On White II, Wassily Kandinsky 1923

Aula 2

Cap. 1 Cinemática

Movimento curvilíneo

1.2 Dinâmica da partícula

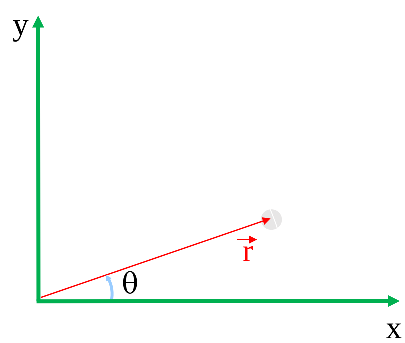
Conceito de força. Leis de Newton. Forças de contacto e ligação. Tensões e outras ligações. Força de atrito. Força elástica.

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

Movimento circular

Trajectória circular

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$$

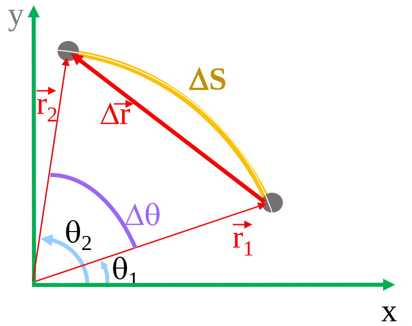


$$x = |\vec{r}|\cos\theta$$
$$y = |\vec{r}|\sin\theta$$

r e θ são <u>coordenadas polares</u>

θ posição angular

Movimento circular



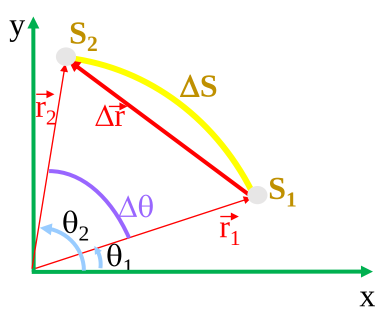
$$\Delta S = r\Delta\theta$$

$$r \equiv |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$$

movimento em sentido retrógrado indica
o sentido positivo do movimento

Movimento circular

S - posição medida sobre a circunferência

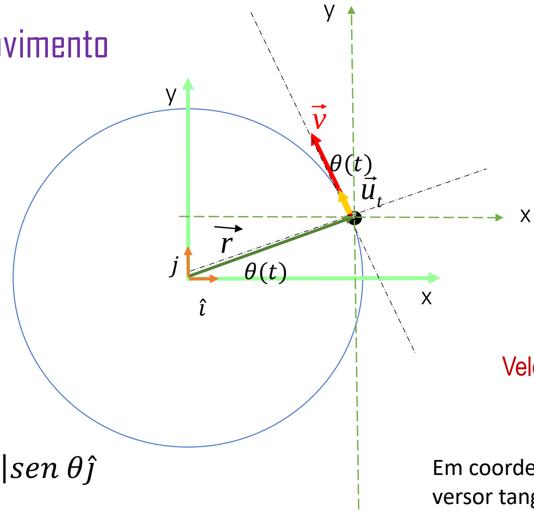


As posições podem ser descritas em termos de **r** (cartesiana), **θ** (angular) e **s** (linear), estando relacionados entre si pela relação

$$s = r\theta$$

$$com\; r \equiv |\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$$

Velocidade no movimento circular



$$\vec{v} = v\vec{u}_t$$

Velocidade é sempre tangente à circunferência (trajetória)

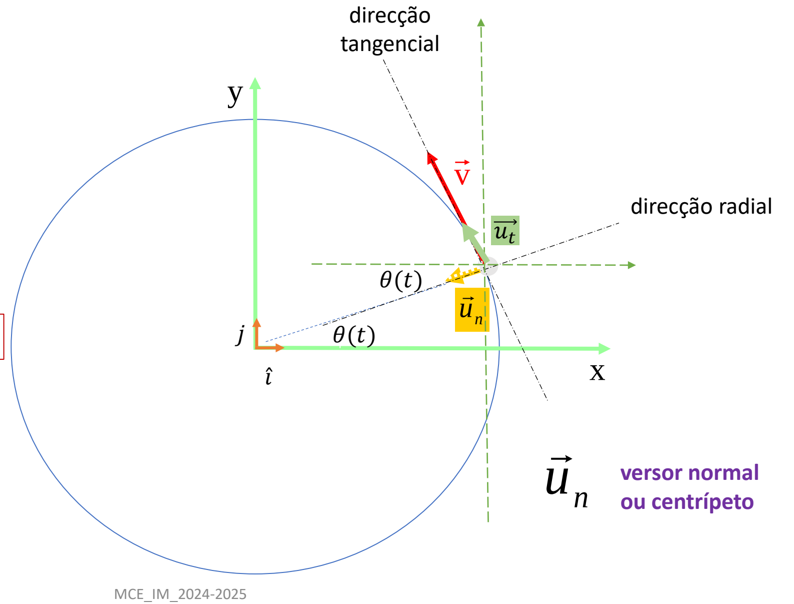
$$\vec{r} = |\vec{r}| \cos\theta \, \hat{\imath} + |\vec{r}| sen \, \theta \hat{\jmath}$$

