Solución a la ecuación de Korteweg-de Vries

Ferrer, Lo Coco, Lund, Princ, Zuberbuhler

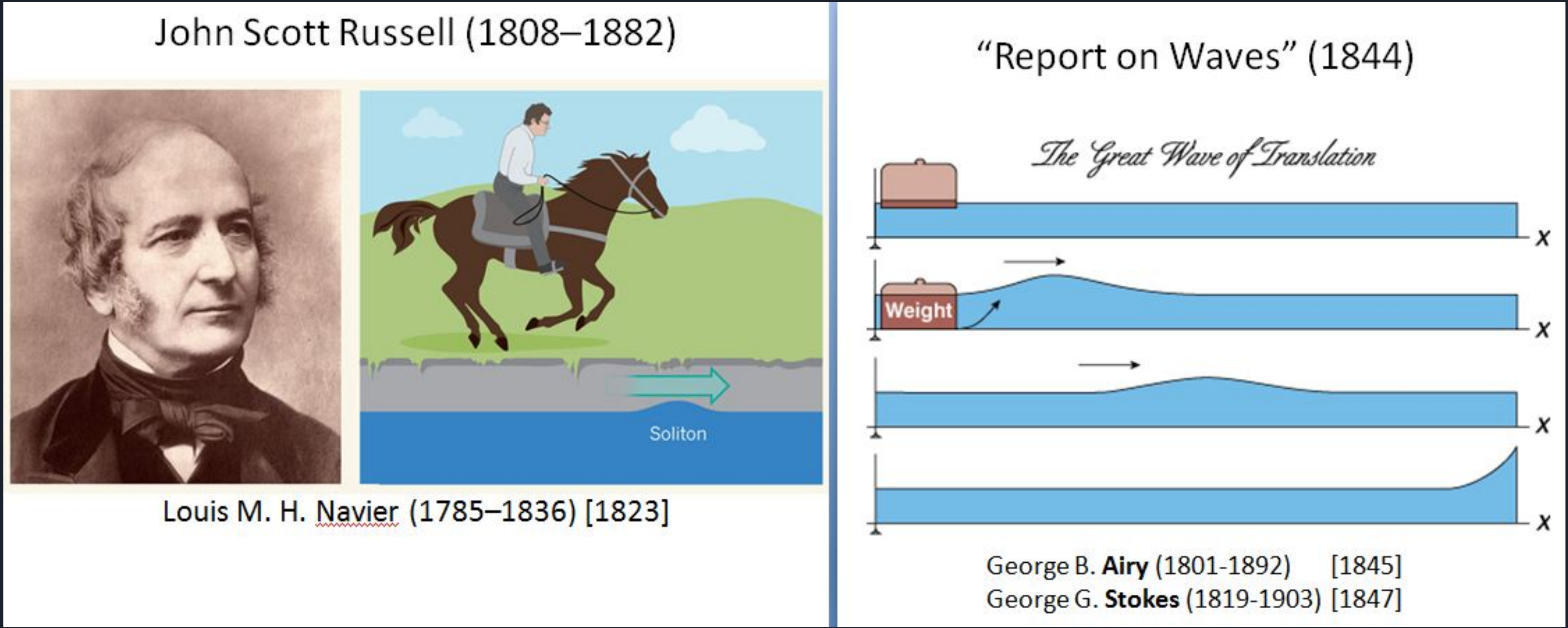
¿Qué es la ecuación de Korteweg-de Vries?

Un poco de historia...

A mediados de siglo XIX, el ingeniero John Scott Russell, observó una onda creada por un bote. Al detenerse el bote, la onda chocó con este, agitándose durante el choque pero recuperando su forma original tras sobrepasar, y transmitiendo como una elevación solitaria en el agua. Russell bautizo entre sus notas a este fenómenos Onda de Translación.

