Matemática Discreta

Ano Letivo 2023/24 (Versão: 5 de Abril de 2024)

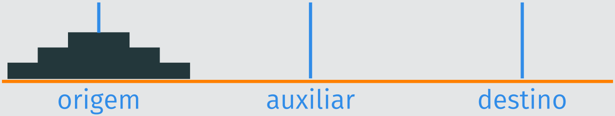
Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

Capítulo IV
Recorrência e Funções Geradoras

Parte 1
Equações de Recorrência

Introdução

O problema é



mover *n* discos de origem para destino com a ajuda de auxiliar, de modo que

- apenas um disco poderia ser movido por vez, e
- um disco maior nunca pode fica acima de um disco menor.

A lenda diz que, num templo, havia uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Os monges foram ordenados pelo «Brama» de mover todos os discos de uma estaca para outra. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de origem para destino, o mundo desapareceria.

Temos de preocupar-nós?

A questão

Para n discos (digamos, $n \geq 1$), denotamos por a_n o menor número de passos necessários. Então, $a_{64} =$??

A solução

É mais fácil pensar recursivamente:

- Se $n = 1$, basta mover o disco diretamente de origem para destino. Logo, $a_n = 1$.
- Se $n > 1$, então:
  - mover os $n - 1$ discos acima de origem para auxiliar utilizando destino, depois
  - mover o último disco de origem para destino; depois
  - mover os $n - 1$ discos de auxiliar para destino utilizando origem.

Logo, $a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$.

Os números

Os famosos números de Fibonacci[a]

$$1, \ 1, \ 2, \ 3, \ 5, \ 8, \ 13, \ 21, \ \ldots$$

são os termos da sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que começa com $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$ e satisfaz a regra $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Embora os números de Fibonacci sejam completamente determinados pelos primeiros dois termos F_0 e F_1, não é fácil calcular, por exemplo, $F_{312493741}$ porque, pela definição, é necessário calcular primeiro $F_{312493740}$ e $F_{312493739}$, para isso precisamos de $F_{312493738}$ e $F_{312493737}$, … e assim até $F_2 = F_1 + F_0$.

Estes números aparecem em muitos contextos ....

[a] Leonardo Fibonacci ou Leonardo de Pisa (1170 – 1250), matemático italiano.

Uma população de coelhos

Numa população de animais (digamos, de coelhos) há animais adultos (que podem ter descendentes) e animais jovens (que ainda não podem ter descendentes). Suponhamos que

- cada par de coelhos adultos tem um par de descendentes (necessariamente jovem) no final do mês,
- depois de um mês, um coelho jovem passa a ser um coelho adulto, e
- sendo vegetarianos, os coelhos vivem «eternamente».

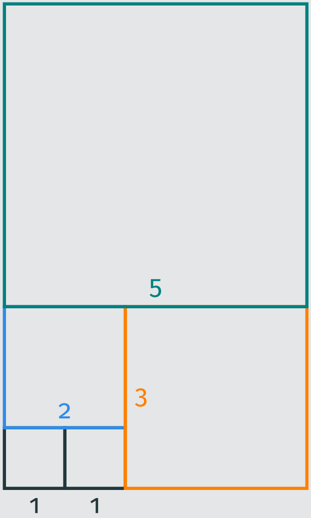
No que se segue, A_n denota o número de pares de coelhos adultos e J_n o número de pares de coelhos jovens no final do mês n. *Começando com um par de coelhos jovens, qual é o número $c_n = A_n + J_n$ de pares de coelhos?* Por hipotése, $A_0 = 0$, $J_0 = 1$, $A_1 = 1$, $J_1 = 0$ e, para $n \geq 1$,

$$A_n = A_{n-1} + J_{n-1} \quad \text{e} \quad J_n = A_{n-1}.$$

Portanto, para $n \geq 2$, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$; e $c_n = A_n + J_n$ satisfaz

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 1, \quad c_n = c_{n-1} + c_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Quadrados



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido. Qual é o comprimento de um lado do quadrado *n*?

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \\
a_1 &= 1, \\
a_2 &= 2, \\
a_3 &= 3, \\
a_4 &= 5, \\
&\vdots \\
a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n
\end{aligned}
$$

Exemplo

Determinamos a soma dos n primeiros números de Fibonacci.

