

Mecânica e Campo Eletromagnético - PL2

Universidade de Aveiro

Tiago Mendes, Pedro Costa



Mecânica e Campo Eletromagnético - PL2

Dpt. de Física
Universidade de Aveiro

Tiago Mendes, Pedro Costa
(119378) tfdmendes@ua.pt, (112682) pedromsc37@ua.pt

5 de dezembro de 2024

Índice

1	Introdução	1
2	Detalhes Experimentais Relevantes	2
2.1	Produção de campos magnéticos a partir de correntes: O solenóide padrão	2
2.2	Bobinas de Helmholtz	2
2.3	Medição de campos magnéticos usando uma sonda de efeito de Hall	3
2.3.1	Correlação entre tensão de Hall e corrente	4
2.3.2	Calibração da sonda de Hall	4
2.3.3	Considerações adicionais	4
2.3.4	Utilização de um solenoide-padrão	4
2.4	Parte A	5
2.4.1	Material	5
2.4.2	Procedimento Experimental	5
2.5	Parte B	5
2.5.1	Material	5
2.5.2	Procedimento Experimental	6
3	Análise e Discussão	7
3.1	Parte A	7
3.2	Parte B	9
4	Conclusão	13

Lista de Tabelas

3.1	Medições de intensidade do solenoide e tensão V_H	7
3.2	Dados de posição e tensão para a 1 ^a bobina, 2 ^a bobina e bobinas em série.	9
3.3	Valores dos campos magnéticos para as bobinas individualmente, em série, a soma das bobinas 1 e 2, e o desvio.	10

Lista de Figuras

2.1	Esquema representativo do posicionamento das bobinas a uma distância R	3
2.2	Geometria utilizada para medir o efeito de Hall.	3
2.3	Figura Parte A	5
3.1	Gráfico Tensão de Hall em função da corrente	8

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho insere-se no âmbito do estudo do eletromagnetismo, uma das áreas fundamentais da física. O foco principal é a **produção de campos magnéticos a partir de correntes elétricas**, com ênfase especial no **solenóide padrão** e nas **bobinas de Helmholtz**. Estes tópicos foram abordados detalhadamente na componente teórica, nomeadamente a descrição dos campos magnéticos gerados por correntes em diferentes configurações geométricas e a análise das propriedades magnéticas dessas estruturas.

Neste contexto, a análise de solenoides e bobinas de Helmholtz permite aplicar os **conceitos de eletromagnetismo**, como a Lei de Ampère e a Lei de Biot-Savart, bem como os princípios de **sobreposição de campos magnéticos**, temas fundamentais discutidos em aula.

Este relatório descreve a experiência e os resultados obtidos na produção e medição de campos magnéticos utilizando solenoides padrão e bobinas de Helmholtz. Inclui a determinação da relação entre a corrente elétrica e a intensidade do campo magnético, a verificação da uniformidade do campo em diferentes configurações, e a comparação experimental com as previsões teóricas.

Capítulo 2

Detalhes Experimentais Relevantes

A **lei de Biot-Savart** fornece uma expressão para calcular o campo magnético B gerado por uma corrente elétrica em um ponto específico no espaço. Este é fundamental para calcular campos magnéticos em situações de geometria complexas e sem simetria definida.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (2.1)$$

A **lei de Ampère** relaciona o campo magnético ao redor de um caminho fechado com a corrente total que atravessa esse caminho. Especialmente útil em situações de alta simetria

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (2.2)$$

2.1 Produção de campos magnéticos a partir de correntes: O solenóide padrão

Correntes Elétricas e cargas em movimento produzem campos magnéticos que podem ser calculados através da Lei de Bio-Savart ou através da Lei de Ampère. Do ponto de vista físico, o solenóide pode considerar-se como um conjunto de anéis idênticos, alinhados lado a lado e percorridos pela mesma corrente I_s . Neste caso, em que o solenóide tem comprimento finito é preferencial recorrermos à Lei de Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \implies B \cdot l = \mu_0 N I_s \implies B_{\text{sol}} = \mu_0 \frac{N}{L} I_s \quad (2.3)$$

Na Lei de Ampère, $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ é a circulação do campo magnético \vec{B} ao longo de um caminho fechado. μ_0 a permeabilidade do vácuo ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$), e I_{enc} a corrente elétrica total a atravessar a área delimitada.

