Aula 24: Equação diferencial ordinária (EDO)

- Equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n ($n \in N$):
  equação do tipo $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (y = y(x))$
- EDO está na forma normal: quando a derivada de maior ordem está explicitamente expressa em função das restantes variáveis: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$.
- A ordem de uma EDO é a maior ordem da derivada de y.
- Eq. dif. ordinária porque y é função de uma só variável independente (muitas vezes omitida).
- $y^{(n)}$, ou $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, denota a derivada de ordem n da função y.

Exemplos:

- Edos de ordem 1: $x(y')^4 + ye^x = \sqrt{x}$.
- Edos de ordem 2: $\frac{e^x y'' + xy'}{y} = x^2$.
- Edos de ordem 3: $y\, y''' + xy'' + y' - y = e^x$.

Aula 24: Integral geral de uma EDO de ordem n

- Também se chama integral geral de uma equação diferencial de ordem n a uma equação $f(x, y, c_1, \ldots, c_n) = 0$ com n constantes de integração que implicitamente representa a solução $y = f(x, c_1, \ldots, c_n)$ da equação diferencial (nalguma vizinhãnça de x). É esta última interpretação que iremos usar nos exercícios.

- Uma solução particular (ou integral particular) é uma solução que se obtém dum integral geral por concretização de todas as suas constantes de integração.

- Uma solução que não seja solução particular de nenhum integral geral chama-se solução singular.

- Uma solução que não seja solução particular de um dado integral geral será também dito uma solução singular relativo a esse integral geral.

- Uma equação diferencial direta $y' = f(x)$, $x \in I$, tem solução geral $y = \displaystyle\int f(x)dx + C$ $(x \in I)$. Mais geralmente, equações diferencias diretas de ordem n, $y^{(n)} = f(x)$ resolvem-se por n integração sucessivas.

Aula 24: Exercíos 1 (exemplos)

1. Determine uma eq. dif. para a qual a família de curvas $y = e^{cx}$ é um integral geral. Res: Com 1 parâmetro c a família só pode ser integral geral de uma eq. dif. de ordem 1: $y' = ce^{cx} = cy$. Ora $\ln y = cx$. Logo $y'x = ycx = y \ln y$. A equação diferencial é $y'x - y\ln y = 0$.

2. Determine uma eq. dif. para a qual a família de curvas $y = Ae^{Bx}$ é um integral geral. Res: Com 2 parâmetros A e B, a família só pode ser integral geral de uma eq. dif. de ordem 2: $y' = ABe^{Bx} = B\,Ae^{Bx} = By$. Logo $y'' = By'$. Multiplicando por y: $y''y = Byy' = (y')^2$. Portanto, a equação diferencial é $y''y - (y')^2 = 0$.

3. Determine uma edo para a qual a família de curvas $y = A\,\text{sen}\,(x + B) + C$ é um integral geral. Sol: $y''' + y' = 0$

4. A equação diferencial $(y')^2 = 1$ tem dois integrai gerais: $y = x + c$ e $y = -x + c$. Qualquer solução particular duma é solução singular da outra.

5. A equação dif. $xy' = 4y$ (eq. dif. variáveis separáveis) possui uma infinidade de integrais gerais. Uma delas, a mais óbvia, é $y = cx^4$ (que é a que vai ser calculada pelo método das eq. de variáveis separáveis).

6. A equação $(y')^2 - 4y = 0$ tem integral geral $y = (x + c)^2$, c constante arbitrária. $y = x^2$ é uma solução particular e $y = 0$ é uma solução singular.

7. Determine a solução geral das equações diferenciais diretas: $y' = cos(x)$, $y'' = xe^x$, $y + xy' = e^x$, e $y' - yx = 0$.

Definição: Definição 2.3 Chama-se **problema de valores iniciais** (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma equação diferencial de ordem n satisfazendo n certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto x_0:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

- Resolver um PVI significa determinar a(s) solução(ões) da equação diferencial de ordem n envolvida que satisfaz(em) as n condições iniciais no único ponto x_0 (notar que $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ são números reais dados).

9. Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

10. Determine a solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + 3x^2 = 0 \\ y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

11. A equação diferencial de valores iniciais

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

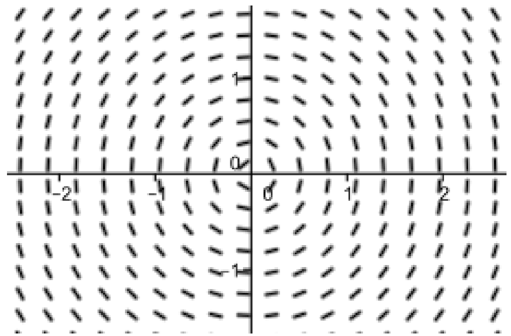
não tem solução, pois a única solução de $|y'| + |y| = 0$ é $y = 0$.

Aula 24: Equações diferenciais de primeira ordem

- As equaçoes dif. de 1^a ordem que vamos estudar são equações do tipo

$$y' = f(x, y), \text{ onde } f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}.$$

- As soluções deste tipo de equações diferenciais podem ser visualizadas geometricamente no plano XOY através do campo de declives: em cada ponto (x, y) do plano, associa-se um pequeno segmento de reta com declive y', dado pelo valor de $f(x, y)$ (ver geogebra CampoDeDeclives). Exemplo, o campo de declives de $y' = -\dfrac{x}{y}$



Como se pode observar as soluções são circunferências concêntricas na origem.

- O caso mais simples, as equações diferenciais diretas $y' = g(x)$, resolve-se por primitivação direta: $$y = \int g(x)dx + c.$$

Resumo - EDOs de de 1ª ordem

1. EDOs de variáveis separáveis: $y' = \dfrac{p(x)}{q(y)} \Leftrightarrow q(y)\,\mathrm{d}y = p(x)\,\mathrm{d}x$. Resol.

   $$\int q(y)dy = \int p(x)dx + C.$$

2. EDO homogénea: $y' = g(\frac{y}{x})$. A substituição $\frac{y}{x} = z$ transforma na eq. dif. de variáveis separáveis: $xz' + z = g(z)$.

3. EDOs exata: $M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \Leftrightarrow M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ com $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Integral geral: $F(x,y) = C$, em que $F(x,y)$ é calculado de $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ e $N = \frac{\partial F}{\partial y}$.

   NÃO SAI

4. EDO linear de 1^a ordem: $y' + p(x)y = q(x)$. Factor integrante $\mu(x) = e^{P(x)}$, onde $P(x) = \int p(x)dx$. Então $\mu(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) = (\mu\,\mathbf{y})'$ e a EDO fica $(\mu\,\mathbf{y})' = \mu q(x)$. A solução é: $\mu(x)y = \int \mu(x)q(x)\,dx + c$.

5. EDO de Bernoulli: $y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha} \xrightarrow[\text{dividir por } y^{\alpha}]{} y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$, com $0, 1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. A substituição $z = y^{1-\alpha}$ transforma na EDL de 1ª ordem: $z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x)$.

A eq. dif. $y' = f(x, y)$ diz-se de variáveis separáveis se

$$\boxed{y' = f(x, y) = \frac{p(x)}{q(y)} \qquad \text{com} \quad q(y) \neq 0}$$

Forma separada duma eq. dif. de var. separáveis:

$$\boxed{q(y)\, y' = p(x) \qquad \text{ou} \qquad q(y)dy = p(x)dx}$$

As funções p e q assumem-se contínuas nos respetivos intervalos.

Resolução: obtém-se integrando ambos os membros da forma separada:

$$\boxed{\int q(y)dy = \int p(x)dx + C}$$

Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs:

1. $xy' - y = 0$ Sol: $y = c\,x,\ c \in \mathbb{R}$
1. $x + yy' = 0$ Sol: $y^2 + x^2 = c,\ c \in \mathbb{R}_0^+$
2. $(t^2 - xt^2)\frac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2$ Sol: $x\,e^{\frac{1}{x}} = c\,te^{-\frac{1}{t}},\ c \neq 0;\ x = 0$ sol. singular.

