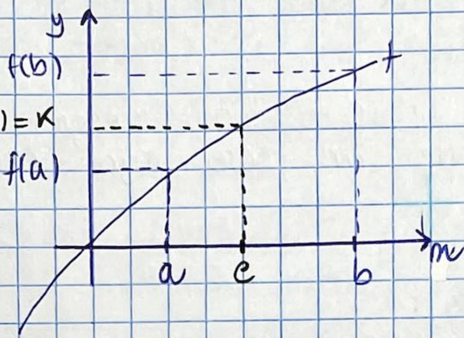
TEOREMAS FUNÇÕES CONTÍNUAS

TEOREMA BOLZANO

Seja f uma funçã Real de variável Real contínua num intervalo $[a,b]$. Então a funçã f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, isto é, qualquer que seja K entre $f(a)$ e $f(b)$ existe pelo menos um c entre a e b tal que $f(c)=K$



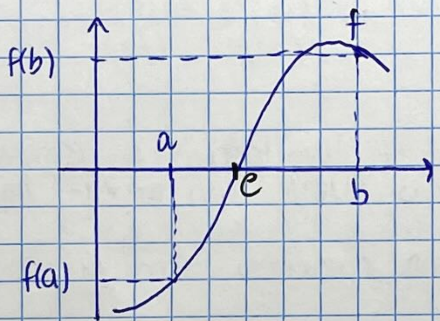
Se f é contínua em $[a,b]$ e $K \in \,]f(a), f(b)[$ então:

$f(a) < K < f(b)$ ou $f(b) < K < f(a)$

$\hookrightarrow \exists c \in \,]a,b[: f(c)=K$

COROLÁRIO TEOREMA BOLZANO-CAUCHY:

Seja f uma funçã Real de variável real contínua num intervalo $[a,b]$ se $f(a) \times f(b) < 0$, então existe pelo menos um c entre a e b tal que $f(c)=0$

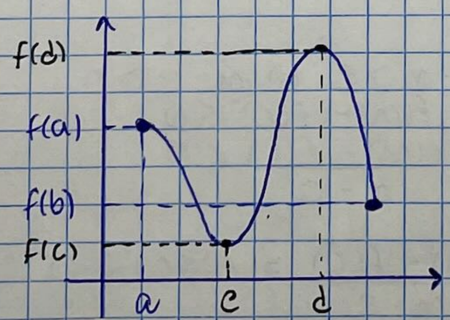


Se f é contínua em $[a,b]$ e $f(a) \times f(b) < 0$

$\exists c \in \,]a,b[: f(c)=0$

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Seja f uma funçã real de variável real contínua num intervalo $[a,b]$ $b>a$
f atinge em D_f o seu máximo e o seu mínimo (se D_f é um conjunto limitado e fechado), isto é:



→ f é limitada em $[a,b]$, ou seja,

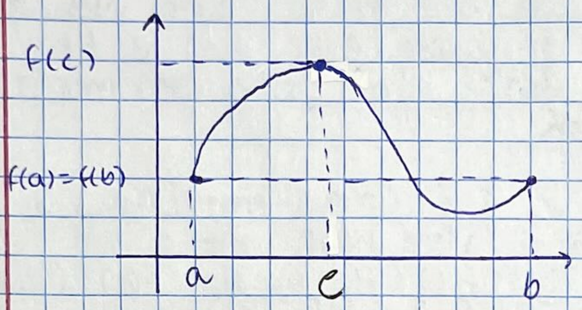
$\exists c,d \in [a,b]: f(c) \leq f(x) \leq f(d), \forall x \in [a,b]$

→ Consequentemente, o contradomínio da funçã é:

$CD_f: [f(c), f(d)]$

TEOREMA FUNÇÕES DERIVÁVEIS
TEOREMA DE ROLLE

Seja f uma funcão continua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Se $f(a) = f(b)$ então existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$



Nas condições do Teorema de Rolle, a função tem um ponto no interior do intervalo $[a,b]$ onde a tangente é uma reta horizontal $(f'(c)=0)$

Quando duas imagens são iguais existe um ponto cuja derivada é 0

DEMONSTRAÇÃO:

