

杭州电子科技大学

硕士学位论文

题目：分数阶模型预测控制算法的研究

研究生 邹 琴

专 业 控制工程

指导教师 张日东 研究员

邹洪波 副教授

完成日期 2015 年 12 月

杭州电子科技大学硕士学位论文

分数阶模型预测控制算法的研究

研 究 生： 邹琴

指导教师： 张日东 研究员

邹洪波 副教授

2015 年 12 月

**Dissertation Submitted to Hangzhou Dianzi
University
for the Degree of Master**

**Research on Fractional Order Model
Predictive Control Algorithm**

Candidate: Zou Qin

Supervisor: Prof. Zhang Ri-dong

Prof. Zou Hong-bo

December, 2015

杭州电子科技大学

学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明： 所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

申请学位论文与资料若有不实之处，本人承担一切相关责任。

论文作者签名： 日期： 年 月 日

学位论文使用授权说明

本人完全了解杭州电子科技大学关于保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权单位属杭州电子科技大学。本人保证毕业离校后，发表论文或使用论文工作成果时署各单位仍然为杭州电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅和借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，可以允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。（保密论文在解密后遵守此规定）

论文作者签名： 日期： 年 月 日

指导教师签名： 日期： 年 月 日

摘 要

分数阶微积分理论研究不是新兴的,但其在控制领域的研究仍然是一个热门的研究方向。传统控制理论的研究是针对整数阶模型和整数阶控制器的,而实际系统过程在本质上是分数阶的,运用整数阶系统模型难以更好描述某些类型系统的动态过程。以整数阶模型为基础设计的整数阶控制器来控制实际过程中的分数阶系统是难以获得很好地控制性能的。随着实际生产过程对控制精度、原料成本、安全等要求越来越高,需要更精确的模型来描述实际过程,更好的控制器来实现良好的控制性能。

本文在前人的研究基础上,主要在以下两个方面做了研究:一方面,针对一类分数阶系统提出了一种分数阶预测函数控制器的设计方法,利用 Oustaloup 近似方法将分数阶系统近似为整数阶系统,然后利用 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义将整数阶预测函数控制扩展到分数阶预测函数控制,将分数阶积分算子引入目标函数,最后求出分数阶控制系统的最优控制律,仿真实验验证了分数阶控制器具有更好地控制效果。另一方面,针对分数阶系统描述的加热炉温度过程,提供了一种扩展非最小状态空间分数阶模型预测控制方法,首先利用 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义得到系统的输入输出模型,基于扩展非最小状态空间模型和选取的包含积分算子的性能指标设计了一种新的分数阶预测控制器,仿真实验证明了该分数阶控制器获得了良好的控制性能,同时也促进了模型预测控制方法在分数阶系统中的运用。

关键词: 分数阶微积分, 模型预测控制, 分数阶系统, 扩展非最小状态空间

ABSTRACT

Theoretical study on fractional calculus is not new, but its research on the control is still worth studying. The conventional study is for integer order model and integer order controller. However, the industrial processes are essentially the fractional systems and the integer order models cannot be used to describe these types of dynamic processes better than fractional order model. Meanwhile, it is difficult for the controllers based on integer order models for the fractional actual processes to obtain good performance of the system. Along with the increasing demands for the control accuracy, cost, security etc., more accurate models describing the actual process and better controller to achieve good performance are urgently needed to be put forward.

On the basis of previous research results, two main aspects have been done in this thesis. On one hand, the fractional order predictive functional control method is designed for the fractional order linear systems. The Oustaloup approximation is employed to derive the approximate model of the fractional order system. Meanwhile, to extend the integer order predictive functional control algorithm to the fractional order predictive functional control, the Grünwald-Letnikov definition and the fractional calculus operator are used in its cost function. And then the optimal control of fractional order controlled system is obtained. The simulation results reveal that the fractional order controller yields improved control performance. On the other hand, the extended non-minimal state space fractional model predictive control method is proposed for the fractional order model of a heating furnace. The fractional calculus definition of Grünwald-Letnikov is to define the input-output model of the fractional system. Then, based on the extended non-minimal state space model and the selected cost function with the fractional calculus operator, the new fractional predictive controller is designed. The simulation results indicate that improved performance of fractional order controller is obtained and which promote the applications of model predictive control method in fractional order systems.

Keywords: fractional order calculus, model predictive control, fractional order system, extended non-minimal state space

目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	II
目 录.....	III
第 1 章 绪论.....	1
1.1 引言.....	1
1.2 预测控制的研究现状.....	1
1.3 分数阶微积分的研究现状.....	4
1.3.1 分数阶系统的研究现状.....	4
1.3.2 分数阶控制的研究现状.....	5
1.4 本文研究内容和结构安排.....	6
第 2 章 分数阶微积分基础理论.....	7
2.1 引言.....	7
2.2 分数阶微积分的定义与性质.....	7
2.2.1 整数阶导数和积分.....	7
2.2.2 分数阶微积分定义.....	9
2.2.3 分数阶微积分的性质.....	10
2.3 分数阶系统的描述.....	11
2.3.1 分数阶系统的传递函数描述.....	11
2.3.2 分数阶系统的状态空间描述.....	11
2.4 分数阶线性微分方程的数值求解.....	12
2.5 本章小结.....	12
第 3 章 分数阶积分的应用.....	13
3.1 引言.....	13
3.2 分数阶积分算子.....	13
3.2.1 分数阶积分.....	13
3.2.2 分数阶积分数值计算.....	14
3.2.3 分数阶积分基本性质.....	14
3.3 目标函数推广.....	15
3.4 分数阶目标函数的应用实例.....	18

3.5 本章小结.....	20
第 4 章 基于分数阶系统的分数阶预测函数控制.....	21
4.1 引言.....	21
4.2 分数阶预测函数控制.....	21
4.2.1 分数阶模型处理.....	21
4.2.2 分数阶预测函数控制器的设计.....	24
4.3 仿真实例.....	25
4.4 本章小结.....	29
第 5 章 基于扩展状态空间的分数阶模型预测控制.....	30
5.1 引言.....	30
5.2 整数阶扩展非最小状态空间模型预测控制方法.....	30
5.2.1 模型描述与处理.....	30
5.2.2 整数阶扩展非最小状态空间模型预测控制器的设计.....	31
5.3 分数阶扩展非最小状态空间模型预测控制方法.....	32
5.3.1 分数阶模型及其处理.....	32
5.3.2 分数阶扩展非最小状态空间模型预测控制器的设计.....	34
5.4 仿真实例.....	35
5.4.1 加热炉工艺流程介绍.....	35
5.4.2 分数阶控制方法与整数阶控制方法的比较.....	37
5.5 本章小结.....	41
第 6 章 总结与展望.....	42
致 谢.....	44
参考文献.....	45
附 录.....	51

第 1 章 绪 论

1.1 引言

在现实自然界中,实际系统过程在本质上是分数阶的,运用整数阶系统模型难以更好描述某些类型系统的动态过程^[1,2]。分数阶微积分理论是解决这一难题的有效途径,运用分数阶系统模型可以更好描述系统特性。分数阶微积分中微分、积分的阶次可以是任意的,它扩展了我们熟知的整数阶微积分。随着实际工业系统越来越复杂化和人们对控制精度、原料成本、资源节约等要求的日益提高,基于整数阶理论的控制技术有时难以获得令人满意的性能^[3]。分数阶微积分不仅为自然科学提供了一个新的数学运算工具,而且为解决实际工业过程中的问题提供了一种可行的有效方法。分数阶微积分理论是我们分析和控制分数阶系统的理论基础之一。传统的整数阶控制系统的研究是针对整数阶模型和整数阶控制器的,而以整数阶模型为基础设计的整数阶控制器来控制实际过程中的分数阶系统可能难以获得很好地控制性能。而分数阶微积分理论就为研究分数阶控制器打下了良好的理论基础,弥补了传统整数阶微积分理论的不足之处。

早在上世纪 70 年代,计算机信息技术在自动化控制领域已经有了相当广泛地应用,但是经典控制理论在实际工业控制中的常常会存在一些弊端,人们需要开发新的控制方法来保障良好的控制性能和指标需求。模型预测控制(MPC)是在当时发展起来的一种先进控制算法,其中最早出现的预测控制算法是基于脉冲响应的模型预测启发控制(MPHC),然后出现了基于阶跃响应的动态矩阵控制(DMC),它被很快应用于实际化工过程中,随后又陆续出现了模型算法控制(MAC),带自适应特性的在线辨识的广义预测控制(GPC)以及最为简洁的预测函数控制(PFC)。经过几十年的发展,预测控制理论研究的不断深入和扩展,预测控制算法在化工、电力、石油等诸多工业过程控制领域中的应用越来越广泛^[4]。随着理论的发展和实际产业需求的上升,分数阶微积分理论和预测控制引起了越来越学者的关注和深入研究。

1.2 预测控制的研究现状

在 1976 年, Richalet 等^[5]提出了模型预测启发控制,文中详述了 MPHIC 的产生和在工业过程中的应用,并且给出了 MPHIC 在实际生产工业中的应用实例,展示了 MPC 给工业生产带来的巨大经济效益。1980 年, Cutler 和 Ramaker 提出了著名且应用广泛的 DMC 算法,将控制时域的概念引入该算法,并将其应用在有积分环节的增量模型中,弥补了以往 MPC 算法在系统存在时滞时导致控制算

法失效的不足。最初的 MPHC 和 DMC 算法主要用来控制无约束的实际过程对象，是第一代 MPC 控制技术。为了进一步使 MPC 能处理有约束条件的过程，Cutlert 和 Morshedi 等人提出了二次动态矩阵控制(QDMC)，可以被称为第二代 MPC 控制算法，它将控制目标转化成动态二次规划问题，可以有效地处理过程的输入和输出的约束条件。1982 年，Rouhani 和 Mehra 等人提出了基于系统脉冲响应的模型算法控制，1987 年，Clarke 提出了带自适应特性的在线辨识的广义预测控制方法(GPC)，实际上就是将自适应控制与预测控制相结合的控制算法，通过结合二者的优势特性，提高了预测控制对不确定性系统的适应能力，增强了自适应控制的鲁棒稳定性^[4-6]。

由于实际控制过程中的非线性系统更为普遍，面对非线性的优化问题，找到模型预测控制系统的有效解决方法变得较为困难。上世纪 90 年代，MPC 理论在算法的稳定性和控制性能分析上得到进一步发展，同时应用范围也扩展到了非线性系统和更为复杂的混杂系统。这个阶段，MPC 的研究以最优控制为主要理论依据，以李雅普诺夫稳定性分析方法来保证系统的闭环稳定，然后基于滚动时域的特点对系统的性能进行分析，进而形成了相对完善的 MPC 稳定性分析理论体系，从而使得 MPC 的稳定性和鲁棒性等问题得到了人们的广泛关注和深入研究。随着实际生产过程的控制精度和要求的不断提高，控制过程对象本身也存在复杂性和多样性，实际过程中往往存在的不确定性、干扰因素和多目标、多自由度优化等问题，控制难度增加的同时，预测控制取得了非常迅速的发展，也促进了预测控制算法研究的深度，出现了很多实用的预测控制算法和理论研究^[7]。

针对实际过程是非线性过程的情况，控制难度难免有所提高，智能控制算法的运用为非线性系统的控制注入了鲜活的力量。针对非线性、多变量、耦合系统，Nguyen 等提出了一种利用多模型预测控制处理非线性控制系统的方法^[8]，该方法首先通过建立 T-S 模糊模型，然后利用减法聚类方法对模型进行优化，进一步基于模糊系统的自适应网络来优化 T-S 模糊模型的参数。再根据几个线性输入输出表示的局部模型所描述的 T-S 模糊模型设计局部模型的线性 MPC 控制器，最后通过并行分布补偿技术组合每一个局部 MPC 控制器的控制信号得到全局控制信号。由于神经网络具有并行机制、自学习和自适应能力，将预测控制的优化策略与神经网络的逼近能力相结合的思想，也常被用来解决时滞与时变系统的控制问题。陈博等针对单输入单输出系统采用两个 BP 神经网络分别构建神经网络模型预测器和非线性优化控制器，通过神经网络训练和对预测模型的在线校正得到较精确的模型预测值，进而设计了神经网络控制器和系统的非线性优化控制器，最后将这种新型预测控制算法用于实际对象的控制^[9]。尽管如此，神经网络预测控制面临着很多难以解决的问题，比如神经网络结构的确定、网络结构的在线调

节、网络的训练过程与实时修正、对系统进行实时控制等都难以得到较好地实现^[10]。为了同时获得神经网络和预测控制的优点，更多的基于模糊控制与神经网络结合的预测控制算法，将模糊理论与灰色理论结合的预测控制算法，以及将神经网络与小波分析结合的预测控制算法等等，也被运用到了实际过程或是进行理论研究，力求得到更稳定、更精确、更迅速的最优控制。上世纪 90 年代，为了解决神经网络技术中存在的一些技术难题，Vapnik 提出了支持向量机(SVM)，是以统计学理论和结构风险最小化原理为基础的新型学习机^[11]。1998 年，Suykens 等人^[12]提出了最小二乘支持向量机(LS-SVM)，他们在目标函数中增加了误差平方和，用等式约束条件代替了不等式约束，使得求解过程变成了解等式方程组，避免了求解二次规划问题，从而使求解过程运算简单，系统收敛速度快。张等提出了将支持向量机结合最小二乘法和阶跃响应辨识的过程建模方法^[13,14]，同时将支持向量机激励函数局部线性化，使复杂的非线性多步预测转化为直观有效的线性预测方法，不需要非线性求解，在控制算法求解方法上采用线性解析方法并保证了控制律收敛到最优。文[15]针对大惯性、纯滞后、非线性和强耦合过程，通过数据分析建立非线性回归模型，提出了应用支持向量机和非线性 PID 控制的广义预测控制算法。控制领域中的最优解问题常常会是研究控制方法的核心所在。杨建军等针对非线性系统提出了一种基于遗传算法优化的模型预测控制方法，该方法结合双模控制策略和不变集理论，将终点等式约束转化为不等式约束，扩大优化问题的解集，利于遗传算法的实施来求解最优解，并对控制系统进行了稳定性分析^[16]。

随着工业生产要求越来越高，控制工艺过程越来越复杂化，为了获得更好的控制效果和更高的控制精度，很多学者开发出了新的预测控制算法，并取得了很好的效果。由于预测函数控制方法具有在线计算量少、鲁棒稳定性强、控制效果好的特点，该算法被广泛地用于实际化工过程领域研究^[17-20]。Bouhenchir 等将 PFC 算法成功地开发了批次过程的化学反应器温度控制方法^[21]。Dovžan 等提出了基于自适应模糊模型的预测函数控制方法^[22]。文献[23]中提出了基于扩展状态空间模型的预测函数控制方法，并将该方法应用到了炼焦炉这一实际过程对象的研究中。张日东等考虑到在批次过程中存在执行器故障或未知扰动等问题，将遗传算法用于优化扩展状态空间预测函数控制中，获得了良好的控制效果^[24]。Gautam 等基于变参数动态控制方法，提出了一种非线性系统的前向神经网络模型的模型预测控制算法^[25]。针对随机参数不确定性约束离散系统，Dombrovskii 等将随机参数表示为一系列相关的组合序列，提出了一种模型预测控制方法^[26]。基于马尔可夫链数据遗失和恢复概率的无限时域二次性能指标，文献[27]中提出了一种约束预测控制方法^[27]。Méndez 等提出了一种自适应模糊预测控制方法

^[28]。Mizumoto 等基于自适应输出预测模型提出了一种自适应预测控制方法^[29]。Francisco 等提出了一种利用非线性预测控制方法来优化控制器参数的方法，作者分析了闭环控制系统的动态过程，采用 PI 控制来处理过程的约束条件^[30]。近些年来，预测控制的研究越来越广泛，在各个实际应用领域也取得了一些较为有效的成果。

1.3 分数阶微积分的研究现状

分数阶微积分理论可以追溯到三百多年前，但其在控制领域的研究也仅仅是近几十年事，其研究目的是为了将微积分阶次从整数扩展到任意实数，甚至是复数。1999 年，Podlubny 比较全面地描述了分数阶微积分方程^[31]，他比较系统地总结了分数阶微分方程的理论与发展，并将其应用到了实际的控制领域，实现了理论与应用的结合与发展。在国内，薛定宇教授等^[32]是比较早开始介绍分数阶微积分理论与应用的。随后的几十年里，国内外学者对分数阶微积分理论和控制应用进行了深入细致地研究，在实际应用过程中取得了很好的效果。

1.3.1 分数阶系统的研究现状

针对分数阶微积分理论的研究是将分数阶微积分理论引入到系统的建模和控制中，其初衷是考虑到分数阶系统模型能够对某些系统的特性进行更细致的描述，其具有短时记忆性，能够避免在描述某些系统的物理特性时存在缺失的现象。基于此，很多学者^[33-35]利用分数阶模型来描述实际的复杂工业过程。Djouambi 等通过分数阶微分方程的离散形式建立了 ARX 模型，然后基于递归最小二乘法 and 递推辅助变量方法来估计分数阶模型的参数^[36]。基于小波变换的去相关性，贾代平等提出了分数阶差分模型的记忆性扩展方法^[37]。李元凯等利用分数阶微积分定义对分数阶微分方程进行离散化，得到了比较精确的离散系统近似描述方法^[38]。文献[39]基于卷积权系数提出了用于求解分数阶系统数值解的分数阶线性多步长方法，避免了其他一些近似方法需要考虑分数阶阶次在 0-1 之间的限制。杨洪勇等基于分数阶系统的拉式变换和频域稳定性理论，讨论了多自主体系统的运动一致性^[40]。赵春娜等提出了一种分数阶系统的拟合近似方法^[41]。刘禄等将卡尔曼滤波器扩展到分数阶系统^[42]。王振滨等通过状态空间模型的系统矩阵的对角化得到分数阶子系统的线性组合，结合梯度下降法和拟牛顿法对分数阶系统的参数进行辨识^[43]。Malti 等提出了一种基于分数阶差分方程模型的连续系统辨识方法^[44]。Sierociuk 在 RC 网络中建立了分数阶模型用来描述电热传导的动态过程^[45]。Valério 也介绍了一种单输入单输出的分数阶系统辨识方法^[46]。为了讨论分数阶系统的稳定性，高哲等^[47]通过分析分数阶系统的传递函数相角增量，提出了一种分数阶系统的频域稳定性判别准则。

