

# 控二專題報告

106033274 洪品韻

## 前言

利用上課所學的 state space 觀念設計全狀態迴授的控制器與降階估測的動態補償器，透過 MATLAB 模擬並實際測試受控場加入控制器與補償器後的響應。

## 1. Plant — DC Motor 直流馬達

受控場的 Transfer function 如下，

$$\text{T.F. } G(s) = \frac{1907.7}{s(s + 20)}$$

以 state equation 與 output equation 形式改寫並確認其可控性與可觀性，改寫後的方程式如下，

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\dot{\theta}} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + Du$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = [1907.7 \quad 0] \quad D = 0$$

用 MATLAB 模擬馬達的 root locus(Fig.1)、bode plot (Fig.2)與 step response (Fig.3)，以了解受控場的各项參數與響應，其中響應模擬的輸入命令使用 90 度 (馬達位置)。

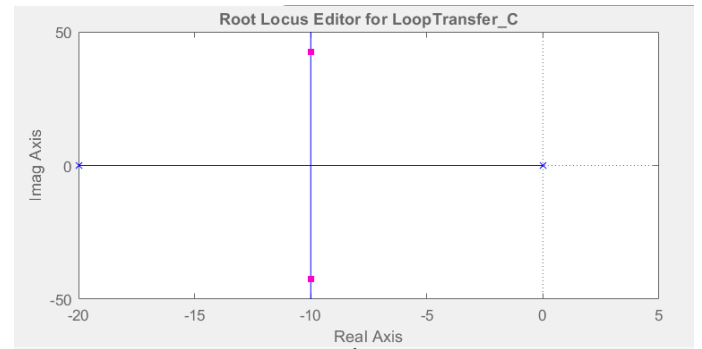


Fig.1 Root locus (Plant)

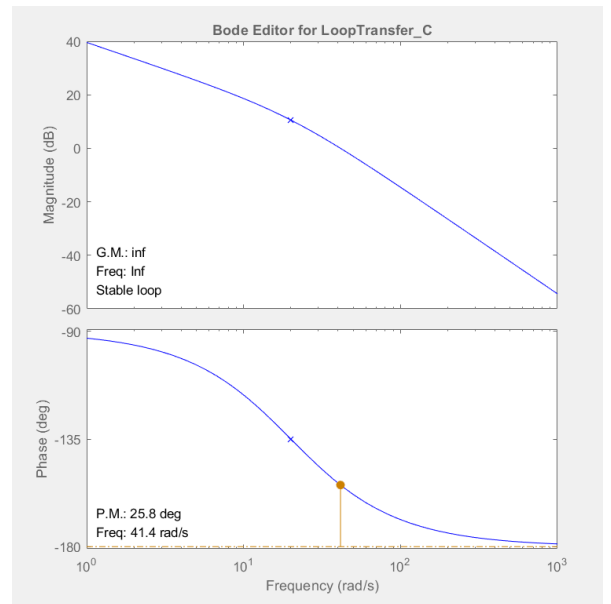


Fig.2 Bode Plot (Plant)

