Zadatci iz Matematike analize 1

Skripta

Tomislav Franov, Fakultet za matematiku Sveuilita u Rijeci

Ovaj rad posveujem dragom kolegi Davidu, koji naalost vie nije s nama.
Hvala ti za sve trenutke naeg druenja.

Poivao u miru!

Sadržaj

Predgovor

Ova skripta dodatna je literatura za gradivo s vjebi iz kolegija *Matematika analiza 1* u prvom semestru prijediplomskih studija matematike i fizike na Fakultetu za matematiku Sveuilita u Rijeci. Uz gradivo s vjebi, sadraj skripte obuhvaa i neke dodatne teme koje su tijekom zadnjih godina izbaene iz srednjokolskog kurikuluma, a za koje se zbog vremenskih i praktinih razloga smatra da su poznate (npr. laki zadatci vezani uz matematiku indukciju, dokazivanje nejednakosti, crtanje sloenijih grafova i sl.).

Ove biljeke su, u svojoj prvoj verziji 2023. godine, nastale sa svrhom da budu popratna literatura za studente uz odrane demonstrature, ali se od tada njihov opseg proirio i trenutno su namijenjene kao pomo studentima u savladavanju gradiva s vjebi, ali i izvor naprednijih tema i zadataka za one koji ele znati vie.

Zadatci su podijeljeni na rijeene zadatke i zadatke za vjebu. Savjetujemo studentima i studenticama da rijee to vie zadataka za vjebu, jer su, po naem miljenju, oni solidno ponavljanje nauenog gradiva, a mnogi su u neemu izmjenjeni tako da postupak rjeavanja bude ipak neto razliit u odnosu na zadatke obraene prije njih.

Za one koji ele vie, pripremili smo i dodatne teme koje se inae ne bi stigle obraditi u sklopu kolegija, ali i tee zadatke, tj. zadatke s jednom $(*)$ i dvije $(**)$ zvjezdice, od kojih su neki originalni, a veina preuzeta iz nekolicine izvora, esto s matematikih natjecanja za srednju kolu ili iz kolokvija s PMF-a. Vano je napomenuti da je teinu zadataka procijenio autor i da je na koncu subjektivna, tj. nekima neki zadatci koje su svrstani u tee nekima mogu biti jednostavniji od nekih koji nisu i obratno.

U svakom sluaju, autor je svojim izborom zadataka nastojao svesti "ablonske" zadatke na to manju mjeru (iako su i oni korisni, pogotovo u stjecanju brzine i prakse), uglavnom zato to je prolaznost kolegija jako niska, najvie zbog zahtjevnijih zadataka koji ukljuuju dokazivanje, poput onih sa supremumima i infimumima te onih s neprekidnou. Za vjebanje "ablonskih" zadataka, koji su takoer dio ovog kolegija, preporuujemo zbirku [8].

Vano je naglasiti i da su ove biljeke za sada jo nedovrene – nedostaje gradivo vezano uz limes funkcije i derivaciju, koje e, ako autor bude imao vremena, biti prisutno u sljedeoj verziji skripte.

Ako Vam treba pomo u rjeavanju nekog zadatka, ili elite prijaviti neku greku, propust, ili prijedlog za poboljanje skripte, slobodno se javite. elimo Vam puno sree u rjeavanju zadataka i u polaganju kolokvija i zavrnog ispita!

Tomislav Franov

Poglavlje 1

Osnove logike i teorije skupova. Uvod u matematike dokaze

1.1 Osnove matematike logike

Za poetak emo definirati neke vane osnovne pojmove vezane uz matematiku logiku. Iako naa razmatranja nee biti skroz precizna, za nae potrebe bit e sasvim u redu. Vanost poznavanja bar osnovnih elemenata matematike logike se sastoji u tome da se, u velikoj veini matematike, matematiki jezik i simboli zapisuju upravo pomou logikih simbola (*predikata*, *kvantifikatora*, *veznika*), te zato to se neke od osnovnih injenica koje emo ovdje spomenuti koriste vrlo esto u matematici.

Definicija 1. Vrijedi:

- Sud je smislena reenica koja moe biti istinita ili lana. Npr. reenica "Postoji beskonano mnogo prirodnih brojeva." je sud i to istinit sud, reenica "Zemlja je ravna." je sud i to laan sud, a "Pada li kia?" nije sud jer je to reenica za koju nema smisla govoriti je li tona ili ne. Sudove oznaavamo velikim tiskanim slovima i ta slova nazivamo *propozicionalnim varijablama*.

- Svaki sud A ima *negaciju*, tj. sudu A odgovara jedinstveni sud kojeg oznaavamo s $\neg A$ i koji je laan ako je A istinit, odnosno istinit ako je A laan. Zapravo, $\neg A$ znai "Ne vrijedi A".

- Sudove moemo kombinirati veznicima *i* (konjunkcija, $\wedge$), *ili* (disjunkcija, $\vee$), *implikacijom* ($\Rightarrow$) i *ekvivalencijom* ($\Leftrightarrow$), i tako dobivamo nove sudove. Pritom $A \wedge B$ znai "Vrijedi A i B", $A \vee B$ znai "Vrijedi A ili B", gdje je "ili" ovdje inkluzivno, tj. vrijedi ili A, ili B, ili oboje. $A \Rightarrow B$ znai "Ako vrijedi A, onda vrijedi B", a $A \Leftrightarrow B$ znai "Ako vrijedi A, vrijedi B, te ako vrijedi B, vrijedi A".

- Konjunkcija $A \wedge B$ je istinita iskljuivo ako je A istinit i B istinit, disjunkcija $A \vee B$ je istinita iskljuivo ako je bar jedan od A i B istinit, vrijedi $A \Rightarrow B$ iskljuivo kada iz istinitosti od A slijedi istinitost od B, te vrijedi $A \Leftrightarrow B$ samo ako je iz istinosti od A slijedi istinitost od B i iz lanosti od A slijedi lanost od B. Pritom se u implikaciji $A \Rightarrow B$, sud A zove *antecedenta*, a sud B *konzekventa*. Ako vrijedi $A \Leftrightarrow B$, onda jo kaemo i "Vrijedi A ako i samo ako vrijedi B" ili "A je nuan i dovoljan uvjet za B".

Primjer 1. Vrijedi:

- Neka je A sud "Vrijedi $1 + 1 = 2$.", a B sud "*Superman* postoji u stvarnosti." Sud $A \vee B$ je istinit.
- Neka je A sud "Vrijedi $3 > 2$" i B sud "Crna boja je tamnija od bijele." Sud $\neg(A \wedge B)$ je laan.
- Neka je A sud "Zemlja je ravna" i B sud "Vrijedi $1 + 1 = 2$". Sud $A \Rightarrow B$ je istinit. (U ovakvim sluajevima, kada je antecedenta lana, uvijek uzimamo da je tvrdnja trivijalno[1] istinita, bez obzira na istinitost konzekvente. Ovako definirati istinitost implikacije se pokazuje korisnim u logici (v. [1], napomena 1.7.)
- Za implikaciju $A \Rightarrow B$ definiramo njezin **obrat** kao implikaciju $B \Rightarrow A$. Uoite da $A \Rightarrow B$ moe biti istinita, a da njezin obrat bude laan. Uzmite npr. da je A sud "Padala je kia.", a B sud "Ulice su mokre.".

Oznaimo li istinitost neke tvrdnje s 1, a lanost s 0, onda definiciju 1 moemo zapisati u obliku **tablice istinitosti**:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

U navedenoj tablici, jedan redak korespondira jednome od etiri mogua izbora istinitosti od A i B – tako prvi redak predstavlja situaciju gdje su A i B oba lani, drugi redak predstavlja situaciju gdje je A laan i B istinit, trei redak predstavlja situaciju gdje je A istinit i B laan, a etvrti redak predstavlja situaciju gdje su A i B oba istiniti. Izborom jedne od te etiri mogunosti je jednoznano odreena vrijednost istinitosti svih ostalih formula, koje su prikazane

[1]Rije *trivijalno* esta je u matematikom argonu i ona znai *jednostavno*, *oigledno*.

u nastavku u istome retku.

Zadatak 1. Zapiite sljedee sudove koristei propozicionalne varijable i veznike.

a) Broj 2 je vei od broja 1 i 3 nije prirodan broj.

b) Ako je 5 prost broj, onda Sunce nije zvijezda niti da je Zemlja planet.

c) 369 je djeljiv s 3 ako je suma njegovih znamenaka djeljiva s 3.

d) Ako je $1 + 1 = 2$, onda iz $1 + 2 = 3$ slijedi da je Zemlja okrugla.

Rjeenje. a) Uzmemo li da je A sud "Broj 2 je vei od broja 1.", a B sud "3 je prirodan broj.". Tada je sud iz zadatka $A \wedge \neg B$. Mogli smo i uzeti da je B_1 sud "3 nije prirodan broj", pa bi sud iz zadatka bio sud $A \wedge B_1$.

b) Ako je A sud "5 je prost broj", B sud "Sunce je zvijezda.", a C sud "Zemlja nije planet.", onda je sud iz zadatka $A \Rightarrow (\neg B \wedge \neg C)$. Ovdje se zagrade mogu i ispustiti, budui da je standardna praksa u logici da $\neg$ ima prednost nad $\wedge$, koji ima prednost nad $\vee$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ (meutim, u razliitoj literaturi se ovaj dogovor moe razlikovati).

c) Ako je A sud "369 je djeljiv s 3.", a B sud "Suma znamenaka broja 369 je djeljiva s 3." Tada je sud iz zadatka $B \Rightarrow A$.

d) Ako je A sud "Vrijedi $1 + 1 = 2$.", B sud "Vrijedi $1 + 2 = 3$", a C sud "Zemlja je okrugla." Tada je sud iz zadatka $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. □

Napomena 1. Neka su A, B, C sudovi. Bez obzira na to je li bilo koji od sudova A, B, C istinit ili laan, istiniti su sljedei sudovi.

$$\begin{array}{ccc}
A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0 & A \wedge 0 \Leftrightarrow 0 & (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C) \\
A \vee \neg A \Leftrightarrow 1 & A \vee B \Leftrightarrow B \vee A & (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \\
A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A & \neg\neg A \Leftrightarrow A & A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \\
\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B & \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B & A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\
A \wedge A \Leftrightarrow A & A \Rightarrow A & A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \Rightarrow \neg A \\
\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B & A \vee 1 \Leftrightarrow A & A \wedge 1 \Leftrightarrow 1
\end{array}$$

Navedeni sudovi su primjeri *tautologija*, sudova koji su istiniti bez obzira na istinitost sudova koji se u njima javljaju. Pritom je u gornjim pravilima 1 proizvoljna tautologija, a 0 proizvoljna *antitautologija* (tj. sud koji je uvijek laan bez obzira na istinitost propozicionalnih varijabli. Skupa s injenicom da ako je A istinit, te $A \Rightarrow B$ istinit, onda je i B istinit (tzv. *modus ponens*), navedeni sudovi bit e neophodni alati u argumentiranju i logikom zakljuivanju u matematici.

Zadatak 2. Pokaite da je $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Leftrightarrow \neg A)$ istinit bez obzira na istinitost sudova A i B.

Rjeenje. U ovo se moemo uvjeriti koristei tablicu istinitosti.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg B \Leftrightarrow \neg A$
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1

Kao to vidimo, bez obzira na koji redak promotrimo u tablici, ako je $A \Leftrightarrow B$ istinit, onda je i $\neg B \Leftrightarrow \neg A$, te ako je $A \Leftrightarrow B$ laan, onda je i $\neg B \Leftrightarrow \neg A$ laan, to zakljuujemo iz injenice da ta dva suda imaju jednake stupce u tablici. Ovo po definiciji znai da je istinit $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Leftrightarrow \neg A)$.

Alternativno, u tablicu se moe dodati i sud $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Leftrightarrow \neg A)$, iji bi stupac imao sve vrijednosti 1, pa se i tako moe primijetiti da je dani sud istinit bez obzira na istinitost sudova A i B. $\square$

Napomena 2. Slino kao u zadatku 2 moe se pokazati da bez obzira na istinitost sudova A, B, C, vrijedi

- Ako je $A \Leftrightarrow B$ istinit, te $B \Leftrightarrow C$ istinit, onda je i $A \Leftrightarrow C$ istinit.
- Ako je istinit $A \Leftrightarrow B$, onda je istinit i $B \Leftrightarrow A$ i obratno.

Ovom vanim injenicama emo se koristiti u nastavku.

Zadatak 3.

a) Ako je A istinit, te su istiniti $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow C$, moemo li tada zakljuiti da je C istinit?

b) Ako je istinit $A \Rightarrow B$, moemo li tada zakljuiti da je $\neg A \vee B$ istinit?

Rjeenje. a) Moemo. Naime, iz injenice da su A i $A \Rightarrow B$ istiniti slijedi da je B istinit, odakle iz injenice da je i $B \Rightarrow C$ istinit slijedi da je C istinit.

b) Moemo. Kako znamo da je $A \Rightarrow B$ istinit, kako bi mogli primijeniti modus ponens, preostaje se uvjeriti samo da je $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$ istinit. Jedan nain za to pokazati bi bio direktno iz tablice istinitosti.

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Iz tablice vidimo da, u svakom retku u kojem $A \Rightarrow B$ poprima vrijednost 1 (prvi, trei i etvrti), $\neg A \vee B$ takoer poprima vrijednost 1, tj. iz istinitosti od $A \Rightarrow B$ slijedi $\neg A \vee B$, dakle po definiciji je istinit $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$ to smo i tvrdili.

Uoimo jo jedan nain da pokaemo da je $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$ istinit. Naime, prema napomeni 1, za sudove A i B je istinit sud $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$. Odavde direktno slijedi istinitost suda $\neg\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (koristimo tvrdnju zadatka 2 i injenicu da je antecedenta istinita, pa je po definiciji i konzekventa istinita). Sada iz injenice da za proizvoljan sud D, bez obzira na njegovu istinitost, vrijedi $\neg\neg D \Leftrightarrow D$ (pa posljedino i $D \Leftrightarrow \neg\neg D$), slijedi da je istinit sud

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg\neg B \Leftrightarrow \neg A \vee B,$$

odakle prema napomeni 2 slijedi da je istinit sud $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$. Lako se vidi da je onda istinit i sud $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$. Naime, ako iz istinitosti (odnosno lanosti) od $A \Rightarrow B$ slijedi istinitost (odnosno lanost) od $\neg A \vee B$, onda trivijalno iz istinitosti od $A \Rightarrow B$ slijedi istinitost od $\neg A \vee B$.[2] $\square$

Pokazuje se da je koritenje samo propozicionalnih varijabli i veznika previe restriktivno za velik dio matematike, pa se u nastavku bavimo sudovima koji ukljuuju *svojstva* (predikate) nekih objekata $x_1, x_2, \dots x_n$, oznaimo ih sa $p(x_1, \dots, x_n)$. I tu za svaki izbor objekata x_i (gdje je i prirodan broj takav da je $1 \leq i \leq n$) koji dolazi u obzir moramo biti u stanju odrediti je li $p(x_1, \dots, x_n)$ istinit ili laan.

Primjer 2. Neka je $P(x, y)$ sud "x je vei od y.". Tada je $P(1, 2)$ laan, a $P(2, 1)$ istinit. S druge strane, $P(x, 1)$ neemo smatrati sudom, jer ne moemo na nedvosmislen nain odrediti je li on istinit, njegova istinitost ovisi o vrijednosti broja x.

Sada uvodimo jo i *kvantifikatore*. Ove pojmove, kao ni one prethodne, neemo strogo uvoditi, ali emo ih objasniti na primjeru. Kvantifikatori su oznake $\forall$ (*za svaki*) i $\exists$ (*postoji*), tj. ako je $p(x)$ neko svojstvo od x, onda e $\forall x \, p(x)$ znaiti "Za svaki x vrijedi $p(x)$", a $\exists x \, p(x)$ "Postoji

[2]U ovom zadatku smo se implicitno koristili vrlo intuitivnom tvrdnjom da

bar jedan x takav da vrijedi $p(x)$". Pritom vrijedi

$$\neg\big(\forall x\, p(x)\big) \Leftrightarrow \exists x\, \neg p(x),\ \neg\big(\exists x\, p(x)\big) \Leftrightarrow \forall x\, \neg p(x).$$

Napominjemo i da svojstva iz napomene 1 vrijede i za formule s predikatima i kvantifikatorima.

Zadatak 4. Zapiite sljedee sudove koristei predikate, kvantifikatore i veznike.

a) Svaki ovjek je smrtan.

b) Ne postoji prirodan broj koji je susjedan svakom prirodnom broju.

c) Za svaki $x \in \mathbb{N}$ i za svaki $y \in \mathbb{N}$ vrijedi $x + y = y + x$.

d) Za svaki $x \in \mathbb{N}$ postoji $y \in \mathbb{N}$ takav da je $x < y$.

Rjeenje. a) Neka je $P(x)$ sud "ovjek x je smrtan.". Sud iz zadatka je $\forall x\, P(x)$.

b) Neka je $P(x, y)$ sud "Prirodan broj x je susjedan prirodnom broju y.". Sud iz zadatka je $\neg(\exists x\, \forall y\, P(x, y))$.

c) Neka je $P(x, y)$ sud "Za prirodne brojeve x i y vrijedi $x + y = y + x$." Tada je traeni sud $\forall x\, \forall y\, P(x, y)$.

d) Neka je $P(x, y)$ sud "Za prirodne brojeve x i y vrijedi $x < y$.". Tada je traeni sud $\forall x\, \exists y\, P(x, y)$. □

Zadatak 5. Odredite negaciju sljedeih sudova (i neke njoj ekvivalentne sudove).

a) Svi trokuti su jednakostranini.

b) Postoji prirodan broj koji je istovremeno paran i neparan.

Rjeenje. a) Prvo zapiimo dani sud u jeziku predikata, kvantifikatora i veznika. Ako je $P(x)$ sud "Trokut x je jednakostranian.", tada poetni sud glasi $\forall x\, P(x)$. Pripadna negacija je $\neg\forall x\, P(x)$, koja vrijedi ako i samo ako vrijedi

$$\exists x\, \neg P(x). \tag{1.1}$$

Dakle, u prirodnom jeziku negacija je "Nije istina da su svi trokuti jednakostranini.", te moemo promatrati njoj ekvivalentan sud (1.1), "Postoji trokut koji nije jednakostranian.". (Pokazuje se da je promatranje ovakvih sudova ekvivalentnih negaciji vrlo bitno u dokazivanju tvrdnji i u matematici openito, to ete ubrzo vidjeti i na konkretnim primjerima.)

b) Neka je $P_1(x)$ sud "Prirodan broj x je paran.", te $P_2(x)$ sud "Prirodan broj x je neparan.". Poetni sud je $\exists x\, \big(P_1(x) \wedge P_2(x)\big)$, njegova negacija je $\neg\exists x\, \big(P_1(x) \wedge P_2(x)\big)$, a jedna njoj ekvivalentna tvrdnja $\forall x \left(\neg P_1(x) \vee \neg P_2(x)\right)$. Dakle, u prirodnom jeziku, pripadna negacija je "Ne postoji prirodan broj koji je istovremeno paran i neparan.", a pripadna ekvivalentna tvrdnja je

$$\text{"Svaki prirodan broj ili nije paran, ili nije neparan (ili oboje)."}. \tag{1.2}$$

Imajui na umu injenice da prirodan broj ne moe istovremeno biti paran i neparan, da je svaki prirodan broj paran ako i samo ako nije neparan, te neparan ako i samo ako nije paran, imamo da je (1.2) ekvivalentno sudu

$$\text{"Svaki prirodan broj je ili paran ili neparan."}. \qquad \square$$

1.2 Skupovi

Jedan od temeljnih pojmova u matematici je pojam skupa. Skup ne definiramo, no intuitivno ga zamiljamo kao kolekciju nekih objekata za koje kaemo da su elementi ili lanovi skupa. injenicu da neki objekt x pripada skupu A zapisujemo sa $x \in A$ i itamo "x je element skupa A". U suprotnom piemo $x \notin A$. Skup koji nema niti jedan element zovemo **prazan skup** i oznaavamo sa $\emptyset$. S druge strane, skup svih matematikih objekata relevantnih za diskusiju nazivamo **univerzalni skup**[3]. Nadalje, $S = \{x \mid P(x)\}$ e nam znaiti da je S skup svih objekata x za koje vrijedi $P(x)$ i samo takvih objekata. Preciznije, vrijedi $a \in S$ ako i samo ako vrijedi $P(a)$.

Elemente skupova esto nabrajamo u vitiastim zagradama, npr. skup koji sadri brojeve $1, 2, 3$ i niti jedan drugi element oznaavamo s $\{1, 2, 3\}$. esto je nabrajanje svih elemenata nepraktino pa tada koristimo tri tokice $(\dots)$, npr skup svih elemenata od 1 do 100 oznaavamo s $\{1, 2, \dots, 100\}$.

Vano je naglasiti i da kod skupova esto koristimo $(\forall x \in S)\, P(x)$, odnosno $(\exists x \in S)\, P(x)$, to znai "Za svaki x iz S vrijed $P(x)$", odnosno "Postoji x iz S za kojeg vrijedi $P(x)$". Nadalje, $(\forall x \in S)\, P(x)$ se u logici promatra kao pokrata za sud $\forall x \left(x \in S \Rightarrow P(x)\right)$, a $(\exists x \in S)\, P(x)$ kao pokrata za sud $\exists x \left(x \in S \wedge P(x)\right)$. Nadalje, koristit emo i notaciju $\{x \in S : P(x)\}$ ("skup svih elemenata x iz S za koje vrijedi $P(x)$"), i to se promatra kao pokrata za skup $\{x : x \in S \wedge P(x)\}$

Definicija 2. Neka je U univerzalni skup.

[3]itatelj/ica e se moda zapitati zato uzimamo skup svih matematikih objekata relevantnih za diskusiju, a ne naprosto skup *svega*. Uspostavlja se da, za pojam skupa kako ga mi opisujemo i zamiljamo u veini matematike (tzv. *naivna* teorija skupova), skup svega ne postoji, zbog tzv. *Russellovog paradoksa*.

- Kaemo da je $A \subseteq B$ ako za svaki $x \in U$, gdje je U univerzalni skup, vrijedi $x \in A \Rightarrow x \in B$.
- Kaemo da su A i B **jednaki** i piemo $A = B$ ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.
- **Unija** skupova A i B je skup $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$.
- **Presjek** skupova A i B je skup $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$.
- **Razlika** skupova A i B je skup $A \setminus B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$.
- **Simetrina razlika** skupova A i B je skup $A \triangle B = \{x \in U : x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$.
- **Komplement** skupa A (s obzirom na univerzalni skup U je skup $A^c = \{x \in U : x \notin A\}$
- **Partitivni skup** skupa A je skup svih podskupova od A.
- **Kartezijev produkt** nepraznih skupova A i B je $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Pritom je (a, b) oznaka za **ureeni par**, to je zapravo kolekcija dva elementa u kojoj je *bitan poredak*, dakle ako su a i b razliiti elementi onda je $(a, b) \neq (b, a)$. Nadalje, kaemo da su A i B **disjunktni** ako vrijedi $A \cap B = \emptyset$.

Zadatak 6.

a) Neka je

$$A = \{1, 2, \ldots, 30\},\ B = \{x \in \mathbb{R} : x + 1 < x\},\ C = \{n \in \mathbb{Z} : n < 9\} \setminus \{n \in \mathbb{Z} : n < -7\}.$$

Odredite $(A \cap C) \cup B$.

b) Neka je $\mathbb{N}$ univerzalni skup. Odredite $\{2, 3, 4\} \times \{4, 5, 6 \ldots\}^c$.

c) Odredite $\mathcal{P}\big(\{1, 2, 3\}\big)$.

d) Je li $\Big\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\} \in \mathcal{P}\Bigg(\mathcal{P}\bigg(\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\emptyset)\Big)\bigg)\Bigg)$?

Rjeenje. a) Vrijedi $B = \emptyset$ – oito ne postoji realan broj takav da je $x + 1 < x$. Skup C se sastoji od svih cijelih brojeva manjih od 9, te onih brojeva koji *nisu* manji od -7. Dakle, vrijedi $C = \{-7, -6, -5, -4, \ldots, 6, 7, 8\}$. Dakle, vrijedi $A \cap C = \{1, 2, \ldots, 8\}$, te $\{1, 2, \ldots, 8\} \cup B = \{1, 2, \ldots, 8\}$, budui da je B prazan skup.

b) Vrijedi $\{4, 5, 6, \ldots\}^c = \{1, 2, 3\}$, dakle

$$\begin{aligned} \{2, 3, 4\} \times \{4, 5, 6, \ldots\}^c &= \{2, 3, 4\} \times \{1, 2, 3\} \\ &= \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}. \end{aligned}$$

c) Vrijedi

$$\mathcal{P}\big(\{1,2,3\}\big) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}.$$

d) Vrijedi $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ i $\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\emptyset)\Big) = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}$. Kako je $\big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \subseteq \big\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\} = \mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\emptyset)\Big)$, vrijedi $\big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\} \in \mathcal{P}\bigg(\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\emptyset)\Big)\bigg)$. Konano, kako je $\Big\{\big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\} \subseteq \mathcal{P}\bigg(\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\emptyset)\Big)\bigg)$, vrijedi $\Big\{\big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}\Big\} \in \mathcal{P}\Bigg(\mathcal{P}\bigg(\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}(\emptyset)\Big)\bigg)\Bigg)$. $\square$

1.3 Direktni dokazi

U ostatku ovog poglavlja na intuitivnoj razini uvodimo pojam dokaza. Dokaz moemo shvatiti kao precizan logiki argument koji pokazuje zato je neka tvrdnja istinita. Obino se u dokazima koristimo osnovnim injenicama kojih ne dokazujemo (aksiomima), definicijama tvrdnji o kojima govorimo, te prethodno dokazanim tvrdnjama.

Obino se kae da je matematika *deduktivna znanost*. Naime, u znanostima poput fizike, kemije i biologije koje ispituju svijet oko nas, nemamo luksuz koristiti samo deduktivne argumente, nego koristimo kombinaciju induktivnih i deduktivnih argumenata. Induktivno zakljuivanje je ono gdje iz prethodno poznatih injenica i podataka pokuavamo doi do novih zakljuaka i pokuavamo potkrijepiti te nove zakljuke sa to vie podataka koji podupiru taj zakljuak, a deduktivno zakljuivanje je ono gdje iz prethodnih injenica primjenom logikog zakljuivanja dobivamo nove injenice – ono za razliku od induktivnog zakljuivanja donosi zakljuke za koje moemo *garantirati* da su istiniti.

U matematici, za razliku od drugih prirodnih znanosti, imamo mogunost razviti cijele matematike teorije koristei deduktivno zakljuivanje, te zato uvijek inzistiramo da neto to tvrdimo budemo u stanju dokazati (kada god je to mogue), jer nam to daje sigurnost da je tvrdnja koju smo dokazali tona. Bitno je naglasiti da u matematici takoer koristimo induktivno zakljuivanje, ali nikad u samoj teoriji, ve u samom procesu otkrivanja novih injenica, gdje onda iste pokuavamo dokazati koristei deduktivno zakljuivanje.

Slijede zadatci koji e sluiti kao uvod u dokazivanje matematikih tvrdnji, i to uglavnom na primjeru osnovnih injenica o parnim i neparnim brojevima, djeljivosti, te racionalnim i iracionalnim brojevima. Dokazi se obino u matematici javljaju u dva oblika – **direktan dokaz** i **svoenje na kontradikciju**.[4]

[4] U literaturi ete jo za dokaze kontradikcijom nai i sljedee nazive – *metoda suprotnog*, *indirektan dokaz*, *reductio ad absurdum*.

Direktan dokaz je proces dokazivanja tvrdnji direktnom primjenom definicija i prethodno dokazanih tvrdnji. Za poetak, krenut emo od definicija parnosti i neparnosti.

Definicija 3. Kaemo da je cijeli broj $a \in \mathbb{Z}$ **paran** ako postoji bar jedan $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $a = 2k$. Nadalje, kaemo da je a **neparan** ako postoji bar jedan $l \in \mathbb{Z}$ takav da je $a = 2l + 1$.

Uoite da na odabir ovih dvaju definicija moda i nije najprirodniji, ali prednost ovakve definicije je njezina jednostavnost, jer da smo npr. definirali parne brojeve kao one ija je zadnja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8, tada se pozivamo na pojam dekadskog zapisa broja, a u definiciji 3 se ne pozivamo na nita osim na mnoenje cijelih brojeva, pojam koji je za nae svrhe elementaran i kojeg na ovom mjestu neemo definirati. Nadalje, uoite da smo mogli definirati da je $a \in \mathbb{Z}$ paran ako postoji *tono* jedan $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $a = 2k$, no kasnije emo pokazati da jedinstvenost broja k zapravo slijedi iz same definicije. Napominjemo i da je esta praksa u matematici promotriti definicije s najmanje pretpostavki (pogledajte npr. toku 2.6. u [2]).

Zadatak 7. Rijeite sljedee zadatke.

a) Dokaite da je zbroj dva parna broja ponovno paran broj.

b) Dokaite da je umnoak dva neparna broja neparan broj.

c) Odredite sve $n \in \mathbb{N}_0$ za koje je $n!$ paran (Sjetite se da se za $n \in \mathbb{N}_0$, broj $n!$ definira kao broj za kojeg je $0! = 0$, te $n! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ za $n \in \mathbb{N}$).

Rjeenje. a) Neka su a, $b \in \mathbb{Z}$ proizvoljni parni brojevi. To znai da postoje k, $l \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a = 2k$ i $b = 2l$. No tada je

$$a + b = 2k + 2l = 2(k + l).$$

Budui da je $k + l \in \mathbb{Z}$, slijedi i da je $a + b$ paran. Time smo dokazali tvrdnju.

b) Dokaz ide analogno[5] prethodnom. Zaista, neka su a, $b \in \mathbb{Z}$ proizvoljni neparni brojevi. Tada postoje $k, l \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a = 2k + 1$ i $b = 2l + 1$. Tada je

$$ab = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1,$$

pa tvrdnja oito vrijedi, kako je $2kl + k + l \in \mathbb{Z}$.

c) Za $n = 0$ i $n = 1$ vrijedi $n! = 1$, a 1 oito nije paran broj, jer ne postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $1 = 2k$. Meutim, vrijedi $2! = 2$, a 2 je paran jer je $2 = 2 \cdot 1$. Za $n > 2$ vrijedi

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n = 2 \cdot (1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1) \cdot n),$$

[5] Rije *analogno* ete esto vidjeti u matematikim tekstovima i ona znai *slino*, *usporedivo*.

pa je $n!$ oito paran i za $n > 2$. Slijedi da je $n!$ paran ako i samo ako je $n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,1\}$. □

Zadatak 8. Dokaite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x^2 - 4x \geq -4$.

Rjeenje. Neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Vrijedi

$$x^2 - 4x \geq -4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 0,$$

te kako smo dobili ekvivalenciju s istinitom tvrdnjom $(x-2)^2 \geq 0$, tvrdnja mora vrijediti. Uoite da bi zapravo jedan direktan dokaz bio sljedei: Znamo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $(x-2)^2 \geq 0$. Imamo

$$(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x \geq -4,$$

to smo i tvrdili. Meutim, u prethodnom dokazu je bilo puno intuitivnije ii "unazad", tj. od zaključka ka nekoj istinitoj tvrdnji, pa ako dobijemo da su te tvrdnje ekvivalentne, tvrdnja sigurno vrijedi i moemo konstruirati i direktan dokaz, analogno kako smo to napravili u ovom primjeru. □

Zadatak 9. Dokaite da za sve skupove A, B, C vrijede sljedea svojstva.

a) $A \cup B = B \cup A$,

b) $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$,

c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

d) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (De Morgan).

Rjeenje. a) Neka su A i B proizvoljni. Ako je barem jedan od njih prazan, onda tvrdnja vrijedi, pa pretpostavimo da su svi oni neprazni. Neka je zatim $x \in A \cup B$ proizvoljan. Tada vrijedi $x \in A \lor x \in B$, to povlai $x \in B \lor x \in A$, tj. $x \in B \cup A$. Obratno, ako je $x \in B \cup A$, to znai da je $x \in B \lor x \in A$, odnosno $x \in A \lor x \in B$, tj. $x \in A \cup B$.

b) Neka su A i B proizvoljni i neka je $X \in \mathcal{P}(A)$ proizvoljan. Iz definicije slijedi $X \subseteq A$. Kako vrijedi $X \subseteq A$ i $A \subseteq B$, slijedi $X \subseteq B$, odnosno $X \in \mathcal{P}(B)$.

c) Neka su A, B i C proizvoljni i neka je $(x,y) \in (A \cup B) \times C$ proizvoljan. Tada je $x \in A \cup B$ i $y \in C$, odnosno $(x \in A \lor x \in B) \land y \in C$. Dobivamo

$$x \in A \land y \in C \lor x \in B \land y \in C,$$

(v. tautologije na str.), tj. $(x,y) \in A \times C$ ili $(x,y) \in B \times C$, odakle dobivamo $(x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

d) Neka su A i B proizvoljni i neka je $x \in (A \cup B)^c$ proizvoljan. Tada vrijedi $x \notin A \cup B$, to je drukiji zapis za $\neg(x \in A \cup B)$. Kako $x \in A \cup B$ povlai $x \in A \vee x \in B$, vrijedi

$$\neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B),$$

odnosno $x \notin A \wedge x \notin B$, pa vrijedi $x \in A^c \wedge x \in B^c$, odnosno $x \in A^c \cap B^c$. Analogno se dokazuje drugi smjer. □

Napomena 3. Znamo da vrijedi $A = B$ ako i samo ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$. No to po definiciji vrijedi ako i samo ako da za svaki $x \in U$, gdje je U univerzalni skup, vrijedi $x \in A \Rightarrow x \in B$ i $x \in B \Rightarrow x \in A$, tj. $x \in A \Leftrightarrow x \in B$. Prema tome, da bi vrijedilo $A = B$ nuno je i dovoljno za proizvoljan $x \in U$ vrijedi $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ da bismo pokazali jednakost. To znai da zapravo u podzadatcima a), c) i d) zapravo i ne treba dokazivati drugi smjer, jer imamo niz ekvivalencija za koje znamo da vrijedi tranzitivnost.

Napomena 4. Uoite da vrijedi $\{a, a\} = \{a\}$ i $\{a, b\} = \{b, a\}$. Zaista, zapis $\{a, a\}$ znai da promatrani skup sadri samo elemente a i a i niti jedan drugi. Oito to vrijedi ako i samo ako skup sadri samo element a i niti jedan drugi, dakle on je jednak $\{a\}$. Slino se dokazuje i druga jednakost, te da gornja svojstva vrijede i za elemente skupova s vie lanova. Odavde slijedi da u skupu nije bitan poredak elemenata, te da duplikate moemo zanemariti. Meutim, postoje odreeni sluajevi u kojima je bitno postojanje duplikata, odnosno u kojima je poredak bitan (tada se koristimo *multiskupovima*, *indeksiranim familijama skupova*, *ureenim n-torkama*).

Zadatak 10. Dokaite da tvrdnja da za sve skupove A, B vrijedi $A \cap B \supseteq A \cup B$ nije istinita.

Rjeenje. Dokaimo da je istinita njezina negacija, tj. da je istinita tvrdnja

$$(\exists A, B \in U)\ A \cap B \subset A \cup B.$$

Ovo dokazujemo naprosto po definiciji unije i presjeka. Zaista, uzmimo $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$. Vrijedi $A \cap B = \{3\}$ i $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, te oito vrijedi $A \cap B \subset A \cup B$. □

Iz prethodnog primjera vidimo da, kako bi pokazali da tvrdnja oblika $\forall x\, P(x)$ nije istinita, dovoljno je nai samo jedan primjer x_0 takav da je $P(x_0)$ lana. Takav primjer zove se *kontraprimjer*. Ako neka tvrdnja s univerzalnim kvantifikatorom nije istinita, onda esto kaemo da *openito nije istinita*, jer se moe ipak dogoditi da postoji skup za kojeg je tvrdnja istinita. Npr. za $A = B = \emptyset$ vrijedi $A \cap B \supseteq A \cup B$.

Definicija 4. Neka je $x \in \mathbb{R}$. Kaemo da je x **racionalan** ako postoje cijeli brojevi a i $b \neq 0$ takvi da je $x = \dfrac{a}{b}$. Ako x nije racionalan, kaemo da je on **iracionalan**.

Zadatak 11. Dokaite da za svaki racionalan broj postoji racionalan broj koji je strogo vei od njega.

Rjeenje. Neka je $q \in \mathbb{Q}$ proizvoljan. Tada postoje brojevi $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ takvi da je $q = \dfrac{m}{n}$. Promotrimo broj $q+1$. Oito je $q+1 > q$, te vrijedi

$$q + 1 = \frac{m}{n} + 1 = \frac{m+n}{n}.$$

Kako je $m + n \in \mathbb{Z}$ i po definiciji $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, imamo i da je $q+1$ racionalan broj. $\square$

1.4 Dokazi kontradikcijom

Ideja dokaza kontradikcijom je pretpostaviti da je tvrdnja koju elimo dokazati lana, a zatim zdravim logikim zakljuivanjem doi do apsurdnog zakljuka, odakle slijedi da je poetna pretpostavka (da je tvrdnja koju elimo dokazati lana) bila sama lana, odakle dobivamo istinitost tvrdnje koju smo htjeli dokazati. Pokaimo to kroz nekoliko primjera.

Zadatak 12. Dokaite da ako je b paran, tj. ako postoji bar jedan $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $b = 2k$, onda je taj k jedinstven.

Rjeenje. Tvrdnju dokazujemo svoenjem na kontradikciju. Pretpostavimo da postoje $k, l \in \mathbb{Z}$, $k \neq l$, takvi da je

$$b = 2k \quad \text{i} \quad b = 2l.$$

No tada je $2k = 2l$, odnosno $k = l$. Dakle, dobili smo da istovremeno vrijedi $k \neq l$ i $k = l$, to je apsurdno. Dakle, zakljuujemo da je naa poetna pretpostavka bila lana, odnosno takav k je zaista jedinstven. $\square$

Zadatak 13. Dokaite: Niti jedan cijeli broj nema svojstvo da je istovremeno paran i neparan. (Iako se ova tvrdnja na prvi pogled ini oiglednom, zapravo nije odmah vidljiva iz naih definicija parnosti i neparnosti!)

Rjeenje. Pretpostavimo da postoji takav broj, neka je to $a \in \mathbb{Z}$. Tada postoje cijeli brojevi $k, l \in \mathbb{Z}$ takvi da je $a = 2k$ i $a = 2l + 1$. Odavde imamo $2k = 2l + 1$, odnosno

$$2(k - l) = 1.$$

Zapravo, dobili smo da je 1 paran broj, to intuitivno znamo da ne vrijedi, ali to moemo i dokazati. Moda najprirodniji argument je iskoristiti injenicu da, kad bi ove operacije proirili na skup $\mathbb{Q}$, onda bi imali $k - l = \dfrac{1}{2}$, to je kontradikcija s injenicom da je $k - l$ cijeli broj. No ovo moemo i dokazati i bez pozivanja na skup racionalnih brojeva. Uoimo da je

$$1 = 2(k - l) > 0,$$

pa slijedi i da je $k-l>0$. S druge strane, kako je $k-l>0$, imamo

$$k-l<2(k-l)=1.$$

Dakle $0<k-l<1$, kontradikcija s $k-l\in\mathbb{Z}$, jer nema cijelih brojeva izmeu 0 i 1.[6] $\square$

Zadatak 14. Dokaite da ne postoji broj $a\in\mathbb{R}$ sa svojstvom da za svaki $\epsilon>0$ vrijedi $a>\epsilon$.

Rjeenje. Pretpostavimo da postoji takav $a\in\mathbb{R}$. Za $\epsilon=a+1$ vrijedi $a>a+1$, to je oito nemogue. Meutim, da bi ovakav izbor broja ϵ bio dobar, mora vrijediti $\epsilon=a+1>0$. Meutim, to lagano slijedi iz injenice da uvrtavanjem 0 umjesto ϵ u poetnu pretpostavku imamo $a>0$, pa posljedino i $a+1>0$. $\square$

Jo jedan tip dokazivanja zove se *dokaz kontrapozicijom*, a on se sastoji u sljedeem – iz injenice da za sudove A i B vrijedi

$$A\Rightarrow B\Leftrightarrow\neg B\Rightarrow\neg A$$

slijedi da je dovoljno dokazati $\neg B\Rightarrow\neg A$. Uoimo da se dokaz kontrapozicijom moe gledati kao specijalan sluaj dokaza kontradikcijom i to onaj sluaj gdje, ako pretpostavimo da je tvrdnja koju elimo dokazati lana, dobivamo negaciju pretpostavke.

Zadatak 15. Dokaite:

a) Neka je $a\in\mathbb{N}$ proizvoljan. Ako $4a$ nije kvadrat nekog prirodnog broja, onda to nije ni a.

b) Neka je $a\in\mathbb{Z}$ proizvoljan. Vrijedi da je a^2 paran ako i samo ako je a paran.

Rjeenje. a) Dokazat emo ovu tvrdnju kontrapozicijom. Dovoljno je pokazati sljedee: Ako je a kvadrat nekog prirodnog broja, onda je to i $4a$. Ako postoji p takav da je $a=p^2$, onda je

$$4a=4p^2=2^2p^2=(2p)^2,$$

pa tvrdnja vrijedi.

b) Dokazat emo ovu tvrdnju tako da prvo pokaemo jednu implikaciju, a onda drugu. Pretpostavimo da je a paran, tj. $a=2k$ za neki $k\in\mathbb{Z}$. Tada je

$$a^2=4k^2=2(2k^2),$$

dakle i a^2 je paran.

[6] Ovu, na prvi pogled oiglednu injenicu, dokazujemo u zadatku 48.

Dokaimo sada drugi smjer i to kontrapozicijom, tj. da ako je a neparan, da je tada i a^2 neparan. Zaista, ako je a neparan, onda postoji k takav da je $a = 2k + 1$. Tada je

$$a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

pa tvrdnja vrijedi. $\square$

Definicija 5. Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ i $b \neq 0$. Kaemo da je a **djeljiv** s b ako postoji $q \in \mathbb{Z}$ takav da je $a = bq$. Ako za broj $c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ vrijedi da je a djeljiv s c i b djeljiv s c, onda kaemo da je broj c **zajedniki djelitelj** tih dvaju brojeva. Najvei od tih zajednikih djelitelja naprosto zovemo **najvei zajedniki djelitelj** i oznaavamo taj broj s $M(a, b)$. Kaemo da su a i b **relativno prosti** ako je $M(a, b) = 1$.

Relativno prosti brojevi su npr. 3 i 7, 14 i 25 itd. Moe se intuitivno gledati na relativno proste brojeve kao one za koje vrijedi da ako od njih napravimo razlomak, da se taj razlomak ne moe dalje kratiti, a da brojnik i nazivnik i dalje budu cijeli brojevi.
Zadatak 16. Dokaite da je $\sqrt{2}$ iracionalan.

Rjeenje. Pretpostavimo suprotno, da je $\sqrt{2}$ racionalan. Tada postoje cijeli brojevi a i $b \neq 0$ takvi da je

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Moemo bez smanjenja openitosti pretpostaviti da je $M(a, b) = 1$ (da je razlomak "maksimalno skraen"), jer kada bi vrijedilo $M(a, b) > 1$ onda bi imali

$$\frac{a}{b} = \frac{M(a, b)a'}{M(a, b)b'} = \frac{a'}{b'},$$

tj. vrijednost razlomka se ne mijenja. Sada kvadriranjem obiju strana dobivamo

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow b^2 = 2a^2$$

Iz definicije parnosti slijedi da je b^2 paran, pa je i b paran. No tada postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $b = 2k$, tj. $b^2 = 4k^2$. Sada vrijedi $4k^2 = 2a^2$, odnosno

$$2k^2 = a^2.$$

Odavde slijedi da je a^2 paran, pa je i a paran. Dakle 2 je zajedniki djelitelj od a i b, to je kontradikcija s pretpostavkom $M(a, b) = 1$. $\square$

Definicija 6. Kaemo da a dijeli b i piemo $a \mid b$ ako je b djeljiv s a.

Zadatak 17. Odredite sve $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ takve da je $\frac{4}{a}$ cijeli broj.

Rjeenje. Tvrdnja oito vrijedi ako je $a \mid 4$, tj. tvrdnja vrijedi za $a = 1, -1, 2, -2, 4, -4$. Naime, da $a \mid 4$ znai da postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $4 = ak$, pa vrijedi

$$\frac{4}{a} = \frac{ak}{a} = k \in \mathbb{Z}.$$

Dokaimo da su ovo jedine mogunosti. Tvrdnja oito ne vrijedi za 3 i -3, te pretpostavimo li da postoji neki $a > 4$ takav da tvrdnja vrijedi, onda djeljenjem s a dobivamo $\frac{4}{a} < 1$, no tada oito vrijedi i $\frac{4}{a} > 0$, jer to vrijedi ako i samo ako je $4 > 0$, to je istina. Znamo da ne postoji cijeli broj izmeu 0 i 1, pa imamo kontradikciju. Tvrdnja se analogno pokazuje za $a < -4$. □

Analogno se pokazuje da je $\frac{b}{a}$ cijeli broj ako i samo ako je a djelitelj od b.

Zadatak 18. Odredite sve $a \in \mathbb{Z}$ takve da je

a) $\frac{a+2}{a}$ cijeli broj, $a \neq 0$.

b) $\frac{2a}{a+2}$ cijeli broj, $a \neq -2$.

Rjeenje. a) Vrijedi

$$\frac{a+2}{a} = 1 + \frac{2}{a},$$

te kako znamo da je $1 + x$ cijeli broj ako i samo ako je x cijeli broj, treba pronai kada je sve $\frac{2}{a}$ cijeli broj, a prema ve pokazanome to vrijedi ako i samo ako je $a = 1, -1, 2, -2$.

b) Vrijedi

$$\frac{2a}{a+2} = \frac{2a+4-4}{a+2} = 2 - \frac{4}{a+2},$$

to je cijeli broj ako i samo ako je $a = 0, -4, -3, -1, 2, -6$. □

1.5 Primjeri raznih dokaznih zadataka iz teorije brojeva

Definicija 7. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $n > 1$. Kaemo da je n **prost broj** ako su jedini njegovi djelitelji 1 i n. Kaemo da je n **sloen broj** ako nije prost broj.

Uoimo da je $n \in \mathbb{N}$ sloen ako i samo ako postoje prirodni brojevi $k, l > 1$ takvi da je $n = k \cdot l$.

Zadatak 19. Dokaite da svaki sloeni broj $n \in \mathbb{N}$ ima prosti faktor (tj. prosti broj s kojim je djeljiv), nazovimo ga p, sa svojstvom da je $p \leq \sqrt{n}$.

Rjeenje. Kako je n sloen, sigurno postoji prirodan broj vei od 1 s kojim je djeljiv. Nadalje, prirodnih brojeva s tim svojstvom ima konano mnogo, jer za svaki djelitelj $k > 1$ od n vrijedi $1 < k \leq n$. Kako ih ima konano mnogo, sigurno meu njima postoji najmanji takav – neka je to p. Tada po definiciji postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $n = m \cdot p$. No kako je p najmanji, oito je $p \leq m$. No tada slijedi

$$p^2 \leq m \cdot p = n,$$

odnosno $p \leq \sqrt{n}$, to smo i tvrdili. □

Zadatak 20. Dokaite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji n uzastopnih sloenih brojeva.