1.3.2 分数阶控制的研究现状

随着近几十年分数阶微积分理论不断发展,分数阶理论被逐渐用在控制领域。分数阶控制理论相对于传统的整数阶控制理论作出了很好的补充与概括。早期的分数阶控制主要是在经典控制理论的基础上进行延展,若将分数阶控制器应用到线性系统,可以使时间和频率响应不以指数的形式出现^[48]。与基于整数阶的控制方法相比,分数阶的系统模型和控制设计,可以保证系统具有良好的稳定能力,对复杂的实际情况能够更适应系统的变化。随着计算机信息技术的发展, PD^μ 控制器^[49]、CRONE 控制器^[50]和 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器^[51]在 20 世纪相继被提出。近些年以来,由于在工业控制领域应用广泛的仍然是 PID 控制,很多学者将分数阶微积分应用于实际过程控制,开发出了新的分数阶控制器。Yeroglu 和 Tan 提出了一种分数阶 PID 控制器,并用 Ziegler–Nichols 方法和 Åström–Hägglund 方法来整定分数阶控制器的参数^[52]。Zhang 等提出了基于遗传算法的分数阶 PID 控制器^[53]。Zheng 等提出了利用图解法来整定分数阶 PID 参数的方法^[54]。Wang 等基于闭环传递函数的灵敏度约束函数,结合图解法,提出了 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器^[55]。Jin 等提出了一种模型降阶方法,并基于分数阶系统设计了自整定显式 PID 控制器^[56]。薛定宇等在频域范围内对分数阶 $PI^\lambda D^\mu$ 控制器参数进行整定,他们也明确指出,用分数阶控制器来控制分数阶系统比用整数阶控制器来控制分数阶系统的控制效果更好^[3]。因此,研究分数阶控制理论和其在实际过程控制领域的应用是很有意义的。

除此之外,一些基于分数阶微积分理论的先进控制方法的运用也体现出了整数阶控制方法所不具备的优良特性,如模型参考自适应控制^[57]、分数阶滑模控制、最优控制和鲁棒控制等,但是同时利用分数阶微积分和模型预测控制方法的研究却并不多。Abdolhosseini 等基于分数阶系数设计了一种预测函数控制器^[58]。Deng 等针对固体氧化物燃料电池的分数阶动态模型,提出了自适应广义预测控制方法^[59]。李大宇等提出了一种基于分数阶 RTD-A 预测控制方法^[60]。纪增浩等基于分数阶状态空间模型设计了一种分数阶卡尔曼滤波器,将得到的状态反馈应用到模型预测控制方法中,实现了被控对象的最优化控制^[61]。Romero 等提出了一种广义预测控制算法,他们将分数阶算子应用到了目标函数中^[62,63]。Rhouma 等分别利用分数阶系统的数值近似模型和 Oustaloup 近似模型来描述未来时刻的动态输出,提出了基于分数阶系统的模型预测控制方法^[64,65]。郭伟等结合分数阶 PID 控制方法的输出误差和预测控制方法,提出了基于时域的分数阶模型预测控制方法^[66-68]。文献[69]结合 PID 控制和模糊控制算法,提出了模糊分数阶 PID 预测控制算法的参数自整定方法。Joshi 等针对分数阶系统提出了一种能跟踪带有限不确定性的参考输入信号的模型预测控制算法^[70],Caputo 分数阶微积分定义

的 Laplace 变换和 Mittag-Leffler 函数用于预测模型的输出,但当分数阶阶次 α 满足 $0 < \alpha < 1$ 时,该方法存在一定的局限性。因此,提出简单有效并能获得良好控制效果的分数阶预测控制方法仍然应该得到重视。

1.4 本文研究内容和结构安排

本文研究内容的结构组织如下:

第一章是本文的绪论概述。本章介绍了预测控制方法的国内外研究现状和分数阶微积分的基本特点,以及分数阶系统建模及其在控制领域的研究现状,简要说明了本文研究的背景和动机。

第二章首先简要介绍了整数阶导数和积分的基础理论,然后推广到分数阶微积分理论,并详细介绍了常用的分数阶微积分的定义和性质。进而简要介绍了分数阶系统的两种描述方式以及如何利用分数阶微积分定义求解分数阶微分方程的数值近似解。本章所介绍的基础理论知识是后文研究控制方法的理论基础。

第三章利用分数阶微积分理论,讨论了分数阶积分的性质,并将其与整数阶积分性质或定理进行了对比和说明,然后对分数阶积分进行了数值近似计算,利用数值估计方法将分数阶积分算子推广到控制系统的目标函数中。

第四章针对单输入单输出分数阶系统提出了一种分数阶预测函数控制器的设计方法,首先利用 Oustaloup 滤波器近似方法将分数阶系统近似为整数阶系统,然后利用 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义将整数阶预测函数控制的目标函数扩展到分数阶预测函数控制方法中,进而设计了分数阶预测控制器。该方法可以很好地运用于分数阶模型描述的实际过程对象,减少了整数阶预测函数控制方法控制高阶系统模型需要进行降阶处理的步骤,同时增加了调节控制器参数的自由度,获得了良好的控制性能。

第五章提出了一种基于扩展非最小状态空间的分数阶模型预测控制方法,该方法将整数阶模型预测控制方法扩展到了分数阶模型预测控制方法。首先利用 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义得到系统的输入输出模型,选取合适的状态变量并进一步建立了被控对象的扩展非最小状态空间模型,将积分算子引入控制器的性能指标,增加了控制器参数的自由度,系统的控制性能有了一定的改善,同时促进了模型预测控制方法在分数阶系统中的运用。

第六章是全文的总结和展望,简要回顾了本文提出的方法,对分数阶预测控制方法的发展进行了展望,指出了可以继续进行研究的方向。

第 2 章 分数阶微积分基础理论

2.1 引言

分数阶微积分理论其实就是指任意阶次的微积分理论,是由传统整数阶微积分扩展得到的,其微分和积分的阶次不限于整数,可以是分数,甚至是复数^[71-73]。分数阶微积分理论早已不是新兴的研究理论,也有很久远的历史。1695 年, Leibniz 和 L'Hopital 讨论 $d^n y / dx^n$ 中的 n 是否可以不是整数,其实是提出了一个疑问:将整数阶导数扩展到任意的实数是否仍然具有一定的意义^[74]。

越来越多的学者对任意阶次的微分和积分进行了研究,他们将传统整数阶微积分理论延伸到任意阶的微分和积分,得出并证明了分数阶微积分的定义和性质,为分数阶微积分理论的发展作出了极大的努力和贡献。目前分数阶微积分理论的研究并不完善,且分数阶微积分定义并没有统一的定义形式,本章介绍了三种常用的微积分定义, Grünwald-Letnikov(GL) 分数阶微积分定义、Riemann-Liouville(RL)分数阶微积分定义、Caputo 分数阶微积分定义。

2.2 分数阶微积分的定义与性质

分数阶微积分理论是以整数阶微积分理论为基础扩展而来。Grünwald-Letnikov 定义可以看成是通过统一整数阶导数和积分的概念归纳得到的。

2.2.1 整数阶导数和积分

对于连续的函数 $y = f(t)$, 根据整数阶导数的定义, 其一阶导数为:

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} \quad (2.1)$$

二阶导数为:

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(t) - f(t-h)}{h} - \frac{f(t-h) - f(t-2h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

三阶导数为:

$$f'''(t) = \frac{d^3 f(t)}{dt^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)}{h^3} \quad (2.3)$$

结合式(2.1)、(2.2)和(2.3)，利用数学归纳法， n 阶导数的一般定义可记为：

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t-jh) \quad (2.4)$$

其中， $\binom{n}{j} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-j+1)}{j!}$ 为二次项系数。

考虑一般化整数阶在式(2.4)中的情况， p 为任意整数，则有

$$f^{(p)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{p}{j} f(t-jh) \quad (2.5)$$

对于 $p \leq n$ ，由于二次项系数在 $\binom{p}{p}$ 之后均为 0，则有

$$\lim_{h \rightarrow 0} f^{(p)}(t) = \frac{d^p f(t)}{dt^p} \quad (2.6)$$

考虑 p 为负值的情况，定义 $\left[\begin{smallmatrix} p \\ j \end{smallmatrix} \right] = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-j+1)}{j!}$ ，则

$$\left[\begin{smallmatrix} -p \\ j \end{smallmatrix} \right] = \frac{-p(-p-1)(-p-2)\cdots(-p-j+1)}{j!} = (-1)^j \left[\begin{smallmatrix} p \\ j \end{smallmatrix} \right] \quad (2.7)$$

用 $-p$ (p 为正整数) 代替负值，可以写为

$$f^{(-p)}(t) = \frac{1}{h^{-p}} \sum_{j=0}^n (-1)^j \left[\begin{smallmatrix} p \\ j \end{smallmatrix} \right] f(t-jh) \quad (2.8)$$

若 n 为固定值，那么当 $h \rightarrow 0$ 时， $f^{(-p)}(t) \rightarrow 0$ 。当 $h \geq 0$ 时，为使 $f^{(-p)}(t)$ 有一个非零的极限，必须假设 $n \rightarrow \infty$ ，这里可以令 $h = \frac{t-a}{n}$ ， a 为常数， $f^{(-p)}(t)$ 的极限可以表示为：

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} f^{(-p)}(t) = {}_a D_t^{-p} f(t) \quad (2.9)$$

结合式(2.7)~(2.9)，可推导出的一般的表达式为：

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{-p} f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} h^p \sum_{j=0}^n \left[\begin{smallmatrix} p \\ j \end{smallmatrix} \right] f(t-jh) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \int_a^t (t-\xi)^{p-1} f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.10)$$

若导函数 $f'(t)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，式(2.10)的积分可以统一写成：

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{f(a)(t-a)^p}{\Gamma(p+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+1)} \int_a^t (t-\xi)^p f'(\xi) d\xi \quad (2.11)$$

若函数 $f(t)$ 是 $m+1$ 阶可导, 则有

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \sum_{i=0}^m \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{p+i}}{\Gamma(p+i+1)} + \frac{1}{\Gamma(p+i+1)} \int_a^t (t-\xi)^{p+m} f^{(m+1)}(\xi) d\xi \quad (2.12)$$

2.2.2 分数阶微积分定义

(1) Grünwald-Letnikov(GL)分数阶微积分定义

将式(2.5)中的整数推广到任意实数 β , 可以得到 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义为:

$${}_a D_t^\beta f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\beta} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^j \binom{\beta}{j} f(t-jh) \quad (2.13)$$

其中, a 为初始状态时间, h 为采样步长, $[\cdot]$ 表示取整, $\omega_j^{(\beta)} = (-1)^j \binom{\beta}{j}$ 是多项式系数,

$$\binom{\beta}{j} = \frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)\cdots(\beta-j+1)}{j!} \quad (2.14)$$

一般为计算方便, 我们可以用以下递推公式直接求出该系数:

$$\omega_0^{(\beta)} = 1, \omega_j^{(\beta)} = (1 - \frac{\beta+1}{j}) \omega_{j-1}^{(\beta)}, j = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

假设函数 $f(t)$ 在区间 $[a, t]$ 上有 $m+1$ 阶连续导数, $m = [\beta]$ ($m < \beta < m+1$), 对上述定义取极限得到:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\beta f(t) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t-a}} \frac{1}{h^\beta} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{\beta}{j} f(t-jh) \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{f^{(i)}(a)(t-a)^{-\beta+i}}{\Gamma(-\beta+i+1)} + \frac{1}{\Gamma(i-\beta+1)} \int_a^t (t-\xi)^{m-\beta} f^{(m+1)}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.16)$$

若函数 $f(t)$ 满足初始条件 $f^{(i)}(a) = 0$, p, q 为任意实数, 则微分算子满足如下性质:

$${}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{p+q} f(t) \quad (2.17)$$

(2) Riemann-Liouville(RL)分数阶微积分定义

对于 $m-1 < \beta < m$, $m \in N$, Riemann-Liouville 分数阶微积分定义为:

$${}_a D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\beta-m+1}} d\tau \quad (2.18)$$

其中, $\Gamma(\cdot)$ 为著名的欧拉 gamma 函数, $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$ 。

$F(s)$ 为 $f(t)$ 的原函数, Riemann-Liouville 分数阶微积分定义的 Laplace 变换为:

$$L\{{}_a D_t^\beta f(t)\} = s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k {}_a D_t^{\beta-k-1} f(t) \big|_{t=0^+} \quad (2.19)$$

在零初始条件下, Riemann-Liouville 的 Laplace 变换结果为:

$$L\{{}_a D_t^\beta f(t)\} = s^\beta F(s) \quad (2.20)$$

由式(2.20)可以得到 β 阶分数阶微积分算子的传递函数表示为:

$$H(s) = \frac{1}{s^\beta} \quad (2.21)$$

(3) Capotu 分数阶微积分定义

一般在处理实际问题时, 我们需要避免不具备物理意义或难以用物理解释的概念出现。而 Riemann-Liouville 定义恰好存在这样的问题, 如式(2.18)对于初值的定义虽然具有理论意义, 但无法进行物理解释^[75]。针对上述问题, Capotu 提出了具有整数阶导数初值的 Capotu 微积分定义, 形式如下:

$${}_a D_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_a^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{1+\beta-m}} d\tau \quad (m-1 < \beta < m) \quad (2.22)$$

式(2.10)中的分数阶微积分定义形式在积分变换时产生的初值都是整数阶导数, 能够有效用于处理实际问题。其与 Riemann-Liouville 定义形式的关系为:

$${}^{RL}{}_a D_t^\beta f(t) = {}^C{}_a D_t^\beta f(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{i-\beta}}{\Gamma(i-\beta+1)} f^{(i)}(a) \quad (2.23)$$

Capotu 分数阶微积分定义的 Laplace 变换为:

$$L\{{}^C{}_a D_t^\beta f(t)\} = s^\beta F(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\beta-k-1} \left[\frac{d^k f(t)}{dt^k} \right]_{t=0^+} \quad (2.24)$$

2.2.3 分数阶微积分的性质

与整数阶微积分类似, 分数阶微积分也有一些基本性质。为方便起见, 在零初始条件下, 本文记 ${}_0 D_t^\beta f(t) = D^\beta f(t)$, 下文相同。

(1) 当分数阶微分阶次 $\beta = m$, m 为整数时, 分数阶微分与整数阶导数的值是等价的, 满足如下式子

$$D^\beta f(t) = f^{(n)}(t) \quad (2.25)$$

(2)如果分数阶微积分算子是线性，则有

$$D^\beta [f(t) + g(t)] = D^\beta f(t) + D^\beta g(t) \quad (2.26)$$

对任意常数 C ，有

$$D^\beta [Cf(t)] = CD^\beta f(t) \quad (2.27)$$

(3)针对相同条件下的分数阶微积分算子，有叠加性，满足交换律

$$D^\alpha [D^\beta f(t)] = D^\beta [D^\alpha f(t)] = D^{\alpha+\beta} f(t) \quad (2.28)$$

2.3 分数阶系统的描述

由于很多现实的物理或化学特性无法由整数阶微分方程进行精确地描述，分数阶微分方程考虑了传统整数阶微积分方程忽视的特征，比传统整数阶微分方程能更精确细致地描述系统特性。常用的分数阶系统描述方式有传递函数描述和状态空间描述，下面将针对这两种方式分别作简要介绍。

2.3.1 分数阶系统的传递函数描述

典型的分数阶单输入单输出(SISO)线性系统可以描述为如下微分方程形式：

$$\begin{aligned} a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_2 D^{\alpha_2} y(t) + \cdots + a_{n_1} D^{\alpha_{n_1}} y(t) \\ = b_0 D^{\beta_0} u(t) + b_1 D^{\beta_1} u(t) + \cdots + b_{n_2} D^{\beta_{n_2}} u(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

其中， $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n_1}$ ， $\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_{n_2}$ 均为分数阶阶次， $a_i (i=1, 2, \cdots, n_1)$ ，

$b_j (j=0, 1, \cdots, n_2)$ 为任意实数， $u(t)$ ， $y(t)$ 分别为系统的输入和输出。

结合式(2.20)，对式(2.29)中的系统进行 Laplace 变化，得到传递函数表示为：

$$G(s) = \frac{b_0 s^{\beta_0} + b_1 s^{\beta_1} + \cdots + b_{n_2} s^{\beta_{n_2}}}{a_1 s^{\alpha_1} + a_2 s^{\alpha_2} + \cdots + a_{n_1} s^{\alpha_{n_1}}} \quad (2.30)$$

若 $\alpha_i = i\alpha (i=1, 2, \cdots, n_1)$ ， $\beta_j = j\beta (j=1, 2, \cdots, n_2)$ ，该系统可称为“同元次”分数阶系统，则式(2.30)可以写成：

$$G(s) = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} b_j s^{j\beta}}{\sum_{i=1}^{n_1} a_i s^{i\alpha}} \quad (2.31)$$

2.3.2 分数阶系统的状态空间描述

将状态空间表示扩展到分数阶系统，得到分数阶系统的状态空间表达式：

$$\begin{aligned} D^\beta x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.32)$$

其中, A, B, C, D 为适当维数的系数矩阵, $x(t), u(t), y(t)$ 为系统的状态变量、控制输入和控制输出变量, β 为相应的分数阶微分阶次向量。

2.4 分数阶线性微分方程的数值求解

在考虑式(2.29)描述的分数阶线性微分方程之前, 我们先考虑一种简单的微分方程的一般形式:

$$a_1 D^{\alpha_1} y(t) + a_2 D^{\alpha_2} y(t) + \cdots + a_n D^{\alpha_n} y(t) = u(t) \quad (2.33)$$

