Ejemplo 7.4

(X, d) un espacio métrico separable y $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable para la topología de X. Definimos

$$\rho : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$$

dada por

$$\rho(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(E)}{2^n}$$

donde

$$\rho_n(E) = \begin{cases} 1 & E \cap U_n \neq \emptyset \\ 0 & E \cap U_n = \emptyset \end{cases}$$

Demuestra que ρ es una medida exterior con la propiedad de que $\rho(E) = \rho(\overline{E})$, donde $\overline{E}$ denota la cerradura de E.

Demostración. De las propiedades de medida exterior, sólo hace falta probar

$$E \subseteq F \Rightarrow \rho(E) \leq \rho(F) \tag{1}$$

y

$$\rho(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_k) \tag{2}$$

Razón de (1).

Tomemos $E \subseteq F$. Notar que si $E \cap U_{n_0} \neq \emptyset$ entonces $F \cap U_{n_0} \neq \emptyset$. Por lo tanto, si $\rho_{n_0}(E) = 1$ entonces $\rho_{n_0}(F) = 1$ de donde se sigue que $\rho_n(E) \leq \rho_n(F)$ para toda n y:

$$\rho(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(E)}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(F)}{2^n} = \rho(F)$$

Razón de (2).

Denotemos $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$.

Notamos que si $E \cap U_n \neq \emptyset$ entonces

$$\rho_n(E) = 1 \Rightarrow \rho_n(E_k) = 1, \forall k \in I(n)$$

donde $I(n) := \{k \in \mathbb{N} : E_k \cap U_n \neq \emptyset\}$ es distinto del vacío.

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\rho(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(E)}{2^n} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k \in I(n)} \rho_n(E_k) \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \rho_n(E_k) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n(E_k)}{2^n} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \rho(E_k)
\end{aligned}$$

Finalmete para probar que $\rho(E) = \rho(\overline{E})$, por la definición de ρ, es suficiente probar que, para toda n,

$$\rho_n(E) = 1 \Leftrightarrow \rho_n(\overline{E}) = 1 \tag{3}$$

Para probar (3) es equivalente probar que, para todo elemento U_n de la base,

$$E \cap U_n \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{E} \cap U_n \neq \emptyset$$

$\Rightarrow$] Se sigue de que $E \subseteq \overline{E}$.

$\Leftarrow$] Si existe $x \in \overline{E} \cap U_n$, entonces $x \in \overline{E}$ y U_n es una vecindad abierta de x. Por definición de cerradura de E, $E \cap U_n \neq \emptyset$.

$\square$