Imágenes del Unión Canal, que comunica la ciudad de Falkirk, y Edimburgo, donde Scott observó el fenómeno

Scott Russell y la Onda de translación

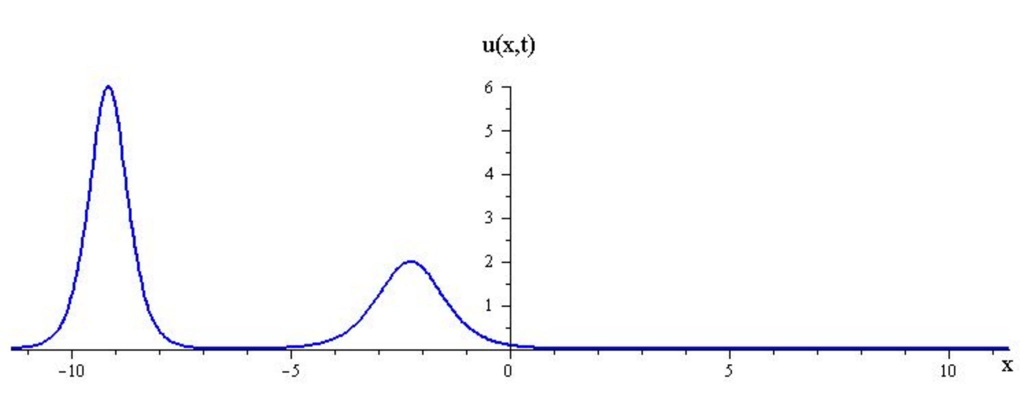


Más tarde llegó la matemática

Si bien hubo intentos para demostrar que Scott Russell estaba loco; en 1895, los matemáticos holandeses Korteweg y su estudiante De Vries obtuvieron una ecuación diferencial parcial que modelaba el fenómeno observado por Russell: la llamada ecuación KdV.

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

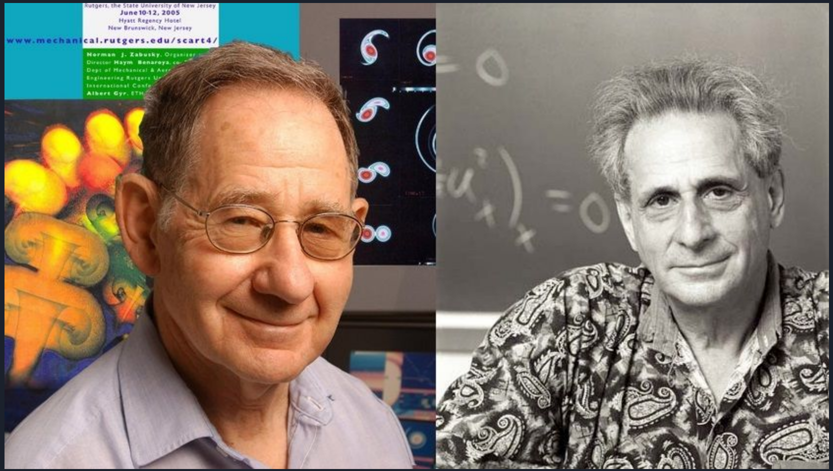
Figura 1: Ecuación KdV.



Sin embargo...

... dicha ecuación, al ser no lineal, representaba también un enorme reto para su análisis durante esa época, quedando paulatinamente, como una mera curiosidad científica.

No fue sino hasta el surgimiento de las primeras computadoras, cuando durante 1965 dos físicos-matemáticos americanos, Norman Zabusky y Martin Kruskal, realizaron los trabajos pioneros en la obtención de soluciones numéricas a la ecuación KdV.



Norman Zabusky y Martin Kruskal.

El producto

¿Qué traemos?

Un **sistema informático** capaz de **encontrar soluciones a la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) utilizando métodos SSM (Spectral Splitting Methods)**

Implementación

Modelo Matemático

Modelo Matemático

Para la realización del proyecto se trabajó sobre la ecuación KdV, utilizando dos solitones u ondas con velocidades y amplitudes distintas.