利用式(2.13)中的 GL 分数阶微积分定义, 得到分数阶微分算子的近似离散形式, 这里取 h 为离散计算步长, 有

$$\begin{aligned} D^{\alpha_i} y(t) &\approx \frac{1}{h^{\alpha_i}} \sum_{j=0}^{[(t-a)/h]} (-1)^j \binom{\alpha_i}{j} y(t-jh) \\ &= \frac{1}{h^{\alpha_i}} \left[y(t) + \sum_{j=1}^{[(t-a)/h]} (-1)^j \binom{\alpha_i}{j} y(t-jh) \right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

将式(2.34)代入式(2.33), 可以得到分数阶微积分方程的数值解为:

$$y(kh) \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}}} \left[u(kh) - \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{h^{\alpha_i}} \sum_{j=1}^{[(kh-a)/h]} (-1)^j \binom{\alpha_i}{j} y(kh-jh) \right], k=1, 2, \cdots \quad (2.35)$$

对于式(2.29)中定义的更一般的分数阶线性微分方程, 可以先由数值计算出输入 $u(t)$ 的等效值, 再结合式(2.35)中的方法求解微分方程(2.29)的数值解。

2.5 本章小结

本章首先简要介绍了统一整数阶导数和积分的基础理论, 进而推广到分数阶微积分理论。然后介绍了常用的三种分数阶微积分定义: Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义、Riemann-Liouville 分数阶微积分定义、Caputo 分数阶微积分定义, 以及它们的性质。进一步简要介绍了分数阶系统的两种描述方式: 传递函数描述和状态空间描述。最后, 简要介绍了利用 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义求解分数阶微分方程的数值解的步骤。本章所述基础理论知识为后文的主要控制方法的研究提供了良好的理论基础。

第3章 分数阶积分的应用

3.1 引言

分数阶微积分理论研究不是新兴的,但其如何用于控制领域仍然是一个值得研究的热门话题。一般来说,我们在设计控制器之前往往需要选取合适的目标函数,目标函数的选取取决于我们所需要的状态变量以及输入与输出的变化程度等因素。一般情况下,设计控制器常用的性能指标即所选取的目标函数是包含控制增量和状态变量的二次型函数的积分表示形式,如果将分数阶积分运用于目标函数,从而使控制器的性能得到一定程度的改善,这也是一件比较有意义的研究方向。本章在控制器设计过程中,在目标函数中考虑加入分数阶积分算子,利用 Grünwald-Letnikov 分数阶积分定义来处理这个积分算子,增加了控制器的可调参数,最后将该控制量作用于蒸馏塔这一过程对象,仿真结果验证了在目标函数中引入积分算子的可行性和有效性。

3.2 分数阶积分算子

3.2.1 分数阶积分

考虑函数 $f(t)$ 在 $t \geq 0$ 时有 $n+1$ 阶连续导数,由式(2.13)和(2.18)中的分数阶微积分定义:

$$D^\alpha f(t) \Big|_{t=kh} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(kh - jh) \quad (3.1)$$

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, n < \alpha < n+1 \quad (3.2)$$

Grünwald-Letnikov 分数阶积分形式即为式(3.1)中 α 为负值的情况。由式(3.2)可以得到 Riemann-Liouville 分数阶积分定义形式,

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0, \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad (3.3)$$

本章里,记 $I^\alpha \equiv D^{-\alpha}$, $D^{-1}f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ 。

设 $F^\alpha(x)$ 为 $f(x)$ 的 α 阶原函数,即 $F^\alpha(x) \equiv I^\alpha f(x)$ 。首先将微分符号 D 转换为积分符号 I ,然后结合整数阶积分定理,有

$$\begin{aligned}
 \int_a^b [D^{1-\alpha} f(x)]dx &= \int_a^b [I^{\alpha-1} f(x)]dx \\
 &= \int [I^{\alpha-1} f(x)]dx \Big|_{x=b} - \int [I^{\alpha-1} f(x)]dx \Big|_{x=a} \\
 &= I^1 I^{\alpha-1} f(x) \Big|_{x=b} - I^1 I^{\alpha-1} f(x) \Big|_{x=a} \\
 &= F^\alpha(b) - F^\alpha(a)
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

定义如下形式的积分，记为

$${}^a I_a^b f(x) = \int_a^b [D^{1-\alpha} f(x)]dx \tag{3.5}$$

其中， a, b 为积分的下限和上限， α 为积分阶次。

3.2.2 分数阶积分数值计算

结合式(3.1)、(3.4)和(3.5)，得到如下的积分表示形式，

$$\begin{aligned}
 {}^a I_a^b f(x) &= F^\alpha(b) - F^\alpha(a) = D^{-\alpha} f(b) - D^{-\alpha} f(a) \\
 &= \left[h^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_0 f(b-jh) \right] - \left[h^\alpha \sum_{j=0}^n \omega_j f(a-jh) \right] \\
 &\approx h^\alpha [\omega_0 f(b) + \omega_1 f(b-h) + \cdots + \omega_n f(b-nh) + \cdots] \\
 &\quad - h^\alpha [\omega_0 f(a) + \omega_1 f(a-h) + \cdots + \omega_n f(a-nh) + \cdots] \\
 &\approx h^\alpha [\omega_0 f(b) + \omega_1 f(b-h) + \cdots + (\omega_{b-a} - \omega_0) f(a)] \\
 &\quad + (\omega_{b-a-1} - \omega_1) f(a) + \cdots + (\omega_b - \omega_a) f(0) + \cdots]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

考虑 $x \geq 0$ ，将式(3.6)整理得到，

$$\begin{aligned}
 {}^a I_a^b f(x) &= \int_a^b [D^{1-\alpha} f(x)]dx \\
 &\approx h^\alpha W \Phi^T
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，

$$W = [\omega_b - \omega_a, \omega_{b-1} - \omega_{a-1}, \cdots, \omega_{b-a} - \omega_0, \omega_{b-a-1}, \cdots, \omega_1, \omega_0]$$

$$\Phi = [f(0), f(h), \cdots, f(a-h), f(a), \cdots, f(b-h), f(b)]$$

$$\omega_j = (-1)^j \binom{-\alpha}{j}$$

3.2.3 分数阶积分基本性质

推广整数阶积分的性质，结合上述式子和第 2 章中 2.2.3 节的分数阶微积分性质，分数阶积分性质有，

$${}^a I_a^b [kf(x)] = \int_a^b D^{1-\alpha} [kf(x)]dx = k \cdot {}^a I_a^b [f(x)] \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 {}^a I_a^b [f(x) + g(x)] &= \int_a^b D^{1-\alpha} [f(x) + g(x)] dx \\
 &= \int_a^b D^{1-\alpha} f(x) dx + \int_a^b D^{1-\alpha} g(x) dx \\
 &= {}^a I_a^b f(x) + {}^a I_a^b g(x)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}
 {}^a I_a^b [kf(x) + lg(x)] &= \int_a^b D^{1-\alpha} [kf(x) + lg(x)] dx \\
 &= k \cdot {}^a I_a^b f(x) + l \cdot {}^a I_a^b g(x)
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 {}^a I_a^b f(x) &= \int_a^b D^{1-\alpha} f(x) dx \\
 &= - \int_b^a D^{1-\alpha} f(x) dx \\
 &= - {}^a I_b^a f(x)
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

尽管如此，整数阶积分的性质并不能完全适用于分数阶积分，比如积分中值定理等。

整数阶积分中值定理：

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则在区间 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ ，即 $a \leq \xi \leq b$ ，使得，

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a) \tag{3.12}$$

在分数阶积分中，若考虑(3.6)中的式子，函数 $f(x)$ 的自变量范围是 $(-\infty, b]$ ，且 $w_l = \omega_l - \omega_{l-(b-1)}$ ， $l \geq 0$ 时， $\omega_l = (-1)^l \binom{-\alpha}{l}$ ， $l < 0$ 时， $\omega_l = 0$ 。这里 w_l 既存在正数，也存在负数，并不能保证一定存在一点 ξ ，使得分数阶积分 ${}^a I_b^a f(x)$ 满足公式(3.12)。

对于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且 $a < b$ ，对任意 $x \in [a, b]$ ，若 $f(x) \geq 0$ ，整数阶积分有，

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0 \tag{3.13}$$

但是分数阶积分不满足这一性质。同样地，从公式(3.6)可以知道，函数 $f(x)$ 的分数阶积分中， $f(x)$ 的自变量范围是 $(-\infty, b]$ ，且当积分阶次 $\alpha < 1$ 时，系数 w_l 存在负值，故而不能保证分数阶积分 ${}^a I_b^a f(x)$ 不小于 0。

3.3 目标函数推广

用如下模型来描述实际过程：

$$G(s) = \frac{K_m}{T_m s + 1} e^{-\tau s} \quad (3.14)$$

其中, K_m 为整数阶模型比例系统, T_m 为整数阶模型时间常数, τ 为整数阶模型的时滞。

在采样时间 T_s 条件下加零阶保持器对模型(3.14)进行离散化, 得到如下模型,

$$y(k) = \alpha_m y(k-1) + K_m(1-\alpha_m)u(k-d-1) \quad (3.15)$$

其中, 时滞 d 为 τ/T_s 的整数部分, $\alpha_m = e^{(-T_s/T_m)}$ 。

选择控制时域 $M=1$, 先考虑模型(3.15)中时滞 $d=0$, 预测未来 P 时刻的模型输出, 得

$$y_{mav}(k+i) = \alpha_m^i y_{mav}(k) + K_m(1-\alpha_m^i)u(k), i=1, 2, \dots, P \quad (3.16)$$

对模型进行校正, $y_{pav}(k) = y_p(k) + y_{mav}(k) - y_{mav}(k-d)$, 将预测模型整理成矩阵形式,

$$Y_c = \bar{A}y_{mav}(k) + \bar{B}u(k) + \bar{E} \quad (3.17)$$

其中,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \alpha_m \\ \alpha_m^2 \\ \vdots \\ \alpha_m^P \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} K_m(1-\alpha_m) \\ K_m(1-\alpha_m^2) \\ \vdots \\ K_m(1-\alpha_m^P) \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} y_{pav}(k) - y_{mav}(k) \\ y_{pav}(k) - y_{mav}(k) \\ \vdots \\ y_{pav}(k) - y_{mav}(k) \end{bmatrix}$$

针对整数阶控制系统, 模型预测控制器设计过程中目标函数一般选为如下形式,

$$J = \sum_{i=1}^P q_i [y_c(k+i) - y_r(k+i)]^2 + \sum_{j=1}^M r_j [\Delta u(k+j-1)]^2 \quad (3.18)$$

$$y_r(k+i) = \lambda^i y_{pav}(k) + (1-\lambda^i)c(k) \quad (3.19)$$

$$e(k+i) = y_c(k+i) - y_r(k+i) \quad (3.20)$$

其中, P 为优化时域, q_i, r_j 为输出误差与控制量的加权系数, $e(k+i)$, $y_r(k+i)$ 分别为 $k+i$ 时刻跟踪误差和参考轨迹, λ 为参考轨迹柔化因子, $c(k)$ 为 k 时刻的设定值, $y_{pav}(k)$ 为修正后的模型输出。

将式(3.18)中的目标函数对控制量求导, 得到最优控制律,

$$\Delta u(k) = (\bar{B}^T Q \bar{B} + R)^{-1} \bar{B}^T Q (Y_r - \bar{E} - \bar{A} y_{\text{mov}}(k)) \quad (3.21)$$

其中, $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_p)$, $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_M)$ 。

式(3.18)和(3.21)分别为一般的整数阶目标函数和基于整数阶目标函数求得的控制增量, 是一般的基于输入输出模型的预测控制方法, 这里记为 **Standard MPC**。下面即为本章将积分算子引入目标函数而采用的方法。

将式(3.18)中目标函数的积分阶次由整数阶扩展到分数阶, 选取的目标函数形式如下,

$$\begin{aligned} J_F &= {}^\alpha I_1^P [e(t)]^2 + {}^\beta I_1^M [\Delta u(t-1)]^2 \\ &= \int_1^P D^{1-\alpha} [e(t)]^2 dt + \int_1^M D^{1-\beta} [\Delta u(t-1)]^2 dt \end{aligned} \quad (3.22)$$

其中, α, β 为积分阶次, 是任意实数。为方便起见, 本文将时刻 kT_s 简写为时刻 k 。

选取采样步长 T_s , 利用 GL 分数阶微积分定义, 将式(3.22)写成离散形式, 则利用公式(3.6)可以得到,

$$\begin{aligned} J_F &\approx T_s^\alpha [\omega_0^{(-\alpha)} e(k+P) + \omega_1^{(-\alpha)} e(k+P-1) + \dots + (\omega_{p-1}^{(-\alpha)} - \omega_0^{(-\alpha)}) e(k+1) + (\omega_p^{(-\alpha)} - \omega_1^{(-\alpha)}) e(k) \\ &\quad + (\omega_{p+1}^{(-\alpha)} - \omega_2^{(-\alpha)}) e(k-1) + \dots] + T_s^\beta [\omega_0^{(-\beta)} \Delta u(k+M-1) + \omega_1^{(-\beta)} \Delta u(k+M-2) + \dots \\ &\quad + (\omega_{M-1}^{(-\beta)} - \omega_0^{(-\beta)}) \Delta u(k) + (\omega_M^{(-\beta)} - \omega_1^{(-\beta)}) \Delta u(k-1) + \dots] \\ &= T_s^\alpha E^T \bar{\Lambda}_1 E + T_s^\beta \Delta U^T \bar{\Lambda}_2 \Delta U \\ &= (T_s^\alpha \underset{\rightarrow k}{E}^T \bar{\Lambda}_1 \underset{\rightarrow k}{E} + T_s^\beta \underset{\rightarrow k-1}{\Delta U}^T \bar{\Lambda}_2 \underset{\rightarrow k-1}{\Delta U}) + (T_s^\alpha \underset{\leftarrow k}{E}^T \bar{\Lambda}_1 \underset{\leftarrow k}{E} + T_s^\beta \underset{\leftarrow k-1}{\Delta U}^T \bar{\Lambda}_2 \underset{\leftarrow k-1}{\Delta U}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

其中, $\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2$ 为相应的系数矩阵, $j \geq 0$ 时, $\omega_j^{(-\alpha)} = (-1)^j \binom{-\alpha}{j}$, $\omega_j^{(-\beta)} = (-1)^j \binom{-\beta}{j}$,

$j < 0$ 时, $\omega_j^{(-\alpha)} = 0, \omega_j^{(-\beta)} = 0$ 。

在 k 时刻, $k-1$ 时刻的输出及以前时刻的输入与输出均为已知量, 进一步可以将上述目标函数转化为求取如下性能指标,

$$J_F \approx \underset{\rightarrow k}{E}^T \Lambda(\alpha, T_s) \underset{\rightarrow k}{E} + \underset{\rightarrow k-1}{\Delta U}^T \Lambda(\beta, T_s) \underset{\rightarrow k-1}{\Delta U} \quad (3.24)$$

其中,

$$\Lambda(\alpha, T_s) = T_s^\alpha \bar{\Lambda}_1 = T_s^\alpha \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_1 & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda}_1 \end{bmatrix} = T_s^\alpha \text{diag}(\dots \omega_p^{(-\alpha)} - \omega_{p-1}^{(-\alpha)} \mid \omega_{p-1}^{(-\alpha)} - \omega_0^{(-\alpha)} \dots \omega_1 \omega_0)$$

$$\Lambda(\beta, T_s) = T_s^\beta \bar{\Lambda}_2 = T_s^\beta \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_2 & 0 \\ 0 & \bar{\Lambda}_2 \end{bmatrix} = T_s^\beta \text{diag}(\dots \omega_M^{(-\beta)} - \omega_{M-1}^{(-\beta)} \mid \omega_{M-1}^{(-\beta)} - \omega_0^{(-\beta)} \dots \omega_1 \omega_0)$$

$$E = \begin{bmatrix} E_{\leftarrow k} \\ E_{\rightarrow k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ e(k-2) \\ e(k-1) \\ e(k) \\ e(k+1) \\ e(k+2) \\ \vdots \\ e(k+P) \end{bmatrix}, \quad \Delta U = \begin{bmatrix} \Delta U_{\leftarrow k-1} \\ \Delta U_{\rightarrow k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta u(k-3) \\ \Delta u(k-2) \\ \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+M-1) \end{bmatrix}$$

为使一般整数阶模型预测控制器与本章所提参数一致，在式(3.24)中也引入同样的加权系数 $Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_P)$ 和 $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_M)$ ，目标函数为，

$$J_F' \approx E_{\rightarrow k}^T \Lambda(\alpha, T_s) Q E_{\rightarrow k} + \Delta U_{\rightarrow k-1}^T \Lambda(\beta, T_s) R \Delta U_{\rightarrow k-1} \quad (3.25)$$

最后，我们可以以 $\Delta U_{\rightarrow k-1}$ 为控制变量，通过求取公式(3.25)中目标函数的最小值，可以得到最优控制量。

这样，我们将积分算子引入目标函数，将目标函数从整数阶扩展到了分数阶，从而增加了积分阶次 α, β 这类可调的控制参数，扩展了分数阶积分在控制领域的应用。

3.4 分数阶目标函数的应用实例

考虑文献[76]中实际生产过程蒸馏塔的例子，考虑如下模型：

$$G(s) = \frac{1}{14s+1} e^{-4s} \quad (3.26)$$

取采样时间 $T_s = 2$ ，离散模型为

$$G(z^{-1}) = \frac{0.1331}{z-0.8669} z^{-2} \quad (3.27)$$

为了验证在目标函数中引入积分算子的优越性，本章提出的方法将和 Standard MPC 方法进行比较。仿真参数为：在 $k=0$ 时设定值为 1；在 $k=200$ 时将振幅为 -0.01 的输出干扰加入系统。控制器的参数：预测时域 $P=6$ ，柔化系数 $\lambda=0.95$ ，控制时域 $M=1$ ，控制量加权系数 $R=0.01$ ，输出误差加权系数 $q_i=1(i=1,2,\dots,P)$ ， $\beta=1$ 。

