On White II, Wassily Kandinsky 1923

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 4

1.4 Dinâmica de um sistema de partículas

- Momento linear do sistema. Conservação do Momento linear. Colisões. Centro de massa.
- Momento de uma força. Dinâmica de rotação.
- Momento angular. Conservação do momento angular.

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
Gab. 13.3.16

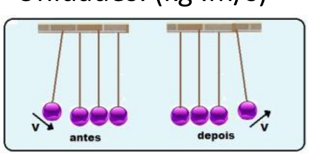
→ Página 252 → Raymond A.

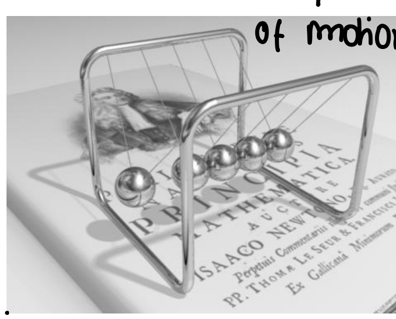
Momento linear
ou Quantidade de movimento

Newton called the product m·v quantity of motion

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Unidades: (kg .m/s)





2ª LEI DE NEWTON

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

↑ $\vec{p}$
↑ $\vec{F}_R$

A força resultante aplicada sobre uma partícula é igual à **variação temporal do seu momento linear**

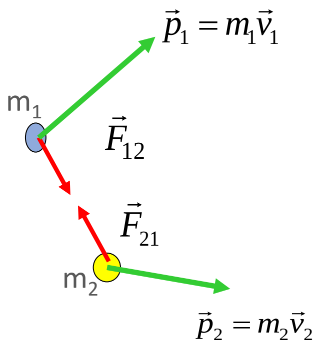
Quanto maior é o momento linear de um corpo, mais difícil é travá-lo e maior será o efeito provocado se for posto em repouso por impacto ou colisão.

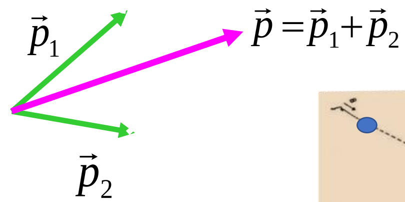
Como se assume que a massa é sempre constante pode ir para dentro da derivada

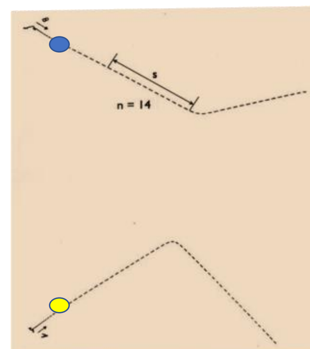
$$F_R = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d(m \cdot v)}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

Ex: O momento de uma bola de bowling a mover-se a 10 m/s é muito maior do que o momento de uma bola de ténis a mover-se à mesma velocidade.

Sistema Isolado:
Lei de Conservação do Momento Linear







O que acontece ao momento linear de cada partícula?
E do conjunto?

Sistema Isolado:
Lei de Conservação do Momento Linear

<u>O momento linear total de um sistema</u>, composto de 2 (ou mais) partículas sujeitas somente às suas interacções mútuas, <u>permanece constante</u>

$$\sum \vec{p_i} = \sum \vec{p_f} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{P_i} = \vec{P_f}$$

LEI DE CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR
num Sistema Isolado

- é um dos conceitos mais importantes na Física

A 3 DIMENSÕES: $P_{xi} = P_{xf}$ $P_{yi} = P_{yf}$ $P_{zi} = P_{zf}$

Colisões

- numa colisão há forte interacção entre 2 corpos
- as forças impulsivas são normalmente muito superiores a qualquer força externa
- poderá ou não existir contacto físico

De acordo com A 3ª LEI DE NEWTON:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\vec{p}_1 \Rightarrow -\Delta\vec{p}_2$$
$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \vec{0}$$

