On White II, Wassily Kandinsky 1923

Mecânica e Campo Eletromagnético

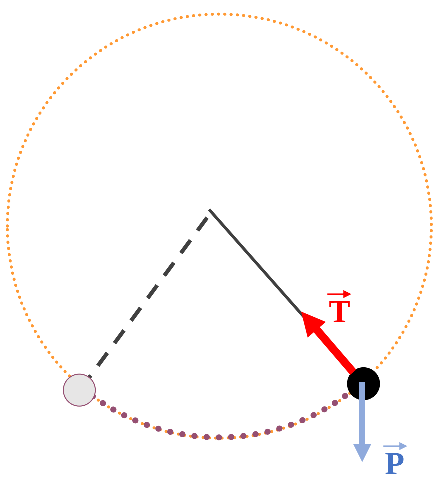
Aula 3

1.3. Trabalho e Energia

Trabalho realizado por uma força constante e variável. Energia cinética e teorema do trabalho. Potência. Forças conservativas e forças não conservativas. Energia potencial. Conservação da energia.

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

PÊNDULO SIMPLES (movimento no plano vertical)



Trajectória circular

Forças: $\vec{\boldsymbol{P}}$ e $\vec{\boldsymbol{T}}$

2ª lei de Newton

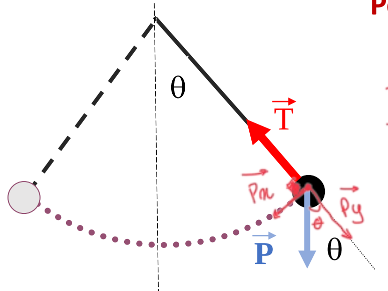
Em qualquer posição:

$$\vec{FR} = \vec{T} + \vec{P} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/Pendulum/Pendulum.html

PÊNDULO SIMPLES

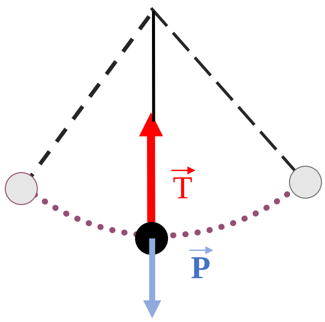


Posição extrema (v=0)

$$\vec{T} + \vec{P} = m\vec{a} \qquad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

$\vec{P_n} = P \cdot \sin(\theta)$
$\vec{P_y} = P \cdot \cos\theta$

$$\begin{cases} |\vec{T}| - |\vec{P}|\cos\theta = m|\vec{a}_n| \\ |\vec{P}|\sin\theta = m|\vec{a}_t| \end{cases} \qquad \begin{array}{l} |\vec{T}| - |\vec{P}|\cos\theta = m\dfrac{v^2}{L} = 0 \\ |\vec{P}|\sin\theta = m|\vec{a}_t| \end{array}$$



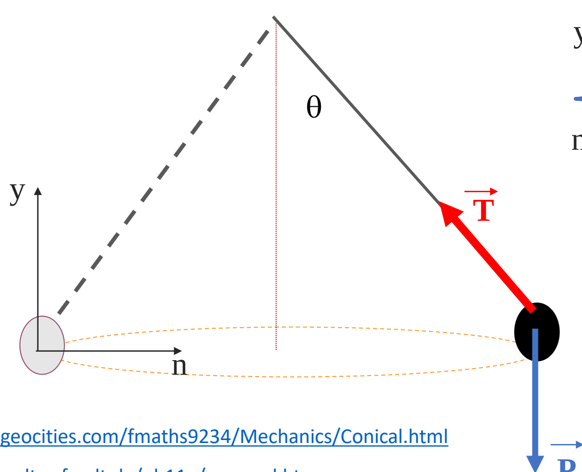
Posição de equilíbrio (θ=0)

$$|\vec{T}| - |\vec{P}| = m\frac{v^2}{L}$$

$$|\vec{a}_t| = 0$$

Valor máximo da tensão!