A expressão obtida pode considerar-se válida para um solenoide finito, cujo comprimento é muito maior que o raio $l \gg R$. Um enrolamento deste tipo designa-se por solenoide-padrão.

2.2 Bobinas de Helmholtz

Por outro lado, as **Bobinas de Helmholtz** são constituídas por dois enrolamentos com o mesmo número de espiras N , o mesmo raio R , e ambos são posicionados a uma distância igual ao raio R entre si. A corrente que flui pelos enrolamentos tem a mesma intensidade e sentido. Esta configuração garante que os campos magnéticos gerados pelas bobinas se sobreponham de forma quase perfeita no espaço entre elas, criando uma região central onde o campo é muito uniforme.

A expressão que descreve o campo magnético gerado pelas Bobinas de Helmholtz no centro do arranjo ($x = x_0$) é dada por:

$$B(x) = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.4)$$

Prevê-se que o campo magnético atinja o seu valor máximo, $B_{\text{Máx}}$, na origem dos eixos definidos pelas bobinas, considerando o campo total resultante da soma dos campos de cada bobina ($B_1 + B_2$).

Analisando a variação do valor de B_H ao longo do eixo, pode-se concluir que o valor de B_H não é inferior a 95% de $B_{\text{Máx}}$, sendo, em 60% dessa mesma secção, superior a 99% de $B_{\text{Máx}}$.

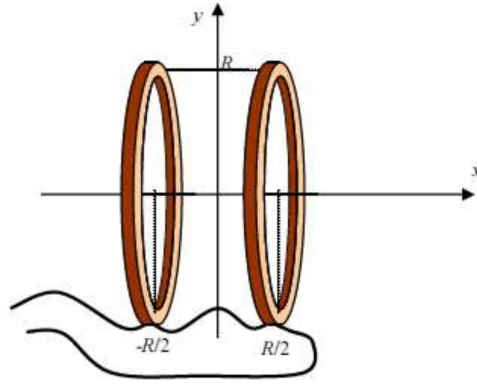


Figura 2.1: Esquema representativo do posicionamento das bobinas a uma distância R

2.3 Medição de campos magnéticos usando uma sonda de efeito de Hall

Para medir campos magnéticos, utiliza-se o efeito que este campo produz em cargas elétricas em movimento, através da força magnética — o **Efeito Hall**. Consideremos um bloco retangular de um semicondutor percorrido por uma corrente I_H (indicada como J_x na Figura 2.2) e colocado num campo magnético B , como mostra a Figura 2.2.

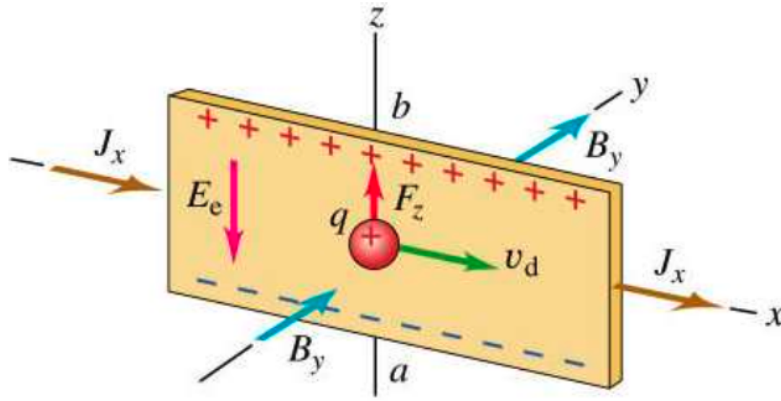


Figura 2.2: Geometria utilizada para medir o efeito de Hall.

Os portadores de carga móveis, com carga q e velocidade de arrastamento v_d , sentirão o efeito da força magnética, dada pela expressão da força de Lorentz:

$$\mathbf{F}_m = q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B} = qvB \quad (2.5)$$

No semicondutor, os portadores de carga podem ser positivos ou negativos, dependendo da estrutura do material. Sob a ação da força magnética, esses portadores desviam-se da sua trajetória, acumulando-se na face superior do semicondutor, produzindo assim uma diferença de potencial entre as faces superior e inferior do bloco. Este processo origina um campo elétrico interno, \mathbf{E} , que se opõe à força magnética. A força elétrica sobre os portadores de carga é:

$$\mathbf{F}_e = -q\mathbf{E} \quad (2.6)$$

Em regime de equilíbrio, as forças elétrica e magnética igualam-se:

$$qE = qvB \implies V_H = vaB \quad (2.7)$$

onde V_H é a tensão de Hall, a é a dimensão do bloco na direção z , e v é a velocidade de arrastamento.