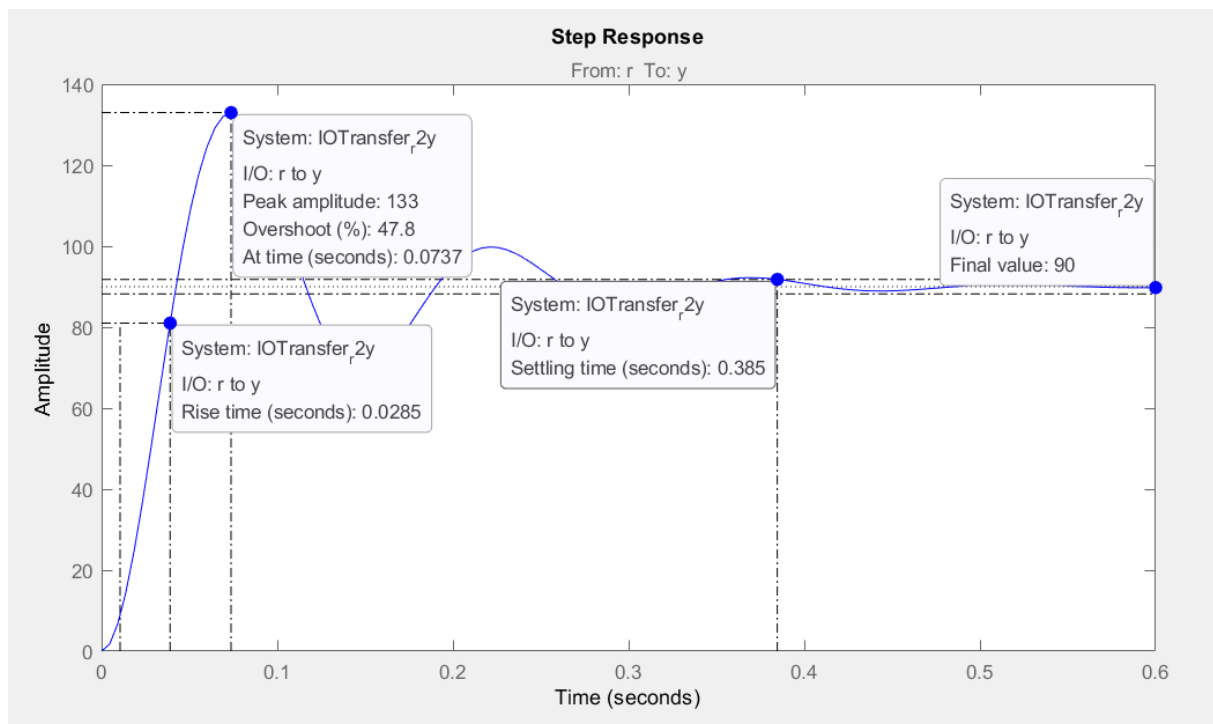


Fig.3 Step Response with command =  $90^\circ$  (Plant, 含標示)

	受控場 (模擬)
Steady state value (deg)	90
overshoot	0.478
Rise time (sec)	0.0285
PM (deg)	25.8
Crossover frequency (rad/sec)	41.4
Settling time (sec)	0.385

Tab.1 Performance with command =  $90^\circ$  (Plant)

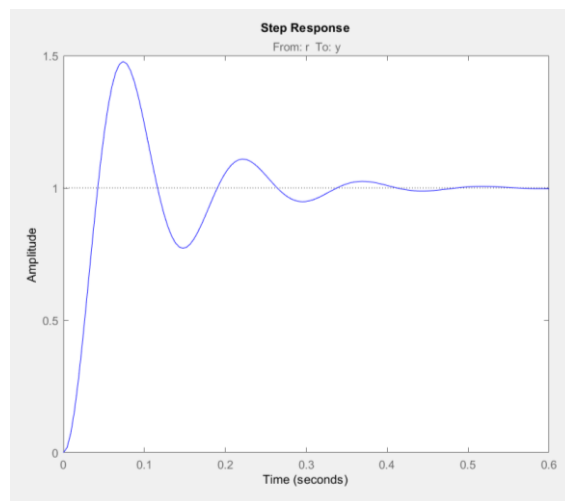


Fig.4 Step Response with command =  $90^\circ$  (Plant)

由馬達的 Transfer function 與模擬出的響應可知系統本身即有一個積分器(將馬達角轉速轉成角度輸出)，因此理論上不會有穩態誤差，但因為實際有摩擦力、重力等等的影響，所以達穩態時仍會有誤差。