Al utilizar SSM, se dividió el problema en una parte lineal y una parte no lineal.

$$u = u \,.\, e^{(i \,.\, k^3 \,.\, h)}$$

Figura 2: Solución Lineal

$$f = -i \,.\, k^3 \,.\, h$$
$$a = f \,.\, FFT(Re(iFFT(u))^2)$$
$$b = f \,.\, FFT(Re(iFFT(u + \tfrac{a}{2}))^2)$$
$$c = f \,.\, FFT(Re(iFFT(u + \tfrac{b}{2}))^2)$$
$$d = f \,.\, FFT(Re(iFFT(u + c))^2)$$
$$u = u + \frac{(a + 2(b + c) + d)}{6}$$

Figura 3: Solución no lineal

Modelo Matemático

- Φ1(h) - operación lineal
- Φ0(h) - operación no lineal

$$\Phi^j_L = \Phi_{1-j}(h) \circ \Phi_j(h)$$

Figura 4: Implementación Lie-Trotter

$$\Phi^j_S(h) = \Phi_j(h/2) \circ \Phi_{1-j}(h) \circ \Phi_j(h/2)$$

Figura 5: Implementación Strang

Modelo Matemático

- Integrador simétrico
- Órdenes pares

$$\Phi(h) = \sum_{m=1}^{s} \gamma_m \Phi_m^{\pm}(h/m)$$

$$\Phi^{+}(h) = \Phi_1(h) \circ \Phi_0(h)$$

$$\Phi^{-}(h) = \Phi_0(h) \circ \Phi_1(h)$$

$$\Phi_m^{\pm}(h) = \Phi^{\pm}(h) \circ \Phi_{m-1}^{\pm}(h)$$

$$\text{If } q = 2,\ \gamma_1 = 1/2$$
$$\text{If } q = 4,\ \gamma_1 = -1/6,\ \gamma_2 = 2/3$$
$$\text{If } q = 6,\ \gamma_1 = 1/144,\ \gamma_2 = -8/63,\ \gamma_3 = \gamma_4 = 0,\ \gamma_5 = 625/1008$$
$$\text{If } q = 8,\ \gamma_1 = -\frac{1}{2304},\ \gamma_2 = \frac{32}{675},\ \gamma_3 = -\frac{729}{3200},\ \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 0,\ \gamma_7 = \frac{117649}{172800}$$

Modelo Matemático

- Solución inicial del problema

$$u(x) = \tfrac{1}{2}v_1(senh^2(\frac{\sqrt{v_1}(x+8)}{2})) + \tfrac{1}{2}v_2(senh^2(\frac{\sqrt{v_2}(x+8)}{2}))$$

Pseudocódigo

Choose splitting method (Lie Trotter / Strang)

Choose method order q

s ← q / 2

for t = 0 : tmax

  U ← 0

  for m = 1 : s

    Calculate $\Phi_m^+(\frac{dt}{m})$

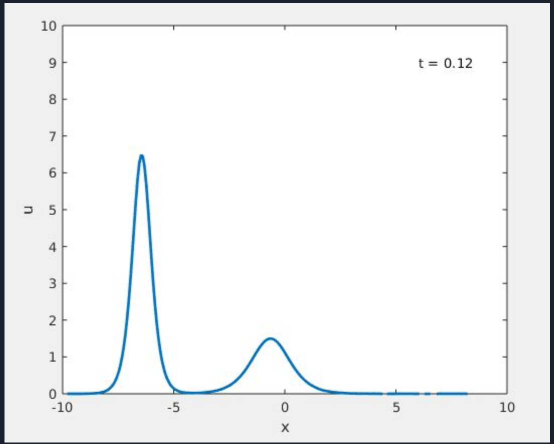
    Calculate $\Phi_m^-(\frac{dt}{m})$

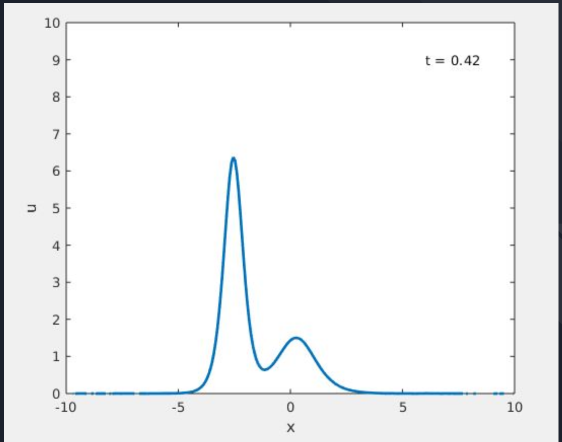
    U ← U + $\gamma_m(\Phi_m^+(\frac{dt}{m}) + \Phi_m^-(\frac{dt}{m}))$