图 3.1 显示了引入分数阶积分的模型预测控制器的参数 α 从 0.2 到 4.6 变化的输出响应曲线。从图中可以看出，随着参数 α 从 0.2 增大到 4.6，输出曲线的响应速度越来越慢。

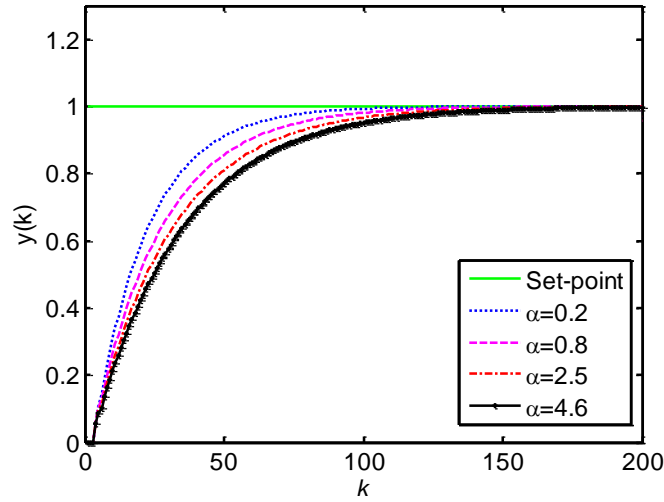
图 3.1 模型匹配时随 α 变化的系统输出响应

图 3.2 给出了本章采用的方法与 Standard MPC 方法控制的系统在模型匹配情况下的输出响应对比曲线。控制器的参数：目标函数分数阶阶次 $\alpha = 0.2$ ， $\beta = 1$ ，预测时域 $P = 6$ ，柔化系数 $\lambda = 0.95$ ，控制时域 $M = 1$ ，控制量加权系数 $R = 0.01$ ，输出误差加权系数 $q_i = 1 (i = 1, 2, \dots, P)$ 。从图中可以看出，目标函数中针对输出误差项引入分数阶积分后，系统的响应速度加快，且抗干扰性也有一定程度地提高。

由于实际生产过程总会存在不确定性因素的干扰，常常会存在模型与实际的过程不匹配的情况，这里采用蒙特卡洛方法获得实际过程的参数，以此来模拟实际的生产过程对象。在模型参数 $K = 1, T = 14, \tau = 4$ 的基础上同时随机产生 30% 的最大程度失配。

第一组失配过程的参数： $K = 1.1093, T = 12.3432, \tau = 4.1$

第二组失配过程的参数： $K = 1.2801, T = 15.3854, \tau = 4.8889$

第三组失配过程的参数： $K = 0.8706, T = 13.7415, \tau = 2.9555$

图 3.3~图 3.5 给出了上述三组失配情况下的系统输出响应对比曲线，从图中可以知道，在目标函数中引入分数阶积分设计的控制器跟踪设定值的响应速度快，且在抵抗干扰时恢复速度更快。

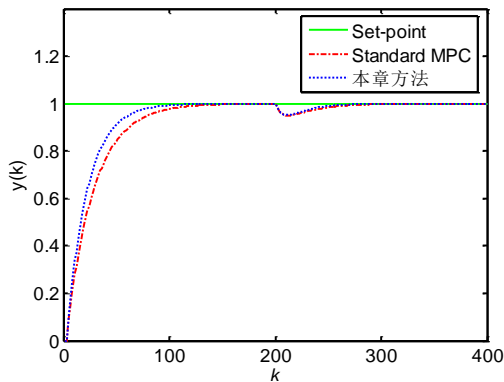


图 3.2 模型匹配时系统输出

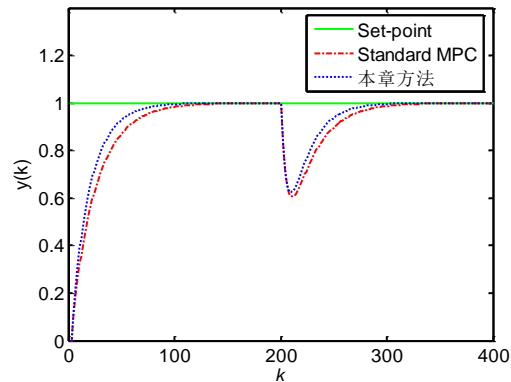


图 3.3 模型失配时系统输出(第一组)

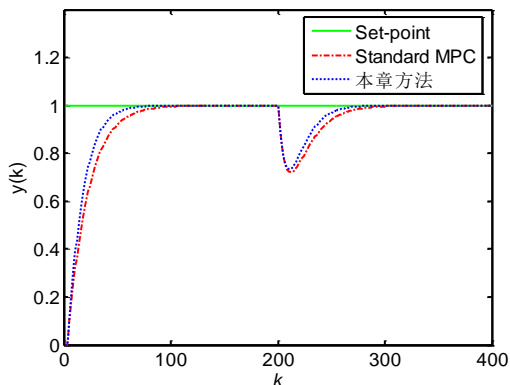


图 3.4 模型失配时系统输出（第二组）

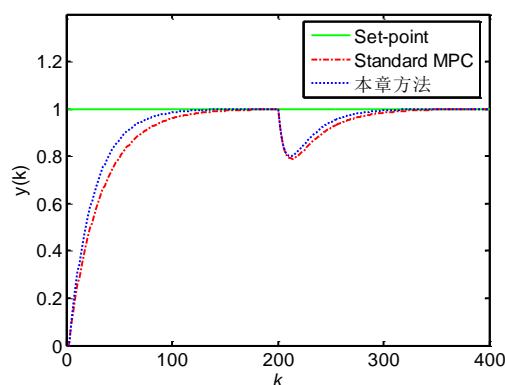


图 3.5 模型失配时系统输出（第三组）

3.5 本章小结

在最优控制中，性能指标的选取是比较复杂的一个实际问题。其中，控制研究领域常常会选取状态变量和控制变量的二次型函数的积分来表示性能指标。考虑到分数阶模型描述系统特性比整数阶模型更精确，本章考虑将分数阶积分算子引入到目标函数，以达到使性能指标函数所考虑到的因素更全面。

本章结合第二章分数阶微积分定义，将积分算子从整数阶推广到分数阶，简要讨论了分数阶积分的性质。同时，利用 Grünwald-Letnikov 分数阶定义将其应用到了目标函数中，将包含分数阶积分阶次的目标函数表示成矩阵形式，方便求解最优控制律，同时增加了调节控制器的参数。在针对同一过程对象的控制过程中，本章所运用的方法与传统的模型预测控制方法在跟踪性能和抗干扰性能上有一定程度提高，获得了良好的控制效果。

第 4 章 基于分数阶系统的分数阶预测函数控制

4.1 引言

在现实存在许多复杂的对象是整数阶微分方程无法精确描述的,用分数阶微分方程能更精确地描述系统特征。PFC 作为先进控制方法的一种,具有计算量小、鲁棒性强、控制性能好等特点,在实际过程控制领域中获得了大量成功的应用。针对一类分数阶系统,传统 PID 控制方法和整数阶预测函数控制方法对这类对象的控制效果并不是很好,这就需要我们研究具备良好控制性能的控制器的控制这类用分数阶模型描述的实际被控对象。如果我们将整数阶预测函数控制方法扩展到分数阶预测函数控制方法中,那将能有效弥补整数阶预测函数控制方法在控制分数阶系统中的不足,并能获得更好的控制效果,同时也能促进预测函数控制方法在分数阶系统中的运用。

本章针对一类单输入单输出(SISO)分数阶线性系统,设计了一种分数阶预测函数控制方法。该方法采用 Oustaloup 近似方法将分数阶系统近似为整数阶系统,基于 Oustaloup 近似模型建立预测输出模型,并将分数阶积分引入目标函数,进一步求出最优控制量,最后对分数阶控制系统进行了仿真,并与基于整数阶降阶模型的预测函数控制进行了比较。仿真实例结果表明,分数阶控制器比整数阶控制器具有更好的控制效果。

4.2 分数阶预测函数控制

4.2.1 分数阶模型处理

由 Oustaloup 近似方法得到微分算子 s^α 的近似表达形式如下:

$$s^\alpha \approx C \prod_{n=1}^N \frac{s + w_n'}{s + w_n} \quad (4.1)$$

其中, α 为分数阶微分阶次, $0 < \alpha < 1$, N 为选定的近似阶次, $C = w_h^\alpha$,

$w_n' = w_b w_u^{(2n-1-\alpha)/N}$, $w_n = w_b w_u^{(2n-1+\alpha)/N}$, $w_u = \sqrt{w_h/w_b}$, w_b 和 w_h 分别为选定的拟合频率的下限和上限。

考虑如下用分数阶传递函数形式来描述的分数阶系统:

$$G(s) = \frac{b_0 s^{\beta_0} + b_1 s^{\beta_1} + \cdots + b_{m_2} s^{\beta_{m_2}}}{1 + a_1 s^{\alpha_1} + a_2 s^{\alpha_2} + \cdots + a_{m_1} s^{\alpha_{m_1}}} \quad (4.2)$$

其中, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{m_1}$, $\beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_{m_2}$ 均为分数阶阶次, $a_i (i=1, 2, \dots, m_1)$, $b_j (j=0, 1, \dots, m_2)$ 为任意实数。

结合公式(4.1), 将公式(3.2)中的分数阶系统近似为整数阶高阶系统模型, 对得到的高阶模型在采样时间 T_s 下加零阶保持器离散化, 得到如下形式的模型:

$$\begin{aligned} A(z^{-1})y(k) &= B(z^{-1})u(k) \\ A(z^{-1}) &= 1 + F_1 z^{-1} + \dots + F_{n_1} z^{-n_1} \\ B(z^{-1}) &= H_1 z^{-1} + \dots + H_{n_2} z^{-n_2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

可以将式(4.3)写成如下形式:

$$\begin{aligned} y(k) &= -F_1 y(k-1) - F_2 y(k-2) - \dots - F_{L_s} y(k-n_1) \\ &\quad + H_1 u(k-1) + \dots + H_{n_2} u(k-n_2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

其中, z^{-1} 为后移算子, n_1, n_2 分别为输出和输入的阶次, $F_1, F_2, \dots, F_{n_1}, H_1, H_2, \dots, H_{n_2}$ 分别为离散近似后得到的系数, L_s 为离散模型的长度, d 为离散模型的时滞, 是 τ/T_s 的整数部分。

在预测函数控制中, 加入的控制量被认为是若干已知的基函数的线性组合。本章选取一个基函数为阶跃函数:

$$u(k+i) = u(k), i=1, 2, \dots \quad (4.5)$$

根据预测函数控制的特点, 结合建立的模型和输入控制量来预测过程对象未来时刻的预测输出值:

$$\begin{aligned} y(k+1) &= -F_1 y(k) - F_2 y(k-1) - \dots - F_{n_1} y(k-n_1+1) + H_1 u(k) + H_2 u(k-1) + \dots + H_{n_2} u(k-n_2+1) \\ y(k+2) &= -F_1 y(k+1) - F_2 y(k) - \dots - F_{n_1} y(k-n_1+2) + H_1 u(k+1) + H_2 u(k) + \dots + H_{n_2} u(k-n_2+2) \\ &\vdots \\ y(k+P) &= -F_1 y(k+P-1) - F_2 y(k+P-2) - \dots - F_{n_1} y(k+P-n_1) + H_1 u(k+P-1) + H_2 u(k+P-2) \\ &\quad + \dots + H_{n_2} u(k+P-n_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

将式(4.6)整理成矩阵形式,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ F_1 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ F_{n_1} & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & F_{n_1} & \dots & F_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k+1) \\ y(k+2) \\ \vdots \\ \vdots \\ y(k+P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1 & -F_2 & \dots & -F_{n_1} \\ -F_2 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -F_{n_1} & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ \vdots \\ y(k-n_1+1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 + H_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n_2} H_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n_2} H_i \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} H_2 & H_3 & \cdots & H_{n_2} \\ H_3 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ H_{n_2} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \vdots \\ \vdots \\ u(k-n_2+1) \end{bmatrix} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

其中, P 为预测时域, $y(k+i)$ 为 $k+i$ 时刻过程的模型预测输出, $i=1,2,\dots,P$ 。

对式(4.7)进行整理得到,

$$AY = BY_{past} + Cu(k) + DU_{past} \quad (4.8)$$

其中,

$$Y = [y(k+1), y(k+2), \dots, y(k+P)]^T$$

$$Y_{past} = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-n_1+1)]^T$$

$$U_{past} = [u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-n_2+1)]^T$$

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ F_1 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ F_{n_1} & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & F_{n_1} & \cdots & F_1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -F_1 & -F_2 & \cdots & -F_{n_1} \\ -F_2 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -F_{n_1} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} H_1 \\ H_1 + H_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n_2} H_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n_2} H_i \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} H_2 & H_3 & \cdots & H_{n_2} \\ H_3 & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ H_{n_2} & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

结合上述式子，得到被控对象的预测输出模型为：

$$Y = \bar{B}Y_{past} + \bar{C}u(k) + \bar{D}U_{past} \quad (4.9)$$

其中， $\bar{B} = A^{-1}B$ ， $\bar{C} = A^{-1}C$ ， $\bar{D} = A^{-1}D$ 。

在实际过程中，可能存在模型不匹配、噪声等因素的影响，实际过程的输出与模型预测输出往往存在误差。为此，需要对未来时刻的模型输出进行调整校正。在预测函数控制中，未来的预测误差一般取为：

$$e(k+i) = y_p(k) - y(k), i=1, 2, \dots, P \quad (4.10)$$

其中， $y_p(k)$ 为 k 时刻过程的实际输出值， $y(k)$ 为 k 时刻的模型输出值。

结合式(4.9)和(4.10)，经过误差校正后的预测输出为：

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= Y + E \\ &= \bar{B}Y_{past} + \bar{C}u(k) + \bar{D}U_{past} + E \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$E = [e(k+1), e(k+2), \dots, e(k+P)]^T$$

4.2.2 分数阶预测函数控制器的设计

在控制过程中，为避免控制量变化过于剧烈等现象的发生，选取如下形式的参考轨迹：

$$y_r(k+i) = \lambda^i y_p(k) + (1-\lambda^i)c(k), i=0, 1, \dots, P \quad (4.12)$$

其中， $c(k)$ 为 k 时刻过程的设定值， λ 为参考轨迹的柔化系数。

对于整数阶系统，考虑有限时域的滚动优化问题，一般选取如下性能指标：

$$J_{PFC} = \min \sum_{i=1}^P [y_r(k+i) - y(k+i) - e(k+i)]^2 \quad (4.13)$$

对于分数阶系统，利用第三章介绍的内容将整数阶预测控制的目标函数推广到分数阶预测控制中，选取分数阶预测函数控制的目标函数形式如下：

$$\begin{aligned} J_{FPFC} &= {}^{\gamma}I_{T_s}^{PT_s} [y_r(t) - y(t) - e(t)]^2 \\ &= \int_{T_s}^{PT_s} D^{1-\gamma} [y_r(t) - y(t) - e(t)]^2 dt \end{aligned} \quad (4.14)$$

利用 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分离散形式，对上述目标函数在采样时间 T_s 进行离散化，得到目标函数的离散形式：（为方便起见，将时刻 kT_s 简写为时刻 k ）

$$J_{FPFC} \cong (Y_r - \tilde{Y})^T \Lambda(T_s, \gamma) (Y_r - \tilde{Y}) \quad (4.15)$$

其中，

$$Y_r = [y_r(k+1), y_r(k+2), \dots, y_r(k+P)]^T$$

$$\Lambda(T_s, \gamma) = T_s^\gamma \text{diag}(m_{p-1}, m_{p-2}, \dots, m_1, m_0)$$

$$m_q = \omega_q^{(-\gamma)} - \omega_{q-(P-1)}^{(-\gamma)}$$

$$\omega_0^{(-\gamma)} = 1, \quad \forall q > 0 \text{ 时}, \quad \omega_q^{(-\gamma)} = (1 - \frac{1-\gamma}{q})\omega_{q-1}^{(-\gamma)}, \quad \text{对 } q < 0, \quad \omega_q^{(-\gamma)} = 0。$$

由 $\frac{\partial J_{FPFC}}{\partial u(k)} = 0$ ，可以得到最优控制律为：

$$u(k) = (\bar{C}^T \Lambda(T_s, \gamma) \bar{C})^{-1} \bar{C}^T \Lambda(T_s, \gamma) (Y_r - \bar{B}Y_{past} - \bar{D}U_{past} - E) \quad (4.16)$$

4.3 仿真实例

针对设计的分数阶预测函数控制器，通过MATLAB仿真验证控制器的性能。文献[77]中的给出了一个加热炉的例子，作者通过测量实际加热炉对象的输出建立了加热炉的分数阶模型，其分数阶模型如下：

$$G(s) = \frac{1}{14994.3s^{1.31} + 6009.52s^{0.97} + 1.69} \quad (4.17)$$

这里选取的近似微分的阶次为 $N=4$ ，Oustaloup 近似拟合频率上限和下限分别为 $w_h = 10^6$ 和 $w_b = 10^{-6}$ ，将分数阶传递函数模型近似为 Oustaloup 近似模型，

$$G(s) = \frac{P_1(s)}{N_1(s)} \quad (4.18)$$

其中，

$$\begin{aligned} P_1(s) &= s^8 + 9.948 \times 10^5 s^7 + 8.417 \times 10^{10} s^6 + 8.283 \times 10^{13} s^5 + 7.001 \times 10^{15} s^4 \\ &\quad + 6.889 \times 10^{15} s^3 + 5.823 \times 10^{14} s^2 + 5.725 \times 10^{11} s + 4.786 \times 10^7 \\ N_1(s) &= 1.086 \times 10^6 s^9 + 9.961 \times 10^{11} s^8 + 1.189 \times 10^{16} s^7 + 1.015 \times 10^{19} s^6 + 1.506 \times 10^{20} s^5 \\ &\quad + 1.4 \times 10^{20} s^4 + 5.002 \times 10^{18} s^3 + 6.527 \times 10^{15} s^2 + 1.375 \times 10^{12} s + 8.132 \times 10^7 \end{aligned}$$