Resolva os seguintes problemas de Cauchy: (S.P.C. - Solução do P. de Cauchy)

1. $xy' + y = y^2;\ \ y(1) = 1/2$ Sol: $y = \frac{1}{1-c\,x}$, S.P.C.: $y = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$.
2. $x(y+1) + y'\sqrt{4+x^2} = 0;\ y(0) = 1;$ Sol: $y=\frac{c}{e^{\sqrt{x^2+4}}}$-1, S.P.C.: $y = 2e^{2-\sqrt{x^2+4}}$-1
3. $(1+x^3)y' = x^2y;\ \ y(1) = 2.$ Sol: $y = c\sqrt[3]{x^3+1}$, S.P.C.: $\sqrt[3]{4(x^3+1)}$

Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs:

1. $y + y'\operatorname{cosec}(x) = 0$ Sol: $y = ce^{\cos x},\ c \in \mathbb{R}$.
2. $y^2 + y = (x^2 - x)y'$ Sol: $\frac{y}{y+1} = ce^{\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}},\ c \in \mathbb{R}$. $y = -1$ é uma sol. singular.
3. $y'\operatorname{sen}(x) + y\cos(x) = 0$ Sol: $y = \frac{c}{\operatorname{sen} x},\ c \in \mathbb{R}$.
4. $(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$ Sol: $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + c),\ c \in \mathbb{R}$.

Aula 24: EDOs homogéneas

A eq. dif. $y' = f(x,y)$ diz-se homogénea se $f(x,y)$ é homogénea (de grau zero[a]), isto é, se $\boxed{f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)}$, $\forall\,(x,y) \in D$, $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$, tais que $(\lambda x, \lambda y) \in D$.

Neste caso, $f(x,y) = f(1, \frac{y}{x}) = g(\frac{y}{x})$, $(x \neq 0)$, pelo que uma equação homogénea pode sempre escrever-se na forma

$$\boxed{y' = g(\tfrac{y}{x})}$$

em que g é uma função de uma variável apenas.

Resolução: Através da mudança de variável $\boxed{\dfrac{y}{x} = z}$, a edo homogénea transforma-se numa edo de variáveis separáveis em x e z: $\boxed{z + xz' = g(z)}$ cuja solução é $z = h(x) + C$, ou $W(z, x, C) = 0$.

Revertendo a substituição, obtém-se a solução da edo original: $\frac{y}{x} = h(x) + C$ ou $W(\frac{y}{x}, x, C) = 0$.

[a] Um função $f(x,y)$ diz-se homogénea de grau m se $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x,y)$.

Aula 24: Exercícios 4

Verifique que cada uma das seguinte EDOs é homogénea e determine o seu integral geral:

(a) $xe^{\frac{y}{x}}y' = ye^{\frac{y}{x}} + x;$ Sol: $y = x\,ln(ln(|x|) + c)$

(b) $(x^3 + y^3)dx - y^2xdy = 0;$ Sol: $y = x\,\sqrt[3]{c + 3\ln|x|}$

(c) $(x + y)dx + (y - x)dy = 0;$ Sol: $\ln(x^2 + y^2) = 2\arctan\dfrac{y}{x} + c$

(d) $(2y - x)y' = x - y;$ Sol: $\dfrac{\sqrt{2}\,y - x}{\sqrt{2}\,y + x} = c\,|2y^2 - x^2|^{\sqrt{2}},\ c \neq 0$

(e) $(x + y)y' = x - y;$ Sol: $y^2 + 2xy = x^2 + c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2x^2 + c} - x$

Aula 24: EDOs Exatas

$$\text{EDOS do tipo:} \quad M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \;\Leftrightarrow\; M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

A edo (1) diz-se exata se existe uma função $F(x,y)$ com derivadas parciais contínuas tal que

$$\boxed{\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = M(x,y) + N(x,y)y'\,. \qquad (2)}$$