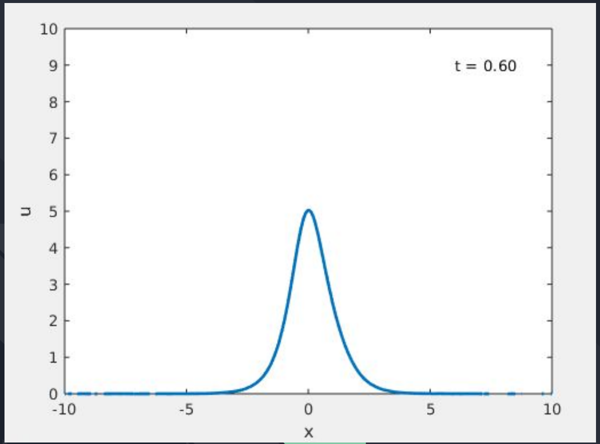
  end

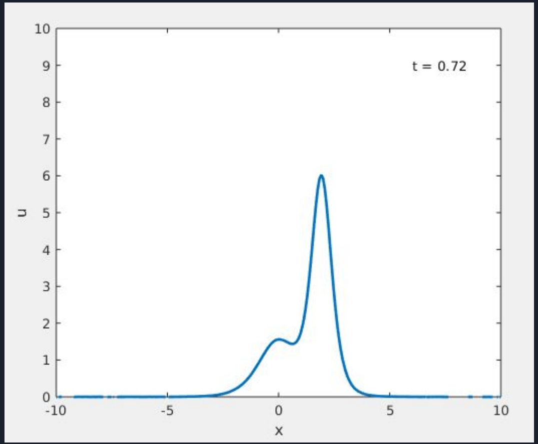
end

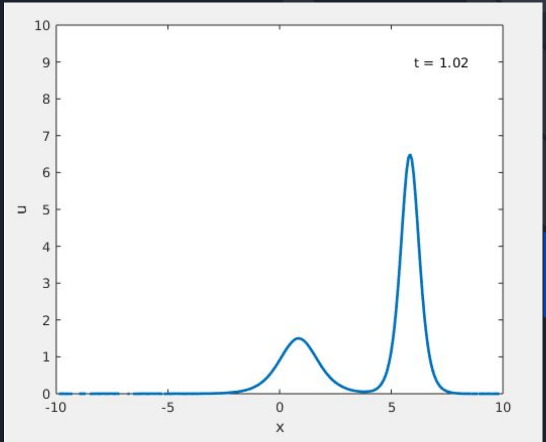
Pruebas


t = 0.12
u
x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-10 -5 0 5 10

