Отчет по лабораторной работе №4

Модель гармонических колебаний

Габриэль Тьерри

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

Цель работы

- Научиться решать линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.
- Построить модель линейного гармонического осциллятора без затухания/ с затуханием/ с действием внешней силы.
- Построить фазовые портреты всех моделей.
- Отработать навыки решения систем дифференциальных уравнений на языке Julia, Openmodelica

Задание

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 14.4x = 0$$

2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

$$\ddot{x} + 17\dot{x} + x = 0$$

3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

$$\ddot{x} + 15\dot{x} + x = 0.7 * sin(3 * t)$$

   На интервале

$$t \in [0; 31]$$

   (шаг 0.05) с начальными условиями x0 = 2, y0 = -0.2

Теоретическое введение

Гармонический осциллятор - система, которая при выведении ее из положения равновесия испытывает действие возращающей силы F, пропорциональной смещению x:

$$F = -kx$$

Если F — единственная сила, действующая на систему, то систему называют простым или консервативным гармоническим осциллятором. Свободные колебания такой системы представляют собой периодическое движение около положения равновесия (гармонические колебания). Частота и амплитуда при этом постоянны, причём частота не зависит от амплитуды.

Если имеется ещё и сила трения (затухание), пропорциональная скорости движения (вязкое трение), то такую систему называют затухающим или диссипативным осциллятором. Если трение не слишком велико, то система совершает почти периодическое движение — синусоидальные колебания с постоянной частотой и экспоненциально убывающей амплитудой. Частота свободных колебаний затухающего осциллятора оказывается несколько ниже, чем у аналогичного осциллятора без трения.

Если осциллятор предоставлен сам себе, то говорят, что он совершает свободные колебания. Если же присутствует внешняя сила (зависящая от времени), то говорят, что осциллятор испытывает вынужденные колебания.

Механическими примерами гармонического осциллятора являются математический маятник (с малыми углами отклонения), груз на пружине, торсионный маятник и акустические системы. Среди немеханических аналогов гармонического осциллятора можно выделить электрический гармонический осциллятор. @Oscilliator

Для консервативного гармонического осциллятора, используя второй закон Ньютона, имеем @Lab:

$$F = -kx \iff a = -\frac{k}{m}x$$

Обозначим ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$ и подставим

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Для затухающего гармонического осциллятора, используя второй закон Ньютона, имеем @Lab:

$$F = -kx - \alpha v \iff a = -\frac{k}{m}x - \frac{\alpha}{m}v$$

Обозначим ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$, $2\gamma = \frac{\alpha}{m}$ и подставим

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x + 2\gamma\dot{x} = 0$$

Для вынужденных колебаний, используя второй закон Ньютона, имеем @Oscilliator:

$$ma = -kx + F_0 cos(\Omega t) \iff a = -\frac{k}{m} + \frac{F_0}{m}cos(\Omega t)$$

Обозначим ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$, $\Phi_0 = \frac{F_0}{m}$ и подставим

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = \Phi_0 cos(\Omega t)$$

Для решения данных дифференциальных уравнений будем составлять систему, в которой обозначим $\dot{x}$ за y, будем оставлять без изменений.

Например, для затухающих гармонических колебаний имеем:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -{\omega_0}^2 x - 2\gamma y \end{cases}$$

Фазовая плоскость — координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются какие-либо две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы второго порядка.

Каждая точка фазовой плоскости отражает одно некоторое состояние системы и называется фазовой, изображающей или представляющей точкой

Изменение состояния системы отображается на фазовой плоскости движением этой точки. След от движения изображающей точки называется фазовой траекторией.

Полная совокупность всевозможных различных фазовых траекторий — это фазовый портрет.