Utilizando $F_n = F_{n+1} - F_{n-1}$ (para $n \geq 1$), calculamos

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k = F_0 + \sum_{k=2}^{n} F_k - \sum_{k=0}^{n-2} F_k = F_n + F_{n-1} - 1 = F_{n+1} - 1.$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} &+ (F_2 - F_0) \\ &+ (F_3 - F_1) \\ &+ (F_4 - F_2) \\ &\dots \\ &+ (F_n - F_{n-2}) \end{aligned}$$

Exemplo

Quantas ordens totais existem em $\{1, 2, \dots, n\}$, para cada $n \in \mathbb{N}$?

Se $n = 0$, então o número a_0 de ordens totais em $\varnothing$ é $a_0 = 1$.

As ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ podemos obter de seguinte modo:

- ordenamos primeiro $\{1, 2, \dots, n\}$, denotamos o número de maneiras por a_n; depois
- podemos inserir $n+1$, aqui há $n+1$ possibilidades.

Pelo princípio da multiplicação, o número a_{n+1} de ordens totais em $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ é

$$a_{n+1} = (n+1)a_n.$$

1. Noções gerais

Definição

- Uma equação de recorrência (ou relação de recorrência) é uma equação da forma
$$x_n = f(n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}), \qquad (*)$$
com $n \in \mathbb{N}$, $n \geq k$.
- A equação de recorrência (*) diz-se de ordem k ou que tem profundidade k (supondo que f «depende da última variável»).
- Uma sucessão $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diz-se solução de (*) quando os seus termos satisfazem a equação (*), para todo o $n \geq k$.

Nota

Resolver uma relação de recorrência significa determinar todas as suas soluções. Estamos particularmente interessados em descrever as soluções com fórmulas fechadas; ou seja, na forma

$$a_n = \text{«uma expressão que apenas envolve a variável } n\text{»}.$$

2. Equações de recorrência lineares

Definição

- Uma equação de recorrência linear (de coeficientes constantes) de ordem k é uma equação da forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n, \qquad (*)$$

  (para $n \geq k$) onde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ($c_k \neq 0$) são constantes e $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão.
- A equação (*) diz-se homogénea quando $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sucessão nula.
- A equação homogénea associada a (*) é a equação

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}.$$

Exemplo

- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2} + 3n$ é uma equação de recorrência linear (não homogénea) de ordem 2.
- $x_n = 3x_{n-1} + 2x_{n-2}$ é a equação homogénea associada.

Exemplo

- A equação da recorrência $x_{n+1} = (n+1)x_n$ é linear e homogénea mas não tem coeficientes constantes.
- A equação $x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2}$ $(n \geq 2)$ é uma equação de recorrência linear homogénea (de coeficientes constantes).

  Verificamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

  $$a_n = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  é solução desta equação. De facto, para cada $n \geq 2$,

  $$2a_{n-1} - a_{n-2} = 2(3(n-1)) - 3(n-2) = \\ 3(2(n-1) - (n-2)) = 3n = a_n.$$

  Um cálculo semelhante revela que as sucessões

  $$(0)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (1)_{n\in\mathbb{N}}, \quad (5n+2)_{n\in\mathbb{N}}$$

  são soluções da equação acima.

Teorema

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$\boxed{\text{uma solução particular de (*).}}$ + $\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à equação (*)}}$.

Demonstração.

- Se b é uma solução de (*) e a é uma solução da equação homogénea associada, então $a + b$ é uma solução de (*).
- Se b_1 e b_0 são soluções de (*), então $b_1 - b_0$ é uma solução da equação homogénea associada, e $b_1 = b_0 + (b_1 - b_0)$. □

3. Equações de recorrência lineares homogéneas

Considerações iniciais

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \qquad (*)$$

($c_k \neq 0$) uma equação de recorrência linear homogénea de ordem k.

- O conjunto das soluções de (*) é um subespaço do espaço vetorial de todas as sucessões (reais ou complexos).
- Cada solução $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de (*) é completamente determinada pelos primeiros k termos. De facto,

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^k \text{ ou } \mathbb{R}^k &\longrightarrow \{\text{as soluções de } (*)\} \\ (a_0, \dots, a_{k-1}) &\longmapsto (a_0, \dots, a_{k-1}, c_1 a_{k-1} + \cdots + c_k a_0, \dots) \end{aligned}$$

é um isomorfismo; logo: $\dim\{\text{as soluções de } (*)\} = k$.

