В. М. Шалов, Принцип минимума квадратичного функционала для гиперболического уравнения, *Дифференц. уравнения*, 1965, том 1, номер 10, 1338–1365

ОКТЯБРЬ 1965 г., ТОМ I, № 10

ПРИНЦИП МИНИМУМА КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. М. ШАЛОВ

Введение

Для исследования уравнений математической физики широко используется вариационный принцип. Базируясь на физическом законе сохранения энергии, вариационный принцип позволяет, как правило, поставить корректные задачи для данного класса уравнений, доказать их разрешимость, исследовать дифференциальные свойства решения и, если необходимо, практически построить искомое решение с любой степенью точности.

При этом соответствующий аппарат исследования разработан в основном для случая, если вариационная задача сводится к проблеме минимизации некоторого квадратичного функционала.

В этом случае благодаря введению С. Л. Соболевым [1] понятия обобщенной производной и пространств $W_p^{(l)}$, а также развитию теорем вложения и продолжения вариационный принцип для краевых задач получил строгую и глубокую трактовку.

В работах В. И. Кондрашова [6], Л. Д. Кудрявцева [8], С. М. Никольского [16] и других авторов идеи С. Л. Соболева получили дальнейшее развитие, и вариационным принципом был исследован ряд важнейших задач математической физики.

Указанный метод удавалось, однако, применить в основном лишь к дифференциальным уравнениям эллиптического типа.

В работах [22, 23] в терминах гильбертова пространства показана возможность распространения вариационного принципа минимизации квадратичного функционала на довольно широкий класс несамосопряженных уравнений и дается постановка соответствующих вариационных задач.

Там установлено, в частности, что для всякого разрешимого линейного уравнения в гильбертовом пространстве может быть поставлена эквивалентная вариационная задача на отыскание точки минимума некоторого квадратичного функционала, т. е. для любого, например, разрешимого линейного дифференциального уравнения можно указать некоторый квадратичный функционал такой, что исходное уравнение вместе с граничными условиями будет уравнением Эйлера для данного функционала. При этом функционал будет ограничением снизу, и минимум функционала достигается лишь на элементе, являющемся решением исходного уравнения.

В настоящей работе, пользуясь общим подходом, изложенным в работах [22, 23], формулируется и исследуется вариационная задача на минимизацию квадратичного функционала для уравнения колебаний струны, являющегося, как известно, уравнением гиперболического типа. При этом в существенной степени используются известные методы исследования уравнений эллиптического типа вариационным принципом [1, 8, 13, 16] с той лишь, может быть, новизной, что минимум соответствующего функционала ищется не на классе функций, удовлетворяющих определенным граничным условиям (как это делалось обычно), а на всем множестве функций пространства, в котором ищется решение, т. е. на множестве функций, не подчиненных никаким граничным условиям.

Используемый нами подход близок также в некотором смысле к результатам К. Фридрихса [2] для дифференциальных уравнений с симметризуемым оператором.

Для рассматриваемого уравнения колебаний струны исследуется существование и единственность решения вариационной задачи, существование и единственность обобщенного решения и соотношение обобщенного решения с решением вариационной задачи, исследуются дифференциальные свойства обобщенного решения, а также вопрос об удовлетворении граничных условий и вопрос о корректности задачи о колебаниях струны. В частности, показана корректность некоторой смешанной задачи для уравнения колебаний струны в случае, когда граничные данные заданы на всей границе.

В настоящей работе в основном ставится цель проиллюстрировать возможности предложенного в [22, 23] метода на случае исследования уравнений неэллиптического типа, например гиперболического, хотя полученные при этом результаты для уравнения колебаний струны представляют, по-видимому, и самостоятельный интерес.

§ 1. Симметризация дифференциального уравнения колебаний струны

Рассмотрим в некоторой двумерной ограниченной области Ω с кусочно непрерывно дифференцируемой границей Γ уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g, \tag{1}$$

где t — время; x — координата точек струны; u — искомая функция, соответствующая прогибу струны; g — некоторая заданная функция, зависящая от x, t. Скорость распространения волн в струне, описываемой уравнением (1), для простоты взята равной 1.

Уравнение (1) является, как известно, уравнением гиперболического типа и соответствующий дифференциальный оператор для него в общем случае не является ни симметричным, ни положительно определенным. Однако, как будет показано в этом параграфе, этот оператор обладает свойством симметричности и положительной определенности в некотором обобщенном смысле, причем эта симметричность и положительность оператора оказывается весьма полезной и естественной при исследовании уравнения (1) методами функционального анализа.

Пусть область Ω обладает тем свойством, что каждая из характеристик уравнения (1):

$$\xi = x + t, \qquad \eta = x - t, \tag{2}$$

пересекает границу Γ не более чем в двух точках либо сливается с границей Γ в некоторой части ее. Обозначим через $\Gamma_i = \{\xi^i, \eta^i\}$

($i = 0, 1, 2, 3, 4$) точки соприкасания границы Γ области Ω (рис. 1) с соответствующими характеристиками ξ или η.

Величины ξ^i, η^i при этом обозначают координаты точки Γ_i в системе координат ξ, η, указанной на рис. 1.

Пусть далее уравнение кривой $\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_0$ границы Γ (см. рис. 1) в системе координат ξ, η имеет вид:

$$\gamma_1 = \gamma_1(\eta), \quad \eta^0 \leqslant \eta \leqslant \eta^3, \tag{3}$$

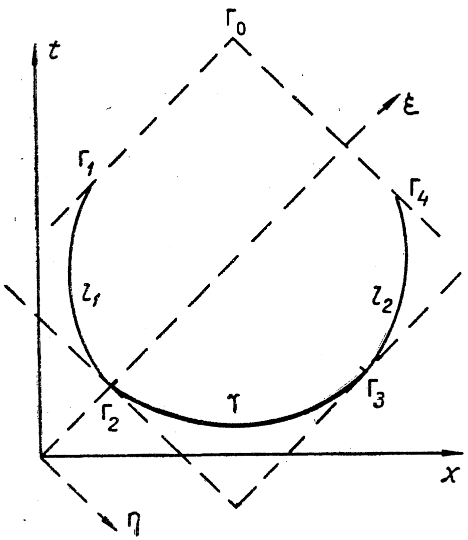

Рис. 1

а кривой $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2$—соответственно:

$$\gamma_2 = \gamma_2(\xi), \quad \xi^2 \leqslant \xi \leqslant \xi^0. \tag{3'}$$

Участки $\Gamma_4\Gamma_0$ и $\Gamma_0\Gamma_1$ границы Γ совпадают соответственно с характеристиками η, ξ, проходящими через точки Γ_4, Γ_0 и Γ_0, Γ_1.

Для упрощения дальнейших рассуждений преобразуем исходное уравнение (1) к новой системе координат ξ, η (2), тогда будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = g, \tag{4}$$

где g, также как и в уравнении (1), обозначает некоторую известную функцию от ξ, η, определенную на Ω.

Наряду с уравнением (4) будем рассматривать оператор K определенным соотношением

$$Kv = \int\limits_{\xi}^{\gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \eta}(\zeta, \eta)\, d\zeta + \int\limits_{\eta}^{\gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, \tau)\, d\tau, \tag{5}$$

где γ_1 и γ_2 определены соотношениями (3), (3').

Составляя теперь произведение левой части равенства (4) на выражение (5) для Kv и интегрируя по области Ω, будем иметь следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \eta}(\zeta, \eta)\, d\zeta + \int\limits_{\eta}^{\gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, \tau)\, d\tau\right] d\xi\, d\eta =$$

$$= -\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \eta}(\zeta, \eta)\, d\zeta\right] d\eta + \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \xi}\left[\int\limits_{\eta}^{\gamma_2} \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi, \tau)\, d\tau\right] d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\,\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\,\frac{\partial v}{\partial \eta}\right] d\xi\, d\eta, \tag{6}$$

полученное с помощью интегрирования по частям.