Em coordenadas cartesianas, o versor tangente será dado por:

$$\boxed{\vec{v} = v[-sen\theta\hat{\imath} + cos\theta\hat{\jmath}]}$$

$$\boxed{\vec{u}_t = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}}$$

Aceleração no movimento circular



$$\boxed{\vec{u}_n = -cos\theta\hat{\imath} - sen\theta\hat{\jmath}}$$

$\vec{u}_n$ **versor normal ou centrípeto**

Aceleração no movimento circular

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left[v\left(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{\imath}\right)\right]}{dt}$$

<u>Analiticamente</u>, poderemos chegar à mesma conclusão

$$\boxed{\vec{v} = v[-sen\theta\hat{\imath} + cos\theta\hat{j}]}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\left(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{\imath}\right) + v\left[-\frac{d\theta}{dt}\sin\theta\,\hat{j} - \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\,\hat{\imath}\right]$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\left(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{\imath}\right) + v\frac{d\theta}{dt}\left[-\sin\theta\,\hat{j} - \cos\theta\,\hat{\imath}\right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}v$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\left(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{\imath}\right) + \frac{v^2}{r}\left[-\sin\theta\,\hat{j} - \cos\theta\,\hat{\imath}\right]$$

$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\left(\cos\theta\hat{j} - \sin\theta\hat{\imath}\right)}_{\vec{u}_t} + \underbrace{\frac{v^2}{r}\left[-\sin\theta\hat{j} - \cos\theta\hat{\imath}\right]}_{\vec{u}_n} \Leftrightarrow$$

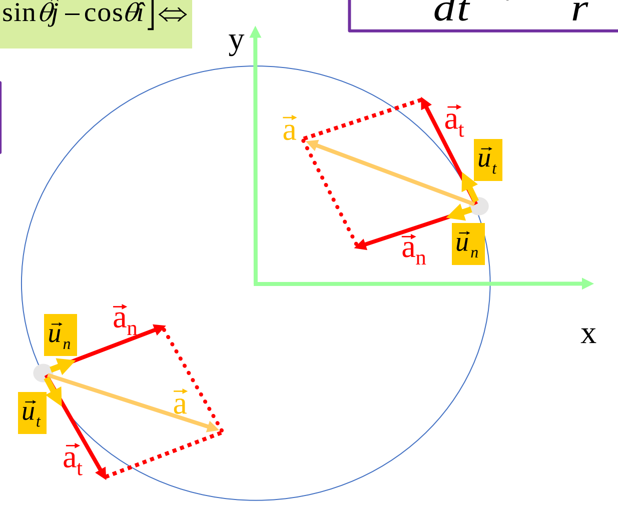
$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_t + \frac{v^2}{r}\vec{u}_n}$$

$$\boxed{\vec{a} = a_t\vec{u}_t + a_n\vec{u}_n}$$

a_t - <u>aceleração tangencial</u>

a_n - <u>aceleração radial</u>

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}}$$



<u>aceleração tangencial</u> - traduz a variação temporal do módulo da velocidade

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

<u>aceleração normal</u> (centrípeta ou radial) - traduz a variação temporal da direcção da velocidade

$$\vec{a}_n = \frac{v^2}{r}\vec{u}_n$$

Questão 2

Uma partícula de massa m=1kg, inicialmente em repouso, parte da origem do referencial em t=0s, sujeita à ação de uma força dada por: $\vec{\mathrm{F}}(\mathrm{t}) = \mathrm{t}\,\hat{\mathrm{x}} + 4\mathrm{t}\,\hat{\mathrm{y}}$ (N). Determine:

a) O vetor posição, $\vec{r}(t)$.

b) A componente tangencial do vetor aceleração.

