FRACTIONS

I) ÉGALITÉS DE QUOTIENTS

1) Propriété fondamentale

Le quotient de deux nombres relatifs ne change pas lorsque l'on multiplie (ou divise) à la fois le numérateur et le dénominateur par un **même** nombre relatif non nul.

Soient des nombres relatifs a, b et k (b et k non nuls) :

$$\frac{a}{b}=\frac{a\times k}{b\times k}$$

Ex : $\frac{0,5}{3}=\frac{0,5\times 2}{3\times 2}=$

De la propriété précédente découlent :

2) Signe « moins » dans les fractions

Soient deux nombres relatifs *a* et *b* (*b* non nul) :

$$\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$$

Démonstration :

$$\frac{a}{-b}=\frac{(-1)\times a}{(-1)\times(-b)}=\frac{-a}{b}=\frac{(-1)\times a}{b}=(-1)\times\left(\frac{a}{b}\right)=-\frac{a}{b}$$

3) Simplification de fractions

Simplifier :

$$\mathrm{A}=\frac{-36}{54}=\frac{-6\times 6}{9\times 6}=$$

Transformer en fraction :

$$B=\frac{2}{-3{,}2}=$$

4) Comparer des fractions

Ex : Comparer $\frac{17}{-6}$; $\frac{-7}{2}$ et -3

Prenons 6 comme dénominateur commun.

$$\frac{17}{-6} =$$

$$\frac{-7}{2} =$$

$$-3 = -\frac{3}{1} =$$

Or : $-\frac{\quad}{6} < -\frac{\quad}{6} < -\frac{\quad}{6}$

Bilan :

5) Produit en croix

Quels que soient les nombres relatifs *a*, *b*, *c* et *d* (*b* et *d* non nuls) :

- Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $a\times d=b\times c$
- Et réciproquement, si $a\times d=b\times c$, alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

En effet :

d est non nul donc $\frac{a}{b}=\frac{a\times d}{b\times d}$ et de même *b* est non nul donc $\frac{c}{d}=\frac{b\times c}{b\times d}$

donc si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $\frac{a\times d}{b\times d}=\frac{b\times c}{b\times d}$

ces deux dernières fractions sont égales et elles ont le même dénominateur

donc elles ont aussi le même

on a donc l'égalité :

Ex : Montrer que : $\frac{10}{17}\neq\frac{3}{5}$

D'une part : $10\times 5=$

D'autre part : $17\times 3=$

Or :

Donc d'après la propriété du produit en croix :

II) ADDITIONS ET SOUSTRACTIONS DE FRACTIONS

1) Méthode

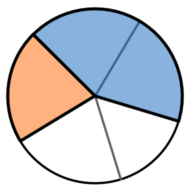
On met les fractions au même dénominateur, puis on ajoute ou on soustrait les numérateurs.

Soient des nombres relatifs a, b et c (c non nul) :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=$$

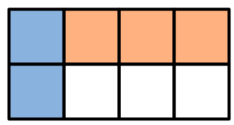
Ex : Calculer

$$A=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=$$



$$B=\frac{3}{-7}-\frac{8}{7}=$$

$$C=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=$$



2) Cas où le dénominateur commun n'est pas évident

Ex : Calculer

$$D=\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$$

On peut choisir 3×5 comme dénominateur commun :

$$D=\frac{1\times}{3\times}+\frac{2\times}{5\times}=$$

$$E=\frac{5}{9}+\frac{1}{6}$$

On pourrait choisir 9×6=54 comme dénominateur commun mais il y a plus astucieux :

En effet, $9=3\times3$ et $6=3\times2$ donc on peut choisir 3×3×2=18 :

