III.- i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Lebesgue medible $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ E = E(\varepsilon)$ abierto en $\mathbb{R}$ tal que
$f|_{\mathbb{R}\setminus E} : \mathbb{R}\setminus E \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}\setminus E$.
y $\bar{\lambda}(E) < \varepsilon$

$\Rightarrow$]: Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base numerable para la topología de $\mathbb{R}$.
Sea $\varepsilon > 0$.
Como $f^{-1}(U_i) \in \mathcal{A}^*_{\mathbb{R}}$ existen F_i y $G_i \subseteq \mathbb{R}$ un abierto y un cerrado respectivamente tal que:

$$F_i \subseteq f^{-1}(U_i) \subseteq G_i \quad \text{— (I)}$$
$$\bar{\lambda}(G_i \setminus F_i) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \quad i \geq 1$$

Tomar $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \setminus F_j$ $\therefore$ E es abierto y $\bar{\lambda}(E) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$

Definir $\tilde{f} : \mathbb{R}\setminus E \to \mathbb{R}$ + $\tilde{f}(x) = f(x)$.
P.D. $\tilde{f}$ es continua en $\mathbb{R}\setminus E$.
Ya que $\{U_i\}_{i\geq 1}$ es una base de la topología es suficiente probar:

$$\tilde{f}^{-1}(U_i) = f^{-1}(U_i) \setminus E$$

es a abierto en $\mathbb{R}\setminus E$.
Afi: $f^{-1}(U_i) \setminus E = G_i \cap (\mathbb{R}\setminus E)$
$\subseteq$]: Clara por (I).
$\supseteq$]: Sea $x \in G_i \cap (\mathbb{R}\setminus E)$
Si $x \in F_i \Rightarrow x \in f^{-1}(U_i) \Rightarrow x \in f^{-1}(U_i) \setminus E$.
Si $x \notin F_i \Rightarrow x \in G_i \setminus F_i \Rightarrow x \in E$ $\lightning$

Finalmente, como $G_i \cap (\mathbb{R}\setminus E)$ es abierto en $\mathbb{R}\setminus E$
$\therefore$ $f^{-1}(U_i)$ es abierto en $\mathbb{R}\setminus E$.

$\Leftarrow]$: La idea es probar que existe $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Borel medible tal que $f = g$ c.d. rel $\bar{\lambda}$. Por el ejercicio 91, esto es suficiente.

Por hipótesis, $\forall i \geq 1$, $\exists$ $E_i \subseteq \mathbb{R}$ abierto tal que

$$\bar{\lambda}(E_i) < \frac{1}{i}$$

$$f|_{\mathbb{R} \setminus E_i} : \mathbb{R} \setminus E_i \to \mathbb{R} \text{ es continua en } \mathbb{R} \setminus E_i.$$

Definimos: $E := \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ $\therefore$ E es Borel medible y $\bar{\lambda}(E) = 0$.

Definimos $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \notin E \\ f(x) & x \in E \end{cases}$$

Claramente $f = g$ c.d. rel $\bar{\lambda}$.

Obs: Sea $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$ un abierto. $g^{-1}(\mathcal{U}) = \begin{cases} E \cup (f^{-1}(\mathcal{U}) \setminus E) \text{ si } & 0 \in \mathcal{U} \\ f^{-1}(\mathcal{U}) \setminus E \text{ si } & 0 \notin \mathcal{U} \end{cases}$

Razón: $g^{-1}(\mathcal{U}) = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in \mathcal{U}\}$

$= \{x \in E \mid g(x) \in \mathcal{U}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus E \mid g(x) \in \mathcal{U}\}$

$= \{x \in E \mid 0 \in \mathcal{U}\} \cup \{x \in \mathbb{R} \setminus E \mid f(x) \in \mathcal{U}\}$

$= \{x \in E \mid 0 \in \mathcal{U}\} \cup f^{-1}(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R} \setminus E)$

Como ~~$f^{-1}(\mathcal{U}) \setminus E$ es abierto en $\mathbb{R} \setminus E$~~

Ahora:

$$f^{-1}(U)\setminus E = f^{-1}(U)\cap E^c$$
$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(U)\cap E_i^c$$
$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} (f|_{\mathbb{R}\setminus E_i})^{-1}(U)$$

$\therefore$ $f^{-1}(U)\setminus E$ es Boreliano (abierto)

Como E es Boreliano concluimos g es Borel medible $\therefore$ g es Borel medible.

---

ii) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es Lebesgue-medible si y sólo si $\forall \varepsilon>0$ $\exists$ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua tal que:

$$\lambda(\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)\neq f(x)\}) < \varepsilon$$

$\Rightarrow]$: Por el inciso anterior existe $E=E(\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}$ abierto con $\lambda(E)<\varepsilon$ y tal que $f|_{\mathbb{R}\setminus E}:\mathbb{R}\setminus E\to\mathbb{R}$ es continua en $\mathbb{R}\setminus E$.
Como $\mathbb{R}\setminus E$ es cerrado por el Teo. de Tietze existe $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua t.q. $g|_{\mathbb{R}\setminus E}=f|_{\mathbb{R}\setminus E}$.
Finalmente:

$$\lambda(\{x\in\mathbb{R} \mid g(x)\neq f(x)\}) \le \lambda(E) < \varepsilon$$

⇐]: P.D. f es Lebesgue medible.

Igual que antes se probará que existe $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Borel medible tal que

$$f=g \text{ c.d. rel } \bar{\lambda}.$$

Por hipótesis $\forall n\geq 1$ existe

$$g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ continua tal que}$$

$$\bar{\lambda}(\{x\mid f(x)\neq g_n(x)\})<\frac{1}{2^n}$$

Definir $E_n=\{x\mid f(x)\neq g_n(x)\}$

Ya que $\sum_{n\geq 1}\bar{\lambda}(E_n)<\infty \underset{\text{Borel-Cantelli}}{\Rightarrow} \bar{\lambda}(\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n)=0$

Afi: $\forall x\in\mathbb{R}\setminus E$, $f(x)=\overline{\lim}_{n\geq 1}\, g_n(x)$

Razon: $x\in\mathbb{R}\setminus E \Rightarrow x\notin \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} E_k$

$\Rightarrow \exists N\geq 1$ t $\forall k\geq n$, $x\notin E_k$

$\therefore \exists N\geq 1$ t $\forall k\geq N$ $f(x)=g_k(x)$

Por lo tanto, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus E$:

$$\overline{\lim}_{n\geq 1}\, g_n(x)=\inf_{n\geq 1}\{\sup_{k\geq n}\{g_k(x)\}\}=\inf_{N\geq 1}\{\sup_{k\geq N}\{g_k(x)\}$$

$$=f(x)$$