[محاسبه ممان اینرسی](https://blog.faradars.org/%D9%85%D9%85%D8%A7%D9%86-%D8%A7%DB%8C%D9%86%D8%B1%D8%B3%DB%8C-%DA%86%DB%8C%D8%B3%D8%AA/)

**کاربردهای ماتریس پادمتقارن در رباتیک**

1. سیستم‌های دینامیکی: در دینامیک رباتیک، ماتریس‌های پادمتقارن برای نشان دادن نیروها یا گشتاورهایی استفاده می‌شوند که از خواص هندسی سیستم ناشی می‌شوند.
2. خاصیت صفر شدن حاصل‌ضرب: اگر یک بردار دلخواه باشد و ماتریس پادمتقارن باشد:

این خاصیت در اثبات پایداری سیستم‌ها (مثلاً در طراحی کنترل‌کننده‌ها) بسیار مفید است.

1. ماتریس سرعت زاویه‌ای: در سینماتیک و دینامیک ربات‌ها، ماتریس سرعت زاویه‌ای (angular velocity matrix) که جهت دوران اجسام را نشان می‌دهد، اغلب یک ماتریس پادمتقارن است.

**کنترل مد لغزشی معمولی**

ویژگی‌ها:

* خطا به‌طور نامحدود کاهش می‌یابد (هرگز به صفر نمی‌رسد، بلکه به آن نزدیک می‌شود).
* طراحی ساده و مقاوم در برابر اغتشاشات خارجی.
* سرعت همگرایی نسبتاً کمتر است.

**کنترل مد لغزشی ترمینال**

ویژگی‌ها:

* خطا در زمان محدود به صفر می‌رسد (نه فقط نزدیک به صفر).
* سرعت همگرایی بالاتر از CSMC است.
* طراحی دقیق‌تر و پیچیده‌تر است.

رابطه زمان رسیدن خطا به صفر به این صورت است:

**جمع‌بندی متغیرها در فرمول:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **متغیر** | **تعریف** | **نقش** |
|  | زمان همگرایی | مدت زمان لازم برای صفر شدن خطا. |
|  | بهره کنترل | تنظیم سرعت همگرایی؛ بزرگ‌تر = همگرایی سریع‌تر. |
|  | توان غیرخطی | تعیین رفتار غیرخطی؛ کوچکتر = رفتار غیرخطی‌تر. |
|  | مقدار اولیه خطا | خطای شروع سیستم؛ بزرگ‌تر = زمان همگرایی بیشتر. |
|  | عامل غیرخطی | تأثیرگذار در شدت غیرخطی بودن رفتار و سرعت همگرایی. |

مگر کنترل کننده مد لغزشی برای سیستم های غیرخطی کاربرد ندارد پس چرا ما در این مقاله دینامیک ربات را ابتدا به صورت خطی در می اوریم

ChatGPT

این سوال بسیار مهم است و درک آن کلید استفاده صحیح از **کنترل مد لغزشی** (Sliding Mode Control - SMC) و **کنترل مد لغزشی ترمینال** (TSMC) در سیستم‌های رباتیک و غیرخطی است. پاسخ در چند نکته خلاصه می‌شود:

**1. دینامیک ربات ذاتاً غیرخطی است**

دینامیک یک ربات به‌صورت کلی غیرخطی است، زیرا:

* وجود متغیرهای غیرخطی (مانند در ترم‌های گرانش.
* وابستگی‌های غیرخطی بین نیروهای کوریولیس و سرعت‌های مفاصل.
* دینامیک‌های وابسته به شتاب غیرخطی.

**2. هدف از خطی‌سازی در این مقاله**

در این مقاله، خطی‌سازی به معنای **خطی‌سازی دینامیک سیستم نسبت به پارامترها** است، نه نسبت به متغیرهای حالت

این بازنویسی:

1. دینامیک سیستم را **خطی نسبت به پارامترهای فیزیکی** می‌کند.
2. اجازه می‌دهد که از تخمین‌گرهای ساده‌تر برای شناسایی یا جبران عدم قطعیت‌ها استفاده شود.