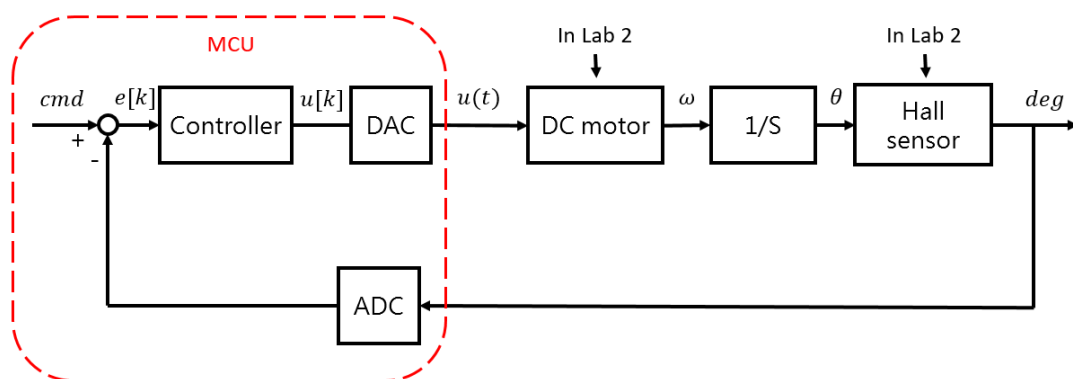


Fig.5 直流馬達位置控制的系統方塊圖

## 2. Design I — Full-state feedback controller 全狀態控制器

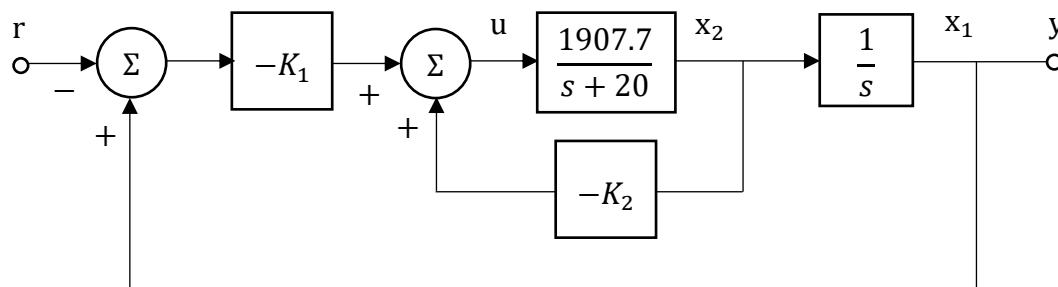
第一個設計單存使用 Full-state feedback controller 引入 reference input (command)，使用的公式如下，

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u = -Kx + (N_u + KN_x)r$$

$$N_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

設計出的方塊圖如下，



對照直流馬達位置控制的系統方塊圖，得知  $K_2 = 0$ ，得到

$$K = [K_1 \quad 0]$$

計算得到 $N_u = 0.0998$ ，因為增益值 $K_1$ 應會比 $N_u$ 大五倍以上，因此設 $N_u = 0$ ，又 $x_1 = y$ ，所得的控制量公式如下，