2.3.1 Correlação entre tensão de Hall e corrente

A relação entre corrente e a velocidade dos portadores (v_d) é dada pela densidade de corrente J_x , através da superfície perpendicular à direção da corrente:

$$I_H = nqv \implies v = \frac{I_H}{nq} \quad (2.8)$$

Substituindo v na Equação (2.7), obtém-se:

$$V_H = \frac{I_H B}{nq} \quad (2.9)$$

Ou seja, a tensão de Hall (V_H) é proporcional à corrente I_H que percorre o material e ao campo magnético externo (B).

2.3.2 Calibração da sonda de Hall

Para medir campos magnéticos com precisão, é necessário calibrar a sonda de Hall. Isso implica determinar a constante de proporcionalidade entre V_H e B , também denominada por **constante de calibração** (C_c):

$$B = C_c V_H \quad (2.10)$$

2.3.3 Considerações adicionais

A constante de calibração é válida apenas para a sonda específica que foi calibrada e não pode ser extrapolada para outras sondas.

2.3.4 Utilização de um solenoide-padrão

Para calibrar a sonda, é utilizado um dispositivo que gera um campo magnético uniforme e reprodutível: o **solenoide-padrão**. Este garante que a medição de B seja consistente e fiável, permitindo que a tensão de Hall gerada pela sonda seja usada para caracterizar campos magnéticos em diferentes situações. Tal como veremos ao longo desta experiência laboratorial.

2.4 Parte A

2.4.1 Material

1. Solenoide Padrão
2. Sonda de efeito de Hall
3. Reostato de $330\ \Omega$.
4. Voltímetro
5. Amperímetro
6. Resistência de $10\ \Omega$.
7. Fonte de Tensão 15V
8. Suporte para a sonda de Hall

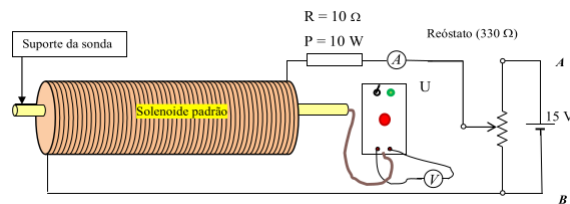


Figura 2.3: Figura Parte A

2.4.2 Procedimento Experimental

O objetivo desta parte foi de calibrar a sonda de efeito de Hall, obtendo então a sua constante de calibração (C_c), a ser usada na segunda parte do trabalho.

1. Liga-se a sonda ao voltímetro e regula-se o potenciômetro da sonda para ver que o voltímetro indique 0 V quando não está sujeita a um campo magnético.
2. Efetuar a montagem de acordo com a figura 2.3
3. Regista-se o valor de $\frac{N}{l}$ (número de espiras por unidade de comprimento do solenoide).
4. Coloca-se a sonda no interior do solenoide, e utilizando o potenciômetro, ajustamos a tensão residual até V_H permanecer nulo.
5. Fazer variar a corrente I_S 10 vezes, obtendo igualmente 10 valores de tensão V_H para cada valor de corrente.

2.5 Parte B

2.5.1 Material

1. 2 Bobinas
2. Sonda de efeito de Hall
3. Reostato de $330\ \Omega$.
4. Voltímetro
5. Amperímetro
6. Resistência de $10\ \Omega$.
7. Fonte de tensão 15 V .
8. Suporte para a sonda de Hall

2.5.2 Procedimento Experimental

1. Medir o raio das bobinas e de seguida ajustar as mesmas a uma distância igual à do raio adquirido, e colocar-las na disposição geométrica de Helmholtz.
2. Ajustar a resistência de modo a que a corrente seja igual a 0.5 A
3. Medir e registar valores de tensão para diferentes posições da sonda de Hall
4. Efetuar o passo anterior para cada uma das bobinas individualmente, e por fim para ambas.

