Ejercicio 123

Sean μ y ν medidas con signo sobre (X, Σ). Probar:

$|\mu| \perp |\nu| \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists F = F_\varepsilon \in \Sigma$ tal que

$$|\nu|(F) < \varepsilon \ \text{y} \ |\mu|(X \setminus F) < \varepsilon$$

Dem

$\Rightarrow$]: Tomar $A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = X$ con $|\nu|(B) = 0$, $|\mu|(A) = 0$.

Para cualquier $\varepsilon > 0$ tomar $F = B$.

$\Leftarrow$]: Construir $(F_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Sigma$ tal que:

$$|\nu|(F_n) < \frac{1}{2^n}, \quad |\mu|(X \setminus F_n) < \frac{1}{2^n}$$

Definir $B = \overline{\lim_n} F_n$. Por Borel-Cantelli:

$$|\nu|(B) = 0$$

Tomar $A = X \setminus B = \underline{\lim_n} X \setminus F_n$

Entonces

$$|\mu|(A) = |\mu|\left(\bigcup_{n \geq 1} \bigcap_{k \geq n} X \setminus F_k\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|\left(\bigcap_{k \geq n} X \setminus F_k\right)$$

pero $|\mu|\left(\bigcap_{k \geq n} X \setminus F_k\right) \leq \frac{1}{2^k} \ \forall k \geq n \ \therefore \ \mu\left(\bigcap_{k \geq n} X \setminus F_k\right) = 0$