Лабораторная работа №6

Задача об эпидемии

Габриэль Тьерри

18 марта 2023

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

Информация

Докладчик

- Габриэль Тьерри
- студент НКНбд-01-20
- Факультет физико-математических и естественных наук
- Российский университет дружбы народов
- https://github.com/tgabriel22/mathmod/tree/master/Labs

Цель работы

Построить графики изменения числа особей в группах с помощью простейшей модели эпидемии, рассмотреть, как будет протекать эпидемия в различных случаях.

Задание

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих. на острове (N=14 041) в момент начала эпидемии (t=0) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) I(0)=131, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни R(0)=71. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени S(0)=N-I(0)- R(0). Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если $I(0) \leq I^*$
2. если $I(0) > I^*$

Материалы и методы

- Язык программирования Julia
- Язык программирования Modelica
- Пакеты Plots, DifferentialEquations

Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через S(t). Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их I(t). А третья группа, обозначающаяся через R(t) – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения I , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей. Таким образом, скорость изменения числа S(t) меняется по следующему закону:

$$\frac{ds}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, I(t) > I^* \\ 0, I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, I(t) > I^* \\ -\beta I, I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при это приобретающие иммунитет к болезни)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия .Считаем, что на начало эпидемии в момент времени t = 0 нет особей с иммунитетом к болезни R(0)=0, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей I(0) и S(0) соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \leq I^*$ и $I(0) > I^*$

Выполнение лабораторной работы

1.1 Решение для случая 1 на Julia: $I(0) \leq I^*$

```
begin
    import Pkg
    Pkg.add("LaTeXStrings")
    Pkg.activate()
    using DifferentialEquations
    using LaTeXStrings
    import Plots
end
```

```
begin
    N = 14041.0 #общая численность популяции
    I0 = 131.0 #количество инфицированных особей в начальный момент времени
    R0 = 71.0   #количество здоровых особей с иммунитетом в начальный момент времени
    S0 = N-I0-R0 #количество восприимчивых к болезни особей в начальный момент времени
    t0 = 0.0 #начальное Время
    a = 0.01 #коэффициент заболеваемости
```

```
    b = 0.02 #коэффициент выздоровления
end

#случай, когда I(0)<=I*
function F!(du, u, p, t)
    du[1] = 0.0
    du[2] = -b*u[2]
    du[3] = b*u[2]
end

begin
    U0 = [S0, I0, R0] #начальные значения
    T = [0.0, 200.0]
    prob = ODEProblem(F!, U0, T)
end
```

3/18/23, 10:45 AM Small analysis.jl — Pluto.jl

sol =

	timestamp	value1	value2	value3
1	0.0	13839.0	131.0	71.0
2	0.01	13839.0	130.974	71.0262
3	0.02	13839.0	130.948	71.0524
4	0.03	13839.0	130.921	71.0786
5	0.04	13839.0	130.895	71.1048
6	0.05	13839.0	130.869	71.1309
7	0.06	13839.0	130.843	71.1571
8	0.07	13839.0	130.817	71.1833
9	0.08	13839.0	130.791	71.2094
10	0.09	13839.0	130.764	71.2356

⋮ more

Рис. 1: sol №1(Julia)

```
sol = solve(prob, saveat = 0.01)
```

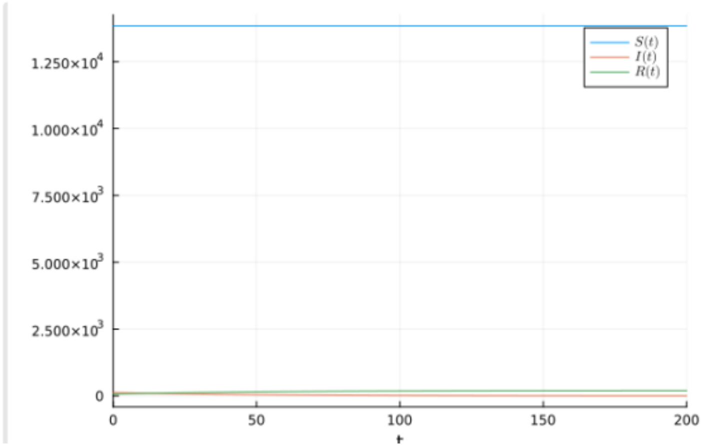

Рис. 2: Граф №1(Julia)