Movimento Circular – Relação entre grandezas lineares e angulares

comprimento do arco

Posição Angular

$$\boxed{s = R\,\theta}$$

Raio circunferência

R = constante no movimento circular

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$v = \frac{ds}{dt} \Leftrightarrow v = \frac{r d\theta}{dt} \Leftrightarrow v = r\omega$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

$$\boxed{v = R\,\omega}$$

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$\boxed{a = R\alpha}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow a_t = \frac{d(\omega r)}{dt} \Leftrightarrow a_t = r\frac{d\omega}{dt} \Leftrightarrow$$

$$a_t = r\alpha$$

NB: no movimento circular, r é constante

a_t – aceleração tangencial (linear)

α - aceleração angular rad/s^2

Exemplos

→ Pêndulo
→ Movimento curvilíneo

Movimento circular uniforme (m.c.u.)

$$|\vec{v}| = \text{constante}; \ \vec{v} \neq \overrightarrow{\text{constante}}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \cancel{\frac{dv}{dt}}^{\vec{0}}\,\vec{u}_t + v\frac{d\vec{u}_t}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = 0 \longrightarrow \mathbf{a_t = 0}$$

$$\frac{d\vec{u}_n}{dt} \neq \vec{0} \Rightarrow a_n \neq 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

- A aceleração normal é constante no m.c.u.
- Não há aceleração tangencial

Quando a velocidade é constante. A aceleração tangencial é nula

$$a_t = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{a_t}{r} = 0$$

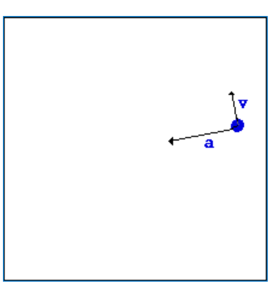
constante

$$v = cte \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = cte$$

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

1 volta $\longrightarrow$ $\Delta\theta = 2\pi$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \equiv T$$

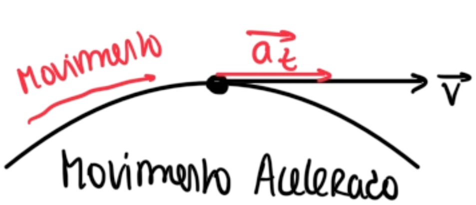


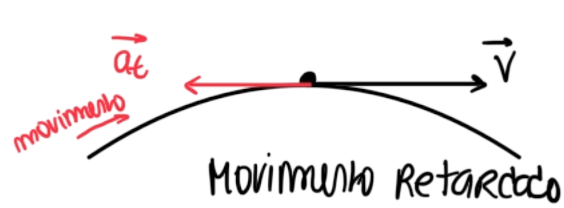
http://surendranath.tripod.com/CirclePlus/CirclePlus.html

T – período (s)

$$T = \frac{1}{f}$$

f **- frequência (Hz ou s^{-1})**





Movimento Circular - Equações cinemáticas

$$\Delta s = \int_0^t v\,dt \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{a_t t^2}{2}$$

$$\Delta v = \int_0^t a_t\,dt \qquad v = v_0 + a_t t$$

$$\Delta \theta = \int_0^t \omega\,dt$$

$$\Delta \omega = \int_0^t \alpha\,dt$$

se α = cte $\Rightarrow$

Deslocamento Angular

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

Questão 3

Um ponto descreve uma circunferência de acordo com a lei $s=t^3+2t^2$, onde *s* é medido em metro ao longo da circunferência e *t* vem em segundo.
Em t=2s, a aceleração total do ponto é $16\sqrt{2}\ ms^{-2}$. Calcule o raio da circunferência.

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\left(t^3+2t^2\right)}{dt} = 3t^2+4t \qquad a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\left(3t^2+4t\right)}{dt} = 6t+4$$

Em t=2s $\quad v(t=2) = 3\times 2^2 + 4\times 2 = 20ms^{-1}$

$$a_t(t=2s) = 6\times 2 + 4 = 16ms^{-2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

Em t=2s $\quad 16\sqrt{2} = \sqrt{16^2 + a_n{}^2}$

$$a_n = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow 16 = \frac{20^2}{r} \Leftrightarrow r = 25m$$

1ª Lei de Newton ou Lei da Inércia

Uma partícula **livre move-se com velocidade constante:** movimento em linha recta com velocidade constante ou repouso.