**3. چرا خطی‌سازی نسبت به پارامترها مفید است؟**

* **بررسی عدم قطعیت‌ها:** در رباتیک، پارامترهای فیزیکی مانند جرم و طول لینک‌ها ممکن است به صورت دقیق شناخته نشوند. خطی‌سازی نسبت به این پارامترها امکان استفاده از روش‌های تطبیقی یا مقاوم را فراهم می‌کند.
* **سادگی طراحی کنترل‌کننده:** وقتی دینامیک به شکل خطی بازنویسی شود، طراحی کنترل‌کننده (مانند کنترل مد لغزشی) ساده‌تر می‌شود، زیرا نیازی نیست که کل دینامیک غیرخطی به صورت کامل جبران شود.

**4. کاربرد کنترل مد لغزشی:**

کنترل مد لغزشی برای مقابله با **غیرخطی بودن باقی‌مانده‌ها** و **عدم قطعیت‌ها** طراحی شده است:

* دینامیک ربات در این مقاله به فرم خطی بازنویسی می‌شود :
* ,
* که نشان‌دهنده عدم قطعیت‌ها و دینامیک غیرخطی جبران‌نشده است.
* کنترل مد لغزشی ترمینال تضمین می‌کند که سیستم حتی با وجود این عدم قطعیت‌ها، همگرا شود.

**تفاوت اصلی بین این دو روش:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **ویژگی** | **خطی‌سازی نسبت به متغیرهای حالت** | **خطی‌سازی نسبت به پارامترها** |
| **هدف** | ساده کردن مدل دینامیکی در نزدیکی نقطه تعادل. | ساده کردن مدل برای استفاده از پارامترها. |
| **نوع خطی‌سازی** | نسبت به متغیرهای حالت | نسبت به پارامترهای فیزیکی (). |
| **دقت مدل** | تنها در نزدیکی نقطه خطی‌سازی دقیق است. | در کل فضای متغیرهای حالت معتبر است. |
| **کاربرد اصلی** | استفاده از کنترل‌کننده‌های خطی. | ترکیب با کنترل غیرخطی مانند مد لغزشی. |

**1. Nonlinear Dynamics of an Inverted Pendulum:**

**2. Linearization Around θ=0\theta = 0θ=0:**

**3. Linearized Dynamics:**

**4. Parameterized Dynamics:**

**5. Linearization with Respect to Parameters:**

علامت مثلث بالای مساوی در ریاضیات و مهندسی معمولاً برای تعریف یک عبارت استفاده می‌شود. این نماد نشان می‌دهد که عبارت سمت چپ، به طور مشخص به عنوان عبارت سمت راست تعریف شده است.[[1]](#footnote-1)

به عبارت دیگر، نشان می‌دهد که این رابطه یک تعریف است و نه یک تساوی یا نتیجه محاسباتی.

**مرور کنترل کننده مد لغزشی**

1. **تعریف سیگنال خطا**
2. **تعریف سطح لغزش**

سطح لغزش معمولا به صورت سیگنال خطا و مشتق آن تعریف می شود:

1. **طراحی کنترل کننده مد لغزشی**

کنترل کننده از دو بخش تشکیل شده است:

1. بخش معادل[[2]](#footnote-2): برای رساندن سیستم به سطح لغزش
2. بخش لغزشی[[3]](#footnote-3): برای نگه داشتن سیستم روی سطح لغزش

کنترل معادل از این روابط زمانی به دست می آید که برابر با صفر باشد یعنی روی سطح لغزش باشیم

با استفاده از معادله دینامیکی سیستم داریم :

حال معادله سطح لغزش را به صورت زیر می نویسیم :

برای محاسبه نیروی کنترل معادل داریم :

این بخش سیستم را به سطح لغزش و به عبارتی به تعادل می رساند حال برای نگه داشتن سیستم روی سطح تعادل داریم:

تابع علامت مشخص می کند که سیستم در کدام جهت قرار دارد و نیروی کنترلی باید در خلاف جهت وارد شود.

1. **کنترل نهایی**

کنترل نهایی به صورت ترکیبی از دو حالت است :

1. **بررسی پایداری با استفاده از تابع لیاپانوف**

از معادله سطح لغزش و نیروی کنترلی میتوان نشان داد که :

بیانگر این است که سیستم پایدار است و به سمت صفر میل میکند.

