


Algoritmos de Procura e de Ordenação I

02/10/2024

Sumário

- Recap
- Ordens de complexidade : Análise experimental
- Análise do Caso Médio : Abordagem estruturada
- **Linear Search** – Procura sequencial num **array não ordenado**
- **Linear Search** – Procura sequencial num **array ordenado**
- **Binary Search** – Procura binária num **array ordenado**
- Exercícios / Tarefas 
- Sugestão de leitura

Let's
RECAP

Recapitulação

Ordens de Complexidade – Notação habitual

notation	provides	example	shorthand for	used to
Big Theta	asymptotic order of growth	$\Theta(N^2)$	$\frac{1}{2} N^2$ $10 N^2$ $5 N^2 + 22 N \log N + 3N$ \vdots	classify algorithms
Big Oh	$\Theta(N^2)$ and smaller	$O(N^2)$	$10 N^2$ $100 N$ $22 N \log N + 3 N$ \vdots	develop upper bounds
Big Omega	$\Theta(N^2)$ and larger	$\Omega(N^2)$	$\frac{1}{2} N^2$ N^5 $N^3 + 22 N \log N + 3 N$ \vdots	develop lower bounds




[Sedgewick & Wayne]

Best case, Worst case, Average Case

$$B(n) = \min_{I \in D_n} t(I) \quad W(n) = \max_{I \in D_n} t(I)$$

$$A(n) = \sum_{I \in D_n} p(I) \times t(I)$$

Procura da 1ª ocorrência do maior elemento

```
int searchMax( int a[], int n ) {  
    int indexMax = 0;   
    for( int i=1; i<n; i++ ) {  
        if( a[i] > a[indexMax] ) {  (n - 1) comps.  
            indexMax = i;   
        }  
    }  
    return indexMax;  
}
```

Atribuições a indexMax:
 $B(n) = 1$
 $W(n) = n$
 $A(n) \approx n/2$

Ordens de Complexidade

– Análise experimental

Ordens de Complexidade / Classes de Eficiência

order of growth	name	typical code framework	description	example	$T(2N) / T(N)$
1	constant	<code>a = b + c;</code>	statement	add two numbers	1
$\log N$	logarithmic	<pre>while (N > 1) { N = N / 2; ... }</pre>	divide in half	binary search	~ 1
N	linear	<pre>for (int i = 0; i < N; i++) { ... }</pre>	loop	find the maximum	2
$N \log N$	linearithmic	[see mergesort lecture]	divide and conquer	mergesort	~ 2
N^2	quadratic	<pre>for (int i = 0; i < N; i++) for (int j = 0; j < N; j++) { ... }</pre>	double loop	check all pairs	4
N^3	cubic	<pre>for (int i = 0; i < N; i++) for (int j = 0; j < N; j++) for (int k = 0; k < N; k++) { ... }</pre>	triple loop	check all triples	8
2^N	exponential	[see combinatorial search lecture]	exhaustive search	check all subsets	$T(N)$



[Sedgewick & Wayne]

Exemplo – Ordem de complexidade ?

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$M(n)$	1	3	10	36	136	528	2080	8256	32896

$$528 : 136 = 3,88$$

- $M(n)$: número de operações efetuadas para instância de tamanho n
- Ordem de complexidade ?
- Expressão para o número de operações ?

$$\frac{528}{136} = 3,88$$

$$\frac{2080}{528} = 3,96$$

$$\frac{8256}{2080} = 3,98$$

$$\frac{32896}{8256} = 3,98$$

Outro exemplo – Ordem de complexidade ?

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$M(n)$	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

$$M(n) \in \Theta(2^n)$$

- $M(n)$: número de operações efetuadas para instância de tamanho n
- Ordem de complexidade ?
- Expressão para o número de operações ?