2ª Lei de Newton - Lei fundamental

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

$$\boxed{se\ m\ \ for\ constante}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

3 ª Lei de Newton – Lei da Acção-Reacção

As forças surgem aos pares

Para cada acção há uma reacção de igual intensidade mas de sentido oposto.

A força exercida no corpo 1 pelo corpo 2 é simétrica da força exercida no corpo 2 pelo corpo 1

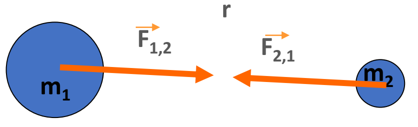
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

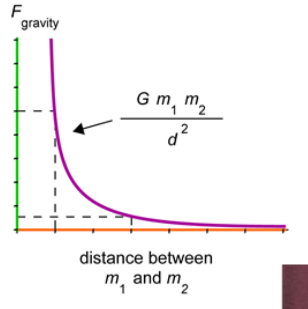
Par acção-reacção

Os pares acção-reacção actuam SEMPRE em corpos DIFERENTES

Lei da Gravitação de Newton

Forças a distância

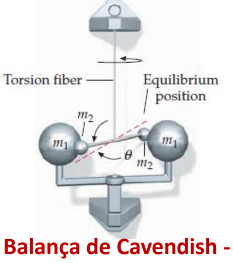




$F_{1,2}$ - Força exercida *na massa m_1* pela massa m_2

$F_{2,1}$ - Força exercida *na massa m_2* pela massa m_1

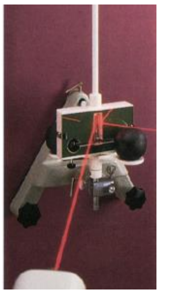
Forças atractivas!



$$|\vec{F}_{1,2}| = |\vec{F}_{2,1}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

G - Constante de Gravitação Universal

G= 6,67 x 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}



Balança de Cavendish - esquema e dispositivo laboratorial

Dispositivo experimental

Campo Gravítico

$$F_{1,2} = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}$$

O efeito de m_2 em m_1 é acelerar m_1

Então podemos escrever

$$F_{1,2} = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} = m_1 a_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{Gm_2}{r^2}$$

$$F_{1,2} = m_1 \boxed{\frac{Gm_2}{r^2}}$$

$F_{1,2} = m_1$ g

g é o CAMPO GRAVÍTICO

É a força por unidade de massa em m_1 devido à massa m_2.

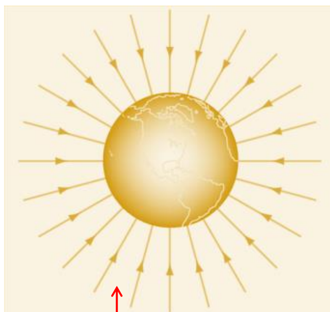
Todas as massas criam um campo gravítico **g(r)** no espaço

$$g(r) = G\frac{M}{r^2}$$

Vector dirigido para M

g é também a aceleração sofrida por uma massa colocada nesse ponto

Campo gravítico da terra (linhas de campo)



linhas de campo

$$g_0 = G\frac{M_T}{r_T^{\,2}}$$ Na superfície terrestre

$$g = G\frac{M_T}{(r_T+h)^2} \Leftrightarrow g = G\frac{M_T}{r_T^2(1+\frac{h}{r_T})^2} \Leftrightarrow$$

$$g = \frac{g_0}{(1+\frac{h}{r_T})^2}$$

h - altura acima da superfície terrestre

se h = 6 km ... g diminui 2/1000 !!

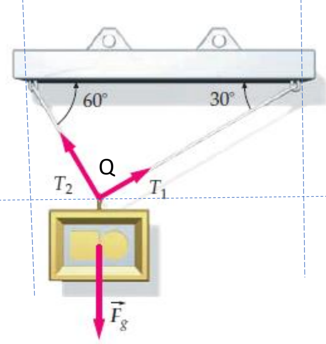
Massa *m* em equilíbrio

equilíbrio

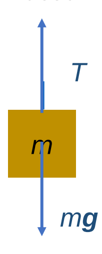
$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

