Primitivas por substituição da variável: Regras de substituição $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

f contém		Substituição
$\sqrt[k]{a+bx}$	$\rightsquigarrow$	$\sqrt[k]{a+bx}=t$ $\quad$ ($t \geq 0$ se k par)
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\rightsquigarrow$	$x = a\,\operatorname{tg} t$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\rightsquigarrow$	$x = a\,\operatorname{sen} t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\rightsquigarrow$	$x = a\,\sec t$
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\rightsquigarrow$	$x+\dfrac{b}{2a}=z$

$$\boxed{ax^2+bx+c \;=\; a\left[\,(x+\frac{b}{2a})^2+K\,\right]} \qquad K=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$$

Fracções Simples: $\dfrac{A}{bx^2+c} \rightsquigarrow$ imediata

$$\frac{P(\operatorname{tg} x)}{Q(\operatorname{tg} x)} \rightsquigarrow \operatorname{tg} x = t\ , \qquad \frac{P(\operatorname{sen} x, \cos x)}{Q(\operatorname{sen} x, \cos x)} \rightsquigarrow x = 2z$$

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\,\frac{2ax+b+D}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow \begin{cases} \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow \text{imediata} \\[2ex] \dfrac{D}{ax^2+bx+c} = \dfrac{D}{a\left[\,(x+\frac{b}{2a})^2+k^2\,\right]} \rightsquigarrow x+\dfrac{b}{2a} = k\operatorname{tg} t\ , \quad t \in]0, \dfrac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

$(\Delta = b^2-4ac<0)$

Aula 11: Exercícios 1

Exemplo 5.7. $$\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx$$

Exemplo 5.8. Como calcular $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx$?

Exemplo 5.9. Como calcular $\int \frac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)}dx$?

Exemplo 5.10. Para determinar o integral $\int \frac{x}{x^2+2x+15}dx$

Exemplo 5.11. $$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

substituição: x = tg t

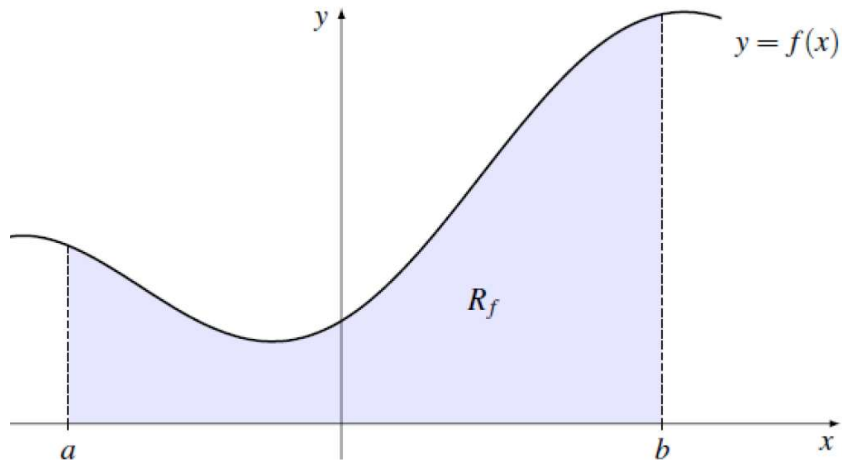
Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\,u^{p-1}\,u'$	$(\text{arcsen}\,(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$	$(\text{arctg}\,(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
$(\cos u)' = -u'\,\text{sen}\,u$	$(\sec u)' = u'\sec(u)\text{tg}\,(u)$
$(\text{sen}\,u)' = u'\;\cos u$	$(\text{cosec}\,u)' = -u'\text{cosec}\,(u)\text{cotg}\,(u)$
$(\text{tg}\,u)' = u'\;\sec^2 u$	$(e^u)' = u'\,e^u$
$(\text{cotg}\,u)' = -u'\,\text{cosec}\,^2 u$	$(a^u)' = \dfrac{u'a^u}{\ln(a)}\;,\;a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$
$(\text{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$(uv)' = u'v + uv'$
$(\text{tgh}\,u)' = u'\text{sech}\,^2 u$	$(\text{sech}\,u)' = -u'\text{sech}\,u\text{tgh}\,u$
$(\text{senh}\,^{-1}u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$	$(\text{tgh}\,^{-1}u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

