Aula 10: Primitivação de funções racionais (I)

Integração de funções racionais

A seguir vamos ver como integrar funções do tipo $$\frac{N(x)}{D(x)}$$

onde N e D são polinómios em x com coeficientes reais e D é não nulo.
A este tipo de funções chamamos função racional.

(1) Se $grau(N) < grau(D)$ dizemos que $\frac{N(x)}{D(x)}$ é uma fracção própria.

(2) Se $grau(N) \geq grau(D)$, existem polinómios Q e R tais que $grau(R) < grau(D)$ e

$$N(x) = D(x)Q(x) + R(x) \, .$$

$$\begin{array}{r|l} N(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Aos polinómios Q e R chamamos, respectivamente, quociente e resto da divisão de N por D.

Aula 10: Primitivação de funções racionais (II)

Uma vez que D é um polinómio não nulo, resulta da igualdade anterior

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} .$$

Consequentemente,

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,dx .$$

Observação: Como toda a função polinomial tem uma primitiva imediata, a integração de funções racionais reduz-se ao cálculo de primitivas imediatas e à primitivação de fracções próprias.

Aula 10: Primitivação de funções racionais (III)

Definição: Chamamos fracção simples a toda a fracção do tipo

$$\frac{A}{(x-\alpha)^p} \qquad \text{ou} \qquad \frac{Bx+C}{(x^2+\beta x+\gamma)^q},$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $B, C \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que $\beta^2 - 4\gamma < 0$.

Exemplos de fracções simples:

$$\frac{2}{x-4}, \qquad \frac{1}{x^2+x+1}, \qquad \frac{1}{x^2+2x+1}, \qquad \frac{3x+5}{(x^2+x+1)^3}$$

Proposição: Toda a fracção própria pode ser decomposta numa soma de fracções simples.

Aula 10: Primitivação de funções racionais (IV)

Decomposição em fracções simples de $\dfrac{R(x)}{D(x)}$ com $\quad grau(R) < grau(D)$

1. Decompor o polinómio $D(x)$ em factores irredutíveis. Isto é, escrever

$$D(x) = a(x-\alpha_1)^{p_1}\dots(x-\alpha_n)^{p_n}(x^2+\beta_1 x+\gamma_1)^{q_1}\dots(x^2+\beta_m x+\gamma_m)^{q_m}$$

   onde $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $p_i, q_j \in \mathbb{N}$, $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$, com $\beta_j - 4\gamma_j < 0$, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

2. Fazer corresponder a cada factor de $D(x)$ uma determinada fraccção simples de acordo com o seguinte:

   (i) Ao factor de $D(x)$ do tipo $(x-\alpha)^r$ $(r \in \mathbb{N})$ corresponde

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r}$$

   onde $A_1, \cdots, A_r$ são constantes reais a determinar.

Aula 10: Primitivação de funções racionais (V)

(ii) Ao factor de $D(x)$ do tipo

$$(x^2+\beta x+\gamma)^s, \quad \text{com} \quad \beta^2-4\gamma<0 \quad \text{e} \quad s\in\mathbb{N}$$

corresponde

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+\beta x+\gamma)^2}+\cdots+\frac{B_sx+C_s}{(x^2+\beta x+\gamma)^s}$$

onde B_i, C_i são constantes reais a determinar, $\quad i=1,\cdots,s.$

(coeficientes indeterminados)

3. Escrever $\frac{R(x)}{D(x)}$ como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo
$$\frac{x+1}{x(x-1)^2(x^2+1)^3} = \frac{A}{x}+\frac{B_1}{(x-1)^1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+1)^1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+1)^2}+\frac{C_3x+D_3}{(x^2+1)^3}$$

Aula 10: Primitivação de funções racionais (VI)

Fracções Simples:

$$\frac{A}{bx^2+c} \rightsquigarrow \text{imediata} \quad ,$$

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\,\frac{2ax+b+D}{ax^2+bx+c} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow \text{imediata} \\ \dfrac{D}{ax^2+bx+c} = \dfrac{D}{a\left[\,(x+\frac{b}{2a})^2+k^2\,\right]} \rightsquigarrow x+\dfrac{b}{2a} = k\operatorname{tg} t \ , \quad t \in]0, \dfrac{\pi}{2}[. \end{cases}$$

$(\Delta = b^2 - 4ac < 0)$

Funções racionais envolvendo funções trigonométricas no seu argumento.

$$\frac{P(\operatorname{tg} x)}{Q(\operatorname{tg} x)} \rightsquigarrow \operatorname{tg} x = t \ , \qquad \frac{P(\operatorname{sen} x, \cos x)}{Q(\operatorname{sen} x, \cos x)} \rightsquigarrow x = 2z$$

Aula 10: Exercícios 1

Exemplo 5.7. $$\int \frac{x^4+2x+1}{x^3-x^2-2x}\,dx$$

Exemplo 5.8. Como calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3}dx$?