**[Lyapunov Function and Its Use in Stability Analysis](https://blog.faradars.org/%D8%AA%D8%A7%D8%A8%D8%B9-%D9%84%DB%8C%D8%A7%D9%BE%D8%A7%D9%86%D9%88%D9%81/)**

The **Lyapunov function** is a mathematical tool used in control theory and dynamical systems to analyze the stability of a system. It is named after the Russian mathematician **Aleksandr Lyapunov**, who developed this approach to assess system stability without needing to explicitly solve the system's differential equations.

**1. What is a Lyapunov Function?**

A **Lyapunov function** is a scalar function defined over the state of the system , which acts as an "energy-like" measure of the system. It helps determine whether the system's trajectories converge to an equilibrium point ().

***Properties of a Lyapunov Function:***

To be a valid Lyapunov function, must satisfy the following conditions:

1. **Positive Definiteness:**

* This ensures that is a measure of "energy" that is zero at the equilibrium point and positive elsewhere.

1. **Decrement:**  
    must grow as moves farther from the equilibrium.
2. **Negative Definiteness of the Derivative:**

* This ensures that decreases over time, meaning the system is losing energy and moving toward the equilibrium point.

**2. Why Do We Use Lyapunov Functions for Stability?**

***Lyapunov's Direct Method:***

Lyapunov's method allows us to assess stability without solving the differential equations of the system. This is particularly useful for:

* **Nonlinear systems** where analytical solutions may not exist.
* **Complex systems** where numerical simulation is difficult.

***Stability Definitions:***

Using Lyapunov functions, we can classify stability as follows:

1. **Stable in the sense of Lyapunov:** If and , the system is stable, meaning the state will remain bounded and not diverge.
2. **Asymptotically Stable:** If , the system is asymptotically stable, meaning will eventually converge to the equilibrium .
3. **Globally Asymptotically Stable:** If satisfies the above conditions globally (for all ), the system is globally asymptotically stable.
4. **Finite-Time Stability:** If for , the system converges to the equilibrium in finite time.

**3. How is a Lyapunov Function Chosen?**

Choosing an appropriate Lyapunov function depends on the system. Some common strategies include:

* For **linear systems**, a quadratic Lyapunov function is often used:
* where is a positive-definite matrix.
* For **nonlinear systems**, the Lyapunov function often reflects the system's energy or error. A typical form is:
* For **sliding mode control** and terminal sliding mode control, Lyapunov functions are chosen to reflect the sliding surface dynamics, such as:

**4. Physical Intuition of a Lyapunov Function:**

Think of as the "energy" of a ball rolling in a bowl:

* The bottom of the bowl corresponds to the equilibrium point ().
* The ball loses energy as it rolls down, eventually coming to rest at the bottom.
* The function measures the ball's potential energy, and measures the rate at which the energy decreases.

If , it means the energy of the system is dissipating, and the system is converging to equilibrium.

**5. Advantages of Using Lyapunov Functions:**

1. **Works for Nonlinear Systems:** Lyapunov's method is one of the most powerful tools for analyzing nonlinear systems.
2. **No Need to Solve Differential Equations:** Unlike other methods, it provides stability analysis without explicitly solving the system.
3. **Global Analysis:** Depending on the chosen Lyapunov function, it can provide a global assessment of the system's behavior.
4. **Handles Uncertainty and Disturbances:** Lyapunov-based controllers (e.g., sliding mode control) can incorporate robustness against uncertainties.

**6. Example of Lyapunov Function in Practice:**

Consider a simple pendulum with dynamics:

***Step 1: Choose a Lyapunov Function***

The total energy of the pendulum can be used as a Lyapunov function:

***Step 2: Time Derivative of :***

Using the dynamics of the pendulum:

Substitute :

Simplify:

***Step 3: Analyze Stability***

Since , the energy decreases over time, and the system is **Lyapunov stable**. If , the pendulum will converge to the equilibrium point () asymptotically.

1. صفحه 2 معادله 5 [↑](#footnote-ref-1)
2. Equivalent Control [↑](#footnote-ref-2)
3. Switching Control [↑](#footnote-ref-3)