Conclusão

Para descrever todas as soluções de (*), procuramos uma sequência de k soluções de (*) linearmente independente.

Uma tentativa (mais ou menos) «esperta»

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Para uma sucessão da forma $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, para quais valores de q obtemos uma soluções? Seguramente não para $q = 0$, e para $q \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= q^n - c_1 q^{n-1} - c_2 q^{n-2} - \cdots - c_k q^{n-k} \\ &= q^{n-k}(q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k), \end{aligned}$$

portanto, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução de (*) se e somente se

$$0 = \underbrace{q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k.}_{\text{polinómio em } q \text{ de grau } k}$$

A equação acima diz-se equação caraterística de (*).

Exemplo

Procuramos todas as solução da equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2). \tag{*}$$

A equação caraterística é

$$0 = q^2 - q - 2 = (q-2)(q+1),$$

com as soluções $q_0 = 2$ e $q_1 = -1$. Verifica-se que as sucessões

$$(2^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

são linearmente independentes (em breve veremos que são vetores próprios associados a valores próprios diferentes); portanto, todas as soluções (reais) da equação (*) tem a forma

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

A solução geral:

$$(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, procuramos a solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

que satisfaz também $x_0 = 5$ *e* $x_1 = 4$ (o número de condições iniciais coincide com a ordem da equação); ou seja, aquele solução com

$$\alpha + \beta = 5 \ \text{(o caso } n = 0\text{)} \quad \text{e} \quad 2\alpha - \beta = 4 \ \text{(o caso } n = 1\text{)}.$$

Resolvendo este sistema de duas equações lineares dá $\alpha = 3$ e $\beta = 2$.

Assim, a solução é a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com

$$a_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n, \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Corolário

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} \quad (k \geq 1,\ c_k \neq 0). \tag{*}$$

Se a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

de (*) têm as k soluções (diferentes) q_1, q_2, ..., q_k, então as soluções de (*) são precisamente as combinações lineares das sucessões (necessariamente linearmente independente) $(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$, ..., $(q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$; ou seja, as sucessões da forma

$$(\alpha_1 q_1^n + \alpha_2 q_2^n + \cdots + \alpha_k q_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

com constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Exemplo

Recordamos que os números de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazem as equações

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Para resolver a equação de recorrência linear homogénea

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

consideremos a equação $q^2 - q - 1 = 0$ de segundo grau que tem as duas soluções:

$$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, todas as soluções da equação homogénea são combinações lineares das sucessões $(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Em particular,

$$(F_n)_{n\in\mathbb{N}} = \alpha(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}} + \beta(\phi^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exemplo

Note-se que $\phi \cdot \psi = -1$, $\phi + \psi = 1$ e $\phi - \psi = \sqrt{5}$.

Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos

$$1 = \alpha + \beta, \qquad 1 = \alpha \overbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}^{\psi} + \beta \overbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}^{\phi}.$$

Fazendo redução com a correspondente matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \psi & \phi & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \phi - \psi & (1-\psi) \end{bmatrix}$$

produz $\beta = \frac{1-\psi}{\phi-\psi} = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$ e $\alpha = 1 - \beta = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$. Portanto, obtém-se a fórmula de Binet[a]:

$$F_n = \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

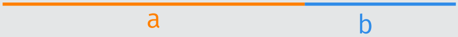
[a] Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856), matemático francês.

Nota

$\phi = 1.618033988749894\ldots$ é o número de ouro, e
$\psi = -\frac{1}{\phi} = 1 - \phi = -(\phi - 1) = -0.61803988749894\ldots$

Dividir retas

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

Denotamos a razão $\frac{a}{b}$ por ϕ, então temos

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi};$$

ou seja, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, o que implica $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (a única raiz positiva).

Nota

Utilizando a fórmula de Binet:

$$\frac{F_n}{F_{n-1}} = \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi^n - \psi^n} = \phi\,\frac{1 - (\frac{\psi}{\phi})^{n+1}}{1 - (\frac{\psi}{\phi})^n} \longrightarrow \phi$$

para $n \to \infty$ porque $|\frac{\psi}{\phi}| < 1$.