Aplicando a regra da cadeia, (1) é exata se e só se $\boxed{M = \dfrac{\partial F}{\partial x} \text{ e } N = \dfrac{\partial F}{\partial y}.}$

Teorema 1 (Critério): Se M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$ e $\frac{\partial N}{\partial x}$ são contínuas num aberto *simplesmente conexo* $D \subset \mathbb{R}^2$, então $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata se e só se $\boxed{\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}\,.}$

Isto porque $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Se (1) é exata, então a edo (1) torna-se numa edo direta: $\boxed{\dfrac{d}{dx}F(x,y(x)) = 0 \qquad (2)}$ cuja solução é $\boxed{F(x,y) = C\,.}$ Isto é, qualquer função $y = \phi(x)$ que satisfaça esta equação é solução da edo (1).

Aula 24: EDOs   Exatas

Critério: M, N, $\frac{\partial M}{\partial y}$, $\frac{\partial N}{\partial x}$ contínuas em $\mathbb{R}^2$, então (1) é **exata** se e só se $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Sendo (1) exata então existe uma função $F(x, y)$ com derivadas parciais contínuas tal que

$$\frac{d}{dx}F(x, y(x)) = M(x, y) + N(x, y)y'. \quad (2)$$

Cálculo de $F(x, y)$: Resolver o sistema

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y) \end{cases}}$$

por integração "parcial" de uma equação em ordem a uma variável (tomando a outra constante); a constante de integração vem dependente da variável tomada constante.
Derivar parcialmente em ordem à variável tomada constante e igualar à outra equação para determinar a constante de integração anterior.

Solução da EDO: A solução da EDO é $\boxed{F(x, y) = C}$, pois de (1) e (2) sai que a edo (1)

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}F(x, y(x)) = 0.$$

Aula 24: Exercícios 5

A. Verifique se a EDO é exata e no caso afirmativo determine as soluções na forma implícita.

(1) $(2y^2+2x)dx+4xydy=0.$ Sol: $F(x,y)=2xy^2+x^2$ sol da EDO: $F(x,y)=C \Leftrightarrow 2xy^2+x^2=C$

(2) $\sin y+(y^2-x\sin y)y'=0.$ Sol: Não é exata

(3) $\cos y+(y^2-x\sin y)y'=0.$ Sol: $x\cos y+\frac{y^3}{3}=C$

(4) $(2xy-3x^2)dx+(x^2-2y)dy=0.$ Sol: $F(x,y)=x^2y-y-x^3$ sol. da EDO: $F(x,y)=C \Leftrightarrow x^2y-y-x^3=C.$

(5) $y+2xe^y+(x^2e^y+x-2y)y'=0.$ Sol: $F(x,y)=yx+x^2e^y-y^2$ sol da EDO: $F(x,y)=C \Leftrightarrow yx+x^2e^y-y^2=C$

B. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

1. $$\begin{cases} y'(x\cos(xy)+e^y)=1-y\cos(xy) \\ y(1)=\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$ Sol: $\sin(xy)-x+e^y=C$ S.P.C.: $\sin(xy)-x+e^y=e^{\frac{\pi}{2}}$

2. $$\begin{cases} y'(y-x^2)=2xy-1 \\ y(0)=1 \end{cases}$$ Sol: $(y-x^2)^2+2x-x^4=C$ S.P.C.: $C=1$: $\underline{(y-x^2)^2+2x-x^4=1}$
$y(0)=1 \Rightarrow$ sol. $y=x^2+\sqrt{1+x^4-2x}$

Nota: (2) com a restrição $y(0.8)=1$ não teria solução. Com a restrição $y(1)=1$ também não teria solução pois y não seria diferenciável em 1.

Aula 24: EDOs lineares de primeira ordem

EDOS linear de 1^a ordem: equação dif. da forma $\boxed{a(x)\mathbf{y}' + b(x)\mathbf{y} + c(x) = 0}$, em que a, b, c são funções def. num int. I, com $a(x) \neq 0$, $\forall\, x \in I$. Passando $c(x)$ para o outro membro e dividindo por $a(x)$, a equação toma a forma:

$$\boxed{\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x)}$$

Exercício 2: determine uma função $\mu = \mu(x)$ que satisfaz: $\mu(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) = (\mu\,\mathbf{y})'$.