Rjeenje. Dovoljno je nai neki $x \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da su

$$x + 2, \ldots, x + n, x + (n + 1)$$

sloeni brojevi, te ako to uspijemo, dokazali smo tvrdnju. Uoimo da je dovoljno uzeti broj x koji je djeljiv sa svim brojevima $2, 3, \ldots, n, n + 1$. Jedan takav broj je $x = (n + 1)!$, jer za proizvoljan $i \in \mathbb{N}$ takav da je $i \leq n$ vrijedi

$$\begin{aligned}(n+1)! + i &= (n+1)n \ldots (i+1)i(i-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 + i \\ &= i\big((n+1)n \ldots (i+1)(i-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 + 1\big),\end{aligned}$$

pa je

$$(n+1)! + 2, \ldots, (n+1)! + n, (n+1)! + (n+1)$$

traeni niz od n uzastopnih sloenih brojeva. □

Napomena 5. Uoite da u prethodnom zadatku nismo promatrali niz $x, \ldots, x + (n - 1)$, nego niz $x + 2, \ldots, x + n, x + (n + 1)$, iako je promatranje prvog niza pri rjeavanju zadatka sigurno intuitivnije. Naime, da smo promatrali prvi niz, ne bismo mogli primijeniti ideju iz prethodnog zadatka, jer nam "smetaju" brojevi x i $x + 1$. Dakako, moemo u ovom sluaju uzeti $x = (n + 1)! + 2$ i tvrdnja e vrijediti, ali da smo to napravili, ne bi bilo na prvi pogled jasno kako smo doli do tog broja.

Definicija 8. Kaemo da je $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ **dekadski zapis** broja $L \in \mathbb{N}$ ako vrijedi

$$L = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + 10^{n-3}a_3 + \cdots + 10a_{n-1} + a_n.$$

Npr. dekadski zapis broja deset je $\overline{10}$, a dekadski zapis broja sto devetnaest je $\overline{119}$. Obino potez na vrhu izostavljamo, ako je iz konteksta jasno da se radi o dekadskom zapisu broja.

Imajui na umu prethodnu definiciju, promotrimo sljedei zadatak.

Zadatak 21 (kolsko natjecanje, 4. razred, A varijanta, 2015.)**.** Za $n \in \mathbb{N}$ oznaimo s R_n broj $\underbrace{\overline{111\ldots11}}_{n \text{ puta}}$. Dokaite da ako je R_n prost broj, onda je i n prost broj.

Rjeenje. Tvrdnju dokazujemo kontrapozicijom, tj. dokazat emo da za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedee: Ako je n sloen, da je onda i R_n sloen. Koritenjem definicije dekadskog zapisa broja i formule za sumu prvih n lanova geometrijskog niza (v. definiciju 33), imamo

$$R_n = 10^{n-1} \cdot 1 + 10^{n-2} \cdot 1 + \cdots + 10 \cdot 1 + 1 = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9}.$$

Kako je n sloen, postoje prirodni brojevi $k, l > 1$ takvi da je $n = k \cdot l$. Dobivamo

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{kl} - 1^l}{9} = \frac{\left(10^k\right)^l - 1^l}{9} \\ &= \frac{(10^k - 1)(10^{k(l-1)} + 10^{k(l-2)} + \cdots + 10^k)}{9} \\ &= \frac{(10 - 1)(10^{k-1} + 10^{k-2} + \cdots + 1)(10^{k(l-1)} + 10^{k(l-2)} + \cdots + 10^k)}{9}, \end{aligned}$$

pa dobivamo da je $R_n = (10^{k-1} + 10^{k-2} + \cdots + 1)(10^{k(l-1)} + 10^{k(l-2)} + \cdots + 10^k)$. Kako je R_n oito umnoak brojeva veih od 1, zakljuujemo da je sloen. □

Napomena 6 (Osnovni teorem aritmetike)*.* Svaki prirodan broj $n > 1$ moe se na jedinstven nain (do na poredak) prikazati kao produkt jednog ili vie prostih brojeva (*Napomena.* Produkt od jednog prostog broja, radi jednostavnosti, definiramo kao sam taj prost broj.)

Ovaj teorem ostavljamo bez dokaza (Dokaz moete nai u [4]), naveli smo ga jer je vrlo elementaran i bit e vrlo bitan pri rjeavanju sljedeih zadataka.
Zadatak 22. Dokaite da prostih brojeva ima beskonano mnogo.

Rjeenje. Pretpostavimo da prostih brojeva ima konano mnogo, neka su to $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Prema osnovnom teoremu aritmetike, znamo da se svaki broj moe prikazati kao produkt brojeva $p_1, p_2 \ldots, p_n$. Dovoljno je, dakle, konstruirati broj koji nije djeljiv ni s jednim od brojeva $p_1, p_2 \ldots, p_n$, jer emo tada dobiti kontradikciju s injenicom da se svaki broj moe prikazati kao produkt brojeva $p_1, \ldots, p_n$. Meutim – nije teko konstruirati takav broj, jedan primjer je

$$p = p_1 p_2 p_3 \ldots p_n + 1.$$

Lako se vidi da p nije djeljiv ni s jednim od brojeva $p_1, \ldots, p_n$. Naime, kad bi postojao broj

p_i takav da $p_i \mid p$, onda kako vrijedi

$$p_i \mid p_1 p_2 \dots p_i \dots p_n,$$

oito vrijedi i

$$p_i \mid p - p_1 p_2 \dots p_n,$$

tj. $p_i \mid 1$. To bi povlailo da je $p_i = 1$, to je kontradikcija s injenicom da je p_i prost, dakle vei od 1. $\square$

Zadatak 23. Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}_0$, definiramo *n-ti Fermatov broj* kao broj $f_n := 2^{2^n} + 1$.

a) Dokaite da za sve $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedee: Ako je $m \neq n$, onda je $M(f_n, f_m) = 1$.

b) Pokaite da a) povlai da prostih brojeva ima beskonano mnogo.

Rjeenje. Da bismo dokazali tvrdnju a), dokaimo sljedeu pomonu tvrdnju: Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f_{n+1} = f_n f_{n-1} f_{n-2} \dots f_1 f_0 + 2$. Zaista, imamo

$$\begin{aligned} f_{n+1} - 2 &= 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n} - 1)(2^{2^n} + 1) \\ &= (2^{2^{n-1}} - 1)(2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^n} + 1) = (2^{2^{n-2}} - 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^n} + 1) \\ &= ... = (2^{2^0} - 1)(2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1) \dots (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^n} + 1) \\ &= f_0 f_1 \dots f_n, \end{aligned}$$

to smo i tvrdili. Pretpostavimo sada da je $m \neq n$ i da postoji zajedniki djelitelj $p > 1$ brojeva f_m i f_n. Bez smanjenja openitosti moemo uzeti da je $m > n$ (Dokaz bi bio potpuno analogan u sluaju da je $n > m$). Kako je

$$f_m = f_{m-1} f_{m-2} \dots f_n \dots f_1 f_0 + 2,$$

onda iz injenice da $p \mid f_n$ slijedi da

$$p \mid f_1 \dots f_n \dots f_{m-1},$$

a s druge strane $p \mid f_m$, pa

$$p \mid f_m - f_1 \dots f_n \dots f_{m-1},$$

tj. $p \mid 2$. Odavde zakljuujemo da je $p = 2$, ali to je nemogue jer su Fermatovi brojevi neparni.

Dokaimo b). Rastavimo li f_0 na proste faktore, onda kako su f_0 i f_1 relativno prosti, slijedi da f_1 sadri bar jedan prosti faktor koji nije prosti faktor od f_n. Nadalje, f_2 je relativno prost s f_1 i f_0, pa on sadri bar jedan prost faktor koji nije prosti faktor niti jednog od ta dva broja.

Ponavljanjem tog argumenta vidimo da je svaki Fermatov broj ima bar jedan prosti faktor koji ujedno i nije bio prosti faktor prethodnih Fermatovih brojeva. Time smo dobili beskonano mnogo prostih brojeva, ime smo dokazali tvrdnju. □

Zadatci za vjebu

Osnove matematike logike, Skupovi

Zadatak 24. Zapiite sljedee skupove matematikim simbolima. Po potrebi koristite i skupovne operacije (unija, presjek, razlika skupova, simetrina razlika).

a) Skup svih realnih brojeva koji su strogo manji od 100 i nisu prirodni brojevi,

b) Skup svih prirodnih brojeva koji su manji ili jednaki od svih prirodnih brojeva,

c) Skup koji sadri sva slova hrvatske abecede i sve prirodne brojeve od 1 do 30.

d) Skup svih podskupova skupa $\{1,2,3\}$ koji imaju tono dva elementa.

Zadatak 25.

a) Izraunajte $\{1,2,3\} \triangle \{4,5,6\}$.

b) Navedite primjer univerzalnog skupa U takvog da $\{1,2,3\}^c$ ima 5 elemenata.

c) Prikaite skup
$$\big\{(1,5),(2,1),(1,1),(2,4),(1,6),(2,5),(1,4),(2,6)\big\}$$
kao kartezijev produkt dva skupa.

d) Navedite primjer skupova A i B takvih da vrijedi
$$\mathcal{P}(A) \cup \mathbb{N} \setminus B = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{1,3\}, 1, 2, 3, 4\}.$$

Direktni dokazi, Dokazi kontradikcijom

Zadatak 26.

a) Dokaite da je zbroj parnog broja i neparnog broja neparan broj.

b) Dokaite da je umnoak dva kvadrata nekog prirodnog broja ponovno kvadrat nekog prirodnog broja.

Zadatak 27.

a) Dokaite da za svaki prirodan broj postoji neparan broj vei od njega.

b) Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ parni brojevi. Dokaite da postoji $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $a < n < b$.

c) Dokaite da ne postoje $p, q \in \mathbb{N}$ takvi da je p paran, q neparan, te $2p^2 + q = 500$.

d) Neka je $a \in \mathbb{N}$, $a > 1$. Dokaite da ne postoji $n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da $a \mid n$ i $a \mid n+1$.

Zadatak 28. Dokaite da za skupove A, B, C vrijedi

a) $A \cap B \subseteq A \cup B$,

b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

Zadatak 29.

a) Ako je $\mathcal{P}(A)$ jednolan skup (skup koji sadri jedan i samo jedan element), dokaite da je $A = \emptyset$.

b) Dokaite: Ako je $A \cup B = \emptyset$, onda je $A = B = \emptyset$.

c) Neka je U univerzalni skup. Odredite sve skupove $A \subseteq U$ za koje vrijedi $A \subseteq A^c$.

d) Dokaite: Ako dva skupa nisu disjunktna, tada oni imaju zajedniki neprazan podskup.

Zadatak 30. Dokaite:

a) Simetrina razlika je komutativna, tj. vrijedi $A \triangle B = B \triangle A$,

b) Simetrina razlika je asocijativna, tj. vrijedi $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

c) Dokaite da za sve skupove A, B vrijedi $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$.

Zadatak 31. Neka je U univerzalni skup i A, B, $C \subseteq U$. Dokaite da vrijedi $A \cap B \subseteq C$ ako i samo ako je $A \subseteq B^c \cup C$.

Zadatak 32.

a) Dokaite da za svaki $a > 0$ postoje tri toke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ u pravokutnom koordinatnom sustavu (tj. tri elementa iz $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) takve da je trokut $\triangle ABC$ jednakostranian i ima povrinu a.

b) Dokaite da za svaki $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ postoji $(y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ takav da je

$$d\big((0,0), (y_1, y_2)\big) > d\big((0,0), (x_1, x_2)\big).$$

Zadatak 33. Dokaite da je $\sqrt{27}$ iracionalan.

Zadatak 34.

a) Dokaite da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja uvijek iracionalan broj.

b) Dokaite da ako je barem jedan od brojeva $\sqrt{a}$ i $\sqrt{b}$ iracionalan, da je tada i $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ iracionalan.

c) Dokaite da ako pozitivan realan broj x nije racionalna potencija broja 10, onda je $\log x$ iracionalan broj.

d) Dokaite da je $\log_2 3$ iracionalan broj.

Zadatak 35. ($*$) Neka je U univerzalni skup i $A \subseteq U$ proizvoljan. Odredite sve $X \subseteq U$ takve da je $X \cap A = X \cup A$.

Poglavlje 2

Skup $\mathbb{N}$. Matematika indukcija

2.1 Princip matematike indukcije

Napomena 7 (Princip matematike indukcije). Neka je $P(n)$ neka tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n. Ako vrijedi:

- $P(1)$ je istinita (baza indukcije),
- Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da ako je $P(k)$ istinita (pretpostavka indukcije), onda je $P(k+1)$ istinita (korak indukcije),

tada je $P(n)$ istinita za svaki $n \in \mathbb{N}$.
Napomena 8. Ako smo primijenili princip matematike indukcije na tvrdnju $P(n)$ da bi dokazali da ona vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, onda jo kaemo da smo *tvrdnju $P(n)$ dokazali indukcijom.*

Alternativna formulacija principa matematike indukcije je sljedea:

$$\text{Neka je } S \subseteq \mathbb{N}\text{. Ako je } 1 \in S \text{ i za svaki } n \in \mathbb{N} \text{ vrijedi } n \in S \Rightarrow n+1 \in S, \text{ onda je } S = \mathbb{N}.$$

Ova formulacija je esto zgodnija zbog teorijskih razloga (primijetite da je ovo peti Peanov aksiom, v. [3]), ali mi emo se na veini mjesta koristiti formulacijom navedenom u napomeni 7.
Zadatak 36. Dokaite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Rjeenje. Za $n = 1$ tvrdimo da je $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$, to oigledno vrijedi – time smo dokazali bazu indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ – ovo je pretpostavka indukcije. Treba pokazati da tvrdnja tada vrijedi i za $n+1$ – korak indukcije. Zaista, iz pretpostavke indukcije slijedi

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ime smo dokazali korak indukcije, pa time i poetnu tvrdnju. □

Zadatak 37. Dokaite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Rjeenje. Za $n = 1$ tvrdnja oito vrijedi. Pretpostavimo li da tvrdnja vrijedi za neki n, onda prema toj pretpostavci imamo

$$1^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},$$

ime je tvrdnja dokazana. □

Napomena 9. Moemo indukcijom dokazivati i tvrdnje koje ne vrijede nuno za sve prirodne brojeve, nego i tvrdnje koje vrijede za neki prirodan broj i za sve njegove sljedbenike. Preciznije, neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n. Ako vrijedi:

- $P(n_0)$ je istinita, gdje je $n_0 \in \mathbb{N}$,
- Za svaki prirodni broj $k \geq n_0$ vrijedi da ako je $P(k)$ istinita, onda je $P(k+1)$ istinita,

tada je $P(n)$ istinita za sve $n \in \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$.

Zadatak 38. Dokaite da za sve $n \in \mathbb{N}$ takve da je $n \geq 3$ vrijedi $3^n > 2^n + 3n$.

Rjeenje. Tvrdnja vrijedi za $n = 3$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n. Treba dokazati $3^{n+1} > 2^{n+1} + 3(n+1)$. Iz injenice da je $6k > 3$ za sve $k \in \mathbb{N}$, imamo

$$3^{n+1} > 3 \cdot (2^n + 3n) = 3 \cdot 2^n + 9n = 3 \cdot 2^n + 3n + 6n > 2 \cdot 2^n + 3n + 3 = 2^{n+1} + 3(n+1),$$

to smo i tvrdili. □

Zadatak 39. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Odredite sumu

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Rjeenje. Oznaimo

$$S(n) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Vrijedi $S(1) = \frac{1}{2}$, $S(2) = \frac{2}{3}$, $S(3) = \frac{3}{4}$ itd. Odavde je razumno pretpostaviti da vrijedi

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Zaista, dokaimo indukcijom da ovo vrijedi. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n. Tada

$$\begin{aligned} S(n+1) &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

□

Zadatak 40. Dokaite da je

$$1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots + 2024\cdot 2^{2023} = 2023\cdot 2^{2024} + 1.$$

Rjeenje. Dokazat emo openitiju tvrdnju, i to da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \cdots + (n+1)\cdot 2^n = n\cdot 2^{n+1} + 1.$$

Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi, pa pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n. Tada po pretpostavci indukcije imamo

$$\begin{aligned} &1 + 2\cdot 2 + \cdots + (n+1)\cdot 2^n + (n+2)\cdot 2^{n+1} = n\cdot 2^{n+1} + 1 + (n+2)\cdot 2^{n+1} \\ &= (2n+2)\cdot 2^{n+1} + 1 = (n+1)\cdot 2^{n+2} + 1. \end{aligned}$$

□

Zadatak 41. Dokaite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $7 \mid 13^{2n} - 1$.

Rjeenje. Dokaz provodimo indukcijom. Za $n = 1$ imamo tvrdnju $7 \mid 168$, to je istinito, jer je $168 \div 7 = 24$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n, tj. da postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $13^{2n} - 1 = 7k$. Tada vrijedi

$$13^{2(n+1)} - 1 = 169 \cdot 13^{2n} - 1 = 168 \cdot 13^{2n} + 13^{2n} - 1 = 7 \cdot (24 \cdot 13^{2n}) + 7k = 7(24 \cdot 13^{2n} + k),$$

to je i trebalo pokazati. □

Zadatak 42. Dokaite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $33 \mid 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$.

Rjeenje. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, tj. neka je $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n = 33k$ za neki $k \in \mathbb{Z}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} 6^{2n+2} + 3^{n+3} + 3^{n+1} &= 36 \cdot 6^{2n} + 3 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 3^n \\ &= 3 \cdot 6^{2n} + 3 \cdot 3^{n+2} + 3 \cdot 3^n + 33 \cdot 6^{2n} = 33 \cdot 3k + 33 \cdot 6^{2n} = 33(3k + 6^{2n}). \end{aligned}$$ □

Zadatak 43. Dokaite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $84 \mid 4^{2n} - 3^{2n} - 7$.

Rjeenje. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $4^{2n} - 3^{2n} - 7 = 84k$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} 4^{2n+2} - 3^{2n+2} - 7 &= 16 \cdot 4^{2n} - 9 \cdot 3^{2n} - 7 = 16 \cdot 4^{2n} - 16 \cdot 3^{2n} - 112 + 105 + 7 \cdot 3^{2n} = \\ &= 84 \cdot 16k + 105 + 7 \cdot 3^{2n} = 84 \cdot 16k + 7(15 + 3^{2n}) \end{aligned}$$

Kako je $84 \div 7 = 12$, preostaje pokazati da vrijedi $12 \mid 15 + 3^{2n}$, to se lako pokazuje indukcijom. □

Zadatak 44 (upanijsko natjecanje, 4. razred, A varijanta, 2015.)**.** Neka je $a = \sqrt[2024]{2024}$ i neka je (a_n) niz takav da je $a_1 = a$ i $a_{n+1} = a^{a_n}$ za $n \geq 1$. Postoji li $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \geq 2024$?

Rjeenje. Tvrdimo da takav prirodan broj n ne postoji. Zaista, dokaimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n < 2024$. Za $n = 1$ tvrdnja oito vrijedi. Uzmemo li da tvrdnja vrijedi za neki n, onda je

$$a_{n+1} = a^{a_n} = 2024^{\frac{a_n}{2024}},$$

te kako je $\dfrac{a_n}{2024} < 1$ prema pretpostavci, te vrijedi $x^k < x^1$ za sve $k < 1$ i $x > 1$, oito je $2024^{\frac{a_n}{2024}} < 2024$, pa tvrdnja vrijedi. □

Zadatak 45 (upanijsko natjecanje, 3. razred, A varijanta, 2013.)**.** Dokaite da je $\cos\dfrac{\pi}{2\cdot 3^n}$ iracionalan za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Za $n = 1$ vrijedi $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n. Ideja je "povezati" izraze $\cos\dfrac{\pi}{2\cdot 3^{n+1}}$ i $\cos\dfrac{\pi}{2\cdot 3^n}$ pomou injenice da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x. \tag{2.1}$$

Zaista, (2.1) vrijedi jer za sve $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos(x + 2x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x \\ &= \cos x\big(\cos^2 x - \sin^2 x\big) - 2\sin^2 x \cos x = \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x = 4\cos^2 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Direktno iz (2.1) slijedi

$$\cos\frac{\pi}{2\cdot 3^n} = \cos\left(3\cdot\frac{\pi}{2\cdot 3^{n+1}}\right) = 4\cos^3\frac{\pi}{2\cdot 3^{n+1}} - 3\cos\frac{\pi}{2\cdot 3^{n+1}}. \tag{2.2}$$

Kad bi $\cos\dfrac{\pi}{2\cdot 3^{n+1}}$ bio racionalan, onda iz injenice da je umnoak ili zbroj racionalnih brojeva racionalan broj slijedi da je desna strana jednakosti (2.2) racionalan broj, tj. $\cos\dfrac{\pi}{2\cdot 3^n}$ je racionalan broj, to je u kontradikciji s pretpostavkom indukcije. $\square$

2.2 Princip jake indukcije

U nekim situacijama je zgodno primijeniti sljedeu, naizgled jau verziju principa matematike indukcije, koja je ekvivalentna "obinom" principu matematike indukcije, to pokazujemo na kraju ovog poglavlja.

Napomena 10 (Princip jake indukcije). Neka je $P(n)$ neka tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n. Ako vrijedi

- P(1) je istinita (baza indukcije),
- Za svaki prirodni broj k vrijedi da ako su tvrdnje $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ istinite (pretpostavka indukcije), onda je i $P(k+1)$ istinita (korak indukcije),

tada je $P(n)$ istinita za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Nadalje, analogoni napomene 9 i dogovora iz napomene 8 vrijede i za princip jake indukcije.

Zadatak 46. Dokaite da se svaki prirodan broj $n > 1$ moe prikazati kao produkt jednog ili vie prostih brojeva. (*Napomena.* Ovo je specijalan sluaj osnovnog teorema aritmetike koji se obino koristi kao meukorak u dokazivanju samog teorema.)

Rjeenje. Tvrdnju dokazujemo jakom indukcijom. Za $n = 2$ tvrdnja vrijedi, jer je 2 prost, dakle umnoak jednog prostog broja. Uzmimo da sada tvrdnja vrijedi za sve brojeve $1, \ldots, n$. Tvrdimo da se tada i $n + 1$ moe prikazati kao produkt prostih brojeva. Zaista, ako je $n + 1$ prost, tvrdnja je dokazana, a ako nije, onda postoje cijeli brojevi $n_1, n_2 \in \{2, \ldots, n\}$ takvi da je

$$n + 1 = n_1 n_2.$$

No prema pretpostavci indukcije vrijedi da se n_1 i n_2 mogu zapisati kao umnoak prostih brojeva, uzmimo npr.

$$n_1 = p_1 \cdot ... \cdot p_k,\ n_2 = q_1 \cdot ... \cdot q_l,$$

gdje su p_i, q_j prosti brojevi, $i = 1, ..., k$, $j = 1, \ldots, l$. Tada je

$$n + 1 = p_1 \cdot ... \cdot p_k \cdot q_1 \cdot ... \cdot q_l,$$

to smo i tvrdili. $\square$

Zadatak 47 (kolsko natjecanje, 4. razred, A varijanta, 2024.)**.** Neka je (a_n) niz definiran s $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ i

$$a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2} \quad \text{za } n \geq 3.$$

Dokaite da vrijedi $a_{2024} \geq \sqrt{2024!}$.

Rjeenje. Dokazat emo openitiju tvrdnju – tvrdimo da vrijedi $a_n \geq \sqrt{n!}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Lako se vidi da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$. Tvrdnju za $n \geq 3$ dokazujemo jakom indukcijom. Za $n = 3$ tvrdnja vrijedi, jer je $a_3 = 2 + (3 - 1) \cdot 1 = 4$ i $4 \geq \sqrt{3!}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve $3, \ldots, n$. Treba dokazati da je $a_{n+1} \geq \sqrt{(n+1)!}$. Po pretpostavci indukcije imamo

$$\begin{aligned} a_{n+1} = a_n + n a_{n-1} &\geq \sqrt{n!} + n\sqrt{(n-1)!} = \sqrt{n!} + \sqrt{n} \cdot \sqrt{n}\sqrt{(n-1)!} \\ &= \sqrt{n!} + \sqrt{n}\sqrt{n!} = \sqrt{n!}(1 + \sqrt{n}). \end{aligned}$$

Uoimo da je dovoljno pokazati da je

$$1 + \sqrt{n} \geq \sqrt{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zaista, vrijedi $1 + \sqrt{n} \geq \sqrt{n+1}$ ako i samo ako je $(1 + \sqrt{n})^2 \geq n + 1$, odnosno $1 + 2\sqrt{n} + n \geq$

$n+1$, to oito vrijedi zbog $\sqrt{n} \geq 0$. Dakle, imamo

$$\sqrt{n!}(1+\sqrt{n}) \geq \sqrt{n!}\sqrt{n+1} = \sqrt{(n+1)!},$$

dakle $a_{n+1} \geq \sqrt{(n+1)!}$, to smo i tvrdili. □

2.3 Princip dobrog ureaja

Princip dobrog ureaja je sljedee, na prvi pogled oigledno svojstvo skupa prirodnih brojeva, koje kae sljedee: *Svaki neprazan podskup skupa* $\mathbb{N}$ *ima minimum* (v. definiciju 10). Ova injenica je zanimljiva jer je esto vrlo koristan alat u nekim dokazima, a ovdje ga navodimo, izmeu ostalog, jer je zapravo ekvivalentan indukciji i jakoj indukciji.

Zadatak 48. Ne postoji cijeli broj n koji ima svojstvo $0 < n < 1$.

Rjeenje. Pretpostavimo suprotno, da postoji takav cijeli broj, nazovimo ga w. Oito je tada $w \in \mathbb{N}$, jer je $w > 0$. Dakle, trebamo pokazati da ne postoje prirodni brojevi manji od 1. Promotrimo skup svih prirodnih brojeva u intervalu $\langle 0, 1\rangle$. To je, prema pretpostavci, neprazan podskup od $\mathbb{N}$, pa on ima minimum, neka je to n. Kako je umnoak dva cijela broja opet cijeli broj, slijedi i da je n^2 cijeli broj. No kako je $n > 0$ i $n < 1$, vrijedi $n^2 < n$, to daje kontradikciju s minimalnou od n. □

Zadatak 49. Dokaite da za svaki $a \in \mathbb{Z}$ vrijedi da svaki neprazan podskup skupa $\mathbb{N} \cup \{a\}$ ima minimum.

Rjeenje. Ako je $a > 0$, nemamo to dokazivati. Uzmimo zato da je $a \leq 0$. Neka je S proizvoljan neprazan podskup skupa $\mathbb{N} \cup \{a\}$. Ako on ne sadri a, onda je $S \subseteq \mathbb{N}$ i on ima minimum, a ako on sadri a, onda je oito a minimum. Zaista, pretpostavimo li da postoji element n_0 manji od a, onda je n_0 razliit od a, pa je $n_0 \in \mathbb{N}$, to je nemogue jer je $a \leq 0$. □

Zadatak 50 (Teorem o dijeljenju s ostatkom)**.** Neka je $b \in \mathbb{Z}$ i $a \in \mathbb{N}$. Dokaite da tada postoje jedinstveni cijeli brojevi q, r takvi da je $b = qa + r$, gdje je $0 \leq r < a$. Kaemo da je u tom zapisu q **kvocijent**, a r **ostatak** pri dijeljenju a sa b.

Rjeenje. Egzistencija. Ideja dokaza je interpretirati dijeljenje u cijelim brojevima kao uzastopno oduzimanje broja a od broja b (ili dodavanje ako je b negativan), recimo da smo to napravili q puta, sve dok ne doemo do broja r veeg od 0 manjeg od broja a. U toj interpretaciji pokazat e se da je q zaista kvocijent, a r zaista ostatak pri dijeljenju broja b sa a. Tako bi npr. dijeljenjem broja 25 sa 6 dobili ostatak $25 - 6 - 6 - 6 - 6 = 1$, a kako smo oduzeli 6 od 25 tono 4 puta, kvocijent je 4. U tu svrhu promotrimo skup

$$S = \{x : x = b - am,\ m \in \mathbb{Z},\ x \geq 0\} \subseteq \mathbb{N}_0$$

Skup S je neprazan, jer je

$$b - a(-|b|) = b + a|b| \geq 0.$$

Prema zadatku 49, svaki neprazan podskup skupa $\mathbb{N}_0$ ima minimum, pa onda i S ima minimum, oznaimo ga s r. Oito je $r \geq 0$, te kako je on element iz S, postoji $q \in \mathbb{Z}$ takav da je $r = b - aq$, odnosno $b = aq + r$.

Preostaje dokazati da je $r < a$. Pretpostavimo li da je $r \geq a$, onda imamo $r - a \geq 0$ i

$$r - a = b - a(q + 1) \in S.$$

Kako je $r - a < r$, dobili smo kontradikciju s minimalnosti od r.

Jedinstvenost. Pretpostavimo da postoji jo jedan par brojeva $q_1, r_1 \in \mathbb{Z}$ takvih da je $b = aq_1 + r_1$. Bez smanjenja openitosti uzmimo $r_1 < r$. Tada je $0 < r - r_1 < a$. S druge strane, za $r = b - qa$ i $r_1 = b - q_1 a$ slijedi $b - qa > b - q_1 a$, odakle slijedi $q < q_1$, odnosno $q_1 - q > 0$. Sada oduzimanjem jednakosti $b = aq + r$ i $b = aq_1 + r_1$ dobivamo

$$r - r_1 = (q_1 - q)a \geq a,$$

kontradikcija s $r - r_1 < a$. □

U nastavku, kao to je najavljeno, dokazujemo da su principi dobrog ureaja, matematike indukcije i jake indukcije meusobno ekvivalentni. To emo dokazati tako da dokaemo sljedee implikacije:

- Princip matematike indukcije $\Rightarrow$ Princip dobrog ureaja,
- Princip dobrog ureaja $\Rightarrow$ Princip jake indukcije,
- Princip jake indukcije $\Rightarrow$ Princip matematike indukcije.

Uvjerite se da, ukoliko dokaemo ove tri implikacije, iz njih slijedi ekvivalencija sve tri tvrdnje.

Zadatak 51. Princip matematike indukcije povlai princip dobrog ureaja.

Rjeenje. Dokaz provodimo kontradikcijom – Pretpostavimo da postoji neprazan $S \subseteq \mathbb{N}$ koji nema minimum. Tvrdimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \notin S$.

Pokuajmo tvrdnju dokazati indukcijom. Zaista, uoimo da vrijedi $1 \notin S$. Zaista, pretpostavimo li da je $1 \in S$, onda slijedi da u skupu S postoji prirodan broj strogo manji od 1, to je nemogue. Pretpostavimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \notin S$. Treba dokazati da tada $n+1 \notin S$. Uoimo da bi nam bilo zgodno kad bi za pretpostavku imali da

$$1, \ldots, n \notin S,$$

jer uz tu pretpostavku, pretpostavimo li da je $n+1 \in S$, iz injenice da je $n+1$ minimum skupa $N \setminus \{1, \ldots, n\} \supseteq S$ slijedi da je $n+1$ nuno minimum. Ovaj argument ne moemo primijeniti samo uz pretpostavku $n \notin S$, jer nemamo pretpostavku da brojevi $1, \ldots, n-1$ nisu u skupu S (Na ovom mjestu ne moemo koristiti princip jake indukcije dok ga ne dokaemo!). Pokuajmo zato modificirati na argument.

Umjesto da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $n \notin S$, pokazat emo slinu tvrdnju: Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: Niti jedan element iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ nije u skupu S. Tvrdnju moemo zapisati u sljedeem obliku: Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S \cap \{1, \ldots, n\} = \emptyset$. Zaista, trebamo dokazati da je

$$\big((\forall x \in \mathbb{N}) \;\; x \in \{1, \ldots, n\} \Rightarrow x \notin S\big) \Leftrightarrow \big((\forall x \in \mathbb{N}) \;\; S \cap \{1, \ldots, n\} = \emptyset\big)$$

istinita tvrdnja. No tvrdnja $A \Leftrightarrow B$ je istinita ako i samo ako je istinita tvrdnja $\neg B \Leftrightarrow \neg A$, a to je u ovom sluaju tvrdnja

$$\big((\exists x \in \mathbb{N}) \;\; x \in S, x \in \{1, \ldots, n\}\big) \Leftrightarrow \big((\exists x \in \mathbb{N}) \;\; x \in \{1, \ldots, n\}, x \in S\big)$$

koja je oito istinita.

Tvrdnja za $n = 1$ je ve dokazana u prethodnom sluaju. Pretpostavimo sada da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $S \cap \{1, \ldots, n\} = \emptyset$. Tvrdimo da tada za $n+1$ vrijedi $S \cap \{1, \ldots, n+1\} = \emptyset$. Zaista, pretpostavimo da postoji $a \in \mathbb{N}$ takav da je $a \in S$ i $a \in \{1, \ldots, n+1\}$. Tada je sigurno $a = n+1$, jer kad bi bilo $a = 1, \ldots, n$ to bi bilo u kontradikciji s pretpostavkom indukcije. Meutim, ovo povlai da je $n+1$ minimum u S, to je nemogue, pa je korak indukcije dokazan.

Konano, S je neprazan, pa postoji prirodan broj $q \in S$. No tada je $S \cap \{1, 2 \ldots, q\} = \emptyset$, pa zakljuujemo da vrijedi $q \notin S$, kontradikcija! $\square$

Zadatak 52. Princip dobrog ureaja povlai princip jake indukcije.

Rjeenje. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ skup takav da je

- $1 \in S$
- Za svaki $k \in \mathbb{N}$, iz $1, \ldots, k \in S$ slijedi $k+1 \in S$.

Pretpostavimo da je $S \neq \mathbb{N}$, te oznaimo sa $S' \subseteq \mathbb{N}$ skup svih brojeva koji nisu u S. Prema pretpostavci je S' neprazan, pa on ima minimum, neka je to k_0. Kako je $1 \in S$, oito je $1 \notin S'$. Nadalje, kako je k_0 najmanji i $k_0 - 1 \in \mathbb{N}$, slijedi da za sve $n = 1, \ldots, k_0 - 1$ vrijedi $n \in S$. No odavde slijedi $k_0 \in S$, to je nemogue jer $k_0 \in S'$ povlai $k_0 \notin S$. □

Zadatak 53. Princip jake indukcije povlai princip matematike indukcije.

Rjeenje. Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ skup takav da je

- $1 \in S$
- Za svaki $k \in \mathbb{N}$, iz $k \in S$ slijedi $k + 1 \in S$.

Uoimo da iz tvrdnje "Za svaki $k \in \mathbb{N}$, iz $k \in S$ slijedi $k + 1 \in S$." slijedi tvrdnja "Za svaki $k \in \mathbb{N}$, iz $1, \ldots, k \in S$ slijedi $k + 1 \in S$.", no ovo po principu jake indukcije povlai $S = \mathbb{N}$, to upravo i tvrdi princip matematike indukcije. □

Zadatci za vjebu

Princip matematike indukcije

Zadatak 54. Dokaite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijede sljedee tvrdnje.

a) $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$,

b) $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+...+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

Zadatak 55. Dokaite da vrijede sljedee tvrdnje.

a) $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1, \quad \forall n>2$

b) (upanijsko natjecanje, 4. razred, A varijanta, 2018.) Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1.$$

Zadatak 56. Dokaite:

a) Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $13 \mid 2^{12n+4}-3^{6n+1}$.

b) Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $8 \mid 3^n-2n^2-1$.

c) Odredite najmanji prirodan broj $a>1$ takav da vrijedi

$$a \mid 2^{6n-1}+5\cdot 9^n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 57. Dokaite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $7 \mid 2^{4n+1}-3\cdot 7^n+5^{n+1}\cdot 6^n$. (**Uputa:** Ovaj zadatak moete si pojednostaviti na sljedei nain – dokaite da vrijedi $7 \mid 2^{4n+1}-3\cdot 7^n+5^{n+1}\cdot 6^n$ ako i samo ako vrijedi $7 \mid 2^{4n+1}+5^{n+1}\cdot 6^n$).

Zadatak 58. Dokaite da za pozitivne brojeve a i b i za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n+b^n}{2}.$$

Zadatak 59. Dokaite za za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m+k}{k}=\binom{n+m+1}{n}.$$

Zadatak 60. Izraunajte
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Zadatak 61. Dokaite da se svaki iznos od n kuna, gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 4$, moe platiti kovanicama od 2 i 5 kuna.

Zadatak 62. U ravnini je zadano n pravaca tako da se nikoja tri ne sijeku u jednoj toki i nikoja dva nisu meusobno paralelna.

a) Na koliko dijelova je ravnina podijeljena s tim pravcima?

b) Dokaite da se svi dijelovi mogu obojiti s dvije boje tako da susjedna podruja budu obojena razliitim bojama (Sva podruja su jednobojna).

Napomena 11. Neka je $(G, \circ)$ polugrupa i $a_i \in G$, gdje je $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Tada produkt od $n \geq 1$ elemenata definiramo induktivno

$$\prod_{k=1}^{1} a_k = a_1, \quad \prod_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right) \circ a_{n+1}.$$

Lako se vidi da je svaki skup polugrupa u odnosu na uniju, odnosno presjek. Takoer uvodimo oznaku
$$a_1 \circ a_2 \circ \cdots \circ a_n = \prod_{k=1}^{n} a_k.$$

U svezi s time rijeite sljedee zadatke.

Zadatak 63. Neka je U univerzalni skup i $A_i \in U$, gdje je $i \in \mathbb{N}$. Dokaite da vrijedi

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} A_k^c.$$

Zadatak 64. Neka je $(G, \circ)$ polugrupa. Dokaite da tada za bilo kojih $m + n$ elemenata a_1, a_2, …, a_{m+n-1}, $a_{m+n} \in G$ vrijedi

$$a_1 \circ \cdots \circ a_{m+n} = (a_1 \circ \cdots \circ a_m) \circ (a_{m+1} \circ \cdots \circ a_{m+n})$$

Uvjerite se da se iz prethodnog zadatka lako moe dokazati *generalizirana asocijativnost*, tj. ako su n, m, ..., p prirodni brojevi, onda vrijedi

$$(a_1 \circ \cdots \circ a_n) \circ (b_1 \circ \cdots \circ b_m) \circ \cdots \circ (d_1 \circ \cdots \circ d_p) = a_1 \circ \cdots \circ a_n \circ b_1 \circ \cdots \circ b_m \circ \cdots \circ d_1 \circ \cdots \circ d_p,$$

gdje su a_1, a_2, ..., $d_p \in G$. Ovime smo zapravo dokazali da kad imamo produkt od konano mnogo elemenata, onda moemo po volji dodavati i brisati zagrade gdje god to ima smisla.

Zadatak 65. $(*)$ Dokaite da se ploa dimenzija $2^n \times 2^n$ s jednim izbaenim kvadratiem (bilo od kuda) dimenzija 1×1, moe pokriti ploicama dimenzija 4×4 s jednim izbaenim kvadratiem dimenzija 1×1.

Zadatak 66 (upanijsko natjecanje, 4. razred, A varijanta, 2017.)**.** $(*)$ Dan je niz pozitivnih realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots$ takvih da vrijedi

$$a_1 = 1 - a_0, \; a_{n+1} = 1 - a_n(1 - a_n) \text{ za } n \geq 1.$$

Dokaite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_0 a_1 \ldots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

Zadatak 67 (upanijsko natjecanje, 4. razred, A varijanta, 2013.)**.** $(*)$ Dokaite da je broj iji se dekadski zapis sastoji od 2187 znamenki 1 djeljiv s 2187.

Zadatak 68 (upanijsko natjecanje, 4. razred, A varijanta, 2016.)**.** $(**)$ Dokaite da za svaki prirodni broj $n \geq 3$ postoji n razliitih prirodnih brojeva iji je zbroj recipronih vrijednosti jednak 1.

Princip dobrog ureaja

Zadatak 69. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ dobro ureen skup i $S' \subseteq S$. Dokaite ili opovrgnite: S' je dobro ureen skup.

Zadatak 70. Dokaite da svaki podskup skupa svih negativnih cijelih brojeva ima maksimum (v. definiciju 10). **DODATI JO**

Poglavlje 3

Skup $\mathbb{R}$. Uvod u nejednakosti. Supremum i infimum. Kompleksni brojevi

Napomena 12. Svojstva ureaja $\leq$ i $<$ na $\mathbb{R}$:

- Trihotomija: Za sve x, $y \in \mathbb{R}$ vrijedi tono jedna od sljedeih tvrdnji

$$(x < y),\ (x = y),\ (x > y),$$

- Linearnost: Za sve x, $y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x \leq y) \vee (y \leq x),$$

- Antisimetrinost: Za sve x, $y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x \leq y \ \wedge \ y \leq x \Rightarrow x = y,$$

- Tranzitivnost: Za sve x, y, $z \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x \leq y \ \wedge \ y \leq z \Rightarrow x \leq z, \quad x < y \ \wedge \ y < z \Rightarrow x < z,$$

- Kompatibilnost s $+$: Za sve x, y, $z \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x \leq y \Leftrightarrow x + z \leq y + z, \quad x < y \Leftrightarrow x + z < y + z,$$

- Kompatibilnost s $\cdot$: Za sve x, y, $z \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x \leq y \wedge z > 0 \Leftrightarrow xz \leq yz, \quad x < y \wedge z > 0 \Leftrightarrow xz < yz.$$

Svojstva iz napomene 12 imaju teorijsku vanost (Zapravo, ova svojstva dio su aksioma realnih brojeva vezanih uz ureaj), ali ovdje ih navodimo da bi se lake vidjelo kako primjenjujemo ova vrlo jednostavna pravila u rjeavanju zadataka.

3.1 Uvod u nejednakosti

U ovoj toki pokazujemo kako dokazivati razne nejednakosti, to e biti korisno u narednim zadatcima, ali i na drugim mjestima u analizi.

Zadatak 71. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Dokaite da vrijedi

a) $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$,

b) Ako je $x - 5y^2 > 0$, onda je $x + 5y^2 > 0$,

c) Ako su $x, y \geq 0$, onda vrijedi $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Rjeenje. a) Znamo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x^2 \geq 0$, to povlai $1 + x^2 \geq 1 > 0$, to povlai $1 + x^2 > 0$. Odavde slijedi da vrijedi $\dfrac{1}{1+x^2} > 0$ ako i samo ako vrijedi $1 > 0$, dakle tvrdnja je dokazana.

b) Iz $x - 5y^2 > 0$ slijedi $x - 5y^2 + 10y^2 > 10y^2$. Kako vrijedi $y^2 \geq 0$, pa i $10y^2 \geq 0$, pa smo time dokazali da je $x - 5y^2 + 10y^2 \geq 0$, odnosno $x + 5y^2 > 0$.

c) Uoimo da vrijedi

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{xy} + \sqrt{y}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0,$$

ime je tvrdnja dokazana. $\square$

Napomena 13. Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Ako je $a \leq c$ i $b \leq d$, onda je $a + b \leq c + d$, te ako su pritom i $a,\ c \geq 0$, onda je $ab \leq cd$. Vrijedi i varijanta za $<$, tj. $a < c$ i $b < d$ povlai $a + b < c + d$, a ako vrijedi i $a,\ c > 0$ onda vrijedi i $ac < bd$.

Zadatak 72. Dokaite:

a) Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\dfrac{1}{(1+x^2)(2+x^2)} \leq \dfrac{1}{2}$.

b) Za sve realne x, y takve da je $x > 0$ i $y > 1$ vrijedi $x^2 - 2x\sqrt{y} + y^2 > 0$.

Rjeenje. a) Neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tada je $x^2 + 1 \geq 1$ i $x^2 + 2 \geq 2$ slijedi

$$\frac{1}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Kako vrijedi $\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{2+x^2} > 0$, te su oito 1 i $\frac{1}{2}$ pozitivni, koritenjem napomene 13 dobivamo tvrdnju.

b) Neka su $x > 0$ i $y > 1$ proizvoljni. Tvrdimo da vrijedi $\sqrt{y} < y$. Zaista, zbog $y \geq 0$ to vrijedi ako i samo ako vrijedi $y < y^2$ (a da bi to tvrdili treba nam da za sve a, $b \geq 0$ vrijedi da $a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$, to se lako dokazuje kontrapozicijom), tj. ako i samo ako vrijedi $y > 1$, to je istinito prema pretpostavci. Sada iz $x > 0$ slijedi $2xy > 2x\sqrt{y}$, odakle slijedi i $-2xy < -2x\sqrt{y}$, te konano imamo

$$x^2 - 2x\sqrt{y} + y^2 > x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0. \qquad \square$$

Zadatak 73. Dokaite da za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$ vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.

Rjeenje. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Vrijedi

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + bc + ca \\ 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 &\geq 2ab + 2bc + 2ca \\ a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2ac + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 &\geq 0 \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Posljednja tvrdnja je oito istinita za realne brojeve a, b, c, pa je tvrdnja zadatka dokazana. $\square$

Zadatak 74. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a + b \geq 1$. Dokaite da je $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

Rjeenje. Uzmimo proizvoljne $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a + b \geq 1$. Kvadriranjem jednakosti dobivamo $a^2 + 2ab + b^2 \geq 1$, no kako je $(a-b)^2 \geq 0$ imamo i $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$. Zbrajanjem te dvije nejednakosti dobivamo $2a^2 + 2b^2 \geq 1$, odnosno

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Sad kvadriranjem dobivamo

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq \frac{1}{4}.$$

Sada iz $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 \geq 0$ zbrajanjem nejednakosti dobivamo

$$2a^4 + 2b^4 \geq \frac{1}{4},$$

odnosno $a^4 + b^4 \geq \dfrac{1}{8}$, to smo i tvrdili. $\square$

Zadatak 75 (upanijsko natjecanje, 4. razred, A varijanta, 2021.)**.** Neka su $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ realni brojevi takvi da je $xy + zy + xz = 1$, te neka je

$$S = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2}.$$

Dokaite da vrijedi $S < 1$ ako i samo ako su brojevi x, y, z istog predznaka.

Rjeenje. Za poetak emo pojednostaviti izraz S kako bi bilo manje "raspisivanja". Vrijedi

$$S = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} + \frac{y^2+1-1}{1+y^2} + \frac{z^2+1-1}{1+z^2} = 3 - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+z^2},$$

pa oito vrijedi $S < 1$ ako i samo ako vrijedi

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} = \frac{3 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} > 2,$$

pa, kako je nazivnik pozitivan, mnoenjem s nazivnikom dobivamo da je prethodna nejednakost ekvivalentna s

$$3+2x^2+2y^2+2z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2 > 2+2x^2+2y^2+2z^2+2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2+2x^2y^2z^2,$$

to je ekvivalentno nejednakosti

$$x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 + 2x^2y^2z^2 < 1. \tag{3.1}$$

S druge strane, iz poetnog uvjeta $xy + zy + xz = 1$ kvadriranjem dobivamo uvjet

$$x^2y^2 + z^2y^2 + x^2z^2 + 2xy^2z + 2x^2yz + 2xyz^2 = 1 \tag{3.2}$$

Sada uvrtavanjem (3.2) u (3.1) umjesto 1 i ponitavanjem dobivamo

$$\begin{gathered} x^2yz + xy^2z + xyz^2 - x^2y^2z^2 > 0 \Leftrightarrow \\ xyz(x + y + z - xyz) > 0. \end{gathered}$$

Sada iz poetnog uvjeta $xy + zy + xz = 1$ imamo

$$\begin{aligned} x + y + z - xyz &= x(1 - yz) + y + z = x(xy + xz) + y + z \\ &= x^2(y + z) + y + z = (x^2 + 1)(y + z). \end{aligned}$$

Iz svega zakljuujemo da je tvrdnja $S < 1$ ekvivalentna tvrdnji $xyz(x^2+1)(y+z) > 0$, odnosno tvrdnji

$$xyz(y + z) > 0, \tag{3.3}$$

budui da je $x^2 + 1 > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Sada vidimo da ako su x, y, z svi istog predznaka, (3.3) vrijedi. Zaista, ako su $x, y, z > 0$, onda je $xyz > 0$ i $y + z > 0$, pa (3.3) vrijedi, a ako su $x, y, z < 0$, onda je $xyz < 0$ i $y + z < 0$, pa (3.3) i u ovom sluaju vrijedi. Time je prva implikacija tvrdnje zadatka dokazana.

S druge strane, tvrdimo da ako je $S < 1$, onda su svi brojevi x, y, z istog predznaka. Da bismo to vidjeli, dokaimo kontrapoziciju – Za sve x, y, z iz uvjeta zadatka vrijedi: Ako brojevi x, y, z nisu svi istog predznaka, onda je $S \geq 1$. Moemo bez smanjenja openitosti pretpostaviti da je $x \leq y \leq z$, jer je izraz simetrian u odnosu na te tri varijable, odnosno zamjenom uloga tih varijabli izraz se nee promijeniti. Imamo dva sluaja:

- $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$,
- $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$.

U prvom sluaju imamo $xyz < 0$ i $y + z > 0$, pa je $xyz(y + z) < 0$, pa vrijedi $S \geq 1$. Da bismo pokazali drugi sluaj, primijetimo i da je tvrdnja $S < 1$ ekvivalentna s $xyz(x + y) > 0$ – ovo se dokazuje potpuno analogno kao i uvjet (3.3). Sada je $xyz > 0$ i $x + y < 0$, pa analogno dobivamo da vrijedi $S \geq 1$. □

Napomena 14 (A-G nejednakost). Za sve $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ i $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, aritmetika sredina brojeva $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ vea je ili jednaka geometrijskoj sredini tih brojeva, tj.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Zadatak 76 (H-G nejednakost)**.** Dokaite da je za sve $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ i $a_1, \ldots, a_n > 0$, geometrijska sredina brojeva $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ vea ili jednaka harmonijskoj sredini tih brojeva, tj.

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Rjeenje. Iz A-G nejednakosti imamo

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n},$$

to je ekvivalentno tvrdnji zadatka, budui da za pozitivne brojeve a i b, $a \leq b$ ekvivalentno s $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$. $\square$

Iz prethodne dvije tvrdnje izravno slijedi sljedea tvrdnja.

Korolar 1 (A-H nejednakost)**.** Za sve $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ i $a_1, \dots, a_n > 0$ vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Zadatak 77.

a) Neka su $x, y, z \geq 0$. Dokaite: Vrijedi $(x+y)(y+z)(x+z) \geq 8xyz$.

b) Neka su $x, y, z > 0$ takvi da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Dokaite: Vrijedi $x + y + z \geq 9$.

c) Neka su $a, b, c > 0$. Dokaite: Vrijedi $abc(a+b+c) \leq a^4 + b^4 + c^4$.

d) Neka su $a, b, c > 0$. Dokaite: Vrijedi $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$

e) Neka su $a, b, c, d \geq 0$. Dokaite: Vrijedi $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{a} \geq a + b + c + d$.

Rjeenje. a) Uoite da iz A-G nejednakosti slijedi $\frac{u+v}{2} \geq \sqrt{uv}$ (Ovo smo i dokazali u zadatku 71), odnosno $u + v \geq 2\sqrt{uv}$, za sve $u, v \geq 0$. Odavde slijedi

$$(x+y)(y+z)(x+z) \geq 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{xz} = 8xyz.$$

b) Primjenom A-H nejednakosti dobivamo da za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq$

$\dfrac{3}{x+y+z}$, pa koritenjem pretpostavke $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ dobivamo $\dfrac{1}{3}\geq\dfrac{3}{x+y+z}$, odnosno $x+y+z\geq 9$, to smo i tvrdili.

c) Uoimo da na prvi pogled ne moemo primijeniti neke od prethodnih nejednakosti da bi dokazali tvrdnju. Meutim, uoimo da je lijeva strana nejednakosti jednaka $a^2bc+ab^2c+abc^2$. Pokuajmo primijeniti A-G nejednakost na svaki od pribrojnika. Imamo

$$a^2bc=\sqrt[4]{a^4a^4b^4c^4}\leq\frac{2a^4+b^4+c^4}{4},\ ab^2c\leq\frac{a^4+2b^4+c^4}{4},\ abc^2\leq\frac{a^4+b^4+2c^4}{4},$$

pa zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo $a^2bc+ab^2c+abc^2=abc(a+b+c)\leq a^4+b^4+c^4$, to smo i tvrdili.

d) Pokuamo li direktno primijeniti A-G nejednakost, dobit emo

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}}=3,$$

no budui da vrijedi i $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}\cdot\dfrac{c}{a}}=3$, vidimo da ovim pristupom ne dobivamo nikakav nama koristan zakljuak. Pokuajmo zato slinim razmiljanjem kao u prethodnom zadatku doi do rjeenja, i to tako da na svaki lan jedne strane nejednakosti primijenimo A-G nejednakost. Uoimo da je $\dfrac{a}{c}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{c}=\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}\cdot\dfrac{b^2}{c^2}}$ i analogno $\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{b^2}{c^2}\cdot\dfrac{c^2}{a^2}}$, $\dfrac{c}{b}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}\cdot\dfrac{a^2}{b^2}}$. Vrijedi

$$\frac{a}{c}=\sqrt{\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{c^2}}\leq\frac{\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}}{2},\ \frac{b}{a}=\sqrt{\frac{b^2}{c^2}\cdot\frac{c^2}{a^2}}\leq\frac{\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}}{2},\ \sqrt{\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{b^2}}\leq\frac{c}{b}=\frac{\frac{c^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}}{2}.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo tvrdnju.

e) Ponovno emo na svaki lan primijeniti A-G nejednakost, analognom metodom kao u prethodna dva primjera. Uoimo da je $a=\sqrt{\dfrac{a^2}{b}\cdot b}\leq\dfrac{\frac{a^2}{b}+b}{2}$. Uoimo da smo ovo rastavili ovako jer smo htjeli pod korijen "ubaciti" izraz $\dfrac{a^2}{b}$ koji se pojavljuje kao jedan od sumanada na lijevoj strani nejednakosti. Pritom nam b nee smetati, jer kad budemo sumirali, dobit emo $\dfrac{a+b+c+d}{2}$, kojeg emo onda moi "prebaciti" na drugu stranu jednakosti, na kojoj emo imati

$a+b+c+d$. Zaista, imamo

$$b=\sqrt{\frac{b^2}{c}\cdot c}\leq \frac{\frac{b^2}{c}+c}{2},\ c=\sqrt{\frac{c^2}{d}\cdot d}\leq \frac{\frac{c^2}{d}+d}{2},\ d=\sqrt{\frac{d^2}{a}\cdot a}\leq \frac{\frac{d^2}{a}+a}{2}.$$

Sumiranjem svih nejednakosti dobivamo

$$a+b+c+d\leq \frac{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}+a+b+c+d}{2}\Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{2}\leq \frac{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{d}+\frac{d^2}{a}}{2},$$

pa mnoenjem s 2 dobivamo tvrdnju. $\square$

Napomena 15. Uvjerite se da smo e) mogli rijeiti i tako da uzmemo $a=\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}\cdot\frac{a^2}{b}\cdot\frac{b^2}{c}\cdot c}$, analogno rastavimo i b,c,d i primijenimo A-G nejednakost.

Napomena 14 kae i da jednakost vrijedi ako i samo ako su svi brojevi $a_1,\ldots,a_n$ meusobno jednaki. Ponekad i ta informacija moe biti korisna, kao to emo vidjeti u sljedeim zadatcima.
Zadatak 78.

a) Pronaite sve ureene parove (a,b) pozitivnih realnih brojeva za koje je $a^3+b^3+1\leq 3ab$.

b) (upanijsko natjecanje, 4. razred, A varijanta, 2018.)[1] Za sve $n\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>1.$$

Rjeenje. a) Neka su $a,b\in\mathbb{R}$ proizvoljni brojevi takvi da je $a^3+b^3+1\leq 3ab$. Uoimo da iz A-G nejednakosti dobivamo

$$a^3+b^3+1\geq 3\sqrt{a^3\cdot b^3\cdot 1}=3ab.$$

Zato je nuno $a^3+b^3+1=3ab$. Meutim, znamo iz napomene 14 da jednakost vrijedi ako i samo ako je $a=b=1$, pa je jedini ureeni par koji zadovoljava polazni uvjet par $(1,1)$.

b) Primjenom A-H nejednakosti dobivamo

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{3n+1}>\frac{(2n+1)^2}{(n+1)+(n+2)+...+(3n+1)},\tag{3.4}$$

gdje vrijedi stroga nejednakost jer su brojevi $\frac{1}{n+1},\ \ldots,\ \frac{1}{3n+1}$ meusobno razliiti. Nadalje,

[1] Ovaj zadatak je i u prethodnom poglavlju dan za vjebu (zadatak 55).

imamo

$$\begin{aligned}(n+1)+(n+2)+\cdots+(3n+1) &= (n+1)+(n+2)+\cdots+(n+2n)+(n+2n+1)\\ &= n(2n+1)+\frac{(2n+1)(2n+2)}{2} = (2n+1)^2.\end{aligned}$$

Uvrtavanjem u (3.4) dobivamo tvrdnju. □

Zadatak 79 (Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakovskog)**.** Neka su $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ realni brojevi. Dokaite:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{R}$ takav da je $b_i = ka_i$, za sve $i = 1, \ldots, n$.

Rjeenje. Promotrimo izraz $D = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$. Trebamo pokazati da je $D \leq 0$. No uoimo da je D diskriminanta kvadratne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Oito je dovoljno pokazati da je $f(x) \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, jer emo time dobiti da f ima najvie jednu nultoku (Uvjerite se u to!), to povlai da za njezinu diskriminantu D vrijedi $D \leq 0$, to i elimo pokazati. Uoimo da je

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + b_k^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geq 0,$$

to smo i htjeli pokazati. Nadalje, znamo da je $D = 0$ ako i samo ako f ima jedinstvenu nultoku x_0. Tada je

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x_0 + b_k)^2 = 0,$$

to vrijedi ako i samo ako je $a_k x_0 + b_k = 0$ za sve $k = 1, \ldots, n$.[2] No to je ekvivalentno tvrdnji $b_k = (-x_0) a_k$ za sve $k = 1, \ldots, n$, to smo i htjeli dokazati. □

Ova nejednakost, koju esto u kraem obliku zovemo *CSB-nejednakost* ima i svoju teorijsku

[2]Openito, za sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vrijedi $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ ako i samo ako vrijedi $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Dokaite to!

vanost (S generalizacijom upravo dokazane tvrdnje susrest ete se na kolegiju *Linearna algebra 2*), ali je korisna i za dokazivanje raznih nejednakosti.

Zadatak 80.

a) Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dokaite da je

$$a_1^2 + a_2^2 \cdots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

b) Neka su $a_1, a_2, a_3 > 0$ takvi da je $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$. Dokaite da je $2a_1 + 2a_2 + a_3 \leq 3$.

Rjeenje. a) Primjenom CSB-nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} 1 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 &= (a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 1)^2 \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2) \\ &= n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \end{aligned}$$

Odnosno $a_1^2 + a_2^2 \cdots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$, to smo i tvrdili.

b) Koristei CSB-nejednakost dobivamo

$$(2a_1 + 2a_2 + a_3)^2 \leq (2^2 + 2^2 + 1)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 9,$$

pa korjenovanjem obje strane dobivamo traenu tvrdnju. □

Zadatak 81 (Nesbittova nejednakost)**.** Dokaite da za sve $a, b, c > 0$ vrijedi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Rjeenje. Uoimo da ako svakom razlomku na lijevoj strani nejednakosti dodamo 1, u brojniku svakog razlomka emo dobiti izraz $a+b+c$, odakle slijedi da emo moi faktorizirati taj izraz, to je esto korisno ukoliko se CSB-nejednakost pokae korisnom u dokazivanju dane nejednakosti.

Imamo

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}+1+\frac{c}{a+b}+1 &\geq \frac{9}{2} \\
\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b} &\geq \frac{9}{2} \\
(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right) &\geq \frac{9}{2} \\
(2a+2b+2c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right) &\geq 9.
\end{aligned}$$

Uoimo da vrijedi $2a+2b+2c=(a+b)+(a+c)+(b+c)$, pa je nejednakost ekvivalentna s

$$\big((b+c)+(a+c)+(a+b)\big)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 9,$$

to slijedi direktno iz CSB-nejednakosti. Zaista,

$$\begin{aligned}
&\big((b+c)+(a+c)+(a+b)\big)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right) \\
\geq &\left(\sqrt{b+c}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{a+c}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+c}}+\sqrt{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a+b}}\right)^2=9.
\end{aligned}$$

□

3.2 Minimum i maksimum. Arhimedov aksiom

Sigurno ste se prije u obrazovanju susreli s pojmovima otvorenih, zatvorenih, poluotvorenih i poluzatvorenih intervala, za koje sad dajemo preciznu definiciju.

Definicija 9. Neka su zadani $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. Definiramo sljedee skupove:

- $\langle a,b\rangle := \{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}$,
- $[a,b] := \{x\in\mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$,
- $[a,b\rangle := \{x\in\mathbb{R} : a\leq x<b\}$,
- $\langle a,b] := \{x\in\mathbb{R} : a<x\leq b\}$,
- $\langle -\infty,b] := \{x\in\mathbb{R} : x\leq b\}$,
- $\langle -\infty,b\rangle := \{x\in\mathbb{R} : x<b\}$,
- $[a,\infty\rangle := \{x\in\mathbb{R} : a\leq x\}$,
- $\langle a,\infty\rangle := \{x\in\mathbb{R} : a<x\}$.

Skupovi $\langle a,b\rangle$, $\langle a,\infty\rangle$, $\langle -\infty,b\rangle$ su **otvoreni intervali**, skup $[a,b]$ je **zatvoreni interval**, a skupovi $[a,b\rangle$, $\langle a,b]$, $\langle -\infty,b]$, $[a,\infty\rangle$ su **poluotvoreni intervali**.

Zadatak 82. Dokaite da je $[0,1\rangle\subseteq\langle -1,2\rangle$.

Rjeenje. Neka je $x\in[0,1\rangle$ proizvoljan. Po definiciji vrijedi $0\leq x<1$. No tada vrijedi i $-1<x<2$, odnosno $x\in\langle -1,2\rangle$. □

Definicija 10. Kaemo da je $a \in \mathbb{R}$ **gornja mea** skupa $S \subseteq \mathbb{R}$ ako za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq a$, odnosno **donja mea** skupa S ako za svaki $x \in S$ vrijedi $a \leq x$. Ako je pritom $a \in S$, onda je a **maksimum** (ako je on gornja mea), odnosno **minimum** (ako je on donja mea) skupa S. Maksimum skupa S oznaavamo sa $\max S$, a minimum s $\min S$. Ako skup ima gornju (donju meu), onda kaemo da je odozgo (odozdo) ogranien/omeen. Ako ima obje, onda samo kaemo da je ogranien/omeen.

Primjer 3. Skup $T = \{1, 2, 3, 4, 5.5, 8\}$ je odozgo ogranien, jer je 8 jedna njegova gornja mea. Uoite da su njegove gornje mee npr. 9, 12 te 2000 (Openito, svi brojevi iz skupa $[8, \infty\rangle$). S druge strane, skup $\mathbb{N}$ nije odozgo ogranien.

Analogno imamo da ako skup sadri neku svoju donju meu, onda je ona najvea od svih donjih mea.

Zadatak 83. Navedite primjer...

a) ...skupa $A \subseteq \mathbb{R}$ koji je odozgo ogranien, odozdo neogranien, te nema maksimum.

b) ...beskonanog skupa $A \subseteq \mathbb{R}$ takvog da je $\min A = 0$, $\max A = 5$, te vrijedi $1 \notin A$ i $3 \notin A$.

c) Ogranienog skupa $A \subseteq \mathbb{R}$ takvog da je $\max A = 1$, nema minimum i sadri tono dva racionalna broja.

Rjeenje. a) Jedan takav skup je npr. $A := \langle -\infty, 3\rangle$. Zaista, oito je odozgo ogranien (vrijedi $x \in A$ ako i samo ako je $x < 3$, dakle jedna gornja mea je npr. 4), odozdo neogranien (za svaki $a \in \mathbb{R}$ postoji $x \in A$ takav da je $x < a$, npr. bilo koji lan skupa A ako je $a \geq 3$ i $a - 1$ ako je $a < 3$), te nema maksimum (kad bi postojao maksimum b, po definiciji je $b < 3$, no $b < \frac{b+3}{2} < 3$, to je kontradikcija s injenicom da je b maksimum). Jo nekoliko primjera skupova s danim svojstvom: $\mathbb{N}^- \cup [3, 4\rangle$, $\langle -\infty, 2] \cap \mathbb{I}$.

b) Uzmimo npr. $A := \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup [4, 5]$. Uvjerimo se npr. da je $\min A = 0$. Neka je $x \in A$ proizvoljan. Vrijedi $x \in A$ ako i samo ako vrijedi $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ili $x \in [4, 5]$. Ako je $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, tj. $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, onda je oito i $x \geq 0$, isto vrijedi i ako je $x \in [4, 5]$. Dakle, $0 \leq x$ za sve $x \in A$. Kako je $0 \in A$, zakljuujemo da je $\min A = 0$. Analogno se zakljuuje da je $\max A = 5$. Oito vrijedi $1 \notin A$, jer bi inae trebalo vrijediti $0 \leq 1 \leq \frac{1}{2}$ ili $4 \leq 1 \leq 5$, a nikoja od te dvije tvrdnje nije istinita. Slino vidimo i da vrijedi $3 \notin A$.

c) Uzmimo $A := \left(\langle 0, 1\rangle \cap \mathbb{I}\right) \cup \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$. Lako se vidi da A sadri tono dva racionalna broja ($\frac{1}{2}$ i 1, ostali su svi iracionalni po definiciji) i slino kao i u b) se pokae da je $\max A = 1$.

Pretpostavimo da skup A ima minimum, neka je to a. Oito je $a > 0$ (jer za sve $x \in A$ vrijedi $a > 0$), pa uzmemo li bilo koji iracionalan broj u intervalu $\langle 0, a\rangle$[3], neka je to b, dobivamo $b < a$ i $b \in A$, to je kontradikcija s minimalnou od A. $\square$

Sada uvodimo korisnu notaciju kojom emo se koristiti na vie mjesta.

Definicija 11. Neka je $f(x)$ neki realan broj u ovisnosti o $x \in A \subseteq \mathbb{R}$. Oznaka $S = \big\{f(x) : x \in A\big\}$ je zapravo oznaka za skup $S = \big\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in A \text{ t.d. } y = f(x)\big\}$.

Zadatak 84. Zadan je skup $S = \left\{\dfrac{1}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\right\}$. Odredite $\min S$ i $\max S$, ako postoje.

Rjeenje. Pokuamo li umjesto x uvrstiti razne brojeve, nasluujemo da bi njegov maksimum mogao biti 1. Zaista, za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\frac{1}{x^2+1} \leq 1,$$

jer je ta tvrdnja ekvivalentna tvrdnji $x^2 \geq 0$. Vrijedi i $1 \in S$, i to za $x = 0$. Dakle, $\max S = 1$.

Nadalje, tvrdimo da $\min S$ ne postoji. Zaista, pretpostavimo da postoji $\min S = m \in \mathbb{R}$. Kako je $m \in S$, po definiciji postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $m = \dfrac{1}{x_0^2+1}$. Uzmimo $x_1 := |x_0| + 1$. Vrijedi

$$\frac{1}{x_0^2+1} > \frac{1}{(|x_0|+1)^2+1},$$

jer je

$$\frac{1}{x_0^2+1} > \frac{1}{(|x_0|+1)^2+1} \Leftrightarrow x_0^2 + 1 < (|x_0|+1)^2 + 1 \Leftrightarrow -1 < 2|x_0|,$$

a tvrdnja $-1 < 2|x_0|$ je oito istinita. Nadalje, oito je $|x_0| + 1 \in \mathbb{R}$, pa vrijedi

$$\frac{1}{(|x_0|+1)^2+1} \in S,$$

to je u kontradikciji s minimalnou od m. $\square$

Zadatak 85. Neka je $S = \{x^3 - x : x \geq 1\}$. Odredite $\min S$.

Rjeenje. Oito je $0 \in S$. Dokaimo da je $x^3 - x \geq 0$ za sve $x \geq 1$. Zaista, taj uvjet je ekvivalentan sa

$$x(x^2-1) \geq 0, \ \ \forall x \geq 1,$$

to je ekvivalentno tvrdnji da je $x^2 - 1 \geq 0$ za sve $x \geq 1$, to oito vrijedi. Prema tome tvrdnja vrijedi po definiciji minimuma. $\square$

[3] To moemo po napomeni 18, za $\epsilon = x = \dfrac{a}{2}$. Pokuajte za vjebu dokazati da je to mogue i bez pozivanja na taj teorem.

Zadatak 86. Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a > 0$. Neka je $S = \left\{ax^2 + bx + c : x \in \mathbb{R}\right\}$. Odredimo $\min S$.

Rjeenje. Za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \end{aligned}$$

pa zbog $a > 0$ vrijedi

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$$

i $\frac{4ac - b^2}{4a}$ je ujedno i minimum jer se on postie za $x = -\frac{b}{2a}$. □

Napomena 16. Analogno se pokazuje da, ukoliko je $a < 0$, vrijedi da je $\max S = \frac{4ac - b^2}{4a}$ i on se, kao i u prethodnom sluaju, postie za $x = -\frac{b}{2a}$. Ovo je vrlo koristan rezultat, za koji se nadamo da Vam je poznat iz srednje kole.

Zadatak 87. Neka je $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}} : x \in \mathbb{R}\right\}$. Odredite $\max S$.

Rjeenje. Neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Iz tvrdnje prethodnog zadatka imamo da vrijedi

$$x^2 + 3x + 4 \geq \frac{7}{4},$$

gdje jednakost vrijedi za $x = -\frac{3}{2}$. Odavde iz monotonog rasta funkcije funkcije korijen dobivamo

$$\sqrt{x^2 + 3x + 4} \geq \frac{\sqrt{7}}{2},$$

odnosno

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}} \leq \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Zakljuujemo i da je ovo maksimum, jer jednakost vrijedi za $x = -\frac{3}{2}$. □

Zadatak 88. Neka je $S = \left\{\frac{\pi^2}{4x \sin x} + x \sin x : 0 < x < \pi\right\}$. Odredite $\min S$.

Rjeenje. Neka je $x > 0$ proizvoljan. Kako vrijedi $\sin x > 0$ za sve $x \in \langle 0, \pi \rangle$, moemo primijeniti A-G nejednakost. Vrijedi

$$\frac{\pi^2}{4x \sin x} + x \sin x \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi^2}{4x \sin x} \cdot x \sin x} = \pi.$$

Dakle, π je jedna donja mea. Pokaimo i da je $\pi \in S$. Naime, jednakost se postie ako i samo ako je

$$\frac{\pi^2}{4x \sin x} = x \sin x,$$

to je ekvivalentno tvrdnji

$$x \sin x = \frac{\pi}{2}.$$

Oito je jednadba zadovoljena npr. za $x = \dfrac{\pi}{2}$, pa zakljuujemo da u tom sluaju vrijedi

$$\frac{\pi^2}{4x \sin x} + x \sin x = \pi.$$

Dakle $\pi \in S$, pa je on i minimum. $\square$

Zadatak 89. Neka je $S = \big\{(1+x)^2(1-x) : x > 0\big\}$. Odredite $\max S$.

Rjeenje. Neka je $x > 0$ proizvoljan. Direktnom primjenom A-G nejednakosti dobivamo

$$(1+x)(1+x)(1-x) \geq \left(\frac{1+x+1+x+1-x}{3}\right)^3 = \frac{3+x}{3}.$$

Kako elimo pri koritenju A-G nejednakosti doi do konstante, ova nejednakost nam nije korisna. Meutim, uoite da, kad bi umjesto $1-x$ imali $2-2x$, onda bi se varijable x u brojniku ponitile i u tom sluaju bi doli do konstante. No to moemo i postii. Zaista,

$$(1+x)^2(1-x) = \frac{1}{2}(1+x)(1+x)(2-2x) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1+x+1+x+2-2x}{3}\right)^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{32}{27}.$$

Jednakost se postie ako i samo ako je $1 + x = 2 - 2x$, odnosno $x = \dfrac{1}{3}$. Dakle, $\max S = \dfrac{32}{27}$ i on se postie za $x = \dfrac{1}{3}$. $\square$

Napomena 17 (Arhimedov aksiom). Neka su $a > 0$ i $b > 0$ proizvoljni. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $na > b$.

Napomena 18 (Gustoa $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{I}$ u $\mathbb{R}$). Vrijedi sljedee.

a) Za svaki $\epsilon > 0$ i za sve $x \in \mathbb{R}$, $\langle x - \epsilon, x + \epsilon \rangle \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$,

b) Za svaki $\epsilon > 0$ i za sve $x \in \mathbb{R}$, $\langle x-\epsilon, x+\epsilon\rangle \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$.

Zadatak 90. Dokaite da za svaki realan $r > 0$ postoji bar jedan $a \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{a} < r$. Postoji li i beskonano mnogo prirodnih brojeva koji zadovoljavaju tvrdnju?

Rjeenje. Prema Arhimedovu aksiomu za svaki $r > 0$ postoji $a \in \mathbb{N}$ takav da je $ra > 1$, odnosno $\frac{1}{a} < r$. Nadalje, za svaki $b \in \mathbb{N}$ takav da je $b > a$ vrijedi

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < r,$$

pa oito ako tvrdnja vrijedi za a, onda vrijedi i za svaki $b > a$. Dakle, postoji beskonano mnogo takvih prirodnih brojeva. □

Zadatak 91. Dokaite koristei Arhimedov aksiom da je skup $A = \{x^2 : x \in \mathbb{N}\}$ odozgo neogranien.

Rjeenje. Da skup S ima gornju meu znai da postoji bar jedan $M \in \mathbb{R}$ tako da za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq M$. Mi moramo dokazati negaciju ove tvrdnje, tj. moramo dokazati da za svaki $M \in \mathbb{R}$ postoji $x_0 \in A$ takav da je $x_0 > M$. Da je $x_0 \in S$ znai da je on oblika x^2, gdje je $x \in \mathbb{N}$, pa zapravo trebamo dokazati da za svaki $M \in \mathbb{R}$ postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $x^2 > M$.

Prema Arhimedovu aksiomu za svaki $M \in \mathbb{R}$ postoji $x \in \mathbb{N}$ takav da je $x > M$. Znamo da je $n^2 \geq n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa vrijedi

$$x^2 \geq x > M,$$

ime smo pokazali da za tako odabrani x vrijedi i $x^2 > M$. Time je tvrdnja dokazana. □

Napomena 19. Prethodni zadatak mogli smo rijeiti i pomou dokaza kontradikcijom. Zaista, pretpostavimo da je M jedna gornja mea za A, tj. da postoji $M \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $x \in \mathbb{N}$ vrijedi $x^2 \leq M$. Dobivamo kontradikciju s injenicom da tvrdnja oito ne vrijedi npr. za $x = M + 1$.

Zadatak 92. Dokaite da za svaki $a \in \mathbb{R}$ postoji $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $n - 1 \leq a \leq n$.

Rjeenje. Uzmimo prvo da je $a > 0$. Tada prema Arhimedovu aksiomu postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > a$. Uzmimo od svih prirodnih brojeva takvih da je $n > a$ najmanji takav broj, nazovimo ga n_0. Tada je $n_0 > a$, pa i $n_0 \geq a$ i $n_0 - 1 \leq a$, No n_0 je upravo broj koji smo traili. Za $a = 0$ tvrdnja vrijedi za $n = 0$, a ako je $a < 0$, onda je zahtjev

$$n - 1 \leq a \leq n \Longleftrightarrow -n \leq -a \leq -n + 1.$$

No sada je $-a > 0$, pa prema dokazanom upravo postoji $l \in \mathbb{Z}$ takav da je $l - 1 \leq -a \leq l$, pa za $-n = l - 1$, tj. $n = 1 - l$ tvrdnja vrijedi. $\square$

Napomena 18 je esto korisna ako treba dokazati egzistenciju nekog racionalnog ili iracionalnog broja u nekom intervalu bez da ga eksplicitno konstruiramo. Pokaimo to u sljedeem zadatku.
Zadatak 93.

a) Dokaite da izmeu svaka dva realna broja $c < d$, $c, d \in \mathbb{R}$ postoji $x \in \mathbb{I}$ takav da je $c < x < d$.

b) Dokaite da je skup $A' = \{x^2 : x \in \mathbb{I}\}$ odozgo neogranien.

Rjeenje. a) Uvrstimo u napomenu 18 $x = \dfrac{c+d}{2}$, $\epsilon = \dfrac{d-c}{2}$. Tada dobivamo da postoji bar jedan $x \in \mathbb{I}$ u intervalu $\langle c, d \rangle$, tj. bar jedan $x \in \mathbb{I}$ takav da je $c < x < d$, to smo i tvrdili.

b) Analogno kao i u zadatku 91, dovoljno je dokazati da za svaki $M \in \mathbb{R}$ postoji $x \in \mathbb{I}$ takav da je $x^2 > M$. Uzmimo bilo koji $x_0 \in \mathbb{I}$ takav da je $x_0 \in \langle M, M+1 \rangle$. Oito je $x_0^2 \geq x_0 > M$, pa je x_0 upravo traeni broj. $\square$

3.3 Supremum i infimum

Definicija 12. Neka je S odozgo ogranien skup. **Supremum** skupa S je najmanja gornja mea od S.
Definicija 13. Neka je S odozdo ogranien skup. **Infimum** skupa S je najvea donja mea od S.

Kako su supremum i infimum jedinstveni ako postoje, ima smisla uvesti oznake $\sup A$ i $\inf A$. Napomenimo da infimum (supremum) odozdo (odozgo) ogranienog skupa moe, ali i ne mora biti unutar tog skupa. Vrijedi sljedee – ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeen skup koji sadri neku svoju gornju meu b, onda je $\sup S = b$. Zaista, kad bi postojao $a \in S$ takav da je $a < b$ i da za sve $x \in S$ vrijedi $x \leq a$, onda $b \in S$ povlai $b \leq a$, to je u kontradikciji s $a < b$. Analogno se pokae da ako je S odozdo omeen skup koji sadri neku svoju donju meu, onda je ona infimum tog skupa.
Zadatak 94. Dokaite da je $\sup [0, 1\rangle = 1$.

Rjeenje. Pretpostavimo da 1 nije supremum, tj. da postoji neka gornja mea M takva da je $M < 1$, dakle vrijedi $a \leq M$ za svaki $a \in [0, 1\rangle$. Oito je $M \geq 0$. No dobivamo kontradikciju s injenicom da je

$$\frac{M+1}{2} > M \text{ i } 0 \leq \frac{M+1}{2} < 1,$$

to znai da je $\dfrac{M+1}{2} \in [0,1\rangle$. $\square$

Zadatak 95. Neka je $A = \left\{ \dfrac{4}{4n^2-1} : n \in \mathbb{Z} \right\}$. Odredite $\inf A$.

Rjeenje. Neka je $n \in \mathbb{Z}$ proizvoljan. Kako za $n = 0$ dobivamo da je -4 element ovog skupa, te uvrtavanjem ostalih brojeva dobivamo pozitine brojeve, nasluujemo da je -4 minimum, pa i infimum. Zapravo, moramo dokazati da za $n \neq 0$ vrijedi

$$\frac{4}{4n^2-1} > 0.$$

No da bismo to dokazali, potrebno je prvo pokazati da je $4n^2 - 1 > 0$ za $n \neq 0$. Kako je $4(-n)^2 - 1 = 4n^2 - 1$, slijedi da je nuan i dovoljan uvjet da tvrdnja vrijedi za sve $n \neq 0$ upravo taj da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo li da tvrdnja vrijedi za neki n, onda za $n+1$ imamo

$$4(n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 8n + 4 - 1.$$

Znamo da vrijedi $8n + 4 > 0$, jer je to ekvivalentno s istinitom tvrdnjom $n > -\dfrac{1}{2}$. Sada oigledno vrijedi

$$4n^2 - 1 + 8n + 4 > 0.$$

Zato je -4 nuno minimum, pa i infimum, te je $\inf A = -4$. $\square$

Zadatak 96. Neka je $S = \left\{ \dfrac{1}{x+1} : x > -1 \right\}$. Odredite $\inf S$ i $\sup S$.

Rjeenje. Neka je $x > -1$ proizvoljan. Tvrdimo da je $\inf S = 0$. Zaista, 0 je oito jedna donja mea, kako je $x + 1 > 0$, vrijedi $\dfrac{1}{x+1} > 0$ (dijelili smo s $(x+1)^2$), pa je onda i $\dfrac{1}{x+1} \geq 0$.

Pretpostavimo da 0 nije infimum. Tada postoji neka donja mea skupa S, nazovimo ju a, takva da je $a > 0$. Po definiciji, za sve $x > -1$ vrijedi

$$\frac{1}{x+1} \geq a.$$

Odavde iz $a > 0$ slijedi

$$x \leq \frac{1}{a} - 1.$$

Dobili smo gornju meu skupa $\langle -1, \infty\rangle$, to je kontradikcija jer znamo da je taj skup neogranien.

Tvrdimo da ovaj skup nema supremum, tj. $\sup S = \infty$. Moramo, dakle, pokazati da je ovaj skup odozgo neogranien. Pretpostavimo da je odozgo ogranien, tj. da postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$\frac{1}{x+1} \leq M.$$

Oito je $M > 0$, jer za npr. $x = 0$ imamo $\frac{1}{0+1} = 1 \leq M$. Sada trebamo dobiti kontradikciju i to tako da pronaemo neki x_0 takav da je $\frac{1}{x_0+1} > M$. Rjeavanjem jednadbe $\frac{1}{x_0+1} = M$ dobivamo

$$x_0 = \frac{1}{M} - 1,$$

pa kako bi "natimali" kontradikciju, uzmimo

$$x_0 = \frac{1}{M+1} - 1.$$

Tada je $x_0 > -1$ i

$$\frac{1}{\frac{1}{M+1} - 1 + 1} = M + 1 > M,$$

i time zaista dobivamo kontradikciju s injenicom da za svaki $x > -1$ vrijedi $\frac{1}{x+1} \leq M$! Time smo dokazali da je S odozgo neogranien. $\square$

Zadatak 97. Neka je $S = \left\{ \frac{x^2-5}{x^2+5} : x \in \mathbb{R} \right\}$. Odredite $\sup S$.

Rjeenje. Neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Vrijedi

$$\frac{x^2-5}{x^2+5} = \frac{x^2+5-10}{x^2+5} = 1 - \frac{10}{x^2+5}. \tag{3.5}$$

Odavde vidimo da je oito 1 jedna gornja mea. Nasluujemo da je 1 supremum. Zaista, pretpostavimo da postoji $a \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\frac{x^2-5}{x^2+5} \leq a$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$, gdje je $a < 1$. Mnoenjem s x^2+5 dobivamo

$$x^2 - 5 \leq ax^2 + 5a,$$

odnosno

$$(1-a)x^2 \leq 5(a+1).$$

Kako je $a < 1$, moemo podijeliti s $1 - a$, pa dobivamo

$$x^2 \leq \frac{5(a+1)}{1-a},$$

to je u kontradikciji s injenicom da je skup $\{x^2 : x \in \mathbb{R}\}$ odozgo neogranien (to smo pokazali u zadatku 91). $\square$

U rjeenju prethodnog zadatka smo naslutili da je 1 supremum koristei (3.5). Intuitivno, promotrimo li graf funkcije $x \mapsto \dfrac{10}{x^2+5}$ vidimo da ona poprima sve pozitivne vrijednosti, dakle i one jako bliske nuli, to znai da e $1 - \dfrac{10}{x^2+5}$ biti po volji blizu broju 1, pa ne moe postojati gornja mea manja od 1 jer emo uvijek moi odabrati takav x koji e "premaiti" tako odabranu "gornju meu". Ova razmatranja vode na sljedee zakljuke, koji nisu teki za dokazati.

Lema 1. Neka je S odozgo ogranien skup. Tada je $L \in \mathbb{R}$ supremum skupa S ako i samo ako je on gornja mea od S, tj. za svaki $x \in S$ vrijedi $x \leq L$, te za svaki $\epsilon > 0$ postoji $a \in S$ takav da je $L - \epsilon < a$.

Lema 2. Neka je S odozdo ogranien skup. Tada je $L \in \mathbb{R}$ infimum skupa S ako i samo ako je on donja mea od S, tj. za svaki $x \in S$ vrijedi $x \geq L$, te za svaki $\epsilon > 0$ postoji $a \in S$ takav da je $L + \epsilon > a$.

Ovi rezultati pokazuju se zgodnima za dokazivanje tvrdnji o supremumima i infimumima u mnogo sluajeva. Navedimo nekoliko primjera.

Zadatak 98. Odredite infimum skupa iz zadatka 96 koristei lemu 2.

Rjeenje. U rjeenju zadatka 96 smo ve pokazali da je 0 jedna donja mea. Dokaimo sada da za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoji $a \in S$ takav da je $\epsilon > a$. To je ekvivalentno tvrdnji da za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoji $x > -1$ takav da je

$$\frac{1}{x+1} < \epsilon.$$

Da bismo dobili ideju kako bi x trebao izgledati, rijeimo jednadbu $\dfrac{1}{x+1} = \epsilon$ po x. Imamo

$$\frac{1}{x+1} = \epsilon \Leftrightarrow (x+1)\epsilon = 1 \Leftrightarrow x\epsilon = 1 - \epsilon \Leftrightarrow x = \frac{1-\epsilon}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} - 1.$$

Kako je $\frac{1}{\epsilon} - 1$ rjeenje jednadbe $\frac{1}{x+1} = \epsilon$, slijedi da je

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) + 1} = \epsilon.$$

Sada trebamo taj izbor x-a "popraviti" tako da za novi izbor x-a vrijedi $\frac{1}{x+1} < \epsilon$. Kako je

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) + 1} = \epsilon > 0,$$

oito ako mu "poveamo" nazivnik, broj kojim time dobivamo bit e sigurno manji od ϵ. Zato ima smisla uzeti da je

$$x = \frac{1}{\epsilon} + 1.$$

Tada vrijedi

$$x > \frac{1}{\epsilon} - 1 \Rightarrow x + 1 > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{x+1} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon,$$

ime smo dokazali tvrdnju. □

Zadatak 99. Neka je $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Odredite $\sup A$, ako postoji.

Rjeenje. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

1 je oito jedna gornja mea ovog skupa. Tvrdimo da je 1 i supremum ovog skupa. Zaista, treba dokazati da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\frac{n}{n+1} > 1 - \epsilon,$$

to je ekvivalentno tvrdnji

$$(n+1)\epsilon > 1.$$

Prema Arhimedovu aksiomu postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n\epsilon > 1$. No za taj n oito vrijedi

$$(n+1)\epsilon > n\epsilon > 1.$$

Time smo dokazali tvrdnju. □

Zadatak 100. Neka je $A = \left\{ \dfrac{2}{x^2-1} : |x| > 3 \right\}$. Odredite inf A, ako postoji.

Rjeenje. Uzmimo proizvoljan $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x| > 3$. Nasluujemo da je $\inf A = 0$, jer broj $\dfrac{2}{x^2-1}$ tei ka 0 za po apsolutnoj vrijednosti velike x. Zaista, pokaimo da je 0 jedna donja mea. Zapravo je dovoljno pokazati da je $x^2 - 1 > 0$, jer onda je oito $\dfrac{2}{x^2-1} \geq 0$. Zaista, iz $|x| > 3$ slijedi $x^2 > 9$, odakle slijedi $x^2 - 1 > 8 > 0$, pa tvrdnja vrijedi.

Pokaimo sada da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$0 + \epsilon = \epsilon > \frac{2}{x^2-1} \ \text{ i } \ |x| > 3.$$

Rjeavanjem jednadbe $\epsilon = \dfrac{2}{x^2-1}$ po x dobivamo da je jedno od rjeenja

$$x = \sqrt{\frac{2}{\epsilon} + 1},$$

pa slinom intuicijom kao i prije pokuajmo "poveati" nazivnik, s time da treba imati na umu i da treba vrijediti $|x| > 3$. Nasluujemo da e tvrdnja vrijediti za

$$x = \sqrt{\frac{2}{\epsilon} + 9}.$$

Zaista, vrijedi

$$|x| = x = \sqrt{\frac{2}{\epsilon} + 9} > \sqrt{9} = 3,$$

te vrijedi

$$x > \sqrt{\frac{2}{\epsilon} + 1} \Rightarrow x^2 > \frac{2}{\epsilon} + 1 \Rightarrow x^2 - 1 > \frac{2}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{x^2-1} < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \frac{2}{x^2-1} < \epsilon.$$

Time smo pokazali da je $\inf A = 0$. □

Zadatak 101. Neka je $S = \left\{ \dfrac{x^2-5}{x^2+5} : x \in \mathbb{R} \right\}$ (skup iz zadatka 97). Ve je dokazano da je supremum ovog skupa 1, ali dokaite da je $\sup A = 1$ koristei karakterizaciju danu lemom 1.

Rjeenje. U rjeenju zadatka 97 smo ve vidjeli da je 1 jedna gornja mea. Treba pokazati da za sve $\epsilon > 0$ postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$1 - \frac{10}{x^2+5} > 1 - \epsilon,$$

to je ekvivalentno uvjetu

$$\frac{10}{x^2+5} < \epsilon.$$

Kroz rjeavanje prethodnih zadataka pokazalo se je da je rjeavanje jednadbe po x esto od pomoi, pa rjeavanjem jednadbe $\frac{10}{x^2+5} = \epsilon$ dobivamo

$$x = \sqrt{\frac{10}{\epsilon} - 5} = \sqrt{\frac{10 - 5\epsilon}{\epsilon}}.$$

No primijetimo da ovaj izraz nije definiran ako je $10 - 5\epsilon < 0$, tj. ako je $\epsilon > 2$. No uoimo da ako je $\epsilon > 2$, onda tvrdnja koju elimo dokazati vrijedi i to za $x = 0$. Zato moemo pretpostaviti da je $\epsilon \leq 2$. Slinom intuicijom kao i prije, uzmemo li $x = \sqrt{\frac{10}{\epsilon}}$, vrijedi

$$x > \sqrt{\frac{10}{\epsilon} - 5} \Rightarrow x^2 > \frac{10}{\epsilon} - 5 \Rightarrow x^2 + 5 > \frac{10}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{x^2+5} < \frac{\epsilon}{10} \Rightarrow \frac{10}{x^2+5} < \epsilon,$$

ime smo dokazali tvrdnju. □

Napomena 20. Prethodni zadatak mogao se rijeiti i krae. Primijetimo da je

$$\frac{10}{x^2+5} < \frac{10}{x}$$

za sve $x > 0$. Rjeavanjem jednadbe $\frac{10}{x} = \epsilon$ dobivamo $x = \frac{10}{\epsilon} > 0$, pa nam se isplati upravo uzeti taj x. Dobivamo

$$\epsilon = \frac{10}{x} > \frac{10}{x^2+5},$$

pa smo time dokazali tvrdnju.

Zadatak 102. Neka je $A = \left\{ \frac{m^2}{n^2} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Postoji li $\sup A$?

Rjeenje. Tvrdimo da ne postoji $\sup A$, tj. da je ovaj skup odozgo neogranien i to tako to emo pronai neki njegov odozgo neogranien podskup. Zaista, to je dovoljno da bismo dokazali tvrdnju jer kontrapozicijom dobivamo da ako je skup odozgo ogranien, onda je i svaki njegov podskup odozgo ogranien, a to je oigledna tvrdnja. Neka je

$$A' := \{m^2 : m \in \mathbb{N}\}.$$

Oito je $A' \subseteq A$ i on je odozgo neogranien, pa je i A odozgo neogranien. $\square$

Istaknimo sljedeu korisnu lemu.

Lema 3. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ neprazni, $A \subseteq B$ i neka je B odozgo (odozdo) ogranien skup. Tada je i A odozgo (odozdo) ogranien skup, te vrijedi $\sup A \leq \sup B$ ($\inf A \geq \inf B$).

Zadatak 103. Neka je $A = \left\{ \dfrac{n}{1+nx^2} : n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R} \right\}$. Odredite $\inf A$, ako postoji.

Rjeenje. Prvo dokaimo sljedeu jednostavnu tvrdnju: Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ neprazan i odozdo ogranien, te neka je $a \in \mathbb{R}$ donja mea skupa A. Ako postoji $B \subseteq A$ sa svojstvom da je $\inf B = a$, onda je $a = \inf A$. Zaista, iz prethodne leme slijedi da je B odozdo ogranien, te $a = \inf B \geq \inf A$. S druge strane, po definiciji infimuma vrijedi $a \leq \inf A$, pa je zaista $a = \inf A$.

Promotrimo skup

$$A' = \left\{ \frac{1}{1+x^2} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uoimo da je $A' \subseteq A$ (dobiven za $n = 1$) i $\inf A' = 0$ (ovo se pokazuje slino kao u prethodnim zadatcima). Kako za sve $x \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\dfrac{n}{1+nx^2} \geq 0$, vrijedi $\inf A = 0$. $\square$

Zadatak 104. Neka je $A = \left\{ \dfrac{4x}{4x^2-1} : x > \dfrac{1}{2} \right\}$. Odredite $\sup A$ i $\inf A$, ako postoje.

Rjeenje. Neka je

$$A' = \left\{ \frac{4x}{4x^2-1} : \frac{1}{2} < x < 1 \right\}.$$

Tvrdimo da je A' odozgo neogranien. Pretpostavimo da postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za proizvoljan $x \in \left\langle \dfrac{1}{2}, 1 \right\rangle$ vrijedi

$$\frac{4x}{4x^2-1} \leq M.$$

Oito je $M > 1$. Kako je tada

$$\frac{4}{4x^2-1} < \frac{4x}{4x^2-1},$$

oito je M gornja mea i za skup

$$A'' = \left\{ \frac{4}{4x^2-1} : \frac{1}{2} < x < 1 \right\}.$$

Pokaimo sada da postoji element skupa A'' koji je vei od M, ime dobivamo kontradikciju. Zaista, jedno od rjeenja jednadbe $\frac{4}{4x^2-1} = M$ je $x = \frac{\sqrt{4+M}}{2\sqrt{M}}$, pa ima smisla uzeti

$$x = \frac{\sqrt{3+M}}{2\sqrt{M}}$$

da bismo dobili kontradikciju, jer je oito $x < \frac{\sqrt{4+M}}{2\sqrt{M}}$, to iz pozitivnosti oba izraza povlai

$$\frac{4}{4x^2-1} > \frac{4}{4\left(\frac{(\sqrt{4+M}}{2\sqrt{M}}\right)^2 - 1} = M.$$

Jo samo treba pokazati da je ovakav izbor x-a smislen, tj. da vrijedi $x > \frac{1}{2}$ i $x < 1$. Zaista, prvi uvjet je ekvivalentan s $M \geq 0$, a drugi s $M > 1$, a obje tvrdnje su oito istinite. Time smo dobili kontradikciju s injenicom da je M gornja mea od A'', pa zakljuujemo da A nema supremum.

Odredimo sada infimum. Kako vidimo da ovaj izraz tei ka 0 za sve vee i vee x, intuitivno moemo pretpostaviti da je 0 infimum. Zaista, 0 je donja mea, jer vrijedi $\frac{4x}{4x^2-1} \geq 0$ za sve $x > \frac{1}{2}$, to se lako provjeri. Sada jo treba provjeriti da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $x > \frac{1}{2}$ takav da je

$$0 + \epsilon = \epsilon > \frac{4x}{4x^2-1}.$$

Vrijedi

$$x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow 4x - \frac{1}{x} > 4x - 2 \Rightarrow \frac{1}{4x - \frac{1}{x}} < \frac{4}{4x-2} \Rightarrow \frac{4x}{4x^2-1} < \frac{4}{4x-2}.$$

Rjeenje jednadbe $\frac{4}{4x-2} = \epsilon$ je

$$x = \frac{\epsilon+2}{2\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

i uzmemo li upravo taj x, tvrdnja je dokazana. $\square$

Zadatak 105. Neka je $A = \left\{ \dfrac{1}{m+n} : n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N} \right\}$. Odredite inf A i sup A, ako postoje.

Rjeenje. Lako se vidi da je maksimum ovog skupa $\frac{1}{2}$ i on se postie za $m = n = 1$. Tvrdimo da je 0 infimum. Zaista, treba dokazati da za sve $\epsilon > 0$ postoje m, $n \in \mathbb{N}$ takvi da je

$$\epsilon > \frac{1}{m+n}.$$

to je ekvivalentno sa

$$(m+n)\epsilon > 1.$$

Zaista, prema Arhimedovu aksiomu postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $m\epsilon > \frac{1}{2}$ i $n\epsilon > \frac{1}{2}$. Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo tvrdnju. $\square$

Zadatak 106. Neka je $A = \left\{ \dfrac{n^2 + 4m^2}{mn} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$. Odredite inf A i sup A, ako postoje.

Rjeenje. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ proizvoljni. Znamo da je

$$(n - 2m)^2 = n^2 - 4mn + 4m^2 \geq 0,$$

odakle slijedi $n^2 + 4m^2 \geq 4mn$, odnosno

$$\frac{n^2 + 4m^2}{mn} \geq 4.$$

Dakle 4 je jedna donja mea, no ona je i minimum jer se postie za $n = 2$ i $m = 1$. Stoga je inf $A = 4$. Tvrdimo da A nema supremum. Uzmimo $m = 1$. Pretpostavimo li da skup

$$A' = \left\{ \frac{n^2 + 4}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

ima gornju meu M, onda dobivamo kontradikciju za $n = M$. $\square$

Napomena 21. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ proizvoljni. Iz A-G nejednakosti imamo

$$\frac{n^2 + 4m^2}{mn} = \frac{n}{m} + \frac{4m}{n} \geq 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{4m}{n}} = 4,$$

pa smo i tako mogli dobiti da je 4 donja mea, ali i minimum jer jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{n}{m} = \frac{4m}{n}$, odnosno $\frac{n}{m} = 2$ i to vrijedi za $n = 2$ i $m = 1$, ali mogli smo uzeti i neke druge brojeve, npr. $n = 50$ i $m = 25$.

Napomena 22. Vrijedi:

a) Ako su A, $B \subseteq \mathbb{R}$ odozgo (odozdo) ogranieni skupovi, onda je skup

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

odozgo (odozdo) ogranien i vrijedi

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B \quad \big(\inf(A + B) = \inf A + \inf B\big).$$

b) Ako su A, $B \in \mathbb{R}$ odozgo ogranieni skupovi, takvi da je $a \geq 0$ za svaki $a \in A$, te $b \geq 0$ za svaki $b \in B$ (krae: $A \geq 0$ i $B \geq 0$, dakle oni su i odozdo ogranieni), tada je skup

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A,\ b \in B\}$$

ogranien i vrijedi

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B \ \wedge \ \inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

c) Ako je $A \subseteq \mathbb{R}$ odozdo (odozgo) ogranien skup, tada je skup

$$-A = \{-a : a \in A\}$$

odozgo (odozdo) ogranien i vrijedi

$$\sup(-A) = -\inf A, \quad \big(\inf(-A) = -\sup A\big).$$

d) Ako su A, $B \in \mathbb{R}$ odozgo (odozdo) ogranieni skupovi, tada je skup $A \cup B$ odozgo (odozdo) ogranien i vrijedi

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \big(\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}\big).$$

Zadatak 107. Neka je $A = \left\{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{m^2} : n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\right\}$. Odredite $\sup A$ i $\inf A$ ako postoje.

Rjeenje. Neka je

$$A' = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} \ \text{ i } \ A'' = \left\{\frac{1}{m^2} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Prije smo pokazali da je $\sup A' = 1$. No vrijedi da je $\inf A' = \frac{1}{2}$, jer je to i minimum, s obzirom da se postie za $n = 1$ i da vrijedi

$$\frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, vrijedi $\sup A'' = 1$, jer je to i maksimum koji se postie za $m = 1$, te $\inf A'' = 0$, jer prema Arhimedovu aksiomu za svaki $\epsilon > 0$ postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $m > \frac{1}{\epsilon}$, te kako je $y^2 \geq y$ za sve $y \in \mathbb{N}$, slijedi da za tako odabrani m vrijedi $\epsilon > \frac{1}{m^2}$. Dakle vrijedi

$$\sup A = \sup(A' + A'') = \sup A' + \sup A'' = 2,$$

te analogno

$$\inf A = \inf(A' + A'') = \inf A' + \inf A'' = \frac{1}{2}. \qquad \square$$

Zadatak 108. Neka je $A = \left\{ \frac{n+1}{(n+7)(nm+5n+m+5)} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$. Odredite $\sup A$, ako postoji.

Rjeenje. Za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{(n+7)(nm+5n+m+5)} &= \frac{n+1}{(n+7)(m(n+1)+5(n+1))} = \\ &\frac{n+1}{(n+7)(n+1)(m+5)} = \frac{1}{(n+7)(m+5)}. \end{aligned}$$

Neka je $A' = \left\{ \frac{1}{n+7} : n \in \mathbb{N} \right\}$ i $A'' = \left\{ \frac{1}{m+5} : m \in \mathbb{N} \right\}$. Lako se vidi da su $A',\ A'' \geq 0$ i da je $\sup A' = \frac{1}{8}$, $\sup A'' = \frac{1}{6}$, pa je $\sup A = \frac{1}{48}$. $\square$

Zadatak 109. Neka je $A = \left\{ \frac{4n+13}{n+2} \cdot \frac{5m+12}{m+3} : n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N} \right\}$. Odredite $\sup A$, ako postoji.

Rjeenje. Za proizvoljne $m, n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{4n+13}{n+2} = 4 + \frac{5}{n+2} \quad \text{i} \quad \frac{5m+12}{m+3} = 5 - \frac{3}{m+3}.$$

Promotrimo skup

$$A' = \left\{5 - \frac{3}{m+3} : m \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{5m+12}{m+3} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Uoimo da je $A' = X + (-Y)$, gdje je $X = \{5\}$ i $Y = \left\{\frac{3}{m+3} : m \in \mathbb{N}\right\}$, pa kako je $\sup X = \inf X = 5$, $\sup Y = \frac{3}{4}$ i $\inf Y = 0$, zakljuujemo da je

$$\sup A' = \sup\big((X + (-Y)\big) = \sup X + \sup(-Y) = \sup X - \inf Y = 5.$$

Nadalje, lako se vidi da je supremum svih brojeva oblika

$$A'' = \left\{4 + \frac{5}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{4n+13}{n+2} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

jednak $\frac{17}{3}$ (dobiva se za $n = 1$, to je ujedno i maksimum skupa). Sada iz injenice da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $4 + \frac{5}{n+2} \geq 0$ i $5 - \frac{3}{n+3} \geq 0$, slijedi da je $\sup A = \frac{17}{3} \cdot 5 = \frac{85}{3}$. $\square$

Zadatak 110. Neka je $A = \left\{\frac{n-(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Odredite $\sup A$ i $\inf A$, ako postoje.

Rjeenje. Pokazat emo dva rjeenja.

Prvi nain. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Iz injenice da je $(-1)^n \geq -1$ slijedi $-(-1)^n \leq 1$, odakle slijedi

$$\frac{n-(-1)^n}{n} \leq \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \leq 2$$

i to je maksimum, jer se postie za $n = 1$. Slino, iz $(-1)^n \leq 1$ slijedi $-(-1)^n \geq -1$, odakle slijedi

$$\frac{n-(-1)^n}{n} \geq \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2},$$

to je i minimum, jer se postie za $n = 2$. Dakle, $\sup A = 2$ i $\inf A = \frac{1}{2}$.

Drugi nain. Definiramo

$$A' = \left\{\frac{n-1}{n} : n \text{ paran}\right\} \text{ i } A'' = \left\{\frac{n+1}{n} : n \text{ neparan}\right\}.$$

Lako je pokazati da je $A' \cup A'' = A$. Nadalje realan broj a je element skupa A' ako i samo ako postoji paran n takav da je $a = \frac{n-1}{n}$. No prirodan broj n je paran ako postoji $k \in \mathbb{N}$

takav da je $n = 2k$, to povlai prema napomeni 1 da je

$$A' = \left\{ \frac{2k-1}{2k} : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sada analogno kao i u prethodnim zadatcima moemo pokazati da je $\sup A' = 2$, $\inf A' = \dfrac{1}{2}$ (Dokaite to!). Analogno vidimo da vrijedi

$$A'' = \left\{ \frac{2k}{2k-1} : k \in \mathbb{N} \right\},$$

iz injenice da je $a \in \mathbb{N}$ neparan ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $a = 2k-1$. Provjerite da je $\sup A'' = 2$, te $\inf A'' = 1$. Dakle, sveukupno imamo $\sup A = 2$ i $\inf A = \dfrac{1}{2}$. $\square$

Zadatak 111. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ odozgo ogranien skup koji ima dva ili vie elemenata. Dokaite da je $A' := A \setminus \{\min A\}$ takoer odozgo ogranien i vrijedi $\sup A = \sup A'$.

Rjeenje. Skup A' je neprazan, pa tvrdnja zadatka ima smisla. Nadalje, oito $\sup A'$ postoji, jer je npr. $\sup A$ jedna gornja mea skupa A'. Prema pretpostavci znamo da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $a \in A$ takav da je $L - \epsilon < a$. Na je cilj dokazati da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $a' \in A'$ takav da je $L - \epsilon < a$. Imamo dva sluaja.

- $\epsilon < \dfrac{L - \min A}{2}$. Tada postoji a za kojeg vrijedi

  $$a > L - \epsilon > L - \frac{L - \min A}{2} = \frac{L + \min A}{2} > \min A.$$

  Dakle, pronali smo $a \in A'$ koji zadovoljava tvrdnju.

- $\epsilon \geq \dfrac{L - \min A}{2}$. Ovdje moemo uzeti neki a za kojeg je $L - \epsilon' < a$, gdje je ϵ' proizvoljan broj takav da je $\epsilon' < \dfrac{L - \min A}{2}$. Kako je $\epsilon > \epsilon'$, vrijedi

  $$L - \epsilon < L - \epsilon' < a,$$

  te analogno kao i u prethodnom sluaju imamo $a > \min A$, odnosno $a \in A'$, pa i u ovom sluaju smo pronali $a \in A$ koji zadovoljava tvrdnju. $\square$

Napomena 23. Neka su S, I neprazni skupovi i $\mathcal{F} = \{A_n : n \in I\}$ familija skupova (skup nekih podskupova od S), dakle $A_n \subseteq S$, za sve $n \in I$. Definiramo:

$$\bigcup_{n \in I} A_n := \{x \in S : (\exists n \in I)\ x \in A_n\}, \tag{3.6}$$

$$\bigcap_{n \in I} A_n := \{x \in S : (\forall n \in I)\ x \in A_n\}. \tag{3.7}$$

Skup (3.6) zovemo **unija familije** $\mathcal{F}$, (3.7) zovemo **presjek familije** $\mathcal{F}$. Unije i presjeci familija se inae definiraju i za neindeksirane familije, ali ovo e za nas biti dovoljno. Vie o familijama skupova moete vidjeti u [9], str. 9.

Zadatak 112 (Cantorov aksiom)**.** Neka je za sve $n \in \mathbb{N}$ zadan segment $[a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}$ i neka za sve $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ povlai $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$. Dokaite:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Rjeenje. Na je cilj dokazati da postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq b \leq b_n$. Uoimo prvo da je tvrdnja $[a_m, b_m] \subseteq [a_n, b_n]$ ekvivalentna tvrdnji $a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$. Neka je sada

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \ \text{ i } \ B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Uoimo da za sve $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{n_1} \leq b_{n_2}$. Zaista, ako je $n_1 \leq n_2$, onda vrijedi $a_{n_1} \leq a_{n_2} \leq b_{n_2}$, a ako je $n_2 \leq n_1$, onda je $a_{n_1} \leq b_{n+1} \leq b_{n_2}$. Kako je svaki element skupa A jedna donja mea od B, oito postoji $b = \inf B$. Oito je $b_n \geq b$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq b$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $b < a_{n_1}$. Tada a_{n_1} sigurno nije donja mea skupa B, pa postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $b_{n_2} < a_{n_1}$, kontradikcija s $A \leq B$! Dakle, vrijedi $a_n \leq b \leq b_n$, pa je tvrdnja dokazana. $\square$

Definicija 14. Za funkciju $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kaemo da je **polinom $n+m$-tog stupnja u dvije varijable** (krae: polinom u dvije varijable) ako postoje brojevi $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ i $a_{ij} \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} x^i y^j,$$

pri emu nisu svi a_{ij} takvi da je $i + j = n + m$ jednaki 0.

Tako su npr. $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$p_1(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2,$$
$$p_2(x, y) = xy + 2$$

dva polinoma u dvije varijable.

Zadatak 113. Dokaite da postoji polinom u dvije varijable $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takav da je $p(x, y) > 0$ za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, koji nema minimum, tj. ne postoji $\min\{p(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$.

Rjeenje. Oznaimo $S = \{p(x, y) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$. Definirat emo polinom drugog stupnja za koji je $\inf S = 0$, ali $0 \notin S$. Korisna opservacija je da za polinome $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zapisane u obliku

$$q(x, y) = (\dots)^2 + (\dots)^2$$

vrijedi $q(x, y) > 0$ ako (i samo ako) izrazi u ove dvije zagrade ne mogu istodobno biti 0. Dakle, nama je cilj u ove dvije zagrade dodati izraze (najprirodnije je dodati polinome) koji ne mogu istodobno biti 0, ali tako da infimum skupa S bude jednak 0, tj. tako da moemo odabrati brojeve x, y tako da izraz $p(x, y)$ bude "proizvoljno malen". Moda je najjednostavnije u prvu zagradu staviti izraz x. U drugu zagradu emo morati staviti izraz koji ne moe biti 0 kada je $x = 0$. To moemo postii tako da npr. uzmemo neki izraz koji je 0 kada je $x = 0$ (moemo naprosto uzeti neki izraz koji sadri u sebi x kao faktor) i tom izrazu dodamo 1. Tu je najlake uzeti $xy + 1$ kao taj izraz u drugoj zagradi[4], jer taj izraz moemo skupa s izrazom u prvoj zagradi uiniti po volji malim (uzimajui x vrlo blizu 0 da prva zagrada bude mali broj i kao y suprotnu i recipronu vrijednost tog broja kojeg smo uzeli za x, kako bi druga zagrada bila 0). Dakle, uzet emo

$$p(x, y) = x^2 + (xy + 1)^2.$$

Sad emo formalizirati naa razmatranja. Tvrdimo da za skup

$$S = \{x^2 + (xy + 1)^2 : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

vrijedi $\inf S = 0$, te $0 \notin S$. Uoimo da je oito $x^2 + (xy + 1)^2 \geq 0$ i vrijedi $x^2 + (xy + 1)^2 = 0$ ako i samo ako je $x = 0$ i $xy = -1$, to je nemogue, dakle vrijedi $x^2 + (xy + 1)^2 > 0$ za sve $x, y \in \mathbb{R}$, to povlai $0 \notin S$.

Dokaimo da je $\inf S = 0$. Treba pokazati da za proizvoljan $\epsilon > 0$ postoje $x, y \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$\epsilon > x^2 + (xy + 1)^2$$

Uzmimo $x = \dfrac{\sqrt{\epsilon}}{2}$ i $y = -\dfrac{2}{\sqrt{\epsilon}}$. Tada je

$$x^2 + (xy + 1)^2 = \frac{\epsilon}{4} < \epsilon.$$

[4]Uoimo da npr. $x^2 + 1$ ne bi bio dobar odabir, jer ne bi izraze u obije zagrade istovremeno mogli uiniti po volji malima.

Dakle, $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p(x, y) = x^2 + (xy + 1)^2$ je jedan polinom koji zadovoljava uvjete zadatka. $\square$

3.4 Kompleksni brojevi

Definicija 15. Skup kompleksnih brojeva je skup $\mathbb{C} = \left\{a + bi : a,\ b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\right\}$. (Ova definicija nije stroga, strogu definiciju obradili ste na predavanjima.)

Kompleksne brojeve zbrajamo i oduzimamo "po komponentama", tj.

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a + c) \pm (b + d)i,$$

te ih mnoimo poput polinoma, tj.

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Vrijedi i

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2},$$

to se lako pamti kao "racionalizacija nazivnika", tj. mnoimo brojnik i nazivnik s $a - bi$, pa u nazivniku dobivamo

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi + b^2 = a^2 + b^2.$$

Zadatak 114. Neka je $z = \dfrac{(2 + 3i)(4 + 5i)}{6 + 7i}$. Napiite z u standardnom obliku.

Rjeenje. Vrijedi $(2 + 3i)(4 + 5i) = 8 + 10i + 12i - 15 = -7 + 22i$. Imamo

$$z = \frac{-7 + 22i}{6 + 7i} \cdot \frac{6 - 7i}{6 - 7i} = \frac{(-7 + 22i)(6 - 7i)}{85} = \frac{-42 + 49i + 132i - 154}{85} = \frac{112}{85} + \frac{181}{85}i.$$

Napomena 24.

- Vrijedi $a + bi = c + di$ ako i samo ako vrijedi $a = c$ i $b = d$.
- **Modul** kompleksnog broja $z = a + bi$ je broj $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Neka je $z = x + yi$. Tada je **realni dio** od z broj $\mathrm{Re}(z) = x$, a **imaginarni dio** od z broj $\mathrm{Im}(z) = y$.
- **Kompleksno-konjugirani** broj od $z = x + yi$ je broj $\overline{z} = x - yi$.

Zadatak 115.

a) Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da je $(a+3i)^2 = 216 + 90i$.

b) Dokaite da za sve z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedi $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

c) Dokaite da za sve z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedi $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Rjeenje. a) Neka je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tvrdnja vrijedi ako i samo ako vrijedi $a^2 + 6ai - 9 = 216 + 90i$, to vrijedi ako i samo ako vrijedi $a^2 - 9 = 216$ i $6a = 90$. Sada lako vidimo da obje tvrdnje vrijede za $a = 15$ i to je jedini takav a.

b) Neka su $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$ proizvoljni. Sjetimo se da je

$$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Stoga tvrdimo da vrijedi

$$\sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

No vrijedi

$$(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2$$

i

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2,$$

pa zakljuujemo da su ta dva broja jednaka, odakle slijedi tvrdnja.

c) Stavimo li $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$, treba dokazati

$$\sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2} \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{c^2+d^2}$$

Kvadriranjem i pojednostavljivanjem dobivamo ekvivalentnu tvrdnju

$$ac + bd \leq \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

Primijetimo da openito ne moemo kvadrirati ovu nejednakost jer $ac + bd$ moe biti negativan. Meutim, vrijedi obrat – ako vrijedi $x^2 \geq y^2$, gdje je $x \geq 0$, a $y \in \mathbb{R}$, onda vrijedi $x \geq y$. Zaista, vrijedi $\sqrt{y^2} = |y|$, pa vrijedi $x^2 \geq y^2 \Rightarrow x \geq |y| \geq y$, to povlai $x \geq y$. Zato je dovoljno dokazati da vrijedi

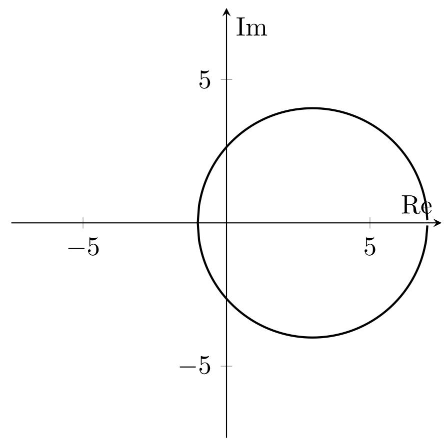
$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

Zaista, ova tvrdnja je ekvivalentna $(ad - bc)^2 \geq 0$, to je istina.[5] $\square$

Zadatak 116. Prikaite u Gaussovoj ravnini skup $S = \{z : |z - 3| = 4\}$.

[5] Tvrdnja je i specijalan sluaj CSB-nejednakosti.

Rjeenje. Ideja u rjeavanju zadataka ovog tipa je pronai nune i dovoljne uvjete da je neki kompleksan broj u S takve da pomou njih lako moemo skicirati S u Gaussovoj ravnini. Neka je $z = x + yi$. Tada vrijedi $|z-3| = |(x-3)+yi| = 4$, odnosno $\sqrt{(x-3)^2+y^2} = 4$, to vrijedi ako i samo ako vrijedi $(x-3)^2+y^2 = 16$. Prema tome, vrijedi $z \in S$ ako i samo ako vrijedi $(x-3)^2+y^2 = 16$, gdje je $z = x+yi$. No znamo da je ovaj skup krunica radijusa 4 sa sreditem u toki $(3,0)$. $\square$



Zadatak 117. Prikaite u Gaussovoj ravnini skup

$$S = \{z : |z+1+8i|^2 - |z+2+i|^2 = 100\}.$$

Rjeenje. Neka je $z \in \mathbb{C}$ proizvoljan. Vrijedi

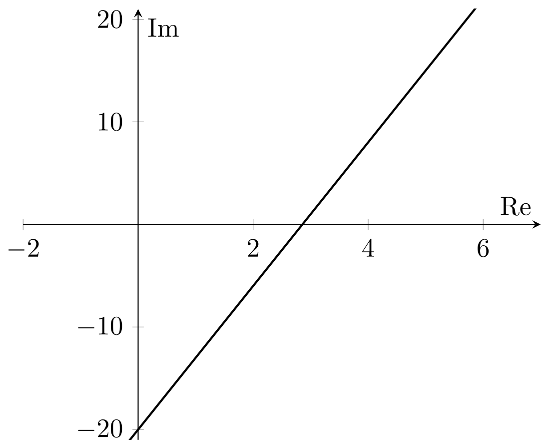
$$\begin{aligned}
|z+1+8i|^2 - |z+2+i|^2 &= 100\\
\sqrt{(x+1)^2+(y+8)^2}^2 - \sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}^2 &= 100\\
(x+1)^2+(y+8)^2-(x+2)^2-(y+1)^2 &= 100\\
14x-2y &= 40\\
y &= 7x-20.
\end{aligned}$$

Pravac je prikazan na slici 3.1. $\square$

Zadatak 118. Odredite skup $S = \{z : z + |z| = 8-4i\}$.

Rjeenje. Neka je $z = x+yi$. Uvjet $z+|z| = 8-4i$ je tada ekvivalentan uvjetu

$$x + \sqrt{x^2+y^2} + yi = 8-4i.$$



Slika 3.1: Pravac $y = 7x - 20$

No to vrijedi ako i samo ako vrijedi

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + y^2} = 8, \\ y = -4. \end{cases}$$

Supstitucijom $y = -4$ dobivamo $x + \sqrt{x^2 + 16} = 8$. Rjeavanjem jednadbe dobivamo $x = 3$. Dakle $S = \{3 - 4i\}$ i on je u Gaussovoj ravnini toka $(3, -4)$. □

Neka je $S \subseteq \mathbb{C}$ neprazan i neka su zadane $f, g : S \to \mathbb{C}$. Problem odreivanja skupa $T = \big\{z : f(z) = g(z)\big\}$ zovemo *rjeavanje jednadbe* $f(z) = g(z)$ u skupu $\mathbb{C}$.

Zadatak 119. Rijeite sljedee jednadbe u $\mathbb{C}$.

a) $|z - 1|^2 + 2\overline{z} = 6 - 2i$.

b) $z \cdot |z| + 2z + i = 0$.

Rjeenje. a) Neka je $z = x + yi$. Tada je poetna jednadba ekvivalentna jednadbi

$$(x - 1)^2 + y^2 + 2x - 2yi = 6 - 2i,$$

to vrijedi ako i samo ako je

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + 2x = 6, \\ -2y = -2. \end{cases}$$

Odavde slijedi $y = 1$ i $(x - 1)^2 + 2x = 5$, odnosno $x^2 = 4$, tj $x = 2$ ili $x = -2$. Dakle, jedina rjeenja su $z = 2 + i$ i $z = -2 + i$.

b) Neka je $z = x + yi$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} z \cdot |z| + 2z + i = 0 &\Leftrightarrow (x + yi)\sqrt{x^2 + y^2} + 2x + (2y + 1)i = 0 \\ &\Leftrightarrow x\sqrt{x^2 + y^2} + 2x + y\sqrt{x^2 + y^2}i + (2y + 1)i = 0. \end{aligned}$$

Posljednje vrijedi ako i samo ako je

$$\begin{cases} x\sqrt{x^2 + y^2} + 2x = 0, \\ y\sqrt{x^2 + y^2} + (2y + 1) = 0. \end{cases}$$

Uoimo da vrijedi

$$x\sqrt{x^2 + y^2} + 2x = x(\sqrt{x^2 + y^2} + 2) = 0,$$

pa kako je $\sqrt{x^2 + y^2} + 2 > 0$ slijedi $x = 0$. Odavde dobivamo da poetna tvrdnja vrijedi ako i samo ako je

$$y|y| + 2y + 1 = 0.$$

Sada razlikujemo dva sluaja – $y \geq 0$ i $y < 0$.

Ako je $y \geq 0$, onda je $|y| = y$, pa imamo jednadbu

$$y^2 + 2y + 1 = 0,$$

ije rjeenje je $y = -1$, ali kako je $y \geq 0$, ovo rjeenje "odbacujemo".

Ako je $y < 0$, imamo jednadbu

$$-y^2 + 2y + 1 = 0,$$

ija rjeenja su $y = 1 - \sqrt{2}$ i $y = 1 + \sqrt{2}$, ali jedino uzimamo u obzir rjeenje $y = 1 - \sqrt{2}$, jer je $1 + \sqrt{2} \geq 0$. Dakle, jedino rjeenje poetne jednadbe je $z = (1 - \sqrt{2})i$. $\square$

Napomena 25. Kompleksan broj z je napisan u **trigonometrijskom obliku** ako je $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, gdje je $r = |z|$ i $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ kut koji taj broj zatvara s osi x. Vrijedi:

- $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x}$, s time da pri odreivanju broja θ treba uzeti u obzir i kvadrant u kojem se z nalazi.
- Neka je $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Tada je

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\big), \text{ gdje je } z_2 \neq 0. \end{aligned}$$

- Za sve $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$.

Zadatak 120.

a) Zapiite $z = 1 - \sqrt{3}i$ u trigonometrijskom obliku. Odredite z^5.

b) Odredite najmanji $\alpha \in \mathbb{N}$ takav da je $z = (1+i)^\alpha \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^\alpha \in \mathbb{R}$.

Rjeenje. a) $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $z^5 = 32\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right)$.

b) Vrijedi

$$\begin{aligned}
(1+i)^\alpha \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^\alpha &= \sqrt{2}^\alpha \left(\cos\frac{\alpha\pi}{4} + i \sin\frac{\alpha\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{2\alpha\pi}{3} + i \sin\frac{2\alpha\pi}{3}\right) \\
&= \sqrt{2}^\alpha \left(\cos\frac{11\alpha\pi}{12} + i \sin\frac{11\alpha\pi}{12}\right)
\end{aligned}$$

Kompleksan broj z je realan ako i samo ako je $\mathrm{Im}(z) = 0$. Zato je najmanji takav $\alpha \in \mathbb{N}$ upravo najmanji α koji zadovoljava $\sin\frac{11\alpha\pi}{12} = 0$, a to je $\alpha = 12$. $\square$

Definicija 16. Neka je $z \in \mathbb{C}$. Kaemo da je n**-ti korijen** iz z, u oznaci $\sqrt[n]{z}$, skup svih $w \in \mathbb{C}$ takvih da je $w^n = z$.

Napomena 26. Vrijedi $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi + 2k\pi}{n} + \sin\frac{\phi + 2k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

Zadatak 121. Odredite $\sqrt[3]{1+i}$.

Rjeenje.

$$\sqrt[3]{1+i} = \left\{\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{12} + i \sin\frac{3\pi}{12}\right), \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i \sin\frac{17\pi}{12}\right)\right\}.$$

$\square$

Zadatci za vjebu

Uvod u nejednakosti

Zadatak 122. Dokaite da za sve $x > 1$ vrijedi

a) $x^3 - x^2 + \dfrac{1}{x} > 0$,

b) $x^2 \geq x \sin x$.

Zadatak 123.

a) Dokaite da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $|x| \geq -x$.

b) Koristei tvrdnju a) dijela zadatka, dokaite da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\left|x^3 - 2x\cos x + \sin^2 x + 1\right| + \left|x^3 - 2x\cos x - \cos^2 x + 6\right| \geq 4.$$

Zadatak 124.

a) (Dravno natjecanje, 4. razred, A varijanta, 2018.) Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokaite da za sve $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ vrijedi

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

b) (Dravno natjecanje, 1. razred, A varijanta, 2019.) Neka su $a, b, c > 0$ takvi da je $a + b + c = 1$. Dokaite:

$$\frac{1 + 9a^2}{1 + 2a + 2b^2 + 2c^2} + \frac{1 + 9b^2}{1 + 2b + 2c^2 + 2a^2} + \frac{1 + 9c^2}{1 + 2c + 2a^2 + 2b^2} < 4$$

c) Neka su $x, y, z > 0$. Dokaite:

$$\sqrt{x(3x + y)} + \sqrt{y(3y + z)} + \sqrt{z(3z + x)} \leq 2(x + y + z).$$

d) Neka je $n \in \mathbb{N}$, $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ i $a_1, \ldots a_n > 0$. Dokaite:

$$\frac{a_1}{a_{p(1)}} + \frac{a_2}{a_{p(2)}} + \cdots + \frac{a_n}{a_{p(n)}} \geq n$$

Zadatak 125. (HMO 2016.) $(**)$ Dokaite da za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ vrijedi

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right)(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \leq \frac{(n+1)^2}{4n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2.$$

Minimum i maksimum. Arhimedov aksiom

Zadatak 126. Dokaite ili opovrgnite (Univerzalni skup je $\mathbb{R}$):

a) Postoji odozgo neogranien skup $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je A^c odozgo ogranien.

b) Postoji odozgo ogranien skup $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je A^c odozgo neogranien.

c) Postoji odozgo neogranien skup $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je A^c odozgo neogranien.

d) Postoji odozgo ogranien skup $A \subseteq \mathbb{R}$ takav da je A^c odozgo ogranien.

Zadatak 127. Neka je $A = \{n^2 - 2^n : n \in \mathbb{N}\}$. Odredite $\min A$ i $\max A$, ako postoje.

Zadatak 128. Neka je $S = \left\{\sin^2 x \cos 2x : 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$. Odredite $\max S$ i $\min S$, ako postoje.

Zadatak 129. Dokaite koristei Arhimedov aksiom da je skup $A = \{x^2 - x : x \in \mathbb{N}\}$ odozgo neogranien.

Zadatak 130.

a) Dokaite da svaki $a \in \mathbb{R}$ ima najmanji prirodan broj vei ili jednak a.

b) Dokaite: Neka je $a \geq 0$ i $b > 0$. Ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a \leq \dfrac{b}{2^n}$, onda je $a = 0$.

Zadatak 131. ($*$) Dokaite da Arhimedov aksiom i Cantorov aksiom (v. zadatak 112) povlae aksiom potpunosti.

Napomena 27. Kako iz aksioma realnih brojeva moemo dokazati Arhimedov i Cantorov aksiom (Za dokaz Arhimedova aksioma v. [3]), iz ovog zadatka slijedi da se u aksiomima realnih brojeva aksiom potpunosti moe zamijeniti konjunkcijom Arhimedova i Cantorova aksioma.

Supremum i infimum

Zadatak 132.

a) Odredite primjer skupa $S \subseteq \mathbb{R}$ takvog da je $\sup A^c = 1$.

b) Odredite primjer dva skupa $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq B$ takva da je $\sup A \cap B = 3$ i da $A \cap B$ nema infimum.

c) Odredite primjer beskonanog skupa $A \subseteq \mathbb{Q}$ iji je infimum 2, a supremum 3.

d) Odredite primjer skupa $A \subseteq \mathbb{R}$ takvog da je $\inf A$=2, $\sup A = 3$, nema minimum ni maksimum, te se ne moe prikazati kao unija konano mnogo otvorenih intervala. (Dokaite da skup koji ste naveli zaista zadovoljava navedene tvrdnje.)

Zadatak 133. Odredite $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$ ako postoje, gdje je

a) $A = \left\{\dfrac{18-2n}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

b) $A = \left\{\dfrac{x^2-10}{x^2+10} : x \in \mathbb{R}\right\}$,

c) $A = \left\{\dfrac{1}{n+2} : n \in \mathbb{N},\ n \neq 4\right\}$,

d) $A = \left\{\dfrac{n}{(n+1)!} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

e) $A = \left\{(2+(-1)^m) \cdot \dfrac{3}{n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$,

f) $A = \left\{\dfrac{n^2}{m^2+2mn+5n^2} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$,

g) $A = \left\{\dfrac{n+1}{2m+1} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$

h) $A = \left\{\dfrac{n^2}{m^2+m+7n^2} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$,

i) $A = \left\{1 + \dfrac{n}{n+1} \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$,

j) $A = \left\{\dfrac{1}{3-(-1)^n \cdot n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\right\}$,

k) $A = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

l) $A = \left\{\dfrac{1}{p} : p \text{ prost}\right\}$.

Zadatak 134. Odredite $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$ ako postoje, gdje je

a) $A = \left\{\dfrac{12m-n-3mn+7}{5n-2n-2mn+5} : n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N},\ n > 4\right\}$,

b) $A = \left\{\dfrac{1}{3n+4} \cdot \dfrac{1}{3m-4} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$ (Budite paljivi ovdje!),

c) $A = \left\{\dfrac{m^2 + 4mn\cos\dfrac{x}{2} + 5n^2}{mn} : m, n \in \mathbb{N},\ x \in [\pi, 3\pi]\right\}$,

d) $A = \left\{\dfrac{3}{x+4} : x \in \mathbb{I},\ x > -4\right\}$.

Zadatak 135. Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ skup koji nema maksimum, takav da $A \setminus \langle 1, 2\rangle$ ima maksimum. Dokaite da je A odozgo ogranien i da je $\sup A \leq 2$. Postoji li $a \in \mathbb{R}$, $a < 2$ takav da za svaki $A \subseteq \mathbb{R}$ s gornjim svojstvima vrijedi $\sup A = a$?

Zadatak 136. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Odredite supremum skupa $\langle a, b\rangle \cap \mathbb{Q}$, ako postoji.

Zadatak 137. Odredite sve $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takve da za skup

$$S = \left\{a - \frac{2}{an} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

vrijedi $\sup S = 1$.

Zadatak 138. Neka je $A \subseteq \langle 0, \infty\rangle$ i neka je $\inf A > 0$. Definiramo

$$\frac{1}{A} = \left\{\frac{1}{a} : a \in A\right\}.$$

Dokaite da je tada $\frac{1}{A}$ odozgo ogranien i da vrijedi $\sup \frac{1}{A} = \frac{1}{\inf A}$.

Zadatak 139. ($*$) Odredite $\inf A$, $\sup A$, $\min A$, $\max A$ ako postoje, gdje je

a) (upanijsko natjecanje, 3. razred, A varijanta, 2020.)

$$A = \left\{\frac{1}{\sin^4 x + \cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x + \cos^4 x} : x \in \mathbb{R}\right\},$$

b) $A = \left\{\dfrac{n + k^2}{2^n + k^2 + 1} : n, k \in \mathbb{N}\right\}$,

c) $A = \left\{\cos\sqrt{\dfrac{\pi}{2} - x^2} : 0 < x \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$,

d) $A = \left\{\dfrac{mn}{1 + m + n} : m, n \in \mathbb{N}\right\}$

e) $A = \left\{\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Kompleksni brojevi

Zadatak 140. Prikaite $z = \dfrac{(3 + i + i^{140})^2}{3 - i}$ u standardnom obliku.

Zadatak 141.

a) Dokaite da za sve $z \in \mathbb{C}$ vrijedi $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

b) Dokaite da za sve z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedi $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ koristei a). (**Uputa:** Promotrite izraz $|z_1 + z_2|^2$).

Zadatak 142. Za kompleksne brojeve z i w vrijedi $|z + w| = \sqrt{3}$ i $|z| = |w| = 1$. Izraunajte $|z - w|$.

Zadatak 143. Dokaite da za sve z, $w \in \mathbb{C}$ vrijedi

a) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\big(|z|^2 + |w|^2\big)$.

b) $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$,

Sada se lako vidi da se prethodni zadatak moe rijeiti i pomou a).

Zadatak 144. Rijeite jednadbu $|z| - \overline{z} = 1 + 2i$.

Zadatak 145.

a) Dokaite: Ako je $|z| = 0$, onda je $z = 0$.

b) Rijeite jednadbu $\big(\mathrm{Im}(z) - 2z - 2\overline{z}\big)^2 + \big(|z| - 4\big)^2 = 0$.

c) Rijeite jednadbu $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

Zadatak 146. Odredite skup S i skicirajte ga u Gaussovoj ravnini, gdje je

a) $S = \{z : \mathrm{Re}(z - 3) = |z + 2i|\}$.

b) $S = \big\{z : |z + 2| = |1 - \overline{z}|\big\}$,

c) $S = \{z : |z - 2i| \leq 1 \text{ i } z^2\overline{z}^2 = 1\}$,

d) $S = \left\{z : \mathrm{Re}\left(\dfrac{z + 3 + 2i}{\overline{z} - 3 + 2i}\right) = 0\right\}$,

e) $S = \big\{z : z^5 = 1\big\}$,

f) $S = \left\{z : |z - 4 - 4i| > \sqrt{2}\right\}$,

Zadatak 147. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan i neka je $S = \{z : z^n = 1\}$. Dokaite da je S grupa u odnosu na mnoenje.

Openito, skup svih n-tih korijena nekog kompleksnog broja ini pravilni n-terokut sa sreditem u ishoditu.

Zadatak 148. Neka je $z = \dfrac{(2 + 3i)^{2024}}{(2 - 3i)^{2020}}$. Odredite $|z|$.

Zadatak 149. Neka je $S = \left\{\left|z - \dfrac{1}{z}\right| : z \in \mathbb{C},\ |z| = 2\right\}$. Odredite $\inf S$ i $\sup S$, ako postoje.

Zadatak 150. Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 9, \\ \mathrm{Im}(z^2) = \mathrm{Im}(z^3). \end{cases}$$

Zadatak 151. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo kompleksan broj

$$a_n = (1 + i)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)\ldots\left(1 + \frac{i}{\sqrt{n}}\right).$$

Izraunajte $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \cdots + |a_{2019} - a_{2020}|$.

Zadatak 152. Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi $|z - 5| = |z - 1| + 4$.

Zadatak 153. Neka je $S = \{z : \exists n \in \mathbb{N} \text{ t.d. } z^n = 1\}$. Dokaite ili opovrgnite: Vrijedi $S = \big\{z : |z| = 1\big\}$.

Zadatak 154. Neka je $d \in \mathbb{R}$ i $P, Q \in \mathbb{R}^2$. Skup $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ima svojstvo da za sve $T \in A$ vrijedi $|PT|^2 + |QT|^2 = d^2$. Koju krivulju u koordinatnom sustavu ini taj skup? Dokaite.

Zadatak 155. $(*)$ Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su a_n i b_n realni brojevi takvi da je $(\sqrt{3} + i)^n =$

$a_n + ib_n$. Dokaite da izraz
$$\frac{a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n}{a_{n+1} a_n + b_{n+1} b_n}$$
poprima istu vrijednost za sve $n \in \mathbb{N}$ i odredite tu vrijednost.

Zadatak 156. $(**)$ Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ takve da vrijedi

$$\left(1 - z + z^2\right)\left(1 - z^2 + z^4\right)\left(1 - z^4 + z^8\right) \ldots \left(1 - z^{2^{n-1}} + z^{2^n}\right) = \frac{3z^{2^n}}{1 + z + z^2}$$

Poglavlje 4

Funkcije

4.1 Pojam funkcije. Crtanje grafa funkcije

Definicija 17. Neka su S i S' dva neprazna skupa. Ako je svakom elementu $x \in S$ pridruen jedinstven element $f(x) \in S'$, onda kaemo da je zadana **funkcija** f sa skupa S u skup S', ili krae $f : S \to S'$. Skup $\mathcal{R}(f) = \big\{ f(x) : x \in S \big\}$ zove se **slika** od f. Skup S zove se **domena** od f.

Kao i prije, ove definicije nisu stroge, ali su za nae svrhe u redu.

Definicija 18. Neka su A, A_0 i B neprazni skupovi i neka su zadane $f : A \to B$ i $f_0 : A_0 \to B$. Kaemo da je f_0 **restrikcija** funkcije f na skup A_0 ako je $f_0(x) = f(x)$ za svaki $x \in A_0$, te piemo $f_0 = f|_{A_0}$. Kaemo i da je f **proirenje** funkcije f_0 na skup A ako je f_0 restrikcija funkcije f na skup A_0.

Napomena 28. Na nekim mjestima emo funkciju $f : S \to \mathbb{R}$, gdje je $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$ samo navesti u kraem obliku $x \mapsto f(x)$, u nadi da su domena i kodomena jasne iz konteksta (ili ako je kodomena nebitna). U tom sluaju govorimo o *funkcijama zadanima formulom.* Tako npr. $x \mapsto 2x + 1$ predstavlja funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$. (Uoite da je ovdje jedina kodomena koja ima smisla upravo $\mathbb{R}$, jer je $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$ i $\mathcal{R}(f)$ je podskup kodomene).

Definicija 19 (Operacije s funkcijama)**.** Neka je S neprazan skup i neka su zadane $f, g : S \to \mathbb{R}$. Tada definiramo $f + g, fg, \alpha f : S \to \mathbb{R}$ formulama

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (fg)(x) = f(x)g(x), \ \forall x \in S$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x). \ \forall x \in S.$$

Ako je i $g(x) \neq 0$ za sve $x \in S$, onda definiramo i $\dfrac{f}{g}$ formulom

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in S.$$

Nadamo se da ste se u srednjoj koli susreli s crtanjem grafova raznih funkcija. U ovoj toki pokazujemo "trikove" koje moemo upotrijebiti da bismo bre nacrtali graf neke funkcije. Ovo e biti osobito korisno u narednim tokama, gdje e crtanje grafa biti korisno u rjeavanju zadataka. U skladu s time, promotrimo sljedeu napomenu.

Napomena 29. Neka je zadana $f : S \to \mathbb{R}$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $c \in \mathbb{R}$.

- Graf funkcije $x \mapsto f(x) + c$ za $x \in S$ je graf funkcije f pomaknut vertikalno za $|c|$. Ako je $c > 0$, pomaknut je prema gore, a ako je $c < 0$, pomaknut je prema dolje.
- Ako je $c > 0$, onda graf funkcije $x \mapsto cf(x)$ za $x \in S$ se dobiva dilatacijom grafa funkcije f u smjeru prema osi y. Ako je $c > 1$, graf e biti rastegnut, a ako je $c < 1$, on e biti stisnut.
- Graf funkcije $x \mapsto -f(x)$ za $x \in S$ je graf funkcije f dobiven zrcaljenjem u odnosu na os x.
- Graf funkcije $x \mapsto f(x + c)$ za $x \in S$ je graf funkcije f dobiven horizontalnom translacijom za $|c|$ jedininih duina. Ako je $c > 0$, translatiramo ga ulijevo, a ako je $c < 0$, translatiramo ga udesno.
- Ako je $c > 0$, onda je graf funkcije $x \mapsto f(cx)$ za $x \in S$ graf funkcije f dilatiran u smjeru x osi. Ako je $c < 1$, graf e biti rastegnut, a ako je $c > 1$, on e biti stisnut.
- Graf funkcije $x \mapsto f(-x)$ za $x \in S$ je graf funkcije f dobiven zrcaljenjem s obzirom na os y.
- Graf funkcije $x \mapsto |f(x)|$ za $x \in S$ je graf funkcije f dobiven tako da sve njegove dijelove koji su ispod osi x zrcalimo u odnosu na os x, a ostale dijelove ostavimo nepromijenjene.
- Neka je zadana $g : S \to \mathbb{R}$. Tada su grafovi funkcija $f + g$, fg dobiveni tako da za svaki $x \in S$ gledamo vrijednost funkcija $f(x)$ i $g(x)$ i ta dva broja zbrojimo, odnosno pomnoimo. Ovo je direktna posljedica definicija operacija s funkcijama.
- Ako za funkciju $g : S \to \mathbb{R}$ vrijedi $g(x) \neq 0$ za sve $x \in S$, onda funkciju $\dfrac{f}{g}$ dobivamo tako da f i g podijelimo "po tokama", analogno kao u prethodnoj natuknici.

Zadatak 157. Nacrtajte graf funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdje je

a) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$,

b) $f(x) = \big||x| - 4\big|$.

Rjeenje. a) Nadamo se da je crtanje grafa kvadratne funkcije poznato otprije, ali za svaki sluaj emo to ovdje pokazati. Pri crtanju kvadratne funkcije korisno nam je znati njezino tjeme, nultoke, te eventualno jo neke njezine toke. Moemo se koristiti injenicom i da je ona simetrina s obzirom na njezinu os simetrije.[1]

Ve smo pokazali (v. zadatak 86) da je tjeme kvadratne funkcije $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (gdje je $a \neq 0$) toka

$$T(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right),$$

i to minimum ako je $a > 0$, a maksimum ako je $a < 0$. Dakle, uvrtavanjem ovih podataka dobivamo da je tjeme parabole u toki $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, gdje je $-\frac{1}{3}$ najmanja vrijednost koju funkcija postie.

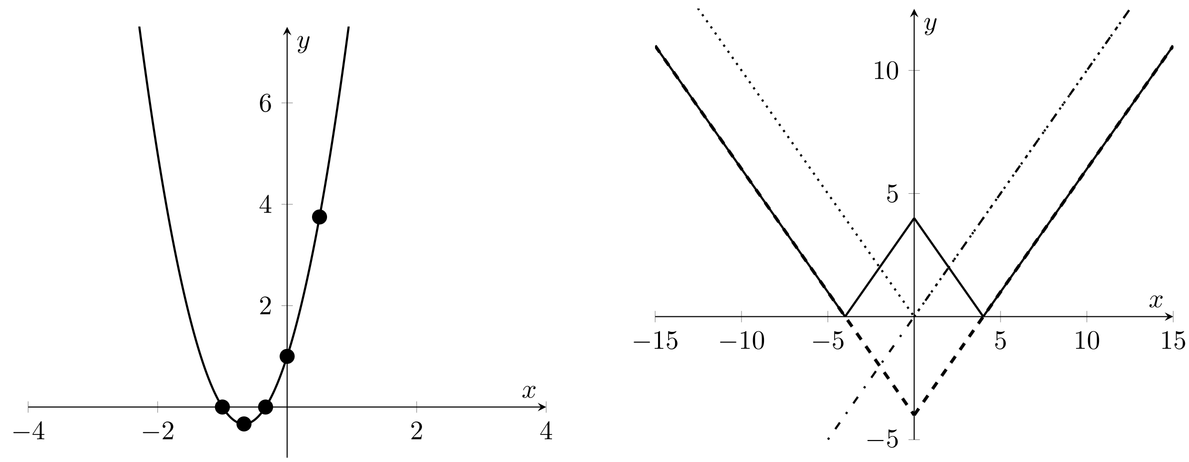
Nadalje, njezine nultoke su rjeenja jednadbe $3x^2 + 4x + 1 = 0$, dakle $x = -1$ i $x = -\frac{1}{3}$. Pored toga, vrijedi $f(0) = 1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$. Sad uz ove podatke nije teko nacrtati graf funkcije.

b) Primijenit emo napomenu 29.

- Promotrimo graf funkcije $x \mapsto x$, iji graf je prikazan tokasto-iscrtkanom linijom.
- Tada je graf funkcije $x \mapsto |x|$ dobiven zrcaljenjem cijelog dijela grafa funkcije $x \mapsto x$ ispod osi x u odnosu na os x, a ostali dijelovi su nepromijenjeni. Njezin graf je na slici 4.1 prikazan tokastom linijom.
- Graf funkcije $x \mapsto |x| - 4$ je dobiven translacijom grafa funkcije $x \mapsto |x|$ etiri jedinine duine prema dolje. Njezin graf je na slici 4.1 prikazan iscrtkanom linijom.
- Graf funkcije $x \mapsto \big||x| - 4\big|$ je dobiven zrcaljenjem cijelog dijela grafa funkcije $x \mapsto |x| - 4$ ispod osi x u odnosu na os x, a ostali dijelovi su nepromijenjeni. Njezin graf je na slici 4.1 prikazan punom linijom.

$\square$

[1] Os simetrije parabole definira se kao pravac koji prolazi kroz fokus parabole, a okomit je na njezinu direktrisu.



Graf funkcije $x \mapsto 3x^2 + 4x + 1$ Graf funkcije $x \mapsto \big||x| - 4\big|$

Slika 4.1: Grafovi funkcija iz zadatka 157

Zadatak 158. Nacrtajte graf funkcije $x \mapsto f(x)$, gdje je

a) $f(x) = \dfrac{x-5}{x+5}$,

b) $f(x) = e^{|x|}$.

c) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Rjeenje. a) Uoimo da je

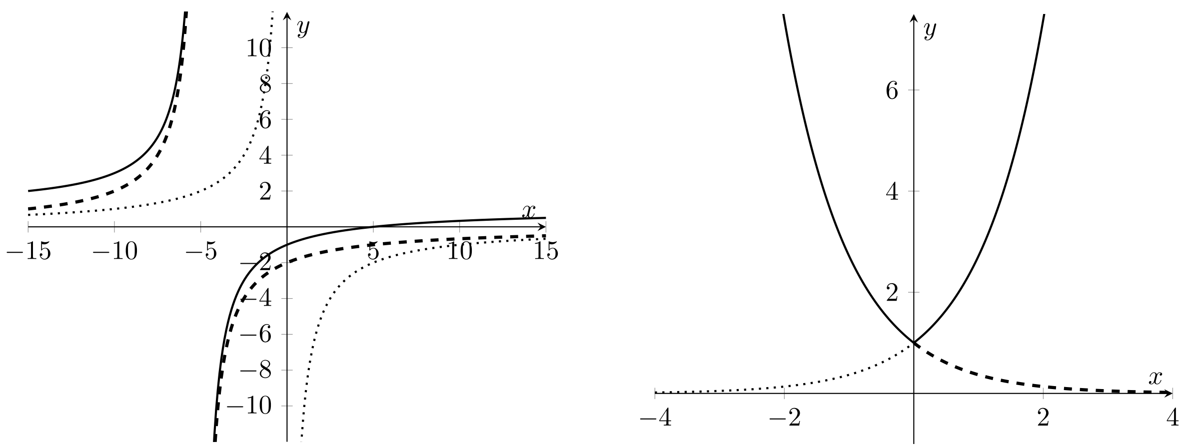
$$\frac{x-5}{x+5} = \frac{x+5-10}{x+5} = 1 - \frac{10}{x+5}.$$

- Promotrimo graf funkcije $x \mapsto -\dfrac{10}{x}$ (Prikazan tokastom linijom).
- Tada je graf funkcije $x \mapsto -\dfrac{10}{x-5}$ dobiven translacijom grafa funkcije $x \mapsto \dfrac{10}{x}$ pet jedininih duina udesno (Prikazan iscrtkanom linijom).
- Konano, graf funkcije $x \mapsto \dfrac{x-5}{x+5} = 1 - \dfrac{10}{x+5}$ je dobiven translacijom grafa funkcije $x \mapsto -\dfrac{10}{x-5}$ jednu jedininu duinu prema gore.

b) Uoimo da je

$$e^{|x|} = \begin{cases} e^x, & x \geq 0, \\ e^{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Uz ovaj podatak nije teko nacrtati graf ove funkcije. Naime, desno od osi y on e biti identian grafu funkcije $x \mapsto e^x$, a lijevo od osi y bit e identian grafu funkcije $x \mapsto e^{-x}$, koji nastaje zrcaljenjem grafa funkcije $x \mapsto e^x$ u odnosu na os y. Na slici 4.2 graf funkcije $x \mapsto e^{|x|}$ prikazan je punom linijom. Graf funkcije $x \mapsto e^x$ (odnosno $x \mapsto e^{-x}$), na mjestima gdje se on ne podudara s grafom funkcije $x \mapsto e^{|x|}$, prikazan je tokastom (odnosno iscrtkanom) linijom.

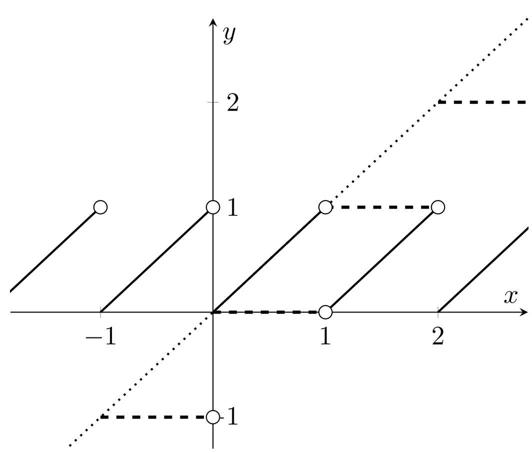


Graf funkcije $x \mapsto \dfrac{x-5}{x+5}$

Graf funkcije $x \mapsto e^{|x|}$

Slika 4.2: Grafovi funkcija iz zadatka 158 a) i b)

c) Na slici 4.3 prikazan je tokastom linijom graf funkcije $x \mapsto x$ i iscrtkanom linijom graf funkcije $x \mapsto -\lfloor x \rfloor$. Prema napomeni 29, graf funkcije $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ (prikazan punom linijom) bit e dobiven tako da za proizvoljnu toku $x \in \mathbb{R}$ zbrojimo vrijednosti te dvije funkcije u toki x. $\square$



Slika 4.3: Graf funkcije iz zadatka 158 c)

Zadatak 159. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Graf funkcije f je zrcaljen po osi y, zatim je pomaknut za dvije jedinine duine udesno, a potom je skaliran u odnosu na ishodite, te je koeficijent tog skaliranja (homotetije) $\frac{1}{2}$. Graf koje funkcije je novodobiveni skup?

Rjeenje. Zrcaljenjem dobivamo $x \mapsto -\sin x$, pomakom za dvije jedinine duine udesno dobivamo $x \mapsto -\sin(x-2)$, dilatacijom po x dobivamo $x \mapsto -\sin(2x-2)$, a dilatacijom po y imamo $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x-2)$. Prema tome novodobiveni skup je graf funkcije $x \mapsto \frac{1}{2}\sin(2x-2)$. $\square$

4.2 Injekcija, surjekcija i bijekcija. Slika i praslika skupa

Definicija 20. Neka su S i S' neprazni skupovi. Funkcija $f : S \to S'$ je

- **injekcija** ako za sve x, $y \in S$ vrijedi
$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$
- **surjekcija** ako za sve $y \in S'$ postoji bar jedan $x \in S$ takav da je $f(x) = y$ (tj. vrijedi $S' = \mathcal{R}(f)$).
- **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija.

Zadatak 160. Neka je $f : \mathbb{R}^+ \to \langle 1, \infty\rangle$ zadana formulom $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Dokaite da je f bijekcija.

Rjeenje. Dokaimo da je f injekcija. Neka su $x, y \in \langle 1, \infty\rangle$ takvi da vrijedi
$$1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{y}.$$
Zbog x, $y \neq 0$ pojednostavljivanjem i mnoenjem dobivamo $x = y$.

Dokaimo da je f surjekcija. Neka je $y \in \langle 1, \infty\rangle$ proizvoljan. Treba dokazati da tada postoji bar jedan x takav da je
$$y = 1 + \frac{1}{x}.$$
No ovo je zbog $x \neq 0$ i $y - 1 \neq 0$ ekvivalentno s
$$x = \frac{1}{y-1}.$$
Zaista, $\frac{1}{y-1}$ je upravo jedan (i jedini) takav x. $\square$

Napomena 30. Lako se vidi sljedea formulacija definicije bijekcije: $f : S \to S'$ je bijekcija ako i samo ako za svaki $y \in S'$ postoji i jedinstven je $x \in S$ takav da je $y = f(x)$. Prema tome, u prethodnom zadatku prvi dio rjeenja je zapravo suvian.

Zadatak 161. Dokaite da je $f : \mathbb{R} \to \langle 0, 1]$ zadana formulom $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ surjekcija. Je li i injekcija?

Rjeenje. Neka je $y \in \langle 0, 1]$. Treba dokazati da postoji bar jedan $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$y = \frac{1}{1+x^2}.$$

No to je ekvivalentno s

$$x^2 = \frac{1}{y} - 1.$$

Oito je $x = \sqrt{\dfrac{1}{y} - 1}$ jedan x koji zadovoljava tvrdnju. Nadalje, f nije injekcija, jer je $-1 \neq 1$ i $f(1) = f(-1)$. $\square$

Zadatak 162.

a) Odredite neku bijekciju (ako postoji) s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

b) Odredite neku bijekciju (ako postoji) s $\mathbb{N}$ s $[0, 1]$ u $[1, 3]$.

c) Odredite neku bijekciju (ako postoji) s $\mathbb{N}$ s $[0, 1]$ u $[0, 1\rangle$.

d) Odredite neku bijekciju (ako postoji) s $\mathbb{R}$ u skup svih funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ (Taj skup nazivamo $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).

Rjeenje. a) Neka je zadana $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$, $f(n) = n + 2$ (Ideja je "pomaknuti" svaki broj za 2 udesno). Uvjerite se da je ova funkcija zaista bijekcija.

b) Ideja e biti uzeti linearnu funkciju iji graf prolazi kroz toke $(0, 1)$ i $(1, 3)$ i promotriti njezinu restrikciju na segment $[0, 1]$. Uzmimo $f : [0, 1] \to [1, 3]$, $f(x) = 2x + 1$. Nije teko pokazati da je ova funkcija zaista bijekcija.

c) Promotrimo funkciju $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = x$. Ona je oito bijekcija s $[0, 1]$ na $[0, 1]$. Ideja e sada biti nju izmijeniti tako da $f(1)$ bude neki broj iz skupa $[0, 1\rangle$. Dodue, ako to napravimo, funkcija vie nee biti injekcija. Zaista, znamo da je $f(f(1)) = f(1)$, pa kad bi ona bila injekcija bilo bi $f(1) = 1$, to nije tono. Dakle, da bi izbjegli situaciju gdje funkcija poprima dvije jednake vrijednosti, moramo je izmijeniti i za $x = f(1)$. Injektivnost e se opet "pokvariti", ali emo tada funkciju moi opet izmijeniti u toki koja "kvari" injektivnost. Ovaj postupak ponavljamo u beskonanost. Zato ima smisla promotriti npr. funkciju $g : [0, 1] \to [0, 1\rangle$,

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \notin S, \\ \dfrac{x}{2}, & x \in S, \end{cases}$$

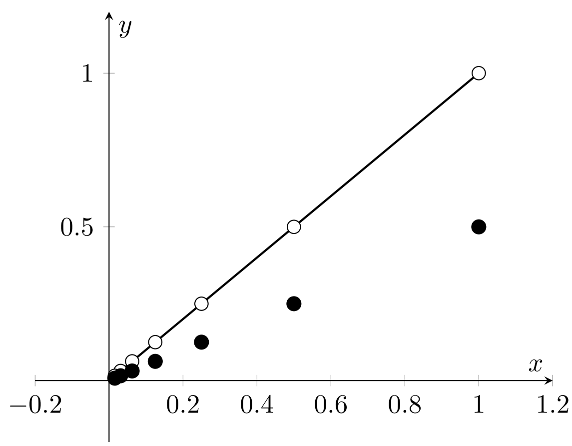
gdje je $S = \left\{ \dfrac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}_0 \right\}$.

Tvrdimo da je g injekcija. Zaista, neka su $x, y \in [0,1\rangle$ takvi da je $f(x) = f(y)$. Uoimo da ako je $x \in S$ ako i samo ako je $f(x) \in S$, pa ako je $f(x) = f(y)$, onda su ili x, y oboje u S, ili oboje nisu u S. U oba sluaja je oigledno $x = y$.

Tvrdimo da je g i surjekcija. Zaista, neka je $y \in [0,1\rangle$ proizvoljan. Ako je $y \notin S$, onda je $f(y) = y$, ako je $y \in S$, onda postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $y = \dfrac{1}{2^p}$. No tada je

$$g\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right) = \frac{1}{2^p},$$

gdje je $\dfrac{1}{2^{p-1}} \in S$, budui da je $y \neq 1$.



Slika 4.4: Graf funkcije iz zadatka 162 c)

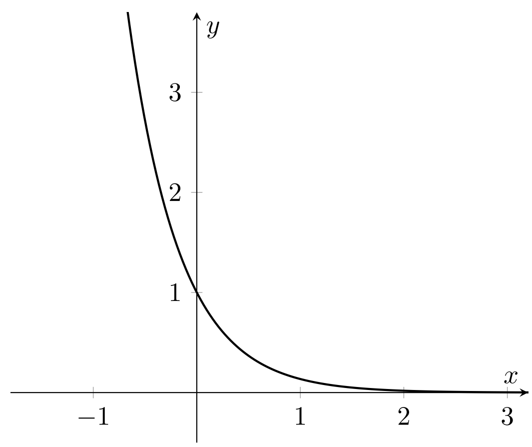
d) Tvrdimo da takva bijekcija ne postoji. Zaista, pretpostavimo da postoji bijekcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Tada je ona surjekcija, to znai da za svaki $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = y$, to povlai da je $f(x_0)(x_0) = y(x_0)$. No to oito ne vrijedi ako promotrimo funkciju $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu formulom $y(x) = f(x)(x) + 1$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Definicija 21. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neprazan, te $x, y \in S$. Kaemo da je funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ **monotono rastua** (krae: rastua) ako vrijedi $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, **strogo rastua** ako vrijedi $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$, **monotono padajua** (krae: padajua) ako vrijedi $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, **strogo padajua** ako vrijedi $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Napomena 31. Neka su $S, S' \subseteq \mathbb{R}$ neprazni i neka je zadana $f : S \to S'$. Ako je f strogo monotona (tj. strogo rastua ili strogo padajua), ona je injekcija.

Zadatak 163. Zadana je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2x}$. Dokaite da je f injekcija koristei se injenicom da je strogo monotona.

Rjeenje. Iz grafa se vidi da je f strogo padajua.



Slika 4.5: Graf funkcije $x \mapsto e^{-2x}$

Zaista, treba pokazati da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$x < y \Rightarrow e^{-2y} < e^{-2x}. \tag{4.1}$$

Uoimo da, kako je $e^x \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$ i $x \mapsto x^2$ i $x \mapsto \sqrt{x}$ strogo rastue funkcije, vrijedi

$$e^{-2y} < e^{-2x} \Leftrightarrow \frac{1}{(e^y)^2} < \frac{1}{(e^x)^2} \Leftrightarrow (e^x)^2 < (e^y)^2 \Leftrightarrow e^x < e^y.$$

Dakle (4.1) je ekvivalentno tvrdnji da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

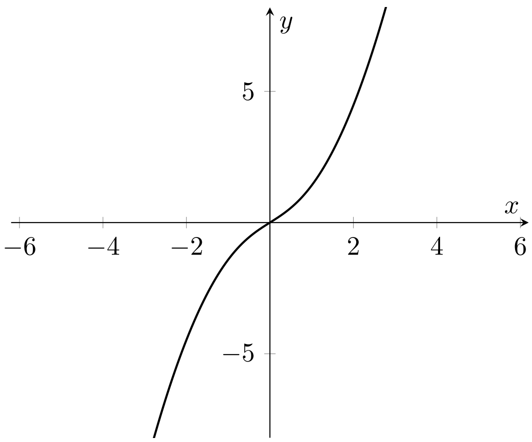
$$x < y \Rightarrow e^x < e^y,$$

to vrijedi, jer je funkcija $x \mapsto e^x$ strogo rastua. □

Definicija 22. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neprazan. Kaemo da je $f : S \to \mathbb{R}$ injekcija, odnosno surjekcija na nekom podskupu od $S' \subseteq S$ ako je $f|_{S'}$ injekcija, odnosno surjekcija. Takoer, kaemo da je f strogo rastua (padajua) na S' ako je $f|_{S'}$ strogo rastua (padajua) na S.

Zadatak 164. Dokaite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ injekcija.

Rjeenje. Iz grafa funkcije f vidi se da je ona strogo rastua.



Slika 4.6: Graf funkcije $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$

Dokaimo to! Uoimo da je $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ strogo rastua na $[0,\infty\rangle$ i strogo padajua na $\langle -\infty, 0]$. Zaista, za sve $x, y \geq 0$ vrijedi

$$x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow 1 + x^2 < 1 + y^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} < \sqrt{1+y^2}.$$

Analogno dobivamo i da f strogo pada na $\langle -\infty, 0]$. Neka su sada $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $x < y$. Razlikujemo tri sluaja.

a) $x \leq 0$, $y > 0$,

b) $x, y \geq 0$,

c) $x, y \leq 0$.

U sluaju a), $f(x) < f(y)$ je trivijalno, jer je $f(x) \leq 0$ i $f(y) > 0$.

U sluaju b) imamo $\sqrt{1+x^2} < \sqrt{1+y^2}$, pa mnoenjem s nejednakosti $x < y$ dobivamo $x\sqrt{1+x^2} < y\sqrt{1+y^2}$ (Uoimo da ovo smijemo zakljuiti, jer su ili $x, y > 0$, pa primjenjujemo napomenu 13, ili je $x = 0$ i $y > 0$, pa je tvrdnja oigledna).

U sluaju c) imamo $-y < -x$ i $-y, -x \geq 0$, pa iz b) slijedi

$$-y\sqrt{1+(-y)^2} < -x\sqrt{1+(-x)^2}.$$

Tvrdnja sada slijedi mnoenjem s -1 i koritenjem svojstva parnosti funkcije $x \mapsto x^2$, tj.

injenice da je $(-x)^2 = x^2$ za sve $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Slijede zadatci gdje odreujemo sliku $\mathcal{R}(f)$ zadane funkcije f.

Zadatak 165. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

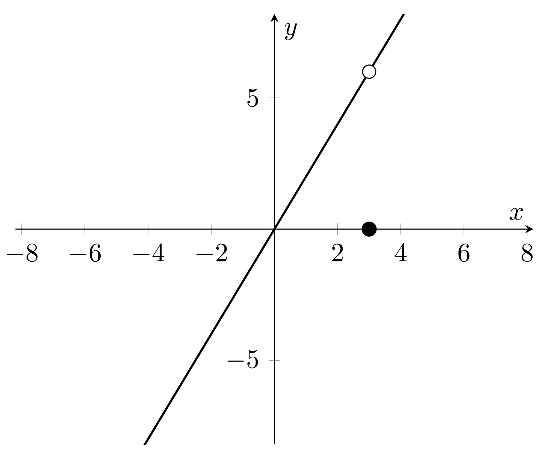
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 3, \\ 0, & x = 3. \end{cases}$$

Odredite $\mathcal{R}(f)$.

Rjeenje. Iz grafa funkcije f vidi se da je $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R} \setminus \{6\}$. Zaista, dokazat emo da je

$$\mathcal{R}(f) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{6\} \quad \text{i} \quad \mathbb{R} \setminus \{6\} \subseteq \mathcal{R}(f).$$

Neka je $y \in \mathbb{R}$ takav da je $y \neq 6$. Tvrdimo da tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x) = y$. Zaista, uzmimo $x = \dfrac{y}{2}$. Tada je $f\left(\dfrac{y}{2}\right) = y$ ako je $y \neq 0$, a isto vrijedi i za $y = 0$, jer je $f(0) = 0$.



Slika 4.7: Graf funkcije iz zadatka 165

S druge strane, neka je $y \in \mathcal{R}(f)$. Tvrdimo da je $y \neq 6$. Zaista, postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $y = f(x)$. Ako je $x < 3$, onda je $y = 2x < 6$, te analogno $y = 2x > 6$ za $x > 3$. Za $x = 3$ imamo $y = 0 \neq 6$, pa je tvrdnja dokazana. $\square$

Zadatak 166. Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 8}$. Odredite $\mathcal{R}(f)$.

Rjeenje. Po definiciji, $\mathcal{R}(f)$ je skup svih $k \in \mathbb{R}$ za koje postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 8} = k. \tag{4.2}$$

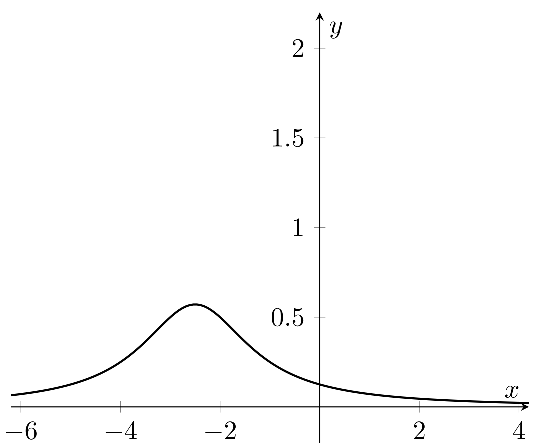
Jednakost (4.2) je ekvivalentna jednakosti

$$kx^2 + 5kx + 8k - 1 = 0.$$

Za $k = 0$ imamo $-1 = 0$, to ne vrijedi. Dakle, $0 \notin \mathcal{R}(f)$. Ako je $k \neq 0$, onda imamo kvadratnu jednadbu, za koju znamo da ima rjeenja ako i samo ako je

$$25k^2 - 4k(8k - 1) \geq 0, \text{ odnosno } 4k - 7k^2 \geq 0.$$

Rjeenje kvadratne nejednadbe $4k - 7k^2 \geq 0$ je $\left[0, \frac{4}{7}\right]$, ali kako je $k \neq 0$, zakljuujemo da postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi (4.2) ako i samo ako je $k \in \left\langle 0, \frac{4}{7} \right]$. Dakle, $\mathcal{R}(f) = \left\langle 0, \frac{4}{7} \right]$. $\square$



Slika 4.8: Graf funkcije iz zadatka 166

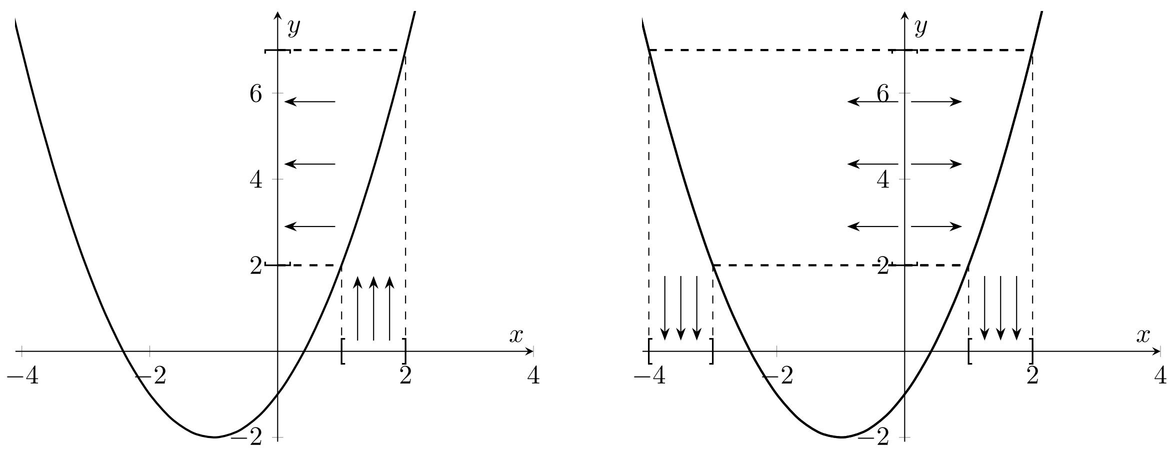
Napomena 32. Uoimo da iz slike 4.8 nije odmah jasno emu bi slika funkcije mogla biti jednaka. Dakle, osim radi matematike strogosti, ponekad se odreivanje slike po definiciji isplati upravo zato to daje tono, a ne priblino, rjeenje.

Definicija 23. Neka je zadana $f : A \to B$ i $S \subseteq A$, te $T \subseteq B$. Tada je **slika skupa** S u odnosu na f skup $f(S) = \{f(x) : x \in S\}$, a **praslika skupa** T u odnosu na f je skup $f^{-1}(T) = \{a \in A : f(a) \in T\}$. Dogovorno uzimamo $f(\emptyset) = \emptyset$ i $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Definicija 24. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}$ neprazan. Kaemo da je $f : S \to \mathbb{R}$ injekcija, odnosno surjekcija na nekom podskupu od $S' \subseteq S$ ako je $f|_{S'}$ injekcija, odnosno surjekcija. Takoer, kaemo da je f strogo rastua (padajua) na S' ako je $f|_{S'}$ strogo rastua (padajua) na S.

Zadatak 167. Zadana je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Odredite $f\big([1,2]\big)$ i $f^{-1}\big([2,7]\big)$.

Rjeenje. Iz grafa vidimo da je $f\big([1,2]\big) = [2,7]$, te $f^{-1}\big([2,7]\big) = [-4,-3] \cup [1,2]$.



(a) Slika skupa $[1,2]$ u odnosu na f

(b) Praslika skupa $[2,7]$ u odnosu na f

Slika 4.9: Graf funkcije $x \mapsto x^2 + 2x - 1$

Dokaimo da je $f^{-1}\big([2,7]\big) = [-4,-3] \cup [1,2]$. Trebamo pronai sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je $f(x) \in [2,7]$, tj. trebamo rijeiti sustav

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 1 \geq 2, \\ x^2 + 2x - 1 \leq 7, \end{cases}$$

Vrijedi

$$x^2 + 2x - 1 \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \langle -\infty, -3] \cup [1, \infty\rangle.$$

Analogno dobivamo da je $x^2 + 2x - 1 \leq 7$ ako i samo ako je $x \in [-4, 2]$. Rjeenje sustava je presjek ta dva skupa, to daje tvrdnju.

Dokaimo sada da je $f\big([1,2]\big) = [2,7]$. Neka je $y \in f\big([1,2]\big)$ proizvoljan. Po definiciji, postoji

$x \in [1, 2]$ za kojeg vrijedi

$$y = x^2 + 2x - 1. \tag{4.3}$$

Izrazimo li iz ove jednakosti x (Tako da je tretiramo kao kvadratnu jednadbu po x), dobivamo da je (4.3) ekvivalentno tvrdnji

$$x = -1 + \sqrt{y+2} \quad \text{ili} \quad x = -1 - \sqrt{y+2}. \tag{4.4}$$

Kako je $-1 - \sqrt{y+2} \leq -1$, kad bi vrijedilo $x = -1 - \sqrt{y+2}$, bilo bi $x \notin [1, 2]$, suprotno pretpostavci. Zakljuujemo da je (4.4) ekvivalentno tvrdnji $x = -1 + \sqrt{y+2}$.

Sada moramo ispitati nune i dovoljne uvjete da vrijedi

$$-1 + \sqrt{y+2} \in [1, 2],$$

tj. trebamo rijeiti sustav

$$\begin{cases} -1 + \sqrt{y+2} \geq 1, \\ -1 + \sqrt{y+2} \leq 2, \end{cases}$$

Imamo

$$-1 + \sqrt{y+2} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{y+2} \geq 2 \Leftrightarrow y + 2 \geq 4 \Leftrightarrow y \geq 2,$$

te se analogno dobije $y \leq 7$ iz drugog uvjeta. Dakle, pokazali smo da vrijedi $y \in f([1, 2])$ ako i samo ako vrijedi $y \in [2, 7]$, pa je tvrdnja dokazana. □

Napomena 33. Vidimo da to imamo "kompliciranije" funkcije, to je odreivanje slike zapravo tee. Zapravo, esto je jedna od najbitnijih tvrdnji o kojoj ovisi slika funkcije ta da f poprima svaku meuvrijednost, da je slika funkcije zaista interval, odnosno da u sebi nema "rupe". Ovo je jedan od mnogih razloga zato se pokazuje korisnim prouavanje *neprekidnih funkcija* na nekom skupu, to su, neformalno, funkcije iji graf nema prekide na nekom skupu, tj. izgleda kao da je nacrtan u jednom potezu. Kasnije na kolegiju ete vidjeti da sve funkcije neprekidne na segmentu imaju ovo svojstvo, i ako je neka funkcija neprekidna na nekom segmentu (a ovo svojstvo zadovoljava vrlo velika klasa funkcija) onda koristei ovo svojstvo relativno lako moemo matematiki precizno odrediti sliku. Time emo se jo baviti u poglavlju o neprekidnosti.

Napomena 34. Neka su $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ neprazni. Za funkciju $f : X \to Y$ i neprazne $A, B \subseteq X$, $C, D \subseteq Y$ vrijedi

- $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \qquad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D),$
- $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B), \qquad f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D),$
- $f\big(A \setminus B\big) \supseteq f(A) \setminus f(B), \qquad f^{-1}\big(C \setminus D\big) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D),$
- $A \subseteq f^{-1}(f(A)).$

Zadatak 168. Neka su A, B, X, Y i f isti kao i u napomeni 34. Dokaite $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

Dokaz. Neka je $y \in f(A \cup B)$. Tada postoji $x \in A \cup B$ takav da je $y = f(x)$. No ovo vrijedi ako i samo ako postoji $x \in A$ takav da je $y = f(x)$, ili postoji $x \in B$ takav da je $y = f(x)$, to zapravo znai $y \in f(A) \cup f(B)$. □

Zadatak 169. Dokaite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \langle -1, 1 \rangle$ zadana formulom $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ bijekcija.

Rjeenje. Dokaimo prvo injektivnost. Neka su x i y proizvoljni i neka vrijedi $f(x) = f(y)$, tj.

$$\frac{x}{1 + |x|} = \frac{y}{1 + |y|} \Leftrightarrow x\big(1 + |y|\big) = y\big(1 + |x|\big).$$

Kako je ovaj izraz simetrian, odnosno moemo zamijeniti mjesta varijablama x i y bez promjene smisla jednakosti, bez smanjenja openitosti moemo uzeti da je $x \leq y$. Sada imamo tri sluaja:

- $y \geq 0$ i $x \geq 0$,
- $y \leq 0$ i $x \leq 0$,
- $y \geq 0$ i $x \leq 0$.

U prvom sluaju imamo

$$x(1 + y) = y(1 + x),$$

to je ekvivalentno tvrdnji $x = y$. Drugi sluaj je analogan.

Trei sluaj je neto zahtjevniji. Ako je $y \geq 0$ i $x \leq 0$, onda je $|y| = y$ i $|x| = -x$. No to povlai da za sve tako odabrane x i y vrijedi

$$x(1 + y) = y(1 - x), \quad \text{odnosno} \quad x + 2xy - y = 0.$$

Rjeavanjem po y dobivamo
$$y = -\frac{x}{2x-1}.$$
Sada iz $x \leq 0$ slijedi $2x - 1 < 0$, pa iz toga i iz $y \geq 0$ imamo
$$y = -\frac{x}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 0.$$
Sada $x \leq 0$ i $x \geq 0$ povlai $x = 0$ i posljedino $y = 0$, pa oito vrijedi $x = y$.

Dokaimo sada surjektivnost. Zapravo treba pokazati da je $f(\mathbb{R}) = \langle -1, 1\rangle$. To e biti najlake koritenjem napomene 34. Znamo da je
$$f(\mathbb{R}) = f\big(\langle -\infty, 0] \cup [0, \infty\rangle\big) = f\big(\langle -\infty, 0]\big) \cup f\big([0, \infty\rangle\big)$$
Kako za $g = f|_{[0,\infty\rangle}$ vrijedi $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ i vrijedi $f\big([0,\infty\rangle\big) = g\big([0,\infty\rangle\big) = \mathcal{R}(g)$, slijedi da je $f\big([0,\infty\rangle\big) = [0,1\rangle$ i $f\big(\langle -\infty, 0]\big) = \langle -1, 0]$ (Uvjerite se u to!). Sada je $f(\mathbb{R}) = \langle -1, 1\rangle$ i tvrdnja je dokazana. □

4.3 Kompozicija funkcija. Inverzna funkcija

Definicija 25. Zadane su funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$. Ako je $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$, onda je funkcija $h : A \to D$, $h(x) = g(f(x))$ **kompozicija funkcija** f i g, i oznaavamo je s $h = g \circ f$.
Zadatak 170.

a) Zadana je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. Prikaite f kao kompoziciju jednostavnijih funkcija.

b) Zadana je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 4x$. Dokaite da postoje $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da se f moe prikazati kao kompozicija funkcija
$$f, g_a, h_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2,\ g_a(x) = x + a,\ h_b(x) = bx.$$

Rjeenje. a) Definiramo $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulama $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1 + x$, $f_3(x) = \sqrt{x}$. Tada je oito $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

b) Uoimo da je
$$2x^2 + 4x = 2(x+1)^2 - 2.$$
Odavde direktno slijedi $f = g_1 \circ f \circ g_{-1} \circ h_2$. □

Napomena 35. Vrijedi:

- Neka su S_1, S_2, S_3 i S neprazni. Zadane su $f_1 : S_1 \to S$, $f_2 : S_2 \to S$ i $f_3 : S_3 \to S$ za koje je $\mathcal{R}(f_1) \subseteq S_2$ i $\mathcal{R}(f_2) \subseteq S_3$. Tada su dobro definirane funkcije $(f_3 \circ f_2) \circ f_1$, $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ i vrijedi $(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$.
- Neka su $A, B, C, D \subseteq \mathbb{R}$ neprazni i neka su zadane injekcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$ takve da je $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$. Tada je i $g \circ f$ injekcija.
- Neka su $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ neprazni i neka su zadane surjekcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Tada je i $g \circ f$ surjekcija.
- Neka su $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ neprazni i neka su zadane bijekcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Tada je i $g \circ f$ bijekcija.

Zadatak 171. Dokaite da je $f : [0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = x^4 + 5x^2 + 6$ injekcija.

Rjeenje. Neka je $g_1 : [0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ zadana formulom $g_1(x) = x^2$, a $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $g_2(x) = x^2 + 5x + 6$. Kako je $\mathcal{R}(g_1) = [0, 1\rangle$ (Provjerite to, raunski ili pomou grafa!) i $\mathcal{D}(g_2) = [0, \infty\rangle$, te oito vrijedi $[0, 1\rangle \subseteq \mathbb{R}$, kompozicija $g_2 \circ g_1$ je definirana. Oito je g_1 strogo rastua, ali i g_2 je takoer strogo rastua, a to se (s trenutnim teorijskim aparatom) najlake pokazuje na sljedei nain. Neka su $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 \leq x < y$. Tada je oito $x + \dfrac{5}{2} < y + \dfrac{5}{2}$, a iz $x \geq 0$ i $y > 0$ slijedi

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 < \left(y + \frac{5}{2}\right)^2.$$

Sada vrijedi

$$x^2 + 5x + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} < \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

i tvrdnja je dokazana. To znai da su g_1 i g_2 injekcije, pa je i kompozicija $g_2 \circ g_1 = f$ takoer injekcija, ime smo dokazali poetnu tvrdnju. $\square$

Zadatak 172. Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Uvedimo oznaku: $\mathbb{N}_k := \{1, 2, \ldots, k\}$. Dokaite: Ako je $f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija, ona je i surjekcija.

Rjeenje. Tvrdnju dokazujemo indukcijom po k. Za $k = 1$ je jedina funkcija koja ima smisla ona koja preslikava 1 u 1, a ta je oito i injekcija i surjekcija.

Pretpostavimo da za $k \in \mathbb{N}$ vrijedi da je svaka funkcija i dokaimo da je injekcija $f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija, ona je i surjekcija. Neka je $f : \mathbb{N}_{k+1} \to \mathbb{N}_{k+1}$ injekcija. Tada je $f|_{\mathbb{N}_k}$ takoer injekcija.

Pretpostavimo da je $f(k + 1) = k + 1$, Tada je dobro definirana funkcija $g : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$, $g(n) = f(n)$ za sve $n \in \mathbb{N}_k$. Ona je oito injekcija, pa je po pretpostavci indukcije i surjekcija.

Sada uoimo da je

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \mathbb{N}_k, \\ k+1, & x = k+1, \end{cases}$$

i odavde se vidi da je f surjekcija. Zaista, ako je $y \in \mathbb{N}_k$, onda postoji $x \in \mathbb{N}_k$ takav da je $g(x) = f(x) = y$, a ako je $y = k+1$, onda je oito $f(k+1) = k+1$.

Preostaje dokazati tvrdnju u sluaju kad je $f(k+1) = i_0 \in \mathbb{N}_k$. Tvrdimo da postoji $j_0 \in \mathbb{N}_k$ takav da je $f(j_0) = k+1$. Zaista, ako takav j_0 ne postoji, onda je dobro definirana funkcija $f' : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$, $f'(x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{N}_k$. Oito je f' injekcija, pa je po pretpostavci indukcije i surjekcija, pa postoji $i_1 \in \mathbb{N}_k$ takav da je $f(i_1) = i_0 = f(k+1)$, dakle $i_1 = k+1$, to je nemogue.

Sada je ideja sljedea – za funkciju f vrijedi $f(k+1) = i_0$ i postoji $j_0 \in \mathbb{N}_k$ takav da je $f(j_0) = k+1$, pa promotrimo funkciju $F : \mathbb{N}_{k+1} \to \mathbb{N}_{k+1}$,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin \{j_0, k+1\}, \\ k+1, & x = k+1, \\ i_0, & x = j_0, \end{cases}$$

i pokaimo da je ona injekcija. U tu svrhu definiramo funkciju $h : \mathbb{N}_{k+1} \to \mathbb{N}_{k+1}$,

$$h(x) = \begin{cases} x, & x \notin \{i_0, k+1\}, \\ k+1, & x = i_0, \\ i_0, & x = k+1. \end{cases}$$

Nije teko provjeriti da je h injekcija (Dokaz je vrlo slian onome u zadatku 162 c)). Pokaimo da je $F = h \circ f$. Zaista, vrijedi

$$\begin{aligned} (h \circ f)(k+1) = h\big(f(k+1)\big) = h(i_0) = k+1 = F(k+1), \\ (h \circ f)(j_0) = h\big(f(j_0)\big) = h(k+1) = i_0 = F(j_0). \end{aligned}$$

Ako je $x \neq j_0$ i $x \neq k+1$, onda je $f(x) \neq k+1$ i $f(x) \neq i_0$, pa za $x \in \mathbb{N} \setminus \{j_0, k+1\}$ vrijedi

$$(h \circ f)(x) = h\big(f(x)\big) = f(x) = F(x),$$

ime smo pokazali da je $F = h \circ f$. Zakljuujemo da je F injekcija, kao kompozicija injekcija. Sada surjektivnost slijedi iz prvog dijela dokaza. $\square$

Zadatak 173. Neka su $f : X \to Y$ i $g : A \to B$ funkcije takve da je $\mathcal{R}(f) \subseteq A$. Dokaite da za neprazne $X_1 \subseteq X$ i $B_1 \subseteq B$ vrijedi

$$(g \circ f)(X_1) = g(f(X_1)) \quad \text{i} \quad (g \circ f)^{-1}(B_1) = f^{-1}(g^{-1}(B_1)).$$

Rjeenje. Dokaimo $(g \circ f)(X_1) = g(f(X_1))$, $(g \circ f)^{-1}(B_1) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ se pokazuje analogno. Neka je $y \in (g \circ f)(X_1)$ proizvoljan. To znai da postoji $x_1 \in X_1$ takav da je

$$y = g\big(f(x_1)\big).$$

No to vrijedi ako i samo ako postoji $x_2 \in f(X_1)$ takav da je $y = g(x_2)$, to je ekvivalentno tvrdnji $y \in g(f(X_1))$. $\square$

Definicija 26. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $f_1 : A_1 \to B_1$, $f_2 : A_2 \to B_2$, $\ldots$, $f_n : A_n \to B_n$ zadane funkcije, gdje su $A_i, B_i \subseteq \mathbb{N}$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Ako je $\mathcal{R}(f_i) \subseteq A_{i+1}$, za $i = 1, \ldots, n-1$, onda kompoziciju $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ definiramo induktivno:

$$f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 := \begin{cases} f_1, & n = 1 \\ f_n \circ (f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1), & n \geq 2. \end{cases}$$

Napomena 36. Iz zadatka 173 indukcijom lako slijede sljedee generalizacije: Ako su zadane funkcije f_1, f_2, $\ldots$, f_n kao u definiciji 26, onda za $A \subseteq A_1$ i $B \subseteq B_n$ vrijedi

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(A) = f_n(\ldots f_2(f_1(A)) \ldots),$$
$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)(B) = f_1^{-1}(\ldots f_{n-1}^{-1}(f_n^{-1}(B)) \ldots).$$

Nadalje, ako su f_i injekcije za sve $i = 1, \ldots, n$, onda je $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ ponovno injekcija. Ako su f_i surjekcije i vrijedi

$$B_i = A_{i+1}, \text{ za } i = 1, \ldots, n-1,$$

onda je $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ surjekcija.

Zadatak 174. Funkcija f je zadana formulom $x \mapsto 2^{\sin x^2}$. Odredite $\mathcal{R}(f)$.

Rjeenje. Uvedimo oznake: f_1 je $x \mapsto x^2$, f_2 je $x \mapsto \sin x$, f_3 je $x \mapsto 2^x$. Koristimo napomenu 36.

Vrijedi $f_1(\mathbb{R}) = \mathcal{R}(f_1) = [0, \infty\rangle$. Zaista, neka je $y \in \mathcal{R}(f_1)$. Tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $y = x^2$. Odavde imamo $y \geq 0$, pa je $\mathcal{R}(f_1) \subseteq [0, \infty\rangle$. S druge strane, ako je $q \geq 0$, onda je $\sqrt{q} \in [0, \infty\rangle$ i vrijedi $q = \sqrt{q}^2$, pa je $[0, \infty\rangle \subseteq \mathcal{R}(f_1)$, odakle slijedi tvrdnja.

Nadalje, vrijedi $f_2\big([0,\infty\rangle\big) = [-1,1]$. Ovo za sada ne dokazujemo, ali je oito iz grafa funkcije.

Nadalje, $f_3\big([-1,1]\big) = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Zaista, $y \in f_3\big([-1,1]\big)$ znai da postoji $x \in [-1,1]$ takav da je $y = 2^x$. Uoimo da je $y \mapsto \log_2 y$ dobro definirana, jer je $y = 2^x > 0$. Nadalje, f_3 je strogo rastua, pa je $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$, ime smo dobili $f_3\big([-1,1]\big) \subseteq \left[\frac{1}{2}, 2\right]$.

Dokaimo $\left[\frac{1}{2}, 2\right] \subseteq f_3\big([-1,1]\big)$. Uzmimo proizvoljan $q \in \mathbb{R}$ takav da je $\frac{1}{2} \leq q \leq 1$. Kako je $x \mapsto \log_2 x$ strogo rastua, vrijedi $-1 \leq \log_2 q \leq 1$ i oito $q = 2^{\log_2 q}$, pa je tvrdnja dokazana.

Dakle, slika od f je upravo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. □

Zadatak 175. Neka je zadana $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5^x - 5^{2x}$. Odredite $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right)$.

Rjeenje. Oznaimo s f_1 funkciju $x \mapsto x - x^2$, a s f_2 funkciju $x \mapsto 5^x$. Oito je $f = f_1 \circ f_2$.

Odredimo $f_1^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right)$. Trebamo odrediti sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je

$$\begin{cases} x - x^2 \geq 2, \\ x - x^2 \leq 7, \end{cases}$$

Rjeavanjem sustava dobivamo da je on ekvivalentan uvjetu $x \in [0,1]$.

Odredimo sada $f_2^{-1}\big([0,1]\big)$. Trebamo odrediti sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je $0 \leq 5^x \leq 1$. $0 \leq 5^x$ vrijedi za sve $x \in \mathbb{R}$, a $5^x \leq 1$ vrijedi ako i samo ako je $x \leq 0$, jer su $x \mapsto \log_5 x$ i f_2 strogo rastue.

Dakle, $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{4}\right]\right) = \langle -\infty, 0]$. □

Definicija 27 (Hiperbolne funkcije)**.** Funkcije $\mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \mathrm{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane su formulama

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

a funkcija $\mathrm{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ je definirana formulom

$$\mathrm{cth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Funkcija sh je **sinus hiperbolni**, ch **kosinus hiperbolni**, th **tangens hiperbolni**, a cth **kotangens hiperbolni**.

Zadatak 176. Koristei injenicu da je slika funkcije $x \mapsto e^x$ jednaka $\langle 0, \infty\rangle$, dokaite da je $\mathcal{R}(\mathrm{ch}) = [1, \infty\rangle$.

Rjeenje. Neka je $g_1(x) = e^x$, $g_2(x) = \dfrac{x + \frac{1}{x}}{2}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\mathrm{ch} = g_2 \circ g_1$, odakle slijedi da trebamo pokazati da je $\mathcal{R}(\mathrm{ch}) = g_2(\langle 0, \infty\rangle) = [1, \infty\rangle$. Zaista, za sve $y \in [1, \infty\rangle$ postoji $x > 0$ takav da je $y = \dfrac{x + \frac{1}{x}}{2}$, jer rjeavanjem jednadbe po x vidimo da moemo uzeti

$$x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

To pokazuje da je $[1, \infty\rangle \subseteq g_2(\langle 0, \infty\rangle)$. Vrijedi i $[1, \infty\rangle \supseteq g_2(\langle 0, \infty\rangle)$, jer za sve $x > 0$ vrijedi

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1.$$

Zaista, rjeavanjem nejednadbe dobivamo da je ta tvrdnja ekvivalentna s istinitom tvrdnjom $(x - 1)^2 \geq 0$. □

Zadatak 177.

a) Zadane su $f, g : S \to \mathbb{R}$, gdje je $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$. Dokaite: Ako su f i g strogo rastue, onda je i $f + g$ strogo rastua. Vrijedi li tvrdnja i za strogo padajue funkcije?

b) Zadane su $f_1 : S_1 \to \mathbb{R}$ i $f_2 : S_2 \to \mathbb{R}$, gdje su $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$ neprazni, te neka je $\mathcal{R}(f_1) \subseteq S_2$. Dokaite: Ako su f_1 i f_2 strogo rastue, onda je takva i $f_2 \circ f_1$. Vrijedi li tvrdnja i za strogo padajue funkcije?

c) Dokaite da je funkcija $x \mapsto 2^{\mathrm{sh}\, x}$ injekcija.

Rjeenje. a) Neka su $x, y \in S$ takvi da je $x < y$. Tada je $f(x) < f(y)$ i $g(x) < g(y)$. Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo

$$f(x) + g(x) < f(y) + g(y), \text{ odnosno } (f + g)(x) < (f + g)(y),$$

to smo i tvrdili. Tvrdnja vrijedi i za strogo padajue funkcije i dokaz je potpuno analogan.

b) Neka su $x, y \in S$ takvi da je $x < y$. Zbog strogog rasta od f_1 imamo $f_1(x) < f_1(y)$, te zbog strogog rasta od f_2 imamo $f_2\big(f_1(x)\big) < f_2\big(f_1(y)\big)$, odnosno $(f_2 \circ f_1)(x) < (f_2 \circ f_1)(y)$.

Lako se vidi da tvrdnja ne vrijedi za strogo padajue funkcije, npr. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x$ je strogo padajua, a $g \circ g$ nije strogo padajua.

tovie, tvrdimo da je kompozicija dvije strogo padajue funkcije uvijek strogo rastua. Zaista, uzmimo f_1 i f_2 iz uvjeta zadatka i pretpostavimo da su one strogo padajue, te neka su $x, y \in S$ takvi da je $x < y$. Zbog strogog pada od f_1 imamo $f_1(x) > f_2(x)$, te zbog strogog pada od f_2 imamo $f_2\big(f_1(x)\big) < f_2\big(f_1(y)\big)$.

c) Prvo emo dokazati da je sh injekcija i to tako da emo pokazati da je strogo rastua. Naime, lako je pokazati da je $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_1(x) = \dfrac{e^x}{2}$ strogo rastua i $g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_2(x) = \dfrac{e^{-x}}{2}$ strogo padajua. Kako je graf funkcije $g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_3(x) = -\dfrac{e^{-x}}{2}$ osna simetrija grafa funkcije g_2 u odnosu na os y, nasluujemo da je g_3 strogo rastua.

Zaista, ako je $S \subseteq \mathbb{R}$ neprazan i $f : S \to \mathbb{R}$ strogo padajua, onda je $-f$ strogo padajua i obratno, jer uzmemo li proizvoljne $x, y \in S$, $x < y$ povlai $f(x) > f(y)$, to povlai $-f(x) < -f(y)$, ime je tvrdnja pokazana.

Sada je sh injekcija jer je strogo rastua, a strogo je rastua jer su g_1 i g_3 strogo rastue i vrijedi $\mathrm{sh} = g_3 + g_1$.

No kako je i $x \mapsto 2^x$ injekcija, slijedi da je $x \mapsto 2^{\operatorname{sh} x}$ injekcija, jer je ona kompozicija dvaju injekcija. $\square$

Napomena 37. Openito, indukcijom moemo pokazati da ako imamo kompoziciju parno mnogo strogo padajuih funkcija, kompozicija e biti strogo rastua, a u sluaju kompozicije neparno mnogo strogo padajuih funkcija, kompozicija je strogo padajua. Radi ilustracije, dokaimo tvrdnju za kompoziciju parnog broja funkcija, drugi sluaj dokazuje se potpuno analogno.

Neka su f_1, f_2, $\ldots$, f_{2n-1}, f_{2n} definirane kao u definiciji 26 i napomeni 36. Baza indukcije je ve dokazana, pa pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n.

Dokaimo tvrdnju za $n+1$. Kompozicija $(f_{2n+2} \circ f_{2n+1}) \circ (f_{2n} \circ \cdots \circ f_1)$ je dobro definirana i vrijedi[2]

$$f_{2n+2} \circ f_{2n+1} \circ f_{2n} \circ \cdots \circ f_1 = (f_{2n+2} \circ f_{2n+1}) \circ (f_{2n} \circ \cdots \circ f_1),$$

gdje su funkcije u zagradama obje strogo rastue, gdje strogi rast funkcije $f_{2n+2} \circ f_{2n+1}$ izlazi iz baze indukcije, a strogi rast funkcije $f_{2n} \circ \cdots \circ f_1$ iz pretpostavke indukcije. Sada tvrdnja slijedi iz a).

[2] Dokaz ove tvrdnje bi se proveo slino kao u zadatku 64, samo bi prvo trebalo pokazati da je $(f_{2n+2} \circ f_{2n+1}) \circ (f_{2n} \circ \cdots \circ f_1)$ zaista dobro definirana.

Definicija 28. Neka su $S, S' \subseteq \mathbb{R}$ neprazni i neka je zadana injekcija $f : S \to S'$. Tada svakom $y \in \mathcal{R}(f)$ odgovara jedinstveni $x \in S$ takav da je $y = f(x)$. Funkcija $f^{-1} : \mathcal{R}(f) \to S$, $f^{-1}(y) = x$ zove se **inverzna funkcija** od f.

Zadatak 178. Zadana je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{2x+1}$. Odredite inverznu funkciju, ako postoji.

Dokaz. Promotrimo $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 2x + 1$. Uoimo da su f_1 i f_2 injekcije i vrijedi $f = f_1 \circ f_2$, pa je i f injekcija. Zato ona ima inverznu funkciju. Uoimo, nadalje, da je $f_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ i $f_1(\mathbb{R}) = \langle 0, \infty\rangle$, pa je $\mathcal{R}(f) = \langle 0, \infty\rangle$. To znai da svakom $y \in \langle 0, \infty\rangle$ odgovara jedinstveni $x \in \mathbb{R}$ takav da je $y = e^{2x+1}$. Logaritmiranjem dobivamo

$$\log_2 y = 2x + 1, \text{ odnosno } x = \frac{\log_2 y - 1}{2}.$$

Dakle, to je upravo traeni $x \in \mathbb{R}$. Zakljuujemo da je inverzna funkcija $f^{-1} : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \dfrac{\log_2 x - 1}{2}$. □

Napomena 38. Zapravo, u zadatku 178 nije trebalo pokazivati da je f injekcija, jer to slijedi iz injenice da je

$$y = e^{2x+1} \Leftrightarrow x = \frac{\log_2 y - 1}{2}.$$

Napomena 39 (Teorem o inverznoj funkciji strogo monotone funkcije). Neka su $S, S' \subseteq \mathbb{R}$ neprazni i $f : S \to S'$ strogo rastua (padajua). Tada f ima inverznu funkciju koja strogo raste (strogo pada).

Iz prethodne napomene slijedi da sve funkcije

$$\mathrm{Sin} := \sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}, \quad \mathrm{Cos} := \cos|_{[0,\pi]}, \quad \mathrm{Tg} := \mathrm{tg}|_{\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle}, \quad \mathrm{Ctg} := \mathrm{ctg}|_{\langle 0,\pi\rangle}$$

imaju inverze, jer su strogo monotone. Funkciju $\arcsin := \mathrm{Sin}^{-1}$ zovemo **arkus sinus**, $\arccos := \mathrm{Cos}^{-1}$ je **arkus kosinus**, $\mathrm{arctg} := \mathrm{Tg}^{-1}$ je **arkus tangens**, $\mathrm{arcctg} := \mathrm{Ctg}^{-1}$ je **arkus kotangens**.

Slino definiramo i tzv. **area funkcije** – $\mathrm{arsh} := \mathrm{sh}^{-1}$ je **area sinus hiperbolni**, $\mathrm{arch} := \mathrm{ch}|_{[0,\infty\rangle}{}^{-1}$ je **area kosinus hiperbolni**, $\mathrm{arth} := \mathrm{th}^{-1}$ je **area tangens hiperbolni**, a $\mathrm{arcth} := \mathrm{cth}|_{\langle 0,\infty\rangle}{}^{-1}$

Zadatak 179. Zadana je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2^x$. Dokaite da postoji f^{-1} i odredite $f^{-1}(6)$.

Rjeenje. Promotrimo $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x$, i $f_2(x) = 2^x$. f_1 i f_2 su strogo rastue i vrijedi $f = f_1 + f_2$, pa je i f strogo rastua. Zato ona ima inverznu funkciju. Sada tvrdimo da je

$6 \in \mathcal{R}(f)$. Zaista, vrijedi $6 = 2 + 2^2$, i 2 je zbog injektivnosti jedini broj za koji to vrijedi. Sada iz definicije inverzne funkcije imamo $f^{-1}(6) = 2$. $\square$

Napomena 40. Ako su $f : S \to S_1$ i $g : S_2 \to S_3$ injekcije i vrijedi $\mathcal{R}(f) \subseteq S_2$, onda je i $g \circ f$ injekcija i vrijedi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Openito, ako imamo injekcije f_1, f_2, f_3, $\dots$, f_n definirane kao u definiciji 26 i napomeni 36, onda je $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$ bijekcija, $f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}$ dobro definirana i vrijedi

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}.$$

Zadatak 180. Zadana je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \sqrt{1 + e^x}$. Dokaite da ona ima inverznu funkciju i odredite tu funkciju.

Rjeenje. Promotrimo funkcije $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = e^x$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 1 + x$, $f_3 : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \sqrt{x}$, $f_4 : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \ln x$. Sve ove funkcije su injekcije i vrijedi $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$. Zato je i f injekcija, pa ima inverznu funkciju. Nadalje, pripadne inverzne funkcije su

$$\begin{aligned} f_1^{-1} : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}, &\quad f_1^{-1}(x) = \ln x, \\ f_2^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f_2^{-1}(x) = x - 1, \\ f_3^{-1} : \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle, &\quad f_3^{-1}(x) = x^2, \\ f_4^{-1} : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty\rangle, &\quad f_4^{-1}(x) = e^x, \end{aligned}$$

pa je inverzna funkcija $f^{-1} : \langle 0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirana formulom $f^{-1}(x) = \ln(e^{2x} - 1)$. $\square$

Zadatak 181. Dokaite da za sve $x \in [-1, 1]$ vrijedi $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

Rjeenje. Sjetimo se da za sve $p, q \in \mathbb{R}$ vrijedi $\sin(p + q) = \sin p \cos q + \cos p \sin q$. Zato za sve $x \in [-1, 1]$ vrijedi

$$\sin(\arcsin x + \arccos x) = \sin(\arcsin x)\cos(\arccos x) + \cos(\arcsin x)\sin(\arccos x) \tag{4.5}$$

Odredimo $\sin(\arccos x)$. Kako je $\arccos x \in [0, \pi]$, vrijedi $\sin(\arccos x) \geq 0$, pa vrijedi

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{\sin^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Analogno dobivamo $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$. Zbog ovog i zbog injenice da je $1 - x^2 \geq 0$ je (4.5) jednako

$$x^2 + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

Dakle, za svaki $x \in [-1,1]$ postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Meutim, kako je $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$ i $0 \leq \arccos x \leq \pi$, slijedi

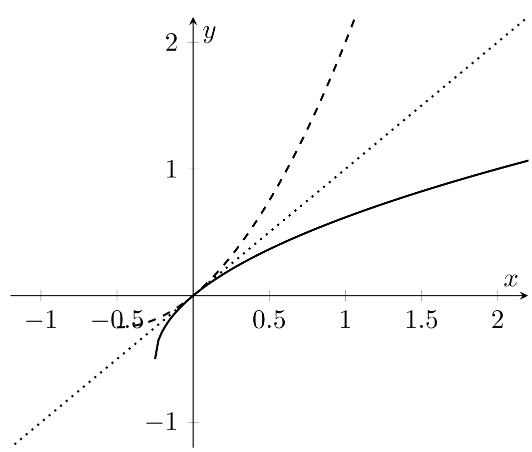
$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arccos x \leq \frac{3\pi}{2}. \tag{4.6}$$

Sada se lako vidi da za proizvoljan $x \in [-1,1]$ vrijedi $k = 0$, jer inae bi dobili kontradikciju s (4.6). $\square$

Napomena 41. Neka je $x \mapsto f(x)$ funkcija zadana formulom i neka je ona injekcija. Tada je graf njezine inverzne funkcije dobiven zrcaljenjem s obzirom na pravac $y = x$.

Zadatak 182. Nacrtajte graf funkcije $f : \left[-\frac{1}{2}, \infty\right\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ i njezine inverzne funkcije.

Rjeenje. Funkciju f moemo nacrtati tako da promotrimo $f_1, f_2 : \left[-\frac{1}{2}, \infty\right\rangle \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ i uoimo da je $f = f_1 + f_2$, ali i tako da pronaemo neke njezine karakteristine toke. Na slici 4.10 funkcija f je prikazana iscrtkanom, pravac $y = x$ tokastom, a f^{-1} punom linijom. $\square$



Slika 4.10: Graf funkcije iz zadatka 182

4.4 Rastav na parcijalne razlomke

Definicija 29. Racionalna funkcija je funkcija oblika

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)},$$

gdje su f i g polinomi i $g \neq 0$ za bar jedan $x \in \mathbb{R}$. Ako je $\operatorname{st} f < \operatorname{st} g$, onda kaemo da je ona **prava** racionalna funkcija, a ako je $\operatorname{st} f \geq \operatorname{st} g$, kaemo da je ona **neprava**.

Napomena 42 (O rastavu prave racionalne funkcije na parcijalne razlomke)*.* Neka su f i $g \neq 0$ polinomi. Svaka prava racionalna funkcija $x \mapsto R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ moe se na jedinstven nain prikazati kao zbroj parcijalnih razlomaka. Preciznije, zapiimo $g(x)$ u obliku

$$g(x) = (x - x_1)^{k_1} \dots (x - x_s)^{k_s} (x^2 + a_1 x + b_1)^{l_1} \dots (x^2 + a_r x + b_r)^{l_r}.$$

Tada postoje jedinstveni realni brojevi $A_1, \dots, A_{k_1}, D_1, \dots, D_{k_s}, M_1, N_1, \dots, M_{l_1}, N_{l_1}, \dots R_1$, $S_1, \dots, R_{l_r}, S_{l_r} \in \mathbb{R}$ takvi da za sve x iz domene funkcije $x \mapsto R(x)$ vrijedi

$$\begin{aligned} R(x) = {} & \frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \dots + \frac{D_1}{x - x_s} + \dots + \frac{D_{k_s}}{(x - x_s)^{k_s}} \\ & + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + a_1 x + b_1} + \dots + \frac{M_{l_1} x + N_{l_1}}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{l_1}} + \dots \\ & + \frac{R_1 x + S_1}{x^2 + a_r x + b_r} + \dots + \frac{R_{l_r} x + S_{l_r}}{(x^2 + a_r x + b_r)^{l_r}}. \end{aligned}$$

Pri rjeavanju zadataka trebat e nam jo i sljedei rezultat.

Napomena 43*.* Neka je S podskup od $\mathbb{R}$ koji se sastoji od svih realnih brojeva, osim moda njih konano mnogo. Zadane su funkcije $f, g : S \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_l x^l,$$

gdje su $a_n, b_m \neq 0$. Tada vrijedi $f = g$ ako i samo ako je $m = n$ i $a_j = b_j$ za sve $j = 0, 1, \dots, n$.

Prethodna tvrdnja je zapravo generalizacija teorema o jednakosti polinoma i na one polinome koji nisu definirani na cijelom $\mathbb{R}$.[3] Meutim, dokaz je potpuno analogan.[4]

Zadatak 183. Rastavite funkciju $x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x+3)^2}$ na parcijalne razlomke.

[3] U strogom smislu, takve funkcije nisu polinomi, jer ste na predavanju sve polinome definirali na cijelom $\mathbb{R}$, v. [3].

[4] v. [12], str. 58, 59. Za vjebu pokuajte uoiti to bi trebalo promijeniti u dokazu teorema 1 i 2.

Rjeenje. Prema napomeni 42 znamo da postoje i jedinstveni su brojevi A, B i C takvi da za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$ vrijedi

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}.$$

elimo odrediti A, B i C. Pomnoimo li obje strane s $(x+2)(x+3)^2$, proirivanjem dobivamo da za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$ vrijedi

$$1 = Ax^2 + 6Ax + 9A + Bx^2 + 5Bx + 6B + Cx + 2C,$$

odnosno

$$1 = (A+B)x^2 + (6A + 5B + C)x + (9A + 6B + 2C).$$

Iz prethodnog imamo da su

$$P_1, P_2 : \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\} \to \mathbb{R},\ P_1(x) = 1,\ P_2(x) = (A+B)x^2 + (6A+5B+C)x + (9A+6B+2C)$$

jednaki, pa iz napomene 43 slijedi

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 6A + 5B + C = 0, \\ 9A + 6B + 2C = 1. \end{cases}$$

Rjeavanjem prethodnog sustava dobivamo $A = 1$, $B = -1$ i $C = -1$, pa zakljuujemo da je

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{(x+3)^2}.$$

$\square$

Zadatak 184. Dokaite da je funkcija zadana formulom $x \mapsto R(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 + 9x + 1}{x^2 + 5x + 6}$ injekcija na $\langle -2, \infty \rangle$.

Rjeenje. Ideja je $R(x)$ prikazati kao sumu jednostavnijih razlomaka, u nadi da emo funkciju iz zadatka moi prikazati kao zbroj strogo rastuih funkcija. Dijeljenjem polinoma imamo

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 1}{x^2 + 5x + 6} = x + 1 + \frac{-2x - 5}{x^2 + 5x + 6}.$$

Rastavimo $x \mapsto \dfrac{-2x - 5}{x^2 + 5x + 6}$ na parcijalne razlomke. Faktorizacijom nazivnika dobivamo

$x^2 + 5x + 6 = (x+3)(x+2)$. Slijedi da postoje jedinstveni A, $B \in \mathbb{R}$ takvi da za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$ vrijedi

$$\frac{-2x-5}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3},$$

te mnoenjem s $(x+2)(x+3)$ dobivamo

$$-2x - 5 = A(x+3) + B(x+2), \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}. \tag{4.7}$$

Analogno kao u prethodnom zadatku dobivamo $A, B = -1$. To znai da vrijedi

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 1}{x^2 + 5x + 6} = x + 1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}$$

za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$, pa specijalno i za sve $x \in \langle -2, \infty \rangle$. Kako su $x \mapsto x+1$, $x \mapsto -\dfrac{1}{x+2}$, $x \mapsto -\dfrac{1}{x+3}$ strogo rastue na $\langle -2, \infty \rangle$, slijedi i da je poetna funkcija strogo rastua na tom intervalu. $\square$

Napomena 44. Na ovome mjestu bi bilo dobro spomenuti jedan trik koji bi u situacijama poput ove mogao utedjeti vrijeme. Naime, da bi odredili A i B dovoljno je u (4.7) uvrstiti $x = -2$ i $x = -3$, respektivno. Meutim, nije odmah oigledno da to moemo, jer u (4.7) nemamo jednakost polinoma i u tokama $x = 2$, $x = 3$.

Tvrdimo da su polinomi jednaki i u tim tokama. Zaista, znamo da svaki polinom koji nije konstanta ima najvie n nultoaka, gdje je $n \in \mathbb{N}$ stupanj polinoma. Kontrapozicijom dobivamo da ako proizvoljan polinom ima beskonano mnogo nultoaka, onda je on nuno konstanta. No lako vidimo da je jedini polinom koji uope ima nultoku nul-polinom.

Posljedica prethodne tvrdnje je sljedea – ako su dva polinoma jednaka u beskonano mnogo toaka, onda su oni jednaki za sve realne brojeve. Zaista, neka su f i g polinomi koji su jednaki u beskonano mnogo toaka. No tada $f - g$ ima beskonano mnogo nultoaka, a to znai da je $f - g = 0$, odnosno $f = g$. Time smo dokazali tvrdnju.

Kako su u naem sluaju polinomi $x \mapsto -2x - 5$ i $x \mapsto A(x+3) + B(x+2)$ oito jednaki u beskonano mnogo toaka, oni su sigurno jednaki i u $x = -2$ i $x = -3$, to smo i tvrdili.

4.5 Prirodna domena

Napomena 45. Neka je $x \mapsto f(x)$ funkcija zadana formulom. Skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koju je $f(x)$ dobro definiran zove se **prirodna domena** funkcije f.

Zadatak 185. Odredite prirodnu domenu funkcije $x \mapsto f(x)$, ako je

a) $f(x) = \sqrt{\log_2(x^2 - 1)}$,

b) $f(x) = \operatorname{arch}(x^2 - 4x) + \operatorname{cth}(x - 6)$,

c) $f(x) = \operatorname{arth} \sqrt{x} + \log_2(x + 2)$.

Rjeenje. a) Uoimo da je domena od $x \mapsto \log_2 x$ jednaka $\mathbb{R}^+$, a domena od $x \mapsto \sqrt{x}$ jednaka $[0, \infty\rangle$. Zato trebaju biti zadovoljeni sljedei uvjeti:

- $x^2 - 1 > 0$,
- $\log_2(x^2 - 1) \geq 0$.

Prvi uvjet vrijedi ako i samo ako je $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$.

Promotrimo drugi uvjet. Uoimo da vrijedi

$$\log_2(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 1,$$

za sve $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty\rangle$ (Uvjerite se u to!). No ovo je ekvivalentno tvrdnji $x \in \langle -\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2}, \infty\rangle$. Dakle, domena funkcije f je upravo

$$\langle -\infty, -\sqrt{2}\rangle \cup \langle \sqrt{2}, \infty\rangle.$$

b) Uoimo da je domena od $x \mapsto \operatorname{arch} x$ jednaka $[1, \infty\rangle$, a domena od $x \mapsto \operatorname{cth} x$ je jednaka $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Imamo sljedee uvjete:

- $x^2 - 4x \geq 1$,
- $x - 6 \neq 0$, odnosno $x \neq 6$.

Rjeenje nejednadbe $x^2 - 4x \geq 1$ je $x \in \langle -\infty, 2 - \sqrt{5}] \cup [2 + \sqrt{5}, \infty\rangle$, pa je domena

$$\langle -\infty, 2 - \sqrt{5}] \cup [2 + \sqrt{5}, \infty\rangle \setminus \{6\}.$$

c) Uoimo da je domena od $x \mapsto \operatorname{arth} x$ jednaka $\langle -1, 1\rangle$. Odavde slijedi da trebaju biti zadovoljeni sljedei uvjeti:

- $x \geq 0$,
- $x + 2 > 0$, odnosno $x > -2$,
- $\sqrt{x} \in \langle -1, 1\rangle$.

Primijetimo da drugi uvjet moemo zanemariti. Nadalje, treba vrijediti $\sqrt{x} > -1$ i $\sqrt{x} < 1$. $\sqrt{x} > -1$ je istinita za sve realne x, pa je moemo zanemariti. Nadalje, vrijedi $\sqrt{x} < 1$ ako i samo ako vrijedi $x < 1$. Dakle, domena poetne funkcije je $[0, 1\rangle$. □

Zadatak 186. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$\arcsin \frac{\log_2(x+2)}{2} = \sqrt{-x - \frac{7}{4}} - \frac{\pi}{2}.$$

Rjeenje. Prvo bi bilo dobro vidjeti kad su oba izraza definirana. Drugim rijeima, trebamo odrediti prirodne domene funkcija $x \mapsto \arcsin \frac{\log_2(x+2)}{2}$ i $x \mapsto \sqrt{-x - \frac{7}{4}} - \frac{\pi}{2}$. Lako se vidi da je domena funkcije $x \mapsto \sqrt{-x - \frac{7}{4}} - \frac{\pi}{2}$ jednaka $\left\langle -\infty, -\frac{7}{4}\right]$.

Odredimo domenu funkcije $x \mapsto \arcsin \frac{\log_2(x+2)}{2}$. Sjetimo se da je domena funkcije $x \mapsto \arcsin x$ jednaka $[-1, 1]$. Zato trebaju biti zadovoljeni sljedei uvjeti:

- $x + 2 > 0$, odnosno $x > -2$,
- $\frac{\log_2(x+2)}{2} \in [-1, 1]$.

Oito za sve $x > -2$ vrijedi $\frac{\log_2(x+2)}{2} \in [-1, 1]$ ako i samo ako je

$$-2 \leq \log_2(x+2) \leq 2,$$

to je ekvivalentno tvrdnji

$$\frac{1}{4} \leq x + 2 \leq 4,$$

to vrijedi ako i samo ako je $x \in \left[-\frac{7}{4}, 2\right]$. Dakle jedini realan broj za kojeg su oba izraza definirana je upravo $\frac{7}{4}$. No lako se provjeri da $x \mapsto \arcsin \frac{\log_2(x+2)}{2}$ i $x \mapsto \sqrt{-x - \frac{7}{4}} - \frac{\pi}{2}$ poprimaju vrijednost $-\frac{\pi}{2}$ za $x = \frac{7}{4}$. Zato je to jedino rjeenje poetne jednadbe. □

Zadatak 187. Neka je $x \mapsto f(x)$ funkcija zadana formulom $f(x) = \arccos\left(\operatorname{tg}\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$. Odredite prirodnu domenu ove funkcije.

Rjeenje. Trebaju biti zadovoljeni sljedei uvjeti:

- $x \neq 0$,
- $1 + \dfrac{1}{x} \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$,
- $\mathrm{tg}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \in [-1, 1]$.

Vrijedi $\mathrm{tg}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) \in [-1, 1]$ ako i samo ako je

$$1 + \frac{1}{x} \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right], \tag{4.8}$$

odnosno ako i samo ako (v. napomenu 23) postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je

$$-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq 1 + \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Primijetimo da (4.8) obuhvaa i injenicu $1 + \dfrac{1}{x} \notin \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$. Uoimo da je (4.8) ekvivalentno uvjetu

$$-\frac{\pi}{4} - 1 + k\pi \leq \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{4} - 1 + k\pi. \tag{4.9}$$

Htjeli bismo odavde dobiti u kojem segmentu se nalazi x. Uoimo prvo da su svi intervali $\left[-\dfrac{\pi}{4} - 1 + k\pi, \dfrac{\pi}{4} - 1 + k\pi\right]$ podskupovi jednog (i samo jednog) od skupova $\langle -\infty, 0\rangle$ i $\langle 0, \infty\rangle$. Zaista, za $k \geq 1$ vrijedi

$$-\frac{\pi}{4} - 1 + k\pi \geq -\frac{\pi}{4} - 1 + \pi > 0$$

i analogno $\dfrac{\pi}{4} - 1 + k\pi < 0$ za $k \leq 0$. Dakle, za $k \geq 1$ imamo $\dfrac{1}{x} > 0$, odnosno $x > 0$, pa moemo "mnoiti" s x i $\dfrac{\pi}{4} - 1 + k\pi$. U tom sluaju dobivamo

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{4} - 1 + k\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{4} - 1 + k\pi}\right],$$

Analogno, ako je $k \leq 0$, onda takoer moemo "mnoiti" s x i $\dfrac{\pi}{4} - 1 + k\pi$, ali se pritom mijenja predznak. Analogno dobivamo

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{4}-1+k\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{4}-1+k\pi}\right],$$

te kako oba uvjeta obuhvaaju i uvjet $x \neq 0$ (jer su ili oba "ruba" segmenta negativna ili oba pozitivna), slijedi da je prirodna domena poetne funkcije upravo

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{4}-1+k\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{4}-1+k\pi}\right] \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{4}-1+k\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{4}-1+k\pi}\right]$$
$$= \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{1}{\frac{\pi}{4}-1+k\pi}, \frac{1}{-\frac{\pi}{4}-1+k\pi}\right].$$

$\square$

Napomena 46. Uoite da smo u prethodnom zadatku primijenili vrlo intuitivnu injenicu da je za sve familije $\mathcal{F} = \{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{F}' = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ i $\mathcal{F}'' = \{A_n : n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$,

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} A_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_n \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} A_n.$$

Dokaimo to! Zaista, vrijedi $x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_n \cup \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}} A_n$ ako i samo ako ili postoji $i \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in A_i$, ili postoji $j \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ takav da je $x \in A_j$. Oito, to vrijedi ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{Z}$ takav da je $x \in A_k$, tj. $x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} A_n$.

4.6 Periodine funkcije

Definicija 30. Neka je zadana funkcija $f : A \to B$, A, $B \subseteq \mathbb{R}$ i $\tau > 0$. Kaemo da je f **periodina s periodom** τ ako za sve $x \in A$ vrijedi $x + \tau \in A$ i $f(x + \tau) = f(x)$. Najmanji od svih perioda, ako postoji, zvat emo **temeljnim periodom**.

Lako vidimo iz grafova od sin i cos da su oni periodini s temeljnim periodom 2π. Nadalje, funkcija $x \mapsto c$, $c \in \mathbb{R}$ je periodina i ona nema temeljni period.

Zadatak 188. Dokaite da je $x \mapsto \sin x$ periodina s temeljnim periodom 2π.

Rjeenje. Znamo da $x \mapsto \sin x$ ima domenu $\mathbb{R}$, pa je tvrdnja o domeni trivijalno zadovoljena za bilo koji $\tau \in \mathbb{R}$. Znamo i da je

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Jo preostaje pokazati da je 2π temeljni period.

Pretpostavimo da postoji neki period τ_0 takav da je $\tau_0 < 2\pi$. Tada je $\sin(x + \tau_0) = \sin x$. Specijalno, iz definicije za $x = 0$ imamo $\sin \tau_0 = 0$. To je mogue ako i samo ako je

$$x \in \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

No kako imamo $0 < \tau_0 < 2\pi$ slijedi nuno $\tau_0 = \pi$. No π oito nije period, jer je npr. $\sin \dfrac{\pi}{2} = 1$ i $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\right) = -1$. $\square$

Zadatak 189. Funkcija $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$D(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{I}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

zove se *Dirichletova funkcija.* Dokaite da je ona periodina, ali nema temeljni period.

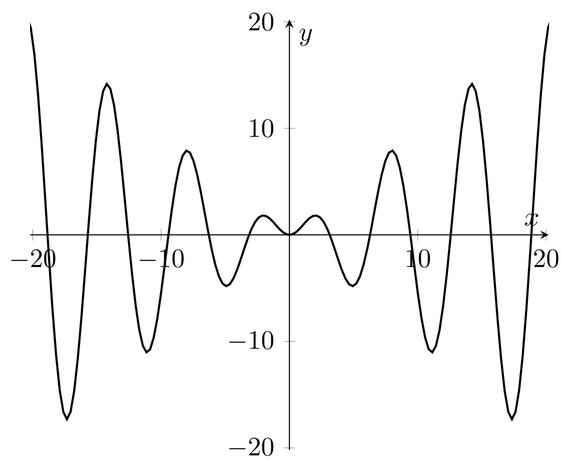
Rjeenje. Tvrdimo da je svaki pozitivan $\tau \in \mathbb{Q}^+$ jedan period funkcije D. Odavde e biti oito da je D periodina i da nema temeljni period.

Zaista, neka je $x \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Tvrdimo da je $x \in \mathbb{Q}$ ako i samo ako je $x + \tau \in \mathbb{Q}$. Zaista, ako je $x \in \mathbb{Q}$, onda je oito $x + \tau \in \mathbb{Q}$. Nadalje, ako je $x + \tau \in \mathbb{Q}$, iz injenice da je $-\tau \in \mathbb{Q}$ slijedi da je i $(x + \tau) - \tau = x \in \mathbb{Q}$.

Kontrapozicijom slijedi: Ako je $x \in \mathbb{Q}$, onda je $x + \tau \in \mathbb{Q}$, te ako je $x \in \mathbb{I}$ iracionalan, onda je i $x + \tau \in \mathbb{I}$. U oba sluaja imamo $f(x + \tau) = f(x)$ i tvrdnja je dokazana. $\square$

Zadatak 190. Je li funkcija $x \mapsto x \sin x$ periodina?

Rjeenje. Iz grafa funkcije moemo naslutiti da ona nije periodina.



Slika 4.11: Graf funkcije $x \mapsto x \sin x$

Dokaimo tvrdnju. Zaista, pretpostavimo da postoji neki period $\tau > 0$. Funkcija je definirana za sve realne brojeve, pa je $x + \tau \in \mathcal{D}(f)$. Po pretpostavci imamo

$$(x + \tau) \sin(x + \tau) = x \sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Specijalno, za $x = -\tau$ imamo $\tau \sin \tau = 0$, odnosno $\sin \tau = 0$. To je ekvivalentno sa $\tau \in \{k\pi :$

$k \in \mathbb{N}\}$, gdje je $k \in \mathbb{N}$ jer je $\tau > 0$, po definiciji perioda. No to znai da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$(x + k\pi)\sin(x + k\pi) = x \sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ako je k paran, onda je $\sin(x+k\pi) = \sin x$. Uzmimo x takav da je $\sin x \neq 0$. Tada dijeljenjem sa $\sin x$ dobivamo $\pi = 0$, kontradikcija!

Ako je k neparan, onda je $\sin(x + k\pi) = -\sin x$. Uzmimo x takav da je $x \in \mathbb{N}$. Zaista, kako je $\pi \in \mathbb{I}$, vrijedi $\sin x \neq 0$, jer bi u suprotnom imali $\frac{x}{k} = \pi$. Dijeljenjem sa $\sin x$ dobivamo $-x - k\pi = x$, odnosno $-\frac{2x}{k} = \pi$. Kontradikcija s injenicom da je $\pi \in \mathbb{I}$! Dakle slijedi $\tau \notin \{k\pi : k \in \mathbb{N}\}$, ime imamo kontradikciju s injenicom $\tau \in \{k\pi : k \in \mathbb{N}\}$, i time smo dokazali tvrdnju. $\square$

Zadatci za vjebu

Pojam funkcije. Crtanje grafa funkcije

Zadatak 191. Nacrtajte grafove sljedeih funkcija. (Kada je interval cijeli $\mathbb{R}$, prikaite "najreprezentativniji" dio grafa).

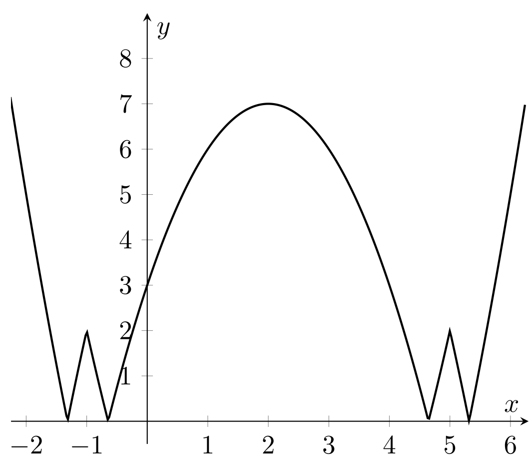
a) $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 5$,

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x + 2| - |x|$,

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 2025)^3 - 2025$.

d) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Zadatak 192. Promotrite sljedeu sliku.



Ako je poznato da postoje $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ takvi da je graf na slici upravo graf funkcije $f(x) = \Big| |ax^2 + bx + c| - 2 \Big|$, odredite neke takve a, b, c.

Injekcija, surjekcija i bijekcija. Slika i praslika skupa

Zadatak 193. Za svaku od sljedeih funkcija odredite je li bijekcija. Ako smatrate da je, dokaite da je, u suprotnom dokaite zato nije.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - x^2$,

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^3 + 3$.

c) $f : \mathbb{R} \to [-2, \infty]$, $f(x) = e^x - 2$,

Zadatak 194.

a) Navedite primjer rastue funkcije $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

b) Navedite primjer padajue funkcije s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ koja nije ni injekcija ni surjekcija.

b) Navedite primjer bijekcije $f : \mathbb{R} \to \langle 10, \infty\rangle$.

c) Navedite primjer bijekcije $f : \langle 10, 20\rangle \to \mathbb{R}$.

d) Navedite primjer surjekcije $f : \mathbb{R} \to [-1, 0\rangle \cup \langle 0, 1] \cup \{2025\}$.

e) Navedite primjer surjekcije $f : \mathbb{R} \to \langle -1, 1\rangle \cup \mathbb{N}$.

Zadatak 195.

a) Navedite primjer funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f([0, 5]) = [2, 3]$.

b) Navedite primjer funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f([0, 5]) = [2, 3]$ **i** $f^{-1}\big(\langle 5, 15]\big) = [-2, -1\rangle \cup \langle 5, 7.5]$.

c) Postoji li funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi $f\big([0, 1]\big) = [1, 2]$ i $f^{-1}\big([1, 3]\big) = [4, 5]$? Dokaite svoje tvrdnje.

d) Neka je zadana $f : S \to \mathbb{R}$ i neka su $A, B \subseteq S$. Dokaite da je $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ ako i samo ako je f injekcija.

Zadatak 196. $(*)$ Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je za svaku injekciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcija $f + g$ takoer injekcija. Dokaite da je tada g konstanta.

Kompozicija funkcija. Inverzna funkcija

Zadatak 197. Neka su zadane $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Dokaite da ako je $g \circ f$ injekcija, onda je i f injekcija.

Zadatak 198. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = x^3 - 2x^2$.

a) Nacrtajte graf funkcije f.

b) Dokaite da je $f|_{[0,1]}$ injekcija. Je li f injekcija?

c) Odredite $f^{-1}\big([0, 9]\big)$ i $f^{-1}\big([2024, 2025]\big) \cap f^{-1}\big([23, 24]\big)$.

d) Koristei graf, odredite $f\big([2, 2.2\rangle\big)$.

Zadatak 199.

a) Zadana je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 3|x|^3 + 4$. Odredite $\mathcal{R}(f)$.

b) Zadana je $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$. Odredite $f^{-1}\big([1, e]\big)$.

d) Odredite primjer funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koju je $f^{-1}\big([4, 5]\big) = [-3, 2] \cup [6, 7]$.

Zadatak 200.

a) Dokaite da je $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [4, 8]$ za koju je $f(x) = \sin^4 x + 3\sin^2 x + 4$ bijekcija i odredite njezin inverz.

a) Odredite skup S (ako postoji) takav da $f : \mathbb{R} \to S$, $f(x) = \operatorname{th}^3 x + 1$ bude bijekcija.

b) Neka je $f : \mathbb{R} \to [-2, \infty\rangle$ zadana formulom $f(x) = \Big|\big||x| - 2\big| - 2\Big| - 2$. Ispitajte injektivnost, surjektivnost i koristei graf odredite $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{2}, 4\right\rangle\right)$.

Zadatak 201.

a) Odredite neki $a \in \mathbb{R}$ (ako postoji) takav da je $f : [a, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2$ injekcija.

b) Neka su zadane $f, g : S \to \mathbb{R}$. Dokaite ili opovrgnite: Ako su f i g strogo rastue i ako vrijedi $f(x) \geq 0$ i $g(x) \geq 0$ za sve $x \in S$, onda je i fg strogo rastua.

c) Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je $x^3 - 2x = 4$. (Dokaite svoje tvrdnje!)

Zadatak 202. Neka je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = g^9(x) + 2g^3(x) + 1$, vrijedi $h\big([0, 2]\big) = [-2, 4]$. Odredite $g\big([0, 2]\big)$.

Zadatak 203. ($*$) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana izrazom $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$. Neka je $f_n(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x))\ldots)}_{n \text{ puta}}$. Izraunajte $f_{2024}(2024)$ i pokaite da je f_{2024} injekcija.

Zadatak 204. ($*$) Zadana je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x + 2)(x + 3)(x + 7)(x + 8)$$

Odredite $\mathcal{R}(f)$.

Zadatak 205. ($*$) Izraunajte

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \operatorname{arctg} \frac{1}{18} + \cdots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot 2024^2}.$$

Zadatak 206. ($**$) Moe li se funkcija $x \mapsto x\cos(x^3 - x)$ prikazati kao kompozicija konano mnogo funkcija $x \mapsto -x$, $x \mapsto x \sin x$, $x \mapsto \operatorname{sh} x$, $x \mapsto x^3 + x$? Dokaite.

Rastav na parcijalne razlomke

Zadatak 207. Rastavite sljedee funkcije na parcijalne razlomke (po potrebi prvo funkciju prikazati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije).

a) $x \mapsto \dfrac{x^3+2x+3}{x^3-x}$,

b) $x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$.

Zadatak 208. Zadana je $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^3+6x^2+12x+9}{(x+1)^3}.$$

Odredite $f\big([0,2]\big)$.

Zadatak 209. $(*)$ Zadan je sustav jednadbi

$$\begin{cases} A+C & = 9, \\ 3A+B+C+D & = 5, \\ 2A+4B-2C+E & = 7, \\ -2A+6B-2C-2D-E+F & = 4, \\ -3A+4B+C-E-2F & = 6, \\ -A+B+C+D+E+F & = 3 \end{cases}$$

Dokaite (bez koritenja rezultata iz linearne algebre i bez rjeavanja sustava) da ovaj sustav ima jedinstveno rjeenje, tj. da postoje jedinstveni $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi sustav jednadbi.

Prirodna domena

Zadatak 210. Odredite prirodnu domenu sljedeih funkcija.

a) $x \mapsto \operatorname{arch}\left(\arccos \dfrac{x-1}{x+2} + 1\right)$,

b) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x} - 4}}$

c) $x \mapsto \arcsin\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right)$,

d) $x \mapsto \sqrt{1 + \log\lfloor x^2 - 1 \rfloor}$,

e) $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{\sin x} - 2\cos x\right)$.

Zadatak 211. Navedite primjer elementarne funkcije ija je prirodna domena:

a) $[1, \infty\rangle \setminus \{2\}$,

b) $\langle 1, \infty\rangle \setminus \mathbb{N}$,

c) $\langle -\infty, 2] \cup [3, \infty\rangle$,

d) $\mathbb{N}$,

e) $\langle 0, \infty\rangle \setminus \{2025^n : n \in \mathbb{N}\}$.

(**Uputa:** Elementarne funkcije su sve one funkcije koje se mogu dobiti pomou konanog broja operacija zbrajanja, mnoenja, oduzimanja, dijeljenja i kompozicije iz potencija, eksponencijalnih, hiperbolnih, trigonometrijskih funkcija i njihovih inverznih funkcija – korijena, logaritamskih, area i arkus funkcija).

Zadatak 212.

a) Zadana je elementarna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dokaite da je za svaki konaan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ restrikcija $f|_{\mathbb{R}\setminus S}$ takoer elementarna funkcija.

b) Dokaite da za svaki konaan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ postoji elementarna funkcija ija je prirodna domena S.

Periodine funkcije

Zadatak 213. Je li $x \mapsto \sin^2 x$ periodina? Ako je, koji joj je temeljni period? Dokaite sve svoje tvrdnje.

Zadatak 214. Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x + 5n + 1 & \text{za } x \in [5n, 5n+1],\ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{za } x \in [5n+1, 5n+2],\ n \in \mathbb{N}, \\ -x + 5n + 2 & \text{za } x \in [5n+2, 5n+3],\ n \in \mathbb{N}, \\ x - 5n - 4 & \text{za } x \in [5n+3, 5n+5],\ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Dokaite da je f periodina i odredite joj temeljni period. Dokaite sve svoje tvrdnje.

Poglavlje 5

Nizovi

5.1 Pojam niza. Limes niza

Definicija 31.

- Funkcija $a : \mathbb{N} \to S$ zove se **niz** na S. Specijalno, ako je $S = \mathbb{R}$, radi se o nizu realnih brojeva, ako je $S = \mathbb{C}$ radi se o nizu kompleksnih brojeva, a ako je S skup svih funkcija definiranih na nekom skupu, kaemo da imamo niz funkcija.
- Kaemo da je $a(n)$ n-ti lan niza, u oznaci a_n. Openito, alternativna oznaka za niz a koju emo esto koristiti je (a_n).
- Na nekim mjestima, ako je jasno kako se niz nastavlja, moemo niz zadati "nizanjem" njegovih prvih nekoliko elemenata:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots, a_n,\ \ldots$$

U daljnjem tekstu, ako nije navedeno drukije, smatrat emo da se radi o nizu realnih brojeva.
Definicija 32. **Aritmetiki niz** s prvim lanom a_1 i razlikom d je niz (a_n) zadan opim lanom

$$a_n = a_1 + (n-1)d,\ n \in \mathbb{N}.$$

Iz definicije aritmetikog niza slijedi:

- $a_{n+1} - a_n = d$,
- $\dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n,\ n \geq 2$,

- Neka je $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Vrijedi

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n), \ S_n = \frac{n}{2}\big(2a_1 + (n-1)d\big) \tag{5.1}$$

Definicija 33. **Geometrijski niz** s prvim lanom a_1 i kvocijentom $q \neq 0$ je niz (a_n) zadan opim lanom

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Iz definicije geometrijskog niza slijedi:

- $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$,
- $\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = a_n, \ n \geq 2$,
- Neka je $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Vrijedi

$$S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1, \\ a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1. \end{cases} \tag{5.2}$$

Zadatak 215.

a) Neka je (a_n) geometrijski niz, $a_1 = 64$ i $a_7 = 15625$. Odredite a_3.

b) Niz (a_n) zadan je opim lanom $a_n = -3 + \dfrac{1}{4}(n-1)$. Ako je zbroj prvih m lanova niza $\dfrac{21}{2}$, koliko je m?

Rjeenje. a) Po definiciji, za niz (a_n) vrijedi $a_n = 64 \cdot q^n$. Nadalje, dobivamo jednadbu

$$a_7 = 64 \cdot q^6 = 15625, \ \text{ije je rjeenje } q = \frac{5}{2}.$$

Odavde direktno slijedi $a_3 = 64 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 400$.

b) Uoimo da je niz (a_n) aritmetiki, pa vrijedi (5.1). Imamo

$$\frac{m}{2}\left(-6 + \frac{1}{4}(m-1)\right) = \frac{21}{2}.$$

Rjeavanjem kvadratne jednadbe dobivamo $m_1 = 28$ i $m_2 = -3$. Kako je (a_n) definiran samo za $n \in \mathbb{N}$, slijedi da je jedino mogue rjeenje $m = 28$. $\square$

Definicija 34. Niz (a_n) u $\mathbb{R}$ je **rastui** ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \geq a_{n+1}$, **strogo rastui**

ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n < a_{n+1}$, **padajui** ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \geq a_{n+1}$, te **strogo padajui** ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n > a_{n+1}$.

Zadatak 216.

a) Dokaite da je niz (a_n) zadan formulom $a_n = 2^n + n$ strogo rastui.

b) Dokaite da je niz (a_n) zadan formulom $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ strogo rastui.

c) Dokaite da je niz (a_n) zadan formulom $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2-1}$ strogo padajui.

Rjeenje. a) Treba dokazati da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $2^{n+1} + n + 1 > 2^n + n$. Oito vrijedi

$$2^{n+1} + n + 1 > 2^{n+1} + n > 2^n + n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pa je tvrdnja dokazana.

b) Treba dokazati da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Znamo da je

$$-\sqrt{n} > -\sqrt{n+1} \ \text{ i } \ \sqrt{n+2} > \sqrt{n+1} \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zbrajanjem tih dvaju jednakosti dobivamo tvrdnju.

c) Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Vrijedi $\dfrac{n^2+1}{n^2-1} = 1 + \dfrac{2}{n^2-1}$. Sada treba pokazati da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$1 + \frac{2}{n^2-1} > 1 + \frac{2}{(n+1)^2-1}.$$

No to je ekvivalentno s tvrdnjom $(n+1)^2 > n^2$, to je oigledno istinito za sve $n \in \mathbb{N}$. □

Definicija 35. Niz (a_n) je **odozgo ogranien** ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq M$, **odozdo ogranien** ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \geq m$, a **ogranien** ako je ogranien odozgo i odozdo.

Zadatak 217. Dokaite da je niz (a_n) zadan formulom $a_n = \dfrac{1}{\left(n - \frac{3}{2}\right)^2}$ ogranien.

Rjeenje. Uoimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\dfrac{1}{\left(n - \frac{3}{2}\right)^2} \geq 0$. Nadalje, tvrdimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\left(n - \dfrac{3}{2}\right)^2 \geq \dfrac{1}{4}$. Zaista, to je ekvivalentno tvrdnji

$$(n-1)(n-2) \geq 0. \tag{5.3}$$

Ako je $n = 1, 2$, onda je $(n-1)(n-2) = 0$, a za $n > 2$ je $(n-1)(n-2) > 0$, pa (5.3) vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. Sada je oito $\dfrac{1}{\left(n - \dfrac{3}{2}\right)^2} \leq 4$, za sve $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Zadatak 218. Dokaite da je niz (a_n) ogranien ako i samo ako za sve $n \in \mathbb{N}$ postoji $M \geq 0$ takav da je $|a_n| \leq M$.

Rjeenje. Prvi smjer oito vrijedi, jer je M gornja mea i $-M$ donja mea.

Dokaimo drugi smjer. Po definiciji postoje $m \in \mathbb{R}$ i $M \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$m \leq |a_n| \leq M.$$

Neka je M_1 vei od brojeva $|m|$ i $|M|$, tj. $M_1 = \max\{|m|, |M|\}$. Tada vrijedi

$$a_n \leq M \leq |M| \leq M_1,$$

dakle $a_n \leq M_1$. S druge strane, vrijedi

$$a_n \geq -m \geq -|m| \geq -M_1,$$

tj. $a_n \geq -M_1$. Odavde slijedi $|a_n| < M_1$, to smo i tvrdili. $\square$

Definicija 36. Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Kaemo da je L **limes** niza (a_n) ako

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon.$$

Moe se pokazati da limes niza, ukoliko postoji, je jedinstven. Nadalje, ako niz ima limes kaemo da je **konvergentan**, a ako ga nema kaemo da je **divergentan**. Ako je (a_n) konvergentan s limesom L piemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Definicija 37. Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Kaemo da je (a_n) divergentan...

- ...u ∞ ako $(\forall M > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$,
- ...u $-\infty$ ako $(\forall M > 0)\,(\exists n_0 \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -M$.

Ako je niz divergentan u ∞, odnosno $-\infty$, piemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Napomena 47.

a) Konvergentan niz ima samo jedan limes.

b) Konvergentan niz je ogranien.

Intuitivno, limes niza predstavlja kojem broju vrijednosti niza "tee" kako je n sve vei.

Zadatak 219. Koristei definiciju limesa niza, odredite

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$.

Rjeenje. a) Neka je (a_n) niz zadan opim lanom $a_n = \dfrac{n}{n+1}$. Za velike n vidimo da ovaj niz tei ka 1.

Zaista, dokaimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. Treba pokazati da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon.$$

Prema Arhimedovu aksiomu znamo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0\epsilon > 1$. Dokaimo da tvrdnja vrijedi i za sve $n \geq n_0$. Zaista, ako je $n \geq n_0$, onda vrijedi i $n+1 \geq n_0+1$, odnosno

$$(n+1)\epsilon \geq (n_0+1)\epsilon > n_0\epsilon > 1.$$

Odavde imamo $\dfrac{1}{n+1} < \epsilon$ za sve $n \geq n_0$, to smo i tvrdili.

b) Tvrdimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} = 0$, tj. da za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $n \geq n_0$ vrijedi

$$\left|\frac{n}{n^2+1} - 0\right| = \frac{n}{n^2+1} < \epsilon.$$

Prema Arhimedovu aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0\epsilon > 1$. Odavde za sve prirodne $n \geq n_0$ imamo

$$1 < n_0\epsilon \leq n\epsilon < \left(n + \frac{1}{n}\right)\epsilon = \frac{n^2+1}{n}\epsilon,$$

odnosno $\dfrac{n}{n^2+1} < \epsilon$ za sve $n \geq n_0$, pa je tvrdnja dokazana. □

Zadatak 220. Neka je (a_n) niz takav da je (b_n), $b_n = a_{n+1}$ konvergentan. Dokaite da je tada i (a_n) konvergentan i ima isti limes kao i (b_n).

Rjeenje. Po definiciji, za sve $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $n \geq n_0$ vrijedi

$$|a_{n+1} - a| < \epsilon.$$

Specijalno, za sve $n \in \mathbb{N}$ takve da je $n-1 \geq n_0$ vrijedi

$$|a_{(n-1)+1} - a| = |a_n - a| < \epsilon. \tag{5.4}$$

Oito (5.4) onda vrijedi i za sve $n \geq n_0$, to smo i tvrdili. **PROMIJENITI!!** $\square$

Zadatak 221. Odredite $\lim\limits_{n\to\infty} \big(n^2+1\big)$.

Rjeenje. Vidimo da za velike n niz (a_n) zadan formulom $a_n = n^2+1$ tei ka ∞. Dokaimo to.

Treba dokazati da za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $n^2+1 > M$.

Prema Arhimedovu aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > M$, te oito vrijedi i $n > M$. Ako dokaemo da vrijedi $n^2+1 > n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tvrdnja e biti dokazana.

Tvrdnju moemo dokazati indukcijom – za $n = 1$ tvrdnja vrijedi, a pretpostavimo li da tvrdnja vrijedi za neki n, trebamo dokazati $(n+1)^2+1 = n^2+2n+2 > n+1$, odnosno prema pretpostavci indukcije $3n+1 > n+1$, to oito vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Zadatak 222. Neka je (a_n) niz takav da je $a_n \neq 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Dokaite da je tada $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a_n}\right) = 0$.

Rjeenje. Znamo da za sve $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_n > \dfrac{1}{\epsilon}$, odakle slijedi $\dfrac{1}{a_n} < \epsilon$, jer je $a_n > 0$. No ujedno vrijedi i $\left|\dfrac{1}{a_n}\right| < \epsilon$, ponovno zbog $a_n > 0$. $\square$

Zadatak 223. Neka su (a_n) i (b_n) nizovi takvi da je $a_n \geq b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokaite: Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, onda je i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Dokaz. Po definiciji, za svaki $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $b_n \geq M$. Kako je $a_m \geq b_m$ za sve $m \in \mathbb{N}$, vrijedi i $a_n \geq M$, to smo i tvrdili. $\square$

Tvrdnja iz zadatka 223 nam moe pomoi u dokazivanju divergencije niza u ∞. Pokaimo to.

Zadatak 224. Dokaite da je $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin n + \dfrac{n}{2}\right) = \infty$.

Rjeenje. Promotrimo niz (a_n), $a_n = -1+\dfrac{n}{2}$. Kako je $-1+\dfrac{n}{2} \leq \sin n+\dfrac{n}{2}$, dovoljno je pokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Neka je $M > 0$ proizvoljan. Prema Arhimedovu aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > 2M+2$, odnosno $\dfrac{n_0}{2} - 1 > M$. Tada za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$\frac{n}{2} - 1 \geq \frac{n_0}{2} - 1 > M,$$

to smo i htjeli dokazati. □

Zadatak 225. Neka je (a_n) konvergentan niz. Dokaite da on tada ne divergira u ∞. (Ovo se moda na prvi pogled ini oiglednim, ali je ipak neto to je potrebno dokazati!)

Dokaz. Pretpostavimo da (a_n) divergira u ∞. Kako (a_n) konvergira, on je ogranien. S druge strane, ako niz divergira u ∞, on ne moe biti odozgo ogranien, to onda daje kontradikciju. Zaista, pretpostavimo da postoji $M \in \mathbb{R}$ (Moemo bez smanjenja openitosti uzeti $M > 0$) takav da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \leq M$. Tada za taj M postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_n > M$, to nije mogue. □

Napomena 48 (Binomni teorem)*.* Za sve $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Binomni teorem nam je esto koristan u dokazivanju tvrdnji o konvergenciji nizova. Pokaimo to kroz sljedee zadatke.

Zadatak 226. Dokaite da za sve $a > 1$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.

Dokaz. Iskoristit emo binomni teorem da doemo do niza (b_n) takvog da je $a^n \geq b_n$ takvog da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Uoimo da je

$$a^n = (1 + (a-1))^n = 1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 + \cdots + (a-1)^n \geq 1 + n(a-1),$$

to vrijedi jer su $\binom{n}{k}$ prirodni brojevi za $k = 1, \ldots, n$ i jer je $a > 1$. Preostaje dokazati da je $\lim\limits_{n\to\infty} \big(1 + n(a-1)\big) = \infty$. Neka je $M > 0$ proizvoljan. Uzmimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > \dfrac{M-1}{a-1}$.[1] Tada je za sve prirodne $n \geq n_0$

$$1 + n(a-1) \geq 1 + n_0(a-1) > M,$$

to smo i htjeli dokazati. □

Zadatak 227. Dokaite da za sve $a > 1$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

[1] Vrijedi i sljedea openitija verzija Arhimedova aksioma: Neka je $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $na > b$. Njome se koristimo na ovom mjestu.

Rjeenje. Treba dokazati da za sve $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $n \geq n_0$ vrijedi

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon.$$

Ideja e biti primijeniti binomni teorem tako da dobijemo izraz vei od $\sqrt[n]{a} - 1$, ali i dalje takav da moemo nai n_0 takav da je za sve $n \geq n_0$ manji od ϵ.

Uzmimo $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n\epsilon > a$. Ako je $a > 1$, onda je i $\sqrt[n]{a} > 1$. Sada slino kao u rjeenju zadatka 226 imamo da za sve prirodne $n \geq n_0$ vrijedi

$$a = \big(1 + (\sqrt[n]{a} - 1)\big)^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Dijeljenjem s n dobivamo da vrijedi $\sqrt[n]{a} - 1 < \dfrac{a}{n} < \epsilon$, to smo i tvrdili. □

Ispitivanje konvergencije niza koristei definiciju limesa niza ima nekoliko mana – kako bi uope mogli dokazati da niz konvergira, trebamo biti bar u stanju naslutiti koji je njegov limes, to nije uvijek jednostavno. Nadalje, ak i ako znamo to bi limes trebao biti, dokazati da je to zaista limes nije uvijek jednostavno. Radi toga emo u nastavku pokazati nekoliko rezultata koji nam olakavaju traenje limesa i ispitivanje konvergencije niza.

5.2 Osnovne operacije s konvergentnim nizovima. Kriteriji konvergencije niza

Napomena 49 (Osnovne operacije s konvergentnim nizovima). Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi realnih brojeva. Vrijedi sljedee:

- Niz $(a_n \pm b_n)$ je konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
- Niz $(a_n \cdot b_n)$ je konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$,
- Ako za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $b_n \neq 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, onda je niz $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$,
- Niz $\big(|a_n|\big)$ je konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \left|\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right|$.

Napomena 49 nam znatno olakava traenje limesa. Pokaimo to kroz nekoliko zadataka.

Zadatak 228. Odredite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{n+\dfrac{2}{n}}$.

Rjeenje. Kako su $n \mapsto 1$ i $n \mapsto \dfrac{1}{n}$ konvergentni nizovi i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ slijedi da je $n \mapsto 1 + \dfrac{1}{n}$ konvergentan i

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Nadalje, vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\dfrac{2}{n}\right) = \infty$, jer je $n + \dfrac{2}{n} > n$, te $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$. Sada iz zadatka 222 (ali i iz napomene 49) slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} n \mapsto \frac{1}{n+\dfrac{2}{n}} = 0,$$

pa je limes poetnog niza jednak 0. $\square$

Zadatak 229. Odredite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n+4}{n^2+3}$.

Rjeenje. Vrijedi

$$\frac{n^2+3n+4}{n^2+3} = \frac{n^2+3n+4}{n^2+3}\cdot\frac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}} = \frac{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n^2}},$$

te kako su $n \mapsto 1 + \dfrac{3}{n^2}$ i $n \mapsto 1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2}$ konvergentni nizovi iji je limes 1, slijedi da je limes poetnog niza takoer 1. $\square$

Napomena 50.

- Neka je $q \in \mathbb{R}$. Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ \infty, & q > 1, \\ \text{ne postoji}, & q \le -1. \end{cases}$$

- Neka je $a > 0$. Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

- Neka je $a > 1$ i $m > 0$. Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{a^n} = 0.$$

Zadatak 230. Odredite sljedee limese.

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n}{5^n + 1}$,

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n(2n^3+1) + 3^n(n^3+n)}{3^n(2n^3+1)}$,

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{n!}$ (gdje je $m > 0$).

Rjeenje. a) Koristei napomenu 50, imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n}{5^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{n}{5^n}}{1 + \frac{1}{5^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{5^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{5^n}} = \frac{0+0}{1} = 0.$$

b) Dijeljenjem s $3^n \cdot n^3$ dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n(2n^3+1) + 3^n(n^3+n)}{3^n(2n^3+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(2 + \frac{1}{n^3}\right) + 1 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}.$$

c) Vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^m}{a^n} \cdot \frac{a^n}{n!} = 0.$$

□

Zadatak 231. Odredite $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$.

Dokaz. Neka je

$$S_n := \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}.$$

Vrijedi

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \cdots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

pa imamo

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

Koritenjem (5.2), imamo

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Odavde direktno slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2}$. Kako je niz $n \mapsto 2$ konvergentan s limesom u 2, vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{1}{2}S_n = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}S_n = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

□

Napomena 51 (Limes uva ureaj). Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi realnih brojeva, te $n_0 \in \mathbb{N}$. Ako je $a_n \leq b_n$ za sve prirodne $n \geq n_0$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Napomena 52 (Kriterij sendvia). Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi realnih brojeva, te $n_0 \in \mathbb{N}$. Neka je (c_n) niz realnih brojeva takav da vrijedi $a_n \leq c_n \leq b_n$ za sve prirodne $n \geq n_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Tada je (c_n) konvergentan niz i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = b$.

Zadatak 232. Odredite sljedee limese, ako postoje.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 5^n + 6^n}$.

Rjeenje. a) Uoimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n},$$

te kako je $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, te $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, iz kriterija sendvia imamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n2^n} = 0$.

b) Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n},$$

te vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$, pa iz kriterija sendvia dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 1$.

c) Vrijedi

$$\sqrt[n]{4^n + 5^n + 6^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 6^n} = 6 \cdot \sqrt[n]{3}$$

i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} 6 \cdot \sqrt[n]{3} = \lim_{n\to\infty} 6 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 6.$$

S druge strane, imamo

$$\sqrt[n]{4^n + 5^n + 6^n} \geq \sqrt[n]{6^n} = 6,$$

te oito vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} 6 = 6$. Sada iz kriterija sendvia slijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + 5^n + 6^n} = 0.$$

□

Zadatak 233. Dokaite da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Rjeenje. Tvrdnju emo dokazati na dva naina.

Prvi nain. Prema binomnom teoremu vrijedi

$$0 < \frac{n}{2^n} = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots + 1} < \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1},$$

pa iz kriterija sendvia dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, to smo i tvrdili.

Drugi nain. Neka je $\epsilon > 0$. Prema Arhimedovu aksiomu postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $l\epsilon > 1$. Neka je $n_0 = \max\{l, 5\}$. Vrijedi

$$n_0\epsilon \geq l\epsilon > 1,$$

dakle $n_0\epsilon > 1$. No i za sve $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 5$ vrijedi $m < \frac{2^m}{m}$, to se lako pokazuje indukcijom. Stoga za sve prirodne $n \geq n_0$ vrijedi $\frac{2^n}{n}\epsilon > 1$, odakle imamo

$$\frac{n}{2^n} = \left|\frac{n}{2^n}\right| < \epsilon,$$

to smo i htjeli pokazati. □

Napomena 53.

- Ako je niz (a_n) rastui i ogranien odozgo, on je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\},$$

- Ako je niz (a_n) padajui i ogranien odozdo, on je konvergentan i vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Zadatak 234. Dokaite da je niz (a_n), $a_n = \dfrac{1}{\operatorname{sh} n}$ konvergentan.

Rjeenje. Uoimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n \geq 0$. Uoimo da je niz (b_n), $b_n = \operatorname{sh} n$ strogo rastua funkcija. Zaista, funkcije

$$f_1, f_2, f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f_1(n) = \frac{n}{2}, \quad f_2(n) = n - \frac{1}{n}, \quad f_3(n) = e^n$$

su sve strogo rastue i niz (b_n) je jednak $f_3 \circ f_2 \circ f_1$, dakle kao kompozicija strogo rastuih funkcija je i sam strogo rastua funkcija. Odavde slijedi da za sve $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi da $n < m$ povlai $b_n < b_m$, pa specijalno vrijedi $b_n < b_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to smo i tvrdili.

Nadalje, tvrdimo da je niz (a_n) strogo padajui. Zaista, za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\operatorname{sh}(n+1) > \operatorname{sh} n$, odakle dobivamo $\dfrac{1}{\operatorname{sh} n} > \dfrac{1}{\operatorname{sh}(n+1)}$, to smo i tvrdili. $\square$

Zadatak 235. Dokaite da je niz (a_n), $a_n = \dfrac{1}{n^2 - 6n + 10}$ konvergentan.

Rjeenje. Vrijedi

$$\frac{1}{n^2 - 6n + 10} = \frac{1}{(n-3)^2 + 1} > 0.$$

Nadalje, nije teko dokazati da $n \mapsto (n-3)^2 + 1$ pada za $n \leq 3$, te raste za $n \geq 3$. Slijedi da $n \mapsto \dfrac{1}{(n-3)^2 + 1}$ raste za $n \leq 3$ i pada za $n \geq 3$.

Budui da ste na predavanju (v. [3]) pokazali da ako nizu promijenimo prvih k lanova, da to ne utjee na njegov limes, to moemo napraviti i ovdje i to tako da dobijemo monoton niz s istim limesom kao i poetan niz. Uzmimo npr. niz (a_n) zadan na sljedei nain:

$$a_n = \begin{cases} 8, & n = 1, \\ 6, & n = 2, \\ \dfrac{1}{(n-3)^2 + 1}, & n \geq 3. \end{cases}$$

Niz (a_n) e ogranien odozdo s 0 i padajui, pa je stoga konvergentan, to povlai i da je poetan niz konvergentan. □

Napomena 54. Iz zadatka 235 daje se naslutiti sljedee: Ako za niz (a_n) postoje $M \in \mathbb{R}$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za sve prirodne $n \geq n_0$ vrijedi $a_n \leq M$ i $a_n \leq a_{n+1}$, onda je on konvergentan. Analogno, ako postoje $m \in \mathbb{R}$ i $n_1 \in \mathbb{N}$ takvi da za sve prirodne $n \geq n_1$ vrijedi $a_n \geq m$ i $a_n \geq a_{n+1}$. Ovo nije teko i dokazati.

Zadatak 236. Neka je $A = \left\{ \dfrac{1}{\sqrt{n+3}+n} : n \in \mathbb{N} \right\}$. Odredite $\inf A$ i $\sup A$.

Rjeenje. Definiramo niz (a_n), $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+3}+n}$. Oito je $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Uoimo sada da je za sve $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{n+3}+n} \geq \frac{1}{\sqrt{n+4}+n+1},$$

pa je (a_n) strogo padajui. Nadalje,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}+n} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}+1} = 0,$$

pa iz napomene 53 slijedi $\inf A = 0$. Konano, za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{n+3}+n} \leq \frac{1}{\sqrt{1+3}+1} = \frac{1}{3},$$

pa je $\sup A = \max A = \dfrac{1}{3}$. □

Zadatak 237. Neka je (a_n) rastui niz. Dokaite: Ako (a_n) ne divergira u ∞, onda je on konvergentan i odozgo omeen.

Dokaz. Po definiciji, postoji $M > 0$ takav da za svaki $n_0 \in \mathbb{N}$ postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ takav da je $a_n \leq M$. Neka je $m \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Tada postoji $m' \geq m$ takav da je $a_{m'} \leq M$, no tada vrijedi i $a_m \leq M$, jer je niz rastui (v. a) dio zadatka 256). Time smo dokazali da je niz odozgo omeen, pa kako je rastui, on je i konvergentan. □

5.3 Podniz. Nizovi zadani rekurzivno. Limesi sloenijih nizova

Definicija 38. Za niz $b : \mathbb{N} \to S$ kaemo da je **podniz** niza $a : \mathbb{N} \to S$ ako postoji strogo rastui niz prirodnih brojeva $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takav da je $b = a \circ p$. Za podniz (b_n) niza (a_n) piemo

$b_n = b(n) = a\big(p(n)\big) = a_{p_n}$, pa podniz oznaavamo i sa (a_{p_n}).

Napomena 55. Neka je (a_n) konvergentan niz realnih brojeva i (a_{p_n}) neki njegov podniz. Tada je (a_{p_n}) konvergentan i ima isti limes kao i (a_n).

Zadatak 238. Ispitajte je li niz (a_n), $a_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$ konvergentan, te ako je, odredite mu limes.

Rjeenje. Tvrdimo da je (a_n) divergentan. Zaista, pretpostavimo da je on konvergentan. Promotrimo podnizove (a_{2n}) i (a_{2n-1}). Vrijedi

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}, \quad a_{2n-1} = -1 + \frac{1}{2n-1}.$$

Odavde slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$, kontradikcija s injenicom da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. $\square$

Zadatak 239. Neka je (a_n) konvergentan niz takav da je $a_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Konvergira li openito niz $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$? Za one (a_n) za koje konvergira, to sve moe biti limes tog niza?

Rjeenje. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Kako je (a_{n+1}) podniz od (a_n), vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a}{a} = 1. \tag{5.5}$$

Openito, tvrdimo da $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ ne mora konvergirati. Zaista, uzmimo $a_n = \dfrac{\frac{1}{2} + (-1)^n}{n}$. Tada je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{\frac{1}{2} + (-1)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{\frac{1}{2} + (-1)^n}{n}} = \frac{\big(2(-1)^{n+1} + 1\big)n}{(n+1)\big(2(-1)^n + 1\big)}$$

Definiramo niz (b_n), $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Vidimo da je

$$\lim_{n\to\infty} b_{2n} = \lim_{n\to\infty} -\frac{2}{3} \cdot \frac{n}{n+1} = -\frac{2}{3} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = -\frac{2}{3}$$

i slino dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n+1} = -3$. Dakle, pokazali smo da za niz (a_n), $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ ne postoji.

Pretpostavimo sada da $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ konvergira ili divergira u ∞ ili $-\infty$. Neka je $S \subseteq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ skup svih moguih limesa niza $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Tvrdimo da je $S = [-1, 1]$.

Dokaimo da je $[-1, 1] \subseteq S$. Uzmimo zato da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. Lako se provjeri sljedee:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ za $a_n = q^n$, gdje je $q \in \langle -1, 1\rangle \setminus \{0\}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = -1$ za $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ za $a_n = \frac{1}{n!}$.

Pretpostavimo sada da je $S \notin [-1, 1]$. Tada postoji $a \in S$ takav da je

$$a \in \langle 1, \infty\rangle \cup \langle -\infty, -1\rangle \cup \{-\infty, \infty\} \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a.$$

Tvrdimo:

a) Vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $n > m \geq n_0$ vrijedi $|a_n| > |a_m|$.

a) je oigledno – pretpostavimo li da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, onda je zbog (5.5) $a = 1$, to je kontradikcija s pretpostavkom.

Dokaimo b). Ako je npr. $a \in \langle 1, \infty\rangle$, onda postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $m \geq m_0$ vrijedi

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m} - a\right| < \frac{a-1}{2},$$

odakle specijalno imamo

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} - a > -\frac{a-1}{2}, \quad \text{odnosno} \quad \frac{a_{m+1}}{a_m} > 1.$$

Kako je $\frac{a_{m+1}}{a_m} = \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|$, slijedi $|a_{m+1}| > |a_m|$ za sve $m \geq m_0$. Odavde lako slijedi da je $|a_n| > |a_m|$ za sve $n > m \geq n_0$. Tvrdnja se analogno pokazuje za $a \in \langle -\infty, -1\rangle$.

Ako je $a = \infty$, onda postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $n \geq n_0$ vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, tj. $|a_{n+1}| > |a_n|$, odakle slijedi tvrdnja. Dokaz je analogan u sluaju $a = -\infty$.

Odaberimo sada proizvoljan $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $n > m \geq n_0$ vrijedi $|a_n| > |a_m|$.

Znamo da postoji $p_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $p \geq p_0$ vrijedi $|a_p| < |a_{n_0}|$. Neka je sada $q_0 = \max\{n_0, p_0\}$. Tada zbog $q_0 \geq n_0$ imamo $|a_{q_0}| \geq |a_{n_0}|$, a zbog $q_0 \geq p_0$ imamo da za $p = q_0$ vrijedi $|a_{q_0}| < |a_{n_0}|$. Kontradikcija!

Ovime smo pokazali da je $S = [-1, 1]$, to smo i tvrdili. □

Zadatak 240. Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ takve da niz (a_n) zadan formulom

$$a_n = \left(1 + a + \frac{a}{n}\right) \sin \frac{n\pi}{2}$$

bude konvergentan.

Rjeenje. Promotrimo sljedee podnizove od (a_n):

$$a_{4n} = 0, \quad a_{4n-1} = -1 - a - \frac{a}{4n-1}, \quad a_{4n-2} = 0, \quad a_{4n-3} = 1 + a + \frac{a}{4n-3}.$$

Da bi niz bio konvergentan, svaki podniz mora konvergirati k istom limesu (a to je 0), pa je jedini potencijalni kandidat $a = -1$. U tom sluaju je $a_n = -\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2}$. Vrijedi

$$0 \leq \left| -\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right| = \frac{1}{n} \left| \sin \frac{n\pi}{2} \right| \leq \frac{1}{n},$$

pa po kriteriju sendvia slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, odakle imamo i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (v. b) dio zadatka 256). □

Nizove moemo zadati i rekurzivno. Intuitivno, nizovi zadani rekurzivno su oni nizovi definirani pomou jednog ili vie poetnih lanova i pomou jednog ili vie prethodnih lanova. Npr. niz $a_1 = 1$ i $a_n = a_{n-1} + 1$ za $n > 1$ je niz (a_n), $a_n = n$ zadan rekurzivno. Precizirajmo!

Napomena 56 (Princip definicije indukcijom). Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan i neka je zadana funkcija $\phi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ i neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada postoji jedinstveni niz (a_n) takav da je

$$\begin{aligned} a_1 &= x_0, \\ a_{n+1} &= \phi_n\big(f(1), f(2), \ldots, f(n)\big), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

i kaemo da je taj niz *zadan rekurzivno*.

Dokaz principa definicije indukcijom moete pronai u [9], str. 44.

U nastavku emo vidjeti da je zapisivanje konvergentnih nizova u ovakvom obliku esto pogodno za izraunavanje njihovih limesa.

Zadatak 241. Niz (a_n) je zadan rekurzivno uvjetima $a_1 = 0$ i $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{2}$. Ispitajte je li (a_n) konvergentan i ako je, odredite mu limes.

Rjeenje. Dokaimo da je (a_n) konvergentan. Zaista, on je rastui, jer je

$$\frac{a_n^2 + 1}{2} \geq a_n,$$

to vrijedi, budui da je ta tvrdnja ekvivalentna s tvrdnjom $a_n^2 - 2a_n + 1 = (a_n - 1)^2 \geq 0$.

Izraunavanjem velikih vrijednosti nasluujemo da je (a_n) odozgo ogranien s 1. Zaista, dokaimo to indukcijom. Za a_1 tvrdnja oito vrijedi. Pretpostavimo da vrijedi $a_n \leq 1$. Vrijedi i $a_n \geq 0$ zbog injenice da je (a_n) rastui, to povlai $a_n^2 \leq 1$, odnosno $\dfrac{a_n^2 + 1}{2} \leq 1$. Time smo dokazali konvergenciju.

Neka je L limes niza (a_n). Kako je (a_{n+1}) podniz od (a_n), vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, odakle slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2 + 1}{2} = L, \quad \text{tj.} \quad \frac{L^2 + 1}{2} = L.$$

No posljednje je ekvivalentno s $(L-1)^2 = 0$, odnosno $L = 1$. Dakle, limes niza (a_n) je 1. $\square$

Zadatak 242. Niz (a_n) je zadan rekurzivno uvjetima $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)$. Ispitajte je li (a_n) konvergentan i ako je, odredite mu limes.

Rjeenje. Lako se indukcijom pokazuje da je $a_n > \sqrt{3}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Naime, za $n = 1$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za n. Vrijedi

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) > \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{(a_n - \sqrt{3})^2}{a_n} > 0.$$

Meutim, $a_n > \sqrt{3}$ povlai $(a_n - \sqrt{3})^2 > 0$, to povlai $\dfrac{(a_n - \sqrt{3})^2}{a_n} > 0$, pa je korak indukcije dokazan.

Pokaimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{3}{a_n}\right) < a_n.$$

Kako je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, gornje je ekvivalentno tvrdnji $a_n^2 > 3$, tj. $a_n > \sqrt{3}$, to je ve dokazano. Dakle, niz (a_n) konvergira.

Neka je L limes niza (a_n). Analogno kao u prethodnom zadatku, imamo da vrijedi

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{3}{L}\right).$$

No to vrijedi ako i samo ako je $L = \sqrt{3}$ ili $L = -\sqrt{3}$. Kako vrijedi $a_n > \sqrt{3}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, intuitivno zakljuujemo da $-\sqrt{3}$ ne moe biti limes niza (a_n).

Da bismo to dokazali, trebamo se pozvati na injenicu da za sve odozdo ograniene nizove (b_n) vrijedi

$$\inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\} \leq \lim_{n\to\infty} b_n,$$

to zapravo dobivamo primjenom napomene 51 na nizove $n \to \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ i (b_n). U naem sluaju imamo

$$\sqrt{3} \leq \inf a_n \leq \lim_{n\to\infty} a_n,$$

ime smo dokazali da $-\sqrt{3}$ nije limes, to znai da to mora biti $\sqrt{3}$. $\square$

Zadatak 243. Neka je $a > 1$. Dokaite da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

Rjeenje. Primijetimo da vrijedi

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{a}{n+1} a_n.$$

Time je zapravo dana karakterizacija poetnog niza, jer je svaki niz zadan rekurzivno jedinstven. Dokaimo sada da (a_n) konvergira! Oito je $\dfrac{a^n}{n!} \geq 0$.

Prema Arhimedovu aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 > a$. Tada za $n \geq n_0 > a$ vrijedi

$$\frac{a}{n+1} < 1 \Leftrightarrow n > a - 1,$$

a $n > a - 1$ je istinito, jer je $n \geq n_0 > a > a - 1$. Sada konvergencija niza (a_n) slijedi iz napomene 54. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, imamo $L = 0 \cdot L = 0$, ime smo dokazali tvrdnju. $\square$

Za naredni zadatak bit e nam korisna sljedea pomona tvrdnja.

Zadatak 244. Neka je (a_n) niz realnih brojeva i $c \in \mathbb{R}$. Ako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = c$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = c$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

Rjeenje. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoje $n_0,\ l_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za sve prirodne $n \geq n_0$ i $l \geq l_0$ vrijedi

$$|a_{2n} - c| < \epsilon \quad \text{i} \quad |a_{2l-1} - c| < \epsilon.$$

Neka je $N_0 = 2\max\{n_0, l_0\}$ i neka je $N \geq N_0$ proizvoljan prirodan broj. Tada vrijedi ili $N = 2q$ ili $N = 2q - 1$, gdje je $q \in \mathbb{N}$. Ako je $N = 2q$, onda vrijedi $2q \geq 2\max\{n_0, l_0\}$, to povlai $q \geq \max\{n_0, l_0\}$, to prema pretpostavci daje $|a_N - c| < \epsilon$.

Ako je $N = 2q - 1$, dobivamo $q \geq \max\{n_0,\ l_0\} + \dfrac{1}{2} > \max\{n_0, l_0\}$, to takoer daje $|a_N - c| < \epsilon$. □

Zadatak 245. Niz (a_n) je zadan rekurzivno uvjetima $a_1 = -4$, $a_{n+1} = -2 + \dfrac{1}{1 + a_n}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Ispitajte je li (a_n) konvergentan i ako je, odredite mu limes.

Rjeenje. Pogledajmo emu bi bio jednak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ kada bi (a_n) konvergirao. Vrijedilo bi

$$L = -2 + \frac{1}{1 + L},$$

pa bi rjeavanjem dobili $L_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}$, $L_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}$. Tvrdimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_2$. Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_{n+2} = -2 + \frac{1}{1 + \left(-2 + \dfrac{1}{1 + a_n}\right)} = -2 + \frac{1}{\frac{-a_n}{1+a_n}} = -3 - \frac{1}{a_n},$$

odakle dobivamo

$$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = -3 - \frac{1}{a_{2n}}, \quad a_{2(n+1)-1} = a_{2n+1} = a_{(2n-1)+2} = -3 - \frac{1}{a_{2n-1}}.$$

Tvrdimo da je $a_{2n} > L_2$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Zaista, za $n = 1$ imamo $a_2 = -\dfrac{7}{3} > L_2$, a pretpostavimo li da tvrdnja vrijedi za n, onda je

$$-3 - \frac{1}{a_n} > -3 - \frac{1}{L_2} = L_2.$$

Analogno se vidi i da je $a_{2n} < L_1$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokaimo da je (a_{2n}) padajui. Treba dokazati da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_{2n} \geq -3 - \frac{1}{a_{2n}},$$

to je ekvivalentno nejednadbi $a_{2n}^2 + 3a_{2n} + 1 \geq 0$, koja je ekvivalentna tvrdnji $L_2 \leq a_{2n} \leq L_1$, to znamo da vrijedi.

Vrlo slino se dokazuje da je (a_{2n-1}) rastui i odozgo ogranien s L_2. Dakle, (a_{2n}) i (a_{2n-1}) su konvergentni. Rjeavanjem jednadbe

$$L' = -3 - \frac{1}{L'}$$

dobivamo $L'_1 = L_1$ i $L'_2 = L_2$. No L_1 ne moe biti limes, jer je $L_1 > -\frac{7}{3}$, a $\frac{7}{3}$ je gornja mea oba niza. Zato je $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = L_2$, pa je po zadatku 244 (a_n) konvergentan i vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$. □

U zadatku 245 vidjeli smo da moemo upotrijebiti napomenu 55 i u sluajevima kad nismo jo dokazali da je niz konvergentan. Pokaimo jo jednu takvu situaciju.

Zadatak 246. Zadan je niz (a_n). Definiramo niz (b_n), $b_1 = 0$, $b_n = a_n + 2a_{n+1}$ za $n \geq 1$. Dokaite: Ako (b_n) konvergira, onda konvergira i (a_n).

Dokaz. Neka je $a = \lim_{n\to\infty} b_n$. Ako (a_n) konvergira s limesom u a', onda je $a = a' + 2a'$, tj. vrijedi $a' = \frac{a}{3}$. Dakle, trebamo dokazati da (a_n) konvergira s limesom u $\frac{a}{3}$.

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi

$$\frac{\epsilon}{2} > |a_{n-1} + 2a_n - a| = \left|2\left(a_n - \frac{a}{3}\right) + a_{n-1} - \frac{a}{3}\right|, \tag{5.6}$$

pa zbog injenice da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $||x| - |y|| \leq |x - y|$, odakle slijedi $|x| - |y| = |x| - |-y| \leq |x + y|$, vrijedi

$$\left|2\left(a_n - \frac{a}{3}\right) + a_{n-1} - \frac{a}{3}\right| \geq 2\left|a_n - \frac{a}{3}\right| - \left|a_{n-1} - \frac{a}{3}\right|,$$

odnosno

$$\left|a_n - \frac{a}{3}\right| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{1}{2}\left|a_{n-1} - \frac{a}{3}\right|.$$

Tada za sve $m \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}\left|a_{n+m} - \frac{a}{3}\right| &< \frac{\epsilon}{4} + \frac{1}{2}\left|a_{n+m-1} - \frac{a}{3}\right| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon}{4} + \frac{1}{2}\left|a_{n+m-1} - \frac{a}{3}\right|\right) \\ &= \frac{\epsilon}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon}{4} + \frac{1}{4}\left|a_{n+m-1} - \frac{a}{3}\right| = \cdots = \frac{\epsilon}{4}\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}\left|a_{n-1} - \frac{a}{3}\right|.\end{aligned}$$

Uoimo da je

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^m} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2.$$

Zato je

$$\left|a_{n+m} - \frac{a}{3}\right| < \frac{\epsilon}{4}\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}}\left|a_{n-1} - \frac{a}{3}\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2^{m+1}}\left|a_{n-1} - \frac{a}{3}\right|. \tag{5.7}$$

Prema Arhimedovu aksiomu, postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $m_0 \cdot \dfrac{\epsilon}{2} > \left|a_{n-1} - \dfrac{a}{3}\right|$. Tada za sve $m \geq m_0$ vrijedi

$$\left|a_{n-1} - \frac{a}{3}\right| < m_0 \cdot \frac{\epsilon}{2} < (m_0 + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2} < 2^{m_0+1} \cdot \frac{\epsilon}{2} < 2^{m+1} \cdot \frac{\epsilon}{2},$$

odnosno

$$\frac{1}{2^{m+1}}\left|a_{n-1} - \frac{a}{3}\right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{5.8}$$

Sada iz (5.6), (5.7) i (5.8) slijedi da za sve $n \geq n_0$ i $m \geq m_0$ vrijedi

$$\left|a_{n+m} - \frac{a}{3}\right| < \epsilon, \quad \text{tj.} \quad \left|a_p - \frac{a}{3}\right| < \epsilon, \ \forall p \in \mathbb{N} \ \text{ za kojeg je } \ p \geq n_0 + m_0,$$

to smo i tvrdili. □

Zadatak 247 (Cesàro-Stolzov teorem)**.** Neka su (a_n) i (b_n) nizovi takvi da je $b_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, te (b_n) strogo rastui i neka je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$. Ako niz $\left(\dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}\right)$ konvergira u $L \in \mathbb{R}$, onda i niz $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ konvergira u L.

Rjeenje. Po definiciji, za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $N \geq N_0$ vrijedi

$$\left|\frac{a_{N+1} - a_N}{b_{N+1} - b_N} - L\right| < \frac{\epsilon}{2},$$

te postoji $m_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $m \geq m_0$ vrijedi $b_m > 0$. Tada za sve $n \geq n_0 = \max\{m_0, N_0\}$ vrijedi $b_n > 0$ i

$$L - \frac{\epsilon}{2} < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < L + \frac{\epsilon}{2}.$$

Kako je (b_n) strogo rastui, to je $b_{n+1} - b_n > 0$, pa je

$$a_{n+1} < \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) + a_n,$$

pa slino kao u zadatku 246 dobivamo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &< \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n) + \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_n - b_{n-1}) + \cdots + \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n_0+1} - b_{n_0}) + a_{n_0} \\ &= \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_n + b_n - \cdots + b_{n_0+1} - b_{n_0}) \\ &= \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)(b_{n+1} - b_{n_0}) + a_{n_0}. \end{aligned}$$

Dijeljenjem s b_{n+1} dobivamo

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} < \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n+1}}\right) + \frac{a_{n_0}}{b_{n+1}},$$

pa promotrimo li niz (c_n), $c_n = \left(L + \frac{\epsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n+1}}\right) + \frac{a_{n_0}}{b_{n+1}}$, po zadatku 222 vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L + \frac{\epsilon}{2}$, pa postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve prirodne $n' \geq n_1$ vrijedi

$$c_n - L - \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{tj.} \quad c_n < L + \epsilon.$$

Analogno kao i gore dobivamo da je

$$\left(L - \frac{\epsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n+1}}\right) + \frac{a_{n_0}}{b_{n+1}} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}},$$

te za niz (c'_n) definiran s $c'_n = \left(L - \frac{\epsilon}{2}\right)\left(1 - \frac{b_{n_0}}{b_{n+1}}\right) + \frac{a_{n_0}}{b_{n+1}}$ postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n'' \geq n_2$ vrijedi $L - \epsilon < c'_n$. Sada za sve prirodne $n''' \geq n_3 = \max\{n_0, n_1, n_2\}$ dobivamo

$$\left|\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - L\right| < \epsilon,$$

dakle dobili smo da niz $\left(\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)$ konvergira k L, pa prema zadatku 220 i $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergira u L. $\square$

Prethodni rezultat moe biti koristan pri raunanju limesa raznih "sloenijih" nizova.

Zadatak 248. Odredite sljedei limes, ako on postoji.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}.$$

Rjeenje. Definiramo nizove (a_n), (b_n) s $a_n = 1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}$ i $b_n = n$. Uoimo da je (b_n) strogo rastui i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, te je $b_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa primjenom Cesàro-Stolzovog teorema dobivamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}+\sqrt[n+1]{n+1}-(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n})}{(n+1)-n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{1} = 1.
\end{aligned}$$

□

Zadatak 249. Odredite sljedei limes, ako postoji.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^5} \sum_{k=n}^{2n} k^4.$$

Rjeenje. Promotrimo nizove (a_n), (b_n), $a_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} k^4$, $b_n = n^5$. Uoimo da je b_n rastui, te kako vrijedi $b_n \geq n$, za sve $n \in \mathbb{N}$, iz zadatka 223 slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, te $b_n \neq 0$. Prema Cesàro-Stolzovom teoremu imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{2n+2} k^4 - \sum\limits_{k=n}^{2n} k^4}{(n+1)^5-n^5} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^4+(2n+2)^4-(n+1)^4}{(n+1)^5-n^5} = \frac{31n^4+92n^3+114n^2+68n+16}{5n^4+10n^3+10n^2+5n+1} = \frac{31}{5}.
\end{aligned}$$

□

5.4 Limes superior i limes inferior

Definicija 39. Kaemo da je $\alpha \in \mathbb{R}$ **gomilite** niza (a_n) realnih brojeva ako postoji podniz (a_{p_n}) od (a_n) takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{p_n} = \alpha$.

Napomena 57. Neka je (a_n) ogranien niz. Tada je $\alpha \in \mathbb{R}$ gomilite niza ako i samo ako za svaki $\epsilon > 0$ interval $\langle \alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon \rangle$ sadri beskonano mnogo lanova niza (a_n).

Zadatak 250. Odredite skup svih gomilita niza (a_n) zadanog formulom $a_n = 3 + (-1)^n$.

Rjeenje. Niz (a_n) je zapravo niz

$$2,\ 4,\ 2,\ 4,\ \ldots,$$

pa vidimo da nizovi (a_{2n-1}), (a_{2n}) tee ka 2, odnosno 4, respektivno. To znai da su 2 i 4 gomilita niza (a_n).

Dokaimo da su to jedina gomilita od (a_n). Pretpostavimo da postoji neko gomilite $\alpha \notin \{2, 4\}$ niza (a_n). Neka je

$$\epsilon = \min\big\{|\alpha - 2|, |\alpha - 4|\big\}.$$

Tada interval $\langle \alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon \rangle$ ne sadri ni 2 ni 4. Naime, kad bi bilo npr. $2 \in \langle \alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon \rangle$, ako je $\alpha > 2$, onda bi imali

$$2 > \alpha - |\alpha - 2| = \alpha - (\alpha - 2) = 2,$$

te za $\alpha < 2$, bi vrijedilo

$$2 < \alpha + |\alpha - 2| = \alpha + (2 - \alpha) = 2,$$

to je nemogue. Analogno se dokazuje da je $4 \notin \langle \alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon \rangle$. No ova situacija je nemogua, jer su 2 i 4 jedini lanovi niza. Time smo dokazali da je skup svih gomilita niza (a_n) skup $\{2, 4\}$. □

Zadatak 251. Neka je (a_n) ogranien niz i $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da za sve $\epsilon > 0$ skup $\langle \alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon \rangle \setminus \{\alpha\}$ sadri bar jedan lan niza (a_n). Dokaite da je tada α gomilite niza (a_n).

Rjeenje. Neka je $\epsilon > 0$. Tada postoji $a_{p_1} \in \langle \alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon \rangle \setminus \{\alpha\}$.

Za $\epsilon_2 = \big|\alpha - a_{p_1}\big|$ postoji $a_{p_2} \in \langle \alpha - \epsilon_2, \alpha + \epsilon_2 \rangle \setminus \{\alpha\}$ i vrijedi $a_{p_2} \neq a_{p_1}$. Naime, ako je $\alpha > a_{p_1}$, onda je

$$a_{p_2} > \alpha - \big|\alpha - a_{p_1}\big| = \alpha - (\alpha - a_{p_1}) = a_{p_1}$$

i analogno $a_{p_2} < a_{p_1}$ ako je $\alpha < a_{p_1}$. Uoimo i da je $\epsilon_2 < \epsilon$. Naime, vrijedi

$$\alpha - \epsilon < a_{p_1} < \alpha + \epsilon,$$

odakle dobivamo

$$-\epsilon < a_{p_1} - \alpha < \epsilon, \quad \text{tj. } \epsilon_2 = |\alpha - a_{p_1}| < \epsilon.$$

Dakle, imamo $a_{p_2} \in \langle \alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon \rangle \setminus \{\alpha\}$.

Za $\epsilon_3 = \left|\alpha - a_{p_2}\right|$ postoji $a_{p_3} \in \langle \alpha - \epsilon_3, \alpha + \epsilon_3 \rangle \setminus \{\alpha\}$ i vrijedi $a_{p_3} \notin \left\{a_{p_1}, a_{p_2}\right\}$. Tvrdnja $a_{p_3} \neq a_{p_2}$ pokazuje se analogno kao i u prethodnom sluaju. Analogno dobivamo i $a_{p_3} \in \langle \alpha - \epsilon_2, \alpha + \epsilon_2 \rangle \setminus \{\alpha\}$, odakle kao i prije slijedi da je $a_{p_3} \neq a_{p_1}$. Iz iste tvrdnje dobivamo i $a_{p_3} \in \langle \alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon \rangle \setminus \{\alpha\}$.

Ovaj postupak moemo nastaviti i time doi do niza (a_{p_n}) meusobno razliitih brojeva takvog da za svaki $i \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_{p_i} \in \langle \alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon \rangle \setminus \{\alpha\},$$

no tada je i $a_{p_i} \in \langle \alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon \rangle$, pa je α gomilite niza (a_n). □

Napomena 58 (Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove). Neka je (a_n) ogranien niz realnih brojeva. Tada on ima konvergentan podniz.

Definicija 40. Neka je (a_n) ogranien niz realnih brojeva. **Limes superior** niza (a_n) (u oznaci $\limsup a_n$) je supremum skupa svih gomilita od (a_n). **Limes inferior** niza (a_n) (u oznaci $\liminf a_n$) je infimum skupa svih gomilita od (a_n).

Prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu za nizove, svaki ogranien niz ima konvergentan podniz, te kako je limes niza takoer jedna toka gomilita, slijedi da je skup svih gomilita ogranienog niza neprazan, odakle slijedi da prethodna definicija ima smisla.

Napomena 59. Za niz (a_n) iz zadatka 250 vrijedi $\limsup a_n = 4$ i $\liminf a_n = 2$.