. . . de ordem k com k raízes diferentes

Consideremos $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k}$.

- Obter a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k$$

- e obter as soluções da equação caraterística:

$$\cdots = (q - q_1)(q - q_2) \dots (q - q_k).$$

- Se obtemos k soluções diferentes, então todas as soluções da equação de recorrência tem a forma

$$(C_1 q_1^n + C_2 q_2^n + \cdots + C_k q_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

  com constantes $C_1, C_2, \dots, C_k$.

Exemplo

- Consideremos $0 = x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3}$ de ordem 3.
- Equação caraterística: $0 = q^3 + 2q^2 - q - 2 = (q-1)(q+1)(q+2)$.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-2} - 2x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

de ordem 3; ou seja $0 = x_n - 3x_{n-2} + 2x_{n-3}$.

A corresponde equação caraterística é

$$0 = q^3 - 3q + 2 = (q-1)(q+2)(q-1) = (q-1)^2(q+2).$$

E agora? Temos apenas as duas soluções linearmente independente

$$(1^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad ((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \dots$$

Teorema

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k} \qquad (k \geq 1,\ c_k \neq 0) \qquad (*)$$

com a equação caraterística

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \dots (q - q_l)^{n_l}$$

com $n_1 + \cdots + n_l = k$ e $n_i > 0$. Então, as soluções da equação (*) são precisamente as combinações lineares das k sucessões

$$\begin{array}{ccccc}
(q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \dots & (n^{n_1-1} \cdot q_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\
(q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \dots & (n^{n_2-1} \cdot q_2^n)_{n\in\mathbb{N}}, \\
\dots & & & & \\
(q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & (n^2 \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}, & \dots & (n^{n_l-1} \cdot q_l^n)_{n\in\mathbb{N}}.
\end{array}$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência linear homogénea

$$x_n = 5x_{n-1} - 8x_{n-2} + 4x_{n-3} \qquad (n \geq 3)$$

com os valores iniciais $x_0 = 0$, $x_1 = 4$ *e* $x_2 = 18$.

A equação caraterística é

$$0 = q^3 - 5q^2 + 8q - 4 = (q-1)(q-2)(q-2) = (q-1)(q-2)^2;$$

portanto, as solução da equação de recorrência são as sucessões da forma (com $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$)

$$(\alpha 1^n + \beta 2^n + \gamma n 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Considerando os valores iniciais, procuramos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha + \beta = 0, \quad \alpha + 2\beta + 2\gamma = 4, \quad \alpha + 4\beta + 8\gamma = 18.$$

Exemplo

Utilizando a primeira equação, o sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0, \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma &= 4, \\ \alpha + 4\beta + 8\gamma &= 18 \end{aligned}$$

reduz ($\alpha = -\beta$) ao sistema

$$\begin{aligned} \beta + 2\gamma &= 4, \\ 3\beta + 8\gamma &= 18; \end{aligned}$$

cuja solução é $\gamma = 3$ e $\beta = -2$, logo $\alpha = 2$. Assim, a solução da equação de recorrência com os valores iniciais é a sucessão

$$(2 - 2 \cdot 2^n + 3 \cdot n \cdot 2^n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Preparação

Consideremos a função linear S «esquecer o primeiro termo» definida no espaço das sucessões por

$$S((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Então, uma sucessão $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é solução da equação de recorrência

$$0 = x_n - c_1 x_{n-1} - c_2 x_{n-2} - \cdots - c_k x_{n-k}$$

se e somente se

$$\begin{aligned} \text{sucessão nula} &= S^n(a) - c_1 S^{n-1}(a) - \cdots - c_k S^{n-k}(a) \\ &= (S^n - c_1 S^{n-1} - \cdots - c_k S^{n-k})(a) \\ &= S^{n-k} \circ (S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \operatorname{id})(a), \end{aligned}$$

para cada $n \geq k$. Veremos agora quais sucessões a função linear

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \operatorname{id}$$

anula.

Decompor a função

Seja (com $n_1 + \cdots + n_l = k$, $n_i > 0$)

$$0 = q^k - c_1 q^{k-1} - c_2 q^{k-2} - \cdots - c_k = (q - q_1)^{n_1} \ldots (q - q_k)^{n_k}$$

a equação caraterística, então

$$S^k - c_1 S^{k-1} - \cdots - c_k \,\mathrm{id} = (S - q_1 \,\mathrm{id})^{n_1} \circ \cdots \circ (S - q_k \,\mathrm{id})^{n_k}.$$

«A chave» da prova do teorema é o seguinte lema.