$$u = K_1(r - y) = K_1 e$$

利用模擬取增益值 $K_1 = 0.83$ ，得到用全狀態迴授設計所得的控制器，如下，

$$D(s) = 0.83$$

### (1) 模擬

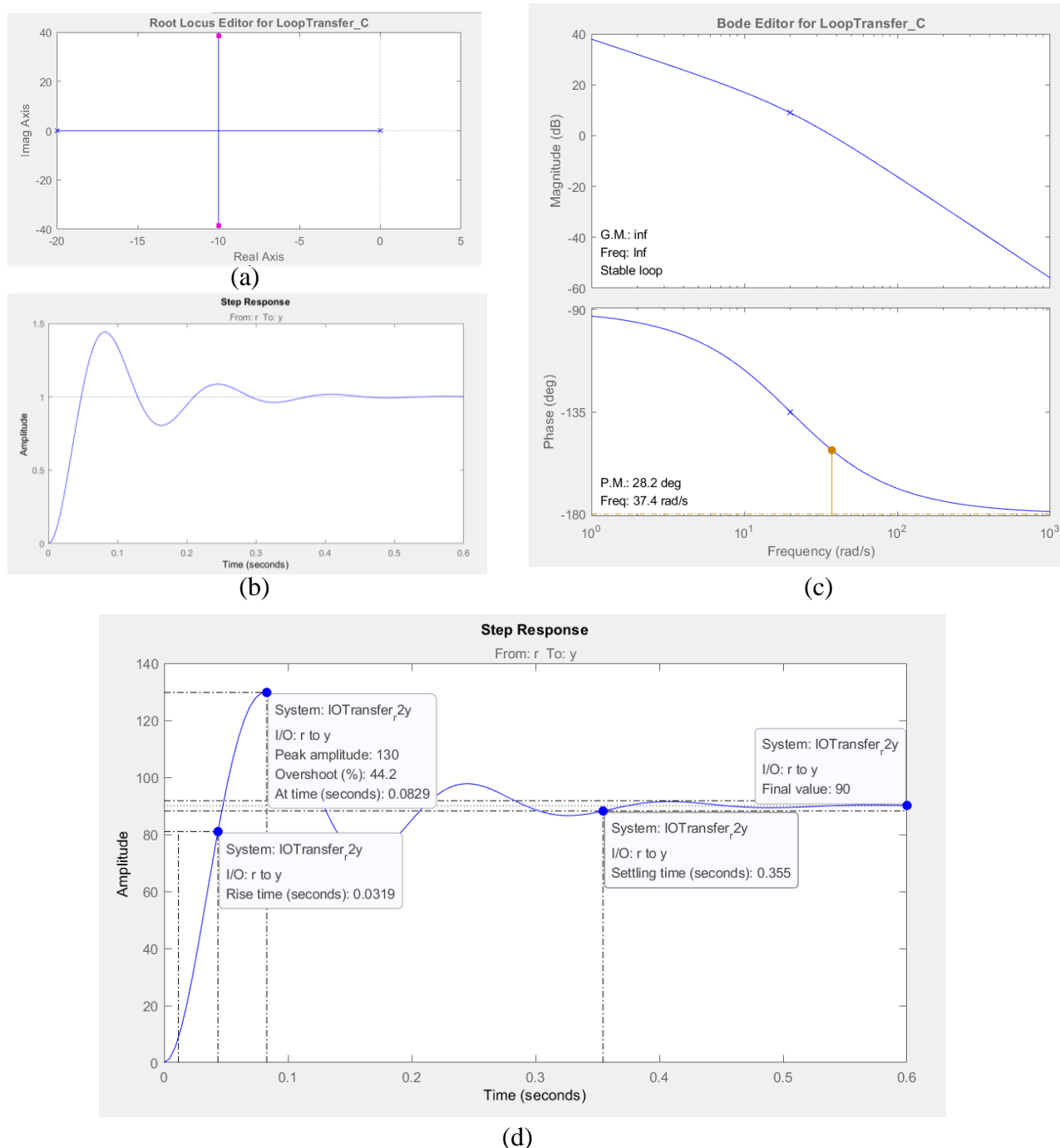


Fig.6 Full-state feedback controller with command =  $90^\circ$  模擬 (a) root locus (b) step response (c) Bode Plot (d) step response (含標示)

## (2) 實作



Fig.7 Full-state feedback controller step response (實作)

	受控場 (模擬)	控制器(模擬)	控制器(實際)
Steady state value (deg)	90	90	90.092
Steady state error (deg)	0	0	0.092
overshoot	0.478	0.442	0.226
Rise time (sec)	0.0285	0.0319	0.07
Settling time (sec)	0.385	0.355	0.43
PM (deg)	25.8	28.2	
Crossover frequency (rad/sec)	41.4	37.4	

Tab.2 Full-state feedback controller step response 比較

根據實作所得的結果，輸入命令為  $90^\circ$  時收斂在  $90.092^\circ$ ，輸入命令為  $0^\circ$  時收斂在  $0.369^\circ$ ，穩態誤差在 1 個解析度以內（一個解析度為  $0.392^\circ$ ），即誤差率約在 0.1% 至 0.4% 之間；實作所得的過衝量比模擬的小  $20^\circ$ ，上升時間與達穩態所需的時間均比模擬大，為摩擦力消耗動能所致。