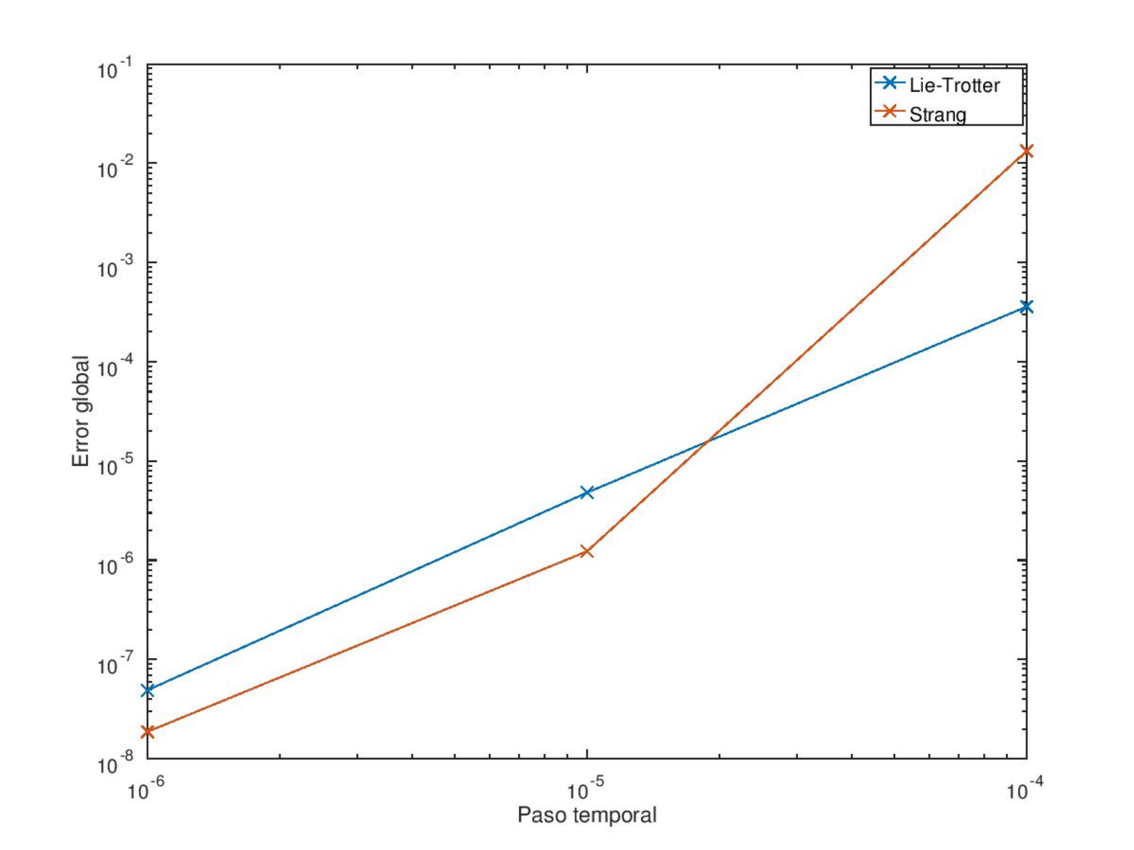

t = 0.42
u
x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-10 -5 0 5 10


t = 0.60
u
x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-10 -5 0 5 10

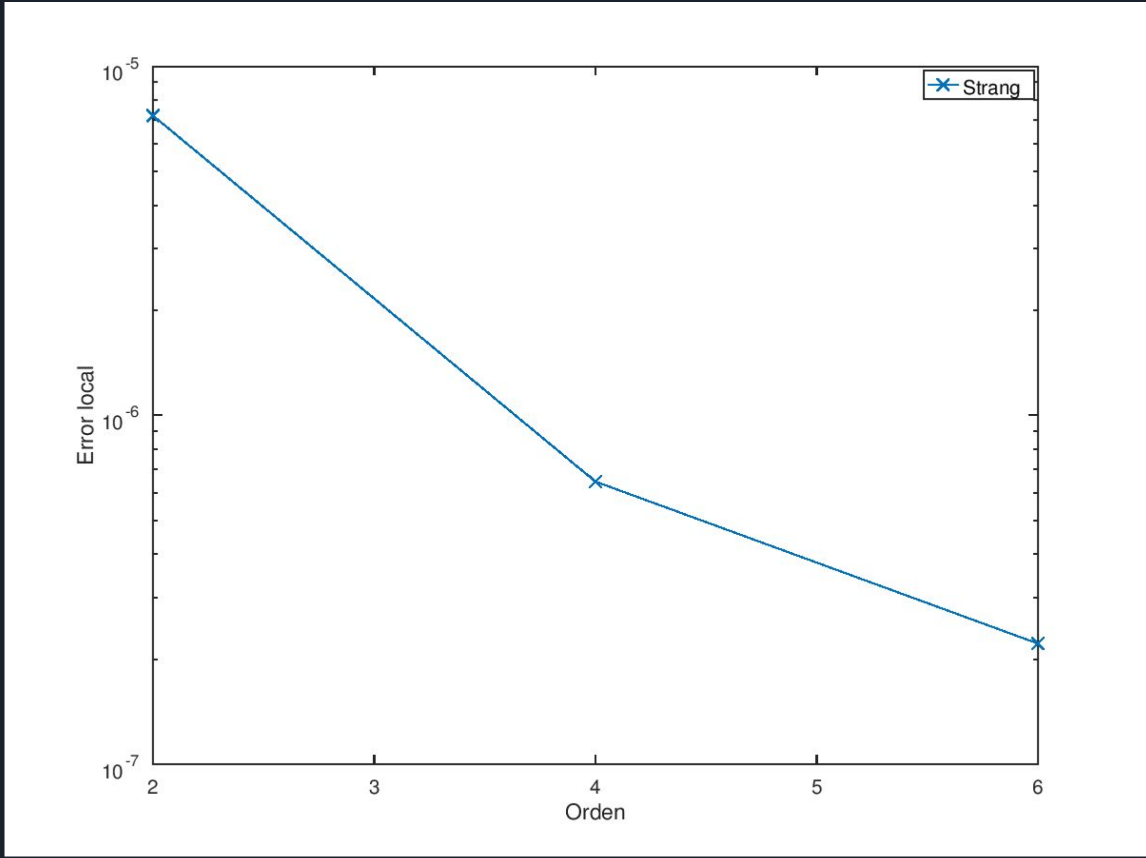

t = 0.72
