Temas Selectos de Análisis

Metodos variacionales y su generalización en variedades riemannianas

Los métodos variacionales se refieren a las herramientas matemáticas del análisis que se necesitan desarrollar para poder construir un funcional de energía (dado por una integral) al cual tenemos que garantizar la existencia de puntos críticos. La importancia de este planteamiento variacional radica en sus aplicaciones a las ecuaciones diferenciales parciales (EDP's) que modelan fenómenos de muchas ciencias, pues los puntos críticos de dicho funcional de energía son soluciones a dichas EDP's. Así mismo los problemas variacionales se pueden plantear en el contexto de la geometría riemanniana: Un caso conocido es el que plantea que las geodésicas de una variedad se pueden ver como puntos críticos de un funcional de energía y este planteamiento tiene importantes aplicaciones en problemas muy diversos y en apariencia distantes. Un ejemplo: en la optimización de algoritmos en el cómputo cuántico.

El objetivo de este curso es dar un curso auto contenido de temas fundamentales de los métodos variacionales y presentar la generalización de algunos de esos resultados en variedades riemannianas.

Semestre 2026-2

1. Contenido

1. El principio de Dirichlet
2. Minimización con vínculo
3. La variedad de Nehari
4. El flujo en variedades
5. Teorema de Lusternik-Scmirelmann
6. El lema de deformación
7. El Teorema de Lusternik-Schmirelmann en Variedades de Hilbert
8. El lema de deformación simétrico
9. La condición de Palais-Smale
10. Principio variacional de Ekeland
11. Un lema de deformación general en variedades riemannianas
12. Aplicaciones a problemas semilineales y elípticos con valores en la frontera
13. Aplicaciones a ecuaciones semilineales y elípticas

2. Evaluación del curso

La evaluación será con exposiones individuales de ejercicios que se dejarán a lo largo de las sesiones presenciales, dichas exposiciones formarán a su vez tareas individuales que se deben entregar en las fechas del calendario preestablecido al inicio del semestre.

Referencias

[1] Mónica Clapp. *Métodos Variacionales.* Notas de curso.

[2] Michael Struwe. *Variational Methods.* Springer. 2008.

[3] Thierry Aubin. *Nonlinear analysis on manifolds.* Monge Ampere Equations. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer- Verlag 252, 1982.

[4] Antonio Ambrosetti, Andrea Malchiodi. *Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on* $\mathbb{R}^n$ Birkhaüser. 2006.

[5] Emmanuel Hebey. *Sobolev spaces on Riemannian manifolds.* Springer. 1996.

[6] Emmanuel Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities.* AMS. 1999.

[7] Dorina Mitrea, Irina Mitrea, Marius Mitrea, and Michael Taylor. *The Hodge-Laplacian: Boundary Value Problems on Riemannian Manifolds.* Volume 64 of De Gruyter Studies in Mathematics. Walter de Gruyter, 2016.

Para cualquier duda del curso, no duden en contactarme:

Ma. de los Ángeles Sandoval Romero
Cubículo 238 Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias. UNAM.
selegna@ciencias.unam.mx