Lema (para Hölder) Dem 1 Young's desigualdad

Para $a,b>0$ y $p,q>1$ exp. conjugados:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

con igualdad $\Leftrightarrow$ $a^p = b^q$

Dem Empezar con la desigualdad de Bernoulli:

$$(1+t)^p \geq 1+pt, \quad t \geq -1, \quad p>1$$

con igualdad $\Leftrightarrow$ $t=0$.

Definimos $t := \frac{a}{b^{q/p}} - 1 \underset{a,b>0}{>} -1$

Substituyendo en Bernoulli:

$$\left(\frac{a}{b^{q/p}}\right)^p \geq 1 + p\left(\frac{a}{b^{q/p}} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^p}{b^q} \geq 1 - p + p\frac{a}{b^{q/p}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^p \geq b^q - pb^q + p\,a\,b^{q-\frac{q}{p}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^p}{p} \geq \left(\frac{1-p}{p}\right)b^q + a\,b^{q(1-\frac{1}{p})}$$

$$\underset{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}{\Leftrightarrow} \quad \frac{a^p}{p} \geq -\frac{b^q}{q} + ab$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$$

Igualdad $\Leftrightarrow$ $t = \frac{a}{b^{q/p}} - 1 = 0 \Leftrightarrow a^p = b^q$