Capítulo 3

Análise e Discussão

3.1 Parte A

De maneira a obter a constante de calibração começamos por apontar o número de espiras por unidade de comprimento que está indicado no solenoide, assim:

$$\frac{N}{L} = (3467 \pm 60) \text{ espiras/m}$$

Utilizando a equação 2.3 e 2.10 é possível obter a seguinte expressão:

$$C_c \cdot V_H = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot I_s \implies V_H = \left(\frac{\mu_0 \cdot \frac{N}{L}}{C_c} \right) \cdot I_s \quad (3.1)$$

Utilizando os seguintes valores medidos durante a parte experimental:

Medição	I_s (A)	V_H (V)
1ª Medição	0.00	0.0000
2ª Medição	0.01	0.0025
3ª Medição	0.02	0.0038
4ª Medição	0.03	0.0053
5ª Medição	0.04	0.0066
6ª Medição	0.05	0.0080
7ª Medição	0.06	0.0095
8ª Medição	0.07	0.0109
9ª Medição	0.08	0.0122
10ª Medição	0.09	0.0139
11ª Medição	0.10	0.0152

Tabela 3.1: Medições de intensidade do solenoide e tensão V_H .

Foi então possível obter a equação da reta característica da Tensão de Hall V_H em função da Corrente I_s :

$$y = 0.145x + 1.49 \times 10^{-3} \quad R^2 = 1$$

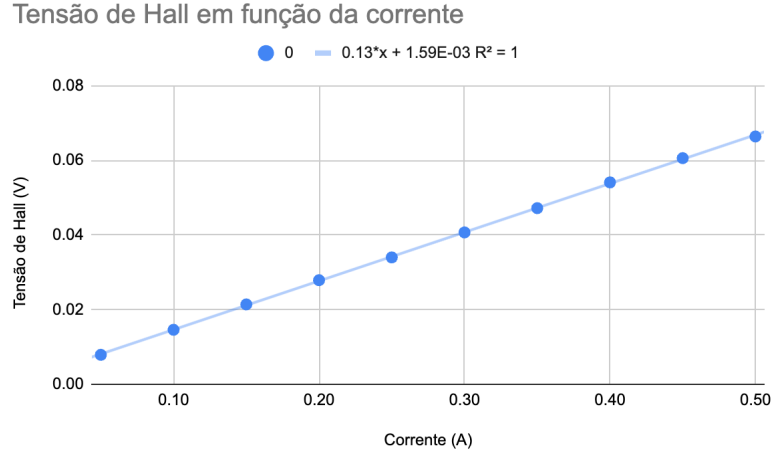


Figura 3.1: Gráfico Tensão de Hall em função da corrente

Utilizando a equação 3.1, é possível concluir que o declive da reta tem significado físico:

$$\frac{V_H}{I_s} = \frac{\mu_0 \cdot \frac{N}{L}}{C_c} = 0.13 \text{ V/A}$$

Por fim, o cálculo da Constante de Calibração (C_c) é dado pela expressão:

$$C_c = \frac{\mu_0 \cdot \frac{N}{L}}{m} \Rightarrow \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3467}{0.13} = 0.033514 \text{ T/V}$$

A expressão do cálculo do erro associado à constante de calibração é dada por:

$$\frac{\Delta C_c}{C_c} = \left| \frac{\Delta m}{m} \right| + \left| \frac{\Delta \left(\frac{N}{L} \right)}{\frac{N}{L}} \right|$$

Para o cálculo dos erros associados:

$$\Delta \frac{N}{l} = 60 \text{ espiras/m}$$

$$\Delta m = \sqrt{\frac{\frac{1}{R^2} - 1}{n - 2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{1} - 1}{10 - 2}} = 0 \text{ V/A}$$

$$\frac{\Delta C_c}{C_c} = \left| \frac{\Delta \left(\frac{N}{L} \right)}{\frac{N}{L}} \right| + \left| \frac{\Delta m}{m} \right| = \left| \frac{60}{3467} \right| + 0 = 0.0173 \Leftrightarrow 1.73\%.$$

Assim,

$$\Delta C_c = C_c \times \Delta C_c = 0.0335 \times 0.0173 = 0,000575 \text{ T/V}$$

