Lema: (X, Σ, ν) espacio de medida, $f: X \to \mathbb{R}$ Σ-medible con $0 \leq f < 1$ c.d. rel ν.

Si $F \in \Sigma$ con $\nu(F) > 0$ entonces:

$$\int_F f \, d\nu < \nu(F)$$

Dem: Ya que $0 \leq f < 1$ se sigue que:

$$\int_F f \, d\nu \leq \nu(F)$$

Si no se da la desigualdad estricta, entonces

$$\int_F f \, d\nu = \nu(F) = \int_F \chi_F \, d\nu$$

$$\Rightarrow \int_F (f\chi_F - \chi_F) \, d\nu = 0$$

Pero $0 \leq f\chi_E - \chi_E$ (pues $0 \leq f < 1$ c.d.)

$\Rightarrow$ $f\chi_F = \chi_F$ c.d. rel ν

Pero entonces $f = 1$ en F, c.d. rel ν con $\nu(F) = 1$, en contradicción con $f < 1$ c.d. rel ν.