Результат

Plots.plot(sol, label =[L"$S(t)$" L"$I(t)$" L"$R(t)$"])

1.2 Решение для случая 1 на Openmodelica: $I(0) \leq I^*$

```
model LAB6
//случай, когда I(0)<=I*

constant Real a=0.01;//коэффицент заболевания
constant Real b=0.02;//коэфицент выздоровления
constant Real N=14041;//количество проживающих на острове

Real I;//инфицированные особи
Real R;//здоровые особи с иммунитетом к болезни
Real S;//здоровые особи, восприимчивые к болезни

initial equation
I=131;//количество инфицированных особей
R=71;//количество здоровых особей с иммунитетом к болезни
```

```
S=N-I-R;//количество здоровых особей, восприимчивых к болезни

equation
der(S)=0;//изменение количества здоровых особей, восприимчивых к болезни
der(I)=-b*I;//изменение количества инфицированных особей
der(R)=b*I;//изменение количества здоровых особей с иммунитетом

end LAB6;
```

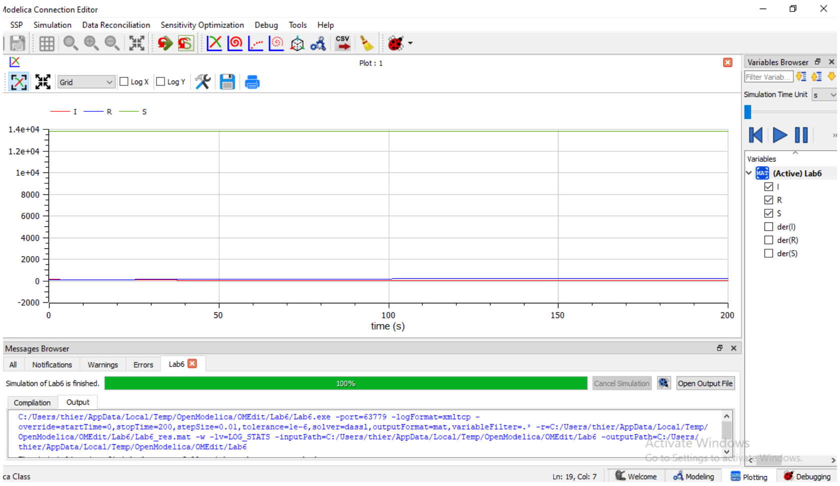

Рис. 3: Граф №1(Openmodelica)

Результат

2.1 Решение для случая 2 на Julia: $I(0) > I^*$

```
begin
    import Pkg
    Pkg.add("LaTeXStrings")
    Pkg.activate()
    using DifferentialEquations
    using LaTeXStrings
```

```
    import Plots
end

begin
    N = 14041.0 #общая численность популяции
    I0 = 131.0 #количество инфицированных особей в начальный момент времени
    R0 = 71.0   #количество здоровых особей с иммунитетом в начальный момент времени
    S0 = N-I0-R0 #количество восприимчивых к болезни особей в начальный момент времени
    t0 = 0.0 #начальное Время
    a = 0.01 #коэффициент заболеваемости
    b = 0.02 #коэффициент выздоровления
end

#случай, когда I(0)>I*
function F!(du, u, p, t)
    du[1] = -a*u[1]
    du[2] = a*u[1]-b*u[2]
    du[3] = b*u[2]
end

begin
    U0 = [S0, I0, R0] #начальные значения
    T = [0.0, 200.0]
    prob = ODEProblem(F!, U0, T)
end
```

3/18/23, 10:48 AM Small analysis.jl — Pluto.jl

sol =

	timestamp	value1	value2	value3
1	0.0	13839.0	131.0	71.0
2	0.01	13837.6	132.357	71.0263
3	0.02	13836.2	133.715	71.0529
4	0.03	13834.8	135.071	71.0798
5	0.04	13833.5	136.428	71.107
6	0.05	13832.1	137.783	71.1344
7	0.06	13830.7	139.139	71.1621
8	0.07	13829.3	140.494	71.19
9	0.08	13827.9	141.848	71.2183
10	0.09	13826.6	143.203	71.2468
⋮ more				