Tempo de execução – Estimativas

order of growth of time		Tamanho Array		for a program that takes a few hours for input of size N	
description	function	2x factor	10x factor	predicted time for 10N	predicted time for 10N on a 10x faster computer
<i>linear</i>	N	2	10	a day	a few hours
<i>linearithmic</i>	$N \log N$	2	10	a day	a few hours
<i>quadratic</i>	N^2	4	100	a few weeks	a day
<i>cubic</i>	N^3	8	1,000	several months	a few weeks
<i>exponential</i>	2^N	2^N	2^{9N}	never	never

Predictions on the basis of order-of-growth function

[Sedgewick & Wayne]

Linear Search

– Array não ordenado

Procura sequencial – Nº de Comparações ?

```
int search( int a[], int n, int x ) {  
    for( int i=0; i<n; i++ ) {  
        if( a[i] == x ) {  
            return i;  
        }  
    }  
    return -1;  
}
```



$B(n) = 1$

$W(n) = n$

$A(n) = ?$

Caso Médio – Abordagem estruturada

- Estabelecer um **cenário**
- Identificar a **operação básica** a contar
- Identificar os **casos / configurações possíveis**
 - **Quantos** são ?
- Contar o **nº de operações** realizadas para cada um dos casos
- Atribuir uma **probabilidade** a cada um dos casos possíveis
- Construir uma **tabela**
- Calcular o **nº de operações para o caso médio**

Cenário – Valor procurado existe no array

- O valor procurado **pertence ao array**
- Contar o **número de comparações** necessárias para o encontrar
- Valor encontrado na **1ª posição**, ou na **2ª posição**, ou ...
- Necessária **1 comparação**, ou **2 comparações**, ou ...
- Situações **equiprováveis**
- Tabela **?**

Cenário – Valor procurado existe no array

Casos possíveis		Nº de comparações	Probabilidade
l_0	É o 1º elemento	1	$1/n$
l_1	É o 2º elemento	2	$1/n$
l_2	É o 3º elemento	3	$1/n$
...
l_{n-1}	É o último elemento	n	$1/n$

$$A(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \times (i + 1) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (i + 1) = \frac{1}{n} \times \frac{n \times (n + 1)}{2} = \frac{n + 1}{2} \approx \frac{n}{2}$$

Cenário – Valor procurado pode não existir

- O valor procurado **pertence** ao array com **probabilidade p**
- O valor procurado **não pertence** ao array com **probabilidade $(1 - p)$**
- Quantos casos são ?
- Contar o **número de comparações** para cada um dos casos
- Valor encontrado na **1ª posição**, ou na **2ª posição**, ou ...
- Necessária **1 comparação**, ou **2 comparações**, ou ...
- Que **probabilidade** atribuir a **cada caso** ?
- Tabela ?

Cenário – Valor procurado pode **não existir**

Casos possíveis		Nº de comparações	Probabilidade
l_0	É o 1º elemento	1	p / n
l_1	É o 2º elemento	2	p / n
l_2	É o 3º elemento	3	p / n
...
l_{n-1}	É o último elemento	n	p / n
l_n	Não encontrado !	n	$(1 - p)$

$$A(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p}{n} \times (i + 1) + (1 - p) \times n = \frac{p \times (n + 1)}{2} + (1 - p) \times n$$

Cenário – Valor procurado pode **não existir**

$$A(n) = \frac{p \times (n + 1)}{2} + (1 - p) \times n$$

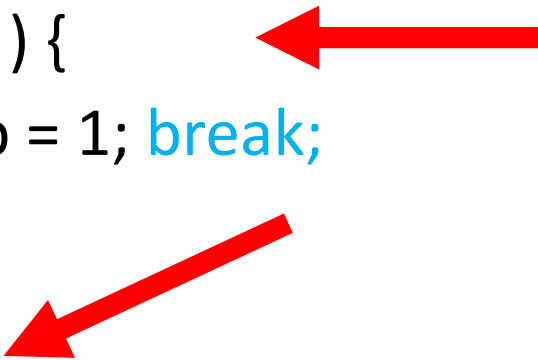
- Se **p = 1**, então $A(n) = (n + 1) / 2 \approx n / 2$ comparações – OK
- Se **p = 50%**, então $A(n) = (n + 1) / 4 + n / 2 \approx 3 \times n / 4$
- Se **p = 25%**, então $A(n) = (n + 1) / 8 + 3 \times n / 4 \approx 7 \times n / 8$