equilíbrio

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$



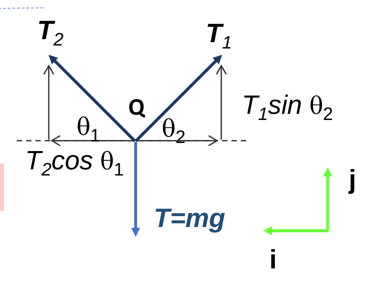
Massa m



T = mg

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}_g = m\vec{a}$$

Ponto Q



$F_{x,Res.} = T_1\cos\theta_2 - T_2\cos\theta_1 = 0$

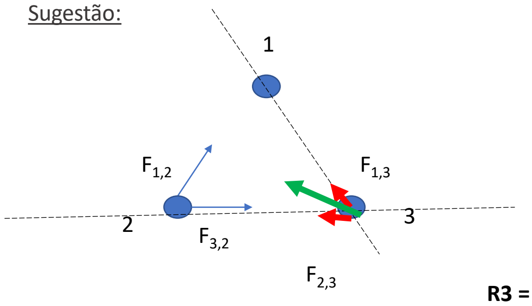
$F_{y,Res.} = T_1\sin\theta_2 + T_2\sin\theta_1 - mg = 0$

Problemas de Dinâmica

Três massas de 5 kg estão colocadas nos vértices de um triângulo equilátero, cujo lado mede 0,25 m.

Determine a intensidade, direcção e sentido da força gravitacional resultante sobre uma das massas, devido à presença das outras duas.

Sugestão:



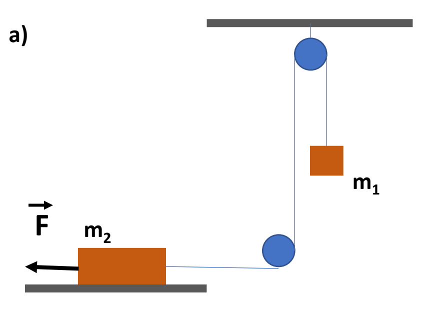
$\mathbf{F_{2,3}} = - F_{2,3}\,\hat{\mathbf{i}}$

$\mathbf{F_{1,3}} = - F_{1,3} \cos 60\,\hat{\mathbf{i}} + F_{1,3} \text{ sen } 60\,\hat{\mathbf{j}}$

$\mathbf{R3} = (- F_{2,3} - F_{1,3} \cos 60)\,\hat{\mathbf{i}} + F_{1,3} \text{ sen } 60\,\hat{\mathbf{j}}$ (N)

Problemas de Dinâmica

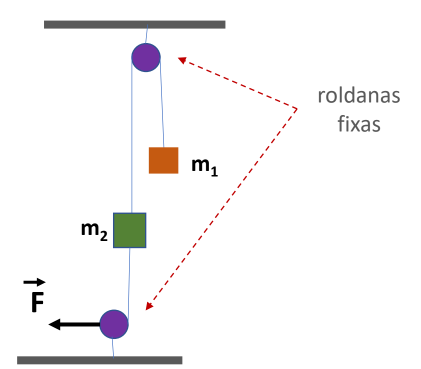
2 - Calcule a aceleração dos corpos da figura e a tensão nas cordas. Aplique ao caso em que m_1 = 50 g, m_2 = 80 g e F = 1N.



$R_1 = T - P_1 = T - m_1 g = m_1 a$

$R_2 = F - T = m_2 a$

$a_1 = a_2 = a$



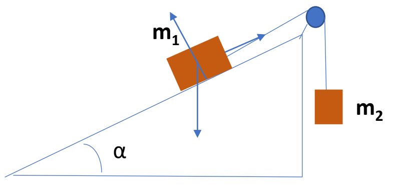
NB: As roldanas fixas servem para mudar a direcção e sentido das forças aplicadas; não diminuem a intensidade das forças aplicadas

Sugestão: Fazer o diagrama de forças em cada corpo e depois aplicar a 2ª lei de Newton a cada um deles

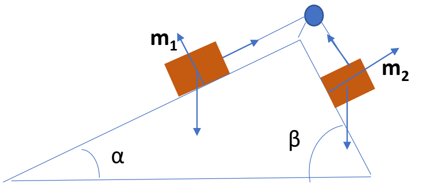
Problemas de Dinâmica

3 - Determine a aceleração com que os corpos na figura se movem e as tensões nas cordas.

a)

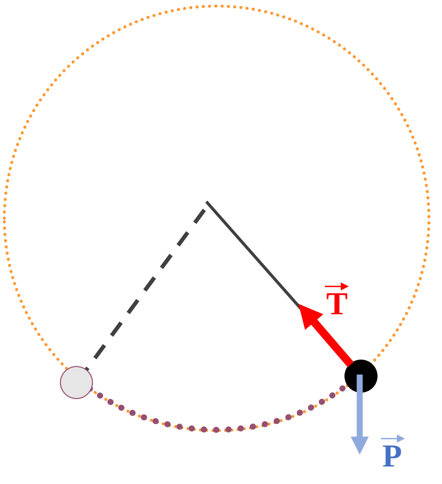


b)