Рис. 4: sol

sol = solve(prob, saveat = 0.01)

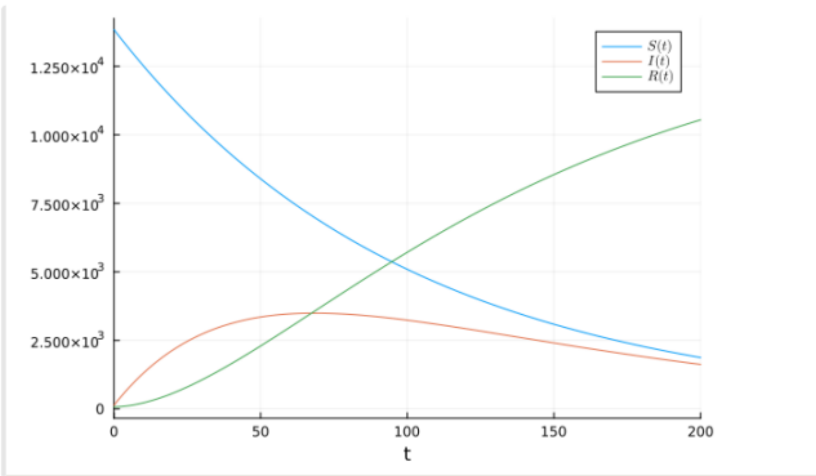

Рис. 5: Граф №2(Julia)

Результат

Plots.plot(sol, label =[L"$S(t)$" L"$I(t)$" L"$R(t)$"])

2.2Решение для случая 2 на Openmodelica: $I(0) > I^*$

```
model LAB6_Part2
//случай, когда I(0)>I*

constant Real a=0.01;//коэффицент заболевания
constant Real b=0.02;//коэфицент выздоровления
constant Real N=14041;//количество проживающих на острове

Real I;//инфицированные особи
Real R;//здоровые особи с иммунитетом к болезни
Real S;//здоровые особи, восприимчивые к болезни

initial equation
I=131;//количество инфицированных особей
R=71;//количество здоровых особей с иммунитетом к болезни
S=N-I-R;//количество здоровых особей, восприимчивых к болезни

equation
der(S)=-a*S;//изменение количества здоровых особей, восприимчивых к болезни
der(I)=a*S-b*I;//изменение количества инфицированных особей
der(R)=b*I;//изменение количества здоровых особей с иммунитетом

end LAB6_Part2;
```

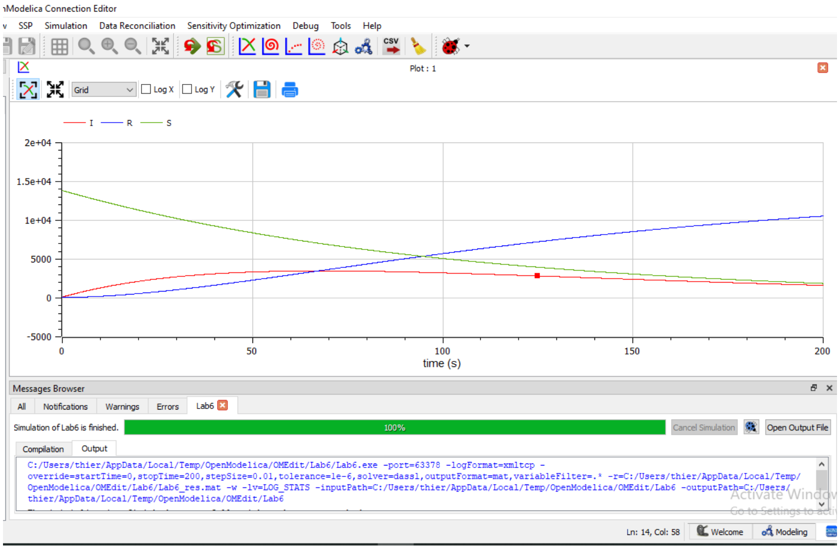

Рис. 6: Граф №2(Openmodelica)

Результат

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы я научился строить графики изменения числа особей в группах с помощью простейшей модели эпидемии, рассмотрел, как будет протекать эпидемия в различных случаях.