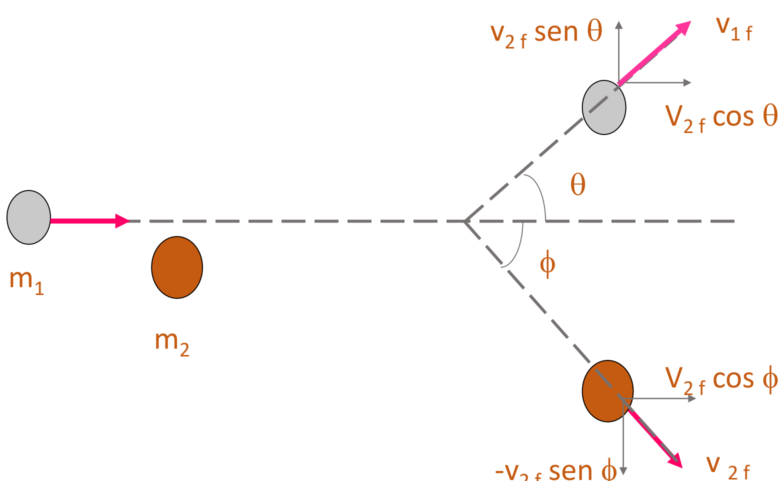
A variação do momento linear do sistema devido à colisão é zero!

TIPOS DE COLISÕES

- ELÁSTICAS: colisões que conservam momento linear + energia cinética
- INELÁSTICAS: colisões que só conservam o momento linear
  - COLISÕES PERFEITAMENTE INELÁSTICAS: os objectos mantêm-se juntos após a colisão

Colisão a 2D

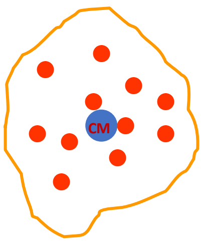
Uma bola de massa m_1 desloca-se com uma velocidade $v_{1\,i}$ e colide lateralmente com uma bola de massa m_2, inicialmente em repouso



Centro de massa

Para qualquer sistema de partículas existe um ponto que se move sob a acção das forças aplicadas ao sistema, como se toda a sua massa desse sistema estivesse concentrada nesse ponto:

o centro de massa (CM)



Independentemente dos movimentos individuais neste grupo de partículas, a dinâmica do centro de massa obedece à 2ª Lei de Newton

$$\sum \vec{F}_{ext} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{massa total}}}{M}\vec{a}_{CM}$$

Centro de massa e equilíbrio

Tipos de equilíbrio

Para que um corpo fique em equilíbrio é necessário que a linha que contém o Centro de Massa não saia da base de sustentação do corpo

Equilíbrio estável - o corpo regressa à posição inicial se deslocado. Acontece quando o ponto de sustentação está acima do centro de gravidade

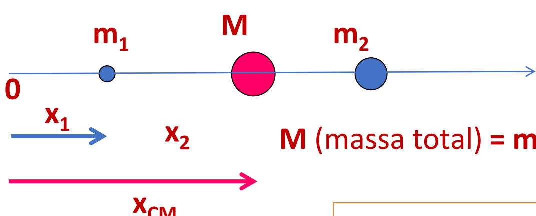
Equilíbrio instável - o corpo afasta-se, se deslocado da sua posição

Equilíbrio indiferente - o corpo mantém a sua posição, se deslocado

Centro de massa

Um corpo no espaço, longe da atracção gravitacional de qualquer planeta, possui centro de massa, mas não centro de gravidade, CG.

Localização do Centro de Massa a 1D



M (massa total) = $m_1 + m_2$

$$x_{CM} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{M}$$

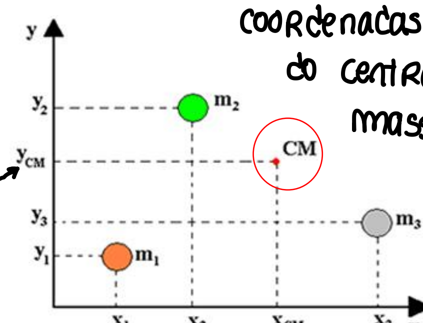
Para *n* partículas *i*

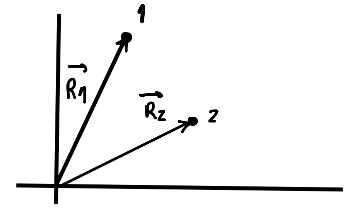
$$x_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i x_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\sum m_i y_i$$