Linear Search

- Array ordenado

Procura sequencial – Nº de Comparações ?

```
int search( int a[], int n, int x ) {  
    int stop = 0; int i;  
    for( i=0; i<n; i++ ) {  
        if( x <= a[i] ) {  
            stop = 1; break;  
        }  
    }  
    if( stop && x == a[i] ) return i;  
    return -1;  
}
```



// Ordem da conjunção !!

Melhor Caso e Pior Caso

- Valor procurado pode **pertencer** ou **não pertencer** ao array
- **$B(n) = 2$** - Quando ?
- **$W(n) = (n + 1)$** - Quando ?

Melhor Caso e Pior Caso

- Valor procurado pode **pertencer** ou **não pertencer** ao array
- **$B(n) = 2$**
 - Valor procurado **é igual ao 1º elemento**
OU
 - Valor procurado **é menor do que o 1º elemento**
- **$W(n) = (n + 1)$**
 - Valor procurado **é igual ao último elemento**
OU
 - Valor procurado **está entre o penúltimo e o último**

Caso Médio – Casos possíveis

	Casos possíveis		Nº de comparações	Probabilidade
n casos Sucesso	Sucesso 0	É o 1º elemento		
	Sucesso 1	É o 2º elemento	3 → 2 no ciclo 1 fora	
		
	Sucesso (n – 1)	É o último elemento		
	Insucesso 0	Menor do que o 1º		
	Insucesso 1	Entre o 1º e o 2º		
		
	Insucesso (n – 1)	Entre o penúltimo e o último		
	Insucesso n	Maior do que o último		n+1

- Quais são os **casos possíveis** ? Quantas **comparações** em cada um ?

Caso Médio – Nº de comparações efetuadas

Casos possíveis		Nº de comparações	Probabilidade
Sucesso 0	É o 1º elemento	2	
Sucesso 1	É o 2º elemento	3	
...	
Sucesso (n – 1)	É o último elemento	n + 1	
Insucesso 0	Menor do que o 1º	2	
Insucesso 1	Entre o 1º e o 2º	3	
...	
Insucesso (n – 1)	Entre o penúltimo e o último	n + 1	
Insucesso n	Maior do que o último	n	

- Que **probabilidade** associar a cada caso ?

Caso Médio – p = probabilidade de sucesso

Casos possíveis		Nº de comparações	Probabilidade
Sucesso 0	É o 1º elemento	2	p / n
Sucesso 1	É o 2º elemento	3	p / n
...
Sucesso $(n - 1)$	É o último elemento	$n + 1$	p / n
Insucesso 0	Menor do que o 1º	2	$(1 - p) / (n + 1)$
Insucesso 1	Entre o 1º e o 2º	3	$(1 - p) / (n + 1)$
...
Insucesso $(n - 1)$	Entre o penúltimo e o último	$n + 1$	$(1 - p) / (n + 1)$
Insucesso n	Maior do que o último	n	$(1 - p) / (n + 1)$

- $A(n) = ?$

Caso Médio – **p** = probabilidade de sucesso

$$A(n) = \frac{p}{n} \times \left(\sum_{i=0}^{n-1} (i+2) \right) + \frac{1-p}{n+1} \times \left(\sum_{i=0}^{n-1} (i+2) \right) + \frac{1-p}{n+1} \times n$$

$$A(n) = \frac{p}{n} \times \frac{n \times (n+3)}{2} + \frac{1-p}{n+1} \times \frac{n \times (n+3)}{2} + \frac{1-p}{n+1} \times n$$

$$A(n) = \frac{n}{2} + 2 - \frac{p}{2} + \frac{2 \times (p-1)}{n+1} \approx \frac{n}{2} + 2 - \frac{p}{2}$$

- Comparar com o algoritmo para o array não ordenado
- Melhor ou pior ?

