



On White II, Wassily Kandinsky 1923

MCE_IM_2024-2025

Mecânica e Campo Eletromagnético

Aula 5

1.4 Dinâmica de um sistema de partículas

- Momento de inércia. Cinemática e energia cinética de rotação
- Análise e discussão de exemplos.

Isabel Malaquias
imalaquias@ua.pt
 Gab. 13.3.16

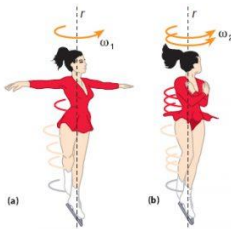
1

MOMENTO DE INÉRCIA

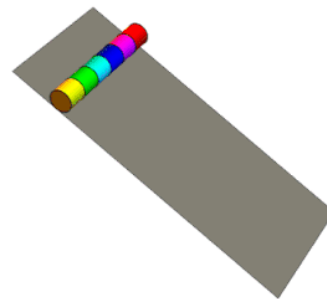
Atrás fizemos referência ao Momento de Inércia de uma partícula $I = mr^2$ e de um conjunto de partículas, a propósito do Momento de Força resultante:

$$\tau = \sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \alpha$$

Como percebemos o Momento de Inércia?



A bailarina ao abrir os braços, diminui a velocidade de rotação



- $m = m_0$ $I = 1 I_0$
- $m = m_0$ $I = 2 I_0$
- $m = m_0$ $I = 3 I_0$
- $m = m_0$ $I = 4 I_0$
- $m = m_0$ $I = 5 I_0$
- $m = m_0$ $I = 6 I_0$

MCE_IM_2024-2025

2

2

Cálculo do Momento de inércia - corpos extensos

↖ Momento Inércia

$$I = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

Para calcular concretamente os momentos de inércia temos que relacionar a variável massa com as coordenadas espaciais (a 3D o volume e a massa volúmica)

Massa Volúmica

↖

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho dV$$

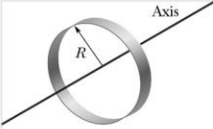
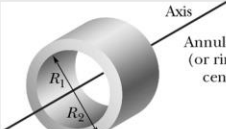
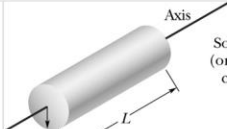
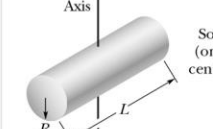
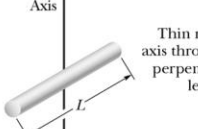
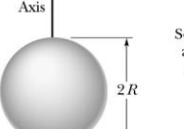
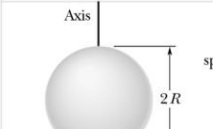
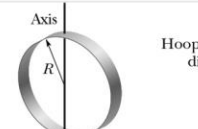
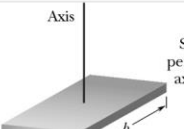
$$I = \int \rho r^2 dV$$

MCE_IM_2024-2025

3

3

Tabela de Momentos de Inércia para eixos que passam no Centro de Massa

 <p>Hoop about central axis</p> <p>$I = MR^2$</p> <p>(a)</p>	 <p>Annular cylinder (or ring) about central axis</p> <p>$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$</p> <p>(b)</p>	 <p>Solid cylinder (or disk) about central axis</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(c)</p>
 <p>Solid cylinder (or disk) about central diameter</p> <p>$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(d)</p>	 <p>Thin rod about axis through center perpendicular to length</p> <p>$I = \frac{1}{12}ML^2$</p> <p>(e)</p>	 <p>Solid sphere about any diameter</p> <p>$I = \frac{2}{5}MR^2$</p> <p>(f)</p>
 <p>Thin spherical shell about any diameter</p> <p>$I = \frac{2}{3}MR^2$</p> <p>(g)</p>	 <p>Hoop about any diameter</p> <p>$I = \frac{1}{2}MR^2$</p> <p>(h)</p>	 <p>Slab about perpendicular axis through center</p> <p>$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$</p> <p>(i)</p>

4

ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO

$$\vec{L}_z = \sum I_i \omega$$

sendo I , o momento de inércia, $\sum m_i r_i^2$

O MOMENTO DE INÉRCIA É UMA GRANDEZA ESCALAR, que mede a resistência à variação da velocidade angular.