u
x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-10 -5 0 5 10


t = 1.02
u
x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-10 -5 0 5 10

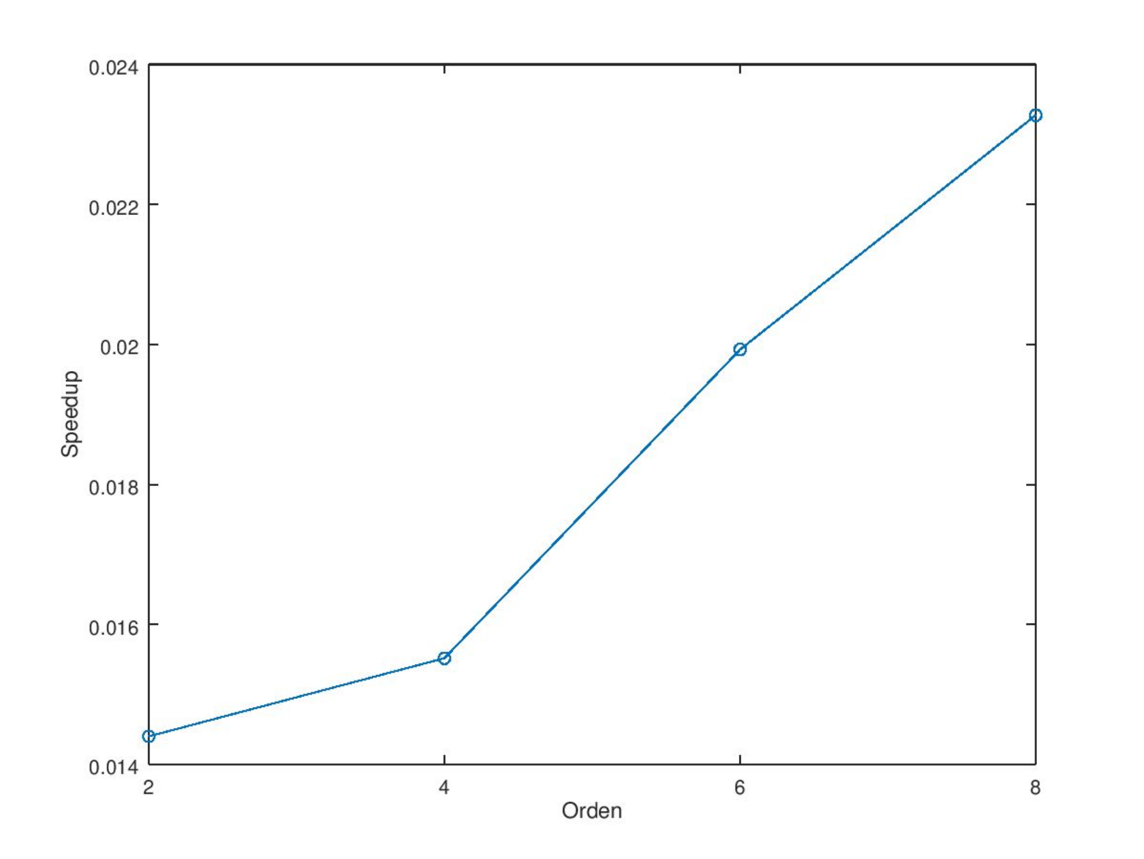
Error global en función de paso temporal



