UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cálculo I C

2023/2024

Avaliação Discreta

Teste 2 - modelo

Duração: 2h00

Nº mec. ________________ **Nome** ____

Comece por escrever o seu número e nome nas quatro folhas do enunciado. Cada folha contém uma questão, a que deve responder na própria folha (frente e verso), justificando claramente a sua resposta. Pode consultar apenas o seu formulário e não pode utilizar qualquer equipamento eletrónico. Boa sorte!

Nº de folhas de continuação desta questão (0 se não usou nenhuma): _______

1. [Aplicações do integral; cálculo de áreas.]
   Considere as regiões

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge -x \leq y \leq 1 - x^2\} \text{ e}$$

$-x^2+1$ $\quad$ $x^2=1$ $\quad$ $\Leftrightarrow x=\pm 1$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge y \geq x^2 - 1 \wedge x \geq 0\}.$$

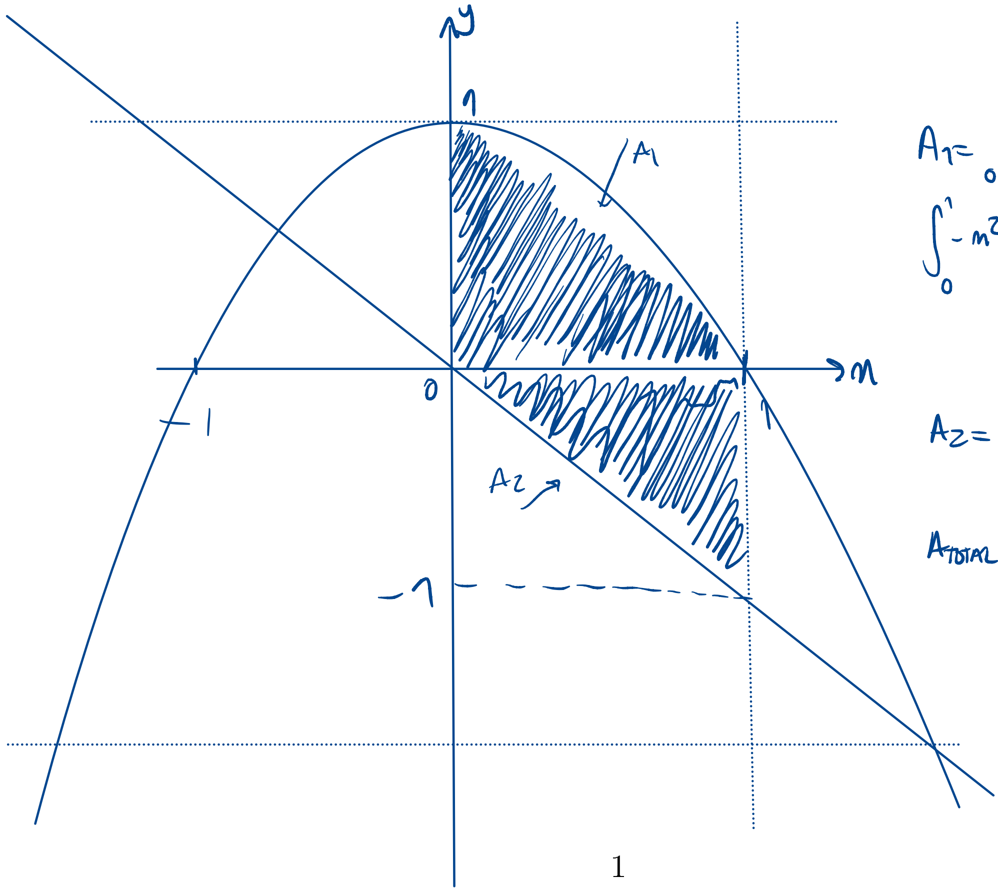
   (a) Esboce a região D_1 e determine a sua área.
   (b) Esboce a região D_2 e determine a sua área.
   (c) Esboce a região $D = D_1 \cup D_2$ e determine a sua área.

$1-x^2=y$

$\Leftrightarrow 1-0=y$

$\Leftrightarrow y=1$

a)



$A_1 =$

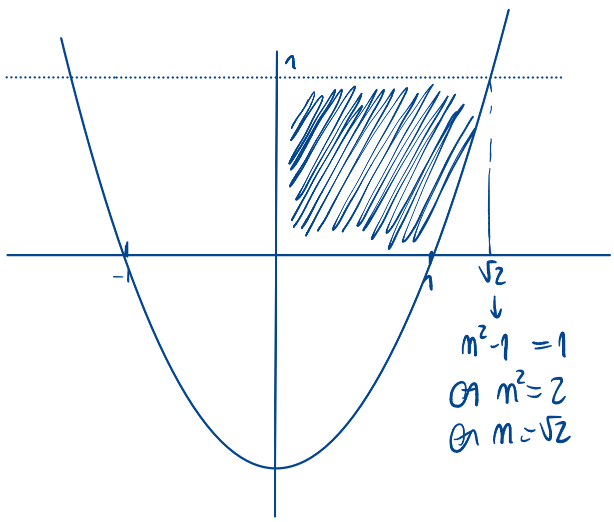
$\int_0^1 -x^2+1 = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1$

$= -\frac{1}{3}+1 = \frac{2}{3}$

$A_2 = \frac{b \times h}{2} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$

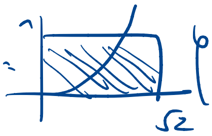
$A_{TOTAL} = \frac{2}{3}+\frac{1}{2}$

b) $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \wedge y \geq x^2 - 1 \wedge x \geq 0\}$.