$$E=\frac{5\times}{9\times}+\frac{1\times}{6\times}=$$

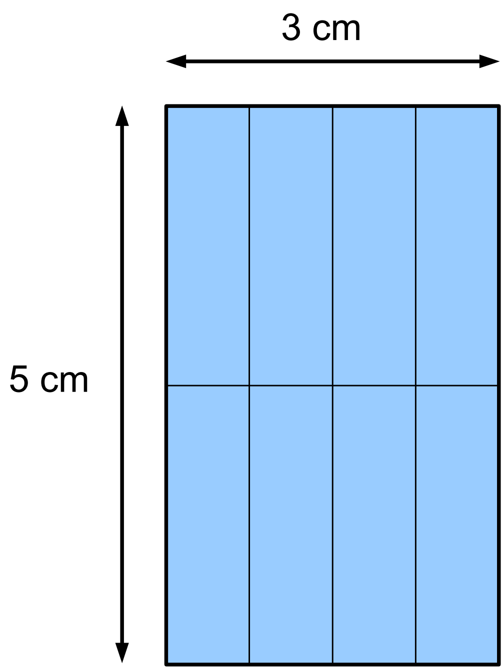
$$F=\frac{-2}{9}-\frac{-8}{15}$$

III) MULTIPLICATIONS DE FRACTIONS

1) Exemple avec un calcul d'aire

On décide de construire un rectangle de longueur 5 cm et de largeur 3 cm, puis on partage la longueur de ce rectangle en 2 et sa largeur en 4. On obtient donc un « grand » rectangle contenant 8 « petits » rectangles.

On écrira ci-dessous les dimensions sous forme fractionnaire et non sous forme décimale.



a) Longueur d'un petit rectangle : $\frac{\quad}{\quad}$

Largeur d'un petit rectangle : $\frac{\quad}{\quad}$

Aire d'un petit rectangle : $A=\frac{\quad}{\quad}\times\frac{\quad}{\quad}$

b) Aire du grand rectangle : $A'=\quad\times$

Nombre de petits rectangles : $n=\quad\times$

Aire d'un petit rectangle : $A=\frac{A'}{n}=\frac{\quad\times\quad}{\quad\times\quad}$

c) Bilan, de a) et b), on déduit : $A=\frac{\quad}{\quad}\times\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad\times\quad}{\quad\times\quad}$

2) Propriété

Pour multiplier des fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Soient des nombres relatifs *a*, *b, c* et *d* (*b* et *d* non nuls) :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=$$

Ex :

$A=\frac{4}{3}\times\frac{2}{5}=$

$B=3\times\frac{2}{5}=$

$C=\frac{7}{-5}\times\frac{-2}{3}=$

3) Méthode à suivre dans les exercices

Essayer de simplifier les fractions **<u>avant</u>** de multiplier les numérateurs et dénominateurs.

Ex :

$D=\frac{-8}{21}\times\frac{7}{5}=$

$E=\frac{39}{-16}\times\frac{8}{-26}=$

4) Fraction d'une quantité

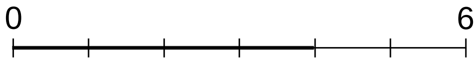
Propriété :

Prendre la fraction d'une quantité revient à multiplier cette quantité par la fraction.

Ex 1 : Je viens de faire les deux tiers des 6 km qui me séparent de l'école. Combien de km ai-je parcouru ?

Appelons D cette distance :

$$D=\frac{2}{3}\times 6=$$

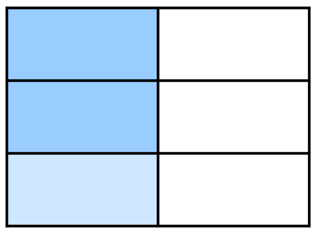


J'ai parcouru 4 km.

Ex 2 : On prend les deux tiers de la moitié d'un gâteau. Quelle fraction du gâteau a-t-on pris ?

Appelons F cette fraction :

$$F=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=$$



On a pris le tiers du gâteau.

IV) DIVISIONS DE FRACTIONS

1) Inverse d'un nombre

Définition :

Deux nombres sont dit « inverses l'un de l'autre » lorsque leur produit est égal à 1.

Ex :

$A = 3 \times \frac{1}{3} =$

$B = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$C = \frac{3}{5} \times \frac{5}{3} =$

Propriété :

Soient deux nombres *a* et *b* non nuls,

l'inverse de *a* est

l'inverse de $\frac{a}{b}$ est

Remarques :

- Le nombre 0 n'a pas d'inverse.
- Ne pas confondre « opposé » (somme égale à 0) et « inverse » (produit égal à 1) : L'opposé de 5 est –5 mais l'inverse de 5 est $\frac{1}{5} = 0{,}2$.
- Un nombre et son inverse sont de même signe.

2) Divisions de fractions

Propriété :

Diviser par un nombre non nul revient à multiplier par son inverse

Soient des nombres relatifs *a*, *b, c* et *d* (*b*, *c* et *d* non nuls) :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=$$

Ex :

$$A=\frac{1}{0{,}5}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=1\times$$

$$B=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}\times$$

$$C=\frac{-\frac{15}{7}}{12}=$$

$$D=\frac{-\frac{4}{7}}{\frac{-10}{-21}}=$$