Resolução:

$$\begin{aligned} \mu(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) = (\mu\,\mathbf{y})' \quad &\Leftrightarrow \quad \mu\mathbf{y}' + \mu p(x)\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}' + \mu'\mathbf{y} \\ &\Leftrightarrow \quad \mu' = \mu\, p(x) \ \ (\text{eq. dif. de var. sep.}) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu}\, d\mu = p(x)dx \end{aligned}$$

Exercício 3: resolva agora esta equação diferencial de variáveis separáveis em x e $\mu = \mu(x)$.

Nota importante: Esta função $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ é um factor integrante da equação não exata (supondo $p(x) \neq 0$) $p(x)\mathbf{y} - q(x) + \mathbf{y}' = 0$. De facto, seja $M = p(x)\mathbf{y} - q(x)$ e $N = 1$. Então $\mu M dx + \mu N dy = 0$ é exata: $\frac{\partial \mu M}{\partial \mathbf{y}} = \mu p(x)$ e $\frac{\partial \mu N}{\partial x} = \mu' = (e^{\int p(x)dx})' = e^{\int p(x)dx} p(x) = \mu p(x)$.

Aula 24: Resolução das EDOs lineares de primeira ordem

$$\boxed{\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x)}$$

Resolução:

(1) Calcular <u>uma</u> primitiva $P(x)$ de $p(x)$, isto é, $\boxed{P(x) = \int p(x)dx}$

(2) Construir o **factor integrante** $\boxed{\mu(x) = e^{P(x)}}$

multiplicar ambos os membros da eq. dif. linear anterior por $\mu(x)$:

$$\mu(x)(\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y}) = \mu(x)q(x) \iff \boxed{(\mu(x)\mathbf{y})' = \mu(x)q(x)}$$

(3) Integral geral: $\boxed{\mu(x)\,\mathbf{y} = \int \mu(x)q(x)\,dx + C\,.}$

Aula 24: EDOs lineares - Exemplos

$$\boxed{\mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x)}$$

- Se $p(x) = 0$ ou $q(x) = 0$, a EDO é (também) de variáveis separáveis.
- Se $p(x) = p$ e $q(x) = q$ são constantes, a EDO é de variáveis separáveis.

Exercício 4: Resolva as seguintes EDOs:

(a) $xy' - y = x - 1;\ x > 0$ — Sol: $y = x \ln x + cx + 1$

(b) $xy' + y - e^x = 0;\ x > 0$ — Sol: $y = \dfrac{e^x + c}{x}$

(c) $y' - y = -e^x$ — Sol: $y = (c - x)e^x$

(d) $y' + 2y = \cos x$ — Sol: $y = \dfrac{2\cos x + \operatorname{sen} x}{5} + c\, e^{-2x}$

Aula 24: Existência e unicidade do problema linear de Cauchy

Teor. 2.5: Se p e q são funções contínuas num intervalo I (contendo o pto inicial x_0), então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' + p(x)\mathbf{y} = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Obs: todos os problemas de Cauchy apresentados nesta aula envolvem funções contínuas num intervalo contendo o ponto inicial, pelo que a solução apresentada é única nesse intervalo.

Exercício 6: Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

(a) $\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ Sol: $y = -x\,e^x$

(b) $\begin{cases} 3y' - 4y = x \\ y(0) = \frac{13}{16} \end{cases}$ Sol: $y = e^{\frac{4}{3}x} - \dfrac{4x+3}{16}$

(c) $\begin{cases} y'' = (xy)' \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \end{cases}$ Sol: $y = e^{\frac{x^2}{2}}$

Aula 24: EDOs de Bernoulli

Uma equação diferencial de Bernoulli é uma equação diferencial da forma

$$\boxed{\mathbf{y}' + a(x)\mathbf{y} = b(x)\mathbf{y}^{\alpha} \ , \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \alpha \neq 0, 1}$$

Se $\alpha > 0$, então $y = 0$ é sempre uma solução da eq. dif. de Bernoulli.