Error local en función de paso temporal



Speedup



Speedup - Profiler paralelo

p.FunctionTable

Fields	C(	FunctionName	F	Type		I	ExecutedLines	IsR	To	Pa	Num	TotalTime
1	'/ho...	'kdv'	'/h...	'M-script'	5...	0...	24x3 double	0	0	0	1	147.2651
2	'/us...	'spmd_feval'	'/u...	'M-functi...	2...	1...	6x3 double	0	0	0	2500	83.0414
3	'/us...	'spmd_feval_impl'	'/u...	'M-functi...	9...	2...	14x3 double	1	0	0	2501	82.9413
4	'/us...	'Composite.subsref'	'/u...	'M-functi...	3...	2...	20x3 double	0	0	0	5001	52.1133
5	'/us...	'Composite.Composite>Composite.getValOrE...	'/u...	'M-method'	2...	1...	6x3 double	0	0	0	5004	49.0734
6	'/us...	'KeyHolder>KeyHolder.getFromLab'	'/u...	'M-method'	3...	1...	5x3 double	0	0	0	5004	47.2845
7	'/us...	'RemoteSpmdExecutor>RemoteSpmdExecut...	'/u...	'M-method'	3...	2...	5x3 double	0	0	0	5002	47.2296
8	'/us...	'RemoteResourceSet>RemoteResourceSet.g...	'/u...	'M-method'	1...	1...	10x3 double	0	0	0	5004	47.0803
9	'co...	'com.mathworks.toolbox.distcomp.pmode.Sp...	[]	'Java-met...	0...	9...	[]	0	0	0	62537	45.9306
10	'/us...	'RemoteResourceSet>RemoteResourceSet.re...	'/u...	'M-method'	6...	1...	5x3 double	0	0	0	5004	28.0809
11	'/us...	'RemoteResourceSet>RemoteResourceSet.h...	'/u...	'M-method'	5...	1...	12x3 double	0	0	0	5004	24.9483
12	'/us...	'RemoteSpmdExecutor>RemoteSpmdExecut...	'/u...	'M-method'	7...	3...	23x3 double	1	0	0	12509	18.1779
13	'co...	'com.mathworks.toolbox.distcomp.pmode.Sin...	[]	'Java-met...	0...	2...	[]	0	0	0	15012	14.2928
14	'/us...	'RemoteSpmdExecutor>RemoteSpmdExecut...	'/u...	'M-method'	3...	2...	11x3 double	0	0	0	7505	12.3289
15	'/us...	'RemoteSpmdExecutor>buildController'	'/u...	'M-method'	3...	1...	6x3 double	0	0	0	7505	11.6384
16	'/us...	'RemoteResourceSet>RemoteResourceSet.is...	'/u...	'M-method'	1...	6...	[100,70016,0.11...	0	0	0	70016	9.8726
17	'/us...	'KeyHolder>KeyHolder.delete'	'/u...	'M-method'	3...	2...	4x3 double	0	0	0	15000	9.2311
18	'/us...	'RemoteSpmdExecutor>RemoteSpmdExecut...	'/u...	'M-method'	7...	1...	14x3 double	0	0	0	2501	8.6079
19	'/us...	'RemoteResourceSet>RemoteResourceSet.k...	'/u...	'M-method'	2...	1...	4x3 double	0	0	0	15000	8.5311
20	'/us...	'Pool.Pool>Pool.get.Connected'	'/u...	'M-method'	1...	3...	[239,75020,7.54...	0	0	0	75020	7.7919
21	'/us...	'getJavaFutureInterruptibly'	'/u...	'M-functi...	4...	1...	26x3 double	0	0	0	7505	7.5844
22	'/us...	'Pool.Pool>Pool.hGetIsUsable'	'/u...	'M-method'	1...	2...	5x3 double	0	0	0	77522	7.5372