$$EC_{particula} = \frac{1}{2} m v^2$$

A ENERGIA CINÉTICA DE ROTAÇÃO é

dada por

$$EC_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$v = r \omega$$

Unidade S.I. de energia - joule, J

MCE_IM_2024-2025

5

Variação Temporal do Momento Angular e Momento de Força

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{v} \times \vec{p} = \vec{0}$$

O momento da força resultante aplicada a uma partícula é igual à variação temporal do momento angular

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

De notar que o momento da força e o momento angular são calculados em relação ao mesmo ponto

2ª LEI DE NEWTON DO MOVIMENTO DE ROTAÇÃO

$$\vec{\tau} = I \vec{\alpha}$$

MCE_IM_2024-2025

6

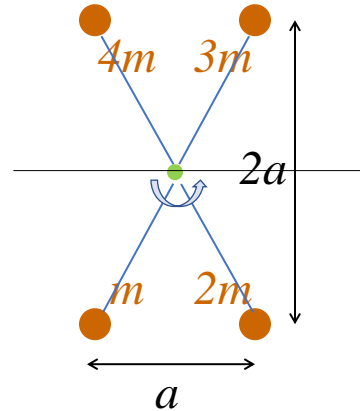
Cálculo de Momento de inércia

Exemplo - Quatro corpos que rodam em torno de eixo perpendicular ao plano (ponto marcado a verde)

Neste caso, ter-se-á:

$$\begin{aligned}
 I &= \sum m_i r_i^2 \\
 &= (m + 2m + 3m + 4m) \left(\sqrt{\frac{5}{4}} a \right)^2 \\
 &= 10m \left(\frac{5}{4} a^2 \right) = M_T \left(\frac{5}{4} a^2 \right)
 \end{aligned}$$

$M_T = \text{massa total}$



MCE_IM_2024-2025

8

Cálculo de Momento de inércia

Exemplo - Quatro corpos que rodam em torno de um eixo horizontal e de um eixo vertical

Calcular o momento de inércia relativamente a:

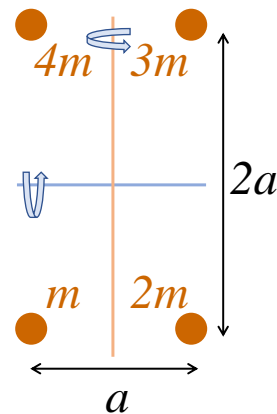
um eixo horizontal (azul):

$$\begin{aligned}
 I &= \sum m_i r_i^2 = ma^2 + 2ma^2 + 3ma^2 + 4ma^2 \\
 &= 10ma^2 = M_T a^2
 \end{aligned}$$

$M_T = \text{massa total}$

um eixo vertical (castanho):

$$\begin{aligned}
 I &= m \frac{a^2}{4} + 2m \frac{a^2}{4} + 3m \frac{a^2}{4} + 4m \frac{a^2}{4} \\
 &= 10m \frac{a^2}{4} = M_T \frac{a^2}{4}
 \end{aligned}$$



MCE_IM_2024-2025

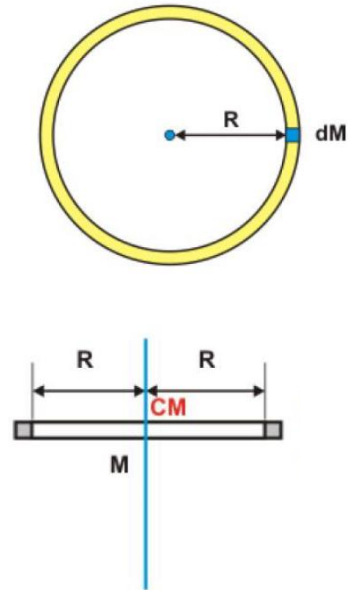
9

Exemplo - Anel

Anel fino homogêneo de massa M e raio R relativamente a um eixo perpendicular pelo centro.

$$I = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = R^2 M$$

O resultado é o mesmo para um cilindro oco de espessura fina!



