

Teoría de Fourier y análisis de singularidades

Información general

Nombre del curso: Teoría de Fourier y análisis de singularidades

Nivel: Maestría

Duración: 1 semestre

Modalidad: Teórica con resolución de ejercicios

Horas por semana: 4.5 horas

Descripción del curso

Este curso ofrece una introducción al análisis microlocal moderno, con énfasis en el soporte singular de distribuciones, el wave front set, y la acción de operadores pseudodiferenciales sobre distribuciones. El enfoque es accesible y gradual, partiendo de las propiedades de la transformada de Fourier y culminando con aplicaciones a la regularidad y propagación de singularidades en ecuaciones diferenciales lineales. El curso está motivado por problemas actuales en ecuaciones con coeficientes degenerados o potenciales singulares.

Temario

Unidad 1: Transformada de Fourier en espacios de Schwartz

- - Espacios S y S'
- - Propiedades básicas de la transformada de Fourier
- - Extensión al espacio de distribuciones temperadas

Unidad 2: Soporte y soporte singular

- - Definición del soporte singular
- - Ejemplos computables
- - Regularidad y oscilación

Unidad 3: Wave front set

- - Definición y motivación geométrica
- - Cálculo explícito en ejemplos
- - Propiedades fundamentales

Unidad 4: Operadores pseudodiferenciales clásicos

- - Símbolos y cuantización
- - Acción sobre funciones y distribuciones
- - Comportamiento del wave front set bajo operadores

Unidad 5: Regularidad microlocal

- - Ecuaciones elípticas y el principio de microlocalización
- - Teorema de regularidad microlocal
- - Primeras ideas sobre propagación de singularidades

Unidad 6: Aplicaciones a ecuaciones degeneradas y singulares

- - Operadores con coeficientes singulares (ej. $1/x^2$)
- - Ecuación de Schrödinger en dominios no regulares
- - Posible introducción a control y alcanzabilidad microlocal

Unidad 7 (opcional): Introducción al análisis semiclasico

- - Dependencia en un parámetro pequeño h
- - Propagación semiclasica
- - Aplicaciones espectrales

Bibliografía

Bibliografía principal

- - L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vols. I & III (Springer).
- - R. Melrose, Lecture Notes on Microlocal Analysis. Disponible en línea: <https://math.mit.edu/~rbm/book.html>
- - M. E. Taylor, Pseudodifferential Operators and Nonlinear PDE, Birkhäuser.
- - Grigis & Sjöstrand, Microlocal Analysis for Differential Operators, Cambridge University Press.

Bibliografía complementaria

- - F. Trèves, Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators.
- - L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Springer.
- - L. C. Evans, Partial Differential Equations, Capítulos sobre regularidad microlocal.