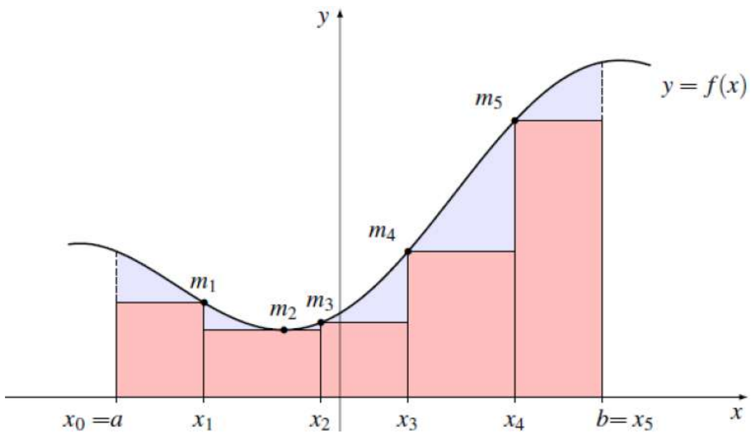
$\int u'\,u^p\,dx \;=\; \frac{u^{p+1}}{p+1} \;+\; c,$ $(p \neq -1)$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + c$
$\int \frac{u'}{u}\;\text{d}x = \ln(\lvert u\rvert) \;+\; c$	$\int \frac{u'}{1+u^2}\;\text{d}x = \arctan(u) + c$
$\int u'\;\sin u\;\text{d}x = \cos u\;+c$	$\int u'\sec u \tan u\;\text{d}x = \sec u\;+c$
$\int u'\;\cos u dx = \sin u + c$	$\int u'\text{cosec}\,u\text{cotgudx} = -\text{cosec u} + \text{c}$
$\int u'\sec^2 u\;\text{d}x = \tan u + c$	$\int u' e^u\;\text{d}x = e^u + c$
$\int u'\text{cosec}\,^2 u\;\text{d}x = -\text{cotgu} + \text{c}$	$\int u' a^u\;\text{d}x = \frac{a^u}{\ln(a)} + c, \quad a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$
$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\;\text{d}x = \text{senh}^{-1} u + C$	$\int u'v + uv'\;\text{d}x = uv + C$
$\int u'\;\text{sech}\,^2 u\;\text{d}x = \text{tgh}\,u + C$	$\int u'\text{sech}\,u\text{tgh}\,u\;\text{d}x = -\text{sech}\,u + C$
$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\;\text{d}x = \text{senh}\,^{-1}(u) + C$	$\int \frac{u'}{1-u^2}\;\text{d}x = \text{tgh}\,^{-1} u + C$

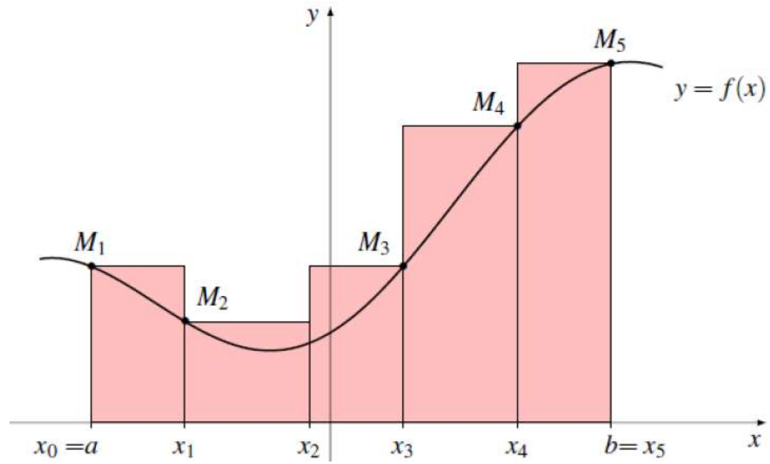
Aula 11: Integral Definido - introdução

Questão: Como determinar um valor aproximado da área A da região do plano R_f delimitada pelo gráfico de uma função contínua e positiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x = a$ e $x = b$?



