - kA = 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A(2k - m\omega^2) - kB = 0 \\ -kA + B(2k - m\omega^2) = 0 \end{array} \right.$$

ANÁLISE DAS SOLUÇÕES POSSÍVEIS

$A = B = 0$ o que significaria que não havia oscilação.

Resolvendo o determinante, deveremos chegar a alguma conclusão

$$\iff \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - k^2 = 0 \iff k^2 - 3km\omega^2 + m^2\omega^4 = 0$$

Usando a fórmula resolvente para equações de 2º grau, obtém-se

$$\omega_1^2 = \frac{3k + \sqrt{5}k}{2m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3k - \sqrt{5}k}{2m}$$

**FREQUÊNCIAS DOS
MODOS NORMAIS DE
VIBRAÇÃO DO SISTEMA**
(ω_1 e ω_2)

16. b) a relação das amplitudes de oscilação das massas nos dois modos normais de oscilação.

Tínhamos $\begin{cases} A(2k - m\omega^2) - kB = 0 \\ -kA + B(2k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$

Usando, por exemplo, a 1ª equação, tem-se:

$$A(2k - m\omega^2) - kB = 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{3k + \sqrt{5}k}{2m}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1-\sqrt{5})} = -1,61 \quad \text{valor negativo} \Rightarrow \text{oposição de fase}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3k - \sqrt{5}k}{2m}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2}{(1+\sqrt{5})} = 0,61 \quad \text{valor positivo} \Rightarrow \text{em fase}$$