Преобразуем несколько в этом равенстве контурные интегралы. Для этого обозначим через γ, l_1, l_2 (см. рис. 1) соответственно участки $\Gamma_2\Gamma_3$, $\Gamma_1\Gamma_2$, $\Gamma_3\Gamma_4$ границы Γ и воспользуемся тем обстоятельством, что на контуре Γ имеют место соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \xi}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial n}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial s},\quad \frac{\partial}{\partial \eta}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial n}-\sin\theta\frac{\partial}{\partial s},\tag{7}$$

а также

$$d\xi=\cos\theta\, ds,\quad d\eta=-\sin\theta\, ds,\tag{8}$$

где n — направление внешней нормали к Γ, s — положительное направление вдоль контура Γ, θ — угол между направлением n на контуре и осью η.

Тогда для контурных интегралов в (6) можем записать:

$$-\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \eta}\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta\right]d\eta+\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \xi}\left[\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]d\xi=$$

$$=-\int\limits_{\gamma}\frac{\partial u}{\partial \eta}\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial \eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta\right]d\eta-\int\limits_{l_1}\frac{\partial u}{\partial \eta}\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{dv}{\partial \eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta\right]d\eta+$$

$$+\int\limits_{\gamma}\frac{\partial u}{\partial \xi}\left[\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]d\xi+\int\limits_{l_2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\left[\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]d\xi=$$

$$=\int\limits_{\gamma}\frac{\partial u}{\partial s}\left[-\sin^2\theta\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\cos^2\theta\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]ds+$$

$$+\int\limits_{\gamma}\frac{\partial u}{\partial n}\sin\theta\cdot\cos\theta\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]ds-$$

$$-\int\limits_{l_1}\frac{\partial u}{\partial \eta}\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta\right]d\eta+\int\limits_{l_2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\left[\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]d\xi,\tag{9}$$

поскольку на участках границы γ_1 и γ_2 соответствующие интегралы обращаются в 0.

С учетом соотношения (9) равенство (6) окончательно можно записать в следующем виде:

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\,\partial \eta}\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]d\xi\,d\eta+$$

$$+\int\limits_{\gamma}uv\,ds+\int\limits_{\gamma}\frac{\partial u}{\partial s}\left[-\sin^2\theta\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\cos^2\theta\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]ds+$$

$$+\int_{\gamma}\frac{\partial u}{\partial n}\sin\theta\cdot\cos\theta\left[\int_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\int_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]ds+$$

$$+\int_{l_1}\frac{\partial u}{\partial\eta}\left[\int_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta\right]d\eta-\int_{l_2}\frac{\partial u}{\partial\xi}\left[\int_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]d\xi=$$

$$=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\,\frac{\partial v}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\,\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)d\xi\,d\eta+\int_{\gamma}uv\,ds,\tag{10}$$

где к обеим частям равенства прибавлена величина $\int_{\gamma}uvds$. Соотношение (10) справедливо для любых гладких функций u, v и является, собственно, основным равенством, из которого следует постановка граничной задачи для уравнения колебаний струны и возможность решения этой задачи вариационным методом.

Нетрудно видеть, что первые сомножители под интегралами в левой части равенства (10) представляют некоторый оператор A, ставящий в соответствие функции u шесть функций в другом пространстве, а вторые члены определяют соответственно вспомогательный оператор B, ставящий в соответствие элементу v также шесть функций. В правой части равенства (10) стоит квадратичная положительно определенная форма, поэтому оператор A, соответствующий уравнению (4), будет B-симметричным и B-положительным. Для того чтобы более точно определить операторы A и B, введем следующне обозначения:

$$Kv=\int_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\int_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\tau,$$

$$Tv=-\sin^2\theta\int_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\cos^2\theta\int_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\tau,$$

$$K_{\theta}v=\sin\theta\cdot\cos\theta\left[\int_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\int_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\tau,\right],$$

$$L_1v=-\int_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial v}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta,\qquad L_2v=\int_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial v}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\tau.\tag{11}$$

Тогда операторы A и B можно определить следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}Au=\left\{\frac{\partial^2u}{\partial\xi\,\partial\eta},\ u,\ \frac{\partial u}{\partial s},\ \frac{\partial u}{\partial n},\ \frac{\partial u}{\partial\xi},\ \frac{\partial u}{\partial\eta}\right\},\\ Bv=\{Kv,\ v,\ Tv,\ K_{\theta}v,\ L_1v,\ L_2v\},\end{gathered}\tag{12}$$

где вектор-функции справа определены соответственно на $\Omega, \gamma, \gamma, \gamma, l_1, l_2$.

Введем теперь в рассмотрение пространство $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ со скалярным произведением

$$[u, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi\, d\eta + \int_\gamma uv ds$$

и нормой

$$\|u\|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi\, d\eta + \int_\gamma u^2 ds, \tag{13}$$

а также пространство $L_2(\Omega_\gamma^l)$ вектор-функций вида

$$f = \left\{ g, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \psi, \chi, \omega \right\}, \tag{14}$$

определенных соответственно на $\Omega, \gamma, \gamma, \gamma, l_1, l_2$.

В пространстве $L_2(\Omega_\gamma^l)$ скалярное произведение и норму определим соотношениями:

$$[f_1, f_2]_{L_2(\Omega_\gamma^l)} = \int_\Omega g_1 g_2 d\xi\, d\eta + \int_\gamma \varphi_1 \varphi_2 ds +$$

$$+ \int_\gamma \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} ds + \int_\gamma \psi_1 \psi_2\, ds + \int_{l_1} \chi_1 \chi_2 d\eta + \int_{l_2} \omega_1 \omega_2 d\xi, \tag{15}$$

$$\|f\|^2_{L_2(\Omega_\gamma^l)} = \int_\Omega g^2 d\xi\, d\eta + \int_\gamma \varphi^2 ds + \int_\gamma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 ds +$$

$$+ \int_\gamma \psi^2 ds + \int_{l_1} \chi^2 d\eta + \int_{l_2} \omega^2 d\xi.$$

Очевидно, что пространство $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ является пространством С. Л. Соболева и эквивалентно пространству $W_2^1(\Omega)$, в котором, как обычно, за норму принимаем

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 + u^2 \right] d\xi\, d\eta. \tag{16}$$

Пространства $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega_\gamma^l)$ будем считать полными. Операторы A и B, определенные соотношениями (12), можно рассматривать действующими из $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega_\gamma^l)$. При этом очевидно, что $\widetilde{W}_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega_\gamma^l)$. Пользуясь принятыми обозначениями (12), (13), равенство (10) можно записать в следующем виде:

$$(Au, Bv) = [u, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}, \tag{17}$$

где скалярное произведение (Au, Bv) обозначает левую часть равенства (10).

Вернемся теперь к уравнению колебаний струны. Пусть в области Ω для уравнения (1) задана следующая граничная задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,t), \quad u|_\gamma = \varphi(s), \quad \frac{\partial}{\partial s}(u|_\gamma) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\gamma = \psi(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{l_1} = \chi(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{l_2} = \omega(s), \tag{18}$$

где правая часть $\left\{g, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \psi, \chi, \omega\right\}$ есть некоторый известный элемент из пространства $L_2(\Omega_\gamma^l)$. Постановка такой задачи, как мы убедимся ниже, следует непосредственно из соотношения (10).

В настоящем параграфе мы установили, собственно, что если левую часть указанной граничной задачи (18) рассматривать как некоторый оператор A, действующий из пространства $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ в пространство вектор-функций $L_2(\Omega_\gamma^l)$, то, согласно соотношениям (10), (12), (17), оператор A является B-симметричным и B-положительным [22]. т. е. для любых гладких элементов u, v имеет место равенство

$$(Au, Bv) = (Bu, Av) \ (B\text{-смметричность})$$

и, кроме того,

$$(Au, Au) > 0 \text{ при } u \neq 0$$

и из условия $(Au, Bu) \to 0$ следует, что

$$\|u\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} \to 0 \, (B\text{-положительность}).$$

Наличие указанных свойств у оператора A позволяет легко исследовать вариационную задачу и дифференциальное уравнение колебаний струны.

§ 2. Вариационная задача для уравнения колебаний струны

Условимся, что под вариационной задачей для уравнения колебаний струны будем понимать задачу на отыскание минимума некоторого квадратичного функционала, обладающего тем свойством, что уравнение колебаний струны является уравнением Эйлера для этого функционала, и решение уравнения реализует строгий минимум указанного функционала.