Esta área pode ser aproximada por somas das áreas de retângulos:





Aula 11: Integral Definido - Somas Superiores e Inferiores de Darboux

Seja f uma função limitada em $[a, b]$. Dada uma decomposição (ou partição) $\mathcal{P} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ do intervalo $[a, b]$, determinado pelas marcas $x_0 = a$, $x_1, \ldots,$ x_{n-1}, $x_n = b$, em sub-intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, definimos soma inferior e soma superior como sendo respectivamente:

$$I_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \qquad \text{e} \qquad S_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

em que $m_i = \inf\{f(I_i)\}$ e $M_i = \sup\{f(I_i)\}$ e $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (comprimento do intervalo I_i).

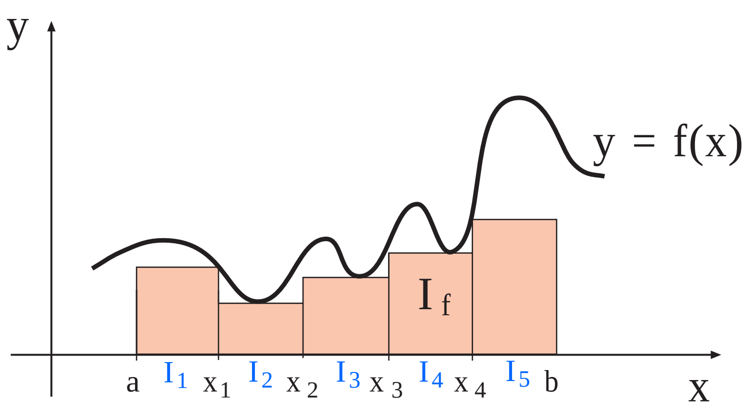


Figura 6.7: Soma inferior.

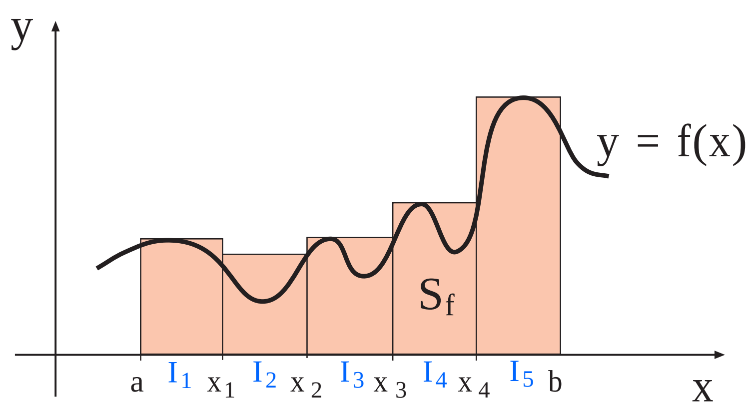


Figura 6.6: Soma superior.

Aula 11: Integral Definido - definição

Definição Uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diz-se integrável em $[a, b]$ se para todo o $\epsilon > 0$ existe uma decomposição $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tal que

$$S_f(\mathcal{P}) - I_f(\mathcal{P}) < \epsilon.$$

Observação: Existe uma definição que elimina a necessidade de f ser limitada ver Guião Definição 6.7.

Seja $\mathcal{P}_n$ uma partição regular de $[a, b]$ em intervalos de tamanho $\triangle x_i = \frac{b-a}{n}$, determinado pelas marcas $x_i = a + i\triangle x_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$.

Se f é limitada e $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(\mathcal{P}_n) - I_f(\mathcal{P}_n) = 0$ então f é integrável em $[a, b]$.

Neste caso

$$\lim_{n\to\infty} S_f(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty} I_f(\mathcal{P}_n) = A \underset{def}{=} \int_a^b f(x)dx.$$

Seja $\mathcal{C}_n = \{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ uma qualquer seleção de pontos x_i^* no intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

Designemos por soma de Riemann à soma $\Sigma_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\triangle x_i$. Como facilmente se constata, $I_f(\mathcal{P}_n) \leq \Sigma_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) \leq S_f(\mathcal{P}_n)$, pelo que se f é integrável em $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i^*)\,\triangle x_i$$

Aula 11: Integral Definido - exemplos

1. Mostre que a função constante $f(x) = c$ é integrável em $[a, b]$ e que $\int_a^b c dx = c(b-a)$.

2. Mostre que a função $f(x) = x$ é integrável em $[a, b]$ e que $\int_a^b x dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

3. Mostre que a função $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}; \\ 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$ não é integrável em $[0, 1]$.

