Ejercicio 125

Sea (X, Σ) un espacio de medida fijo.

$M(\Sigma) := \{ \nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}} \mid \nu$ es medida con signo finita $\}$

Con las operaciones usuales entre funciones $M(\Sigma)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$:

$$(\mu_1 + \mu_2)(E) := \mu_1(E) + \mu_2(E)$$
$$(\alpha \mu)(E) = \alpha \mu(E)$$

Defina: $\|\mu\| := |\mu|(X)$.

Prueba que $(M, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

<u>Dem</u>

Parte 1: $\|\mu\| = |\mu|(X)$ es una norma.

Si $\|\mu\| = 0$ entonces $|\mu|(X) = 0$ por lo que $|\mu|(A) = 0 \ \forall A \in \Sigma$.
Ya que $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ se sigue que

$$\mu^+ \equiv 0 \equiv \mu^-$$
$$\therefore \ \mu = 0$$

Por el ejercicio 121:

$$|\mu_1+\mu_2| \leq |\mu_1|+|\mu_2|$$

$$\Rightarrow \quad \|\mu_1+\mu_2\| \leq \|\mu_1\|+\|\mu_2\|$$

Para la propiedad de los escalares vamos a probar:

Afil: $(\alpha\mu)^+ = \begin{cases} \alpha\mu^+ & \text{si } \alpha \geq 0 \\ |\alpha|\mu^- & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

$$(\alpha\mu)^- = \begin{cases} \alpha\mu^- & \text{si } \alpha \geq 0 \\ |\alpha|\mu^+ & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Razón:

Por ejercicio 121:

$$(\alpha\mu)^+(E) = \sup_{F\subseteq E}\{\alpha\mu(F)\}$$

$$= \begin{cases} \alpha \sup_{F\subseteq E}\{\mu(F)\} & \alpha \geq 0 \\ \alpha \inf_{F\subseteq E}\{\mu(F)\} & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha\mu^+(E) & \alpha \geq 0 \\ (-\alpha)\mu^-(E) & \alpha < 0 \end{cases}$$

$$(\alpha\mu)^-(E) = -\inf_{F\subseteq E}\{\alpha\mu(F)\}$$

$$= (\alpha)\left(-\inf_{F\subseteq E}\{\mu(F)\}\right) \qquad \alpha \geq 0$$

$$(-\alpha)\sup_{F\subseteq E}\{\mu(F)\} \qquad \alpha < 0$$

$$= \begin{cases} \alpha\,\mu^-(E) & \alpha \geq 0 \\ |\alpha|\,\mu^+(E) & \end{cases}$$

Finalmente, por la afirmación 1:

$$|\alpha\mu| = (\alpha\mu)^+ + (\alpha\mu)^- = |\alpha|(\mu^+ + \mu^-)$$
$$= |\alpha|\,|\mu|$$

$$\Rightarrow \quad \|\alpha\mu\| = |\alpha|\,\|\mu\|$$

Parte 2: $(M(\Sigma_1), \|\cdot\|)$ es completo

Sea $(\mu_n)_{n\geq 1} \subseteq M(\Sigma_1)$ una sucesión $\|\cdot\|$-Cauchy. Entonces, $\forall A \in \Sigma_1$:

$$|\mu_n(A) - \mu_m(A)| = |(\mu_n - \mu_m)(A)|$$
$$\leq |\mu_n - \mu_m|(A)$$
$$\leq |\mu_n - \mu_m|(X)$$
$$= \|\mu_n - \mu_m\| \quad \text{——} \quad (\boxminus)$$

Por lo tanto existe: $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$.

Definimos $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ por:

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \quad \text{—} \ (\star)$$

Afi 2: μ es medida con signo, finita

Vamos a utilizar el siguiente lema:

Lema. Sea $\nu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$, una funcion que satisface;

(i) solo toma un valor extendido

(ii) $\nu(\phi) = 0$

(iii) es finito aditiva

(iv) $\lim_{k\to\infty} \nu(F_k) = 0$, siempre y cuando $(F_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$, decreciente con $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \phi$.

Entonces ν es una medida con signo.

Note que, de $(\star)$ se sigue:

$$\forall A \in \Sigma \quad |\mu(A)| \leq \lim_{n\to\infty} |\mu_n(A)| \leq \sup_n |\mu_n|(X)$$

Ya que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ es de Cauchy:

$$\sup_n |\mu_n|(X) = \sup_n \|\mu_n\| < +\infty$$

$\therefore$ $\forall A \in \Sigma_1$, $|\mu(A)| < \infty$

por lo que μ es finita
y por lo tanto no toma valores
extendidos

También por $(\star)$ se sigue que μ
es finito aditiva y $\mu(\phi) = 0$.

Según el lema, resta probar

$$\lim_{K\to\infty} \mu(F_K) = 0$$

siempre que $(F_n) \subseteq \Sigma_1$ sea decreciente
con $\bigcap_{K=1}^{\infty} F_K = \phi$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por $(\boxplus)$, existe $N \in \mathbb{N}$ con:

$\forall A \in \Sigma_1$: $|\mu_n(A) - \mu_m(A)| < \varepsilon$, $\forall n, m \geq N$

Tomando $m \to \infty$ y acotando concluimos:

$\forall A \in \Sigma_1$: $\quad |\mu(A)| < \varepsilon + |\mu_N(A)| \leq \varepsilon + |\mu_N|(A)$

Tomando $A = F_K$ y tomando $K \to \infty$:

$$\lim_{K\to\infty} |\mu(F_K)| \leq \varepsilon + \lim_{K\to\infty} |\mu_N|(F_K)$$

Pero $|\mu_N|$ es una medida positiva por lo que $\lim_{k\to\infty} |\mu_N|(F_k) = 0$, concluyendo:

$$\lim_{k\to\infty} |\mu(F_k)| \leq \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) = 0$$

Hasta este punto tenemos $\mu \in M(\Sigma_1)$.

Para terminar debemos probar:

$$\lim_{n\to\infty} \|\mu - \mu_n\| = 0$$

Pero, por $(\boxplus)$, dada $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ con:

$$\forall A \in \Sigma_1: \ |\mu_n(A) - \mu_m(A)| < \varepsilon, \ \forall n, m \geq N$$

Tomando $m \to \infty$ concluimos:

$$\forall A \in \Sigma_1, \ -\varepsilon \leq \mu_n(A) - \mu(A)| \leq \varepsilon, \ \forall n \geq N$$

Por el ejercicio 121, tomando supremo sobre A obtenemos:

$$-\varepsilon \leq (\mu_n - \mu)^+(X) \leq \varepsilon \ \_\_(1)$$

y tomando infimo obtenemos:

$$-\varepsilon \leq (\mu_n - \mu)^-(X) \leq \varepsilon \ \_\_(2)$$

$$(1) \text{ y } (2) \Rightarrow \|\mu_n - \mu\| = (\mu_n - \mu)^+(X) + (\mu_n - \mu)^-(X) \leq 2\varepsilon, \quad \forall n \geq N$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \|\mu_n - \mu\| = 0$$

Fin