Soluções $y \neq 0$: Dividindo ambos os membros da eq. por $\mathbf{y}^{\alpha}$ obtemos:

$$\boxed{\mathbf{y}^{-\alpha}\mathbf{y}' + a(x)\mathbf{y}^{1-\alpha} = b(x)}$$

A substituição $\boxed{z = y^{1-\alpha}}$ transforma a edo de Bernoulli numa edo linear de primeira ordem:

$$\boxed{z' + (1-\alpha)a(x)z = (1-\alpha)b(x)}$$

cuja solução é: $z = h(x) + C$ ou $W(z, x, C) = 0$. Revertendo a substituição obtém-se a solução da edo original: $y^{1-\alpha} = h(x) + C$ ou $W(y^{1-\alpha}, x, C) = 0$.

Exemplo: Resolva a edo $y' + y = e^x y^2$. Sol: $y = \dfrac{1}{e^x(c-x)}$

Resolva as seguintes equações diferenciais

(a) $y' + \frac{1}{x}y = xy^2$ Sol: $y = \dfrac{1}{x(c-x)}$

(b) $y' + \operatorname{sen}(x)y = \operatorname{sen}(x)y^2$ Sol: $y = \dfrac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + c}$

(c) $\begin{cases} x^2y' - 2xy = 3y^4\,; \\ y(1) = \frac{1}{2}\,. \end{cases}$ Sol: $y^3 = \dfrac{5x^6}{c - 9x^5}$, S.P.C.: $y = \sqrt[3]{\dfrac{5x^6}{49 - 9x^5}}$.

(d) $\begin{cases} xy' + y = -\dfrac{(xy)^4}{3+3x^2}; \\ y(1) = 1. \end{cases}$ Sol: $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x + c}}$, S.P.C.: $y = \dfrac{1}{x\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x + 1 - \frac{\pi}{4}}}$.

Formulário Derivadas e Primitivas quase imediatas

$(u^p)' = p\, u^{p-1}\, u'$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$

$(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\operatorname{tgh} u)' = u' \operatorname{sech}^2 u$

$(\operatorname{senh}^{-1} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$

$(\operatorname{arcsen}(u))' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(\operatorname{arctg}(u))' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

$(\sec u)' = u' \sec(u) \operatorname{tg}(u)$

$(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cosec}(u) \operatorname{cotg}(u)$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = \dfrac{u' a^u}{\ln a}$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$(uv)' = u'v + uv'$

$(\operatorname{sech} u)' = -u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u$

$(\operatorname{tgh}^{-1} u)' = \frac{u'}{1-u^2}$

$\int u'\, u^p\, dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C,$
$(p \neq -1)$

$\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + C$

$\int u' \sin u\, dx = -\cos u + C$

$\int u' \cos u dx = \sin u + C$

$\int u' \sec^2 u\, dx = \tan u + C$

$\int u' \operatorname{cosec}^2 u\, dx = -\mathrm{cotgu} + \mathrm{C}$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, dx = \operatorname{senh}^{-1} u + C$

$\int u' \operatorname{sech}^2 u\, dx = \operatorname{tgh} u + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}\, dx = \operatorname{senh}^{-1}(u) + C$

$\int u' \sec u\, dx = \ln|\sec u + \operatorname{tg} u| + C$

$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin(u) + C$

$\int \frac{u'}{1+u^2}\, dx = \arctan(u) + C$

$\int u' \sec u \tan u\, dx = \sec u + C$

$\int u' \operatorname{cosec} u \mathrm{cotgudx} = -\mathrm{cosec\, u} + \mathrm{C}$

$\int u' e^u\, dx = e^u + C$

$\int u' a^u\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$\int u'v + uv'\, dx = uv + C$

$\int u' \operatorname{sech} u \operatorname{tgh} u\, dx = -\operatorname{sech} u + C$

$\int \frac{u'}{1-u^2}\, dx = \operatorname{tgh}^{-1} u + C$