PÊNDULO CÓNICO
(movimento circular no plano horizontal)



$$\begin{cases} y: & |\vec{T}|\cos\theta = |\vec{P}| \\ n: & |\vec{T}|\sin\theta = m|\vec{a}_n| \end{cases}$$

Quanto vale a aceleração tangencial?

http://www.geocities.com/fmaths9234/Mechanics/Conical.html

http://www.walter-fendt.de/ph11e/carousel.htm

Problemas de Mecânica Cap. 2

10 - Um corpo D cuja massa é de 6 kg esta sobre uma superfície cónica A B C e está rodando em torno do eixo EE' com uma velocidade angular de 10 rev/min.
Calcule:

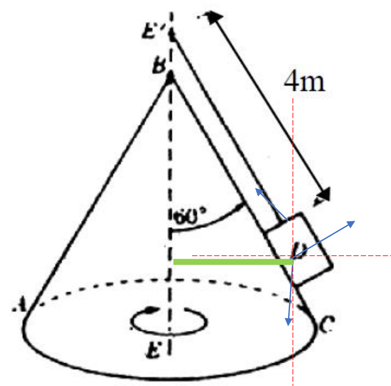
a) a velocidade linear do corpo

b) a reacção da superfície do corpo

c) a tensão no fio

d) a velocidade angular necessária para reduzir a reacção do plano a zero.

r = L sen 60



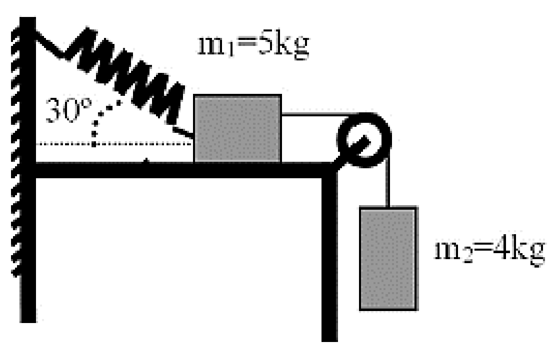
NB: o pêndulo move-se sobre o cone, descrevendo uma trajectória circular. Identificar as forças que actuam <u>sobre</u> o pêndulo e não esquecer que há aceleração centrípeta. Sendo a velocidade angular <u>constante</u>, também a velocidade linear é.
Reacção do plano zero significa que o pêndulo deixa de estar apoiado

Cap. 2

19 - Considere o esquema da figura. A mola tem uma constante de força k = 400N/m. Estando o sistema em repouso, e na iminência de se movimentar, **qual o elongamento da mola** (o ângulo mantém-se constante):

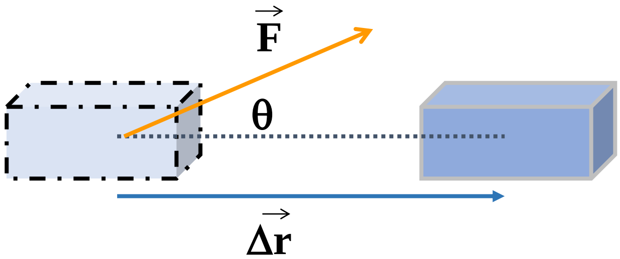
a) Se não houver atrito.

b) Se o coeficiente de atrito entre m_1 e a mesa for 0,4.



Trabalho realizado por uma força constante

Um corpo sofre um deslocamento, estando sob a acção duma força F constante (entre outras)



O trabalho W realizado pela força F durante o deslocamento Δr é dado pelo produto

$$W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta$$

Ou seja, pelo

produto interno (produto escalar)

$$\boxed{W = \vec{F} \bullet \Delta\vec{r}}$$

Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando a força F depende da posição x?

Suponhamos um deslocamento segundo x e $F=F_x(x)$

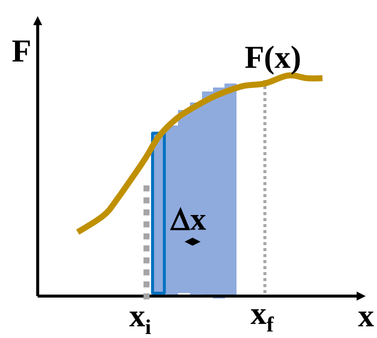
Para um deslocamento infinitesimal Δ x

$\Delta w = F_x(x) . \Delta x$

$$W = \sum_{x_i}^{x_f} F_x(x).\Delta x$$

No limite Δ x--> 0

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)dx$$



Trabalho de forças variáveis

Como generalizar quando o deslocamento não é rectilíneo?