$$C_c = 0.03351 \pm 0.0006 \text{ T/V}$$

3.2 Parte B

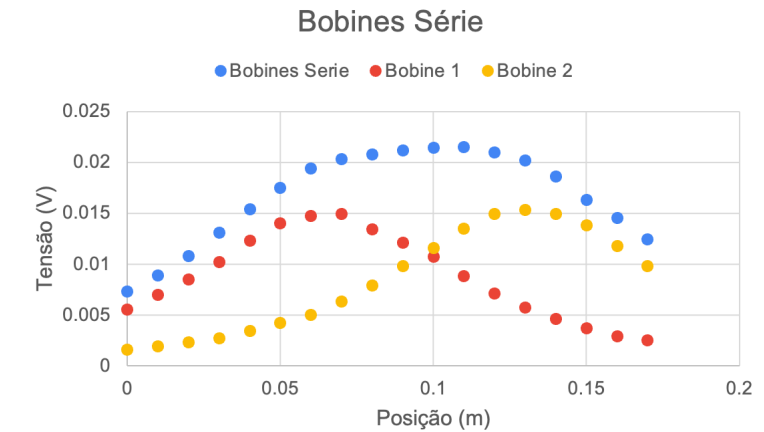
Seguindo os passos descritos no procedimento experimental, obtém-se:

- Corrente $I(A) = 0.50 \pm 0.01 A$ ¹
- Raio $R = 0.0650 \pm 0.0005 m$ ²
- Tensão $V = x \pm 0.0001 V$ ³

Posição (m)	1ª Bobina (V)	2ª Bobina (V)	Bobinas em Série (V)
0.00	0.0055	0.0016	0.0073
0.01	0.0070	0.0019	0.0089
0.02	0.0085	0.0023	0.0108
0.03	0.0102	0.0027	0.0131
0.04	0.0123	0.0034	0.0154
0.05	0.0140	0.0042	0.0175
0.06	0.0147	0.0050	0.0194
0.07	0.0149	0.0063	0.0203
0.08	0.0134	0.0079	0.0208
0.09	0.0121	0.0098	0.0212
0.10	0.0107	0.0116	0.0214
0.11	0.0088	0.0135	0.0215
0.12	0.0071	0.0149	0.0210
0.13	0.0057	0.0153	0.0202
0.14	0.0046	0.0149	0.0186
0.15	0.0037	0.0138	0.0163
0.16	0.0029	0.0118	0.0145
0.17	0.0025	0.0098	0.0124

Tabela 3.2: Dados de **posição e tensão** para a 1ª bobina, 2ª bobina e bobinas em série.

A visualização gráfica da tabela reflete:



¹Dado que o amperímetro é digital a incerteza associada corresponde à menor divisão da escala.

²Dado que o instrumento de medição do raio era analógico, a incerteza associada corresponde a metade da menor divisão da escala.

³Dado que o voltímetro é digital a incerteza associada corresponde à menor divisão da escala.

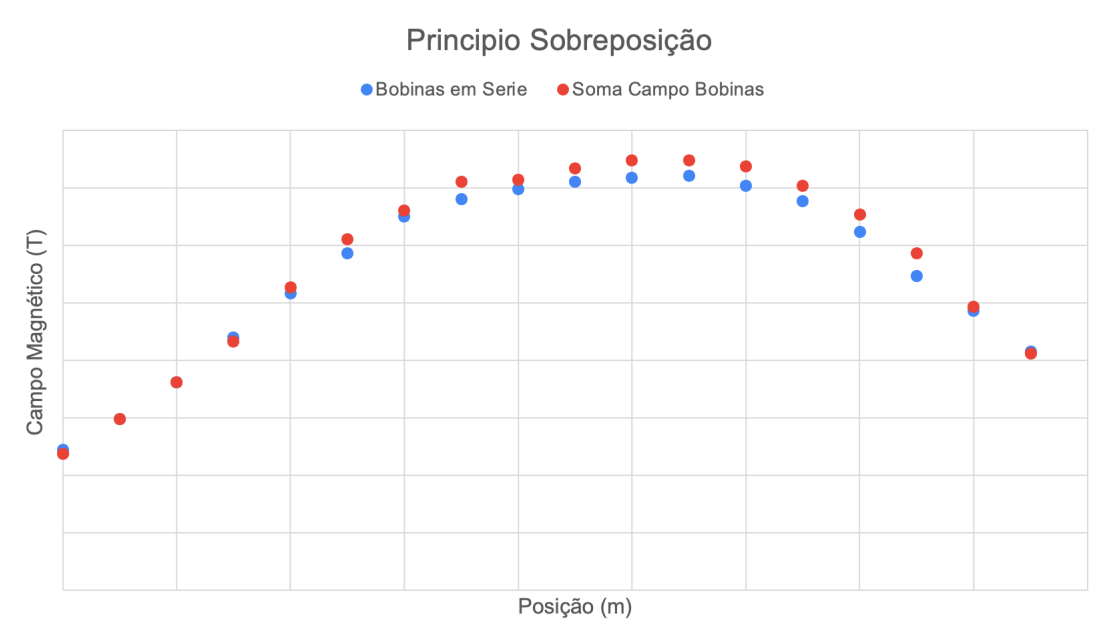
Utilizando a constante de calibração da sonda de Hall (calculada anteriormente na parte A)

$$C_c = 0.03351 \pm 0.0006 \text{ T/V}$$

em conjunto com a equação 2.10 é possível obter os valores dos **campos magnéticos** associados a cada uma das bobines e o desvio da soma com o das bobines em série:

