75.-(ii) Sea $p \in (0, \infty)$

Si $(x_n) \in \ell_p$ y $p < r \leq +\infty$ entonces $(x_n) \in \ell_r$ y

$$\|(x_n)\|_r \leq \|(x_n)\|_p$$

Caso $r = +\infty$.

Dem: $\forall m$, $|x_m| \leq \|(x_n)\|_p \Rightarrow \|(x_n)\|_\infty \leq \|(x_n)\|_p$

Caso $p < 1$, $r = 1$.

Dem En este caso se usa el lema:

$$(1+t)^p \leq 1 + t^p, \quad \forall t \in [0, \infty)$$

Afi 1: $\forall a, b \geq 0$, $(a+b)^p \leq a^p + b^p$.

Razón: Podemos suponer $a, b > 0$.

Tomando $t = \frac{b}{a}$ en el lema:

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^p \leq 1 + \frac{b^p}{a^p} \Rightarrow \left(\frac{a+b}{a}\right)^p \leq \frac{a^p + b^p}{a^p}$$

$$\Rightarrow (a+b)^p \leq a^p + b^p \quad \text{Fin Afi 1}$$

Por la Afi 1, $\forall N$

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|\right)^p \leq \sum_{n=1}^{N} |x_n|^p$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{N} |x_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{1/p}$$

Tomando $N \to \infty$: $\|(x_n)\|_1 \leq \|(x_n)\|_p$

Caso: $0 < p < r < \infty$

Dem Definimos $s := \frac{p}{r} < 1$ y

$$y_n := |x_n|^r.$$

Como $(x_n) \in \ell_p \Rightarrow (y_n) \in \ell_s.$

Por el caso anterior $(y_n) \in \ell_1 \Rightarrow (x_n) \in \ell_r$

Además:

$$\|(y_n)\|_1 \leq \|(y_n)\|_s \quad -(2)$$

Pero

$$\|(y_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r$$

$$\|(y_n)\|_s = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (|x_n|^r)^s\right)^{1/s}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{r/p}$$

Entonces (2) $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^r \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{r/p}$$

$$\Rightarrow \quad \|(x_n)\|_r \leq \|(x_n)\|_p$$

75 -(i) Probar

$$\ell_p \subsetneq \bigcap_{p<r\leq+\infty} \ell_r$$

Dem Por el inciso (ii) $\forall\, r\in(p,\infty]$,

$$\ell_p \subseteq \ell_r$$

$$\Rightarrow \ell_p \subseteq \bigcap_{p<r\leq+\infty} \ell_r$$

Para probar la contención propia hay que dar una sucesión $(z_n)_n \in \bigcap_{p<r\leq+\infty} \ell_r$ pero $(z_n) \notin \ell_p$.

Tomamos: $z_n := \frac{1}{n^{1/p}}$.

$(z_n) \notin \ell_p$ pues: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ ↳ serie armónica

Claramente (z_n) está acotado $\therefore$ $(z_n) \in \ell_\infty$.

Si $p<r<+\infty$ entonces $1<\frac{r}{p}$

Por el criterio de las "series-p" $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{r/p} < +\infty$

pero $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^r = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{r/p} < +\infty \therefore (z_n) \in \ell_r$