另外，在未考量最大靜摩擦力時，誤差收斂在約兩個解析度，加入最大靜摩擦力後收斂至一個解析度以內，由此得知馬達控制摩擦力的影響很大。

觀察設計的全狀態迴授控制器的 Transfer function 可知此即一 P control 的控制器。

### 3. Design II — Dynamic compensator 動態補償器

第二個設計利用 Full-state feedback controller (全狀態迴授控制器)與 Reduced-order Observer (降階估測器)設計 dynamic compensator。

第一步利用最佳化設計中適用於單輸入單輸出的對稱根軌跡 SRL (Fig.8) 選取所想要的閉迴路的極點，對稱根軌跡控制與性能的權重和受控場的公式如下，

$$1 + \rho G(s)G(-s) = 0$$

透過挑選根軌跡的增益值，即控制量與性能的比值  $\rho$  來決定控制器的兩個極點，同時考量到估測器的極點會放置在控制器的三至五倍遠，因此不能選太過左邊的極點。

最後擇定極點為 -11.6 與 -16。(Fig.9)

接著利用特徵方程式比較係數得到全狀態迴授的  $\mathbf{K}$ 。如下，

$$\alpha_c = (s + 11.9)(s + 16)$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \alpha_c(s)$$

$$\mathbf{K} = [190.4 \quad 7.9]$$

第二步選擇降階估測器的極點，依照理論系統所有頻率要小於二分之一取樣頻率，同時實驗也發現極點取的越靠近原點，誤差量對控制量的影響越小(轉換成差分方程

的係數越小，過去一個時間的控制量係數約為 2.7，而誤差的係數皆小於 0.3)，而要靠增益拉大誤差量的係數，在模擬上會有穩態大於 1 的問題，且增益在實際實現上也有極限、無法如模擬一般拉大至想要的值。但若估測器極點取得離原點太遠、馬達本身的性能又不足以實現，馬達會持續抖動無法收斂，且在不發散的情況下，極點越遠，抖動程度越大。

為了使估測器的反應速度能夠追得上系統的速度、滿足極點頻率小於取樣頻率的二分之一 314 rad/sec (sample time = 0.01sec)，以及抖動幅度不要太大，將估測器的極點放置在所選