Заметим, что используемый обычно в математической физике квадратичный функционал для струны

$$J(u) = \int_0^T \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - 2gu\right] dx dt, \tag{19}$$

составленный в соответствии с принципом Гамильтона, не относится к данному классу функционалов, так как не является ограниченным ни сверху, ни снизу. Поэтому для математического исследования уравнения колебаний струны в этом случае не удается непосредственно использовать вариационный принцип, хорошо разработанный для уравнений эллиптического типа.

Чтобы убедиться в неограниченности функционала (19), рассмотрим простейший случай, когда граничные условия для струны заданы в следующем виде:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \tag{20}$$

Вычислим значение функционала (19) на элементе

$$\tilde{u}(x,\ t) = at^n (x^m - xl^{m-1}), \tag{21}$$

где a — некоторый коэффициент; m, n — целые положительные числа.

Очевидно, что элемент вида (21) удовлетворяет граничным условиям (20) и, кроме того, в конечной области — условию

$$\int_0^T \int_0^l \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)^2 \right] dxdt < \infty,$$

обозначающему конечность полной энергии движущейся струны. Подставляя элемент (21) в выражение (19), будем иметь

$$J(\tilde{u}) = \frac{a^2 T^{2n-1} l^{2m+1} (m-1)^2}{3(4n^2-1)(4m^2-1)(m+2)} \left[2n^2 (2n+1)(2m+1) - \right.$$

$$\left. - 3\left(\frac{T}{l} \right)^2 (2n-1)\ (2m+1)\ (m+2) \right] -$$

$$- 2a \int_0^T \int_0^l g(x, t) t^n (x^m - xl^{m-1})\, dxdt = a^2 C(m, n) - 2aD(m, n),$$

откуда видно, что коэффициент $C(m, n)$ при a^2 может принимать как положительное, так и отрицательное значение при соответствующем выборе чисел m и n. Поскольку коэффициент a можно при этом взять произвольным, отсюда заключаем, что функционал $J(\tilde{u})$ может принимать любое значение от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. для функционала (21) имеет место соотношение

$$-\infty \leqslant J(u) \leqslant +\infty.$$

Таким образом, мы убедились, что функционал (21) не является ограниченным ни сверху, ни снизу.

Пользуясь результатами, полученными в § 1, а также методом, изложенным в заметке [23], построим для уравнения колебаний струны (18) квадратичный функционал, ограниченный снизу и позволяющий использовать методы функционального анализа для исследования соответствующих задач.

Согласно [23], для уравнения колебаний струны (18), записанного в виде

$$Au = f, \tag{22}$$

соответствующий функционал для вариационной задачи имеет вид

$$D(u) = (Au, Bu) - 2(f, Bu), \tag{23}$$

где операторы A, B определены соотношениями (11), (12), а элемент f — соотношением (14), причем $f \in L_2(\Omega_\gamma^l)$.

В силу условий (17), (13) функционал (23) может быть записан в виде

$$D(u) = \|u\|^2_{\tilde{W}_2^1(\Omega)} - 2(f, Bu), \tag{24}$$

или с учетом обозначений (11), (13), (14) в более развернутой форме

$$D(u)=\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2\right]d\xi\, d\eta+\int\limits_{\gamma}u^2\,ds-$$

$$-2\int\limits_{\Omega}gKud\xi\, d\eta-2\int\limits_{\gamma}\varphi\, uds-2\int\limits_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial s}Tuds-\int\limits_{\gamma}\psi K_\theta\, uds-$$

$$-2\int\limits_{l_1}\chi L_1ud\eta-2\int\limits_{l_2}\omega L_2\, ud\xi, \tag{25}$$

где линейная часть функционала $D(u)$ обозначает функционал $-2(f, Bu)$.

Нетрудно видеть, что функционал $D(u)$ (24), (25) определен на всем пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, поскольку квадратичная часть его есть просто норма элемента u в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, а функционал (f, Bu) также определен на всех элементах $u\in\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, что непосредственно видно из соотношений (11), (12), (14). Заметим, что в случае, если бы функционал (f, Bu) был определен лишь на множестве функций всюду плотном в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, то его можно было бы распространить по непрерывности на все пространство, поскольку, как убедимся ниже, функционал (f, Bu) является линейным в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, и все дальнейшие рассуждения оставались бы в силе.

Прежде чем рассматривать вариационную задачу (24), докажем, что имеет место следующая

Лемма 1. Для любого элемента $f\in L_2(\Omega_\gamma^l)$ функционал (f, Bu) линеен в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ и при этом справедлива оценка

$$|(f, Bu)|\leqslant c\|f\|_{L_2(\Omega_\gamma^l)}\cdot\|u\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}, \tag{26}$$

верная для всех $u\in\widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

Доказательство. В силу обозначений (11), (12), (14) можно записать

$$(f, Bu)=\int\limits_{\Omega}gKud\xi\, d\eta+\int\limits_{\gamma}\varphi\, uds+\int\limits_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial s}Tuds+$$

$$+\int\limits_{\gamma}\psi K_\theta\, uds+\int\limits_{l_1}\chi L_1ud\eta+\int\limits_{l_2}\omega L_2ud\xi. \tag{26'}$$

Оценим по очереди каждый член в правой части этого равенства. В силу неравенства Коши—Буняковского для первого члена будем иметь

$$\left|\int\limits_{\Omega}gKud\xi\, d\eta\right|=\left|\int\limits_{\Omega}g\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial u}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]d\xi\, d\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\Omega}|g|\left[\left(\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}d\zeta\right)^{1/2}\left(\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial u^2}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta\right)^{1/2}+\right.$$

$$+\left(\int_{\eta}^{\gamma_2} d\tau\right)^{1/2}\left(\int_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial u^2}{\partial \xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right)^{1/2}\Bigg]d\xi\, d\eta. \tag{27}$$

Положив далее

$$c=\sup_{\xi,\eta\in\Omega} 2\{|\gamma_1-\xi|,\quad |\gamma_2-\eta|\}$$

и увеличив пределы интегрирования в правой части (27), получим

$$\left|\int_{\Omega} gKud\,\xi\, d\eta\right|\leqslant c\left(\int_{\Omega} g^2 d\,\xi\, d\eta\right)^{1/2}\left\{\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2\right]d\xi\, d\eta\right\}^{1/2}.$$

Отсюда в силу определения нормы в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ (13) тем более следует оценка

$$\left|\int_{\Omega} g\,Kud\,\xi\, d\eta\right|\leqslant c\left(\int_{\Omega} g^2 d\,\xi\, d\eta\right)^{1/2}\|u\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}. \tag{28}$$

Для второго члена в соотношении (27) оценка совсем элементарна:

$$\left|\int_{\gamma}\varphi\, uds\right|\leqslant\left(\int_{\gamma}\varphi^2 ds\right)^{1/2}\left(\int_{\gamma}u^2 ds\right)^{1/2}\leqslant\left(\int_{\gamma}\varphi^2 ds\right)^{1/2}\|u\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}. \tag{29}$$

Оценим теперь третий член. В силу обозначений (11) имеем

$$\int_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial s}Tuds=\int_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left[-\sin^2\theta\int_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\cos^2\theta\int_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]ds. \tag{30}$$

Для первого интеграла в правой части этого равенства можем написать оценку

$$\left|\int_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\sin^2\theta\left[\int_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta\right]ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\gamma}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right|\cdot\left(\int_{\xi}^{\gamma_1}d\zeta\right)^{1/2}\left(\int_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial u^2}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta\right)^{1/2}d\eta, \tag{31}$$

полученную с учетом того, что

$$d\eta=-\sin\theta\, ds \text{ и } |\sin\theta|\leqslant 1.$$

При этом ξ в соотношении (31) следует заменить собственно величиной $\gamma(\eta)$, если через $\gamma(\eta)$, $\eta^2\leqslant\eta\leqslant\eta^3$ обозначить уравнение участка $\Gamma_2\Gamma_3$ границы Γ (рис. 1).