В нашей задаче на оси абсцисс фазовой плоскости откладываются значения параметра x, например, величина отклонения от равновесия; на оси ординат откладываются значения первой производной x по времени(y) — скорости перемещения. @Phase

Выполнение лабораторной работы

1. Построим решение уравнения гармонического осциллятора без затухания. В нашем случае оно имеет вид

$$\ddot{x} + 14.4x = 0$$

Для того, чтобы решить данное уравнение перепишем его в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -14.4x \end{cases}$$

Далее запишем начальные условия, которые в нашем случае имеют вид:

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -0.2 \end{cases}$$

Теперь используем язык программирования Julia для получения численного решения и построения фазового портрета

```
begin
    import Pkg
    Pkg.add("LaTeXStrings")
    Pkg.activate()
    using DifferentialEquations
```

```
    using LaTeXStrings
    import Plots
end

begin
    X0 = 2.0
    Y0 = -0.2
    w = 14.4
    t0 = 0.0
    tmax = 31.0
    tspan = (t0, tmax)
end

function F!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -w*u[1]
end

begin
    U0 = [X0, Y0]
    T = [t0, tmax]
    prob = ODEProblem(F!, U0, T)
end
```

3/4/23, 1:14 AM Friendly journal.jl — Pluto.jl

sol =

	timestamp	value1	value2
1	0.0	2.0	-0.2
2	0.05	1.95417	-1.62779
3	0.1	1.8382	-2.99715
4	0.15	1.65625	-4.25894
5	0.2	1.41485	-5.36787
6	0.25	1.12268	-6.28412
7	0.3	0.790203	-6.97485
8	0.35	0.429373	-7.41522
9	0.4	0.0531226	-7.58943
10	0.45	-0.325031	-7.49128
⋮ more			

Рис. 1: sol

```
sol = solve(prob, saveat = 0.05)

begin
    Time = sol.t
    const X = Float64[]
    const Y = Float64[]
        for u in sol.u
        x, y = u
        push!(X, x)
        push!(Y, y)
    end
    X,Y
end

begin
    #график
    fig = Plots.plot(
```

```
        layout = (1, 1),
        dpi = 150,
        grid =:xy,
        gridcolor =:black,
        gridwidth = 1,
        background_color=:antiquewhite,
        # aspect_ratio=: equal,
        size = (800, 400),
        plot_title="график",
    )
    Plots.plot!(
        fig[1],
        Time,
        [X Y],
        xlabel = L"$t$",
        ylabel = L"$x(t)$, $y(t)$",
        color =[ :red :blue ],
        label = [L"$x(t)$" L"$y(t)$"]
    )
end
```

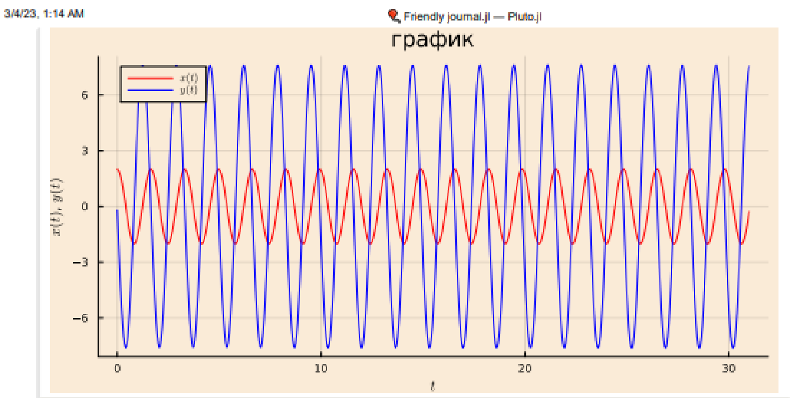
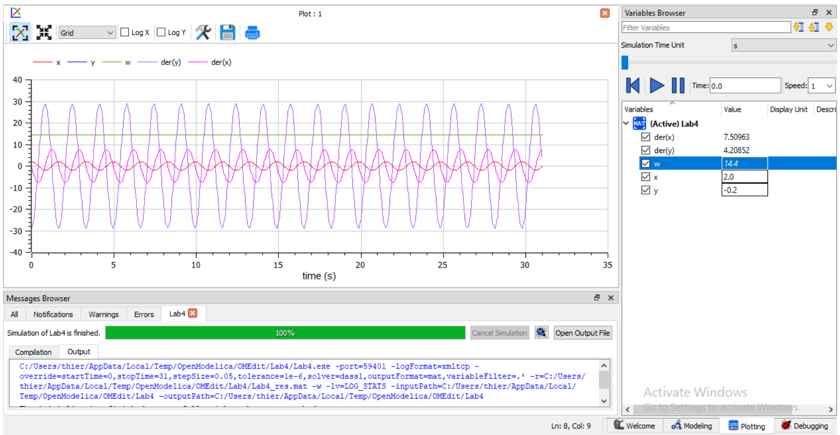