Binary Search

– Array ordenado

Procura binária

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

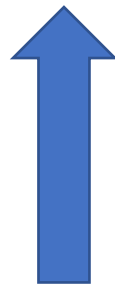
- O valor **2** pertence ao array ?
- Qual é o **primeiro elemento** consultado ?

Procura binária – 1º elemento consultado

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

- O valor **2** pertence ao array ?

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12



?

Procura binária – Restringir a procura

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

- O valor **2** pertence ao array ?

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

0	1
2	4

Qual é o **próximo elemento** consultado?

Procura binária – 2º elemento consultado

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

- O valor **2** pertence ao array ?

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

0	1
2	4

Encontrado !!



Procura binária

- O valor **13** pertence ao array ?

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

Procura binária – 1º elemento consultado

- O valor **13** pertence ao array ?

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12



Procura binária – Restringir a procura

- O valor **13** pertence ao array ?

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

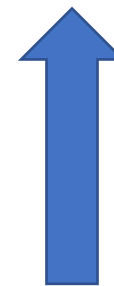
3	4	5
8	10	12

Procura binária – 2º elemento consultado

- O valor **13** pertence ao array ?

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

3	4	5
8	10	12



Procura binária – Restringir a procura

- O valor **13** pertence ao array ?

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

3	4	5
8	10	12

5
12



Procura binária – Fim da procura

- O valor **13** pertence ao array ?

0	1	2	3	4	5
2	4	6	8	10	12

3	4	5
8	10	12

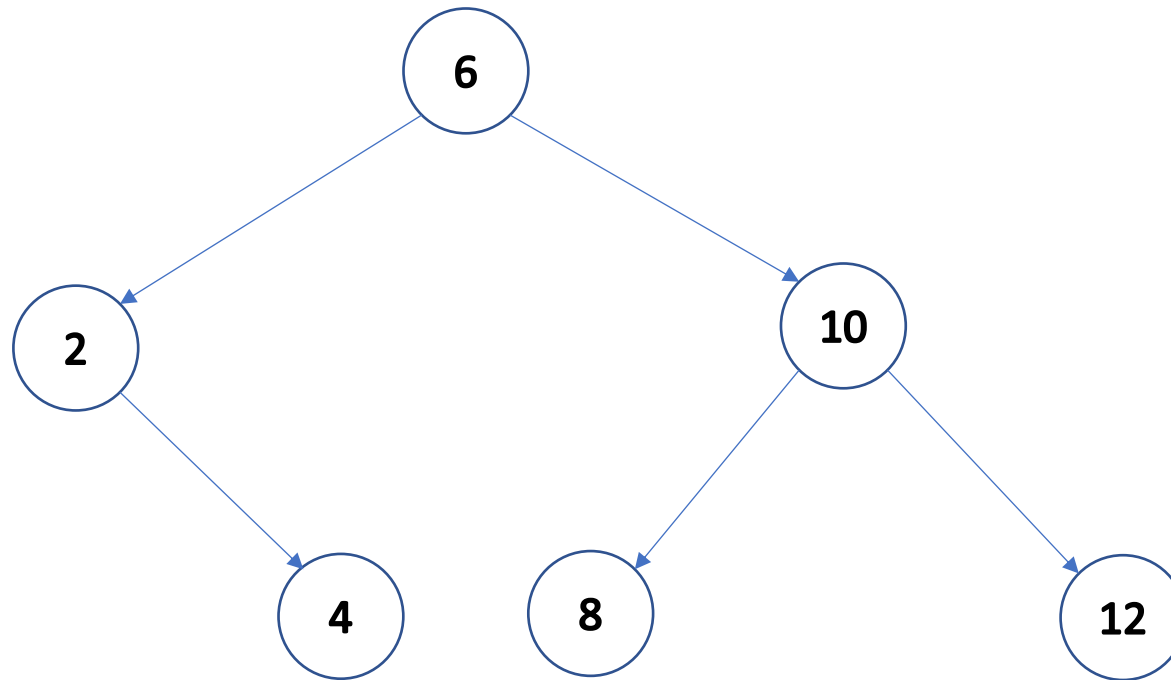
5
12

Não encontrado !!