Bobine 1 (T)	Bobine 2 (T)	Bobines em Série (T)	Soma (Bobine 1 + 2) (T)	Desvio (T)
0.000184327	0.0000536224	0.0002446522	0.0002379494	0.02739726027
0.000234598	0.0000636766	0.0002982746	0.0002982746	0
0.000284869	0.0000770822	0.0003619512	0.0003619512	0
0.0003418428	0.0000904878	0.0004390334	0.0004323306	0.01526717557
0.0004122222	0.0001139476	0.0005161156	0.0005261698	0.01948051948
0.000469196	0.0001407588	0.000586495	0.0006099548	0.04
0.0004926558	0.00016757	0.0006501716	0.0006602258	0.01546391753
0.0004993586	0.0002111382	0.0006803342	0.0007104968	0.04433497537
0.0004490876	0.0002647606	0.0006970912	0.0007138482	0.02403846154
0.0004055194	0.0003284372	0.0007104968	0.0007339566	0.03301886792
0.0003585998	0.0003887624	0.0007171996	0.0007473622	0.04205607477
0.0002949232	0.000452439	0.000720551	0.0007473622	0.03720930233
0.0002379494	0.0004993586	0.000703794	0.000737308	0.04761904762
0.0001910298	0.0005127642	0.0006769828	0.000703794	0.0396039604
0.0001541644	0.0004993586	0.0006233604	0.000653523	0.04838709677
0.0001240018	0.0004624932	0.0005462782	0.000586495	0.0736196319
0.0000971906	0.0003954652	0.000485953	0.0004926558	0.01379310345
0.000083785	0.0003284372	0.0004155736	0.0004122222	0.008064516129

Tabela 3.3: **Valores dos campos magnéticos** para as bobinas individualmente, em série, a soma das bobinas 1 e 2, e o desvio.



Por meio destes gráficos, é possível corroborar a validade do princípio da superposição, que afirma que o campo magnético total gerado por múltiplas fontes corresponde à soma dos campos magnéticos produzidos individualmente.

O cálculo do número de espiras N nas bobinas de Helmholtz é baseado na relação entre o campo magnético teórico de uma espira, o campo total gerado por N espiras, e os valores medidos experimentalmente.

A expressão para o campo magnético no eixo de uma (1) espira circular, derivada da Lei de Biot-Savart, é dada pela equação 2.4. No centro da espira ($x = x_0$) a equação simplifica-se, dado que $(x - x_0)^2 = 0$, assim:

$$B_{\text{teórico com } N = 1} = \frac{\mu_0 I}{2R} \implies B_{\text{teórico com } N \text{ espiras}} = N \times \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Com a medição da tensão de Hall V_H ao longo de diferentes posições do eixo da bobina, o campo magnético prático $B_{\text{prático}}$ é obtido pela constante de calibração da sonda de Hall:

$$B_{\text{prático}} = C_c \times V_H$$

Logo, o campo magnético real no centro da bobina com N espiras é:

$$B_{\text{prático}} = N \times B_{\text{teórico}}$$

Assim, o cálculo do $B_{\text{teórico}}$ e a sua incerteza associada é dado por:

$$B_{\text{teórico}} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot R^2}{2 \cdot (R^2 + (x - x_0)^2)^{3/2}} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 0.5 \cdot 0.065^2}{2 \cdot (0.065^2 + (0)^2)^{3/2}} = 4.83 \times 10^{-6} \text{ T}$$

$$\Delta B = \left| \frac{dB}{dl} \cdot \Delta l \right| + \left| \frac{dB}{dR} \cdot \Delta R \right|$$

$$\frac{dB}{dl} = l' \cdot \frac{\mu_0 R^2}{2R^3} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.0650^2}{2 \cdot 0.0650^3} = 9.7 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{dB}{dR} = \left(\frac{R^2}{R^3} \right)' \cdot \frac{\mu_0 I}{2} = -\frac{1}{0.0650^2} \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0.50}{2} = -7.4 \cdot 10^{-5}$$

$$\Delta B = |9.7 \cdot 10^{-6} \cdot 0.0100| + |-7.4 \cdot 10^{-5} \cdot 0.0005| = 1.34 \cdot 10^{-7} \text{ T}$$