Observações:
- O símbolo $\int_a^b f(x)\, dx$ lê-se integral de a até b de $f(x)$ ou integral de f de a para b.
- Dizemos que a é o limite inferior de integração, b é o limite superior de integração, f é a função integranda e x a variável de integração.

Nota: A variável de integração é muda, logo podemos escrever $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \dots$

Progressão aritmética:

Um sucessão (a_n) diz-se uma progressão aritmética de razão r se $a_{n+1} - a_n = r$. O seu termo geral é $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Soma dos primeiros n termos: $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$

Progressão geométrica:

Um sucessão (a_n), com $a_1 \neq 0$, diz-se uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$ se $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$. O seu termo geral é $a_n = a_1\, r^{n-1}$.

Soma dos primeiros n termos: $S_n = a_1 \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Aula 11: Critérios de Integrabilidade

Teorema 6.1, 6.2, 6.3 Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$.
Se

1. f é contínua em $[a, b]$, ou
2. f é limitada em $[a, b]$ e descontínua apenas num número finito de pontos, ou
3. f é monótona em $[a, b]$,

então f é integrável em $[a, b]$.

Teorema 6.4 Sejam f e g funções definidas em $[a, b]$. Se f é integrável em $[a, b]$ e g difere de f apenas num número finito de pontos, então g é integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema 6.5 (Condição necessária de integrabilidade) Se f é integrável em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$.

Exemplo: A função $f(x) = \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(x) = 0$ se $x = 0$, é integrável em qq intervalo fechado que não contenha 0 (por ser contínua) e não é integrável (por não ser limitada) em nenhum intervalo fechado que contenha 0.

Aula 11: Exercícios 2

Exercício 6.5 Estude quanto à integrabilidade, nos respetivos domínios, as seguintes funções:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \in [-1, 2] \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

2. $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [1, 5] \setminus \mathbb{Z} \\ x^3 + \ln x, & x \in [1, 5] \cap \mathbb{Z} \end{cases}$

3. $h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

4. $h(x) = \begin{cases} \ln |x|, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

5. $i(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos(2x), & x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

Exercício 6.6 Mostre que $\displaystyle\int_0^1 (x^3 - 6x)dx = -\frac{11}{4}$ sabendo que

Aula 11: Propriedades do Integral definido

Teorema 6.6. *Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então αf e $f+g$ são funções integráveis em $[a,b]$ e*

- $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$
- $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Teorema 6.7. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Então, f é integrável em qualquer subintervalo de $[a,b]$ e se $c \in]a,b[$, f é integrável em $[a,c]$ e $[c,b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Exemplo 6.5. Seja f a função definida em $[-1,1]$ por $f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0,1] \\ 2 & \text{se} \quad x \in [-1,0[\end{cases}$ $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 2\,dx + \int_0^1 x\,dx$

Teorema 6.8. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Aula 11: Consequências do Teorema 6.8

Teorema 6.8. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a,b]$, então* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \quad \not\Rightarrow \quad f(x) = 0, \forall x \in [a,b] \qquad \text{Exemplo} \qquad \int_{-1}^1 x\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \not\Rightarrow \quad f(x) \geq 0, \forall x \in [a,b] \qquad \text{Exemplo} \qquad \int_{-1}^2 x\,dx > 0$$

Teorema 6.10. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$ e se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 6.9. *Se f é integrável em $[a,b]$ e se existem constantes m, $M \in \mathbb{R}$ tais que,*

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo o } x \in [a,b],$$

então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Exemplo 6.8. $\displaystyle 0 \leq \int_{-5}^{10} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}\,dx \leq \frac{1}{2} \times 15.$

Aula 11: Mais propriedades do Integral definido

Teorema 6.11. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Então $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Teorema 6.12. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$, então $f \cdot g$ é integrável em $[a,b]$.*

$$\text{mas} \qquad \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx \neq \int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teorema 6.13. ***(Teorema do valor médio para integrais)*** *Se f é uma função contínua num intervalo $[a,b]$, então existe $c \in [a,b]$ tal que,*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Suponha que $f(x) > 0$, para todo $x \in [a,b]$ e interprete geometricamente o teorema dado.