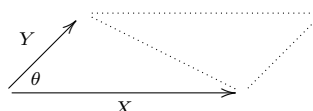


**Distância, Ortogonalidade, Projeção Ortogonal, Mínimos Quadrados****Álgebra Linear e Geometria Analítica - A****Folha Prática 4****Produto interno, externo, ângulo**

1. Considere os vetores de  $\mathbb{R}^3$ ,  $u = (1, -2, 1)$  e  $v = (-1, 1, 0)$ .
  - (a) Calcule  $u + v$  e  $3u - 2v$ .
  - (b) Indique, justificando, se  $u$  e  $v$  são vetores perpendiculares. E colineares?
  - (c) Determine o ângulo entre os vetores:
    - i.  $u$  e  $v$ ;
    - ii.  $u$  e  $-v$ ;
    - iii.  $u + v$  e  $u - v$ .
  - (d) Apresente um vetor unitário com a direção do vetor  $u$ .
  - (e) Encontre todos os vetores com a direção de  $u$  e comprimento 2. De entre estes, indique os que têm:
    - i. o sentido de  $u$ ;
    - ii. o sentido oposto a  $u$ .
  - (f) Escreva o vetor  $u$  como soma de um vetor com a direção de  $v$  e um vetor ortogonal a  $v$ .
  - (g) Determine todos os vetores perpendiculares a  $u$  e a  $v$ .
  - (h) Encontre todos os vetores perpendiculares a  $u$ .
2. Mostre que o triângulo de vértices nos pontos  $(2, 3, -4)$ ,  $(3, 1, 2)$  e  $(-3, 0, 4)$  é isósceles.
3. Encontre todos os vetores que fazem um ângulo de  $\pi/3$  com  $(1, 0, 0)$ .
4. Sendo  $X$  e  $Y$  vetores de  $\mathbb{R}^n$ , mostre que
  - (a)  $\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2(\|X\|^2 + \|Y\|^2)$ ;
  - (b) se  $X$  e  $Y$  são ortogonais, então  $\|X + Y\|^2 = \|X\|^2 + \|Y\|^2$  (Teorema de Pitágoras).
5. Sejam  $X = (2, -1, 1)$  e  $Y = (0, 2, -1)$  dois vetores em  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Calcule o produto externo (ou produto vetorial)  $X \times Y$ .
  - (b) Verifique que o vetor  $X \times Y$  é ortogonal quer a  $X$  quer a  $Y$ .
6. Considere o paralelogramo (e o triângulo) com lados correspondentes aos vetores  $X$  e  $Y$  como na figura.



- (a) Verifique que
  - i. a altura do paralelogramo é igual a  $\|Y\| \sin(\theta)$ , sendo a base do paralelogramo o lado correspondente ao vetor  $X$  e  $\theta = \angle(X, Y)$ ;
  - ii. a área do paralelogramo é  $A_{\square} = \|X \times Y\|$ ;
  - iii. a área do triângulo é  $A_{\triangle} = \frac{1}{2} \|X \times Y\|$ .
- (b) Determine a área
  - i. do paralelogramo de lados dados pelos vetores  $(3, -1, -1)$  e  $(1, 2, 1)$ ;
  - ii. do triângulo de vértices  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 2)$ ;
  - iii. dos vários paralelogramos com vértices em  $(1, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$  e  $(1, 2, 1)$ .
7. Sejam  $X = (1, 2, 0)$  e  $Y = (1, -1, 1)$  dois vetores em  $\mathbb{R}^3$ .
  - (a) Determine todos os vetores ortogonais a  $X$  e  $Y$ .
  - (b) Calcule a área do paralelogramo de vértice na origem e lados correspondentes aos vetores  $X$  e  $Y$ .
8. Mostre que, sendo  $X$  e  $Y$  vetores não nulos de  $\mathbb{R}^3$ ,
  - (a)  $X$  e  $Y$  são colineares se e só se  $X \times Y = 0$ ;
  - (b)  $\|X \times Y\|^2 + (X \cdot Y)^2 = \|X\|^2 \|Y\|^2$ .

## Distâncias, bases ortonormadas, projeção ortogonal

9. Determine uma equação vetorial da reta  $\mathcal{R}$  definida pelo sistema de equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases},$$

assim como uma equação vetorial e uma equação cartesiana do plano  $\mathcal{P}$  que passa pelo ponto  $P = (2, 2, 1)$  e que contém a reta  $\mathcal{R}$ .

10. Determine os pontos de  $\mathbb{R}^3$  equidistantes dos pontos  $A = (-1, 0, 2)$  e  $B = (1, -1, 1)$ .

11. Considere o ponto  $A = (3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$  e o plano  $\mathcal{P}$  de equação cartesiana  $y + z = -1$ .

- (a) Escreva uma equação vetorial da reta ortogonal ao plano  $\mathcal{P}$  e que passa pelo ponto  $A$ .  
(b) Calcule a distância do ponto  $A$  ao plano  $\mathcal{P}$ , por dois processos distintos.