Localização do Centro de Massa (2D)

coordenadas do centro de massa





Localização do Centro de Massa a 3 D

Posição do centro de massa para um sistema de partículas i:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M_{TOTAL}} \qquad R(x, y, z)$$

$$com \quad \vec{r}_i = x_i\hat{i} + y_i\hat{j} + z_i\hat{k} \;\; e \;\; M = \sum m_i = \text{Soma das massas}$$

A posição do CM, para uma distribuição contínua de massa, será dada por:

$$\vec{r}_{CM} = \lim_{\Delta m_i \to 0} \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum \Delta m_i} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$$

Movimento de um sistema de partículas

Velocidade do centro de massa

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{dr_i}{dt} = \frac{\sum m_i v_i}{M} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2} + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

$$M\vec{v}_{CM} = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P}$$

Movimento de um sistema de partículas

Aceleração no centro de massa

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{M} = \frac{m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

$$M\vec{a}_{CM} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

F_i **são as forças aplicadas ao sistema (externas e internas)**

de acordo com a 3ª lei de Newton, anulam-se

Movimento de um sistema de partículas

$$\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Diz-nos que:

- Se a resultante das forças externas aplicadas é igual a zero:

$a_{CM}=0$, o sistema está em repouso ou em movimento uniforme

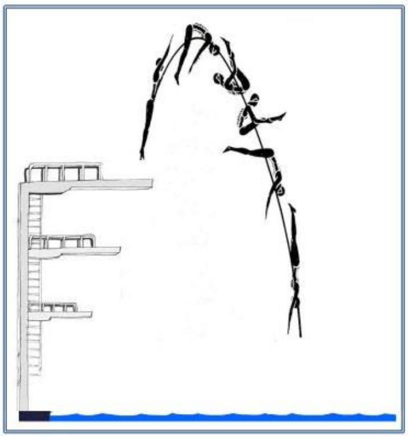
$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_{CM} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = M\vec{v}_{CM} = const.$$

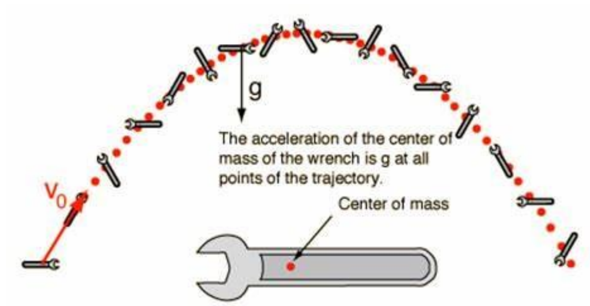
- O momento linear total do sistema conserva-se, quando não há forças externas aplicadas ao sistema (sistema isolado)

Página 293 → Raymond A.

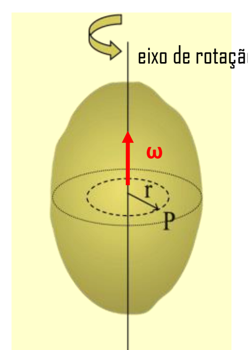
Corpo Rígido

Um corpo rígido é um sistema de partículas cujas distâncias relativas, ao longo do tempo, permanecem constantes, mantendo a forma. O movimento de um corpo rígido pode ser descrito, em geral, como a combinação de um MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO (normalmente analisado em termos do Centro de Massa) e um MOVIMENTO DE ROTAÇÃO.





Corpo Rígido: rotação

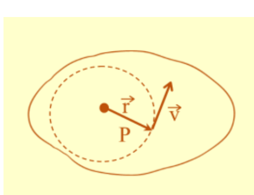


SITUAÇÃO MAIS SIMPLES - movimento é apenas de rotação, em torno de um eixo.

A trajectória de cada partícula vai ser circular.