针对式(4.18)中的高阶系统模型，这里采用最优降阶方法^[78]得到它的降阶模型，降阶为如下形式的一阶模型，

$$G(s) = \frac{0.5889}{5138.7s + 1} \quad (4.19)$$

图 4.1 显示了原分数阶模型、Oustaloup 近似模型和降阶模型的阶跃响应对比曲线。从图中可以看出，Oustaloup 近似模型和降阶模型的效果均较为理想，但近似化结果总会存在一定的允许误差。

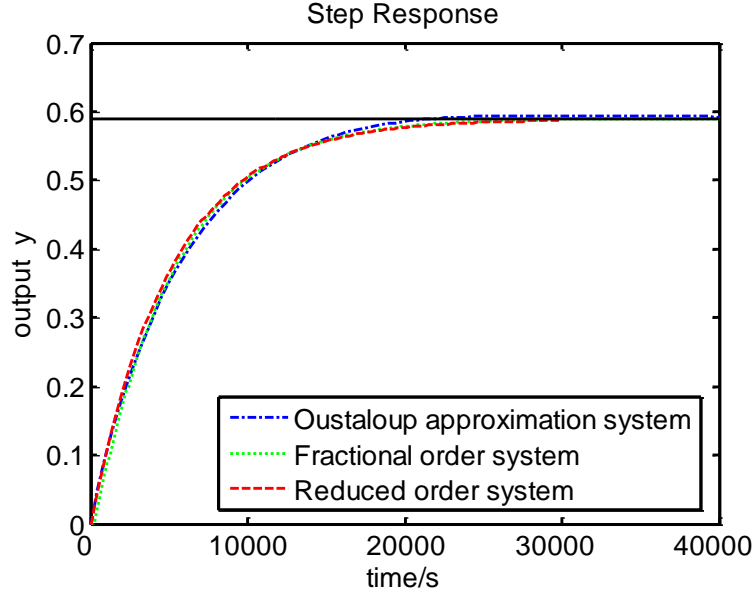


图 4.1 模型阶跃响应输出对比曲线

本章采样时间选取 $T_s = 1$ ，加零阶保持器离散式(4.18)中的模型，得到如下离散模型：

$$G(z) = \frac{P_2(z)}{N_2(z)} \quad (4.20)$$

其中，

$$\begin{aligned} P_2(z) &= 4.656 \times 10^{-5} z^8 - 1.515 \times 10^{-4} z^7 + 1.767 \times 10^{-4} z^6 - 8.401 \times 10^{-5} z^5 + 1.116 \times 10^{-5} z^4 \\ &\quad + 1.097 \times 10^{-6} z^3 - 1.481 \times 10^{-16} z^2 + 5.485 \times 10^{-33} z + 2.044 \times 10^{-50} \\ N_2(z) &= z^9 - 4.348 z^8 + 7.414 z^7 - 6.154 z^6 + 2.459 z^5 - 0.3703 z^4 \\ &\quad + 2.787 \times 10^{-7} z^3 - 1.989 \times 10^{-24} z^2 + 8.905 \times 10^{-41} z + 2.398 \times 10^{-59} \end{aligned}$$

加零阶保持器离散式(4.19)中的模型，得到如下离散模型：

$$G(z) = \frac{0.0001146}{z - 0.9998} \quad (4.21)$$

为了验证本章所提出的方法的控制性能，我们将整数阶预测函数控制方法和分数阶预测函数控制方法(Fractional PFC)进行对比。分数阶 PFC 以式(4.20)描述的 Oustaloup 近似系统为标称模型设计控制器，而整数阶 PFC 以式(4.21)中将分数阶系统降阶后的一阶模型为标称模型来设计控制器，最后将控制量均作用于 Oustaloup 系统描述的分数阶系统。仿真过程中，我们在 $k = 300$ 时刻加入幅值为 -0.1 的持续输出干扰；设定值为 $c(k) = 1$ 。

(1) 模型匹配

图 4.2 为模型匹配时控制系统的输出响应曲线对比图。从图中可以看出，在模型匹配的情况下，整数阶预测函数控制和分数阶预测函数控制都能使分数阶系统获得稳定的控制。整数阶控制器的参数为： $\lambda = 0.95$ ， $P = 10$ ，分数阶控制器

参数与整数阶的相同，且 $\gamma = 0.8$ 。分数阶预测函数控制的上升速度较快，有很好的跟踪性能和抗干扰能力。

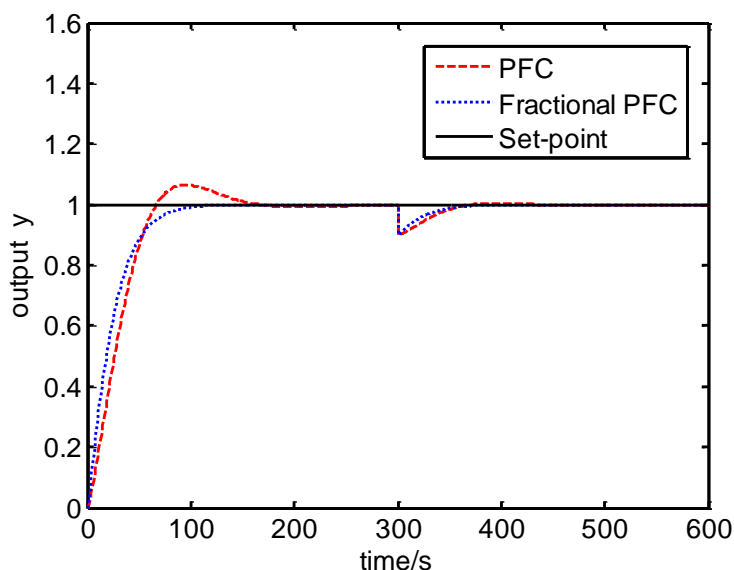


图 4.2 模型匹配时的输出响应对比曲线

(2) 模型失配

由于在实际过程中往往存在不可测或不确定性因素的干扰，模型的建立总会存在一定的误差，这就导致了模型可能存在不匹配的情况。下面我将针对式 (4.17) 中的分数阶模型参数 $\alpha_1 = 0.97, \alpha_2 = 1.31, c_0 = 1.69, c_1 = 6009.52, c_2 = 14994.3$ ，将分数阶模型的参数用蒙特卡洛方法随机产生三组 30% 的失配参数，用如下三组失配模型来代替实际过程对象。

$$\text{第一组: } G(s) = \frac{1}{19310s^{1.6053} + 5185.4s^{1.1081} + 1.4389} \quad (4.22)$$

$$\text{第二组: } G(s) = \frac{1}{18036s^{1.2153} + 4277.5s^{1.1631} + 1.8738} \quad (4.23)$$

$$\text{第三组: } G(s) = \frac{1}{19044s^{1.2990} + 5040.1s^{1.1977} + 1.7983} \quad (4.24)$$

整数阶控制器和分数阶控制器是在相同条件下进行对比的，控制系统在模型失配情况下仍然能够获得稳定的控制性能。这三组模型失配情况下的控制器参数为： $\lambda = 0.95, P = 10, \gamma = 0.8$ 。三组模型失配情况下的输出响应对比曲线如图 4.3~4.5 所示。通过三组对比效果图，我们可以知道分数阶预测函数控制器比整数阶预测函数控制器能获得更好地控制效果。从图 4.3 可以看出，本文所提出的控制器有更好的跟踪性能和更小的超调量，整数阶控制器会产生较强的振荡现象，且调节时间也比较长。图 4.4 和图 4.5 的仿真结果与图 4.3 有相同的效果。总之，与整数阶控制器相比，分数阶控制器产生的超调量和振荡都比较小，具有

更好地跟踪性能和抗干扰性能，能获得更好地控制效果。

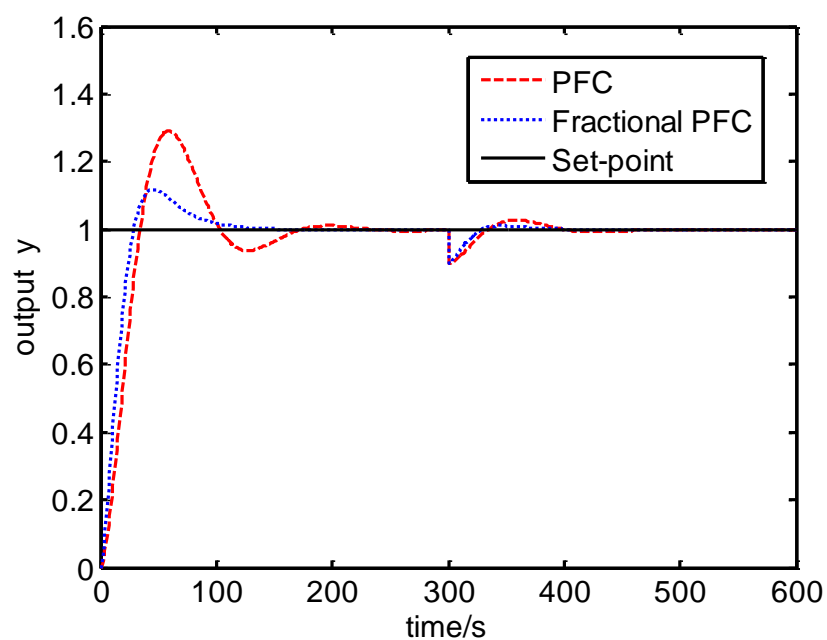


图 4.3 模型失配时响应输出对比曲线(第一组)

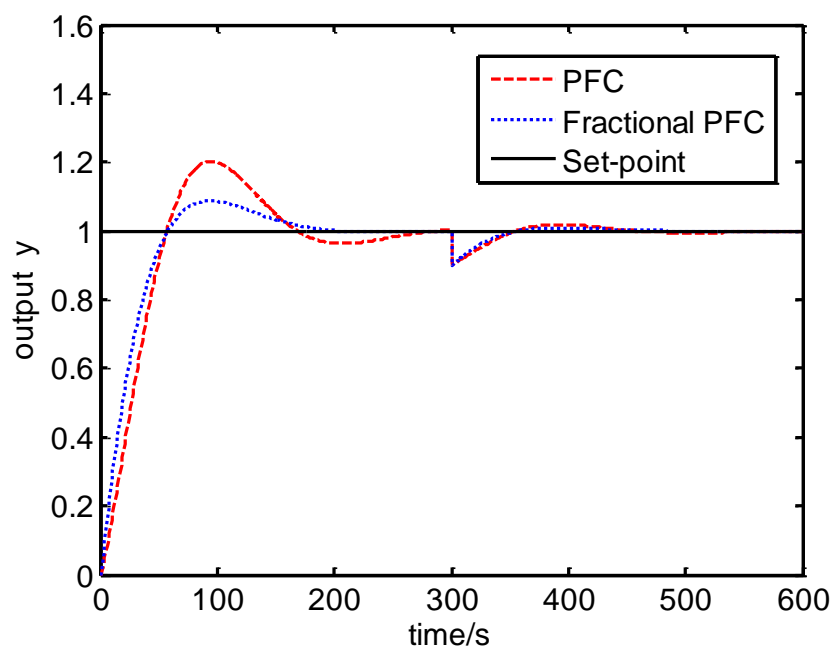


图 4.4 模型失配时响应输出对比曲线(第二组)

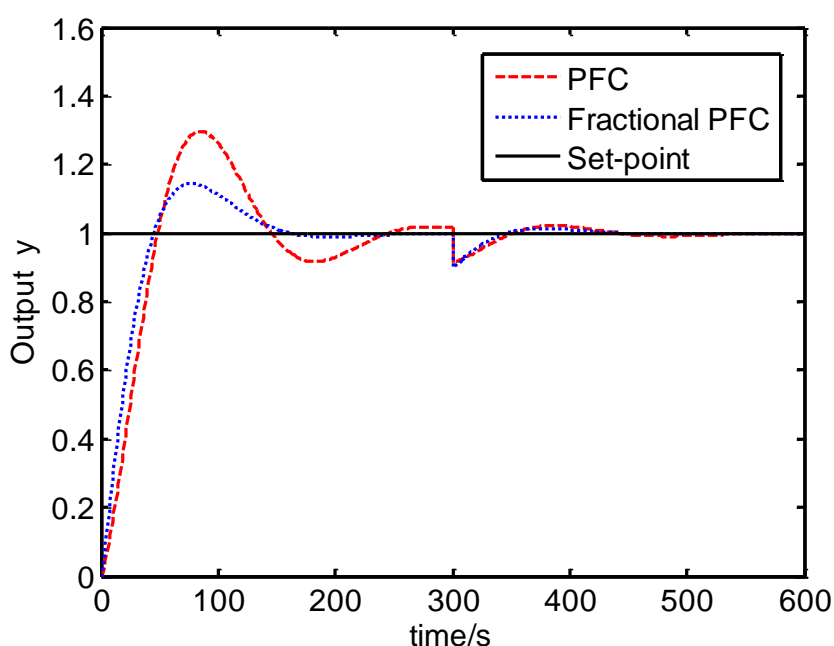


图 4.5 模型失配时响应输出对比曲线(第三组)

4.4 本章小结

本章针对一类单输入单输出分数阶系统提出了一种分数阶预测函数控制器的设计方法, 利用 Oustaloup 近似方法将分数阶系统近似为整数阶系统, 然后结合 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义将分数阶积分引入目标函数, 进一步求出最优控制律, 最后对分数阶控制系统进行了仿真。该方法可以很好地运用于分数阶模型描述的实际过程对象, 减少了整数阶 PFC 方法控制高阶系统模型需要进行降阶处理的步骤, 同时增加了调节控制器参数的自由度, 获得了良好的控制性能。以具体的加热炉分数阶系统为例, 本章对比了所设计的分数阶预测函数控制器和整数阶预测函数控制器, 仿真结果表明, 通过调节合理的控制参数, 分数阶预测函数控制器的响应速度快, 产生的超调量和振荡更小, 控制效果好。

第 5 章 基于扩展状态空间的分数阶模型预测控制

5.1 引言

在实际工业生产过程中，随着对产品的控制精度和安全操作的要求越来越高，但许多复杂的对象是整数阶微分方程无法精确描述的，用分数阶微分方程能更精确地描述对象特征和评估产品性能。PID 控制在工业过程控制领域的应用较为广泛，但是传统 PID 控制方法和整数阶模型预测控制方法对分数阶系统的控制效果并不能满足越来越高的控制精度的要求，这就需要我们研究具备良好控制性能的控制器来控制用分数阶模型描述的实际被控对象。整数阶扩展非最小状态空间模型预测控制方法在实际过程中取得了很好的控制效果，如果我们将分数阶系统模型进行一系列处理，进一步将得到的分数阶被控对象模型进行扩展，使扩展非最小状态空间模型包含跟踪误差和状态变量，将扩展非最小状态空间模型预测控制方法扩展到分数阶模型预测控制方法中，进一步将前面的分数阶积分运用到目标函数中，这将进一步促进模型预测控制在分数阶系统中的运用。如果设计的控制系统能获得很好的控制效果，这样的工作也是很有意义的。

5.2 整数阶扩展非最小状态空间模型预测控制方法

5.2.1 模型描述与处理

在控制器设计过程中，简单的模型一般可以方便控制器的设计过程。这里，整数阶模型表示为一阶加纯滞后模型，

$$G(s) = \frac{K_m}{T_m s + 1} e^{-\tau s} \quad (5.1)$$

其中， K_m 为整数阶模型比例系统， T_m 为整数阶模型时间常数， τ 为整数阶模型的时滞。

在采样时间 T_s 条件下对模型(5.1)进行离散化，得到如下模型，

$$y(k) = \alpha_m y(k-1) + K_m (1 - \alpha_m) u(k-d-1) \quad (5.2)$$

其中，时滞 d 为 τ/T_s 的整数部分， $\alpha_m = e^{(-T_s/T_m)}$ 。

将式(5.2)中的模型取一阶向后差分，得到，

$$\Delta y(k) = \alpha_m \Delta y(k-1) + K_m (1 - \alpha_m) \Delta u(k-d-1) \quad (5.3)$$

选取状态变量， $\Delta x(k) = [\Delta y(k), \Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \dots, \Delta u(k-d)]^T$ ，可以得到扩展状态空间模型为，

$$\begin{aligned}\Delta x(k+1) &= \tilde{A}_m \Delta x(k) + \tilde{B}_m \Delta u(k) \\ \Delta y(k) &= \tilde{C}_m \Delta x(k)\end{aligned}\quad (5.4)$$

其中,

$$\tilde{A}_m = \begin{bmatrix} \alpha_m & 0 & \cdots & 0 & K_m(1-\alpha_m) \\ 0 & & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B}_m = [0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T, \quad \tilde{C}_m = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

\tilde{A}_m 为 $(d+1) \times (d+1)$ 为矩阵, \tilde{B}_m , \tilde{C}_m 为 $d+1$ 维向量。

将式(5.4)所示状态空间模型进一步转换成包含输出跟踪误差和状态变量的扩展非最小状态空间模型, 即

$$\tilde{z}(k+1) = \tilde{A} \tilde{z}(k) + \tilde{B} \Delta u(k) + \tilde{C} \Delta r(k+1) \quad (5.5)$$