Увеличивая пределы интегрирования в правой части (31) и применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\left|\int_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\sin^2\theta\left[\int_{\omega}^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta\right]ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant c\left[\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 ds\right]^{1/2}\cdot\left[\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u^2}{\partial\eta}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right]^{1/2}. \tag{32}$$

Совершенно аналогично для второго интеграла в правой части выражения (30) получается оценка

$$\left|\int\limits_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\cos^2\theta\left[\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial u}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 ds\right]^{1/2}\cdot\left[\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u^2}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\right]^{1/2}. \tag{33}$$

Учитывая теперь соотношения (32), (33), (30), получим для третьего члена окончательную оценку

$$\left|\int\limits_{\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial s}Tu\,ds\right|\leqslant c\left[\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 ds\right]^{1/2}\left\{\int\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2\right]d\xi\,d\eta\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant c\left[\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 ds\right]^{1/2}\cdot\|u\|_{\tilde{W}_2^1(\Omega)}\,. \tag{34}$$

Четвертый член правой части равенства оценивается совершенно аналогично третьему члену, а именно

$$\left|\int\limits_{\gamma}\psi K_{\theta}u\,ds\right|=\left|\int\limits_{\gamma}\psi\sin\theta\cos\theta\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial u}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]ds\right|\leqslant c\left[\int\limits_{\gamma}\psi^2 ds\right]^{1/2}\|u\|_{\tilde{W}_2^1(\Omega)}\,. \tag{35}$$

Точно так же для двух последних членов в (26) получим оценки

$$\left|\int\limits_{l_1}\chi L_1 u\,d\eta\right|=\left|\int\limits_{l_1}\chi\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\eta}(\zeta,\eta)\,d\zeta\right]d\eta\right|\leqslant c\left[\int\limits_{l_1}\chi^2 d\eta\right]^{1/2}\cdot\|u\|_{\tilde{W}_2^1(\Omega)}\,, \tag{36}$$

$$\left|\int\limits_{l_2}\omega L_2 u\,d\xi\right|=\left|\int\limits_{l_2}\omega\left[\int\limits_{\eta}^{\gamma_2}\frac{\partial u}{\partial\xi}(\xi,\tau)\,d\tau\right]d\xi\right|\leqslant c\left[\int\limits_{l_2}\omega^2 d\xi\right]^{1/2}\cdot\|u\|_{\tilde{W}_2^1(\Omega)}\,. \tag{37}$$

Пользуясь теперь оценками (28), (29), (34)—(37), для функционала (f, Bu) (26′) можно написать общую оценку

$$|(f,Bu)|\leqslant c\left\{\left[\int\limits_{\Omega}g^2 d\xi\,d\eta\right]^{1/2}+\left[\int\limits_{\gamma}\varphi^2 ds\right]^{1/2}+\left[\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 ds\right]^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\left[\int\limits_{\gamma}\psi^2 ds\right]^{1/2}+\left[\int\limits_{l_1}\chi^2 d\eta\right]^{1/2}+\left[\int\limits_{l_2}\omega^2 d\xi\right]^{1/2}\right\}\cdot\|u\|_{\tilde{W}_2^1(\Omega)}\leqslant$$

$$\leqslant c\|f\|_{L_2(\Omega_{\gamma}^{l})}\cdot\|u\|_{\tilde{W}_2^1(\Omega)}\,,$$

где c — некоторая константа, зависящая лишь от области Ω.

При последнем переходе здесь использовано неравенство

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant \sqrt{n}\,(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{1/2}$$

и определение нормы (15) в пространстве $L_2(\Omega_\gamma^l)$. Лемма 1 тем самым доказана.

Таким образом, нами установлено, что функционал (f, Bu) действительно ограничен в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

Перейдем теперь к исследованию вариационной задачи (24) для уравнения колебаний струны. Будем искать минимум функционала $D(u)$ на классе функций $u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$, не подчиненных никаким граничным условиям, поскольку соответствующие граничные условия включены в функционал (24).

Покажем, что верна

Теорема 1. *Для любого элемента $f \in L_2(\Omega_\gamma^l)$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$ существует единственное решение вариационной задачи, соответствующей функционалу $D(u)$.*

При этом вариационная задача является корректно поставленной в том смысле, что малому изменению элемента f в пространстве $L_2(\Omega_\gamma^l)$ соответствует малое изменение искомого решения в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Доказательство теоремы проводится по обычной схеме (см., например, [1]), используемой для исследования эллиптических уравнений вариационным методом.

Установим прежде всего, что функционал $D(u)$ ограничен снизу.

Для этого воспользуемся результатами леммы 1. Учитывая оценку (26) для функционала (f, Bu), можем записать

$$D(u) = \| u \|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} - 2(f, Bu) \geqslant \| u \|^2_{W_2^1(\Omega)} - 2(f, Bu) \geqslant$$

$$\geqslant \| u \|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} - 2c \| f \|_{L_2(\Omega_\gamma^l)} \| u \|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} \geqslant$$

$$\geqslant \left[\| u \|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} - c \| f \|_{L_2(\Omega_\gamma^l)} \right]^2 - c^2 \| f \|^2_{L_2(\Omega_\gamma^l)} \geqslant - c^2 \| f \|_{L_2(\Omega_\gamma^l)} .$$

Отсюда заключаем, что для любых элементов $u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$

$$d \leqslant D(u) < \infty, \tag{38}$$

где d — точная нижняя грань функционала $D(u)$.

По определению точной нижней грани в $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ можно указать минимизирующую последовательность $\{u_n\}$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} D(u_n) = d. \tag{39}$$

Покажем, что эта последовательность сходится в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ к некоторому элементу u_0, являющемуся решением вариационной задачи. Для этого достаточно установить, что последовательность $\{u_n\}$ будет фундаментальной в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, т. е.

$$\| u_m - u_n \|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} \underset{m,\, n \to \infty}{\to} 0.$$

Очевидно, числа m и n можно выбрать настолько большими, что для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ будет

$$D(u_n) \leqslant d + \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad D(u_m) \leqslant d + \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{40}$$

Для элемента $\frac{u_m + u_n}{2}$, который также принадлежит $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, в силу условия (38) будем иметь

$$D\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right) \geqslant d. \tag{41}$$

Рассматривая теперь очевидное тождество

$$\left\|u_m - u_n\right\|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} = 2D(u_m) + 2D(u_n) - 4D\left(\frac{u_m + u_n}{2}\right), \tag{42}$$

на основании соотношений (40), (41) получим

$$\left\|u_m - u_n\right\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} \leqslant \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности ε следует, что последовательность $\{u_n\}$ будет действительно фундаментальной в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

Но поскольку $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ полное пространство, отсюда следует, что для последовательности $\{u_n\}$ существует предельный элемент $u_0 \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$, для которого

$$\left\|u_n - u_0\right\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} \underset{n \to \infty}{\to} 0. \tag{43}$$

Покажем теперь, что нижняя грань функционала $D(u)$ достигается именно на элементе u_0. Действительно, пользуясь неравенством (26), можем записать:

$$\begin{gathered} \left|D(u_0) - D(u_n)\right| \leqslant \left|\left\|u_0\right\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \left\|u_n\right\|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}\right| + \\ + 2\left|(Bu_0 - Bu_n, f)\right| \leqslant \left|\left\|u_0\right\|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} - \left\|u_n\right\|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}\right| + \\ + 2c\left\|f\right\|_{L_2(\Omega_2^l)}\left\|u_0 - u_n\right\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}. \end{gathered} \tag{44}$$

На основании соотношения (43) правая часть этого неравенства при $n \to \infty$ стремится к нулю, поэтому получаем

$$\lim_{n \to \infty} |D(u_0) - D(u_n)| = 0,$$

откуда в силу условия (39) следует, что

$$D(u_0) = d,$$

т. е. элемент u_0 действительно реализует минимум функционала $D(u)$.

Пространства $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ (см. (13), (16)) являются эквивалентными, поэтому $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ и имеет место условие

$$\left\|u_n - u_0\right\|_{W_2^1(\Omega)} \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

вытекающее непосредственно из (43).