NB : Considerem os valores anteriormente disponibilizados para o problema 4

PÊNDULO SIMPLES
(movimento no plano vertical)



Trajectória circular

Forças: $\vec{P}$ e $\vec{T}$

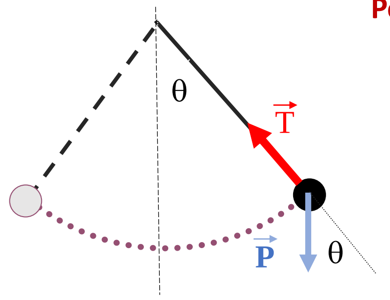
Em qualquer posição:

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/Pendulum/Pendulum.html

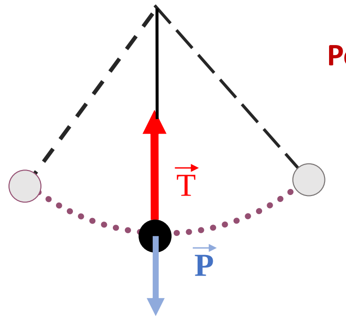
PÊNDULO SIMPLES



Posição extrema (v=0)

$$\vec{T}+\vec{P}=m\vec{a} \qquad \vec{a}=\vec{a}_t+\vec{a}_n$$

$$\begin{cases} |\vec{T}|-|\vec{P}|\cos\theta = m|\vec{a}_n| \\ |\vec{P}|\sin\theta = m|\vec{a}_t| \end{cases} \qquad \begin{matrix} |\vec{T}|-|\vec{P}|\cos\theta = m\dfrac{v^2}{L}=0 \\ |\vec{P}|\sin\theta = m|\vec{a}_t| \end{matrix}$$



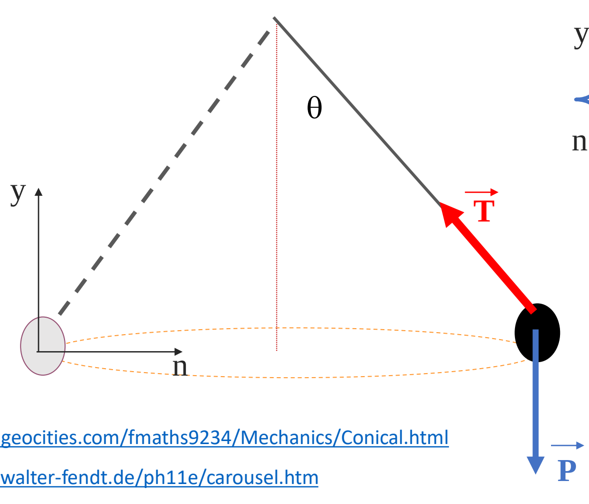
Posição de equilíbrio (θ=0)

$$|\vec{T}|-|\vec{P}| = m\frac{v^2}{L}$$

$$|\vec{a}_t| = 0$$

Valor máximo da tensão!

PÊNDULO CÓNICO
(movimento circular no plano horizontal)



$$\begin{cases} y: & |\vec{T}|\cos\theta = |\vec{P}| \\ n: & |\vec{T}|\sin\theta = m|\vec{a}_n| \end{cases}$$

Quanto vale a aceleração tangencial?

http://www.geocities.com/fmaths9234/Mechanics/Conical.html

http://www.walter-fendt.de/ph11e/carousel.htm

Problemas de Dinâmica

10 - Um corpo D cuja massa é de 6 kg esta sobre uma superfície cónica A B C e está rodando em torno do eixo EE' com uma velocidade angular de 10 rev/min.
Calcule:

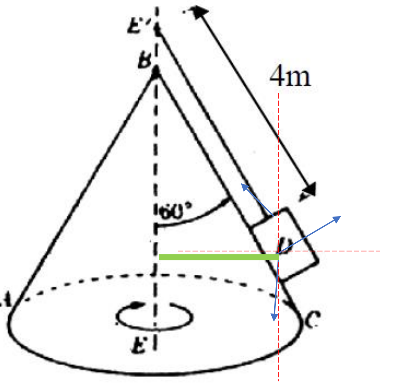
a) a velocidade linear do corpo

b) a reacção da superfície do corpo

c) a tensão no fio

d) a velocidade angular necessária para reduzir a reacção do plano a zero.