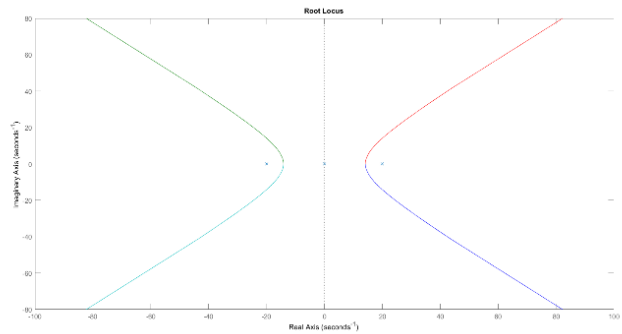


Fig.8 SRL

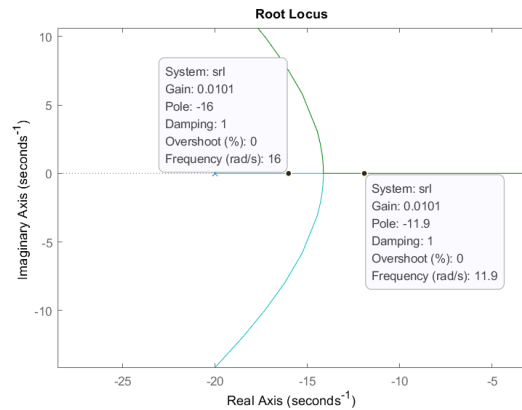


Fig.9 透過 SRL 選取的極點

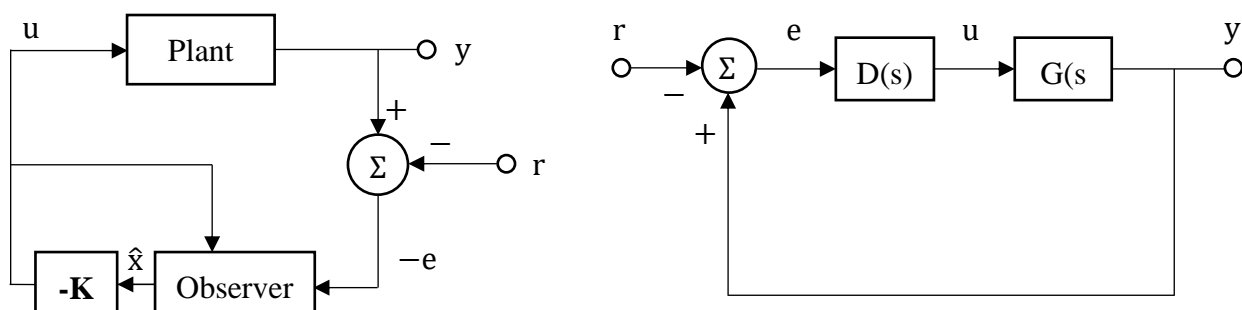
定的兩個極點中較近極點的五倍遠處，估測器極點為-60。  
藉由特徵方程式比較係數可得 $\mathbf{L}$ ，如下，

$$\alpha_e = s + 60$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}) = \alpha_e(s)$$

$$\mathbf{L} = 40$$

最後一步引入輸入命令，因為希望引入的輸入命令只和追蹤的誤差有相關，或者說控制量只和誤差量有關，因此設計方法選用 Tracking-error estimator。



補償器的 Transfer function 如下，

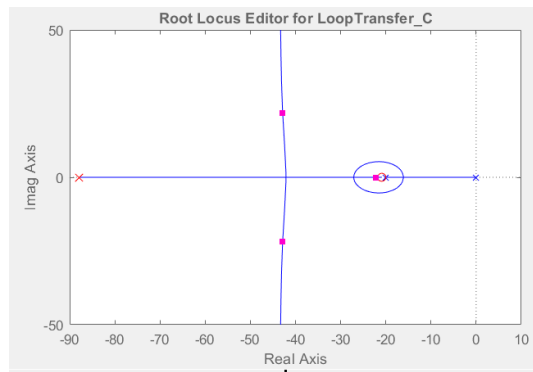
$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{LC})^{-1}\mathbf{L}$$

得到補償器的 Transfer function 如下，

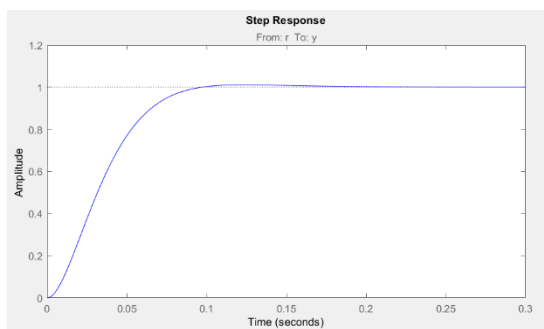
$$D(s) = K_s \frac{(s + 20.903)}{(s + 87.9)} , \quad K_s = \text{gain}$$

將此補償器輸入 MATLAB 進行模擬，考量穩態誤差、overshoot、rise time、phase margin (PM)、crossover frequency 選定增益值 $K_s$ ，在以上考量中，主要考量穩態誤差、overshoot 與 rise time，最後選擇 $K_s = 1.2888$ 。