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$(q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (n^2 \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \ldots \qquad (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Para $m = 1$: $\quad S((q^n)_{n\in\mathbb{N}}) = (q^{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = q(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$; ou seja

$$(S - q\,\mathrm{id})(s_1) = \text{a sucessão nula.}$$

Nota: Portanto, $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um vetor próprio de S associado ao valor próprio q.

Lema

Para $q \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, a função linear $(S - q\,\mathrm{id})^m$ anula as sucessões

$$s_1 = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad s_2 = (n \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \dots \qquad s_m = (n^{m-1} \cdot q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demonstração.

Seja agora $m > 1$ e suponhamos que $(S - q\,\mathrm{id})^{m-1}$ anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Logo, $(S - q\,\mathrm{id})^m$ também anula $s_1, \dots, s_{m-1}$. Calculamos primeiro, para cada $n \in \mathbb{N}$, o termo n de $(S - q\,\mathrm{id})(s_m)$:

$$\begin{aligned}(n+1)^{m-1} \cdot q^{n+1} - n^{m-1}q^{n+1} &= \left(\sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^{n+1}\right) - n^{m-1}q^{n+1} \\ &= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-2} q \cdot \binom{m-1}{i} \cdot n^i \cdot q^n\right)}_{\text{combinação linear do termo } n \text{ de } s_1,\dots,s_{m-1}} ;\end{aligned}$$

Logo, $(S - q\,\mathrm{id})(s_m) = \alpha_1 s_1 + \dots \alpha_{m-1}s_{m-1}$ e por isso

$$(S - q\,\mathrm{id})^m(s_m) = \text{a sucessão nula.}$$

□

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) + i\operatorname{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) - i\operatorname{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- $z = a + ib = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$

  com $r = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ e $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ (se $a \neq 0$).
- $(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\operatorname{sen}(n\varphi)$.

Abraham de Moivre (1667 – 1754), matemático francês.

Um par de raízes complexas

Suponhamos que o polinómio caraterístico de uma equação de recorrência linear homogénea tem as raízes complexas

$$z = a + ib \qquad \text{e} \qquad \bar{z} = a - ib.$$

Portanto, obtemos as duas soluções (da equação de recorrência):

$$a = (z^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}},$$
$$b = (\bar{z}^n)_{n\in\mathbb{N}} = (r^n(\cos(\varphi) - i\,\mathrm{sen}(\varphi))^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Assim, obtemos as soluções (linearmente independentes)

$$\frac{a+b}{2} = (r^n\cos(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{e} \quad \frac{a-b}{2i} = (r^n\,\mathrm{sen}(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}.$$

Finalmente, se z e $\bar{z}$ são raízes múltiplas, consideremos

$$\dots, (r^n n^l\cos(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (r^n n^l\,\mathrm{sen}(n\varphi))_{n\in\mathbb{N}}, \dots.$$

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0, \quad \textit{com} \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1.$$

A correspondente equação caraterística é $0 = q^2 - q + 1$, com as soluções

$$z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \bar{z} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, $r = 1$ e $\tan(\varphi) = \sqrt{3}$, logo $\varphi = \frac{\pi}{3}$; e a solução geral é dada por

$$\left(\alpha\cos\left(\frac{n\,\pi}{3}\right) + \beta\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Com a condição inicial $a_0 = 0$ obtemos $\alpha = 0$, e com $a_1 = 1$ obtemos

$$1 = \beta\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \beta\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Portanto, a solução é a sucessão $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\,\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Equações de recorrência lineares em geral

Recordamos

O conjunto de todas as soluções da equação de recorrência linear

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n \qquad (*)$$

obtém-se como

$$\boxed{\text{todas as soluções da equação homogénea associada à (*)}} + \boxed{\text{uma solução particular de (*)}}.$$

Nota

- Já sabemos resolver a primeira questão.
- Estudamos agora métodos para obter uma solução particular de (*).

Obter uma solução particular

Seja $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n$.

