Métodos numéricos - Lista de exercícios 1

Maio / 2022

Essa lista de exercícios visa auxiliar o estudo dos conteúdos desenvolvidos nos encontros semanais, por isso, é composta por questões teóricas e práticas. Para responder algumas questões, é esperado que o estudante pesquise a resposta em alguns livros, artigos, entre outros. Bom trabalho!

1. Classifique as EDPs abaixo quanto à ordem, a linearidade / não-linearidade, a homogeneidade e ao tipo.

$$(a) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{1}$$

$$(b) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \sin(t) = 0 \tag{2}$$

$$(c) \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

$$(d) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{4}$$

$$(e) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \exp\left[E\frac{(1-u)}{u}\right] = 0 \tag{5}$$

$$(f) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{6}$$

2. Qual a diferença entre as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e Robin?

3. Estime o valor da derivada da função $f(x) = J_0(x)$ em $x = 3$ utilizando as seguintes aproximações:

   (a) Backward com 2 pontos
   (b) Backward com 3 pontos
   (c) Forward com 2 pontos
   (d) Forward com 3 pontos
   (e) Central com 2 pontos
   (f) Central com 4 pontos

   Compare a aproximação obtida com a solução exata. A função $J_0(x)$ é a função de Bessel do primeiro tipo ($\alpha = 0$).

4. Considere a função $f(x) = \exp(x)\sin(x)$. Como as estimativas de $f'(x)$ e $f''(x)$ em $x = 2$ evoluem em função de Δx para as seguintes aproximações: (i) Central com 2 pontos; (ii) Central com 4 pontos. Compare com a solução exata.

5. Considere o problema de transferência de calor em regime permanente de uma chapa quadrada de lado unitário. Na fronteira esquerda, tem-se um fluxo de calor igual a 500 W/m^2. Nas outras fronteiras, tem-se a troca de calor por convecção para um meio com temperatura nula. Os coeficientes de troca de calor nas fronteiras direita, superior e inferior são iguais a 10 W/(m^2 K). A condutividade térmica do material da chapa é 0.5 W/(m^2 K).

   Pede-se: (i) realize um teste de convergência para determinar a discretização espacial considerando uma variação da temperatura no ponto central inferior a 1e-4; (ii) determine o campo de temperaturas na chapa; (iii) a quantidade de calor que atravessa cada uma das superfícies da chapa.

6. Considere o problema de transferência de calor unidimensional

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \tag{7}$$

   sendo $\lambda = 0.01$ a difusividade térmica do sistema, $t \in [0, 30]$ e $x \in [0, 1]$. As condições de contorno são:

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0,t} = q(t) \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=1,t} = 0 \tag{8}$$

   .

   O fluxo de calor $q(t)$ é descrito como:

$$q(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 10 \\ 0, & t > 10 \end{cases} \tag{9}$$

   A condição inicial do problema é $T(x, t = 0) = 1$.

   Resolva o problema com duas abordagens: (i) explícita e (ii) implícita. Comente sobre as aproximações utilizadas para as derivadas e a estratégia utilizada para aplicar as condições de contorno do problema.

   Compare os resultados com a Figura 1 do artigo de Chinesta et. al (2011), disponível em `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01061441/document`

7. Considere o problema de transferência de calor descrito pela equação

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{10}$$

   com difusividade térmica igual a $\lambda = 0.01$, para $t \in [0, 100]$ e $(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. Em todo o contorno, a condição é adiabática. A condição inicial do problema é descrita como:

$$T(0, x, y) = 10 \exp[-20(x^2 + y^2)]. \tag{11}$$

   Plote as isotérmicas para $t = 0, 25, 50, 75, 100$ utilizando uma solução (i) explícita e (ii) implícita. Comente sobre as aproximações utilizadas para as derivadas e a estratégia utilizada para aplicar as condições de contorno do problema.