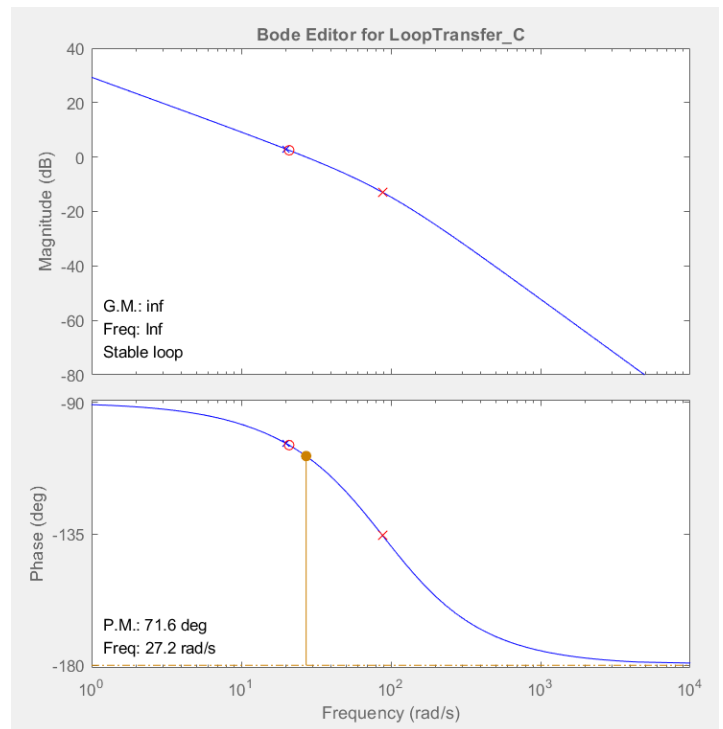
## (1) 模擬



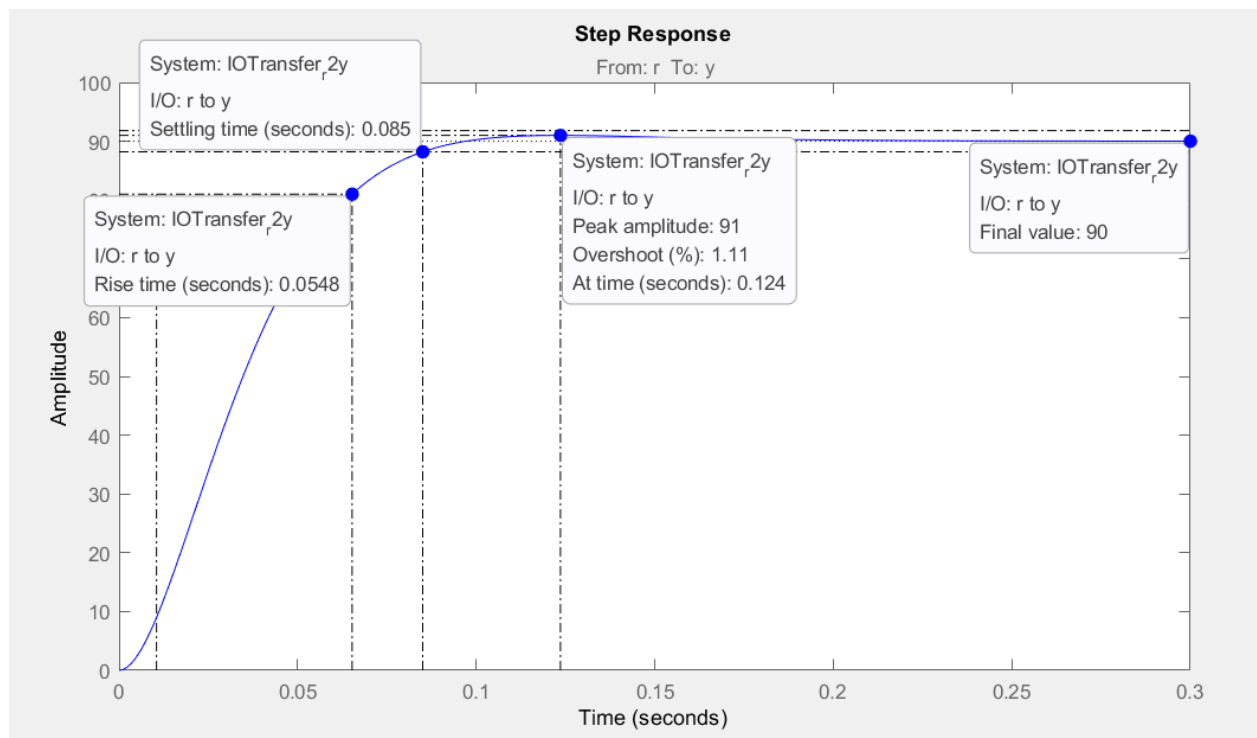
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig.10 Dynamic compensator with command =  $90^\circ$  模擬 (a) root locus (b) step response (c) Bode Plot (d) step response (含標示)