Exemplo 5.9. Como calcular $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(2x+1)(x^2+1)}dx$?

Exemplo 5.10. Para determinar o integral $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+2x+15}dx$

Exemplo 5.11. $$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

substituição: x = tg t

Primitivas por substituição da variável: Regras de substituição $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

f contém		Substituição
$\sqrt[k]{a+bx}$	$\rightsquigarrow$	$\sqrt[k]{a+bx}=t \quad (t \geq 0 \text{ se } k \text{ par})$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\rightsquigarrow$	$x = a \operatorname{tg} t$
$\sqrt{a^2-x^2}$	$\rightsquigarrow$	$x = a \operatorname{sen} t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$\rightsquigarrow$	$x = a \sec t$
$\sqrt{ax^2+bx+c}$	$\rightsquigarrow$	$x+\dfrac{b}{2a}=z$

$$\boxed{ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+K\right]} \qquad K=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}$$

Fracções Simples: $\dfrac{A}{bx^2+c} \rightsquigarrow$ imediata

$$\frac{P(\operatorname{tg} x)}{Q(\operatorname{tg} x)} \rightsquigarrow \operatorname{tg} x = t\,, \qquad \frac{P(\operatorname{sen} x, \cos x)}{Q(\operatorname{sen} x, \cos x)} \rightsquigarrow x = 2z$$

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\,\frac{2ax+b+D}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow \begin{cases} \dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c} \rightsquigarrow \text{imediata} \\[2ex] \dfrac{D}{ax^2+bx+c} = \dfrac{D}{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+k^2\right]} \rightsquigarrow x+\dfrac{b}{2a}=k\operatorname{tg} t\,, \quad t\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

$(\Delta = b^2-4ac<0)$

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\,u^{p-1}\,u'$

$(\text{arcsen}\,(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

$(\text{arctg}\,(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\cos u)' = -u'\,\text{sen}\,u$

$(\sec u)' = u'\,\sec(u)\text{tg}\,(u)$

$(\text{sen}\,u)' = u'\,\cos u$

$(\text{cosec}\,u)' = -u'\,\text{cosec}\,(u)\text{cotg}\,(u)$

$(\text{tg}\,u)' = u'\,\sec^2 u$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(\text{cotg}\,u)' = -u'\,\text{cosec}^2 u$

$(a^u)' = \dfrac{u'a^u}{\ln(a)},\ a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$(\text{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\text{tgh}\,u)' = u'\,\text{sech}^2 u$

$(\text{sech}\,u)' = -u'\,\text{sech}\,u\,\text{tgh}\,u$

$(\text{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\text{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\,u^p\,dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + c,\quad (p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\,dx = \arcsin(u) + c$

$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln(|u|) + c$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \arctan(u) + c$

$\int u'\,\sin u\,dx = -\cos u + c$

$\int u'\,\sec u \tan u\,dx = \sec u + c$

$\int u'\,\cos u\,dx = \sin u + c$

$\int u'\,\text{cosec}\,u\,\text{cotgu}\,\text{dx} = -\text{cosec u} + \text{c}$

$\int u'\,\sec^2 u\,dx = \tan u + c$

$\int u'\,e^u\,dx = e^u + c$

$\int u'\,\text{cosec}^2 u\,dx = -\text{cotgu} + \text{c}$

$\int u'a^u\,dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + c,\quad a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,dx = \text{senh}^{-1} u + C$

$\int u'v + uv'\,dx = uv + C$

$\int u'\,\text{sech}^2 u\,dx = \text{tgh}\,u + C$

$\int u'\,\text{sech}\,u\,\text{tgh}\,u\,dx = -\text{sech}\,u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\,dx = \text{senh}^{-1}(u) + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\,dx = \text{tgh}^{-1} u + C$