COM UMA FUNÇÃO CONSTANTE $(f(x) = K)$:

Aplicando o T. de Weierstrass, sendo f limitada e continua em $[a,b]$, esta possui um mínimo e um Máximo $(m = \min, M = \max)$

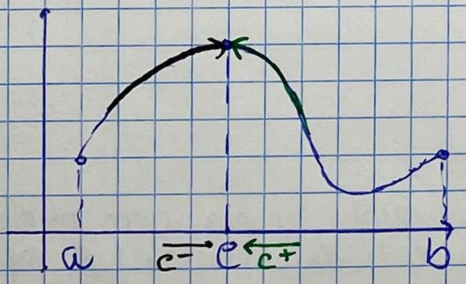
Seja $f(x) = K$, onde $K = f(a) = f(b)$, $\forall x \in [a,b]$. O máximo é igual ao mínimo, e logicamente, igual a K.

Além disso, para qualquer ponto do intervalo $]a,b[$, a sua derivada é nula.

COM UMA FUNÇÃO NÃO CONSTANTE:

Aplicando o T. Weierstrass, sendo f limitada e continua, irá possuir um mínimo e um máximo. (Neste caso $m \neq M$, pq não é constante)

Admitindo que f admite o valor máximo em $x = c$, tal que $a < c < b$:



Para valores de x à esq: $x < c \Leftrightarrow x - c < 0$

Também, $\longrightarrow f(x) - f(c) \leq 0$

Logo, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$

Como f é derivável:

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0$$

Para valores de x à direita: $x > c \Leftrightarrow x - c > 0$

Também, $f(x) - f(c) \leq 0$

Logo, $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

Como f é derivável: $\displaystyle\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq 0$

CONCLUI-SE que $f'(c) \geq 0$ e $f'(c) \leq 0$, apenas possível se $f'(c) = 0$

No caso de considerarmos um mínimo, seria tudo ao contrário.

FÓRMULA DE TAYLOR

OBJETIVO: Fazer aproximações de funções deriváveis de ordem n, através de polinómios de $\underset{\text{grau}}{\text{ordem}}$ n.

POLINÓMIO TAYLOR ($n=1$)

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$ → é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$

O polinómio $P(x)$, denomina-se de polinómio de Taylor de grau 1 de uma função f, num ponto x_0

EXEMPLO: Utilizando o polinómio de Taylor de grau 1, no ponto $x_0 = 1$, avalie uma aproximação linear de $\ln(1{,}03)$

Assim, neste caso, o polinómio de Taylor de grau 1 será dado por:

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) \quad , \quad e \quad f(x) = \ln(x)$$

Desta maneira,

$f(x) = \ln(x)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{x}$

$f(1) = \ln(1) = 0$ $\qquad$ $f'(1) = 1$

Logo, $P(x) = 0 + 1(x-1) \Leftrightarrow P(x) = (x-1)$ ← Reta

$P(1{,}03) = 1{,}03 - 1 = 0{,}03$ $\qquad$ $(\ln(1{,}03) \approx 0{,}0295)$

POLINÓMIO TAYLOR ($n=2$) → é a parábola tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

O polinómio $P(x)$, denomina-se de polinómio de Taylor de grau 2, de uma uma função f, num ponto x_0

EXEMPLO: Utilizando o polinómio de Taylor de grau 2, no ponto $x_0 = 1$, encontra uma aproximação linear de $\ln(1{,}03)$

Assim, neste caso, o polinómio de Taylor de grau 2 será dado por:

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2$$

Desta maneira,

$f(x) = \ln(x)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$f(1) = \ln(1) = 0$ $\qquad$ $f'(1) = 1$ $\qquad$ $f''(1) = -1$

Logo, $P(x) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$ ← Parábola

$P(1{,}03) = 0{,}02955$ $\qquad$ $(\ln(1{,}03) \approx 0{,}0295)$

ERRO ainda menor

POLINÓMIO DE TAYLOR (ORDEM n)

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + (\dots) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

O polinómio $P(x)$, denomina-se de polinómio de Taylor do grau n de uma funçã f, num ponto x_0