A trajectória de P é uma circunferência de raio r, a distância de P ao EIXO de ROTAÇÃO

Vendo de topo, ao longo do eixo de rotação, temos, no plano perpendicular ao eixo e que contém o ponto P



Cinemática de rotação

comprimento arco

Distância e ângulo descrito	$s = r\theta$
Velocidade linear e Velocidade angular	$v = r\omega$
Aceleração centrípeta e Velocidade angular	$a_c = r\omega^2$
Aceleração tangencial e Aceleração angular	$a_t = r\alpha$

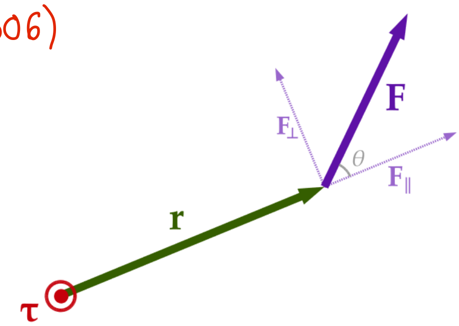
Torque (τ) - a tendência de uma força em rodar um objeto em torno de um eixo

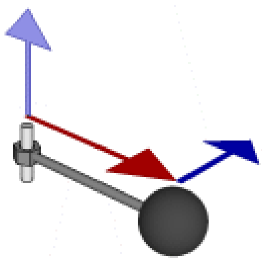
21/10/2024

R → distância entre o ponto de pivot/apoio e o ponto de aplicação da força F

Momento de uma Força ou Torque (P. 306)

! $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$ $\quad |\vec{\tau}| = |\vec{r}|.|\vec{F}|.sin(\theta)$

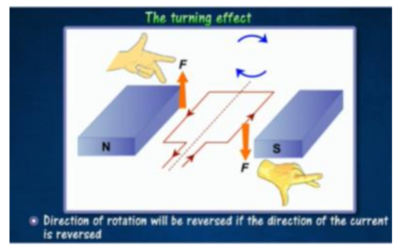




$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

Momento angular $\boxed{\vec{L} = \vec{r} x \vec{p}}$ (ver diapositivo 24)



Rotação e Momento de uma força

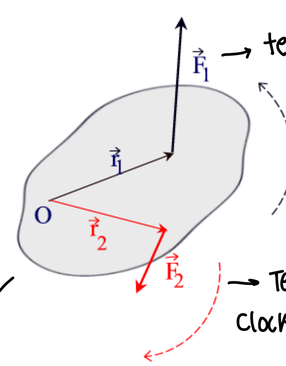
O que acontece se tivermos mais do que uma força aplicada?
Como analisar o efeito conjunto?

O movimento do sistema vai ser determinado pelo **momento resultante**, que é dado por

$$\vec{\tau} = \sum \vec{\tau}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Neste exemplo, os dois vectores têm sentidos opostos.

Em que sentido vai rodar o corpo em torno de O?



$\vec{F}_1$ → tendência de rodar counterclockwise

$\vec{F}_2$ → Tendência para rodar clockwise

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 R_1 - F_2 R_2$$

Rotação e Momento de uma força (capítulo 10.7 – Pag 308)

Consideremos o caso simples de uma partícula de massa **m**, com movimento circular de raio **r** e sujeita a uma força **F**.

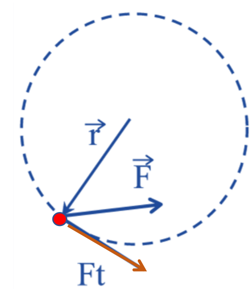
A aceleração tangencial da partícula é dada por

Força tangencial

$$F_t = ma_t$$

Magnitude do torque em relação ao centro do círculo devido a F_t é:

$$|\vec{\tau}| = rF_t = ma_t r$$



Relacionando com a aceleração angular, obtém-se

$$\tau = mr^2\alpha \qquad \text{isto é,} \qquad \boxed{\tau = I\alpha}$$

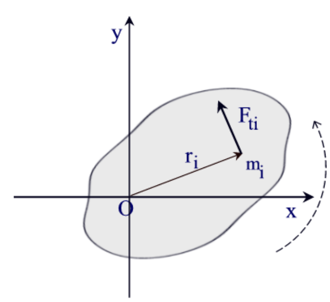
em que **I** é o **MOMENTO DE INÉRCIA** da partícula

Rotação e Momento de uma força

A expressão anterior é generalizável para um sólido constituído por **muitas partículas**, rodando em torno dum eixo Z.