(A) Se $d_n = c \cdot p^n$: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A \cdot p^n \qquad \text{resp.} \qquad b_n = A \cdot n^m \cdot p^n$$

($A \in \mathbb{R}$ a determinar) se p não é solução da equação caraterística (mais geral, se p é solução da equação caraterística de multiplicidade m).

(B) Se $d_n =$ um polinómio em n de grau j: Procuramos uma solução da forma

$$b_n = A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j \qquad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 não é solução da equação caraterística respetivamente

$$b_n = (A_0 + A_1 n + \cdots + A_j n^j) \cdot n^m \quad (A_i \in \mathbb{R} \text{ a determinar})$$

se 1 é solução da equação caraterística de multiplicidade m.

Os valores dos parâmetros A, A_i obtém-se substituindo b_n na equação de recorrência dada.

Exemplo

Vamos determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots;$$

com $x_0 = 0$ *e* $x_1 = -2$.

Procuramos primeiro a solução geral da equação homogénea associada, cuja equação caraterística é

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1).$$

Portanto, a solução geral da equação de recorrência homogénea é a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$a_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot 2^n = \alpha + \beta \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Exemplo

Agora procuramos uma solução de

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

da forma

$$b_n = n \cdot A \cdot 2^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tendo em conta que 2 é uma raiz simples de $q^2 - 3q + 2$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$An2^n - 3A(n-1)2^{n-1} + 2A(n-2)2^{n-2} = 2^n,$$

o que é equivalente a

$$2 = 2An - 3A(n-1) + A(n-2) = A.$$

Logo, uma solução da equação de recorrência acima é $(n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo

Assim, sabemos que a solução geral da equação

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por $(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -6 &= \alpha + 2\beta \end{aligned}.$$

Subtraindo a primeira linha à segunda dá $\beta = -6$ e por isso $\alpha = 6$.

Portanto, a solução é

$$(6 - 6 \cdot 2^n + n2^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Teorema

Seja

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(1)} + \cdots + d_n^{(m)} \qquad (*)$$

uma equação de recorrência linear e suponhamos que as sucessões $b^{(1)}$, $b^{(2)}, \dots, b^{(m)}$ *são soluções de*

$$\begin{aligned} x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(1)}, \\ x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(2)}, \\ &\vdots \\ x_n &= c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + \cdots + c_k x_{n-k} + d_n^{(m)}, \end{aligned}$$

respetivamente. Então, a sucessão $b^{(1)} + \cdots + b^{(m)}$ *é uma solução de* (*).

Exemplo

Vamos agora determinar a solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \ldots$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$.

A solução geral desta equação (ignorando as condições iniciais) é da forma

$$(a_n + b_n^{(1)} + b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denota a solução geral da equação homogénea associada, $(b_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n, \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

e $(b_n^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ é uma solução da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + (1+n), \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Exemplo

Falta determinar uma solução da equação de recorrência

$$x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 1 + n, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Uma vez que $1+n$ é um polinómio de grau 1 e 1 é raiz de multiplicidade 1 da equação característica

$$0 = q^2 - 3q + 2 = (q-2)(q-1),$$

consideremos $b_n^{(2)} = (A_0 + A_1 n)n^1 = A_0 n + A_1 n^2$. Substituindo na equação acima, obtemos $b_n^{(2)} = -\frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2$.

Portanto, a solução geral da equação de recorrência

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + 2^n + (1+n), \quad n = 2, 3, \dots$$

é dada por

$$\left(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Exemplo

Finalmente, procuramos aquele solução que satisfaz as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$. Portanto, para $n = 0$ e $n = 1$ em

$$(\alpha + \beta\, 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n\in\mathbb{N}}$$

obtemos as equações

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta + 4 - \tfrac{7+1}{2} \end{aligned} \quad\leadsto\quad \begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ -2 &= \alpha + 2\beta \end{aligned};$$

logo $\beta = -2$ e $\alpha = 2$.

Logo, a solução da equação de recorrência dada com as condições iniciais $x_0 = 0$ e $x_1 = -2$ é

$$(2 - 2\cdot 2^n + n2^{n+1} - \frac{7}{2}n - \frac{1}{2}n^2)_{n\in\mathbb{N}}.$$

5. Equações de recorrência não lineares

O problema

Nesta parte consideremos equações de recorrência onde x_n não depende da forma linear dos termos $x_{n-1}, \dots, x_{n-k}$. Em muitos casos podemos «linearizar» a equação utilizando um substituição adequada.