12. Seja  $\mathcal{P}$  plano que contém os pontos  $A = (1, 2, 1)$ ,  $B = (0, 0, 3)$ ,  $C = (1, -1, 1)$ .

- (a) Determine uma equação cartesiana do plano  $\mathcal{P}$ .  
(b) Calcule a distância do ponto  $Q = (1, 2, 3)$  ao plano  $\mathcal{P}$ .

13. Considere o ponto  $P = (-1, 1, 2)$  e a reta  $\mathcal{F}$  que passa pelos pontos  $A = (1, 0, 0)$  e  $B = (0, 0, 1)$ .

- (a) Escreva uma equação cartesiana do plano que contém o ponto  $P$  e é perpendicular à reta  $\mathcal{F}$ .  
(b) Calcule a distância do ponto  $P$  à reta  $\mathcal{F}$ , por dois processos distintos.

14. Verifique se os conjuntos de vetores seguintes são ortogonais:

- (a)  $\{(1, 2, 1), (0, -1, 2), (0, 2, 1)\}$ ;  
(b)  $\{(1, 2, -1, 1), (0, -1, -2, 0), (1, 0, 0, -1)\}$ .

15. Indique para que valores de  $a$  e  $b$  o conjunto  $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}), (a, \frac{\sqrt{2}}{2}, -b)\right\}$  é ortonormado.

16. Sejam  $X_1 = (4/5, 0, 3/5)$ ,  $X_2 = (0, 1, 0)$ ,  $X_3 = (-3/5, 0, 4/5)$  vetores de  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) Verifique que  $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$  é uma base ortonormada de  $\mathbb{R}^3$ .  
(b) Calcule o vetores  $[X]_{\mathcal{B}}$  para  $X = (1, 1, 1)$ , usando o facto de  $\mathcal{B}$  ser uma base ortonormada.  
(c) Calcule a matriz de mudança da base  $\tilde{\mathcal{B}} = ((0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1))$  para a base  $\mathcal{B}$ .  
(d) Calcule  $[Y]_{\mathcal{B}}$ , sabendo que

$$[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

17. Sejam  $X, Y_1, \dots, Y_n$  vetores em  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que se  $X$  é ortogonal a  $Y_1, \dots, Y_n$ , então  $X$  é também ortogonal a qualquer vetor do subespaço gerado por  $Y_1, \dots, Y_n$ .

18. Considere o plano  $\mathcal{P}$  de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores  $X_1 = (1, 1, 0)$  e  $X_2 = (0, 0, 1)$ .

- (a) Determine uma base ortonormada de  $\mathcal{P}$ .  
(b) Determine a projeção ortogonal do vetor  $X = (2, -2, 1)$  sobre o plano  $\mathcal{P}$ .  
(c) Determine a distância do ponto  $(2, 1, 1)$  ao plano  $\mathcal{P}$ .

19. Calcule as projeções ortogonais de  $X = (4, 0, -9)$  e  $Y = (2, 7, -1)$  sobre o subespaço  $\mathcal{W}$  de  $\mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores  $(0, 1, 0)$ ,  $(1/2, 0, \sqrt{3}/2)$ .

20. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando convenientemente.

- (a) Todo o conjunto ortonormado de 5 vetores em  $\mathbb{R}^5$  é uma base em  $\mathbb{R}^5$ .  
(b) Seja  $S = \{u_1, u_2, u_3\}$  um conjunto com a propriedade de que  $u_i \cdot u_j = 0$  para  $i \neq j$  então  $S$  é um conjunto ortonormado.

(c) Seja  $S = \{v_1, v_2\}$  um conjunto ortogonal de vetores e  $\alpha_1, \alpha_2$  escalares. Então  $\{\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2\}$  é também um conjunto ortogonal de vetores.

21. Utilizando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, determine uma base ortonormada de:

(a)  $< (1, 1, 0), (0, 1, 1) >$ ;

(b)  $< (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 4, -1, 0) >$ .

### Método dos Mínimos Quadrados

22. Seja  $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $b = [2 \ 0 \ 11]^T$ . Sabendo que a solução dos mínimos quadrados do sistema inconsistente  $Ax = b$  é  $\hat{x} = [1 \ 2]^T$ , encontre o erro dos mínimos quadrados na solução dos mínimos quadrados.

23. Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$  e  $b = [5 \ -3 \ -5]^T$ .

(a) Encontre a solução dos mínimos quadrados e calcule o erro dos mínimos quadrados associado.

(b) O que se pode dizer acerca da solução dos mínimos quadrados de  $Ax = b$  quando  $b$  é ortogonal às colunas de  $A$ .

24. Encontre uma solução dos mínimos quadrados de  $Ax = b$ :

(a) construindo as equações normais para  $\hat{x}$ .

(b) Resolvendo para  $\hat{x}$ .

1.  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$  e  $b = [4 \ 1 \ 2]^T$ .

2.  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  e  $b = [-5 \ 8 \ 1]^T$ .

3.  $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$  e  $b = [3 \ 1 \ -4 \ 2]^T$ .

4.  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  e  $b = [5 \ 1 \ 0]^T$ .