其中,

$$\tilde{z}(k+1) = \begin{bmatrix} e(k+1) \\ \Delta x(k+1) \end{bmatrix}, \quad \tilde{z}(k) = \begin{bmatrix} e(k) \\ \Delta x(k) \end{bmatrix}$$

$$e(k) = y(k) - r(k)$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{C}_m \tilde{A}_m \\ \mathbf{0} & \tilde{A}_m \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_m \tilde{B}_m \\ \tilde{B}_m \end{bmatrix}, \tilde{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{0}$ 为 $(d+2) \times 1$ 维的零矩阵, \tilde{A} 为 $(d+2) \times (d+2)$ 维矩阵, \tilde{B}, \tilde{C} 均为 $(d+2) \times 1$ 维矩阵。

5.2.2 整数阶扩展非最小状态空间模型预测控制器的设计

由式(5.5)可以得到未来 $k+i$ 时刻模型输出的向量形式, 整理得到,

$$\tilde{Z} = \tilde{G} \tilde{z}(k) + \tilde{S} \Delta U + \tilde{\Psi} \Delta R \quad (5.6)$$

其中,

$$Z = \begin{bmatrix} z(k+1) \\ z(k+2) \\ \vdots \\ z(k+P) \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{A}^P \end{bmatrix}$$

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{B} & & & O \\ \tilde{A}\tilde{B} & \tilde{B} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tilde{A}^{P-1}\tilde{B} & \tilde{A}^{P-2}\tilde{B} & \cdots & \tilde{A}^{P-M}\tilde{B} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{C} & & & O \\ \tilde{A}\tilde{C} & \tilde{C} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \tilde{A}^{P-1}\tilde{C} & \tilde{A}^{P-2}\tilde{C} & \cdots & \tilde{C} \end{bmatrix}$$

$$\Delta R = [\Delta r(k+1) \quad \Delta r(k+2) \quad \cdots \quad \Delta r(k+P)]^T$$

$$r(k+i) = \lambda^i y(k) + (1-\lambda^i)c(k)$$

基于滚动优化的思想，取目标函数，

$$J = \tilde{Z}^T Q \tilde{Z} + \Delta U^T R \Delta U \quad (5.7)$$

其中， $Q = \text{block diag}(Q_1, Q_2, \dots, Q_P)$ ， $R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_M)$ ， $r(k)$ 为参考轨迹，

λ 为参考轨迹柔化因子， $c(k)$ 为 k 时刻的设定值， $Q_j = \text{diag}(q_e, q_{j1}, 0, \dots, 0)$ 。

求 $\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = 0$ ，得到控制量，

$$\Delta U = -(\tilde{S}^T Q \tilde{S} + R) \tilde{S}^T Q (\tilde{G} \tilde{z}(k) + \tilde{\Psi} \Delta R) \quad (5.8)$$

$$u(k) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \Delta U + u(k-1) \quad (5.9)$$

5.3 分数阶扩展非最小状态空间模型预测控制方法

5.3.1 分数阶模型及其处理

考虑如下分数阶系统：

$$G(s) = \frac{K}{Ts^\alpha + 1} e^{-\tau s} \quad (5.10)$$

其中， s 为拉普拉斯变换算子， τ 为模型的滞后时间， α 为分数阶阶次，为任意实数， K 为分数阶模型比例系统， T 为分数阶模型时间常数。

结合 GL 微积分定义，选取离散计算步长为采样时间 T_s ，考虑到分数阶系统具有短时记忆性，离散近似分析所取的记忆长度为 L_s ，为了将预测控制的思想应用于分数阶系统，分数阶离散过程模型可以写为如下形式，

$$y(k) + \mu \sum_{l=1}^{L_s} \omega_l^{(\alpha)} y(k-l) = H u(k-d-1) \quad (5.11)$$

其中，

$$\mu = \frac{T}{T_s^\alpha} \left(1 + \frac{T}{T_s^\alpha}\right)^{-1}, \quad H = K \left(1 + \frac{T}{T_s^\alpha}\right)^{-1}$$

$$\omega_0^{(\alpha)} = 1, \omega_l^{(\alpha)} = (1 - \frac{\alpha+1}{l})\omega_{l-1}^{(\alpha)}, l=1, 2, \dots, L_s$$

对式(5.11)中的模型取一阶向后差分,

$$\Delta y(k) = -F_1 \Delta y(k-1) - F_2 \Delta y(k-2) - \dots - F_{L_s} \Delta y(k-L_s) + H \Delta u(k-1-d) \quad (5.12)$$

其中,

$$F_l = \mu \omega_l^{(\alpha)}$$

F_l ($l=1, 2, \dots, L_s$), H 均为离散近似后得到的系数, 实际过程的时滞 $d = \tau / T_s$, $y(k)$ 为 k 时刻的实际过程对象的模型输出, $u(k-d-1)$ 为实际过程对象在 $k-d-1$ 时刻的输入值。

选取合适的状态变量, 将 $u(k)$ 作为控制输入量,

$$\Delta x_m(k) = [\Delta y(k), \Delta y(k-1), \dots, \Delta y(k-L_s+1), \Delta u(k-1), \dots, \Delta u(k-d)]^T \quad (5.13)$$

结合式(5.12)中的离散模型, 得到被控对象的状态空间模型, 形式如下,

$$\begin{aligned} \Delta x_m(k+1) &= A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k) \\ \Delta y(k+1) &= C_m \Delta x_m(k+1) \end{aligned} \quad (5.14)$$

其中, $\Delta x_m(k)$ 的维数为 $(L_s + d) \times 1$

$$A_m = \begin{bmatrix} -F_1 & -F_2 & \dots & -F_{L_s-1} & -F_{L_s} & 0 & \dots & 0 & H \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & & \ddots & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_m = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

$$C_m = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

将式(5.14)中得到的状态空间模型转换成包含状态变量和输出跟踪误差的扩展非最小状态空间模型, 形式如下,

$$z(k+1) = Az(k) + B\Delta u(k) + C\Delta r(k+1) \quad (5.15)$$

其中,

$$\begin{aligned} z(k+1) &= \begin{bmatrix} e(k+1) \\ \Delta x_m(k+1) \end{bmatrix}, \quad z(k) = \begin{bmatrix} e(k) \\ \Delta x_m(k) \end{bmatrix} \\ e(k) &= y(k) - r(k) \\ e(k+1) &= e(k) + C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) - \Delta r(k+1) \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & C_m A_m \\ \mathbf{0} & A_m \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} C_m B_m \\ B_m \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$r(k)$ 为 k 时刻的跟踪设定值, $e(k)$ 为 k 时刻的输出误差, $\mathbf{0}$ 为 $(L_s + d) \times 1$ 维的零矩阵, A 为 $(L_s + d + 1) \times (L_s + d + 1)$ 维矩阵, B, C 均为 $(L_s + d + 1) \times 1$ 维矩阵。

5.3.2 分数阶扩展非最小状态空间模型预测控制器的设计

由式(5.15)可以得到未来 $k+i$ 时刻模型输出的向量形式, 整理得到,

$$Z = Gz(k) + S\Delta U + \Psi\Delta R \quad (5.16)$$

其中,

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} z(k+1) \\ z(k+2) \\ \vdots \\ z(k+P) \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^P \end{bmatrix} \\ S &= \begin{bmatrix} B & & & O \\ AB & B & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A^{P-1}B & A^{P-2}B & \cdots & A^{P-M}B \end{bmatrix}, \quad \Psi = \begin{bmatrix} C & & & O \\ AC & C & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A^{P-1}C & A^{P-2}C & \cdots & C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta U = [\Delta u(k) \quad \Delta u(k+1) \quad \cdots \quad \Delta u(k+M-1)]^T$$

$$\Delta R = [\Delta r(k+1) \quad \Delta r(k+2) \quad \cdots \quad \Delta r(k+P)]^T$$

$$r(k+i) = \lambda^i y(k) + (1-\lambda^i)c(k)$$

$c(k)$ 为 k 时刻的设定值, λ 为参考轨迹柔化因子, P 为预测时域, M 为控制时域。

考虑如下目标函数:

$$\begin{aligned} J &= \gamma_1 I_{T_s}^{PT_s} z(t)^T z(t) + \gamma_2 I_{T_s}^{MT_s} \Delta u(t-1)^2 \\ &= \int_{T_s}^{PT_s} D^{1-\gamma_1} z(t)^T z(t) dt + \int_{T_s}^{MT_s} D^{1-\gamma_2} \Delta u(t-1)^2 dt \end{aligned} \quad (5.17)$$

依据 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义，对式(5.17)中的目标函数在采样时间 T_s 进行离散化，并考虑加入分数阶模型跟踪误差和控制增量加权系数，得到，

$$J = Z^T \Lambda(\gamma_1, T_s) Z + \Delta U^T \Lambda(\gamma_2, T_s) \Delta U \quad (5.18)$$

其中，

$$\Lambda(\gamma_1, T_s) = \text{block diag} \left[T_s^{\gamma_1} (w_{P-1} Q_1 I_{(L_s+d+1)}, w_{P-2} Q_2 I_{(L_s+d+1)}, \dots, w_1 Q_{P-1} I_{(L_s+d+1)}, w_0 Q_P I_{(L_s+d+1)}) \right]$$

$$\Lambda(\gamma_2, T_s) = T_s^{\gamma_2} \text{diag}(r_1 w_{M-1}, r_2 w_{M-2}, \dots, r_{M-1} w_1, r_M w_0)$$

$$w_q = \omega_q^{(-\gamma_\varepsilon)} - \omega_{q-(X-1)}^{(-\gamma_\varepsilon)}$$

$$\omega_0^{(-\gamma_\varepsilon)} = 1, \quad \forall q > 0 \text{ 时}, \quad \omega_q^{(-\gamma_\varepsilon)} = (1 - \frac{1-\gamma_\varepsilon}{q}) \omega_{q-1}^{(-\gamma_\varepsilon)}, \quad \text{对 } q < 0, \quad \omega_q^{(-\gamma_\varepsilon)} = 0,$$

$\varepsilon=1$ 时, $X=P$, $\varepsilon=2$ 时, $X=M$, $I_{(L_s+d+1)}$ 为 L_s+d+1 维单位矩阵,

$$Q_j = \text{diag}(q_e, q_{j1}, q_{j2}, \dots, q_{jL_s}, 0, \dots, 0)。$$

依据式(5.18)求解目标函数的最小值，得到最优控制律，

$$\Delta U = -(S^T \Lambda(\gamma_1, T_s) S + \Lambda(\gamma_2, T_s))^{-1} S^T \Lambda(\gamma_1, T_s) (Gz(k) + \Psi \Delta R) \quad (5.19)$$

采用滚动的思想，求得当前时刻的控制量，有

$$u(k) = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \Delta U + u(k-1) \quad (5.20)$$

5.4 仿真实例

5.4.1 加热炉工艺流程介绍

SXF-4-10 高温炉温度控制系统的工艺流程图如图 5.1 所示，通过控制 SSR-380D40 固态继电器的通断实现高温炉的温度控制，炉温的期望值用计算机预先设置。

当 SSR-380D40 固态继电器的右端输入的是+5V 的电压时，固态继电器的左侧导通，此时高温炉处于加热状态，炉子的加热回路为：220V 交流电的正极→分压电阻→电炉丝→固态继电器左侧的正极→固态继电器左侧的负极→220V 交流电的负极。

当 SSR-380D40 固态继电器的右端输入的是 0V 的电压时，固态继电器的左侧断开，此时加热回路被断开，电阻丝不加热，高温炉处于散热状态。

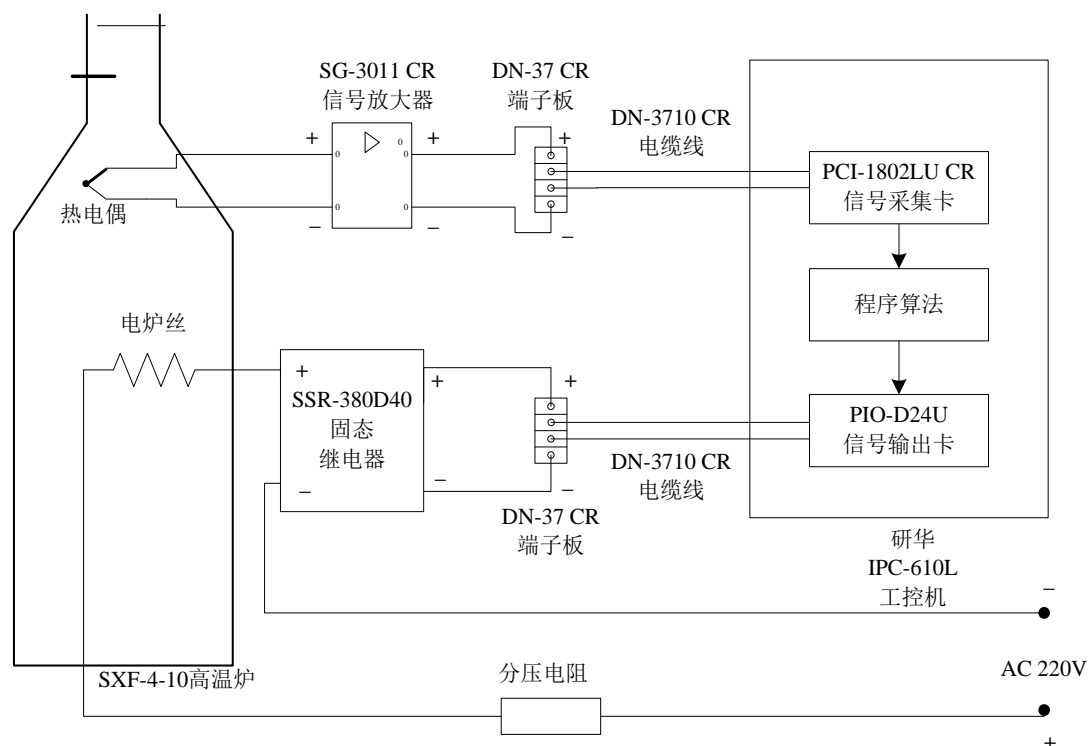


图 5.1 SXF-4-10 高温炉温度控制系统

SXF-4-10 高温炉内的实际温度由 K 分度热电偶检测，并转换成对应的电压信号。由于此电压信号太小，不能被 PCI-1802LU CR 信号采集卡识别，因此要通过 SG-3011 CR 信号放大器将该电压信号放大，再将其通过 DN-37CR 端子板经 DN-3710 CR 电缆线送入到工控机卡槽中的 PCI-1802LU CR 信号采集卡中。PCI-1802LU CR 信号采集卡将采集到的模拟电压信号送入到计算机中，并通过计算机将其转换成对应的温度值。当计算机向 PIO-D24U 信号输出卡输入数字信号 0x01 中时，该信号输出卡会输出一个 +5V 的电压并通过 DN-3710 CR 电缆线和 DN-37CR 端子板将此电压施加到 SSR-380D40 固态继电器，此时 SSR-380D40 固态继电器的左侧导通，SFX 4-10 高温炉处于加热状态。当计算机向 PIO-D24U 输出卡送入数字信号 0x00 中时，该信号输出卡会输出一个 0V 的电压并通过 DN-3710 CR 电缆线和 DN-37CR 端子板将该电压施加到 SSR-380D40 固态继电器上，此时 SSR-380D40 固态继电器的左侧处于断开状态，SFX-4-10 高温炉加热回路断开，处于散热状态。

计算机将温度的偏差信号作为控制器输入，控制周期和采样周期均设为 T_s ，在 $k-1$ 个控制周期，计算并输出一个占空比 D ，在第 k 个控制周期中，计算机向 PIO-D24U CR 信号输出卡中输入 $D \cdot T_s$ 的数字信号 0x01，高温炉加热 $D \cdot T_s$ ，剩余的时间里计算机向 PIO-D24U CR 信号输出卡输入 0x00，SFX 4-10 处于散热状态。通过读取高温炉中 k 时刻的温度和设定值进行比较，计算并输出 k 时刻计算机需要输出的占空比，施加到 SSR-380D40 固态继电器上并依次循环。