$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}(\vec{r}) \bullet d\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} F_x(x,y,z)dx + F_y(x,y,z)dy + F_z(x,y,z)dz$$

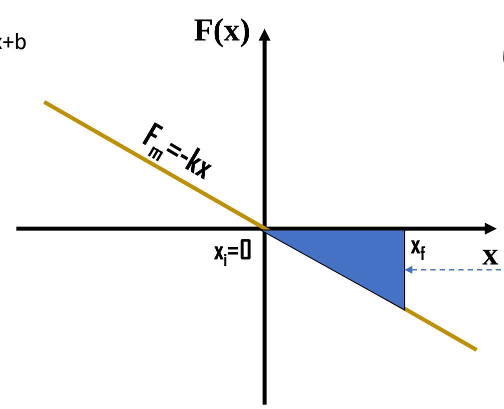
$$W = \int_{r_i}^{r_f} F_x(x,y,z)dx + \int_{r_i}^{r_f} F_y(x,y,z)dy + \int_{r_i}^{r_f} F_z(x,y,z)dz$$

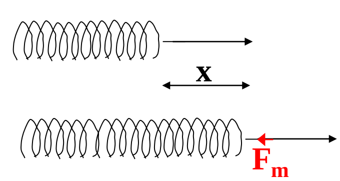
Integral de caminho

O trabalho será dado pela soma de 3 integrais, um para cada componente. Em cada um, as coordenadas têm que ser reescritas à custa de (cada) variável de integração, usando a equação que descreve a trajectória.

Exemplo - Trabalho realizado por uma mola

y=mx+b





Trabalho realizado PELA mola

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)dx \qquad W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)dx$$

$$w = -k\int_{x_i}^{x_f} x\,dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

Trabalho realizado PELA mola

$$x_i = 0 \Rightarrow W = -\frac{1}{2}kx_f^2$$

Trabalho e Energia

Em muitos casos, é possível descrever o movimento de um corpo, relacionando directamente a velocidade e o deslocamento, sem explicitar o tempo.
A partir do trabalho da força resultante num dado deslocamento, é possível calcular a variação de velocidade correspondente

Suponhamos que uma partícula está sujeita a um conjunto de forças, de resultante F. Para um deslocamento segº xx', tem-se:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\,dx$$

Usando a 2ª Lei de Newton pois F é resultante

$$a = \frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dx}\right)\times\left(\frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)\times v$$

Eliminando t e explicitando a velocidade

Trabalho e Energia

$$W = \int_{x_i}^{x_f} mv\left(\frac{dv}{dx}\right)dx = \int_{x_i}^{x_f} m\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}\right)dx$$

$$W = \int_{vi}^{vf} mv\,dv$$

$W_{FR} = \Delta Ec$

$$W_{RES} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

TEOREMA DO TRABALHO E ENERGIA

$$\boxed{W_{RES} = E_{cf} - E_{ci} = \Delta E_c}$$

Este resultado é válido, de forma geral, para uma qualquer trajectória

Potência de uma força

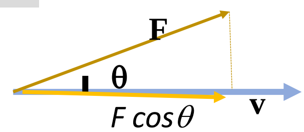
Potência é a taxa temporal com que se realiza trabalho

Realizando um trabalho Δ W num intervalo de tempo Δ t

$$\boxed{P_{media} = \frac{\Delta W}{\Delta t}} \qquad P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \bullet \Delta \vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow P = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

$$P = \left|\vec{F}\right| v \cos\theta$$



Potência de uma força

A unidade S.I. de potência é o watt = joule.segundo^{-1}

isto é, W = J.s^{-1}

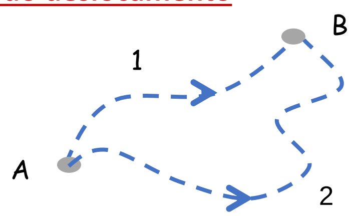
O quilowatt-hora (kwh) é uma unidade de energia e <u>NÃO</u> de potência

1 kwh =1000 W x 3600s =3,6 MJ (mega joule)

Forças Conservativas

Uma força é CONSERVATIVA se o trabalho realizado num deslocamento entre dois pontos arbitrários for INDEPENDENTE do caminho seguido entre esses pontos

Nestas condições, <u>o trabalho é apenas função das coordenadas final e inicial do deslocamento</u>