Рис. 2: Фазовый портрет №1(Julia)

проделаем те же самые действия в Openmodelica

```
model Lab4
Real x(start=2);
Real y(start=-0.2);
parameter Real w =14.4;
equation
der(x) = y;
der(y) = -w*x;
end Lab4;
```



Получим фазовый портрет

2. Построим решение уравнения для колебаний гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы. В нашем случае оно имеет вид

$$\ddot{x} + 17\dot{x} + x = 0$$

Для того, чтобы решить данное уравнение перепишем его в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -17y - x \end{cases}$$

Далее запишем начальные условия, которые в нашем случае имеют вид:

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -0.2 \end{cases}$$

Теперь используем язык программирования Julia для получения численного решения и построения фазового портрета

```
begin
    import Pkg
    Pkg.add("LaTeXStrings")
    Pkg.activate()
    using DifferentialEquations
    using LaTeXStrings
    import Plots
end

begin
    X0 = 2.0
    Y0 = -0.2
    g = 17.0
    w = 1.0
    t0 = 0.0
    tmax = 31.0
    tspan = (t0, tmax)
end

function F!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -g*u[2]-w*u[1]
```

```
end

begin
    U0 = [X0, Y0]
    T = [t0, tmax]
    prob = ODEProblem(F!, U0, T)
end
```

3/4/23, 1:20 AM

Friendly journal.jl — Pluto.jl

sol =

	timestamp	value1	value2
1	0.0	2.0	-0.2
2	0.05	1.99135	-0.152674
3	0.1	1.9843	-0.132187
4	0.15	1.97794	-0.123211
5	0.2	1.97189	-0.119165
6	0.25	1.96599	-0.117235
7	0.3	1.96016	-0.116213
8	0.35	1.95436	-0.115582
9	0.4	1.9486	-0.115115
10	0.45	1.94285	-0.114724

⋮ more

Рис. 3: Sol

```
sol = solve(prob, saveat = 0.05)

begin
    Time = sol.t
    const X = Float64[]
    const Y = Float64[]
    for u in sol.u
        x, y = u
        push!(X, x)
        push!(Y, y)
    end
```

```
    X,Y
end

begin
    #график
    fig = Plots.plot(
        layout = (1, 1),
        dpi = 150,
        grid =:xy,
        gridcolor =:black,
        gridwidth = 1,
        background_color=:antiquewhite,
        # aspect_ratio=: equal,
        size = (800, 400),
        plot_title="график",
    )
    Plots.plot!(
        fig[1],
        Time,
        [X Y],
        xlabel = L"$t$",
        ylabel = L"$x(t)$, $y(t)$",
        color =[ :red :blue ],
        label = [L"$x(t)$" L"$y(t)$"]
    )
end
```