O cálculo do $B_{\text{prático}}$ é dado pelo valor da constante de calibração multiplicado pelo valor de Tensão de Hall medido na posição em que $x = x_0$ (posição 0.07m 3.2), neste caso, $V_H = 0.0149$ para a Bobine 1:

$$B_{\text{prático}} = 0.0149 \times 0.033514 = 4.99 \times 10^{-4} \text{ T}$$

A incerteza associada ao $B_{\text{prático}}$ é calculada pela propagação de incertezas:

$$\Delta B_{\text{prático}} = B_{\text{prático}} \cdot \left(\frac{\Delta C_c}{C_c} + \frac{\Delta V_H}{V_H} \right)$$

Substituindo os valores:

$$B_{\text{prático}} = 4.99 \times 10^{-4} \text{ T}, \quad C_c = 0.033514 \text{ T/V}, \quad \Delta C_c = 0.0005 \text{ T/V}$$

$$V_H = 0.0149 \text{ V}, \quad \Delta V_H = 0.0001 \text{ V}$$

Primeiro, calculamos os termos individuais:

$$\frac{\Delta C_c}{C_c} = \frac{0.0005}{0.033514} = 0.01492, \quad \frac{\Delta V_H}{V_H} = \frac{0.0001}{0.0149} = 0.00671$$

Somando os dois termos:

$$\Delta B_{\text{prático}} = 4.99 \times 10^{-4} \cdot (0.01492 + 0.00671) = 4.99 \times 10^{-4} \cdot 0.02163 = 1.08 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Portanto, o erro associado ao $B_{\text{prático}}$ é:

$$\Delta B_{\text{prático}} = 1.08 \times 10^{-5} \text{ T}$$

A incerteza no número de espiras é calculada por:

$$\Delta N = N \cdot \left(\frac{\Delta B_{\text{prático}}}{B_{\text{prático}}} + \frac{\Delta B_{\text{teórico}}}{B_{\text{teórico}}} \right)$$

Substituindo os valores:

$$N = 103.31, \quad B_{\text{prático}} = 4.99 \times 10^{-4} \text{ T}, \quad \Delta B_{\text{prático}} = 1.08 \times 10^{-5} \text{ T}$$

$$B_{\text{teórico}} = 4.83 \times 10^{-6} \text{ T}, \quad \Delta B_{\text{teórico}} = 1.34 \times 10^{-7} \text{ T}$$

Primeiro, calculamos os termos individuais:

$$\frac{\Delta B_{\text{prático}}}{B_{\text{prático}}} = \frac{1.08 \times 10^{-5}}{4.99 \times 10^{-4}} = 0.02164$$

$$\frac{\Delta B_{\text{teórico}}}{B_{\text{teórico}}} = \frac{1.34 \times 10^{-7}}{4.83 \times 10^{-6}} = 0.02774$$

Somando os dois termos:

$$\frac{\Delta B_{\text{prático}}}{B_{\text{prático}}} + \frac{\Delta B_{\text{teórico}}}{B_{\text{teórico}}} = 0.02164 + 0.02774 = 0.04938$$

Agora, substituímos no cálculo de ΔN :

$$\Delta N = 103.31 \cdot 0.04938 = 5.10 \text{ espiras}$$

Erro Relativo Percentual

O erro relativo percentual é dado por:

$$\text{Erro relativo (\%)} = \frac{\Delta N}{N} \cdot 100$$

Substituindo os valores:

$$\text{Erro relativo (\%)} = \frac{5.10}{103.31} \cdot 100 = 4.94 \%$$

Capítulo 4

Conclusão

Os objetivos foram todos concluídos com sucesso, ou seja, na parte A encontramos o valor da constante de calibração com um erro correspondente a 1.73%

Na parte B o erro associado ao cálculo do número de espiras foi 4.94% marcando igualmente o sucesso nesta parte.

A contribuição dos autores foi:

Tiago Mendes: 100%

Pedro Costa: 0%

5 de dezembro de 2024