F conservativa

$$W_{AB}(\text{ca minho } 1) = W_{AB}(\text{ca minho} 2)$$

Por outro lado, **o trabalho realizado ao longo dum trajecto FECHADO é NULO**

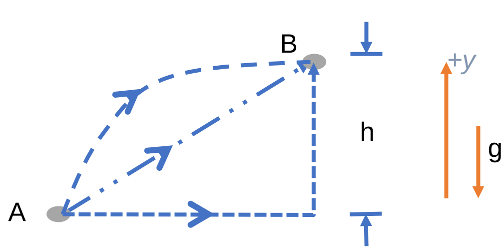
Exemplos de forças conservativas

- *Gravítica*
- *Electrostática*
- *Elástica duma mola*

!

No caso em que a força gravítica é constante (junto à superfície da Terra), o trabalho só depende da diferença de alturas entre os pontos final e inicial

Porquê?



$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B F_y dy =$$

$$= \int_A^B -mg\, dy = -mg(y_B - y_A)$$

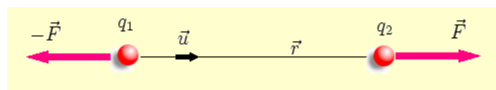
Para qualquer trajecto de A até B $W_{AB} = -mg(y_B - y_A)$

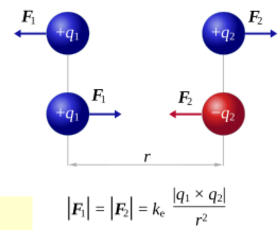
$W_{\vec{P}} = -\Delta E_p$

Exemplos de forças conservativas

Força Gravítica $F = -G\dfrac{mM}{r^2}$

Força Electrostática $F = \pm k\dfrac{qQ}{r^2}$



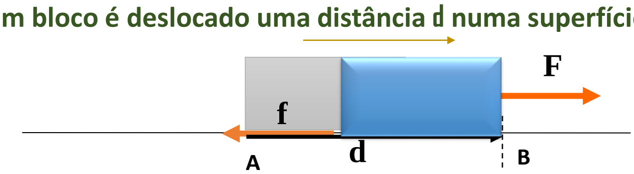


Força Elástica F= -K Δx

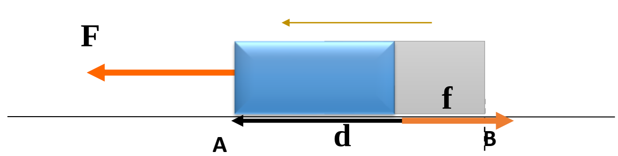
Forças não-conservativas: atrito

Neste caso, **o trabalho realizado num trajecto fechado não é nulo**, como podemos ver com a força de atrito cinético

Um bloco é deslocado uma distância d numa superfície com atrito f



Trabalho da força de atrito A•B $W_{AB} = -fd$



Trabalho da força de atrito B•A $W_{BA} = -fd$

$W_{AA}(ida\,e\,volta) = -2\,fd \neq 0$

Forças Conservativas e Energia Potencial

Como o trabalho realizado por uma força conservativa é apenas função das posições inicial e final, podemos definir uma função (de ponto): a **ENERGIA POTENCIAL**:

$$W_{fcons} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \underbrace{-\Delta E_P}_{= \Delta EC} = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$E_{potencial}$ no ponto inicial

$E_{potencial}$ no ponto final

O trabalho realizado por uma força conservativa de uma posição inicial para uma posição final corresponde ao *simétrico* da variação da ENERGIA POTENCIAL nesse trajecto

$W_P = -\Delta E_P$

↳ mas agora aplica-se para qualquer força conservativa

Exemplos - Energia Potencial Gravítica

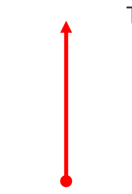
Para o caso do peso, considerado constante junto à superfície da Terra, temos:

$$W_{peso} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{P} \bullet d\vec{r} = mgy_i - mgy_f$$

Energia potencial gravítica
(junto à superfície da Terra)