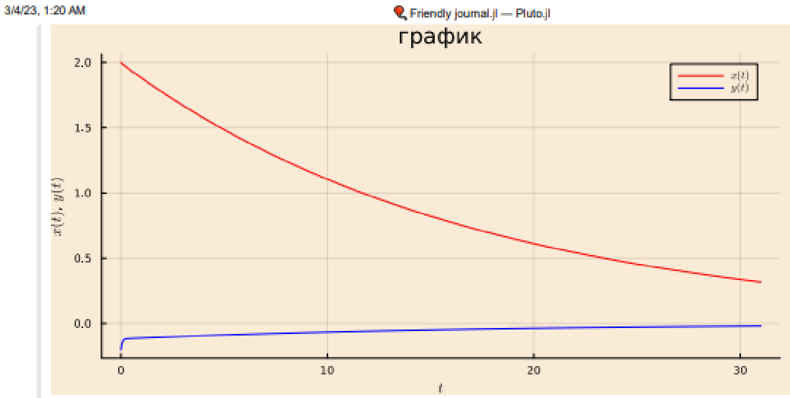
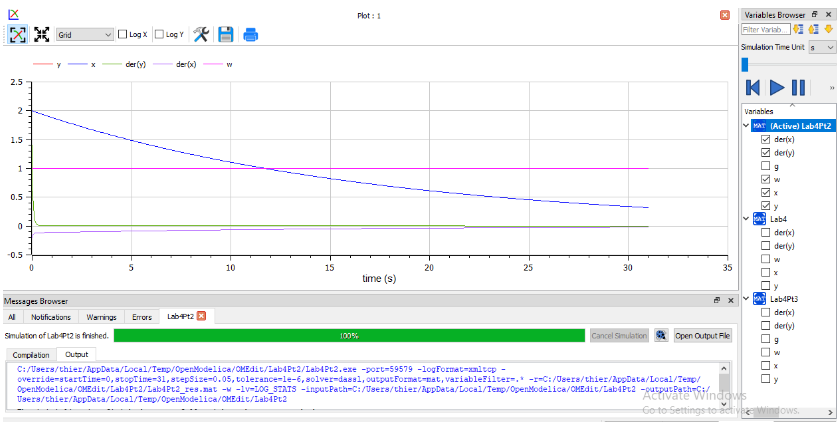


Рис. 4: Фазовый портрет №2(Julia)

проделаем те же самые действия в Openmodelica

```
model Lab4Pt2
Real x(start=2);
Real y(start=-0.2);
parameter Real g = 17;
parameter Real w =1;
equation
der(x) = y;
der(y) = -g*y-w*x;
end Lab4Pt2;
```

Получим фазовый портрет 

3. Построим решение уравнения для колебаний гармонического осциллятора с

затуханием и под действием внешней силы. В нашем случае оно имеет вид

$$\ddot{x} + 15\dot{x} + x = 0.7 * sin(3 * t)$$

Для того, чтобы решить данное уравнение перепишем его в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -15y - x + 0.7 * sin(3 * t) \end{cases}$$

Далее запишем начальные условия, которые в нашем случае имеют вид:

$$\begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -0.2 \end{cases}$$

Теперь используем язык программирования Julia для получения численного решения и построения фазового портрета

```
begin
    import Pkg
    Pkg.add("LaTeXStrings")
    Pkg.activate()
    using DifferentialEquations
    using LaTeXStrings
    import Plots
end
```

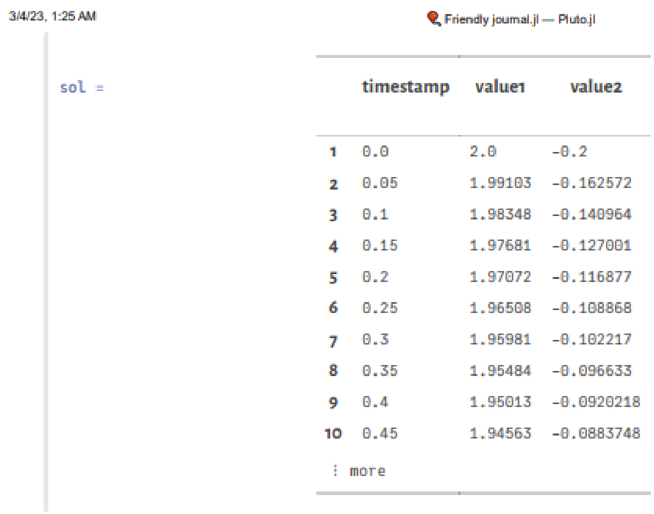
```
begin
    X0 = 2.0
    Y0 = -0.2
```

```
    g = 15.0
    w = 1.0
    t0 = 0.0
    tmax = 31.0
    tspan = (t0, tmax)
end

function P(t)
    return 0.7*sin(3*t)
end

function F!(du, u, p, t)
    du[1] = u[2]
    du[2] = -g*u[2]-w*u[1] + P(t)
end

begin
    U0 = [X0, Y0]
    T = [t0, tmax]
    prob = ODEProblem(F!, U0, T)
end
```