r = L sen 60



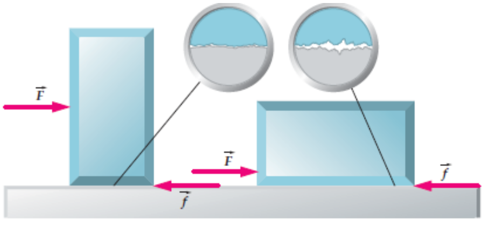
NB: o pêndulo move-se sobre o cone, descrevendo uma trajectória circular. Identificar as forças que actuam <u>sobre</u> o pêndulo e não esquecer que há aceleração centrípeta. Sendo a velocidade angular <u>constante</u>, também a velocidade linear é.
Reacção do plano zero significa que o pêndulo deixa de estar apoiado

FORÇA DE ATRITO (sólido)

Superfícies de dois materiais em contacto

A força de atrito *f* tende a impedir o movimento relativo das superfícies

Microscopicamente a força tem origem eléctrica
Lubrificação separa as superfícies



Força de atrito → estático
Força de atrito → cinético

FORÇA DE ATRITO (estático)

Na situação limite, em que **a força de atrito estático atinge o valor máximo**, verifica-se que:

a força de atrito estático máxima é proporcional à normal exercida entre as superfícies

$$f_{a.e.max} = \mu_E N$$

μ_E é o **coeficiente de atrito estático**, para as duas superfícies

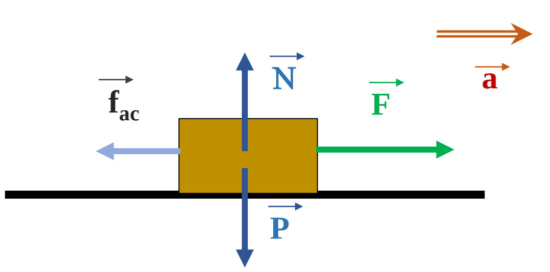
Em geral, temos:

$$f_{a.e.} \leq \mu_E N$$

Normalmente, a força de atrito não depende da área de contacto

FORÇA DE ATRITO (cinético)

Quando o corpo entra em movimento, temos uma situação com atrito cinético e verifica-se que:



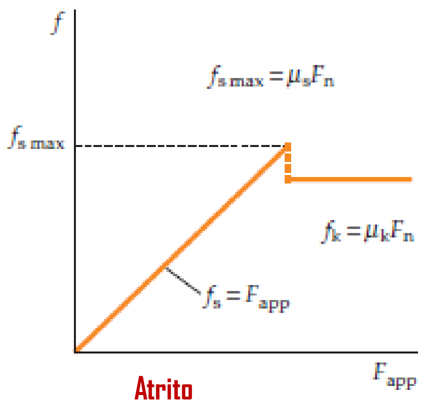
a força de atrito cinético é proporcional à normal exercida entre as superfícies

$$f_{a.c.} = \mu_C N$$

μ_C é o **coeficiente de atrito cinético**, para as duas superfícies

Normalmente, a força de atrito não depende da área de contacto

COMO VARIA A FORÇA DE ATRITO com a força aplicada?



Atrito Estático, Fe

Atrito Cinético

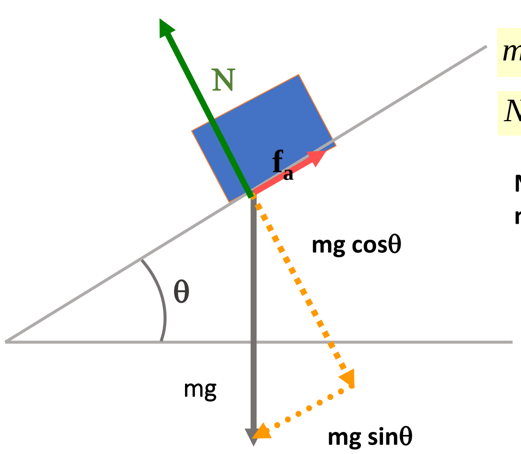
	μ_e	μ_c
Aço sobre aço	0,74	0,57
Cobre sobre aço	0,53	0,36
Borracha sobre cimento	1,0	0,8
Madeira sobre madeira	0,25-0,5	0,2
Gelo sobre aço	0,1	0,03
Teflon sobre teflon	0,04	0,04

Atrito Cinético < Atrito Estático

Como medir o coeficiente de atrito μ?