5.4.2 分数阶控制方法与整数阶控制方法的比较

由加热炉的实时温度数据得到分数阶模型和普通一阶加纯滞后模型，通过控制占空比来调节一个控制周期内的加热时间，从而实现加热炉的温度控制。

我们给加热炉加一个阶跃信号，可以得到加热炉的温度输出值。通过采集得到的加热炉温度输出数据建立加热炉温度对象的模型。这里我们运用阶跃响应方法得到一阶加纯滞后模型：

$$G(s) = \frac{0.57}{500s+1} e^{-240s} \quad (5.21)$$

建立加热炉温度对象的分数阶模型为：

$$G(s) = \frac{0.585}{300s^{0.92}+1} e^{-240s} \quad (5.22)$$

将采集得到的温度数据与建立的两种模型输出值进行对比，求得方差如下表

5.1 所示：

表 5.1 两种模型输出值的方差对比结果

模型 $G(s)$	方差 SE
一阶加纯滞后模型	1.7592
分数阶模型	1.4856

采集得到的加热炉温度数据，将其与模型的阶跃响应输出作对比，其阶跃响应曲线如图 5.2 所示。

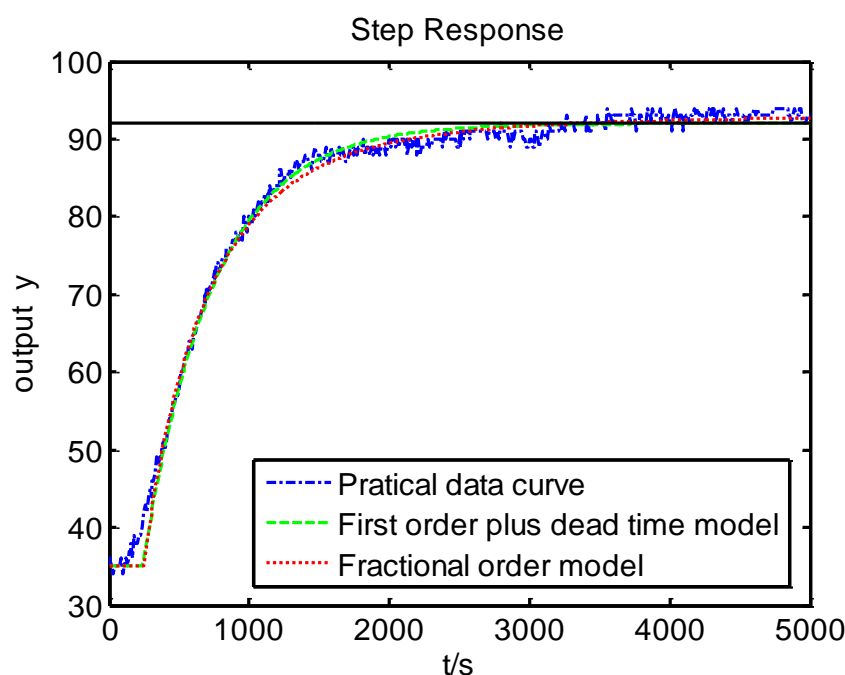


图 5.2 实际数据与模型阶跃响应曲线对比

从图 5.2 可以知道, 系统模型的开环阶跃响应输出在 $3200s$ 时接近稳态值, 我们可以选取分数阶模型离散近似所取的记忆长度 $L_s = 40$, 采样时间 $T_s = 80$, 则式(5.11)中的分数阶模型离散化的系数为,

$$F = \{F_1, F_2, \dots, F_{L_s}\} = \begin{Bmatrix} -955/1233 & -191/6165 & -47/4214 & -71/12242 & -107/29950 \\ -59/24286 & -69/39137 & -25/18658 & -52/49333 & -27/31702 & -47/66854 \\ -11/18627 & -5/9934 & -12/27631 & -40/105623 & -26/78017 & -10/33827 \\ -48/181757 & -19/80033 & -12/55915 & -19/97441 & -13/73045 & -8/49045 \\ -7/46646 & -16/115489 & -22/171459 & -13/109073 & -12/108095 & -12/115759 \\ -11/113368 & -14/153813 & -12/140255 & -21/260609 & -13/170985 & -11/153077 \\ -11/161701 & -3/46514 & -4/65319 & -10/171753 & -11/198454 \end{Bmatrix}$$

$$H = 90/973 \quad (5.23)$$

离散化式(5.21)中的模型, 得到整数阶模型的离散形式,

$$G(z) = \frac{0.08428}{z^4 - 0.8521z^3} \quad (5.24)$$

这里整数阶模型预测控制器是以式(5.24)所示的离散模型为标称模型, 分数阶模型预测控制器以将式(5.23)的系数代入式(5.11)所示的离散模型为标称模型, 控制器的输入控制量均作用于实际的分数阶离散系统模型。

扩展非最小状态空间分数阶模型预测控制方法(ENMSSFMPC)和基于整数阶模型的扩展非最小状态空间模型预测控制方法(ENMSSMPC)在相同条件下进行仿真效果对比。在 $k=0$ 时设定值为 1; 在 $k=150$ 时, 引入振幅为 -0.2 的阶跃输出干扰。控制器参数如下表 5.2 所示:

表 5.2 ENMSSFMPC 方法和 ENMSSMPC 方法参数表

参数	ENMSSFMPC	ENMSSMPC
P	15	15
M	1	1
λ	0.6	0.6
Q_j	$diag(1, 0.08, 6, \dots, 6, 0, 0, 0)$	$diag(1, 0.08, 0, 0, 0)$
r_1	0.01	0.01
γ_1, γ_2	0.4, 1.2	\

由于实际生产过程总会存在不确定等因素的干扰, 常常会存在建立的模型与实际过程不匹配的情况, 这里采用蒙特卡洛方法获得实际过程的参数, 以此来模拟实际的过程。在模型参数 $K = 0.585, T = 300, \alpha = 0.92, \tau = 240$ 的基础上同时且随机地产生最大程度为 30% 的失配参数。三组失配情况下的实际过程参数为:

第一组实际分数阶过程对象的参数:

$$K = 0.4149, T = 258.9938, \alpha = 0.7537, \tau = 275.5371$$

第二组实际分数阶过程对象的参数:

$$K = 0.51435, T = 370.9, \alpha = 0.75392, \tau = 263.25$$

第三组实际分数阶过程对象的参数:

$$K = 0.70407, T = 333, \alpha = 0.76133, \tau = 258.54$$

图 5.3~图 5.5 分别为上述三组模型失配时的系统输出响应和控制量输出对比图。从图中可以看出, ENMSSFMP 控制的分数阶系统在抵抗输出干扰时输出响应波动较小, 上升较为平缓, 产生的超调量和振荡都比较小, ENMSSMPC 控制系统虽然响应速度较快, 但是超调量较大, 且振荡比较剧烈。ENMSSFMP 控制系统以牺牲响应速度为代价, 获取了较为稳定、抗干扰性能更好的控制效果, 整体控制性能相对于 ENMSSMPC 控制系统有所提高。从仿真对比图可以知道, ENMSSFMP 控制系统在实际过程不要求太快的响应速度的情况下, 长时间运行时能获得稳定输出, 且对干扰的抑制作用更明显。

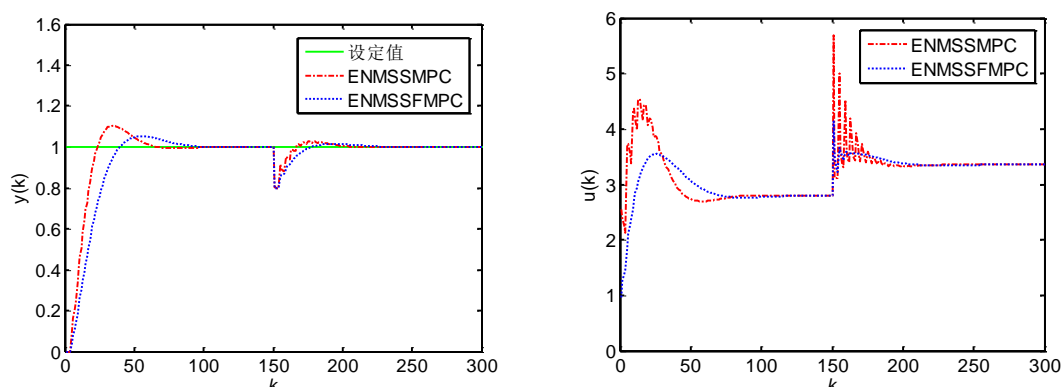


图 5.3 模型失配时系统输出响应和控制量输出比较(第一组)

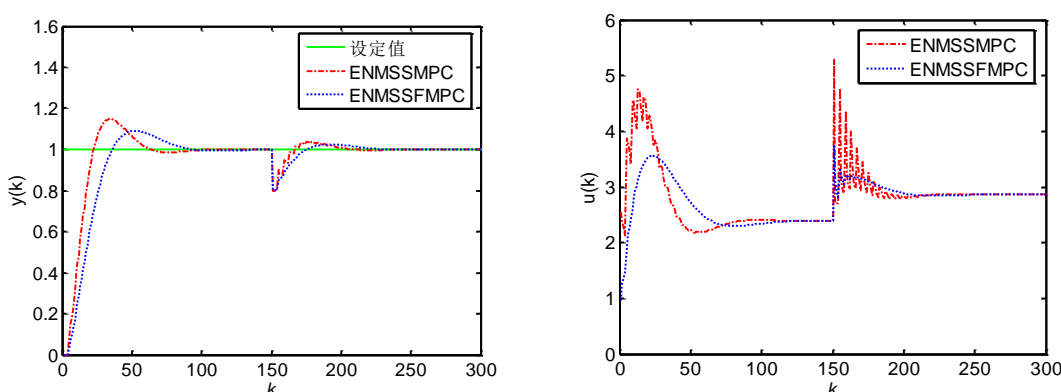


图 5.4 模型失配时系统输出响应和控制量输出比较(第二组)

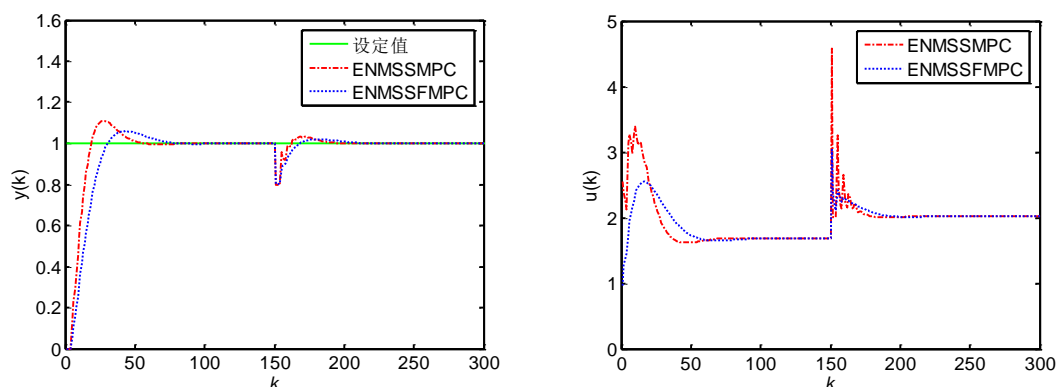


图 5.5 模型失配时系统输出响应和控制量输出比较(第三组)

实际过程中,往往还需要考虑测量噪声对控制器性能的影响。当控制系统的输出稳定在设定值 0 时,加入标准差为 0.02 的高斯白噪声随机序列在实际失配模型的输出中。图 5.6~图 5.8 显示了三组失配参数下的输出响应和控制量输出对比曲线,我们可以看出,在测量噪声下,ENMSSF MPC 控制的分数阶系统的在标准差和振荡上均比 ENMSSMPC 方法小,特别是控制量作用效果的比较更明显。表 5.3 中的标准差可以很清楚地看到这点。

表 5.3 三组失配参数下系统输出的标准差

标准差		
失配参数组	ENMSSF MPC	ENMSSMPC
第一组	0.02173	0.025858
第二组	0.020155	0.024147
第三组	0.020712	0.025911

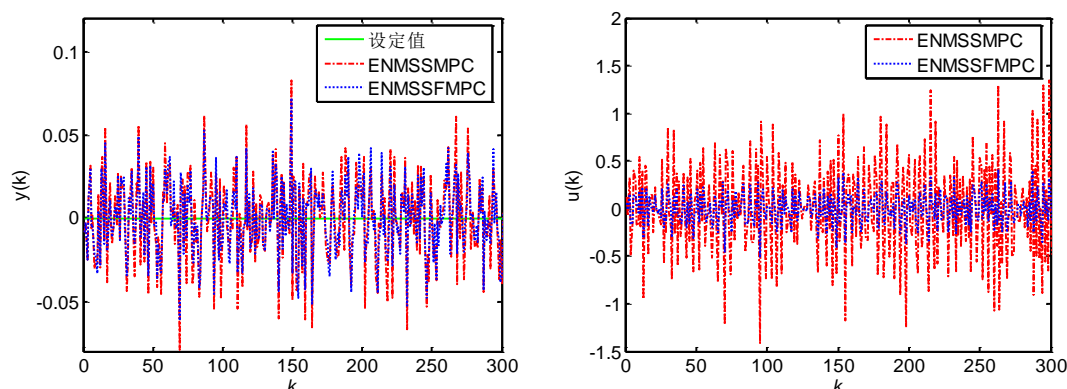


图 5.6 第一组失配参数下的输出响应和控制量输出对比曲线

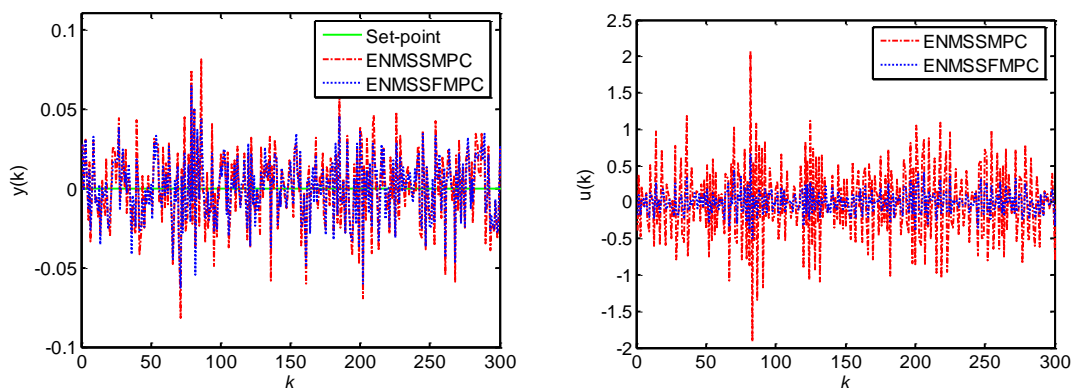


图 5.7 第二组失配参数下的输出响应和控制量输出对比曲线

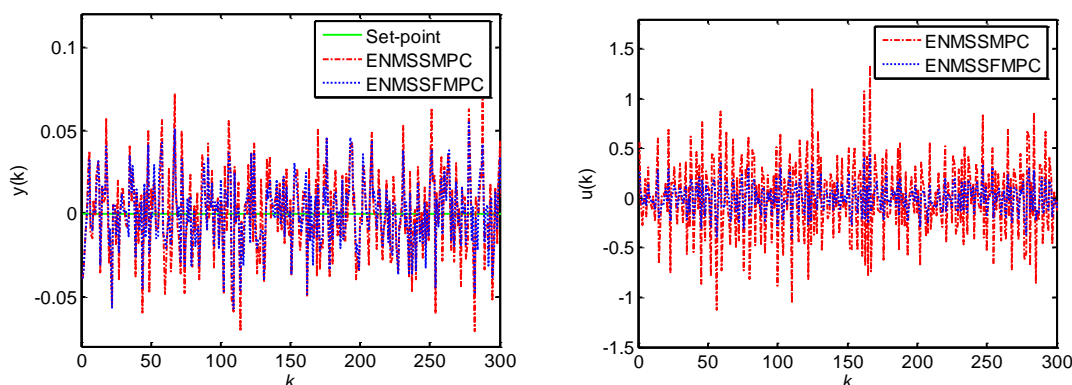


图 5.8 第三组失配参数下的输出响应和控制量输出对比曲线

5.5 本章小结

本章提出了一种扩展非最小状态空间分数阶模型预测控制的加热炉温度控制方法，该方法将整数阶模型预测控制方法扩展到了分数阶模型预测控制方法。首先利用 GL 分数阶微积分定义得到系统的输入输出模型，选取合适的状态变量得到状态空间模型，并进一步建立了被控对象的扩展非最小状态空间模型，将分数阶积分引入控制器增加了控制器参数调节的自由度，有效地弥补了整数阶模型预测控制针对分数阶系统的不足之处，提高了系统的整体控制性能，同时促进了模型预测控制方法在分数阶系统中的运用。在加热炉温度控制系统的仿真实验中，ENMSSF MPC 控制器用来控制分数阶系统的仿真结果验证了该控制器的有效性。

第 6 章 总结与展望

目前,分数阶理论主要还是运用在理论研究方面,将分数阶控制系统应用于控制领域的研究还比较少,但它表现的良好特性将促使其在控制领域占得一席之地。分数阶系统的建模和控制是现在控制领域应用研究的一大热点,有效方法的出现将会引起许多学者的关注。

现阶段是分数阶理论研究正在向实际应用转变的阶段,本文从分数阶微积分的定义和应用出发,将分数阶微积分理论与预测控制相结合,以分数阶系统模型来描述实际过程,并对分数阶系统进行控制。为了进一步扩展预测控制方法在分数阶领域的运用,预测控制将会与分数阶微积分理论相结合,也将被广泛地应用于更多的实际工业过程中。

本篇论文的主要工作在于:

利用分数阶微积分理论,讨论了分数阶积分的性质,并将其与整数阶积分性质或定理进行了对比和说明,然后对分数阶积分进行了数值近似计算,利用数值估计方法将分数阶积分算子推广到控制系统的目标函数中。

针对单输入单输出分数阶系统,提出了一种分数阶预测函数控制器的设计方法,利用 Oustaloup 近似方法将分数阶系统近似为整数阶系统,然后利用 Grünwald-Letnikov 分数阶微积分定义将整数阶预测函数控制的目标函数扩展到分数阶预测函数控制。该方法可以很好地运用于分数阶模型描述的实际过程对象,减少了整数阶 PFC 方法控制高阶系统模型需要进行降阶处理的步骤,同时增加了调节控制器参数的自由度,获得了良好的控制性能。

基于模型预测控制的思想,提出了一种扩展非最小状态空间分数阶模型预测控制的加热炉温度控制方法,该方法将整数阶模型预测控制方法扩展到分数阶模型预测控制方法中,通过建立被控过程对象的扩展状态空间模型,将分数阶积分算子引入控制器,增加了控制器调节的自由度,有效地弥补了整数阶预测函数控制针对分数阶系统的不足之处,提高了系统的控制性能,同时促进了模型预测控制方法在分数阶系统中的运用。

受本人研究水平的限制,分数阶系统研究内容还有很多方面有待进一步完善:

(1) 分数阶系统的建模

系统模型是用来描述实际过程对象的特性的。针对实际过程系统,如何建立有效且实用的分数阶模型仍是一个有待研究的问题。分数阶建模是将分数阶理论

应用于实际过程控制的前提，也是我们对分数阶系统进行预测控制的必要条件，研究出一种如何有效的建立分数阶模型的方法是很有必要的。

（2）分数阶系统延时

由于实际过程往往具有一定的延时，如何建立和处理分数阶时滞系统也是一个有必要进行研究的问题。

（3）参数选取

一个好的控制器参数调节方法可以减少实际生产过程的操作难度，而且可以使系统处于良好的运行状态，因此如何调节控制器的参数一直是控制应用领域的研究热点。所设计的控制器的参数选择会影响控制器的控制性能，如何选取最优的控制器参数仍然需要进行深入研究。

（4）分数阶系统稳定性分析

关于控制系统的稳定性的研究也是控制理论研究的方向，而一般的稳定性分析方法是针对传统的整数阶系统，如何将整数阶经典控制领域的稳定性判据推广到分数阶，如何对分数阶系统的稳定性进行分析，是至关重要的问题。

