Ejercicio 107

(X, Σ, μ) espacio de medida finita.
Para $f \in M(X, \Sigma)$ definir:

$$r(f) := \int \frac{|f|}{1+|f|} d\mu$$

(i) Probar que $r(f) < +\infty$ y que $d(f,g) = r(f-g)$ define una seudo-métrica.

Dem

Notar que, $\forall x \in X$, $\frac{|f(x)|}{1+|f(x)|} \leq 1 = \chi_X(x)$.

Y ya que el espacio es de medida finita,

$\int \chi_X d\mu = \mu(X) < +\infty$. Por monotonía:

$$\int \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \leq \int \chi_X d\mu < +\infty$$

$$\therefore r(f) < +\infty.$$

Ahora hay que probar que d es una seudo-métrica

(1) Es claro que $d(f,g) \geq 0$ y que $d(f,f) = 0$.

(2) Es directo que $d(f,g) = d(g,f)$.

(3) Resta probar la desigualdad del triangulo
Para esto, definimos una función auxiliar

$$\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{t}{1+t}$$

ya que $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$, φ es estrictamente creciente.

Afirmación: $\forall s,t \in \mathbb{R}$, $\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$

Razón: Definir

$$\alpha(t) := \varphi(s) + \varphi(t) - \varphi(s+t)$$

Ya que:

$$\alpha'(t) = \varphi'(t) - \varphi'(s+t)$$

$$= \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(s+t)^2} > 0$$

α es monótona creciente. Note que $\alpha(0) = 0$, por lo tanto $\alpha(t) \geq 0$, $\forall t > 0$

$$\therefore \quad \varphi(s) + \varphi(t) - \varphi(s+t) \geq 0 \quad \forall t > 0$$

Ahora, vamos a probar:

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$$

Notar que, por la desigualdad del triangulo usual:

$$\forall x \in X, \quad |f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

Por la afirmación:

$$\varphi(|f(x) - g(x)|) \leq \varphi(|f(x) - h(x)|) + \varphi(|h(x) - g(x)|)$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|} \leq \frac{|f(x)-h(x)|}{1+|f(x)-h(x)|} + \frac{|h(x)-g(x)|}{1+|h(x)-g(x)|}$$

Integrando y usando linealidad se concluye:

$$d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$$

Nota: Si $d(f,g)=0 \Rightarrow \int \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\, d\mu = 0$

Ya que $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \geq 0$ lo anterior implica:

$$\frac{|f-g|}{1+|f-g|} = 0 \quad \text{c.d. rel } \mu$$

$$\Rightarrow \quad |f-g| = 0 \quad \text{c.d. rel } \mu$$

$$\Rightarrow \quad f = g \quad \text{c.d. rel } \mu$$

Entonces si identificamos funciones iguales casi dondequiera, d es una métrica.

(ii) Probar $d(f_n,f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$

$\Rightarrow$]: Por la desigualdad de Tchebyshev:

Dada $\varepsilon > 0$, fija y arbitraria:

$$\mu(|f_n-f|\geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varphi(\varepsilon)}\int \varphi\circ |f-f_n|\,d\mu$$

hipótesis

$$= \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\ \boxed{d(f_n,f) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$$\therefore \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$$

$[\Leftarrow]$: Afirmación: $\forall\, s>0$:

$$\int \frac{|f|}{1+|f|}\,d\mu \leq \mu(|f|\geq s) + \frac{s}{1+s}\mu(X) \quad\text{— (1)}$$

Razón: Descomponer:

$$\int \frac{|f|}{1+|f|}\,d\mu = \int_{\{|f|\geq s\}} \frac{|f|}{1+|f|}\,d\mu + \int_{\{|f|<s\}} \frac{|f|}{1+|f|}\,d\mu$$

$$\leq \mu(|f|\geq s) + \int_{\{|f|<s\}} \frac{|f|}{1+|f|}\,d\mu$$

$\frac{|f|}{1+|f|} \leq 1$

$$\leq \mu(|f|\geq s) + \frac{s}{1+s}\,\mu(X)$$

$|f|<s$ y φ creciente $\Rightarrow \frac{|f|}{1+|f|} = \varphi(|f|) \leq \varphi(s) = \frac{s}{1+s}$

Fijemos, $\varepsilon > 0$. Tomar $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\delta}{1+\delta}\mu(X) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ya que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mu(|f_n - f| \geq \delta) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n \geq N$$

Entonces:

$$\forall n \geq N, \quad d(f_n, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

ecuación (1)