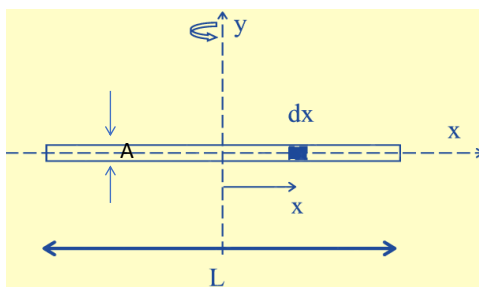
MCE_IM_2024-2025

10

Exemplo - Barra homogênea 1

Capítulo 1.4.b - 5.b)

Momento de Inércia relativamente ao **eixo perpendicular (transversal)** que passa pelo centro de massa da barra



comprimento da barra

A distância ao eixo é a coordenada x $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$

densidade linear, μ

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

Massa Total, M

$$dm = \rho \cdot A dx$$

$$dm = \mu \cdot dx$$

$$I_C = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$I_C = \frac{ML^2}{12}$$

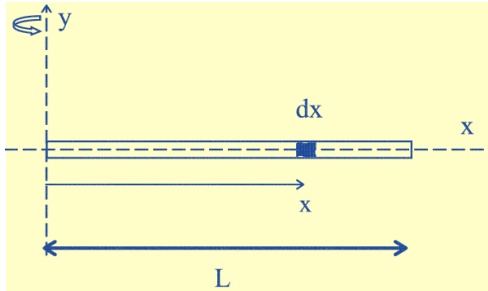
MCE_IM_2024-2025

11

Exemplo - Barra homogênea 2

Capítulo 1.4.b - 5.a)

Momento de Inércia relativamente a um eixo perpendicular que passa pela extremidade da barra



A distância ao eixo
é a coordenada x

$$0 \leq x \leq L$$

$$dm = \frac{M}{L} dx$$

Massa Total, M
Comprimento da
barra, L

$$I_E = \int r^2 dm = \int x^2 dm = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^L$$

$$I_E = \frac{ML^2}{3}$$

MCE_IM_2024-2025

12

Teorema de Steiner ou do eixo paralelo

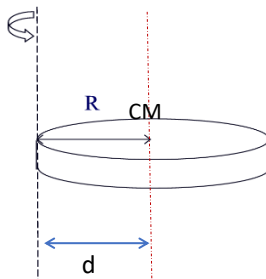
O Teorema permite que consideremos a seguinte igualdade para o momento de inércia em torno de um eixo paralelo ao eixo que passa pelo Centro de Massa

Capítulo 1.4.b - 7

**Momento de Inércia em
torno de um eixo paralelo**

$$I = I_{CM} + Md^2$$

TEOREMA DE
STEINER



d = distância do CM ao eixo

M = Massa do corpo

Considerando o exemplo ilustrado, obtém-se

$$I = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2$$

MCE_IM_2024-2025

13

Capítulo 1.4.b

4 - Duas crianças, com 25 kg, estão sentadas nas extremidades de uma prancha de 2,6 m de comprimento e de 10 kg de massa. A prancha gira com velocidade de cinco rotações por minuto, em torno de um eixo que passa pelo seu centro.

Se cada uma das crianças se sentar 60 cm mais à frente, em direcção ao centro, como se altera a velocidade angular do sistema?

E como varia a energia cinética do sistema?

Sugestão: conservação do momento angular

$$\sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \sum_{i=1}^n \vec{L}_f$$

$$(\sum_{i=1}^n I_i) \omega_i = (\sum_{i=1}^n I_f) \omega_f$$

MCE_IM_2024-2023

14

Capítulo 1.4.b

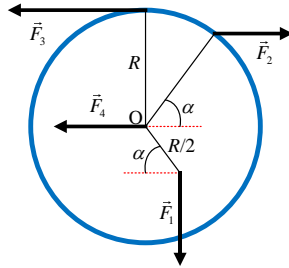
11 - Um homem está em pé, no centro de uma mesa giratória sem atrito, e mantém os braços estendidos horizontalmente, segurando uma massa de 5,0 kg em cada mão. A mesa é posta em rotação por um agente exterior, com uma velocidade angular de uma rotação em 2,0 s.

Determine o valor da velocidade angular após o homem deixar cair os braços ao longo do corpo. Considere o momento de inércia do homem constante e igual a 5,0 kg.m². A distância original das massas ao eixo de rotação é 90 cm e a final é 15 cm.