Speedup - Profiler serie

p | p.FunctionTable

p.FunctionTable

Fields	Comp	FunctionName	FileName	Ty							NumCalls	TotalTime
1	'/home/...	'kdv'	'/home/tfer...	'M-...	3...	0...	5...	0	0	0	1	21.3742
2	'/home/...	'get_phi_strang'	'/home/tfer...	'M-...	2...	1...	9...	0	0	0	32768	6.1445
3	'/home/...	'non_linear'	'/home/tfer...	'M-...	0...	1...	7...	0	0	0	49152	4.3581
4	'/usr/loc...	'ToolbarController.ToolbarController>@(e,d)...	'/usr/local/...	'M-...	1...	1...	[]	0	0	0	2	2.3881
5	'/usr/loc...	'DesktopToolbarController.DesktopToolbarC...	'/usr/local/...	'M-...	3...	1...	[]	0	0	0	2	2.3876
6	'/usr/loc...	'ToolbarController.ToolbarController>Toolba...	'/usr/local/...	'M-...	1...	1...	[]	0	0	0	2	2.3617
7	'/usr/loc...	'CanvasPlugin.CanvasPlugin>CanvasPlugin....	'/usr/local/...	'M-...	4...	2...	[]	0	0	0	2	1.5925
8	'/usr/loc...	'ToolbarController.ToolbarController>Toolba...	'/usr/local/...	'M-...	9...	1...	[]	0	0	0	1	1.5376
9	'/home/...	'linear'	'/home/tfer...	'M-...	0...	1...	[3...	0	0	0	49152	1.5282
10	'/usr/loc...	'AxesToolbar.AxesToolbar>AxesToolbar.Ax...	'/usr/local/...	'M-...	1...	1...	[]	0	0	0	1	1.0473
11	'/usr/loc...	'AxesToolbar.AxesToolbar>AxesToolbar.Ax...	'/usr/local/...	'M-...	1...	1...	[]	0	0	0	1	1.0469
12	'/usr/loc...	'AxesToolbar.doUpdate'	'/usr/local/...	'M-...	1...	1...	[]	0	0	0	2	0.6459
13	'/usr/loc...	'AxesToolbarButton.AxesToolbarButton>Ax...	'/usr/local/...	'M-...	1...	3...	[]	0	0	0	12	0.5866
14	'/usr/loc...	'axis'	'/usr/local/...	'M-...	4...	1...	3...	0	0	0	27	0.5235
15	'/usr/loc...	'transformViewerToWorld'	'/usr/local/...	'M-...	1...	1...	1...	0	0	0	2	0.4979
16	'/usr/loc...	'CanvasSetup>CanvasSetup.createScribeL...	'/usr/local/...	'M-...	2...	1...	[]	0	0	0	2	0.4973
17	'/usr/loc...	'ToolbarPushButton>ToolbarPushButton.To...	'/usr/local/...	'M-...	2...	2...	[]	0	0	0	5	0.4906
18	'/usr/loc...	'newplotwrapper'	'/usr/local/...	'M-...	2...	1...	5...	0	0	0	26	0.4535
19	'/usr/loc...	'ScribeStackManager.ScribeStackManager...	'/usr/local/...	'M-...	3...	4...	[]	0	0	0	9	0.4463
20	'/usr/loc...	'ButtonImage.doUpdate'	'/usr/local/...	'M-...	2...	1...	[]	0	0	0	24	0.4185
21	'/usr/loc...	'ToolbarController.ToolbarController>Toolba...	'/usr/local/...	'M-...	4...	2...	[]	0	0	0	2	0.4020
22	'/usr/loc...	'newplot'	'/usr/local/...	'M-...	8...	2...	2...	0	0	0	27	0.4007

Conclusiones

Conclusiones

- Mayor paso temporal → menor precisión
- El método de Strang tuvo mayor precisión que el método de Lie-Trotter en pasos temporales muy pequeños
- Las diferencias entre órdenes disminuyen a medida que se aumentan los órdenes, lo que indica que a órdenes superiores converge a la solución
- Mayor orden (cantidad de hilos) → Mayor speedup
- Se debería alcanzar un límite (Ley de Amdahl)
- No siempre vale la pena paralelizar

Muchas Gracias