Para cada partícula de massa m_i temos

$$F_{ti} = m_i a_{ti}$$



O momento (componente Z) aplicado a cada uma corresponde a:

$$\tau_i = m_i r_i^2 \alpha$$

Somando sobre todas as partículas, e como todas têm a mesma aceleração e velocidade angulares, obtém-se:

Momento de inércia (ver à frente)

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i \underbrace{m_i r_i^2}_{\text{Momento Inércia}}\right)\alpha \Rightarrow \tau = I\alpha$$

O torque que atua sobre a partícula é proporcional à aceleração angular (α), e a constante de proporcionalidade é o momento de inércia (I)

Rotação e Momento de uma força

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\alpha$$

Nesta soma, só contribuem as forças exteriores aplicadas ao corpo, pois as forças entre partículas (interiores) dão contribuições que cancelam aos pares, devido à lei de acção-reacção.

A lei de movimento para a rotação em torno dum eixo tem uma forma que é análoga à da 2ª lei de Newton para a translação, usando as grandezas correspondentes

$$F = ma \leftrightarrow \boxed{\tau = I\alpha}$$

Em cada caso, F e t são as resultantes das forças e momentos exteriores.

Assim como a massa mede a Resistência de um objeto a alterações no seu movimento linear, o momento de inércia I mede a resistência de um objeto a alterações no seu movimento Rotacional.

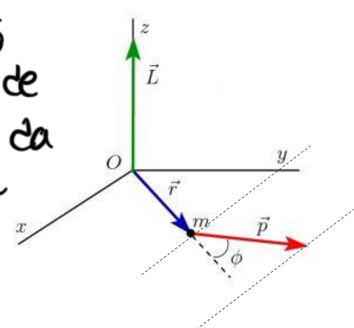
Quanto maior o momento de inércia, mais difícil é mudar a sua velocidade angular, exatamente como um objeto com maior massa resiste mais à mudança de velocidade linear.

MOMENTO ANGULAR (11.2 – Pag 340)

O momento angular de uma partícula m em relação a um ponto O é definido como o momento do vector momento linear, **p**

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

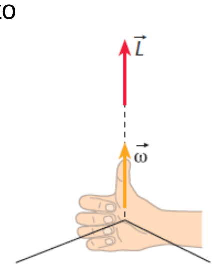
vetor posição do ponto de aplicação da força



As suas unidades SI são kg.m^{2}s^{-1}

De acordo com as regras do produto vectorial (ϕ ângulo entre r e v)