$x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

$x^2 - 1 = x$

$A_{TOTAL} =$  $\Rightarrow A = \sqrt{2}$

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^2 - 1 = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{2} - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

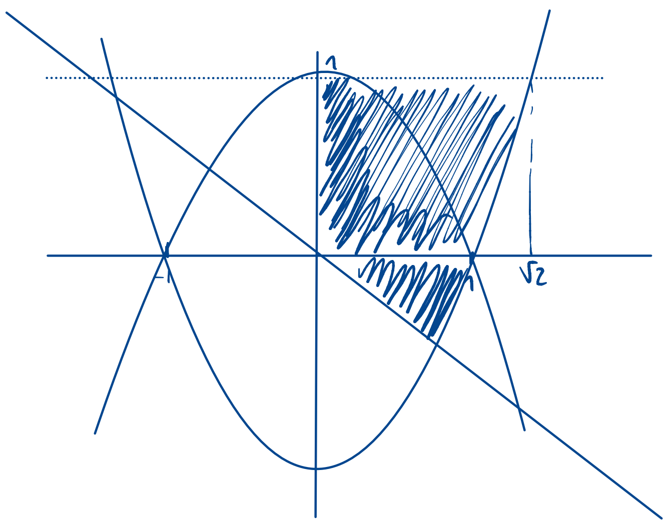
$-\frac{2}{3}$

$$= \frac{2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$A_{D_2} = \sqrt{2} - \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2} - 2}{3}$$

(c) Esboce a região $D = D_1 \cup D_2$ e determine a sua área.



$$A_D = A_{D_1} + A_{D_2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 2}{3} + A_2$$

$$= \frac{4\sqrt{2} - 2}{3} + \frac{1}{2}$$

Nº mec. ______________ **Nome:** ____

Nº de folhas de continuação desta questão (0 se não usou nenhuma): ______

2. [Integrais impróprios e transformadas de Laplace.]
   Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios, indicando, em caso de convergência, se a convergência é simples ou absoluta.

   (a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2-1}\,dx$.

   (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\,dx$.

   (c) $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ com $n \in \mathbb{N}$.

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2-1}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{y^2-1}\,dy$

M.V.
$y = x+2$
$dy = dx$

Seja $f(y) = \frac{1}{y^2-1}$, $f(y) \geq 0$, $\forall y \geq 2$

Seja $g(y) = \frac{1}{y^2}$, $g(y) > 0$, $\forall y \geq 2$

Agora, ao aplicar o critério do limite sendo $L = \lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{g(y)}$

$\lim_{y\to+\infty} \frac{\frac{1}{y^2-1}}{\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{y^2-1}$

$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}(1-\frac{1}{y^2})} = \frac{1}{1} = 1$

Como $L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\int_2^{+\infty} \frac{1}{y^2} \to$ converge logo $\int_2^{+\infty} \frac{1}{y^2-1}$ converge

OUTRA MANEIRA

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2-1} = \int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$

Seja $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+3}$ $\forall x \geq 0$, $f(x) \geq 0$

Seja $g(x) = \frac{1}{x^2}$ $\forall x \geq 0$, $g(x) \geq 0$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+4x+3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+\frac{4x}{x^2}+\frac{3}{x^2})} = 1$

Como $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ converge $\to$ então $\int \frac{1}{x^2+4x+3}$ converge

Como, para $x>0$, $\frac{1}{(x+2)^2-1} > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2-1}\,dx$ é absolutamente convergente.

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) = \int_0^{+\infty} \sin(x) + \int_{-\infty}^{0} \sin(x)$

$= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \sin(x)\,dx + \lim_{z\to-\infty} \int_{z}^{0} \sin(x)\,dx$

$= \lim_{t\to+\infty} [-\cos(x)]_0^t + \lim_{z\to-\infty} [-\cos(x)]_z^0$

Não existe $-\cos(+\infty)$ $\to$ Logo o integral é divergente

e) $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt = \mathcal{L}\{t^n\}(s-1) \quad , s > -1$

$$= \frac{n!}{\underbrace{(s-1)^{n+1}}_{>0}} \quad , s > -1 \quad = n! > 0$$

Assim $t^n e^{-t} > 0$ e o integral é absolutamente convergente

Nº mec. ________________ **Nome:** ____

Nº de folhas de continuação desta questão (0 se não usou nenhuma): _______

3. [Equações diferenciais de ordem 1: variáveis separáveis, lineares, de Bernoulli e homogéneas.]
   Resolva os seguintes problemas:

   (a) Determine uma função derivável f que satisfaz $f(x)f'(x) = -x$ e $f(0) = 1$, indicando o seu domínio.

   (b) Determine uma solução da equação $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}$ que satisfaz a condição $y(1) = 2$.

   (c) Determine uma família de soluções da equação $y' - \frac{x}{x^2+y^2}y = 0$.

a) $f(x)f'(x) = -x$, $f(0)=1$

$yy' = -x$

Nº mec. ________________ **Nome:** ____

Nº de folhas de continuação desta questão (0 se não usou nenhuma): _______

4. [Equações lineares de ordem superior a 1: polinómio característico, método dos coeficientes indeterminados e princípio da sobreposição.]
   Considere a equação diferencial linear completa de coeficientes constantes

$$y^{(iv)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 10\mathrm{e}^x + 4$$

   (a) Sabendo que $r = 1$ é raiz do polinómio característico de multiplicidade 2, determine a solução geral da equação homogénea associada.

   (b) Descreva o procedimento para obter uma solução particular da equação completa utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

   (c) Sabendo que $y = x^2\mathrm{e}^x$ verifica $y^{(iv)} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 10\mathrm{e}^x$, diga qual é a solução geral da equação completa.