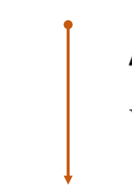
$$EP_g = mgy$$

A menos de uma constante, que define a origem, i.é, o zero da E_{Pg}



$\Delta EP > 0$
$W < 0$

superfície da Terra



$\Delta EP_g < 0$
$W > 0$

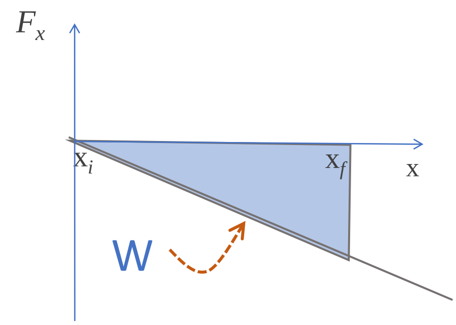
superfície da Terra

Exemplos - Energia Potencial Elástica

Para a mola elástica, em que F = -k x

o trabalho de x_i até x_f é dado por:

$$W_{i\to f} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$



Define-se a **energia potencial elástica** da mola como:

$$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2$$

Nota:

x = 0 é a posição de equilíbrio; não é arbitrária.

Lei de conservação da Energia Mecânica

Se uma partícula sofre apenas a acção de uma força conservativa **F** num deslocamento duma posição P_i para P_f,

Do **teorema do Trabalho-Energia**, obtém-se:

$$W_{i\to f} = \int_{P_i}^{P_f} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$$

Como F é conservativa:

$$W_{i\to f} = -\Delta E_P = E_{Pi} - E_{Pf}$$

$$E_{Pi} - E_{Pf} = E_{cf} - E_{ci}$$

$$E_{ci} + E_{Pi} = E_{cf} + E_{Pf}$$

A soma é constante!

$$E_M = E_c + E_P$$

Então a ENERGIA MECÂNICA É CONSTANTE !

Lei de conservação da Energia Mecânica

Sob a acção de uma força conservativa **F**, a energia mecânica é conservada:

$$\boxed{E_M = E_c + E_P}$$

$$E_{Mi} = E_{Mf} \Leftrightarrow \Delta E_M = 0$$

Havendo várias forças conservativas aplicadas ao corpo, a cada uma está associada uma energia potencial, pelo que a energia mecânica é dada por:

$$\vec{F}_{res} = \sum_{varias\,Ep} \vec{F}_{cons} \Rightarrow \boxed{E_M = E_c + \sum_{varias\,Ep} E_P}$$

Energia Mecânica

Em geral, numa partícula estarão aplicadas forças conservativas (F_{cons}) e forças não-conservativas (F_{NC})

A resultante das forças será: $\vec{F}_{res} = \sum_{varias\,Ep} \vec{F}_{cons} + \vec{F}_{NC}$

Num deslocamento de P_i para P_f $\quad W_{i\to f}\left(F_{res}\right) = \Delta E_C$

Por outro lado, $\quad W_{i\to f}\left(F_{res}\right) = W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) + W_{i\to f}\left(F_{NC}\right)$

$$W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) = -\sum \Delta E_P$$

$$\begin{aligned} W_{i\to f}\left(F_{NC}\right) &= W_{i\to f}\left(Fres\right) - W_{i\to f}\left(\sum F_C\right) = \\ &= \Delta E_C - \left(-\sum \Delta E_P\right) = \\ &= \Delta E_C + \sum \Delta E_P = \Delta E_M \end{aligned}$$

$$\boxed{W_{i\to f}\left(F_{NC}\right) = \Delta E_M}$$

Energia Mecânica

Deste modo, num deslocamento de P_i para P_f

$$W_{i\to f}\left(Fres\right)=\Delta E_C$$

$EM_i = EM_f + W_{Fnc}$

$EM_f - EM_i = W_{Fnc}$

$$W_{i\to f}\left(\sum F_C\right)=-\sum \Delta E_P$$

$$\boxed{W_{i\to f}\left(F_{NC}\right)=\Delta E_M}$$

Há variação da energia mecânica,
se as forças não conservativas realizarem trabalho

Lei de Conservação da Energia

Quando temos forças não-conservativas a realizar trabalho, a energia inicial vai transformar-se noutras formas não mecânicas, por exemplo, calor devido ao atrito. Genericamente, designamo-la por **energia interna U**.

$$\Delta E_c + \Delta E_P + \Delta U = 0$$

Energia convertida noutras formas

A energia total dum sistema isolado é constante.

Há apenas transformações em diversas formas de energia

Se incluirmos os efeitos relativistas, teremos que considerar a contribuição da energia em repouso (massa)