Ejercicio 109

(X, Σ, μ), espacio de medida.

Probar:

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.u.} f \iff \forall \varepsilon > 0, \quad \mu(B_n(\varepsilon)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donde $B_n(\varepsilon) = \bigcup_{k\geq n} \{x \mid |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$

⟸]: Fijar una sucesión $(\varepsilon_k)_{k=1}^{\infty}$ de números positivos tal que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$

Por hipótesis, es posible encontrar una sucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que:

$$\mu(B_{n_k}(\varepsilon_k)) < \frac{1}{2^k}$$

Se sigue que:

$$\mu\left(\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{j\geq k} B_{n_j}(\varepsilon_j)\right) = 0$$

Ya que $\mu\left(\bigcup_{j\geq 1} B_{n_j}(\varepsilon_j)\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(B_{n_j}(\varepsilon_j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$

podemos tomar límite y obtener:

$$0 = \mu\left(\bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{j\geq k} B_{n_j}(\varepsilon_j)\right) = \lim_{k} \mu\left(\bigcup_{j\geq k} B_{n_j}(\varepsilon_j)\right)$$

Por lo tanto, dada $\delta>0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu\Big(\bigcup_{j\geq k_0} B_{n_j}(\varepsilon_j)\Big) < \delta$$

Tomar $F := \bigcup_{j\geq k_0} B_{n_j}(\varepsilon_j)$

Afirmamos que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$, uniformemente en $X \setminus \delta$ (por lo tanto $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ c.u.)

Razon: Sea $\varepsilon>0$. Tomar j_0 tal que $\varepsilon_j < \varepsilon$.
Podemos suponer que $j_0 \geq k_0$
(pues $\lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$).

Si $x \in X \setminus F = X \setminus \Big(\bigcup_{j\geq k_0} B_{n_j}(\varepsilon_j)\Big)$

$\Rightarrow x \notin B_{n_{j_0}}(\varepsilon_{j_0}) = \bigcup_{k\geq n_{j_0}} \{x \mid |f_k(x)-f(x)| \geq \varepsilon_{j_0}\}$

$\Rightarrow \forall k \geq n_{j_0}$, $|f_k(x)-f(x)| < \varepsilon_{j_0} < \varepsilon$

$\therefore \forall x \in X \setminus F$, $\forall k \geq n_{j_0}$, $|f_k(x)-f(x)| < \varepsilon$

es decir $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ unif. en $X \setminus F$

$\Rightarrow]$: Sea $\delta>0$ y sea $F \in \Sigma$ con $\mu(F)<\delta$ tal que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ uniformemente en $X \setminus F$

Dada $\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que:

$$\forall x \in X\setminus F, \quad \forall n \geq N, \quad |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \bigcup_{k\geq n} \{x \mid |f_k(x)-f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq F, \quad \forall n \geq N$$

$$\therefore \forall n \geq N, \quad \mu(B_n(\varepsilon)) \leq \mu(F) < \delta$$

Como $\delta>0$ es arbitrario se concluye:

$$\forall \varepsilon>0: \quad \lim_{n\to\infty} \mu(B_n(\varepsilon))=0$$