

Sistemi con Vincoli

Federico Tavella, Alessandro Tezza

13 gennaio 2018

1 Introduzione

In questa relazione verranno discusse alcune euristiche utilizzate per effettuare inferenza euristica su reti Bayesiane tramite la riduzione di Neumaser Trotter.

In questa sezione introduttiva verrà descritto brevemente il contesto di progetto. Nella Sezione 2, verranno proposte e descritte diverse euristiche. Nella Sezione 3, verranno presentati i risultati dei test svolti sulle differenti euristiche. Infine, nella Sezione 4 verranno tratte alcune conclusioni finali sul progetto svolto.

1.1 La riduzione di Neumaser Trotter per effettuare inferenza su reti Bayesiane

Una rete Bayesiana è un modello grafico probabilistico che rappresenta le dipendenze condizionali fra un gruppo di variabili. Tale rete è modellata tramite un grado diretto ed aciclico, dove i nodi corrispondono alle variabili, e un arco fra due nodi rappresenta una dipendenza condizionale. E' quindi specificata una distribuzione condizionale per ogni nodo dati i suoi genitori (i.e., altri nodi che puntano ad esso). Figura 1.1 mostra un esempio di rete Bayesiana in cui le varie distribuzioni condizionali sono rappresentate tramite delle tabelle di probabilità condizionale.

Un problema di inferenza su reti Bayesiane è quello della Maximum A Posteriori estimate (MAP), dove, dati dei valori per alcune variabili, è necessario determinare i valori più probabili per le variabili rimanenti. E' possibile considerare tale compito come un problema di ottimizzazione, in cui è necessario trovare un'assegnazione alle variabili che massimizzi un prodotto di probabilità. Inoltre, è possibile trasformare il problema di ottimizzazione in un "Weighted CSP", trattando i logaritmi negativi delle probabilità come costi: in questo modo, il prodotto da ottimizzare diventa una somma.

A partire da queste idee, T.K. Kumar¹ ha proposto un approccio che consiste nel convertire la rete Bayesiana in un Constraint Composite Graph (CCG), trasformare il problema in un Maximum Weighted Vertex Cover Problem sul CCG e applicare la riduzione di Neumaser-Trotter, che determina il valore ottimo di alcune variabili.

¹Kumar, TK Satish. "Kernelization, generation of bounds, and the scope of incremental computation for weighted constraint satisfaction problems." The International Symposium on Artificial Intelligence and Mathematics. 2016.

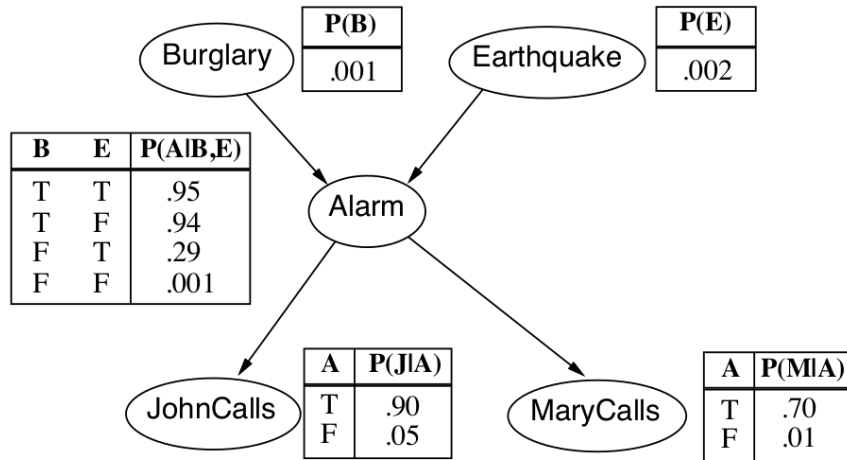


Figura 1: Esempio di rete Bayesiana.

Dopo aver applicato l'approccio proposto da Kumar, il CCG si troverà in uno stato in cui parte delle variabili sono state fissate dalla riduzione di Neumaser-Trotter, mentre altre non sono ancora fissate. L'obiettivo di progetto è quello di valutare diverse euristiche per realizzare un approccio euristico: a seguito della riduzione, alcune altre variabili verranno fissate secondo una certa euristica, per poi riapplicare la riduzione di Neumaser-Trotter, e così via.

2 Euristiche

In questa sezione, descriviamo le varie euristiche utilizzate e quali vantaggi/svantaggi.

2.1 Nodo con peso massimo

Ogni nodo - thorn, ausiliario o senza classe - ha associato un peso che indica la sua rilevanza all'interno del problema. Questo peso influisce sul valore finale della funzione obiettivo. L'intuizione dietro a questa euristica è che i nodi più influenti nel problema siano quelli con il peso più elevato. Di conseguenza, dando maggiore priorità a questi nodi il problema dovrebbe essere risolto nel più breve tempo possibile. Come effetto collaterale, fissare i nodi con il peso più elevato significa incrementare il valore finale della funzione obiettivo che, trattandosi di un problema di minimizzazione, è chiaramente uno svantaggio.

2.2 Nodo con peso minimo

Il ragionamento dietro questa euristica è l'opposto a quello descritto nella Sezione 2.1: fissando i nodi con il peso minore l'obiettivo è quello di minimizzare il valore finale della funzione obiettivo. Ovviamente, se l'intuizione che i nodi con peso elevato aiutano a risolvere più rapidamente il problema si rivelasse

corretta, questa euristica richiede un elevato numero di iterazioni per risolvere il problema.