Zadatak 252. Neka je (a_n) niz zadan formulom $a_n = 1 + (-1)^n + \dfrac{1}{3^n}$. Odredite $\liminf a_n$ i $\limsup a_n$.

Rjeenje. (Vidite sliku 5.1). Prvo emo pronai skup gomilita niza (a_n). Promotrimo podnizove (a_{2n}) i (a_{2n-1}), respektivno. Vrijedi

$$a_{2n} = 2 + \frac{1}{3^{2n}}, \quad \text{te} \quad a_{2n-1} = \frac{1}{3^{2n-1}}.$$

Imamo $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 2$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = 0$, jer su to podnizovi konvergentnih nizova $n \mapsto 2 + \dfrac{1}{3^n}$ i $n \mapsto \dfrac{1}{3^n}$, respektivno. Slijedi da su 0 i 2 dva gomilita niza (a_n).

Dokaimo da su to jedina gomilita. Pretpostavimo da postoji $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$. Uzmimo

$$\epsilon = \frac{1}{2} \min\left\{|\alpha|, |\alpha - 2|\right\}.$$

Tvrdimo da je

$$\langle \alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon\rangle \cap \langle -\epsilon, \epsilon\rangle = \langle \alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon\rangle \cap \langle 2-\epsilon, 2+\epsilon\rangle = \emptyset.$$

Zaista, pretpostavimo da postoji $x \in \langle \alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon\rangle \cap \langle -\epsilon, \epsilon\rangle$.

Ako je $\alpha < 0$, onda je

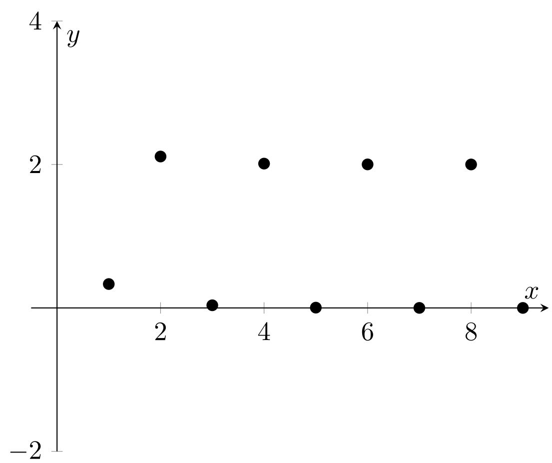
$$\alpha + \epsilon = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} < -\frac{\alpha}{2} = -\epsilon.$$

No po pretpostavci vrijedi $-\epsilon < x < \alpha + \epsilon$. Kontradikcija! Tvrdnja se analogno pokazuje za $0 < \alpha < 2$ i $\alpha > 2$, te se analogno pokazuje i da je $\langle \alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon\rangle \cap \langle 2-\epsilon, 2+\epsilon\rangle = \emptyset$. Iz dokazanog slijedi i

$$\langle \alpha-\epsilon, \alpha+\epsilon\rangle \cap \big(\langle -\epsilon, \epsilon\rangle \cup \langle 2-\epsilon, 2+\epsilon\rangle\big) = \emptyset. \tag{5.9}$$

Nadalje, kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 2$ i $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1} = 0$, iz definicije slijedi da za gore odabrani ϵ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $a_{2n-1} \in \langle -\epsilon, \epsilon\rangle$, te postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n' \geq n_1$ vrijedi $a_{2n} \in \langle 2-\epsilon, 2+\epsilon\rangle$. Sada za $N_0 = 2\max\{n_0, l_0\}$, slino kao u zadatku 244 dobivamo $a_n \in \langle -\epsilon, \epsilon\rangle \cup \langle 2-\epsilon, 2+\epsilon\rangle$. No iz (5.9) slijedi da on sadri najvie konano mnogo lanova niza (a_n). Stoga α ne moe biti gomilite niza (a_n).

Time smo dokazali da su jedina gomilita 0 i 2, pa je $\liminf a_n = 0$ i $\limsup a_n = 2$. □



Slika 5.1: Niz (a_n) iz zadatka 252

Napomena 60. Vidjeli smo da je raunanje limesa inferiora i superiora u zadatku 252 bio poprilino dugotrajan posao. Sreom, postoji rezultat koji znatno olakava traenje limesa inferiora, koji ovdje neemo dokazati i to sljedei – Neka su (a_n) i (b_n) ogranieni nizovi i neka je (a_n)

konvergentan. Tada su nizovi $(a_n + b_n)$ i $(a_n b_n)$ ogranieni i vrijedi

$$\begin{aligned} \limsup(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) + \limsup(b_n), \\ \limsup(a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) \limsup(b_n), \\ \liminf(a_n + b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) + \liminf(b_n), \\ \liminf(a_n b_n) &= \lim_{n\to\infty}(a_n) \liminf(b_n). \end{aligned}$$

Napomena 61. Ogranien niz realnih brojeva (a_n) je konvergentan ako i samo ako vrijedi $\liminf a_n = \limsup a_n$.

Zadatak 253. Neka je (a_n) ogranien niz za kojeg vrijedi $\lim_{n\to\infty}(a_{2^n} - 3a_n) = 0$. Dokaite da je (a_n) konvergentan i odredite mu limes.

Rjeenje. Pretpostavimo da (a_n) ne konvergira. Tada je $\liminf a_n \neq \limsup a_n$, to znai da (a_n) ima barem dva gomilita. Pokaimo da to ne vrijedi, tj. da (a_n) ima samo jedno gomilite i to 0.

Neka je $a \in \mathbb{R}$ gomilite niza (a_n). Tada postoji podniz (a_{p_n}) takav da je $\lim_{n\to\infty} a_{p_n} = a$. Promotrimo niz $(a_{2^{p_n}} - 3a_{p_n})$. To je podniz od $(a_{2^n} - 3a_n)$, pa vrijedi $\lim_{n\to\infty}(a_{2^{p_n}} - 3a_{p_n}) = 0$, odakle iz injenice da je $(3a_{p_n})$ niz koji konvergira u $3a$ i iz teorema o osnovnim operacijama s konvergentnim nizovima slijedi da je $(a_{2^{p_n}})$ konvergentan i vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_{2^{p_n}} = 3a$.

Odavde zakljuujemo da ako je a gomilite, da je onda i $3a$ gomilite. No i $3a$ je gomilite, pa je i $9a$ gomilite, i tako dalje. Openito, ako je a gomilite, imamo da je za sve $n \in \mathbb{N}$ i $3^n a$ gomilite. Kad bi bilo $a > 0$, ovo vodi na to da bi postojalo neko gomilite koje je vee od $\limsup a_n$ (prema Arhimedovu aksiomu postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $n_0 a > \limsup a_n$, te iz $3^{n_0} a \geq n_0 a > \limsup a_n$ slijedi tvrdnja). Analogno za $a < 0$ dobivamo da postoji neko gomilite koje je manje od $\liminf a_n$. Zato mora nuno biti $a = 0$, i time je tvrdnja dokazana. $\square$

Zadatci za vjebu

Pojam niza. Limes niza

Zadatak 254.

a) Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje postoji aritmetiki niz (a_n) takav da su $\sqrt{24x+1}$, $\sqrt{10x-1}$, $\sqrt{x+4}$ neka tri njegova uzastopna lana.

b) Dokaite: Ako je S_n zbroj prvih n lanova niza (a_n), a $n \mapsto S_n$ je kvadratna funkcija (definirana na nekom podskupu od $\mathbb{N}$) iji je slobodni lan 0, onda je niz (a_n) aritmetiki.

Zadatak 255. Koristei definiciju limesa niza, dokaite sljedee tvrdnje:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{2n+3} = 0,$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+7}} = 0,$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2-2} = 0,$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{1+n!} = 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{n^2} = 1,$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor 3n+11 \rfloor}{n^2+1} = 0,$

Zadatak 256.

a) Dokaite da je niz rastui ako i samo ako je on rastua funkcija.

b) Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Dokaite da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{ako i samo ako vrijedi} \quad \lim_{n\to\infty} |a - a_0| = 0$$

c) Dokaite: Ako je (a_n) konvergentan, onda je i $(|a_n|)$ konvergentan. Vrijedi li obrat?

Neka je $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako je (a_n) konvergentan s limesom u a, onda je $(\sqrt{a_n})$ konvergentan s limesom u $\sqrt{a}$. $\left(\textbf{Uputa:} \text{ Pomnoite } \sqrt{a_n} - \sqrt{a} \text{ s } \dfrac{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a}}.\right)$

Zadatak 257.

a) Dokaite da niz (a_n) zadan formulom $a_n = 2^{\sqrt{n}}$ divergira u ∞.

b) Neka je niz (a_n) zadan formulom

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{za } n = \dfrac{m(m+1)}{2},\ m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{inae.} \end{cases}$$

Ispitajte konvergenciju niza (a_n) i ako je konvergentan, odredite mu limes.

Zadatak 258. ($*$) Neka je (a_n) konvergentan niz i $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcija. Dokaite da je niz $(a_{\sigma(n)})$ konvergentan i odredite mu limes.

Zadatak 259. ($**$) Dokaite koristei definiciju limesa niza da je $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2^n}} = 1$.

Osnovne operacije s konvergentnim nizovima. Kriteriji konvergencije niza

Zadatak 260.

a) Navedite primjer strogo monotonog niza koji konvergira u 20.

b) Navedite primjer neogranienog niza koji niti ne konvergira, niti ne divergira u ∞ ili $-\infty$.

c) Navedite primjer konvergentnog niza sa svojstvom da za sve $n \in \mathbb{N}$ i za sve $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{2n} > a_{2m+1}$.

Zadatak 261. Ispitajte konvergenciju niza (a_n) i ako je konvergentan odredite mu limes, ako je:

a) $a_n = \dfrac{n^2+4n+3}{2n^2+2n+1}$,

b) $a_n = \dfrac{(2n+1)(3n+2)(4n+3)(5n+4)}{(4n+4)(5n+5)(6n+6)(7n+7)}$,

c) $a_n = \dfrac{(2n+1)(3n+2)(n+1)!}{(4n+3)^3 n!}$,

d) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n+2\sqrt{n^4+1}}$,

e) $a_n = \dfrac{7+11+15+\cdots+(3+4n)}{4n^2}$,

f) $a_n = \dfrac{2^n+3^n}{4^n+5^n}$,

g) $a_n = \sqrt{n+2}-\sqrt{n}$

Zadatak 262. Ispitajte konvergenciju niza (a_n) i ako je konvergentan odredite mu limes, ako je:

a) $a_n = \sqrt[n]{n2^n+1}$,

b) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2+n}$.

c) $a_n = 1 + \dfrac{2}{(-1)^n+3^n}$

Zadatak 263. Koristei injenicu da je niz $n \mapsto \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ konvergentan s limesom u e, odredite sljedee limese.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{-n}\right)^{-n}$

Zadatak 264. Koliko ima prirodnih brojeva $n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi

$$\frac{2n}{n+1} - \frac{3}{2^n} - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^4} > 1?$$

Dokaite svoje tvrdnje! (**Uputa:** Iskoristite definiciju limesa niza.)

Zadatak 265.

a) Neka je (a_n) niz takav da je niz (b_n) zadan formulom $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ konvergentan. Dokaite da je tada i (a_n) konvergentan i vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Odredite sve polinome $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{n^2 + 2n + 5} = 2025.$$

c) Neka su (a_n) i (b_n) dva niza takva da je $a_n \leq b_n$, (a_n) raste i (b_n) pada. Dokaite da tada oba niza konvergiraju. Jesu li njihovi limesi openito jednaki?

Zadatak 266. ($**$) Neka je $f : \mathbb{R} \to \langle 0, \infty \rangle$ padajua funkcija, te neka je zadan niz (a_n) takav da je $a_1 = 1$ i za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_{n+1} = a_n + f(a_n)$. Dokaite da (a_n) divergira u ∞.

Zadatak 267. ($**$) Neka je (a_n) ogranien niz realnih brojeva takav da za sve $n \geq 2$ vrijedi

$$a_n \leq \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Pokaite da je (a_n) konvergentan.

Podniz. Nizovi zadani rekurzivno. Limesi sloenijih nizova

Zadatak 268. Neka su (a_n), $(b_n)\,(c_n)$ nizovi zadani formulama

$$a_n = 2n + 1,\ b_n = 8n^2 + 8n + 3,\ c_n = 8n^2 - 9$$

a) Dokaite da je (b_n) podniz od (a_n).

b) Je li niz (c_n) podniz od (a_n)? Dokaite.

Zadatak 269. Ispitajte konvergenciju niza (a_n) i ako je konvergentan odredite mu limes, ako je:

a) $a_n = \underbrace{\sqrt{5 + \sqrt{5 + \cdots + \sqrt{5}}}}_{n \text{ korijena}},$

b) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 1}{2a_n},\ n \geq 1,$

c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n + 3}{2a_n},\ n \geq 1.$ (Ovaj niz nee biti monoton – pokuajte se snai drukije!)

Zadatak 270.

a) Neka je (a_n) monoton niz koji ima konvergentan podniz. Dokaite da je tada (a_n) konvergentan.

b) $(*)$ Neka je (a_n) konvergentan niz i neka je (b_n) niz zadan formulom

$$b_1 = \sup\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$$
$$b_n = \sup\big\{a_m : m \in \mathbb{N} \setminus \{1, \ldots, n-1\}\big\} \text{ (za } n \geq 2).$$

Dokaite da je (b_n) konvergentan i odredite $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Zadatak 271. Ispitajte konvergenciju niza (a_n) i ako je konvergentan odredite mu limes, ako je:

a) $a_n = \dfrac{1}{(2n)!^2} \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} i!^2,$

b) $a_n = \dfrac{\sum\limits_{i=n}^{2n} (-i)^i}{(2n)^{2n}},$

Zadatak 272. $(**)$ Dokaite tvrdnje zadatka 253 koristei definiciju limesa niza.

Limes superior i limes inferior

Zadatak 273. Neka je (a_n) niz zadan formulom $a_n = (-1)^n\left(1 - \dfrac{1}{3^n}\right)$. Odredite $\liminf a_n$ i $\limsup a_n$. (Dokaite sve svoje tvrdnje.)

Zadatak 274. $(*)$ Dokaite da svaki konvergentan niz postie ili svoj infimum, ili svoj supremum, ili oboje. Dajte primjer sva tri tipa niza.

Poglavlje 6

Neprekidnost funkcije

6.1 Definicija neprekidnosti funkcije

Definicija 41 (Definicija neprekidnosti funkcije)**.** Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $c \in I$. Kaemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ **neprekidna u toki** c ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in I$ vrijedi

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

- f je **neprekidna na skupu** $S \subseteq I$ ako je ona neprekidna u svakoj toki skupa S.
- f ima **prekid** u toki c ako ona nije neprekidna u c.
- f ima **prekid na skupu** $S \subseteq I$ ako postoji bar jedna toka $c \in S$ u kojoj f ima prekid.

Napomena 62. Gornja definicija moe se generalizirati na proizvoljne neprazne skupove I.

Zadatak 275. Dokaite sljedee tvrdnje koristei definiciju neprekidnosti funkcije.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4$ je neprekidna u toki -2.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \neq 1, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

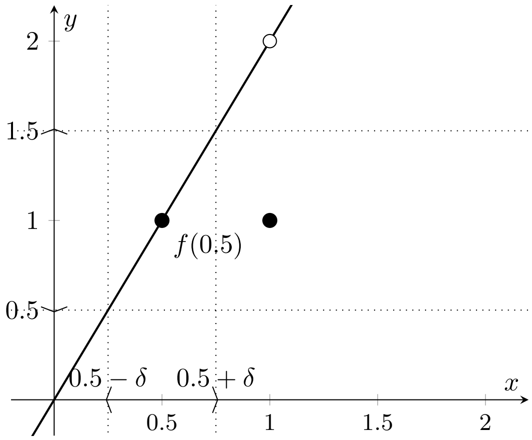
je neprekidna u svakoj toki $c \neq 1$, a u toki $c = 1$ ima prekid.

Rjeenje. a) Treba dokazati da za sve $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

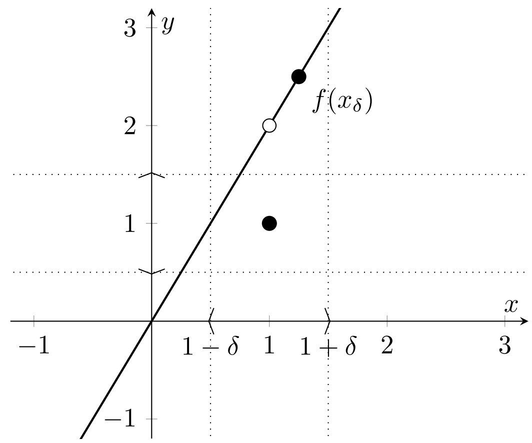
$$|x + 2| < \delta \Rightarrow |3x + 6| = 3|x + 2| < \epsilon$$

Uzmemo li $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$, tvrdnja vrijedi.

b) Iskoristit emo sljedee slike da bi lake dokazali tvrdnju.



(a) Neprekidnost funkcije iz zadatka 275 u $\frac{1}{2}$



(b) Prekid funkcije iz zadatka 275 u 1

Primijetimo da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(x) = 2x$ ako i samo ako je $x \neq 1$, pa moramo odabrati δ takav da interval $\langle c - \delta, c + \delta \rangle$ ne sadri broj 1. Zaista, neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Uzmemo li

$$\delta = \min\left\{ \frac{\epsilon}{2}, \ \frac{|1 - c|}{2} \right\},$$

vrijedi $1 \notin \langle c - \delta, c + \delta \rangle$, pa za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koji je $|x - c| < \delta$ je

$$|2x - 2c| = 2|x - c| < 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dokaimo sada da za $c = 1$ funkcija ima prekid. Treba dokazati da postoji $\epsilon > 0$ takav da za sve $\delta > 0$ postoji $x_\delta \in \mathbb{R}$ takav da je

$$|x_\delta - 1| < \delta \quad \text{i} \quad |f(x_\delta) - 1| \geq \epsilon.$$

Uzmemo li $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\delta > 0$ proizvoljan i $x_\delta = 1 + \frac{\delta}{2}$, imamo

$$|x_\delta - 1| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

i kako je $x_\delta > 1$, slijedi $f(x_\delta) = 2x_\delta > 2$, pa vrijedi $|f(x_\delta) - 1| > 1 > \epsilon$. $\square$

Napomena 63. Primijetimo da za sve $x, c \in \mathbb{R}$ i $\delta > 0$ takav da je $|x - c| < \delta$ imamo

$$|c| = |c - x + x| \leq |x - c| + |x| < \delta + |x|,$$
$$|x| = |x - c + c| \leq |x - c| + |c|,$$

to daje

$$|x| > |c| - \delta, \tag{6.1}$$
$$|x| < \delta + |c|. \tag{6.2}$$

(6.1) daje donju meu, a (6.2) gornju meu za $|x|$, stoga su ove dvije tvrdnje esto korisne kada se treba izraza $|x|$ "rijeiti" kako bismo mogli uzeti δ koji ne ovisi o x.

Zadatak 276. Dokaite sljedee tvrdnje koristei definiciju neprekidnosti funkcije.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ je neprekidna na svojoj domeni.

Rjeenje. a) Neka su $c \in \mathbb{R}$ i $\epsilon > 0$ proizvoljni. Uzmimo

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{1 + 2|c|}, 1\right\}.$$

Tada za sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je $|x - c| < \delta$ vrijedi

$$|x| = |x - c + c| \le |x - c| + |c| \le 1 + |c|,$$
$$|x + c| \le |x| + |c| \le 1 + 2|c|.$$

Odavde slijedi

$$|x^2 - c^2| = |x - c||x + c| < \frac{\epsilon}{1 + 2|c|} \cdot (1 + 2|c|) = \epsilon.$$

b) Neka su $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $\epsilon > 0$ proizvoljni. Vrijedi

$$\left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{c^2}\right| = \frac{|x^2 - c^2|}{|x|^2|c|^2} = \frac{|x - c||x + c|}{x^2c^2}$$

Uzmimo

$$\delta = \min\left\{\frac{\epsilon \cdot c^4}{4\big(1 + 2|c|\big)}, 1, \frac{|c|}{2}\right\}.$$

Iz (6.1) imamo

$$|x| > |c| - \frac{|c|}{2} = \frac{|c|}{2}, \quad \text{tj.} \quad x^2 > \frac{c^2}{4}.$$

Nadalje, kao i u a) dijelu zadatka imamo $|x| + |c| \le 1 + 2|c|$. Sve skupa, imamo

$$\frac{|x^2 - c^2|}{|x|^2|c|^2} = \frac{|x - c||x + c|}{x^2c^2} < \frac{4|x - c|(1 + 2|c|)}{c^4} < \epsilon.$$

$\square$

Napomena 64. U b) dijelu zadatka 276, gornju meu od $|x+c|$ mogli smo nai i na sljedei nain. Ako je $c > 0$, onda za neki $\delta \leq \dfrac{c}{2}$ imamo

$$|x-c| < \delta \leq \frac{c}{2} \Longrightarrow -\frac{c}{2} < x-c < \frac{c}{2},$$

odakle, zbog injenice da je $x = |x|$ slijedi

$$\frac{c}{2} < |x| < \frac{3c}{2}, \ \ \frac{3c}{2} < |x+c| < \frac{5c}{2}, \tag{6.3}$$

pa imamo gornju i donju meu za $|x+c|$, ali i $|x|$.
Ako je $c < 0$, za neki $\delta \leq -\dfrac{c}{2}$ dobivamo $\dfrac{c}{2} < x-c < -\dfrac{c}{2}$, odnosno

$$\frac{3c}{2} < x < \frac{c}{2}, \ \ \frac{5c}{2} < x+c < \frac{3c}{2},$$

no kako je $x \mapsto |x|$ strogo padajua na $\langle -\infty, 0 \rangle$, dobivamo

$$-\frac{c}{2} < |x| < -\frac{3c}{2}, \ \ -\frac{3c}{2} < |x+c| < -\frac{5c}{2},$$

dakle opet imamo gornju i donju meu za $|x+c|$ i $|x|$.
Zadatak 277. Dokaite koristei definiciju neprekidnosti funkcije da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \in \mathbb{Q}, \\ x, & x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

neprekidna u 0 i ima prekid u svakoj drugoj toki.

Rjeenje. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Tada za $\delta = \epsilon$ i za $x \in \mathbb{R}$ takve da je $|x| < \delta$ vrijedi $|f(x)| = |x| < \epsilon$, ime smo dokazali neprekidnost u 0.

Dokaimo da f ima prekid u svakoj toki $c > 0$. Pretpostavimo sada da je f neprekidna za neki iracionalni $c > 0$. Tada tvrdnja vrijedi i za $\epsilon = f(c)$, pa postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $|x - c| < \delta$ vrijedi $|f(x) - f(c)| < f(c)$. Tada vrijedi

$$f(x) - f(c) > -f(c),$$

odnosno $f(x) > 0$ za sve x za koje je $|x - c| < \delta$. No za δ zbog gustoe skupa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{R}$, postoji $x_\delta \in \mathbb{Q}$ takav da je

$$|x_\delta - c| < \delta.$$

Kako je $x_\delta \in \mathbb{Q}$, vrijedi $f(x_\delta) \leq 0$, to je nemogue.

Tvrdnja se analogno dokazuje ako je x racionalan i ako je $c < 0$. $\square$

Zadatak 278. Dokaite sljedee tvrdnje koristei definiciju neprekidnosti funkcije.

a) $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ je neprekidna na svojoj domeni.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ je neprekidna na svojoj domeni.

Rjeenje. a) Neka je $\epsilon, c > 0$ proizvoljni. Uzmemo li $\delta = \sqrt{c}\epsilon$, za sve $x \geq 0$ za koje je $|x - c| < \delta$ imamo

$$|\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \left|\left(\sqrt{x} - \sqrt{c}\right)\frac{\sqrt{x} + \sqrt{c}}{\sqrt{x} + \sqrt{c}}\right| = \frac{|x - c|}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} < \frac{|x - c|}{\sqrt{c}} < \epsilon$$

b) Neka su $\epsilon > 0$ i $c \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Uzmemo li $\delta = \epsilon$, za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $|x - c| < \delta$ vrijedi

$$|\sin x - \sin c| = \left|2\cos\frac{x + c}{2}\sin\frac{x - c}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x - c}{2}\right|,$$

gdje smo iskoristili injenicu da je $\left|\cos\frac{x + c}{2}\right| \leq 1$. Kako za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\left|\sin\frac{x - c}{2}\right| \leq \left|\frac{x - c}{2}\right|$, imamo

$$2\left|\sin\frac{x - c}{2}\right| \leq |x - c| < \epsilon.$$

$\square$

Zadatak 279. Koristei definiciju neprekidnosti funkcije, odredite najvei[1] skup na kojem je

[1]Najvei skup $S \subseteq \mathbb{R}$ takav da je f neprekidna je skup sa svojstvom da za sve $T \subseteq \mathbb{R}$ za koje je f neprekidna vrijedi $T \subseteq S$.

funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-1}, & x \geq 1, \\ \dfrac{1}{2} - x, & x < 1. \end{cases}$$

neprekidna.

Rjeenje. Iz grafa funkcije f vidimo da e ona biti neprekidna svugdje osim u toki 1. Dokaimo prvo da je f neprekidna na skupu $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Zaista, neka je $c > 1$ i

$$\delta = \min\left\{ \frac{\sqrt{2c-1}}{2}\epsilon,\ c-1 \right\}.$$

Tada za sve $x \in \mathbb{R}$, $|x-c| < c-1$ povlai $x > 1$, stoga je

$$f(x) = \sqrt{2x-1} \quad \text{i} \quad f(c) = \sqrt{2c-1}.$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Slino kao u a) dijelu zadatka 278, za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $|x-c| < \delta$ vrijedi

$$\begin{aligned} \left| \left(\sqrt{2x-1} - \sqrt{2c-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2c-1}}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2c-1}} \right| &= \frac{\big|(2x-1) - (2c-1)\big|}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2c-1}} \\ &= \frac{2|x-c|}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{2c-1}} < \frac{2|x-c|}{\sqrt{2c-1}} < \epsilon. \end{aligned}$$

Neka je sada $c < 1$ i

$$\delta = \min\{\epsilon,\ 1-c\}.$$

Dobivamo $|x-c| < 1-c$, odakle slijedi $x < 1$, pa je

$$f(x) = \frac{1}{2} - x \quad \text{i} \quad f(c) = \frac{1}{2} - c.$$

Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Za sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je $|x-c| < \delta$ vrijedi

$$\left| \left(\frac{1}{2} - x \right) - \left(\frac{1}{2} - c \right) \right| = |x-c| < \epsilon.$$

Pokaimo sada da funkcija ima prekid za $c = 1$. Uzmimo $\epsilon = \dfrac{1}{2}$ i neka je $\delta > 0$ proizvoljan. Uzmimo sada $x_\delta = \max\left\{0,\ 1 - \dfrac{\delta}{2}\right\}$. Uoimo da vrijedi

$$|x_\delta - 1| \leq \frac{\delta}{2} < \delta.$$

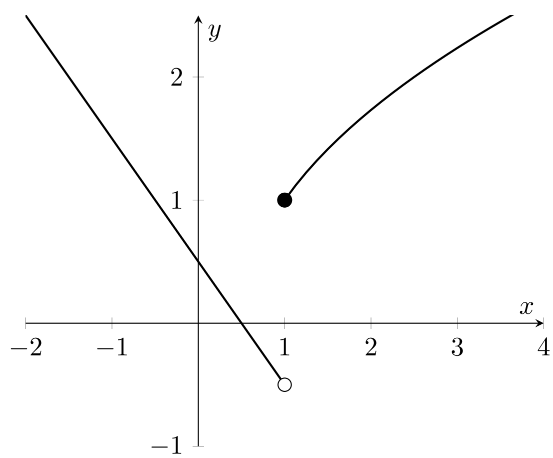
Naime, ako je $1 - \dfrac{\delta}{2} \geq 0$, to je jasno, a ako je $1 - \dfrac{\delta}{2} \leq 0$, onda je $\delta \geq 2$ i $x_\delta = 0$, pa je

$$|x_\delta - 1| = |0 - 1| = 1 \leq \frac{\delta}{2}.$$

Kako je $0 \leq x_\delta < 1$, slijedi $f(x_\delta) = \dfrac{1}{2} - x_\delta \in \left\langle -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. To povlai

$$|f(x_\delta) - 1| \geq \frac{1}{2} = \epsilon.$$

$\square$



Slika 6.2: Graf funkcije iz zadatka 279

6.2 Svojstva neprekidnih funkcija

Napomena 65 (Neprekidnost kompozicije funkcija). Neka su $I, I' \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni intervali i $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I' \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je $f(I) \subseteq I'$. Neka je f neprekidna u toki $c \in I$, a g neprekidna u toki $d = f(c) \in I'$. Tada je $h = g \circ f$ neprekidna u toki c.

Napomena 66 (Teorem o lokalnoj ogranienosti neprekidne funkcije)*.* Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $c \in I$ i neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna u c. Tada postoje realni brojevi $\eta > 0$ i $M > 0$ takvi da za sve $x \in I$ vrijedi

$$|x - c| < \eta \Longrightarrow |f(x)| < M.$$

Napomena 67 (Osnovne operacije s neprekidnim funkcijama)*.* Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, te neka su $f, g : I \to \mathbb{R}$ neprekidna u toki $c \in I$. Vrijedi:

a) $f + g$ je neprekidna u c,

b) fg je neprekidna u c,

c) Ako je $g(x) \neq 0$ za sve $x \in I$, onda je $\dfrac{f}{g}$ neprekidna u c,

d) $|f|$ je neprekidna u c.

Zadatak 280. Dokaite napomenu 67 koristei definiciju neprekidnosti funkcije.

Dokaz. a) Budui da su f i g neprekidne u c, za svaki $\epsilon > 0$ postoje $\delta_1, \delta_2 > 0$ takvi da za sve $x \in I$ vrijedi

$$|x - c| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{i} \quad |x - c| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Uzmimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za sve $x \in I$ za koje je $|x - c| < \delta$ vrijedi

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(c)| &= \Big|\big(f(x) + g(x)\big) - \big(f(c) + g(c)\big)\Big| = \big|f(x) - f(c) + g(x) - g(c)\big| \\ &\leq |f(x) - f(c)| + |g(x) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

b) Prema napomeni 66 postoje $\eta_1, \eta_2, M_1, M_2 > 0$ takvi da za sve $x \in I$ vrijedi

$$|x - c| < \eta_1 \Longrightarrow |f(x)| < M_1 \quad \text{i} \quad |x - c| < \eta_2 \Longrightarrow |g(x)| < M_2.$$

Sada za $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ i $M = \max\{M_1, M_2\}$ imamo da za sve $x \in I$ takve da je $|x - c| < \eta$ vrijedi $|f(x)|, |g(x)| < M$. Nadalje, zbog neprekidnosti od f i g, za svaki $\epsilon > 0$ postoje $\delta_1, \delta_2 > 0$ takvi da za sve $x \in I$ vrijedi

$$|x - c| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2M} \quad \text{i} \quad |x - c| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x) - g(c)| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Uzmimo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Tada je

$$\begin{aligned}|(fg)(x) - (fg)(c)| &= \big|f(x)g(x) - f(c)g(c)\big| \\ &= \big|f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)\big| \\ &\leq |f(x) - f(c)||g(x)| + |g(x) - g(c)||f(c)| < \frac{\epsilon}{2M} \cdot M + \frac{\epsilon}{2M} \cdot M = \epsilon.\end{aligned}$$

c) Nije teko pokazati da je funkcije $q : I \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $q(x) = \dfrac{1}{x}$ neprekidna na svojoj domeni. Uoimo da je $\dfrac{1}{g} = q \circ g$. Za sve $c \in I \setminus \{0\}$ vrijedi $g(c) \neq 0$, pa je, po napomeni 65 i $\dfrac{1}{g} = q \circ g$ neprekidna u c. No i f je neprekidna u c, pa je prema b), $f \cdot \dfrac{1}{g} = \dfrac{f}{g}$ neprekidna u c, dakle i neprekidna na $I \setminus \{0\}$.

d) Lako je pokazati da je $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = |x|$ neprekidna na $\mathbb{I}$. Kako je f neprekidna na $\mathbb{R}$, slijedi i da je $q \circ f = |f|$ neprekidna na $\mathbb{R}$. $\square$

Napomena 68 (Heineova karakterizacija neprekidnosti)*.* Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i neka je zadana $f : I \to \mathbb{R}$. Funkcija f je neprekidna u toki $c \in I$ ako i samo ako za svaki niz (a_n) iz I koji konvergira prema c, niz $\big(f(a_n)\big)$ konvergira prema $f(c)$.

Prethodna injenica je vrlo korisna kako bi pokazali da neka funkcija ima prekid u nekoj toki.
Zadatak 281. Dokaite: Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & x \leq 3, \\ -x + 6, & x > 3. \end{cases}$$

ima prekid u toki $c = 3$.

Rjeenje. Dovoljno je pokazati da postoji niz (a_n) realnih brojeva koji konvergira u 3 takav da $\big(f(a_n)\big)$ ne konvergira u $f(3) = 5$. Promotrimo niz (a_n) zadan formulom $a_n = 3 + \dfrac{1}{n}$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$, te kako je $a_n > 3$ za sve $n \in \mathbb{N}$, za niz $\big(f(a_n)\big)$, gdje je

$$f(a_n) = -\left(\frac{1}{n} + 3\right) + 6 = 9 - \frac{1}{n}$$

vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 9 \neq 5$, to je i trebalo pokazati. $\square$

Zadatak 282. Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Dokaite da je ona neprekidna u svakoj toki $c \neq 0$ koristei Heineovu karakterizaciju neprekidnosti.

Dokaz. Uzmimo npr. da je $c > 0$, sluaj $c < 0$ tretira se analogno. Uzmimo proizvoljan niz (a_n) takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Iz definicije slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{R}$ takav da za sve prirodne $n \geq n_0$ vrijedi $|a_n - c| < c$, odakle slijedi da je $a_n > 0$ za sve $n \geq n_0$. Zato je $f(a_n) = 1 = f(c)$ za sve $n \in \mathbb{N}$ osim za njih konano mnogo, pa je jasno da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. $\square$

Zadatak 283. Zadana je funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ x = 0, \\ \dfrac{1}{n}, \ x = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \text{gdje su } m \in \mathbb{Z} \text{ i } n \in \mathbb{N} \text{ relativno prosti.} \\ 0, \ x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Ova funkcija zove se *Thomaeova funkcija*. Dokaite da je ona neprekidna u svakoj iracionalnoj toki i ima prekid u svakoj racionalnoj toki.

Rjeenje. Dokaimo sljedeu pomonu tvrdnju: Neka je $M > 0$ proizvoljan. Tada je skup

$$S_M = \big\{x \in [0,1] : f(x) \geq M\big\}$$

konaan.

Zaista, ako je $M > 1$, vrijedi $S_M = \emptyset$.

Ako je $M \leq 1$, iz $f(x) \geq M > 0$ slijedi da je ili $x = 1$ (pa je S_M konaan) ili postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x) = \dfrac{1}{n}$. Uoimo da je

$$\frac{1}{n} \geq M \Longleftrightarrow n \leq \frac{1}{M},$$

pa je $\left\{n \in \mathbb{N} : \dfrac{1}{n} \geq M\right\}$ odozgo ogranien podskup skupa $\mathbb{N}$, dakle on je konaan. To znai da za sve $x \in S_M$ vrijedi ili $x = 0$, ili postoje $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $x = \dfrac{m}{n}$, kojih je oito konano mnogo, jer je $n \in \left\{1, 2, \ldots, \dfrac{1}{M}\right\}$, te $m \in \{1, \ldots, n\}$.

Pokaimo sada neprekidnost funkcije u svakoj iracionalnoj toki. Neka su $\epsilon > 0$ i $c \in \mathbb{I}$ proizvoljni. Tvrdimo da postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x)| = f(x) < \epsilon.$$

Ako je $\epsilon \geq 1$, tvrdnja je trivijalna. Uzmimo zato $\epsilon < 1$. Oito je tada skup S_ϵ neprazan, jer je npr. $0 \in S_\epsilon$.

Neka je $x_0 \in S_\epsilon$ toka takva da za sve $y \in S_\epsilon$ vrijedi $|x_0 - c| \leq |y - c|$. Takva toka postoji, jer inae bi slino kao u rjeenju zadatka 251 dobili da je S_ϵ beskonaan, to oito ne vrijedi. Tvrdimo da za $\delta = |x_0 - c|$, ne postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $|x - c| < \delta$ i $x \in S_\epsilon$. Zaista, u tom sluaju bi imali

$$|x_0 - c| \leq |x - c| < \delta = |x_0 - c|,$$

kontradikcija! Ovo povlai da za sve $x \in \mathbb{R}$ takve da je $|x - c| < \delta$ vrijedi $|f(x)| < \epsilon$, to je i trebalo pokazati.

Dokaimo sada da funkcija ima prekid u svakoj racionalnoj toki. Zaista, ako je $q \in \mathbb{Q}$, onda je $f(q) \neq 0$, a kako za svaki broj q postoji niz (a_n) iracionalnih brojeva koji konvergira prema q (Dokaite to!), za taj niz je $\lim\limits_{x \to \infty} f(a_n) = 0 \neq f(q)$, ime smo dokazali tvrdnju. □

Napomena 69 (Bolzano-Weierstrassov teorem). Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada je $f([a, b])$ takoer segment.

Napomena 70. Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Prethodni teorem je ekvivalentan s konjunkcijom sljedee tri tvrdnje.

- f je ograniena na $[a, b]$, tj. postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je $|f(x)| \leq M$ za sve $x \in [a, b]$.
- f dostie svoj infimum i supremum na $[a, b]$, tj. postoje $x_m, x_M \in [a, b]$ za koje je[2]

$$f(x_m) = \inf f = \min f = m,$$
$$f(x_M) = \sup f = \max f = M.$$

- (Teorem o meuvrijednostima) Za svaki $C \in [m, M]$ postoji $c \in [a, b]$ takav da je $C = f(c)$.

[2] Ako je $S \neq \emptyset$ i $f : S \to \mathbb{R}$, onda se $\inf f, \sup f, \min f, \max f$ definiraju kao $\inf \mathcal{R}(f), \sup \mathcal{R}(f), \min \mathcal{R}(f), \max \mathcal{R}(f)$, respektivno.

Zadatak 284. Zadana je $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + 3x^3$. Odredite $\mathcal{R}(f)$.

Rjeenje. Uoimo da su $f_1 : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$ i $f_2 : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 3x^3$ strogo rastue, pa je i $f = f_1 + f_2$ strogo rastua. Zato je

$$f(0) = 0 = \min f \quad \text{i} \quad f(2) = 56 = \max f,$$

pa je $\mathcal{R}(f) \subseteq [0, 56]$.

S druge strane, moe se pokazati da je $x \mapsto x^n$ je neprekidna na $\mathbb{R}$ za sve $n \in \mathbb{N}$ (v. [3]), odakle slijedi i da je f neprekidna na $\mathbb{R}$, te je specijalno f neprekidna na $[0, 2]$. Iz teorema o meuvrijednostima imamo da za sve $C \in [0, 56]$ postoji $c \in [0, 2]$ takav da je $C = f(c)$. Odavde slijedi $[0, 56] \subseteq \mathcal{R}(f)$, pa je $\mathcal{R}(f) = [0, 56]$. □

Zadatak 285. Zadana je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$. Odredite $\mathcal{R}(f)$.

Rjeenje. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Kako je f neprekidna na $\mathbb{R}$, ona je i neprekidna na segmentu $\left[-\frac{\pi}{2} - 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$. Uoimo da za sve $x \in \left[-\frac{\pi}{2} - 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]$ vrijedi

$$|x \sin x| = |x||\sin x| \leq |x| \leq \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

i vrijedi $f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, pa je

$$\min f = -\frac{\pi}{2} - 2n\pi \quad \text{i} \quad \max f = \frac{\pi}{2} + 2n\pi.$$

Odavde, slino kao u zadatku 284, slijedi

$$f\left(\left[-\frac{\pi}{2} - 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right]\right) = \left[-\frac{\pi}{2} - 2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right].$$

Neka je sada $y \in \mathbb{R}$ proizvoljan. Prema Arhimedovu aksiomu postoje $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$n_0 > \frac{y - \frac{\pi}{2}}{2} \quad \text{i} \quad m_0 > -\frac{y + \frac{\pi}{2}}{2\pi},$$

odnosno

$$\frac{\pi}{2} + 2n_0\pi > y \quad \text{i} \quad -\frac{\pi}{2} - 2m_0\pi < y,$$

odakle za $n_1 = \max\{n_0, m_0\}$ slijedi da je $y \in \left[-\frac{\pi}{2} - 2n_1\pi, \frac{\pi}{2} + 2n_1\pi\right]$. Meutim, kako je f

neprekidna na $\left[-\dfrac{\pi}{2} - 2n_1\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2n_1\pi\right]$, postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $y = f(x)$. Dakle, vrijedi $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{R}(f)$, to znai da je $\mathcal{R}(f) = \mathbb{R}$. $\square$

Zadatak 286. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna i strogo monotona na I. Dokaite da je tada $\mathcal{R}(f)$ otvoreni interval.

Dokaz. Uzmimo da f strogo raste na I (Analogno se tretira sluaj gdje f strogo pada). Pretpostavimo da je $\inf \mathcal{R}(f) = \inf f \in \mathcal{R}(f)$. Tada postoji $a \in I$ takav da je $f(a) = \inf f$. Meutim, kako je I otvoreni interval, postoji $a' \in I$ takav da je $a' < a$. Odavde je $f(a_1) \in \mathcal{R}(f)$ i vrijedi $f(a_1) < f(a) = \inf f$, kontradikcija! Analogno se pokazuje da $\sup f \notin \mathcal{R}(f)$. Odavde dobivamo $\mathcal{R}(f) \subseteq \langle \inf f, \sup f\rangle$.

Neka je $z \in \langle \inf f, \sup f\rangle$. Tada postoje $x, y \in \langle \inf f, \sup f\rangle$ takvi da je $x < z < y$. Kako je f strogo rastua, ona ima inverznu funkciju f^{-1} koja je takoer strogo rastua, pa je $f^{-1}(x) < f^{-1}(z) < f^{-1}(y)$. No tada je $f\Big(\big[f^{-1}(x), f^{-1}(y)\big]\Big)$ segment, pa je

$$z \in f\Big(\big[f^{-1}(x), f^{-1}(y)\big]\Big) \quad \text{i} \quad f\Big(\big[f^{-1}(x), f^{-1}(y)\big]\Big) \subseteq f(I) = \mathcal{R}(f),$$

to vrijedi zbog injenice da za svaku funkciju $g : S \to \mathbb{R}$ i skupove $A \subseteq B \subseteq S$ vrijedi $f(A) \subseteq f(B)$ (Dokaite to!). Dobivamo $z \in \mathcal{R}(f)$, pa zakljuujemo da je $\mathcal{R}(f) = \langle \inf f, \sup f\rangle$.
NADOPUNITI SLUCAJ KAD SLIKA NIJE OGRANICEN SKUP $\square$

Zadatci za vjebu

Definicija neprekidnosti funkcije

Zadatak 287. Koristei definiciju neprekidnosti funkcije, dokaite sljedee tvrdnje:

a) $x \mapsto |3x+2|$ je neprekidna na $\mathbb{R}$,

b) $x \mapsto x(x+1)$ je neprekidna na $\mathbb{R}$,

c) $x \mapsto x^3$ je neprekidna na $\mathbb{R}$,

d) $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ je neprekidna na $\mathbb{R}^+$,

e) $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ je neprekidna u 0,

f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je neprekidna u 0,

g) $x \mapsto 2\sin^2 x - 1$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Zadatak 288. Zadan je otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$ i funkcija $f : I \to \mathbb{R}$. Dokaite ili opovrgnite: f je neprekidna u c ako i samo ako...

a) Postoji $\delta > 0$ takav da za sve $\epsilon > 0$ i sve $x \in I$ vrijedi $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon$,

b) Za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in I$ vrijedi $|f(x)-f(c)| < \epsilon \Rightarrow |x-c| < \delta$,

c) Za svaki $\delta > 0$ postoji $\epsilon > 0$ takav da za sve $x \in I$ vrijedi $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(c)| < \epsilon$.

Zadatak 289. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $c \in I$. Zadana je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ sa sljedeim svojstvom: Za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $\delta > 0$ tako da za sve $x \in I$ vrijedi $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \dfrac{1}{2^k}$. Dokaite ili opovrgnite: f je neprekidna u c.

Zadatak 290. Koristei definiciju neprekidnosti funkcije, odredite najvei skup na kojem je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 3, \\ 2x+1, & x > 3. \end{cases}$$

neprekidna.

Zadatak 291. $(*)$ Koristei definiciju neprekidnosti funkcije, dokaite da je $\sqrt[3]{x}$ neprekidna na svojoj domeni.

Svojstva neprekidnih funkcija

Zadatak 292. Postoji li $c \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-1}, & x \neq 1, \\ c, & x = 1 \end{cases}$$

je neprekidna u 1.

b) Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - c, & x \leq 1, \\ \sqrt{x-1}, & x > 1. \end{cases}$$

je neprekidna u 1.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x},\ x \neq 0, \\ c,\ x = 0. \end{cases}$$

je neprekidna u 0.

Zadatak 293. Dokaite da je $\mathcal{R}(\sin) = \mathcal{R}(\cos) = [-1, 1]$ i da je $\mathcal{R}(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$.

Bibliografija

[1] M. Vukovi, *Matematika logika*, skripta, PMF – Matematiki odsjek, Zagreb, 2007.

[2] K. Horvati, *Linearna algebra*, Golden marketing – Tehnika knjiga, Zagreb, 2004.

[3] D. Krizmani, *Matematika analiza 1*, skripta, Fakultet za matematiku Sveuilita u Rijeci, Rijeka, 2024.

[4] A. Dujella, *Teorija brojeva*, kolska knjiga, Zagreb, 2019.

[5] S. Kurepa, *Matematika analiza 1*, kolska knjiga, Zagreb, 1976.

[6] *Applying the Arithmetic Mean Geometric Mean Inequality*. Brilliant.org. Preuzeto u 11:12, 19. srpnja 2024., Za link kliknite ovdje.

[7] *Arithmetic Mean - Geometric Mean*. Brilliant.org. Preuzeto u 15:54, 19. srpnja 2024., Za link kliknite ovdje.

[8] B. P. Demidovi i suradnici, *Zadaci i rijeeni primjeri iz matematike analize za tehnike fakultete*, Sedmo ispravljeno izdanje, Golden marketing, Zagreb, 2003.

[9] S. Mardei, *Matematika analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, Prvi dio, kolska knjiga, Zagreb, 1974.

[10] Grupa autora, Spravonoe posobie po matematieskomu analizu, Prvi dio, Via kola, Kijev, 1978.

[11] M. Vukovi, *Teorija skupova*, predavanja, PMF – Matematiki odsjek, Zagreb, 2015.

[12] B. Pavkovi, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, kolska knjiga, Zagreb, 2004.

[13] T.-L. Radulescu, V. D. Radulescu, T. Andreescu, *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis*, Springer, 2009.

[14] S. Kurepa, *Matematika analiza 2*, kolska knjiga, Zagreb, 1997.

[15] Grupa autora, *Male teme iz matematike*, Element d.o.o., Zagreb, 1994.

Dio zadataka preuzet je iz kolokvija iz *Matematike analize 1* na PMF-u.