Покажем теперь, что решение u_0 единственно в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ и соответственно в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Допустим, что существует, кроме u_0, еще решение u_0' вариационной задачи, тогда очевидно

$$D(u_0) = d \quad \text{и} \quad D(u_0') = d,$$

кроме того,

$$D\left(\frac{u_0 + u_0'}{2}\right) \geqslant d.$$

Пользуясь соотношением (42), где вместо u_m, u_n поставим u_0, u_0', получим

$$\left\| u_0 - u_0' \right\|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} \leqslant 2d + 2d - 4d = 0,$$

откуда следует, что

$$\left\| u_0 - u_0' \right\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} = 0$$

или

$$u_0 = u_0'.$$

То есть действительно, в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, а в силу эквивалентности и в пространстве $W_2^1(\Omega)$ решение u_0 вариационной задачи единственно. Теорема тем самым доказана.

Перейдем теперь к рассмотрению дифференциального уравнения колебаний струны (18).

§ 3. Обобщенное решение уравнения колебаний струны

Решение вариационной задачи (24) тесно связано с понятием обобщенного решения для уравнения колебаний струны (18), которое перепишем здесь в переменных ξ, η:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = g, \quad u|_\gamma = \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial s}(u|_\gamma) = \frac{\partial \varphi}{\partial s},$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\gamma = \psi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{l_1} = \chi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{l_2} = \omega, \tag{45}$$

где элемент $f = \{g, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \psi, \chi, \omega\} \in L_2(\Omega_\gamma^l)$.

В этом параграфе мы определим двумя способами обобщенное решение задачи (49) (через интегральное и через предельное соотношение), и покажем, что обобщенное решение задачи (45) и решение вариационной задачи (24) совпадают в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

Определение 1. Элемент $u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ будем называть обобщенным решением задачи (45), если для любого элемента $v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ выполняется равенство

$$(f, Bv) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) d\xi \, d\eta + \int_\gamma uv\, ds, \tag{46}$$

где функционал (f, Bv) имеет вид (26′).

Рассмотрим несколько более подробно введенное определение обобщенного решения.

Справедлива следующая

Лемма 2. *Для того чтобы элемент $u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ являлся обобщенным решением задачи (45), необходимо и достаточно, чтобы в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ нашлась последовательность гладких функций $\{u_k\}$, таких, что одновременно выполняются соотношения*

$$\left\|u_k - u\right\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\to} 0, \tag{47}$$

$$(Au_k - f, Bv) \underset{k\to\infty}{\to} 0, \tag{48}$$

причем последнее условие выполняется для любого элемента $v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

Пусть u является обобщенным решением задачи (45). По определению, для элемента u справедливо соотношение (46). В силу свойства пространства $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ можно выбрать в нем последовательность гладких функций $\{u_k\}$, которая будет сходиться в $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ к элементу u, т. е. будет иметь место условие (47).

Пользуясь обозначением (13), запишем равенство (46) в виде

$$(f, Bv) = [u, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)},$$

и для гладких элементов u_k, v на основании (17) будем иметь также равенство

$$(Au_k, Bv) = [u_k, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}. \tag{49}$$

Вычитая эти равенства одно из другого, получим

$$\left|(Au_k - f, Bv)\right| = \left|[u_k - u, v]\right|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} \leqslant \left\|v\right\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} \cdot \left\|u_k - u\right\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)},$$

откуда в силу сходимости $\{u_k\}$ к u в пространстве $W_2^1(\Omega)$ вытекает условие (48). Таким образом, необходимость условий (47), (48) установлена

Докажем теперь достаточность. Пусть дано, что для некоторого элемента $u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ существует последовательность гладких функций $\{u_k\}$, таких, что имеют место соотношения (47), (48). Нужно показать, что в этом случае элемент u заведомо будет обобщенным решением задачи (45).

Рассмотрим для этого следующее соотношение:

$$|(f, Bv) - [u, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}| \leqslant |(-Au_k + f, Bv)| +$$
$$+ |(Au_k, Bv) - [u_k, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}| + |[u_k - u, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}|. \tag{50}$$

Учитывая равенство (49), а также условия (47), (48), получаем, что правая часть неравенства (50) может быть сколь угодно мала, откуда следует, что

$$(f, Bv) - [u, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} = 0.$$

Но это неравенство есть не что иное, как соотношение (46), определяющее обобщенное решение. Таким образом, установлено, что выполнение условий (47), (48) достаточно, чтобы элемент u был обобщенным решением задачи (45). Лемма полностью доказана.

Соотношения (47), (48) можно рассматривать так же, как определение обобщенного решения задачи (45), эквивалентное определению 1.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании обобщенного решения задачи (45).

Имеет место следующая

Теорема 2. *При любой правой части $f \in L_2(\Omega_\gamma^l)$ в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ существует и единственно обобщенное решение задачи (45) о колебаниях струны.*

При этом указанное обобщенное решение и решение соответствующей вариационной задачи совпадают.

Для доказательства убедимся, что решение u_0 вариационной задачи (24), существование и единственность которого установлены теоремой 1, будет обобщенным решением задачи (45) в смысле определения 1. Кроме того, покажем, что любое обобщенное решение будет также и решением вариационной задачи (24). Пусть u_0 есть решение вариационной задачи. Тогда по определению для любого $u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$

$$D(u_0) \leqslant D(u).$$

Положив $u = u_0 + tv$, где v — произвольный элемент из $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, а t — некоторый параметр, получим

$$D(u_0 + tv) - D(u_0) = \| u_0 + tv \|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} -$$
$$- \| u_0 \|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} - 2(f, Bu_0 + tBv - Bu_0) \geqslant 0,$$

откуда следует соотношение

$$t^2 \| v \|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} - 2t[(f, Bv) - [u_0, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}] \geqslant 0.$$

Но это возможно лишь в случае, если

$$(f, Bv) - [u_0, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} = 0. \tag{51}$$

Поскольку элемент v может быть при этом произвольным из $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, из равенства (51) с учетом (13), (46) следует, что u_0 является обобщенным решением задачи (45). Покажем теперь, что если некоторый элемент $u_0' \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (45), то u_0' будет также и решением вариационной задачи (24).

Действительно, равенство (46) для элемента u_0' справедливо при любом $v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$. Тогда можно записать равенство

$$(f, Bu) = \int_\Omega \left(\frac{\partial u_0'}{\partial \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u_0'}{\partial \eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\xi\, d\eta + \int_\gamma u_0' u\, ds = [u_0', u]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}$$

и функционал $D(u)$ (24) можно, следовательно, представить в виде

$$D(u) = \| u \|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} - 2(f, Bu) = \| u \|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} - 2[u_0', u]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} =$$
$$= \| u - u_0' \|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} - \| u_0' \|^2_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}. \tag{52}$$

Отсюда непосредственно видно, что минимум функционала $D(u)$ достигается на элементе u_0', т. е. u_0' действительно является решением вариационной задачи. Единственность обобщенного решения непосредственно следует из проведенных рассуждений. Действительно, мы показали, что всякое обобщенное решение будет также и решением вариационной задачи, но поскольку, согласно теореме 1, решение вариационной задачи единственно, то будет единственным и обобщенное решение задачи (45). Для доказательства единственности обобщенного решения можно воспользоваться также и непосредственно определением (46). Пусть u_0 и u_0' — два обобщенных решения задачи (45). Тогда, очевидно, для них должны выполняться соотношения (46), (13)

$$(f, Bv) = [u_0, v]_{\tilde{W}_2^1(\Omega)}, \quad (f, Bv) = [u_0', v]_{\tilde{W}_2^1(\Omega)},$$

откуда вычитанием получаем равенство

$$[u_0 - u_0', v]_{\tilde{W}_2^1(\Omega)} = 0,$$

справедливое для всех $v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

Из этого равенства следует, что

$$u_0 = u_0'.$$

Таким образом, нами установлено, что при любой правой части $f \in L_2(\Omega_\gamma^l)$ обобщенное решение задачи (45) существует и единственно и, кроме того, совпадает в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ с решением вариационной задачи. Тем самым теорема доказана.

Из теоремы 2 вытекает следующее

Следствие. *Получение обобщенного решения задачи (45) и разрешение вариационной задачи (24) являются эквивалентными задачами в том смысле, что любое решение вариационной задачи является обобщенным решением задачи (45) и, наоборот, любое обобщенное решение задачи (45) будет также и решением вариационной задачи (24).*

§ 4. Дифференциальные свойства обобщенного решения

Перейдем теперь к рассмотрению дифференциальных свойств обобщенного решения задачи (45) и исследуем вопрос об удовлетворении дифференциального уравнения и граничных условий. Напомним, что все проводимые выше рассуждения, и в частности лемма 1, относились к тому случаю, когда граница Γ области Ω (рис. 1) может содержать участки, совпадающие с характеристиками ξ или η. Область Ω в общем случае имеет, следовательно, вид, изображенный на рис. 2, где приняты следующие обозначения: Γ_2, Γ_3 — точки опирания области Ω на характеристики ξ, η; l_i^j $(i, j = 1, 2)$ и γ', γ'' — части контура Γ, пересекаемые каждой из характеристик ξ, η не более чем в одной точке; ξ_i, η_i $(i = 0, 1, 2)$ — части контура Γ, совпадающие соответственно с характеристиками ξ, η.

В дальнейшем будем использовать также обозначения

$$\gamma_n = \gamma'' + \gamma', \quad \gamma = \gamma'' + \xi_0 + \eta_0 + \gamma',$$
$$l_1 = l_1^2 + l_1^1, \quad l_2 = l_2^1 + l_2^2, \tag{53}$$

и, как и ранее (см. рис. 1—2), считаем, что

$$\gamma_1 = l_2^1 + \eta_1 + l_2^2 + \eta_2, \quad \gamma_2 = \xi_2 + l_2^2 + \xi_1 + l_1^1. \tag{54}$$

Постановка граничных задач для области вида, указанного на рис. 2, будет отличаться, вообще говоря, от постановки аналогичных задач для области Ω (рис. 1). Постановка названных задач отличается за счет того, что на участках ξ_i, η_i (см. рис. 2) обращаются в нуль соответственно величины $\sin\theta$, $d\eta$ и $\cos\theta$, $d\xi$. Поэтому, как видно из соотношений (10)—(12), на участках ξ_i, η_i $(i = 0, 1, 2)$ не нужно задавать соответствующие граничные условия.

Граничная задача для уравнения колебаний струны (45) в случае области общего вида (рис. 2) соответствует ситуации, когда длина струны является во время колебаний величиной переменной (т. е. точки Γ_2 и Γ_3 в зависимости от времени t движутся по кривым l_1, l_2 (см. рис. 2), а „начальный прогиб" и „начальная скорость" струны задаются на участке $\Gamma_2\Gamma_3$ не в нулевой момент времени, а для разных точек струны в разное время (рис. 2).

При этом в любой момент времени t концы струны могут быть «освобождены» и через некоторое время снова «закреплены» в определенном месте.

Далее на участках ξ_0, η_0 (рис. 2) нужно задавать лишь значения „начального прогиба" струны и не требуется задавать при этом еще и „начальную скорость" струны.

Таким образом, в случае общей области, указанной на рис. 2, для граничной задачи колебаний струны задаются значения искомой функции на участке $\gamma'' + \xi_0 + \eta_0 + \gamma'$, значения нормальной производной на участке $\gamma' + \gamma''$ и значения $\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ соответственно на участках $l_1^1 + l_1^2$ и $l_2^2 + l_2^1$. На участках $\xi_i \eta_i$ $(i = 1, 2)$ не задается никаких граничных условий. Следовательно, граничная задача для уравнения колебаний струны в случае области общего вида (рис. 2) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta} = g, \quad u|_\gamma = \varphi, \quad \frac{\partial}{\partial s}(u|_\gamma) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\gamma' + \gamma''} = \psi$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{l_1^1 + l_1^2} = \chi, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{l_2^2 + l_2^1} = \omega. \tag{55}$$

Очевидно, что граничная задача (45) для области Ω, указанной на рис. 1, будет частным случаем общей граничной задачи (55) для области, указанной на рис. 2.

Правая часть уравнения (55) $f = \left\{g,\ \varphi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial s},\ \psi,\ \chi,\ \omega\right\}$ по-прежнему принадлежит пространству $L_2(\Omega_\gamma^l)$. Заметим, что в определении нормы (15) в пространстве $L_2(\Omega_\gamma^l)$ в случае области общего вида (рис. 2), интеграл от $\psi_1\psi_2$ и от ψ^2 берется не по всему участку γ, а лишь по $\gamma' + \gamma''$, так как во всех других соотношениях (см. (10) — (12)) интегралы от члена с величиной $\frac{\partial u}{\partial n}$ по участку $\xi_0 + \eta_0$ исчезают.

Обобщенное решение задачи (55), аналогично (46), определяется соотношением

$$(f, Bv) = \int_\Omega gKv\, d\xi\, d\eta + \int_\gamma \varphi\, v\, ds + \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial s} Tv\, ds + \int_{\gamma_n} \psi\, K_\theta\, v\, ds +$$

$$+\int_{l_1}\chi L_1 v d\eta+\int_{l_2}\omega L_2 v d\xi=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u_0}{\partial\xi}\frac{\partial v}{\partial\xi}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial u_0}{\partial\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)d\xi d\eta+\int_{\gamma}u_0 v ds, \tag{56}$$

справедливым при любом $v\in\widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

Существование и единственность обобщенного решения (56) для граничной задачи (55) вытекает из доказанной ранее теоремы 2, поскольку область Ω, для которой доказывалась теорема 2, могла иметь участки границы, совпадающие с характеристиками ξ, η и, следовательно, могла иметь вид области, указанной на рис. 2. Считая поэтому соотношение (56) установленным, покажем, что обобщенное решение u_0 граничной задачи (55) будет также и решением задачи (55) в некотором сильном смысле, а именно решением почти всюду. Введем для этого

Определение 2. Элемент u_0 будем называть сильным решением почти всюду граничной задачи (55), если $u_0\in\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ имеет, кроме того, смешанную обобщенную производную по ξ, η и выполняются равенства

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta}-g=0,\quad u_0|_{\gamma}-\varphi=0 \tag{57}$$

почти всюду соответственно на Ω и γ, а остальные граничные условия в (55) удовлетворяются в слабом смысле, а именно для любой гладкой последовательности элементов $\{u_k\}$, удовлетворяющей условию

$$\left\|u_k-u_0\right\|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}\underset{k\to\infty}{\to}0, \tag{58}$$

имеют место соотношения

$$\int_{\gamma_n}\left(\frac{\partial u_k}{\partial n}-\psi\right)\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot u ds\underset{k\to\infty}{\to}0,\quad \int_{l_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial\eta}-\chi\right)v d\eta\underset{k\to\infty}{\to}0,$$

$$\int_{l_2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial\xi}-\omega\right)w d\xi\underset{k\to\infty}{\to}0 \tag{59}$$

для любых гладких функций u, v, w, определенных на Ω.

Введем еще пространство $W_2^{(1,1)}(\Omega)$ с нормой

$$\left\|u\right\|^2_{W_2^{(1,1)}(\Omega)}=\int_{\Omega}\left[u^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2\right]d\xi d\eta, \tag{60}$$

являющееся пространством С. Л. Соболева.

Введя указанные понятия, можно рассмотреть теперь вопрос о существовании и единственности сильного решения, удовлетворяющего почти всюду уравнению колебаний струны. Предварительно покажем, что имеет место следующая

Лемма 3. *Для гладких функций* $\overset{\circ}{g}$ *и* $\overset{\circ}{\varphi}$, *заданных соответственно на* Ω *и* γ, *существует единственный элемент* $\overset{\circ}{v}\in\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ *такой, что для любого* $u\in\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ *выполняется соотношение*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta + \int_{\gamma} u \overset{\circ}{\varphi} ds = [u, \overset{\circ}{v}]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)} \tag{61}$$

и почти всюду в Ω *имеет место равенство*

$$K\overset{\circ}{v} = \overset{\circ}{g}. \tag{62}$$

Пусть заданы конкретные функции $\overset{\circ}{g}$ и $\overset{\circ}{\varphi}$, определенные соответственно на Ω и γ. Нетрудно видеть, что для функционала, стоящего в левой части равенства (61), справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta + \int_{\gamma} u \overset{\circ}{\varphi} ds \right| \leqslant C \| u \|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C_1 \| u \|_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)},$$

поскольку нормы в пространствах $W_2^1(\Omega)$ и $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ эквивалентны. Указанный функционал является, следовательно, ограниченным линейным в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$, и, согласно теореме Рисса, представим в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ единственным образом в виде скалярного произведения, т. е. соотношение (61) действительно имеет место для любого $u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

Для доказательства равенства (62) преобразуем несколько соотношение (61). Для правой части (61) будем иметь

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta + \int_{\gamma} u\overset{\circ}{v} ds =$$

$$= \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \xi} \left[\int_{\eta}^{\gamma_2} \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial \xi} (\xi, \tau) d\tau \right] d\xi - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} \left[\int_{\xi}^{\gamma_1} \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial \eta} (\zeta, \eta) d\zeta \right] d\eta +$$

$$+ \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left[\int_{\eta}^{\gamma_2} \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial \xi} (\xi, \tau) d\tau + \int_{\xi}^{\gamma_1} \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial \eta} (\zeta, \eta) d\zeta \right] d\xi d\eta + \int_{\gamma} u\overset{\circ}{v} ds$$

и соответственно для левой части

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta + \int_{\gamma} u \overset{\circ}{\varphi} ds =$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \overset{\circ}{g} d\xi d\eta + \int_{\gamma} u \overset{\circ}{\varphi} ds + \int_{\Gamma} u \frac{\partial \overset{\circ}{g}}{\partial \xi} d\xi + \int_{\Gamma} \overset{\circ}{g} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta,$$

откуда получаем следующее равенство:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \overset{\circ}{g} d\xi d\eta + \int_{\gamma} u \overset{\circ}{\varphi} ds + \int_{\Gamma} u \frac{\partial \overset{\circ}{g}}{\partial \xi} d\xi + \int_{\Gamma} \overset{\circ}{g} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \xi}\left[\int\limits_{\eta}^{\gamma_2} \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial \xi}(\xi, \tau)\, d\tau\right] d\xi - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta}\left[\int\limits_{\xi}^{\gamma_1} \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial \eta}(\zeta, \eta)\, d\zeta\right] d\eta +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} K\overset{\circ}{v} d\xi\, d\eta + \int\limits_{\gamma} u\overset{\circ}{v} ds, \tag{63}$$

справедливое для любой гладкой функции u.

Выберем функцию u и в следующем виде:

$$u = \int\limits_{\gamma_1}^{\xi}\int\limits_{\gamma_2}^{\eta} W(\zeta, \tau)\, d\zeta\, d\tau + C(\xi) + D(\eta), \tag{63'}$$

где $W(\zeta, \tau)$ — некоторая гладкая функция (вообще говоря, произвольная), а $C(\xi)$, $D(\eta)$ подобраны так, чтобы для фиксированного $W(\zeta, \tau)$ контурные интегралы в равенстве (63) обратились тождественно в нуль. Тогда, подставив элемент (63′) в равенство (63), получим условие:

$$\int\limits_{\Omega} (K\overset{\circ}{v} - \overset{\circ}{g})\, w\, d\xi\, d\eta = 0,$$

откуда в силу произвольности выбора элемента $W(\zeta, \tau)$ и следует равенство (62).

Лемма 3 тем самым доказана. Докажем теперь, что имеет место

Теорема 3. *При любой правой части $f \in L_2(\Omega_\gamma^l)$ и области Ω вида, указанного на рис. 2, с кусочно-дифференцируемой границей Γ существует единственное сильное решение u_0 граничной задачи (55), являющееся также решением вариационной задачи (24). При этом решение u_0 имеет обобщенные производные $\partial u_0/\partial\xi$, $\partial u_0/\partial\eta$, $\partial^2 u_0/\partial\xi\partial\eta$; принадлежит пространству $W_2^{(1,1)}(\Omega)$ и удовлетворяет почти всюду уравнению (55).*

Кроме того, граничная задача (55) является корректно поставленной задачей в том смысле, что малому изменению правой части в пространстве $L_2(\Omega_\gamma^l)$ соответствует малое изменение решения u_0 в пространстве $W_2^{(1,1)}(\Omega)$.

Для доказательства теоремы покажем, что элемент u_0, являющийся решением вариационной задачи (24) и обобщенным решением задачи (55) в смысле определения (56), будет также сильным решением и удовлетворяет почти всюду уравнению (55).

Покажем сначала, что почти всюду на γ выполняется равенство:

$$u_0|_\gamma - \varphi = 0. \tag{64}$$

Для этого рассмотрим функционал

$$l(v) = (f, Bv) - \int\limits_{\gamma} \varphi v\, ds + \int\limits_{\gamma} u_0 v\, ds, \tag{65}$$

который так же, как и функционал (f, Bv) (см. лемму 1), будет линейным в пространстве $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$. Поэтому на основании теоремы Рисса функционал (65) представим в виде скалярного произведения, т. е.

$$(f, Bv) + \int\limits_{\gamma} (u_0 - \varphi)\, v\, ds = [u_1, v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}, \tag{66}$$

где u_1 — некоторый фиксированный элемент из $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

Наряду с этим рассмотрим равенство (56), которое запишем в виде

$$(f,\ Bv) = [u_0,\ v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}. \tag{67}$$

Вычитая равенства (66) и (67), получим следующее соотношение:

$$\int\limits_{\gamma} (u_0 - \varphi)\, v ds = [u_1 - u_0,\ v]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}, \tag{68}$$

справедливое при любом $v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$.

Раскрыв это соотношение и проинтегрировав по частям, получим

$$\int\limits_{\gamma} (u_0 - \varphi)\, v ds - \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) \frac{\partial v}{\partial \eta}\, d\xi\, d\eta - \int\limits_{\gamma} (u_1 - u_0)\, v ds +$$
$$+ \int\limits_{\Gamma} (u_1 - u_0) \frac{\partial v}{\partial \xi}\, d\eta = \int\limits_{\Omega} (u_1 - u_0) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\, d\xi\, d\eta, \tag{69}$$

где v — гладкая функция.

Но поскольку равенство (69) имеет место для любой гладкой функции v, выберем v в следующем виде:

$$v = \int\limits_{\gamma_1}^{\xi} \int\limits_{\gamma_1}^{\rho} w(\zeta,\ \eta)\, d\zeta\, d\rho + \xi C(\eta) + D(\eta),$$

где w — заданная функция, а $C(\eta)$, $D(\eta)$ выбраны так, чтобы при фиксированном w левая часть равенства (69) тождественно обращалась в нуль. Подставив указанный элемент v в равенство (69), получим

$$\int\limits_{\Omega} (u_1 - u_0)\, w d\xi\, d\eta = 0,$$

откуда в силу произвольности выбора элемента w заключаем, что почти всюду в Ω имеет место равенство

$$u_1 - u_0 = 0.$$

Но тогда на основании равенства (69) следует, что при любом $v \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$ имеет место соотношение

$$\int\limits_{\gamma} (u_0 - \varphi)\, v ds = 0.$$

Из этого соотношения и следует, собственно, утверждение (65), поскольку для любой гладкой функции, заданной на участке γ, можно построить в нашем случае продолжение в область Ω такое, что это продолжение будет принадлежать пространству $\widetilde{W}_2^1(\Omega)$ (см., например, (25)). Таким образом, справедливость утверждения (64) установлена.

Покажем теперь, что элемент u_0, являющийся решением вариационной задачи (24) и обобщенным решением граничной задачи (55), имеет суммируемую с квадратом смешанную обобщенную производную $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial \xi\, \partial \eta}$.