MCE_IM_2024-2023

15

Um cilindro de 4 kg de massa pode rodar em torno do eixo central que passa pelo ponto O. Sobre o cilindro são aplicadas quatro forças conforme se ilustra na figura, de intensidades $F_1 = 4$ N, $F_2 = 3$ N, $F_3 = 8$ N e $F_4 = 4,9$ N. ($R = 2$ m, $\alpha = 53^\circ$, $I_{cm} = 1/2 m R^2$, $\cos(53^\circ) = 0,6$ e $\sin(53^\circ) = 0,8$).



- Determine a intensidade da aceleração angular do cilindro e identifique se o mesmo roda no sentido horário ou anti-horário.
- Determine a energia cinética de rotação do cilindro ao fim de 1 s. O cilindro encontra-se inicialmente em repouso.

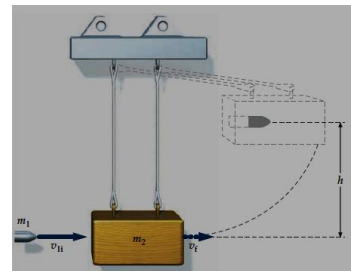
MCE_IM_2024-2025

16

Capítulo 1.4.a

8. Um pêndulo balístico é constituído por um corpo suspenso dum fio. Um projétil de massa $m_1 = 30$ g penetra no corpo e fica cravado nele. O centro de massa do corpo eleva-se até uma altura $h = 30$ cm. A massa do corpo é $m_2 = 3,0$ kg.

- Deduza uma expressão para a velocidade do projétil em função destes dados.
- Calcule o valor numérico da velocidade do projétil quando este atinge o corpo.



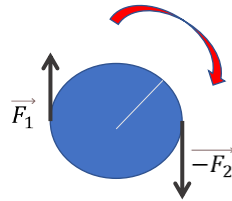
MCE_IM_2024-2025

17

ESTÁTICA

Binário de forças

$$\sum \vec{F}_i = 0$$



mas

$$\sum \vec{\tau}_i \neq 0$$

CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO ESTÁTICO

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

e, simultaneamente,

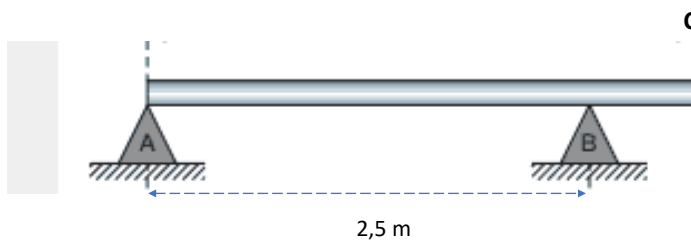
$$\sum \vec{\tau}_i = 0$$

MCE_IM_2024-2025

18

Capítulo 1.4.b

12. Uma barra uniforme AC de 4 m tem massa $m = 50$ kg. Existe um ponto fixo B em torno do qual a barra pode rodar. A barra está apoiada no ponto A. Um homem com massa igual a 75 kg anda ao longo da barra partindo de A. Calcule a distância máxima a que o homem pode deslocar-se, mantendo o equilíbrio.



Sugestão: usar as condições de equilíbrio estático
No limite, a reacção sobre A anula-se

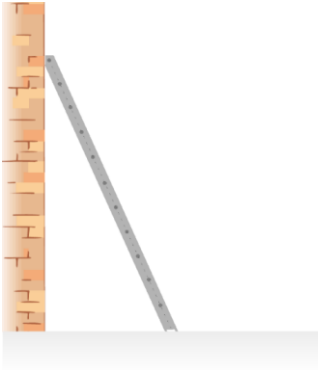
MCE_IM_2024-2025

19

Análogo ao I3 do Cap. I.4.b)

Uma escada homogênea de 5 m de comprimento e de 20 kg de massa, está apoiada numa parede vertical, sem atrito, e num piso rugoso (há atrito), como esquematizado. A escada tem uma inclinação com a horizontal de $\theta = 53^\circ$. A escada encontra-se em equilíbrio sem deslizar.

Considere $\cos(53^\circ) = 0,6$; $\sin(53^\circ) = 0,8$; $\tan(53^\circ) = 4/3$ e $g = 10 \text{ m/s}^2$.



- Faça o diagrama das forças aplicadas à escada e escreva as condições de equilíbrio estático.
- Determine a força que atua entre a parede e o topo da escada, nas condições da alínea anterior.
- Determine o valor das forças que atuam entre a escada e o chão assim como o coeficiente de atrito estático.