2.3 Nodi ausiliari

I nodi ausiliari sono caratterizzati da . 

2.4 Nodi ausiliari - peso massimo

Combinazione delle euristiche descritte nelle Sezion 2.3 e 2.1. In questo modo, l'euristica seleziona tra i nodi ritenuti più importanti - gli ausiliari - quelli con maggiore rilevanza, ossia con peso massimo.

2.5 Nodi ausiliari - peso minimo

Combinazione delle euristiche descritte nelle Sezion 2.3 e 2.2. Così facendo, si tenta di selezionare i nodi ritenuti più rilevanti mantenendo un valore basso per la funzione obiettivo.

2.6 Nodi thorn

I nodi thorn sono caratterizzati da . 

2.7 Nodi thorn - peso massimo

Combinazione delle euristiche descritte nelle Sezioni 2.6 e 2.1.

2.8 Nodi thorn - peso minimo

Combinazione delle euristiche descritte nelle Sezioni 2.6 e 2.2.

2.9 Nodi senza classe

Oltre ai nodi thorn e ai nodi ausiliari, i problemi di soddisfacimento dei vincoli definiti in questo modo prevedono anche dei nodi senza classe, ossia che non appartengono a nessuna delle due classi precedenti. Questa euristica vuole investigare quale sia la rilevanza di questi nodi all'interno del problema.

2.10 Nodi senza classe - peso massimo

Combinazione delle euristiche descritte nelle Sezion 2.9 e 2.1.

2.11 Nodi senza classe - peso minimo

Combinazione delle euristiche descritte nelle Sezion 2.9 e 2.2.

2.12 Nodo con massimo numero di archi

In questo tipo di problemi, le variabili sono espresse come nodi e i vincoli binari come archi che collegano i nodi. Il ragionamento più logico che ne segue è fissare i nodi con il massimo numero di archi, che conseguentemente vanno a fissare altri N nodi (i.e. variabili), dove N è il numero di archi collegati al nodo (i.e. vincoli in cui la variabile rappresentata dal nodo è presente).

2.13 Nodo con minimo numero di archi

Questa euristica usa il principio contrario a quello applicato nella Sezione 2.12. La motivazione è che questa euristica prende in considerazione il fatto che i nodi più rilevanti per la risoluzione o ottimizzazione del problema, o quelli che possano rallentare il risolvimento, siano tra i più isolati, ossia con il minor numero di archi collegati.

2.14 Tabella riassuntiva

3 Risultati

In questa sezione verranno presentati i risultati degli esperimenti sulle varie euristiche. Gli esperimenti sono stati eseguiti su un totale di 40 problemi diversi.

Per valutare le euristiche, sono state utilizzate diverse metriche:

- **Media passi:** la media del numero di passi necessari per chiudere il problema, calcolata su tutti i problemi;
- **Media fissati:** la media di nodi fissati ad ogni iterazione, calcolata su tutte le iterazioni di tutti i problemi;
- **Media max nodi fissati:** per ogni problema, viene calcolato il numero di nodi fissati ad ogni iterazione. Viene preso il numero di nodi fissati dell'iterazione che ne ha fissati di più per ogni problema, e viene effettuata la media di tale valore su ogni problema;
- **Media nodi no fissati:** la media del numero di iterazioni in cui non vengono fissati nodi, calcolata considerando tutte le iterazioni di tutti i problemi;
- **Max passi:** numero di passi necessari per chiudere il problema che ha richiesto più iterazioni;
- **Max fissati:** numero massimo di nodi fissati in un passo, calcolato considerando ogni iterazione di ogni problema;
- **Max max nodi fissati:**
- **Min nodi no fissati:** minimo numero di iterazioni in cui non sono stati fissati nodi, calcolato su tutte le iterazioni di tutti i problemi.

4 Conclusioni

Euristica	Media passi	Media fissati	Media max nodi fissati	Media nodi no fissati	Max passi	Max fissati	Max max nodi fissati	Min nodi no fissati
aux	1791.4	3.1335912648	272.8	14592.2	9298	3.6839212093	283	429
auxMaxPeso	341.45	21.5602317507	585	1407.15	1313	34.3806228374	613	27
auxMinPeso	2810.35	1.5978815539	569.6	27715.55	14024	2.0287322275	608	895
maxArchiDaFissare	243.2	31.0389286082	328.45	0	1246	36.8441558442	405	0
maxPeso	188.55	37.2322594837	604.7	0	938	50.125	651	0
minArchiDaFissare	2882.75	1.529461278	354.9	28413.85	14225	2.0233589592	393	934
minPeso	608.9	12.2729528981	354.6	1656.8	3262	17.2156862745	468	54
noAuxNoThorn	498.15	16.4752997265	314	4.15	2637	24.5614035088	372	0
noAuxNoThornMaxPeso	188.55	37.2322594837	604.7	0	938	50.125	651	0
noAuxNoThornMinPeso	358.1	20.4006207465	585.2	113.35	1809	25.2179487179	683	5
thorn	562.55	12.0982982476	567.95	3251.9	2608	15.762295082	646	125
thornMaxPeso	332.15	21.485487372	584.45	1089.85	1236	38.4787644788	921	31
thornMinPeso	728.6	8.9800927173	601.35	5384.8	3400	12.3660130719	644	199

Tabella 1: Risultati delle euristiche sulle diverse metriche.