$$\left|\vec{L}\right| = mvr\,sen\phi$$



para determinar o sentido do vector **L,** usa-se a **regra da mão direita**

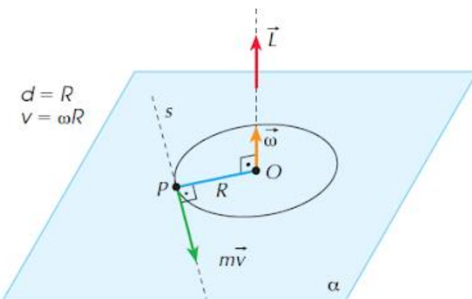
MOMENTO ANGULAR

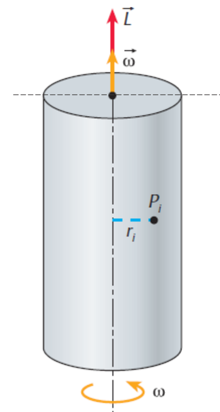
- **MOVIMENTO CIRCULAR**

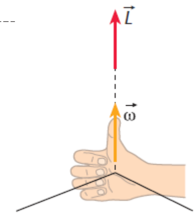
v = r ω

Neste caso ϕ=90º e fica

$$L = m v r = m \omega r^2$$

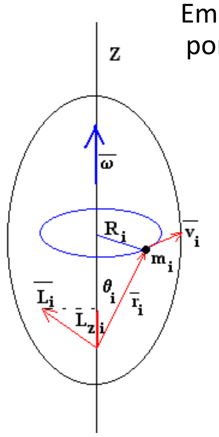






MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

Para o caso dum corpo rígido em rotação em torno dum eixo fixo, vamos obter uma expressão que relaciona directamente $\vec{L}$ com a velocidade angular $\vec{\omega}$.



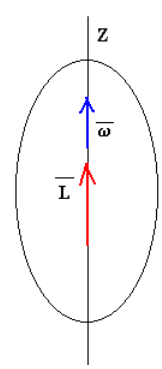
Em relação ao eixo, o movimento de cada partícula é circular, portanto

$$L_i = m_i v_i r_i = m_i \omega r_i^2$$

A soma sobre todas as partículas só terá componente segundo o eixo de rotação (Z)

$$\boxed{L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \left(m_i r_i^2\right)\omega = I\omega_z}$$

$$\boxed{L_z = I\omega_z}$$



para um eixo de simetria que passe pelo CM

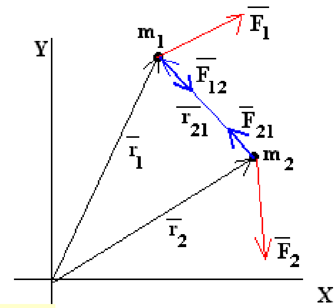
Numa situação geral, a relação é mais complexa!

LEI DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

$$\vec{L}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

Vamos verificar este resultado para um SISTEMA DE DUAS PARTÍCULAS, sujeitas a forças exteriores e interiores (interacção)



Para cada partícula, vimos que

$$\boxed{\frac{d\,\vec{L}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_{i\,ext} + \vec{F}_{i\,int}\right)}$$

$$\frac{d\,\vec{L}}{dt} = \frac{d\,\vec{L}_1}{dt} + \frac{d\,\vec{L}_2}{dt} = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_{1ext} + \vec{F}_{1int}\right) + \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_{2\,ext} + \vec{F}_{2\,int}\right) =$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1ext} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2\,ext} + \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \left(\vec{F}_{1int}\right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext}$$

PELA LEI DA ACÇÃO-REACÇÃO $\boxed{\vec{F}_{1int} = -\vec{F}_{2\,int}}$ **que são paralelas a** $r_2 - r_1$ $[=\overrightarrow{r_{21}}]$

LEI DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Se tivermos um sistema de partículas, o resultado é generalizável. Cada partícula está sujeita a forças exteriores e interiores ao sistema. A contribuição destas últimas, somada sobre todas as partículas, é nula (devido à lei de acção-reacção).

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\,ext} = \sum_i \frac{d\,\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\,\vec{L}}{dt}$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\,\vec{L}}{dt}$$

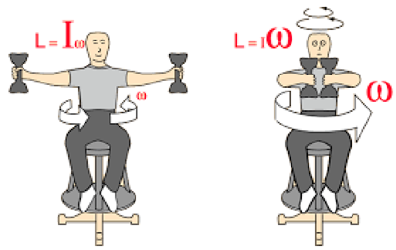
NUM SISTEMA ISOLADO (sem forças exteriores aplicadas), **O MOMENTO ANGULAR É CONSTANTE**.

Se **r** e **F** forem colineares, **L** é constante – **acção de Forças Centrais**

LEI DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

Num sistema isolado, o momento angular mantém-se constante.
Uma situação interessante ocorre quando o momento de inércia varia.

$$\boxed{\overrightarrow{L_{início}} = \overrightarrow{L_{fim}}}$$



$$\boxed{(I\ \omega)_{início} = (I\ \omega)_{fim}}$$

https://youtu.be/5cRb0xvPJ2M