Representação do array como árvore binária

- A **representação gráfica como árvore binária** auxilia a compreensão do funcionamento do algoritmo





Exercícios / Tarefas

Exercício 1 – Verdadeiro ou Falso

- Ao efetuar, usando o algoritmo clássico, o produto de matrizes $A \times B = C$, em que a matriz A tem 10 linhas e 20 colunas e a matriz B tem 20 linhas e 10 colunas, são efetuadas **2000 multiplicações**.
- Ao efetuar, usando o algoritmo clássico, os produtos de matrizes $A \times (B \times C) = D$, em que a matriz A tem 2 linhas e 3 colunas, a matriz B tem 3 linhas e 4 colunas e a matriz C tem 4 linhas e 5 colunas, são efetuadas, **no total, 120 multiplicações**.

Exercício 2 – Escolha múltipla

A tabela apresenta o número de operações básicas efetuadas, por um determinado algoritmo, para sucessivos valores de n .

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$M(n)$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Trata-se de um algoritmo com ordem de complexidade:

- a) logarítmica.
- b) linear.
- c) quadrática.
- d) Nenhuma está correta.

Exercício 3 – Escolha múltipla

A tabela apresenta o número de operações básicas efetuadas, por um determinado algoritmo, para sucessivos valores de n .

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256
$M(n)$	4	12	40	144	544	2112	8320	33024	131584

Trata-se de um algoritmo com ordem de complexidade:

- a) logarítmica.
- b) linear.
- c) quadrática.
- d) Nenhuma está correta.

Exercício 4 – Escolha múltipla

A tabela apresenta o número de operações básicas efetuadas, por um determinado algoritmo, para sucessivos valores de n .

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$M(n)$	0	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

Trata-se de um algoritmo com ordem de complexidade:

- a) logarítmica.
- b) linear.
- c) quadrática.
- d) Nenhuma está correta.

Exercício 5 – Escolha múltipla

Considere o *array* ordenado de 8 elementos. Usando o algoritmo de **procura binária**:

0	1	2	3	4	5	6	7
1	3	5	7	9	11	13	15

- a) O elemento de valor 5 é encontrado ao fim de 3 tentativas.
- b) O elemento de valor 11 é encontrado ao fim de 2 tentativas.
- c) Ambas estão corretas.
- d) Nenhuma está correta.

Tarefa 1 – Procura Sequencial

- Considere as **duas versões do algoritmo**
- Usando as expressões obtidas na aula, determine o **número de comparações** efetuadas no **caso médio** para diferentes valores da **probabilidade** de o **valor procurado pertencer ao array**
- Por exemplo, considere **$p = 10\%, 20\%, 40\%, 60\%$ e 80%**
- Construa uma **tabela** e analise os valores obtidos

Tarefa 2 – Procura Binária

- **Simule** o funcionamento do algoritmo para arrays ordenados com um **maior número de elementos**
- Por exemplo, para **$n = 13$** e **$n = 15$**
- Habitualmente expressa-se o **esforço computacional** deste algoritmo através do **número de consultas a elementos do array**
- **Melhor caso** : Quando ocorre ? Quantos **elementos** são **consultados** ?
- **Pior caso** : Quando ocorre ? Quantos **elementos** são **consultados** ?

Sugestão de leitura

Sugestão de leitura

- J. J. McConnell, Analysis of Algorithms, 1st Edition, 2001
 - Capítulo 2: secções 2.1, 2.2