Um corpo é colocado num plano inclinado, ficando em repouso.
A inclinação θ é aumentada até atingir um valor máximo (crítico) θ_{crit} que se relaciona com μ_E.

Em repouso $\theta \le \theta_{crit}$



$$\left.\begin{array}{l} mg\sin\theta - f_{ae} = 0 \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{array}\right\} f_{ae} = N\,tg\theta$$

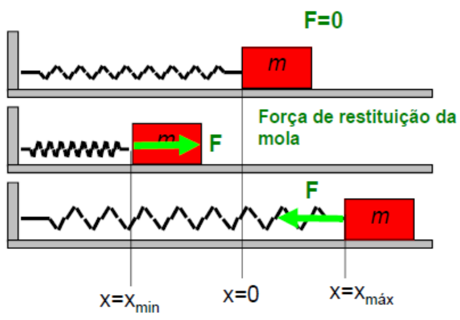
No limite, quando a força de atrito é máxima $\theta = \theta_{crit}$

$$f_{aemax} = \mu_E N = N\,tg\theta_{crit}$$

$$\boxed{\mu_E = tg\theta_{crit}}$$

$$\mu_E = 0{,}36 \Rightarrow \theta_{crit} = 20^o$$

Força elástica



Força elástica ou força restauradora, F

$$F = -kx$$

k = constante da mola

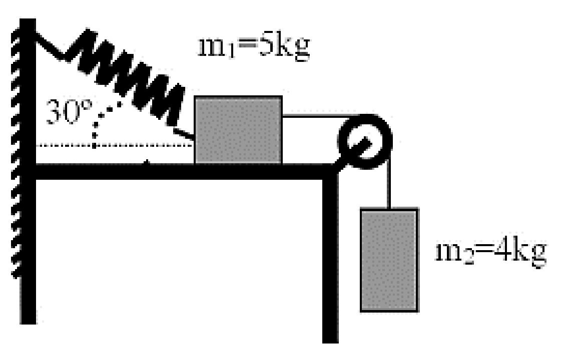
Problemas de Dinâmica

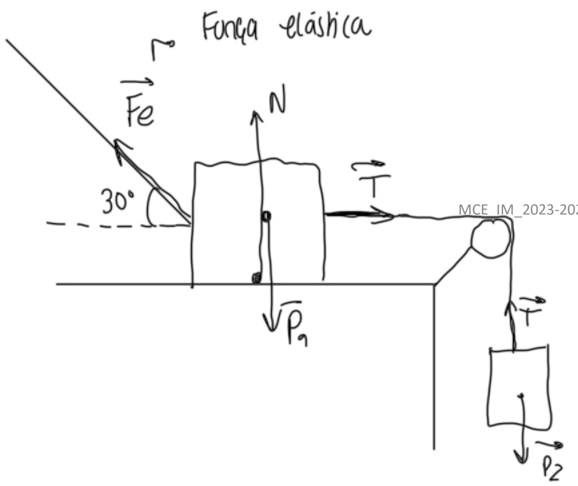
$\sum \vec{F_i} = \vec{0}$ $\qquad$ $\vec{F_e} = kx\,\hat{i}$ $\qquad$ $|\vec{F}| = kx$

19 - Considere o esquema da figura. A mola tem uma constante de força k = 400N/m. Estando o sistema em repouso, e na iminência de se movimentar, **qual o elongamento da mola** (o ângulo mantém-se constante):

a) Se não houver atrito.

b) Se o coeficiente de atrito entre m_1 e a mesa for 0,4.





$P_2 = T$

$T = F_e \cos(30°)$

$P_1 = N_1 + F_e \cos(30°)$

$$\begin{cases} P_2 = F_e \cos(30°)^{*} \\ P_1 = N_1 + F_e \sin(30°) \end{cases}$$

$* \; m_2 g = Kx \cdot \cos(30°)$

Problemas de Dinâmica

1. Determine a força de atrito exercida pelo ar sobre um corpo cuja massa é de 0,4 kg se ele cair com uma aceleração de 9,0 m/s^2.

2. Um bloco de madeira está sobre um plano inclinado cuja inclinação se pode variar. Aumenta-se gradualmente a inclinação até que o bloco comece a deslizar, para uma inclinação de 30°. Determine o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano.