NOMBRES RELATIFS

I) ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS

1) Additions

Pour additionner 2 nombres relatifs, on regarde leurs signes :
● Si les nombres sont de même signe, on ajoute les parties numériques
● S'ils sont de signes contraires, on les retranche

Ex :
$A = (+2) + (-5) =$
$B = (-2) + (-5) =$

2) Soustractions

On ne sait pas calculer directement la différence entre deux nombres relatifs. On transforme donc cette différence en « somme avec l'opposé du 2ème nombre »

Ex :
$A = (+2) - (+5) =$
$B = (-2) - (-5) =$

3) Sommes algébriques

Une somme algébrique est une suite d'additions et de soustractions de nombres relatifs.
En transformant les soustractions en additions avec l'opposé, on peut changer l'ordre des termes astucieusement.

Ex :
A = (– 33,1) – (+ 70,2) – (+ 22,6) + (+ 38,1) + (+ 10,2) – (– 39,6)
A =

4) Sommes algébriques sans parenthèses

On transforme mentalement les soustractions en additions avec l'opposé.
On peut ainsi déplacer un terme à condition de le déplacer « avec le plus ou avec le moins » qui le précède.

Ex :
A = 4,3 – 8 + 9 – 3,5 + 8 + 1 – 11,5 – 5,3
[A = 4,3 + (– 8) + 9 + (– 3,5) + 8 + 1 + (– 11,5) + (–5,3)] ← Cette étape peut rester « mentale ».
A =

II) MULTIPLICATIONS ET DIVISIONS

1) Intuitivement

$A = 4 \times (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -12 = -(4 \times 3)$
$B = (-4) \times 3 =$
$C = (-1) \times 2 =$

On remarque ci-dessus que :
- la valeur numérique finale est à chaque fois le produit des valeurs numériques de départ
- multiplier un nombre par − 1 revient à prendre son opposé.

2) Multiplications de nombres relatifs

Règle des signes :

Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif
Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif

Méthode :

Pour multiplier des nombres relatifs, on applique la règle des signes et on multiplie les valeurs numériques.

Ex :

$A = 4 \times (-3) =$

$B = (-1) \times 3 =$

$C = (-20) \times (-4) =$

$D = 5 \times (-4) =$

$E = -7 \times 10 =$

$F = (-0{,}5) \times 3 =$

$G = (-1) \times (-1) \times 3 =$

3) Divisions de nombres relatifs

Règle des signes :

Le quotient de deux nombres relatifs de même signe est positif
Le quotient de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif

Méthode :

Pour diviser deux nombres relatifs, on applique la règle des signes et on divise les valeurs numériques.

Ex :

$$A=\frac{48}{-6}=$$

$$B=\frac{-10}{2}=$$

$$C=\frac{-20}{-4}=$$

$$D=\frac{5}{-5}=$$

$$E=-\frac{45}{9}=$$

$$F=\frac{-21\times(-1)}{3}=$$

4) Rappel à propos du signe multiplié

Ex : $3 \times a = a + a + a$
Combien de « a » y a-t-il ci-dessus ?

Au lieu d'écrire $3 \times a$, on écrira donc le plus souvent $3\ a$

Règle : Quand le signe × est suivi d'une lettre ou d'une parenthèse, on peut se dispenser de l'écrire.

$3 \times a$ peut s'écrire

$a \times 3$ peut s'écrire

$a \times b$ peut s'écrire

$4 \times (a + 3)$ peut s'écrire

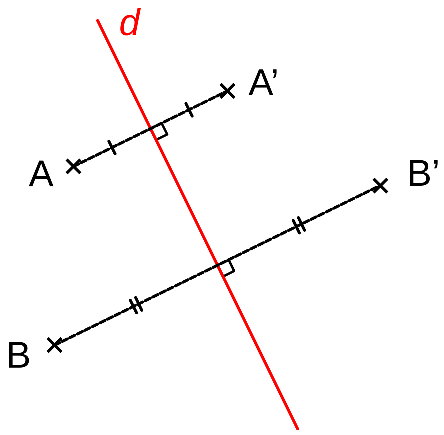
Remarque :
Quand le signe × est suivi d'un chiffre,
il faut impérativement le garder : $4 \times 5 \neq 45$!!

TRANSLATIONS – ROTATIONS

I) RAPPELS

1) Symétries axiales

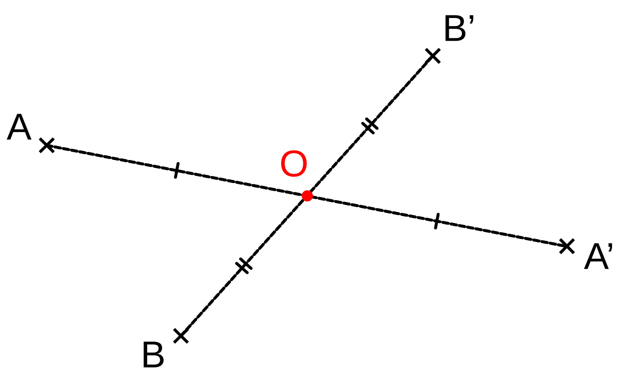
Deux points A et A' sont symétriques par rapport à une droite *d*,
lorsque cette droite *d* est   du segment [AA'].



Une symétrie axiale fait donc « pivoter » une figure autour de l'axe de symétrie.

2) Symétries centrales

Deux points A et A' sont symétriques par rapport à un point O,
lorsque ce point O est   du segment [AA'].



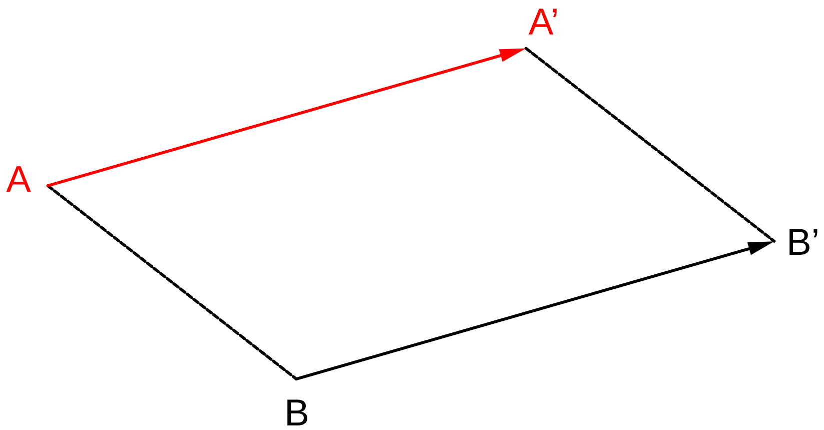
Une symétrie centrale fait donc « tourner » une figure d'un demi-tour autour du centre de symétrie.

II) TRANSLATIONS

Définition :

Soit deux points A et A'.
La translation qui transforme A en A' fait glisser tout point B en un point B' :

- parallèlement à :
- dans le sens :
- de la distance :



Remarques :

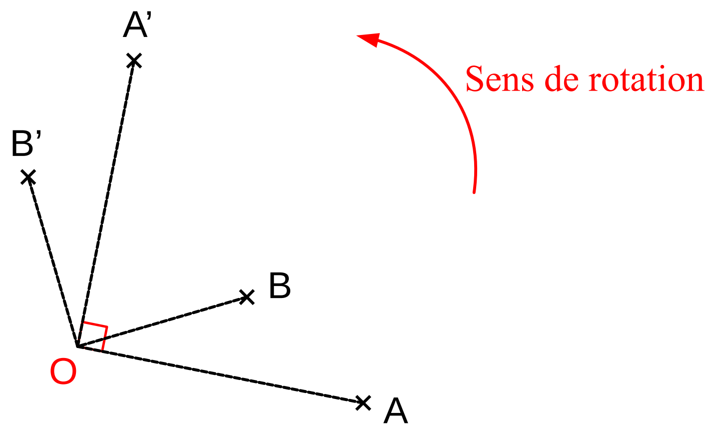
- Le quadrilatère AA'B'B est alors un parallélogramme.
  Pour construire à la règle et au compas l'image d'un point par une translation, il suffit donc de savoir construire un parallélogramme.
- Une translation fait « glisser rectilignement » une figure selon une certaine distance.
- Aucun point n'est invariant par une translation.

III) ROTATIONS

Définition :

Soit un point O, un angle α et un sens de rotation.
Par la rotation de centre O, d'angle α et de sens de rotation donné, un point A a pour image un point A' tel que :

- OA' = OA
- $\widehat{AOA'} = \alpha$ (dans le bon sens !)



Remarques :

- Une rotation fait donc tourner une figure autour du centre selon un certain angle et dans un certain sens.
- Seul le centre de rotation est invariant.
- Une rotation d'angle 180° (quelque soit le sens) est une :

IV) PROPRIÉTÉS

1) Propriétés communes :

Les 4 transformations du plan qui précèdent conservent les propriétés géométriques d'une figure :

- **Longueurs :**
  L'image d'un segment est un segment de même
- **Alignements :**
  Les images de points alignés sont des points
- **Parallélisme :**
  Les images de droites parallèles sont des droites
- **Angles :**
  L'image d'un angle est un angle de même
- **Aires :**
  L'image d'une figure est une figure de même

- **Milieux :**
  L'image du milieu d'un segment est le milieu de l'image du segment
- **Cercles :**
  L'image d'un cercle de centre O est un cercle de même rayon et dont le centre est

2) Propriétés spécifiques :

- L'image d'une droite par une
  est une droite parallèle
- Par une rotation d'angle ·, une droite et son image forment un angle

FRACTIONS

I) EGALITÉS DE QUOTIENTS

1) Propriété fondamentale

Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas lorsque l'on multiplie (ou divise) à la fois le numérateur et le dénominateur par un même nombre relatif non nul.

Soient des nombres relatifs a, b et k (b et k non nuls) :

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}$$

De cette propriété découlent :

2) Signe « moins » dans les fractions

Soient deux nombres relatifs a et b (b non nul) :

$$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$$

Démonstration :

$$\frac{a}{-b}=\frac{(-1)\times a}{(-1)\times(-b)}=\frac{-a}{b}=\frac{(-1)\times a}{b}=(-1)\times\left(\frac{a}{b}\right)=-\frac{a}{b}$$

3) Simplification de fractions

Simplifier : $A=\frac{-36}{54}=\frac{-6\times 6}{6\times 9}=$

Transformer en fraction : $B=\frac{2}{-3{,}2}=$

4) Mettre au même dénominateur

Ex : Comparer $\frac{17}{-6}$; $\frac{-7}{2}$ et -3

Prenons 6 comme dénominateur commun.

$\frac{17}{-6}=$

$\frac{-7}{2}=$

$-3=-\frac{3}{1}=$

Bilan, on a donc :

5) Produit en croix

Quels que soient les nombres relatifs *a*, *b*, *c* et *d* (*b* et *d* non nuls) :

- Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $a\times d=b\times c$
- Et réciproquement, si $a\times d=b\times c$, alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

En effet :

d est non nul donc $\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d}$ et de même *b* est non nul donc $\frac{c}{d}=\frac{b\times c}{b\times d}$

donc si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{b\times c}{b\times d}$

ces deux dernières fractions sont égales et elles ont le même dénominateur donc elles ont aussi le même

on a donc l'égalité :

Ex : Montrer que : $\frac{10}{17}\neq\frac{3}{5}$

II) ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS DE FRACTIONS

1) Méthode

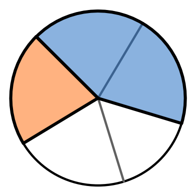
On met les fractions au même dénominateur, puis on ajoute ou on soustrait les numérateurs.

Soient des nombres relatifs a, b et c (c non nul) :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=$$

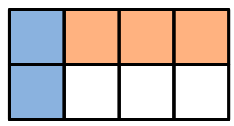
Ex : Calculer

$A=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=$



$B=\frac{3}{-7}-\frac{8}{7}=$

$C=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=$



2) Cas où le dénominateur commun n'est pas évident

Ex : Calculer

$D=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$

On peut choisir 3×5 comme dénominateur commun :

$D=\frac{1\times}{3\times}+\frac{2\times}{5\times}=$

$E=\frac{5}{9}+\frac{1}{6}$

On pourrait choisir 9×6=54 comme dénominateur commun mais il y a plus astucieux :

En effet, $9=3\times3$ et $6=3\times2$ donc on peut choisir 3×3×2=18 :

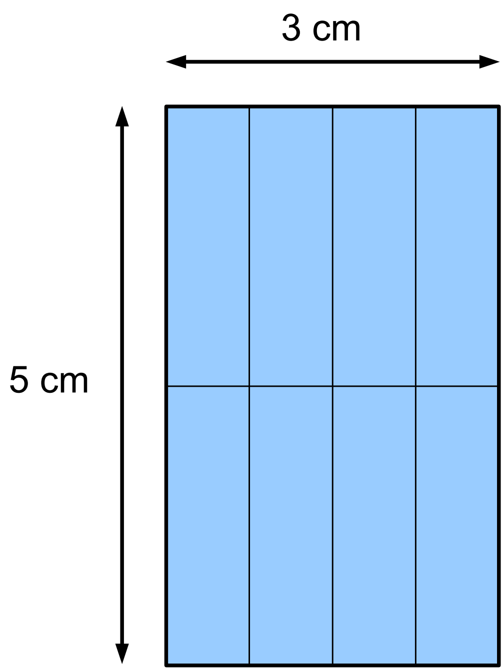
$E=\frac{5\times}{9\times}+\frac{1\times}{6\times}=$

$F=\frac{-2}{9}-\frac{-8}{15}$

III) MULTIPLICATIONS DE FRACTIONS

1) Exemple avec un calcul d'aire

On décide de construire un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm, puis on partage la longueur de ce rectangle en 2 et sa largeur en 4. On obtient donc un « grand » rectangle contenant 8 « petits » rectangles.



a) Longueur d'un petit rectangle : $\frac{\quad}{\quad}$

Largeur d'un petit rectangle : $\frac{\quad}{\quad}$

Aire d'un petit rectangle : $A=\frac{\quad}{\quad}\times\frac{\quad}{\quad}$

b) Aire du grand rectangle : $A'=\quad\times\quad$

Nombre de petits rectangles : $n=\quad\times\quad$

Aire d'un petit rectangle : $A=\frac{A'}{n}=\frac{\quad\times\quad}{\quad\times\quad}$

c) Bilan, de a) et b), on déduit : $A=\frac{\quad}{\quad}\times\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad\times\quad}{\quad\times\quad}$

2) Propriété

Pour multiplier des fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Soient des nombres relatifs a, b, c et d (b et d non nuls) :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=$$

Ex :

$A=\frac{4}{3}\times\frac{2}{5}=$

$B=3\times\frac{2}{5}=$

$C=\frac{7}{-5}\times\frac{-2}{3}=$

3) Méthode à suivre dans les exercices

Essayer de simplifier les fractions **<u>avant</u>** de multiplier les numérateurs et dénominateurs.

Ex :

$D=\frac{-8}{21}\times\frac{7}{5}=$

$E=\frac{39}{-16}\times\frac{8}{-26}=$

4) Fraction d'une quantité

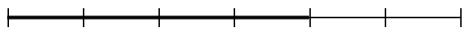
Propriété :

Prendre la fraction d'une quantité revient à multiplier cette quantité par la fraction.

Ex 1 : Je viens de faire les deux tiers des 6 km qui me séparent de l'école. Combien de km ai-je parcouru ?

Appelons D cette distance :

$$D=\frac{2}{3}\times 6=$$

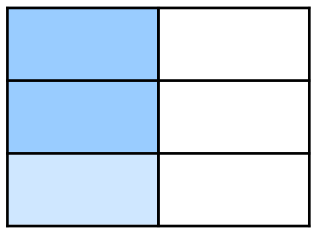


J'ai parcouru 4 km.

Ex 2 : On prend les deux tiers de la moitié d'un gâteau. Quelle fraction du gâteau a-t-on pris ?

Appelons F cette fraction :

$$F=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=$$



On a pris le tiers du gâteau.

IV) DIVISIONS DE FRACTIONS

1) Inverse d'un nombre

Définition :

Deux nombres sont dit « inverses l'un de l'autre » lorsque leur produit est égal à 1.

Ex :

$A = 3 \times \frac{1}{3} =$

$B = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$C = \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} =$

Propriété :

Soient deux nombres a et b non nuls,

l'inverse de a est

l'inverse de $\frac{a}{b}$ est

Remarques :

- Le nombre 0 n'a pas d'inverse.
- Ne pas confondre « opposé » (somme égale à 0) et « inverse » (produit égal à 1) : L'opposé de 5 est –5 mais l'inverse de 5 est $\frac{1}{5} = 0{,}2$.
- Un nombre et son inverse sont de même signe.

2) Divisions de fractions

Propriété :

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse

Soient des nombres relatifs a, b, c et d (b, c et d non nuls) :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} =$$

Ex :

$$A = \frac{1}{0{,}5} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 \times$$

$$B = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times$$

$$C = \frac{-\frac{15}{7}}{12} =$$

$$D = \frac{-\frac{4}{7}}{\frac{-10}{-21}} =$$

PUISSANCES

I) DÉFINITION

1) Rappels

$4^2 =$

$(-4)^2 =$

$5^3 =$

Si a est un nombre :

$a^2 =$

$a^3 =$

2) Cas général

Soit a un nombre et n un entier strictement positif,
le produit de n facteurs tous égaux à a est noté : a^n

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

Remarques :

- a^n se lit « a exposant n » ou « a puissance n »
- a^2 se lit aussi « a au carré » et a^3 se lit aussi « a au cube ».
- Par convention, on pose : $a^0 = 1$ (Attention 0^0 n'est pas calculable)
- Ne pas confondre a^2 et $2a$: $a^2 = a \times a$ et $2a = a + a$
- Sur la calculatrice, chercher la touche : $\boxed{\wedge}$, $\boxed{x^y}$ ou $\boxed{x^{\blacksquare}}$

Ex :

$\text{A} = (-3)^2 = (\qquad) \times (\qquad) =$

$\text{B} = -3^2 =$

$\text{C} = (-3)^3 =$

$\text{D} = 7{,}5^0 =$

$\text{E} = 7{,}5^1 =$

$\text{H} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^3 =$

3) Priorités entre les opérations

Dans une expression, les calculs à faire en premier sont dans l'ordre :
● les calculs situés dans les parenthèses les plus intérieures,
●
● les multiplications et les divisions,
● les additions et les soustractions.

Quand des opérations ont le même ordre de priorité, on effectue le calcul de gauche à droite.

Ex :

$A = 2\times5^3$

$B = 5(3^2+6)\div3-2^3$

$C = (-2)^4\times2^2-2^2$

4) Puissances et signes

Ex :

$A = (-2)^0 =$

$B = (-2)^1 =$

$C = (-2)^2 =$

$D = (-2)^3 =$

$E = (-2)^4 =$

$F = (-2)^5 =$

$G = (-1)^{2020} =$

Un nombre négatif élevé à une puissance paire est toujours
Un nombre négatif élevé à une puissance impaire est toujours

II) PROPRIÉTÉS

1) Puissances d'un même nombre

a étant un nombre non nul, *m* et *n* étant des entiers relatifs, on a les règles de calcul suivantes :

Règle	**Exemple**
$a^n \times a^m =$	$3^4 \times 3^2 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^{4+2}$
$\dfrac{a^n}{a^m} =$	$\dfrac{3^4}{3^2} = \dfrac{3 \times 3 \times 3 \times 3}{3 \times 3} = 3^{4-2}$
$\dfrac{1}{a^n} =$	$\dfrac{1}{3^2} = \dfrac{3^0}{3^2} = 3^{0-2} = 3^{-2}$
$(a^n)^m =$	$(4^2)^3 = (4 \times 4) \times (4 \times 4) \times (4 \times 4) = 4^{2 \times 3}$

2) Puissances de même exposant

a et *b* étant deux nombres non nuls, *n* étant un entier relatif :

Règle	**Exemple**
$a^n \times b^n =$	$3^2 \times 5^2 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = (3 \times 5)^2$
$\dfrac{a^n}{b^n} =$	$\dfrac{2^3}{5^3} = \dfrac{2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^3$

Attention :
Il n'y a hélas pas de règle avec $a^n + b^n$ ou $a^n - b^n$!

III) PUISSANCES DE 10

1) Première approche

n étant un entier positif :

$10^0 =$

$10^1 =$ $\qquad\qquad$ $10^{-1} =$

$10^2 =$ $\qquad\qquad$ $10^{-2} =$

$10^3 =$ $\qquad\qquad$ $10^{-3} =$

$10^n = 1\underbrace{00\ldots\ldots00}$ $\qquad\qquad$ $10^{-n} = 0{,}\underbrace{00\ldots\ldots01}$

Sur la calculatrice, chercher la touche : $\boxed{10^x}$ ou $\boxed{10^{\blacksquare}}$ ou $\boxed{\text{EE}}$

2) Propriétés :

- Multiplier un nombre par 10^n revient à décaler la virgule de *n* chiffres vers la droite.
- Multiplier un nombre par 10^{-n} revient à le diviser par 10^n et donc à décaler la virgule de *n* chiffres vers la gauche.

Ex :

$A = 12{,}3456 \times 10^3 =$

$B = 12{,}3456 \times 10^{-4} =$

3) Notation scientifique

Définition :

La notation scientifique d'un nombre est son écriture sous la forme :

$$a \times 10^n \text{ avec } 1 \leqslant a < 10$$

Ex : Donner la notation scientifique des nombres suivants :

230 000 000 =

0,00010123 =

34,1 =

6300×10^{27} =

Remarque :

Écrire des nombres en notation scientifique permet de les comparer facilement en mettant en évidence leurs ordres de grandeur. Cette notation est très utilisée en physique.

4) Puissances de 10 et unités :

téra	giga			unité			nano
10^{12}		10^6		10^0		10^{-6}	
T			k		m		

DIVISIBILITÉ ET NOMBRES PREMIERS

I) DIVISION EUCLIDIENNE

1) Définition :

Effectuer la division euclidienne (ou entière) de l'entier a par l'entier non nul b, c'est déterminer les entiers q et r vérifiant l'égalité :

$$a = b \times q + r \quad \text{avec} \quad r < b$$

2) Vocabulaire :

a s'appelle le

b s'appelle le

q s'appelle le

r s'appelle le

a | b

Ex 1 : Combien de boites de 36 macarons dois-je acheter pour pouvoir en donner 2 à chacun de mes 240 invités ?

Le nombre de macarons que je veux offrir est :

Divisons par :

Ex 2 : Soit l'égalité $165 = 18 \times 8 + 21$

On partage ici 165 en 8 paquets de unités. Il reste alors unités.

Peut-on proposer un partage plus astucieux ?

Oui, car ici, le reste est plus grand que le

On écrira donc l'égalité :

II) MULTIPLES ET DIVISEURS D'UN NOMBRE

1) Définition :

Si le reste de la division d'un entier a par un entier b est nul, on dit que :
- a est un « multiple » de b
- a est « divisible » par b
- b est un « diviseur » de a

Ex 1 : $408 = 12 \times 34 + 0$

est un multiple de

est un diviseur de

est divisible par

Ex 2 : Donner tous les diviseurs de 12 :

2) Critères de divisibilité

Un nombre est divisible:
- par 2 s'il est pair.
- par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- par 4 si le nbre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.
- par 5 si son dernier chiffre est 0 ou 5.
- par 6 s'il est divisible à la fois par 2 et par 3.
- par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- par 10 si son dernier chiffre est 0.

Ex : 3345 est-il divisible par 15 ?

III) NOMBRES PREMIERS

1) Définition

On appelle « nombre premier » tout entier positif qui admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Remarques :
● 0 n'est pas premier car il admet une infinité de diviseurs

● 1 n'est pas premier car il n'est divisible que par 1

● 2 est premier car il n'est divisible que par 1 et 2

● 3

● 4

2) Crible d'Eratosthène

Déterminons les nombres premiers inférieurs à 50 :

Méthode :
● On parcours le tableau ci-dessous dans l'ordre croissant.
● On entoure chaque nombre premier et on barre tous ses multiples :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

3) Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

Ex 1 : Décomposer 780 en produit de facteurs premiers :

$$\begin{array}{c|c} 780 & 2 \\ 390 & 2 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

On divise successivement par les différents nombres premiers en commençant par les plus petits

Donc $780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$

Ex 2 : Même question avec 525 :

Remarque:

La décomposition en produit de facteurs premiers est très utile notamment dans les calculs avec fractions : simplifications, multiplications, déterminer un dénominateur commun (comparaisons, additions et soustractions).

Ex 3 : Calculer A = $\frac{39}{780} + \frac{21}{525}$

Ex 4 : Calculer B = $\frac{175}{780} \times \frac{52}{525}$

Ex 5 : Quels est le plus grand des diviseurs communs à 780 et 105 ?

PGCD(780, 105) =

Ex 6 : Quel est le plus petit des multiples communs à 780 et 105 ?

PPCM(780, 105) =

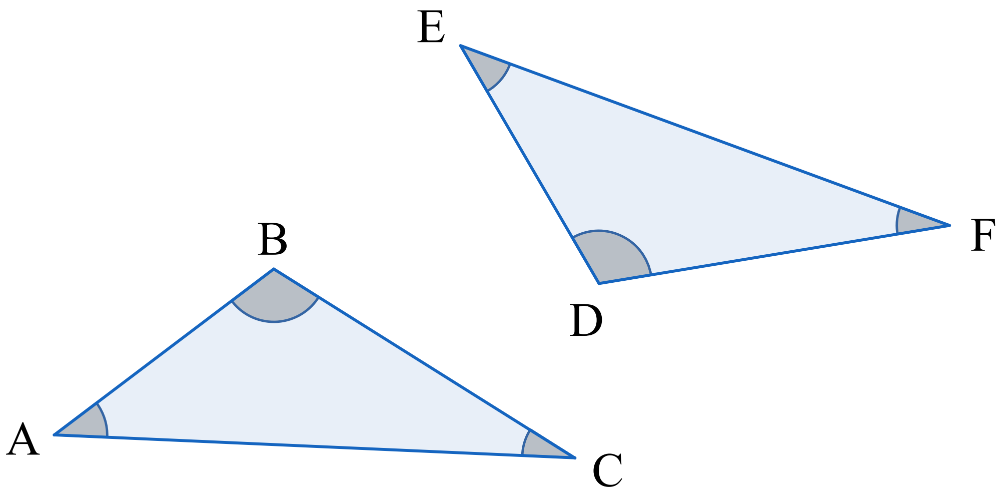
TRIANGLES ISOMÉTRIQUES

I) DÉFINITION

Deux triangles dont les côtés et les angles sont respectivement de mêmes mesures sont dits « isométriques » ou « superposables » ou encore « égaux ».

Dans des triangles isométriques, les sommets, côtés et angles qui se correspondent sont dits « homologues ».

Ex : Les deux triangles ci-dessous sont isométriques.
Coder les côtés et angles homologues.



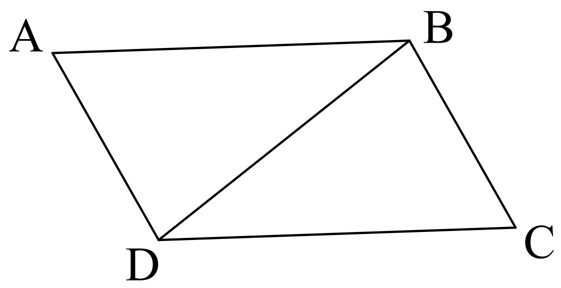
II) LES 3 CAS D'ÉGALITÉS

1) Avec 3 égalités de côtés

Si deux triangles ont leurs 3 côtés égaux deux à deux, alors ils sont isométriques

Si les 3 côtés d'un triangle sont respectivement égaux aux 3 côtés d'un autre, alors ces deux triangles sont isométriques.

Ex : Soit un parallélogramme ABCD. Montrer que les triangles ABD et CDB sont isométriques.



Par hypothèses, ABCD est un parallélogramme

donc ses côtés opposés sont égaux

donc AB =   et AD =

Dans les triangles ABD et CDB, on a donc :

AB =

AD =

[DB] est un côté commun

or si les 3 côtés d'un triangle sont respectivement égaux aux 3 côtés d'un autre, alors ces deux triangles sont isométriques.

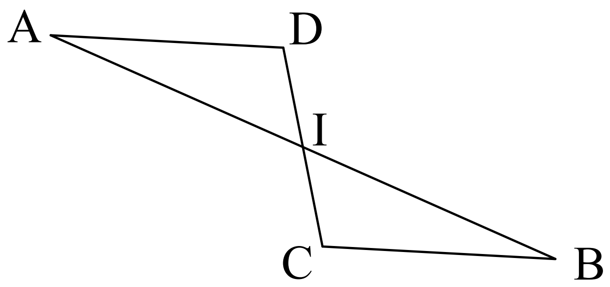
donc ABD et CDB sont isométriques.

2) Avec 2 égalités de côtés et 1 égalité d'angles

Si deux triangles ont 1 angle de même mesure compris entre 2 côtés égaux deux à deux, alors ils sont isométriques

Si 2 côtés d'un triangle sont respectivement égaux à 2 côtés d'un autre, et que les angles compris entre ces côtés sont égaux, alors ces deux triangles sont isométriques.

Ex : I est le milieu de [AB] et [CD]. Montrer que les triangles ADI et ICB sont isométriques.



Par hypothèses :

I est le milieu de [AB] donc IA =

I est le milieu de [CD] donc ID =

De plus (AB) et (CD) se coupent en I donc $\widehat{AID}$ et $\widehat{BIC}$ sont opposés par le sommet donc

Dans les triangles ADI et ICB, on a donc :

IA =

ID =

$\widehat{AID}$ =

or si 2 côtés d'un triangle sont respectivement égaux à 2 côtés d'un autre, et que les angles compris entre ces côtés sont égaux, alors ces deux triangles sont isométriques

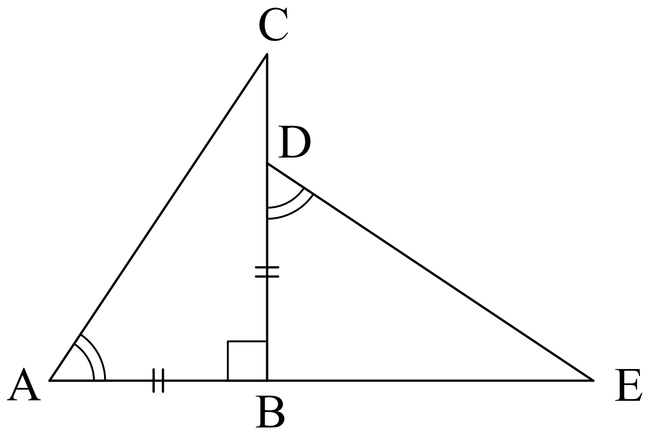
donc les triangles ADI et ICB sont isométriques

3) Avec 1 égalité de côtés et 2 égalités d'angles

Si deux triangles ont 1 côté égal compris entre 2 angles de mêmes mesures deux à deux, alors ils sont isométriques

Si 2 angles d'un triangle sont respectivement égaux à 2 angles d'un autre, et que les côtés compris entre ces angles sont égaux, alors ces deux triangles sont isométriques.

Ex : Dans la figure ci-dessous, A, B et E sont alignés ainsi que B, D et C. Montrer que les triangles ABC et BDE sont isométriques.



Par hypothèses :

AB =

$\widehat{BAC}$ =

$\widehat{ABC}$ = 90° et A, B et E sont alignés donc $\widehat{DBE}$ =

Dans les triangles ABC et BDE, on a donc :

CALCUL LITTÉRAL

I) DISTRIBUTIVITÉ

1) Intuitivement :

$$23\times 4 = \underbrace{4+4+4+\ldots+4}_{\text{20 fois}} + \underbrace{4+4+4}_{\text{3 fois}} = 20\times 4+3\times 4$$

$$(x+5)\times 9 = \underbrace{9+9+9+\ldots+9}_{\text{... fois}} + \underbrace{9+9+9+9+9}_{\text{... fois}} = \ldots$$

De même compléter :

$2\times(a+3)=$

$5\times y+5\times 4=$

$(2\,y+3)\times 4=$

$x\times y+3\times x=$

2) Propriété

k, a et b étant 3 nombres quelconques :

k a + k b = k (a + b)
k a – k b = k (a – b)

Remarque : Il faut savoir utiliser cette propriété dans les deux sens !

II) DÉVELOPPER (ET RÉDUIRE) UNE EXPRESSION

Définition :

Développer, c'est transformer un

Ex:

$A = 7 \times (x + 5)$

$A =$

$A =$

$B = a \times (b + c + 2)$

$B =$

$C = a(x - 1)$

$C =$

$D = 3 \times (x + 5) + 2 \times (x - 1)$

$D =$

$D =$

$D =$

III) FACTORISER UNE EXPRESSION

Définition :

Factoriser, c'est transformer une

Ex:

$A = 5\pi - 5x$

$A =$

$B = 2x + ax$

$B =$

$C = 2x^2 - x + 3ax$

$C = x \times 2x - x \times 1 + x \times 3a$

$C =$

$D = 3x^2 + 6x + 3ax$

$D =$

IV) POUR ALLER PLUS LOIN !

1) Cas du signe « − » devant une parenthèse

Ex : Réduire B

$B=(x+1)-(x+3)$

Attention : si on veut enlever une parenthèse, il faut « distribuer » le signe qui est devant la parenthèse sur tous les termes de cette parenthèse !

$B=$

$B=$

2) Double développement

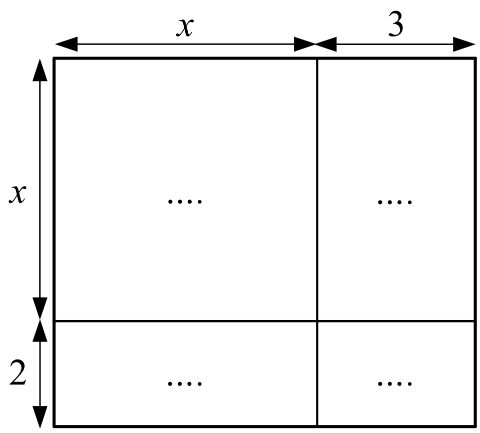
Ex : Développer A

$A=(x+2)\times(x+3)$

$A=$

$A=$

Illustration géométrique :



3) Vérifications d'égalités

On peut vérifier un calcul littéral en testant l'égalité obtenue pour certaines valeurs de la variable. Cela ne prouve pas que le calcul est juste, mais cela permet de repérer la plupart des erreurs !

Ex : Développer et réduire C. Puis vérifier le calcul dans le cas où $x=2$.

$C=(2x-5)\times(3x+8)$

$C=$

$C=$

Vérification si $x=2$:

D'une part :

D'autre part :

THÉORÈME DE PYTHAGORE

I) RACINE CARRÉE D'UN NOMBRE POSITIF

Quels sont les deux nombres dont le carré est 4 ?

Y a-t-il des nombres dont le carré est − 4 ?

Définition :

Soit a un nombre **positif**.
La racine carrée de a est le nombre **positif** dont le carré est a.
Ce nombre est noté $\sqrt{a}$.

Ex :

- $\sqrt{9}$ est le nombre positif dont le carré est 9 donc $\sqrt{9}=$
- $6^2=36$ donc $\sqrt{36}=$
- donc $\sqrt{16}=$
- donc $\sqrt{25}=$
- donc $\sqrt{121}=$
- donc $\sqrt{1}=$
- donc $\sqrt{0}=$
- 11 n'est pas un carré parfait mais : $9 < 11 < 16$

  donc : $< \sqrt{11} <$

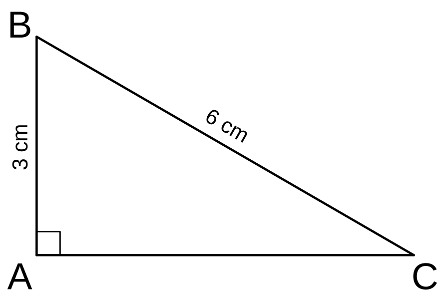
  Avec la calculatrice, on trouve $\sqrt{11}\approx 3{,}3$

II) THÉORÈME DE PYTHAGORE

Vocabulaire :
Dans un triangle rectangle, on appelle « hypoténuse » le plus long côté (qui est aussi face à l'angle droit).

Propriété :
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Exercice type n°1 : On sait que le triangle est rectangle, on connaît les longueurs de deux côtés et on cherche la longueur du troisième.
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et BC = 6 cm.
Déterminer AC.



Par hypothèse : ABC est un triangle rectangle en A

donc d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

donc $AC^2 = BC^2 - AB^2 =$

donc $AC =$ ou $AC = -$

or une longueur est toujours positive

donc $AC =$ cm

donc $AC \approx$ cm (à 0,01 cm près)

III) RÉCIPROQUE DU THÉORÈME

Propriété :

Dans un triangle, si le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres, alors ce triangle est rectangle.

Exercice type n°2 : On connaît les longueurs des trois côtés du triangle et on cherche à montrer qu'il est rectangle.

Soit ABC un triangle tel que AB = 9 cm, BC = 12 cm et AC = 15 cm.
Ce triangle est-il rectangle ?

Dans le triangle ABC, on a **d'une part** : $AC^2 =$

et **d'autre part** : $AB^2 + BC^2 =$

donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$

donc d'après la   du théorème de Pythagore,

le triangle ABC est rectangle en B.

IV) CONTRAPOSÉE DU THÉORÈME

Vocabulaire : Propriété – Réciproque - Contraposée
On considère par exemple la propriété toujours vraie :
« S'il pleut dehors, alors il y a des nuages. »

La réciproque de cette propriété s'écrit :
« S'il y a des nuages alors il pleut dehors. »
Remarque : Cette réciproque est ici fausse.

La contraposée de cette propriété s'écrit :
« S'il n'y a pas de nuages, alors il ne pleut pas. »
Remarque : Si une propriété est toujours vraie, alors sa contraposée est toujours vraie aussi !

Pour chacune des propriétés ci-dessous,
- énoncer la réciproque et dire si elle est vraie
- énoncer la contraposée et vérifier qu'elle est bien vraie

Propriété A : « Si j'habite à Paris, alors j'habite dans le 75 »
Propriété B : « Si j'habite à Paris, alors j'habite en France »

Exercice type n°3 : On connaît les longueurs des trois côtés du triangle et on cherche à montrer qu'il <u>n'est pas</u> rectangle.
Soit ABC un triangle tel que AB = 9 cm, BC = 11 cm et AC = 15 cm.
Ce triangle est-il rectangle ?

Dans le triangle ABC, on a **d'une part** : $AC^2 =$

et **d'autre part** : $AB^2 + BC^2 =$

donc $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$

donc d'après la   du théorème de Pythagore,

le triangle ABC n'est pas rectangle en B.

EQUATIONS

I) VOCABULAIRE

- Une **équation** est une égalité comprenant une ou plusieurs **inconnues** dont on va chercher la ou les valeurs possibles.

Ex :

inconnues

$$\underbrace{x+y}_{\text{membre de gauche}}=\underbrace{x+12}_{\text{membre de droite}}$$

- Une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vérifiée est appelée **solution** de l'équation.

  Ex : 3 est une solution de l'équation : $2x+1=x+4$
  En effet, si $x=3$,

  d'une part : $2x+1=$

  et d'autre part : $x+4=$

- **Résoudre** une équation, c'est déterminer <u>toutes</u> ses solutions.

- Une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax+b=cx+d$ (avec $a\neq c$) est appelée **équation du premier degré à une inconnue**.

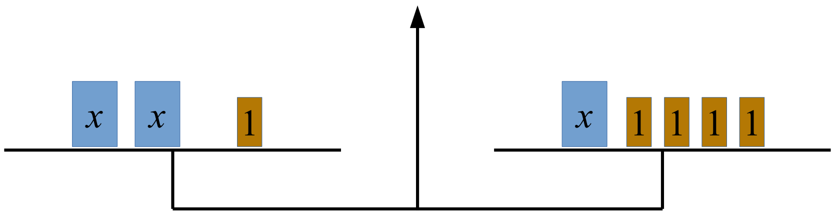
II) RÉSOUDRE UNE EQUATION DU 1ER DEGRÉ

1) Intuitivement

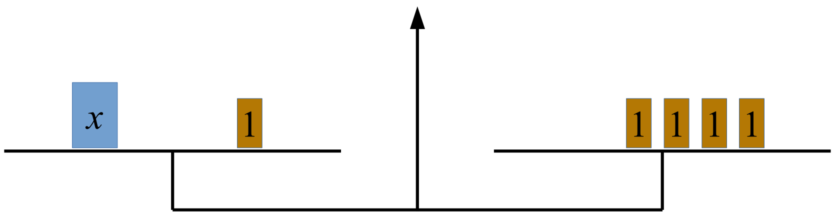
Ex : On cherche à résoudre l'équation : $2x+1=x+4$

On considère la balance ci-dessous.
A chaque étape, on peut enlever ou ajouter des poids mais la balance doit rester équilibrée !

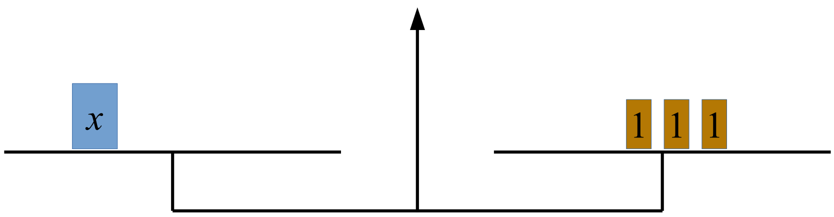
Départ :



Etape 1 :



Etape 2 :



Bilan :
L'équation $2x+1=x+4$ admet une <u>unique</u> solution qui est :

2) Règles

- Lorsque l'on ajoute ou on soustrait un même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions.
- Lorsque l'on multiplie ou on divise par un même nombre **non nul** les deux membres d'une équation, on obtient une nouvelle équation qui a les mêmes solutions.

Ex :

Résoudre : $x+5=25$

Résoudre : $2u=8$

Résoudre : $3x=2$

Résoudre : $6+y=-5$

Résoudre : $-7+a=23$

Résoudre : $7=t-5$

3) Dans les exercices

Méthode :

1. Rassembler les termes en x d'un côté
2. Rassembler les termes constants de l'autre côté
3. Neutraliser le coefficient devant x

Ex : Résoudre : $2x+7=4-5x$

Remarques :

- Rédiger avec une ligne par étape
  et conclure par une phrase précisant toutes les solutions.

- Les équations du 1er degré à une inconnue ont une seule solution.
  Mais ce n'est pas le cas de tous les types d'équations !

  Ex : Combien de solutions ont les équations suivantes ?

  $x^2=9$

  $x+3=x-5$

III) PROBLÈMES CONCRETS

Rédaction en 4 étapes :

1. Définir l'inconnue (en précisant l'unité et les conditions s'il y en a).
2. Mettre le problème en équation.
3. Résoudre l'équation.
4. Conclure par une phrase.

Exemple :
Camille et Marine s'entraînent en course d'endurance autour d'un stade.
Camille effectue trois tours complets de piste puis continue encore 200 m.
Marine effectue deux tours complets de piste puis fait 1200 m supplémentaires.
Sachant qu'elles ont couru exactement la même distance, quelle est la longueur de la piste ?

Rédaction :
Appelons x la longueur de la piste en mètres. x est positif.

La distance parcourue par Camille est :

La distance parcourue par Marine est :

Elles parcourent la même distance donc :

PROPORTIONNALITÉ

I) RAPPEL

Dans les problèmes concrets utilisant la proportionnalité, on est souvent amené à chercher le « nombre manquant » dans un tableau de proportionnalité. Pour cela, plusieurs approches sont possibles :

1) En utilisant la proportionnalité des lignes

Ex : 12 m de tissus coûtent 4 €. Combien coûtent 30 m ?

Appelons x le prix cherché en €.

Longueur de tissus (m)		
Prix (€)		

/ 3

$x =$

30 m de tissus coûtent donc

2) En utilisant la proportionnalité des colonnes

Ex : 11 kg de bananes coûtent 13 €. Combien coûtent 22 kg ?

Appelons x le prix cherché en €.

Masse de bananes (kg)		
Prix (€)		

× 2

$x =$

22 kg de bananes coûtent donc

3) En passant par l'unité

Ex : Pour faire 250 g de confiture, il faut 130 g de fruits.
Combien faut-il de fruits pour faire 400 g de confiture ?

Appelons x la masse de fruits cherchée en g.

Masse de confiture (g)			
Masse de fruits (g)			

$x =$

Pour faire 400 g de confiture, il faut donc g de fruits.

II) PRODUIT EN CROIX

1) Cas général

Soit le tableau de proportionnalité ci-dessous avec a, b, c et d non nuls

Grandeur 1	a	c
Grandeur 2	b	d

Les grandeurs étant proportionnelles, on a : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

En faisant un produit en croix (cf chapitre sur les fractions),

on obtient :

En divisant les deux membres de ce produit en croix successivement par chacune des lettres ci-dessus, on obtient :

$a=\frac{bc}{d}$

$c=$

$b=$

$d=$

Cette façon d'obtenir directement le nombre manquant dans un tableau de proportionnalité s'appelle « la règle de trois ».

2) Dans les exercices

Il n'est désormais plus exigé de reproduire le tableau de proportionnalité sur votre copie.

Ex : Une voiture roulant à vitesse constante, a parcouru 105 km en 1 h et 15 min. Combien de temps lui faudra-t-il pour parcourir 140 km qu'il lui reste à faire ?

Appelons t le temps cherché en minutes.

$t=$

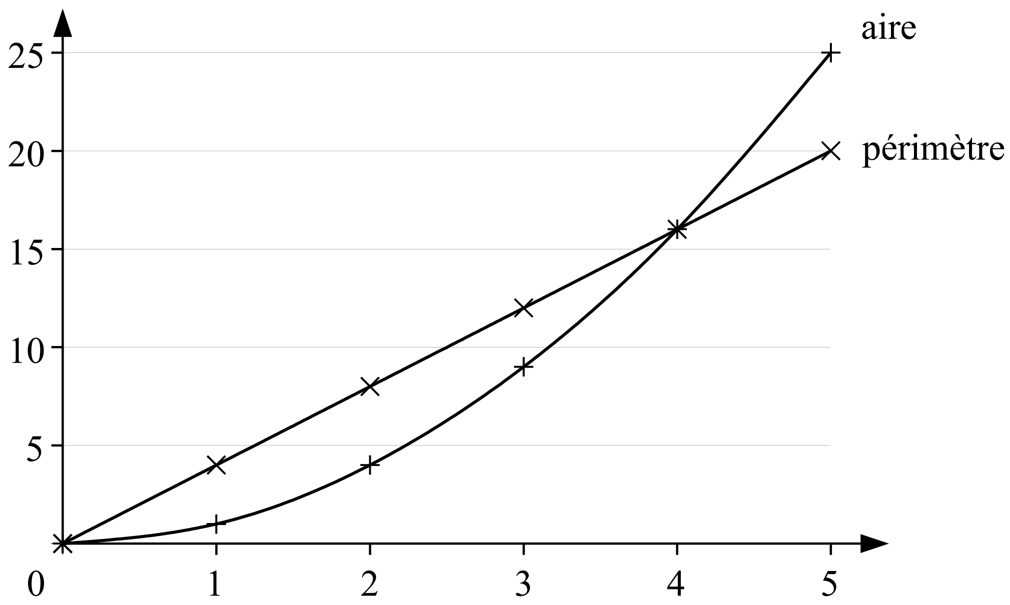
Pour faire 140 km, il lui faudra donc

III) CARACTÉRISATION GRAPHIQUE

Ex : On s'intéresse au périmètre et à l'aire d'un carré en fonction de la longueur de son côté.

Côté (cm)	0	1	2	3	4	5
Périmètre (cm)						
Aire (cm²)						

Représentons ces données par un graphique :



Dans le cas ci-dessus, le périmètre est proportionnel au côté ($p=4c$) et les points associés au périmètre sont sur une ligne droite passant par l'origine du repère.
En revanche, l'aire n'est pas proportionnelle au côté et les points associés à l'aire ne sont pas sur une droite.

Propriété : (admise)
Lorsque deux grandeurs sont proportionnelles, les points représentant ces deux grandeurs sont alignés et la droite formée passe par l'origine du repère.

Propriété réciproque :
Lorsque les points représentant deux grandeurs sont alignés et que la droite formée passe par l'origine du repère, ces deux grandeurs sont proportionnelles.

IV) APPLICATIONS

1) Pourcentages

Les pourcentages traduisent des situations de proportionnalité !

a) Calculer un pourcentage

Ex : Dans une classe de 24 élèves, 15 étudient l'anglais.
Quel est le pourcentage d'élèves étudiant l'anglais ?

Appelons x ce pourcentage

Nombre d'élèves étudiant l'anglais		
Nombre total d'élèves		

$x =$

Il y a donc   % d'élèves faisant de l'anglais dans cette classe.

b) Appliquer un pourcentage

Ex : Dans une classe de 30 élèves, 40 % sont des filles.
Combien y a-t-il de filles ?

- **Méthode 1 :** Avec un tableau de proportionnalité
  Appelons x le nombre de filles

Nombre de filles		
Nombre total d'élèves		

$x =$

Il y a donc   filles dans cette classe.

- **Méthode 2 :** En « appliquant » directement le pourcentage
  Les filles représentent 40 % des 30 élèves de la classe.

Le nombre de filles est donc :

Dans cette classe, il y a donc   filles.

c) Pourcentage d’augmentation ou de diminution

Ex 1 : Un pantalon qui coûtait 12,50 € vient d’augmenter de 20 %. Combien coûte-t-il désormais ?

Appelons p le nouveau prix du pantalon :

$p=$

Ex 2 : Bonne nouvelle ! Dans ma boulangerie, les éclairs au chocolat sont passés de 3 € à 2,40 €. De quel pourcentage ont-ils baissé ?

Appelons p ce pourcentage.

La baisse est alors : $\frac{p}{100}\times 3=$

2) Échelle d'un plan

Sur un plan à l'échelle, les distances sur le plan sont proportionnelles aux distances réelles.

Définition :

L'échelle d'un plan est le coefficient de proportionnalité :

$$\frac{\text{distance sur le plan}}{\text{distance réelle}}$$

même unité !

Ex :

Un microbe est représenté sur un livre par un cercle de diamètre 12 mm.

Le schéma est à l'échelle $\frac{10000}{1}$. Quel est le diamètre réel du microbe ?

Appelons x le diamètre réel du microbe en mm.