為了將現在的誤差量放入控制量的計算，因此使用 Tustin 而非 ZOH (經 ZOH 轉換，z transfer function 的分子會少一階) 轉換補償器 s-domain 的 transfer function 至 z-domain 的 transfer function，再寫成差分方程輸入馬達做數位控制。

轉換後的 z-domain 的 transfer function 與差分方程如下，

$$\text{T. F. } D(z) = \frac{0.9889z + 0.8017}{z - 0.3894}$$

$$u[k] = 0.3894 * u[k - 1] + 0.9889 * e[k] - 0.8017 * e[k - 1]$$

(sample time = 0.01sec)

## (2) 實作



Fig.11 Dynamic compensator step response (實作)

	受控場 (模擬)	補償器(模擬)	補償器(實際)
Steady state value (deg)	90	90	87.877
Steady state error (deg)	0	0	2.123
overshoot	0.478	0.0111	0.0133
Rise time (sec)	0.0285	0.0548	0.14
Settling time (sec)	0.385	0.085	0.38
PM (deg)	25.8	71.6	
Crossover frequency (rad/sec)	41.4	27.2	

Tab.3 Dynamic compensator step response 比較

根據實作結果，輸入命令為  $90^\circ$  時收斂在  $87.877^\circ$ ，輸入命令為  $0^\circ$  時收斂在  $-1.477^\circ$ ，穩態誤差約為 2 至 3 個解析度。

由於正反轉最大靜摩擦力調整得不夠精確的關係，輸入命令為  $0^\circ$  時的收斂耗時較長，收斂抖動幅度最大在  $-1.846$  至  $1.108$  之間，上下約偏移 2 至 3 個解析度。另外也因為所調的最大靜摩擦力值與實際的差距很細微，因此只要稍稍觸碰馬達或是改變馬達擺放的角度、依靠重力的影響即會達到收斂，由 Fig.11 兩次輸入命令為  $0^\circ$  時的收斂速度即可證實。

由補償器的 Transfer function 可看出利用全狀態迴授與降階估測器設計出的動態補償器實際上是一個 PID 控制器，同時因為極點位於零點左邊、PM 提升可知其是一 Lead controller。

## 心得

由這次實驗了解到在沒有考慮到摩擦力、電感效應等等狀況下，要利用 state space 做到很好的馬達控制十分困難，使用數位控制做控制器、補償器設計的條件相對利用 root locus、bode plot 做設計更為苛刻，同時也了解到在控制直流馬達位置的時候，摩擦力的影響非常大，會影響到收斂的速度與穩態誤差值。

另外也實際體會到極點與增益值的選定要考慮的非常多，如估測器極點的選定會有非常多互斥的條件，就我們組的馬達而言，極點越近抖動越小，但誤差量的影響也越小，估測器的反應速度會追不到系統的反應速度，甚至可能根本無法收斂；但放的太遠又會受到馬達性能的

限制。我一開始使用控一所學的 lead control 去做設計時，因為希望過衝量小而設計出了一個極點過遠的控制器，實際測試之後發現無法收斂，才發現是沒有考慮到取樣頻率與馬達性能的問題。

同時因為這次的實驗在設計出控制器或補償器後，為了解決穩態誤差與抖動問題，除了調整馬達的最大靜摩擦力外，還要不斷嘗試控制器與補償器的增益值。最後發現不管是降階還是全階的動態補償器，其差分方程的上一個時間的控制量之係數要和誤差值的差不多，且當下的誤差值要大於上一個時間的誤差值，意即誤差量與控制量的影響要差不多、且現在的誤差量影響要比過去的誤差量影像更大，這樣的補償器才有可能收斂或是抖動幅度不會太大，了解到這件事使我能在模擬階段就篩選掉一些不夠好的補償器。

實作馬達位置控制真的讓我對數位控制了解了更多，也對極點、增益的選定有更加應用上的理解，本來都是題目給定極點或是條件，透過公式計算就可以得到答案，但實際做了才發現並不一定算出來的就可以實現，計算與模擬結果的確具有很高的參考價值，但仍有許多實際系統的問題要考量。