Exemplo (substituição «simples»)

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $x_0 = 2$*; aqui suponhamos* $x_n \geq 0$*, para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

Escrevendo $y_n = x_n^2$, esta equação de recorrência não linear transforma-se na equação de recorrência linear

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1),$$

com a condição inicial $y_0 = x_0^2 = 4$.

Exemplo

$$y_n = 2y_{n-1} + 1 \qquad (n \geq 1), \qquad y_0 = 4.$$

- A solução geral da equação homogénea associada $y_n = 2y_{n-1}$ é dada por $c \cdot (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Como o termo «não homogéneo» é o polinómio 1 de grau zero, e como 1 não é raiz do polinómio caraterístico $q - 2$, sabemos que existe uma solução particular $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $b_n = A$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Substituindo na equação produz $A = 2A + 1$, ou seja, $A = -1$.
- Consequentemente, as soluções desta equação de recorrência são precisamente as sucessões $(c \cdot 2^n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$, com $c \in \mathbb{R}$.
- Tendo em conta a condição inicial $y_0 = 4$, obtemos $c = 5$; assim, a solução da equação $x_n^2 = 2x_{n-1}^2 + 1$ com $x_0 = 2$ é a sucessão

$$(\sqrt{5 \cdot 2^n - 1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podemos «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.
Estas equações são equivalentes às equações (para $n \geq 2$)

$$\log_2(x_n) = \log_2(x_{n-1}) + \log_2(x_{n-2}), \quad \log_2(x_0) = \log_2(x_1) = 1.$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad y_0 = y_1 = 1;$$

cuja solução é a sucessão $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci.

Recordamos que,

para cada $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, a função $\log_a : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é bijetiva e satisfaz

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad \log_a(1) = 0.$$

Logo, em muitos casos podemos «linearizar» passando para o logaritmo.

Exemplo

Consideremos a equação de recorrência não linear

$$x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-2} \quad (n \geq 2), \quad x_0 = x_1 = 2.$$

Logo, $x_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, a solução da equação acima com as condições iniciais é

$$(2^{F_n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Exemplo

Consideremos agora a equação de recorrência não linear

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + \underbrace{\sqrt{x_{n-2} + \sqrt{x_{n-3} + \sqrt{\dots \sqrt{x_0}}}}}_{x_{n-1}}}$$

com a condição inicial $x_0 = 4$. Portanto, $x_1 = \sqrt{x_0} = 2$, e para $n \geq 2$ temos

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} + x_{n-1}} > 0;$$

ou seja $x_n^2 = 2x_{n-1}$ $(n \geq 2)$; o que é equivalente a

$$2\log_2(x_n) = 1 + \log_2(x_{n-1}) \quad (n \geq 2).$$

Fazendo $y_n = \log_2(x_n)$, obtemos a equação de recorrência linear

$$y_n = \frac{1}{2}y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$$

com a condição inicial $y_1 = 1$.

Exemplo

$$y_n = \frac{1}{2} y_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 2), y_1 = 1 \quad (y_n = \log_2(x_n)).$$

A solução geral da equação de recorrência (ignorando a condição inicial) é dado por

$$(c\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1)_{n \geq 1} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Utilizando a condição inicial $y_1 = 1$ obtemos

$$1 = c\left(\frac{1}{2}\right) + 1;$$

logo, $c = 0$. Portanto, para todo o $n \geq 1$,

$$x_n = 2^{y_n} = 2,$$

e $x_0 = 4$.

Exemplo

Finalmente, consideremos a equação de recorrência (linear mas não com coeficientes constantes)

$$x_n = n \cdot x_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

Com $x_n = n! \cdot y_n$, a equação acima é equivalente a

$$n! \cdot y_n = n \cdot (n-1)! \cdot y_{n-1} = n! \cdot y_{n-1},$$

o que é equivalente a $y_n = y_{n-1}$, para todo o $n \geq 1$. Portanto, a solução geral da equação acima é dada por

$$(n! \cdot c)_{n \in \mathbb{N}} \qquad (c \in \mathbb{R}).$$