Diamètre sur le livre (mm)		
Diamètre réel (mm)		

$x =$

Le microbe mesure donc mm de diamètre.

V) GRANDEURS COMPOSÉES :

1) Grandeurs produit, grandeurs quotient :

Dans un tableau de proportionnalité, le coefficient de proportionnalité est souvent le quotient de deux grandeurs différentes :

● L'aire d'une surface est une grandeur produit : en $m^2 = m \times m$.
● Le prix au litre de l'essence est une grandeur quotient : en €/L.
● La consommation d'une voiture est une grandeur quotient : en L/km.
● La masse volumique est une grandeur quotient : en kg/m^3.
● Un débit est une grandeur quotient : en m^3/s.

2) Exemple de grandeur quotient : La vitesse moyenne

La vitesse moyenne *v* d'un objet ayant parcouru une distance *d* en un temps *t* est le quotient : $v=\frac{d}{t}$.

Ex : Un avion parcourt 4100 km à la vitesse moyenne de 820 Km/h. Quelle sera la durée du vol ?

Appelons t la durée du vol en heures.

On alors : $820=\frac{4100}{t}$

donc $t=$

3) Calculs et changements d'unité

Ex 1 : Le grammage d'une feuille de papier étant de 80 g/m^2, calculer la masse de 500 feuilles A4.
L'aire d'une feuille A4 est :

L'aire de 500 feuilles A4 est :

La masse de 500 feuilles A4 est :

Ex 2 : La vitesse de rotation d'un disque dur est de 5400 tours/min. Calculer cette vitesse en tours/s.

$$v=\frac{5400\text{ tours}}{1\text{ min}}=$$

Ex 3 : Convertir 15 m^2 en cm^2.

$15\text{ m}^2 = 15 \times (1\text{ m})^2 =$

Ex 4 : La vitesse du son dans l'air est d'environ 340 m/s. Exprimez cette vitesse en km/h.

$v=$

STATISTIQUES

I) MOYENNE

Définition :

La **moyenne** d'une série est obtenue en divisant la somme des données par l'effectif total.

Ex : Je veux calculer l'âge moyen de mes 10 cousins.

Âge (années)	11	12	13	14	15
Effectif	1	3	4	0	2

Méthode 1 :

$$\text{moy} = \frac{11+12+12+}{10} = \frac{129}{10} =$$

Méthode 2 : moyenne pondérée

$$\text{moy} = \frac{11\times1+12\times2+}{10} = \frac{129}{10} =$$

II) MÉDIANE

Principe :

Dans une série rangée en ordre croissant, la **médiane** est « le nombre du milieu » : Les données de la 1ère moitié sont plus petites que la médiane et les données de la 2de moitié sont plus grandes.

Ex 1 : Effectif total impair : 12, 15, 15, 17, 19

L'effectif total est 5 avec $\frac{5+1}{2}=3$.

La médiane est donc le 3ème terme de la série : Méd =

Ex 2 : Effectif total pair : 12, 15, 15, 17, 19, 19

L'effectif total est 6 avec $\frac{6+1}{2}=3{,}5$.

La médiane est donc la demi-somme des 3ème et 4ème termes de la série :

Méd =

Ex 3 : Tableau d'effectifs (âges des cousins)

Âge (années)	11	12	13	14	15
Effectif	1	3	4	0	2
ECC					

L'effectif total est 10 avec $\frac{10+1}{2}=5{,}5$.

La médiane est donc la demi-somme des termes de la série :

Méd =

Remarques :

- Moyenne et médiane sont toujours exprimées dans la même unité que les données de la série.
- Elles ne sont pas forcément égales à l'une des données de la série.
- Elles permettent d'obtenir une valeur « centrale » de la série et sont en général assez proches l'une de l'autre.
- Elles ne donnent aucun renseignement sur la manière dont sont réparties les données autour de cette moyenne ou de cette médiane.

III) ÉTENDUE

Définition :

L'étendue d'une série est l'écart entre la plus grande et la plus petite valeur de cette série.

Ex : En reprenant l'âge de mes cousins ci-dessus :

étendue =

Remarque :

- Si l'étendue est faible, les données sont très regroupées autour de la moyenne (ou de la médiane) et la série est assez « homogène ».
- Si l'étendue est importante, les données sont probablement plus « dispersées ».

PROBABILITÉS

I) EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Une **expérience aléatoire** est une expérience :
- dont on connaît à l'avance les différents résultats possibles
- mais dont on ne sait pas à l'avance lequel va se produire.

Ces différents résultats possibles sont appelés **issues**.

Ex 1 : On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
Il y a deux issues : pile, face.

Ex 2 : On jette un dé et on observe la face supérieure.
Il y a six issues : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.

Ex 3 : Une urne qui contient 3 boules rouges et 1 boule noire.
On tire une boule au hasard. Quelle est sa couleur ?
Il y a deux issues : rouge ou noire

II) ÉVÉNEMENT

On appelle **événement** tout ensemble d'issues.
Un événement peut être décrit :
- soit par une phrase en français,
- soit comme un ensemble d'issues (avec des accolades).

Ex 4 : On lance un dé.

Appelons A l'événement « Le résultat est pair » :
$A = \{2 ; 4 ; 6\}$.

Appelons B l'événement « Le résultat est multiple de 3 » :
$B = \{3 ; 6\}$.

III) PROBABILITÉ

1) Définition

La **probabilité** d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance que cet événement a d'être réalisé.

Ex : On lance une pièce de monnaie et on appelle A l'événement « On a obtenu pile ».

Cet événement a une chance sur deux d'être réalisé. On écrit : $p(A)=\frac{1}{2}$

Remarque :

- Une probabilité peut s'écrire soit comme une fraction, soit comme un nombre décimal, soit comme un pourcentage.

2) Propriétés

- La somme des probabilités correspondants aux issues est égale à 1.
- La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités correspondant à chacune des issues qui le composent.
- Si toutes les issues ont la même chance d'être réalisées, on dit qu'elles sont **équiprobables** et on a alors : $p(A)=\frac{\text{Nombre d'issues de A}}{\text{Nombre total d'issues}}$

Ex : On lance un dé équilibré et on cherche la probabilité de l'événement A : « le résultat est pair ».

Méthode 1 :

Les 6 issues sont équiprobables, et la somme de leurs probabilités est 1

donc : $p(\{1\}) = p(\{2\}) = ... = p(\{6\}) = \frac{1}{6}$

$A = \{2 ; 4 ; 6\}$ donc $p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = 3\times\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

Méthode 2 :

Les 6 issues sont équiprobables.

donc : $p(A) = \frac{\text{Nombre d'issues de A}}{\text{Nombre total d'issues}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

IV) SIMULATIONS

Lorsque l'on répète n fois une expérience aléatoire, la fréquence d'un événement varie d'une série à l'autre. Toutefois, plus n est grand plus la fréquence de cet événement se stabilise autour de sa probabilité.

Aussi, quand on ne sait pas calculer une probabilité, on peut s'aider d'un ordinateur pour simuler un grand nombre de fois une expérience aléatoire et obtenir une valeur approchée de la probabilité cherchée.

Concrètement, nous ferons cette année ces simulations à l'aide d'un tableur (Microsoft Excel, Libre Office Calc, Google Sheet,…)

Vous devrez pour cela connaître les fonctions suivantes :
=ALEA.ENTRE.BORNES(min ; max)
=SI(condition ; valeur si vrai ; valeur si faux)
=NB.SI(plage ; valeur)