3/4/23, 1:25 AM

Friendly journal.jl — Pluto.jl

sol =

	timestamp	value1	value2
1	0.0	2.0	-0.2
2	0.05	1.99103	-0.162572
3	0.1	1.98348	-0.140964
4	0.15	1.97681	-0.127001
5	0.2	1.97072	-0.116877
6	0.25	1.96508	-0.108868
7	0.3	1.95981	-0.102217
8	0.35	1.95484	-0.096633
9	0.4	1.95013	-0.0920218
10	0.45	1.94563	-0.0883748
⋮ more			

Рис. 5: Sol

```
sol = solve(prob, saveat = 0.05)

begin
    Time = sol.t
    const X = Float64[]
    const Y = Float64[]
    for u in sol.u
        x, y = u
        push!(X, x)
        push!(Y, y)
    end
    X,Y
end

begin
    #график
    fig = Plots.plot(
```

```
        layout = (1, 1),
        dpi = 150,
        grid =:xy,
        gridcolor =:black,
        gridwidth = 1,
        background_color=:antiquewhite,
        # aspect_ratio=: equal,
        size = (800, 400),
        plot_title="график",
        )
    Plots.plot!(
        fig[1],
        Time,
        [X Y],
        xlabel = L"$t$",
        ylabel = L"$x(t)$, $y(t)$",
        color =[ :red :blue ],
        label = [L"$x(t)$" L"$y(t)$"]
        )
end
```

Рис. 6: Фазовый портрет №3(Julia)

проделаем те же самые действия в Openmodelica

model Lab4Pt3

Real x(start=2);

Real y(start=-0.2);

parameter Real g = 15;

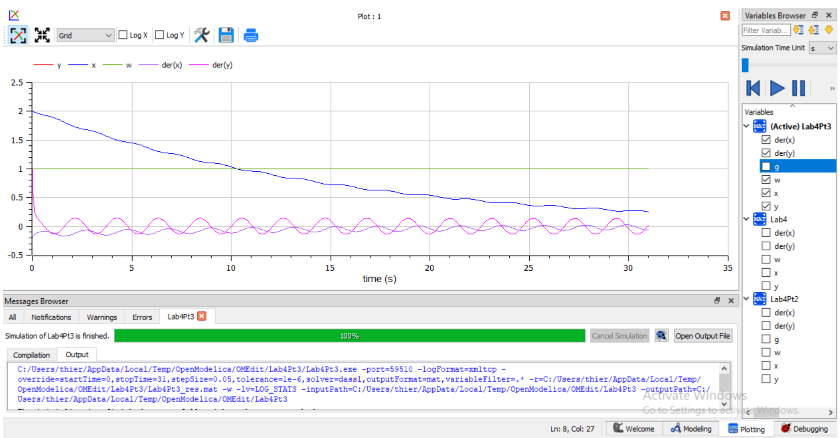
parameter Real w = 1;

equation

der(x) = y;

der(y) = -g*y-w*x + 0.7*sin(3*time);

end Lab4Pt3;



Получим фазовый портрет

Ответы на вопросы

1. Простейшая модель гармонических колебаний:

$$x = A * cos(\omega t + \phi_0)$$

2. Осциллятор - система, совершающая колебания, то есть показатели которой периодически повторяются во времени.

3. Модель математического маятника:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} sin(\theta) = 0$$

4. Для перехода от дифференциального уравнения второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка, необходимо в уравнении заменить все производные первого порядка на новую переменную, а также записать дополнительное уравнения, в котором будет обозначено, что первая производная равна новой переменной

5. Фазовый портрет — это геометрическое представление траекторий динамической системы на фазовой плоскости

6. Фазовая траектория - кривая в фазовом пространстве, составленная из точек, представляющих состояние динамической системы в последовательные моменты времени в течение всего времени эволюции.

Выводы

- Научились решать линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.
- Построиили модель линейного гармонического осциллятора без затухания/ с затуханием/ с действием внешней силы.
- Построили фазовые портреты всех моделей. Увидели, что при реализации на Julia и Openmodelica портреты совпадают.
- Отработали навыки решения систем дифференциальных уравнений на языке Julia, Openmodelica

Список литературы