致 谢

当华美的枫叶飘落下来，当凛冽的寒风迎面吹来，当冬日的雨雪凝结成冰，转眼临近毕业。在论文完成之际，我的硕士研究生生活也即将结束。回头看看这三年，感慨颇深。在此要向给予我帮助的老师 and 同学表达我最衷心的感谢。

首先，特别感谢的人是我的导师张日东老师。正是在张老师的悉心指导和殷切关怀下，我才能如此顺利的完成毕业论文。每当遇到难关，都是老师第一时间给我指导，给我详细讲解，给我指明正确的研究方向。犹记那些无眠的夜晚，张老师依旧不辞劳苦给我指出论文的不足，教我如何修改论文。张老师对我的细心指导和孜孜不倦的教诲，不仅教会了我学术理论知识，也教会了我很多为人处世的道理。张老师一丝不苟的治学态度和严谨的学术作风，使我留下了深刻的印象，两年多以来的每一次进步无不倾注着老师的心血，每一次成长都凝聚着老师的细心栽培，张老师的教诲我将永远铭记于心，再次对导师致以最诚挚的感谢与敬意。

同时，还要感谢邹洪波老师的悉心指导，是他不厌其烦地指导着我们进行加热炉实验的整个过程。从实验设备的选型、搭建和操作等各个环节，都离不开邹老师的耐心教导和帮助，是邹老师指导着我们如何将理论研究运用于实际过程，在这里向您道一声感谢。

其次，感谢杭州电子科技大学和自动化学院给我提供了良好的学习环境和设备。也要感谢师兄和师弟们的帮助，你们给我提供了很多帮助，尤其师兄吴胜和李海生，一直不厌其烦地为我解答专业知识上的难点。同时也要感谢室友和实验室同窗好友，与你们在一起的时光很欢乐。

最后，感谢的是我的父母，是你们的支持，才让我走到今天。你们辛勤劳动，付出汗水，只为给我创造一个好的学习条件。你们不辞辛劳，尝尽冷暖，只为给我一个家，一个温暖的港湾。是你们一如既往的鼓励，才让我有勇气面对挫折和困难。再次感谢你们的支持、理解和关怀。

杭州电子科技大学两年半研究生求学的时光，是我过得最快乐、最充实的日子。在这里我有幸向很多德艺双馨的老师学习，也结识了很多青春可爱的同学和朋友。这些美好的日子我将永生难忘。最诚挚的谢意献给你们！

2015 年 12 月于杭州

参考文献

- [1] West B J, Bologna M, Grigolini. Physics of fractal operators[M]. New York, Spring-Verlag, 2003.
- [2] Koh C G, Kelly J M. Application of fractional-order derivatives seismic analysis of based-isolated models[J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1990, 19(2): 229-241.
- [3] 薛定宇, 赵春娜. 分数阶系统的分数阶 PID 控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 771-776.
- [4] 席裕庚. 预测控制[M]. 国防工业出版社, 1993.
- [5] Richalet J, Rault A, Testud J L, et al. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes[J]. Automatica, 1978, 14(5): 413-428.
- [6] Clarke D W, Mohtadi C, Tuffs P S. Generalized predictive control—Part I. The basic algorithm[J]. Automatica, 1987, 23(2): 137-148.
- [7] 李书臣, 徐心和, 李平. 预测控制最新算法综述[J]. 系统仿真学报, 2004, 16(6): 1314-1319.
- [8] Hung N T, Ismail I, Saad N B, et al. Design of multi model predictive control for nonlinear process plant[C]. 5th International Conference on Intelligent and Advanced Systems (ICIAS), 2014: 1-6.
- [9] 陈博, 钱锋, 刘漫丹. 一种基于 BP 网络的预测控制算法及其应用[J]. 华东理工大学学报, 2003, 29(4): 400-404.
- [10] 焦巍, 刘光斌. 非线性模型预测控制的智能算法综述[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(24): 6581-6586.
- [11] Zhong W, Pi D, Sun Y. Study on SVM based model predictive control[C]. Fifth World Congress on Intelligent Control and Automation, 2004, 1: 607-10A.
- [12] Suykens J A K, Vandewalle J. Least squares support vector machine classifiers[J]. Neural processing letters, 1999, 9(3): 293-300.
- [13] 张日东, 王树青, 李平. 基于支持向量机的非线性系统预测控制[J]. 自动化学报, 2007, 33(10): 1066-1073.
- [14] 张日东, 王树青. 基于支持向量机的一类非线性系统预测控制[J]. 控制与决策, 2007, 22(10): 1103-1107.
- [15] Li Z. Support Vector machine model based predictive PID control system for cement rotary

- kiln[C]. Chinese Control and Decision Conference (CCDC), 2010: 3117-3121.
- [16] 杨建军, 刘民, 吴澄. 基于遗传算法的非线性模型预测控制算法[J]. 控制与决策, 2003, 18(2): 141-149.
- [17] Liu H X, Li S H. Speed control for PMSM servo system using predictive functional control and extended state observer[J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2012, 59 (2): 1171-1183.
- [18] Zhang R D, Lu R Q, Xue A K, Gao F R. Predictive functional control for linear systems under partial actuator faults and application on an injection molding batch process[J]. Industrial & Engineering Chemistry Research. 2013, 53(2): 723-731.
- [19] Zhang R D, Cao Z X, Bo C M, Li P, Gao F R. New PID controller design using extended non-minimal state space model based predictive functional control structure[J]. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2014, 53(8): 3283-3292.
- [20] Shi H, Su C, Cao J, Ping L, Liang J, Zhong G. Nonlinear adaptive predictive functional control based on the Takagi–Sugeno model for average cracking outlet temperature of the ethylene cracking furnace[J]. Industrial & Engineering Chemistry Research, 2015, 54(6): 1849-1860.
- [21] Bouhenchir H, Cabassud M, Le Lann M V. Predictive functional control for the temperature control of a chemical batch reactor[J]. Computers and Chemical Engineering, 2006, 30(6): 1141-1154.
- [22] Dovžan D, Škrjanc I. Predictive functional control based on an adaptive fuzzy model of a hybrid semi-batch reactor[J]. Control Engineering Practice, 2010, 18(8): 979-989.
- [23] Zhang R D, Wang S Q. Predictive functional controller with a similar proportional integral optimal regulator structure: Comparison with traditional predictive functional controller and application to heavy oil coking equipment[J]. Chinese Journal of Chemical Engineering, 2007, 15(2): 247-253.
- [24] Zhang R D, Zou H B, Xue A K, Gao F R. GA based predictive functional control for batch processes under actuator faults[J]. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 2014, 137: 67–73.
- [25] Gautam A, Soh Y C. Stabilizing model predictive control using parameter-dependent dynamic policy for nonlinear systems modeled with neural networks[J]. Journal of Process Control, 2015, 36: 11-21.
- [26] Dombrovskii V, Obyedko T. Model predictive control for constrained systems with serially correlated stochastic parameters and portfolio optimization[J]. Automatica, 2015, 54: 325-331.

- [27] Zou Y, Lam J, Niu Y, et al. Constrained predictive control synthesis for quantized systems with Markovian data loss[J]. Automatica, 2015, 55: 217-225.
- [28] Méndez J A, Marrero A, Reboso J A, et al. Adaptive fuzzy predictive controller for anesthesia delivery[J]. Control Engineering Practice, 2016, 46: 1-9.
- [29] Mizumoto I, Fujimoto Y, Ikejiri M. Adaptive output predictor based adaptive predictive control with ASPR constraint[J]. Automatica, 2015, 57: 152-163.
- [30] Francisco M, Skogestad S, Vega P. Model predictive control for the self-optimized operation in wastewater treatment plants[J]. Computers and Chemical Engineering, 2015, 82: 259-272.
- [31] Podlubny I. Fractional differential equations [M]. Academic press, 1998.
- [32] 薛定宇, 陈阳泉. 高等应用数学问题的 MATLAB 求解[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [33] Malti R, Victor S, Oustaloup A. Advances in system identification using fractional models[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2008, 3(2): 764-786.
- [34] Gabano J D, Poinot T. Fractional modelling and identification of thermal systems[J]. Signal Processing, 2011, 91: 531-541.
- [35] Stanislawski R, Latawiec K J, Galek M, Lukaniszyn M. Modeling and identification of a fractional-order discrete-time SISO Laguerre-Wiener system[C]. 19th International Conference On Methods and Models in Automation and Robotics, 2014: 165-168.
- [36] Djouambi A, Voda A, Charef A. Recursive prediction error identification of fractional order models [J]. Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation, 2012, 17(6): 2517-2524.
- [37] 贾代平, 范洪达. 基于分数阶差分模型的记忆性扩展方法[J]. 通信学报, 2006, 27(9): 66-70.
- [38] 李元凯, 赵世武. 分数阶离散控制系统的建模与离散控制器[J]. 2005.
- [39] 王振滨, 曹广益, 朱新坚. 分数阶系统状态空间描述的数值算法[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(1): 101-105.
- [40] 杨洪勇, 郭雷, 张玉玲, 等. 复杂分数阶多自主体系统的运动一致性[J]. 自动化学报, 2014, 40(3): 489-496.
- [41] 赵春娜, 薛定宇. 一种分数阶线性系统求解方法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2007, 28(1): 10-13.
- [42] 刘禄, 潘峰, 薛定宇. 一种分数阶卡尔曼滤波器[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2014, 35(8): 1069-1072.
- [43] 王振滨, 曹广益, 朱新坚. 基于状态空间模型分解的分数阶系统辨识算法[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(12): 1848-1851.

- [44] Malti R, Victor S, Oustaloup A, et al. An optimal instrumental variable method for continuous-time fractional model identification[C]. 17th IFAC World Congress. 2008.
- [45] Sierociuk D, Skovranek T, Macias M, et al. Diffusion process modeling by using fractional-order models[J]. Applied Mathematics and Computation, 2015, 257: 2-11.
- [46] Valério D, Sa da Costa J. Introduction to single-input, single-output fractional control[J]. IET Control Theory & Applications, 2011, 5(8): 1033-1057.
- [47] 高哲, 廖晓钟. 一种线性分数阶系统稳定性的频域判别准则[J]. 自动化学报, 2011, 37(11): 1387-1394.
- [48] 张艳珠. 分数阶微积分理论及其应用研究[D]. 东北大学人工智能与机器人研究所, 2008.
- [49] Dorčák L. Numerical models for the simulation of the fractional-order control systems[J]. Kosice, Slovak Republic, 1994.
- [50] Oustaloup A, Moreau X, Nouillant M. The CRONE suspension[J]. Control Engineering Practice, 1996, 4(8): 1101-1108.
- [51] Podlubny I. Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44(1): 208-214.
- [52] Yeroglu C, Tan N. Note on fractional-order proportional-integral-differential controller design[J]. IET Control Theory & Applications. 2011, 5(17): 1978-1989.
- [53] Zhang Y Z, Li J. Fractional-order PID controller tuning based on genetic algorithm[C]. International Conference on Business Management and Electronic Information, 2011, 3: 764-767.
- [54] Zheng S, Tang X, Song B. A graphical tuning method of fractional order proportional integral derivative controllers for interval fractional order plant[J]. Journal of Process Control, 2014, 24: 1691-1709.
- [55] Wang D J, Li W, Guo M L. Tuning of $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers based on sensitivity constraint[J]. Journal of Process Control, 2013, 23: 861-867.
- [56] Jin C Y, Ryu K H, Sung S W, et al. PID auto-tuning using new model reduction method and explicit PID tuning rule for a fractional order plus time delay model [J]. Journal of Process Control, 2014, 24(1): 113-128.
- [57] Shi B, Yuan J, Dong C. On fractional model reference adaptive control [J]. The Scientific World Journal, 2014: 1-8.
- [58] Abdolhosseini M, Bigdeli N. Predictive functional control for fractional order system[J]. International Journal of Electronics Communication and Computer Engineering, 2014, 5(1): 2278-4209.

- [59] Deng Z, Cao H, Li X, Jiang J H, Yang J, Qin Y. Generalized predictive control for fractional order dynamic model of solid oxide fuel cell output power[J]. Journal of Power Sources, 2010, 195(24): 8097-8103.
- [60] 李大字, 曹娇, 关圣涛, 等. 一种分数阶预测控制器的研究与实现[J]. 控制理论与应用, 2010, 27(5): 658-662.
- [61] 纪增浩, 李大字. 一种基于分数阶卡尔曼滤波器的模型预测控制器的设计与实现[J]. 北京化工大学学报: 自然科学版, 2014, (2): 109-113.
- [62] Romero M, de Madrid A P, Mañoso C, Milanés V, Vinagre B M. Fractional-order generalized predictive control: Application for low-speed control of gasoline-propelled cars[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013, 2013.
- [63] Romero M, de Madrid A P, Mañoso C, et al. Fractional-order generalized predictive control: Formulation and some properties[C]. 11th International Conference on Control Automation Robotics and Vision, Singapore, 2010: 1495-1500.
- [64] Rhouma A, Bouzouita B, Bouani F. Model predictive control of fractional systems using numerical approximation[C]. World Symposium on Computer Applications & Research, 2014: 1-6.
- [65] Rhouma A, Bouzouita B, Bouani F. Practical application of model predictive control to fractional thermal system[C]. Second International Conference on Informatics and Applications (ICIA), 2013: 222-227.
- [66] Guo W, Yao S J. Improved PID dynamic matrix control algorithm based on time domain[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2007, 28(12): 2174-2178.
- [67] Guo W, Ni J, Li T, Deng L. Improved fractional-order PID predictive function excitation controller based on time domain[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument. 2011, 32(11): 2461-2467.
- [68] Guo W, Wang L, Zhou W. Improved fractional-order PID model algorithmic control algorithm[J]. Control Engineering of China, 2011, 5: 022-3.
- [69] 郭伟, 邓玲, 周丽. 基于模糊分数阶 PID 预测函数的参数整定及应用[C]. Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference, 2013: 26-27.
- [70] Joshi M M, Vyawahare V A. Performance analysis of model predictive control for linear fractional-order system with bounded disturbance[C]. Proceeding of International Conference on Signal Processing, Informatics, Communication and Energy Systems, Kozhikode, 2015: 1-5.
- [71] Oldham K B, Spanier J. The fractional calculus [J]. Academic Press, New York, 1974.
- [72] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional integrals and derivatives and some of their

- applications[J]. Science and Technica, 1987, 1.
- [73] Podlubny I. Fractional-order systems and fractional-order controllers[J]. Institute of Experimental Physics, Slovak Academy of Sciences, Kosice, 1994, 12.
- [74] Monje C A, Chen Y Q, Vinagre B M, et al. Fractional order systems and controls fundamentals and applications[M], Advances in Industrial Control, London: Springer Verlag London Limited, 2010.
- [75] 李元凯. 分数阶控制系统理论分析方法[D]. 重庆邮电大学, 2006.
- [76] 赖桂文, 王永初. 蒸馏塔的过程建模控制及在 Simulink 中的实现[J]. 自动化与仪表, 2008, 23(12): 25-28.
- [77] Podlubny I, Dorcak L, Kostial I. On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers[C]. Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control. 1997, 5: 4985-4990.
- [78] 薛定宇. 控制系统计算机辅助设计: MATLAB 语言与应用[M]. 清华大学出版社, 2006.

附 录

作者在读期间的学术成果及参加的科研项目

发表的学术论文

- [1] Qin Zou, Qibing Jin, Ridong Zhang. Design of fractional order predictive functional control for fractional industrial processes[J], Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, 2016, 152: 34-41. (SCI, IF=2.321)
- [2] Qin Zou, Zhixing Cao, Ridong Zhang, Furong Gao. Design of fractional order modeling based extended non-minimal state space MPC for temperature in an industrial electric heating furnace. (Control Engineering Practice,修改稿, SCI, IF=1.814)
- [3] Zou Qin, Zhang Junfeng, Lu Renquan, Zhang Ridong. Design of fractional order control using predictive functional control structure. (已投 35th Chinese Control Conference 2016)

公开或授权的专利

发明专利

- [1] 邹琴, 张日东. 一种工业加热炉系统的分数阶预测函数控制方法, 已公开, 专利号: 201510645261.3
- [2] 邹琴, 张日东. 一种分数阶模型预测控制的加热炉温度控制方法, 已公开, 专利号: 201510844115.3
- [3] 张日东, 邹琴, 邹洪波, 吴峰, 张乐. 状态空间模型的批次过程无穷时域线性二次容错控制方法, 已公开, 专利号: 201410280250.5
- [4] 张日东, 邹琴, 吴峰, 邹洪波, 张乐. 基于遗传算法优化的批次过程的预测函数控制方法, 已公开, 专利号: 201410281507.9
- [5] 薛安克, 邹琴, 张日东, 王俊宏, 张乐. 非最小化状态空间模型预测控制优化的温度控制方法, 已公开, 专利号: 201410490789.3
- [6] 薛安克, 邹琴, 张日东, 王建中, 刘俊. 状态空间预测函数控制优化的焦化炉膛压力控制方法, 已公开, 专利号: 201410492271.3
- [7] 张日东, 薛安克, 王建中, 陈华杰, 邹琴. 遗传算法优化的 RBF 神经网络的焦化炉温度预测方法, 已公开, 专利号: 201410489516.7

实用新型专利

- [1] 张日东, 邹琴. 一种预测函数控制电路, 专利号:201420155154.3
- [2] 张日东, 邹琴. 一种预测函数控制的预测值实现电路, 专利号:201420259778.X
- [3] 张日东, 邹琴. 一种 DMC 的初始预测值实现电路, 专利号:201420256400.4
- [4] 张日东, 邹琴. 一种 PFC 的参考轨迹实现电路, 专利号:201420256361.8

参加的科研项目

国家自然科学基金项目: 基于有限/无限时域优化的扩展非最小化状态空间模型预测研究(61273101).