Пусть задана некоторая гладкая финитная в Ω функция $\overset{\circ}{g}$ и определенная на γ функция $\overset{\circ}{\varphi} = 0$, для которых, согласно лемме 13, существует элемент, такой, что имеет место равенство

$$K\overset{\circ}{v} = \int\limits_{\xi}^{\gamma_1} \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial \eta}(\zeta, \eta)\, d\zeta + \int\limits_{\eta}^{\gamma_2} \frac{\partial \overset{\circ}{v}}{\partial \xi}(\xi, \tau)\, d\tau = \overset{\circ}{g}. \tag{70}$$

Из этого равенства в силу финитности функции $\overset{\circ}{g}$ следуют соотношения

$$K_\theta \overset{\circ}{v}\big|_{\gamma_n} = 0, \quad L_1 \overset{\circ}{v}\big|_{l_1} = 0, \quad L_2 \overset{\circ}{v}\big|_{l_2} = 0, \tag{71}$$

где использованы обозначения (11). С учетом равенств (70), (71) соотношение (56) при $v = \overset{\circ}{v}$ примет следующий вид:

$$\int\limits_{\Omega} g\overset{\circ}{g}\, d\xi\, d\eta + \int\limits_{\gamma} \varphi\, \overset{\circ}{v} ds + \int\limits_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial s} T\overset{\circ}{v}\, ds = [u_0, v]_{\tilde{W}_2^1(\Omega)}, \tag{72}$$

где элементы $\overset{\circ}{g}$ и $\overset{\circ}{v}$ связаны равенством (70). Рассмотрим, кроме того, соотношение (10), которое будет справедливым и при $v = \overset{\circ}{v}$. С учетом равенств (70), (71) и обозначений (11), (13) соотношение (10) можно переписать в следующем виде:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \eta}\overset{\circ}{g} d\xi\, d\eta + \int\limits_{\gamma} u\overset{\circ}{v} ds + \int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial s} T\overset{\circ}{v} ds = [u, \overset{\circ}{v}]_{\tilde{W}_2^1(\Omega)}, \tag{73}$$

где функция u — гладкая, а $\overset{\circ}{g}$, $\overset{\circ}{v}$ по-прежнему связаны равенством (70). Проведя интегрирование по частям первого члена в (73) с учетом финитности $\overset{\circ}{g}$, получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega} u \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}}{\partial \xi\, \partial \eta} d\xi\, d\eta + \int\limits_{\gamma} u\overset{\circ}{v} ds + \int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial s} T\overset{\circ}{v} ds = [u, \overset{\circ}{v}]_{\tilde{W}_2^1(\Omega)}, \tag{74}$$

справедливое для гладких функций u. Но, с другой стороны, леммой 3 установлено равенство (61), верное для любого элемента $u \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$. Сравнивая равенства (74) и (61), для гладких функций u получим следующее условие:

$$\int\limits_{\gamma} u\overset{\circ}{v}\, ds + \int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial s} T\overset{\circ}{v} ds = \int\limits_{\gamma} u\overset{\circ}{\varphi}\, ds$$

или, переписав,

$$\int\limits_{\gamma} u(\overset{\circ}{v} - \overset{\circ}{\varphi})\, ds = -\int\limits_{\gamma} \frac{\partial u}{\partial s} T\overset{\circ}{v} ds. \tag{75}$$

Покажем, что из этого условия следует существование обобщенной производной по s от элемента $T\overset{\circ}{v}\big|_{\gamma}$. Действительно, элемент $\overset{\circ}{v}$ выбран так, что для гладкой финитной функции $\overset{\circ}{g}$ выполняется равенство (70). Но поскольку правая часть равенства (70) заведомо принадлежит пространству $\tilde{W}_2^1(\Omega)$, каждое из слагаемых левой части (70) имеет суммируемую с квадратом обобщенную производную соответственно по ξ и по η, следовательно, каждое из слагаемых в левой части также принадлежит пространству $\tilde{W}_2^1(\Omega)$. А тогда, пользуясь выражением для Tv (11), заключаем, что элемент $T\overset{\circ}{v} \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$, и поэтому можно говорить о следе элемента $T\overset{\circ}{v}$ на γ. В силу соотношения (75) получаем, что указанный след имеет, кроме того, обобщенную производную по s и при этом выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial s}(T\overset{\circ}{v}|_{\gamma}) = \overset{\circ}{v}|_{\gamma} - \overset{\circ}{\varphi}, \tag{76}$$

откуда заключаем, что элемент $T\overset{\circ}{v}|_{\gamma}$ является абсолютно непрерывной функцией от s, и поэтому мы можем говорить о значении $T\overset{\circ}{v}|_{\gamma}$ в любой точке на γ. Из соотношения (70) и (11) в силу финитности $\overset{\circ}{g}$ и обращения в 0 в точках Γ_2, Γ_3 соответствующих интегралов следует, что элемент $T\overset{\circ}{v}|_{\gamma}$ обращается в нуль на концах интервала γ.

С учетом условия (70) и равенства нулю элемента $T\overset{\circ}{v}|_{\gamma}$ в точках Γ_2, Γ_3 контурные интегралы в соотношении (72) преобразуются следующим образом:

$$\int\limits_{\gamma} \varphi\,\overset{\circ}{v} ds + \int\limits_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial s} T\overset{\circ}{v} ds = \int\limits_{\gamma} \varphi\,\overset{\circ}{v} ds - \int\limits_{\gamma} \varphi \frac{\partial}{\partial s} T\overset{\circ}{v} ds = \int\limits_{\gamma} \varphi\overset{\circ}{\varphi}\, ds.$$

Тогда соотношение (72) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega} g\overset{\circ}{g} d\xi\, d\eta + \int\limits_{\gamma} \varphi\overset{\circ}{\varphi}\, ds = [u_0,\ \overset{\circ}{v}]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)},$$

и запишем, кроме того, равенство (61) в случае $u = u_0$ (так как равенство (61) справедливо при любом $u \in \widetilde{W}_2^1(\Omega)$).

$$\int\limits_{\Omega} u_0 \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}}{\partial \xi\, \partial \eta} d\xi d\eta + \int\limits_{\gamma} u_0 \overset{\circ}{\varphi}\, ds = [u_0,\ \overset{\circ}{v}]_{\widetilde{W}_2^1(\Omega)}.$$

Из записанных соотношений в силу условия (64) вытекает окончательное равенство

$$\int\limits_{\Omega} g\overset{\circ}{g} d\xi\, d\eta = \int\limits_{\Omega} u_0 \frac{\partial^2 \overset{\circ}{g}}{\partial \xi\, \partial \eta} d\xi\, d\eta.$$

Но поскольку в качестве $\overset{\circ}{g}$ мы могли взять любую гладкую финитную в Ω функцию, то отсюда следует (см., например, (1)), что элемент u_0 имеет обобщенную смешанную производную по ξ, η, причем почти всюду в Ω выполняется равенство

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi\, \partial \eta} - g = 0. \tag{77}$$

В силу суммируемости с квадратом функции g (см. (15)), из условия (77) вытекает суммируемость с квадратом смешанной обобщенной производной по ξ, η от функции u_0.

Таким образом, мы установили, что элемент u_0 действительно имеет обобщенную смешанную производную $\dfrac{\partial^2 u_0}{\partial \xi\, \partial \eta}$ и принадлежит пространству $W_2^{(1,1)}(\Omega)$.

Рассмотрим теперь вопрос об удовлетворении граничных условий в задаче (55).

Ранее было показано (см. (64)), что искомое решение u_0 задачи (55) совпадает почти всюду на участке γ с заданными значениями φ.

Покажем, что остальные граничные условия задачи (55) удовлетворяются в слабом смысле (58)—(59). Для этого выберем последовательность гладких функций $\{u_k\}$, таких, для которых выполняется условие

$$\left\| u_k - u_0 \right\|_{\tilde{W}_2^{(1,1)}(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\to} 0 \tag{78}$$

и тем более

$$\left\| u_k - u_0 \right\|_{\tilde{W}_2^{1}(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{79}$$

Нетрудно видеть (см. лемму 2), что тогда для любого $v \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$ выполняется соотношение

$$(Au_k - f,\ Bv) = [u_k - u_0,\ v]_{\tilde{W}_2^1(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\to} 0, \tag{80}$$

где (Au_k, Bv) определено равенствами (17), (10). Используя обозначения (11), (56), а также равенства (64) и (77), запишем соотношение (80) в следующем виде:

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\,\partial\eta}\right) Kv\,d\xi\,d\eta + \int\limits_{\gamma}(u_k - u_0)\,v\,ds +$$
$$+\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\partial u_k}{\partial s} - \frac{\partial u_0}{\partial s}\right) Tv\,ds + \int\limits_{\gamma_n}\left(\frac{\partial u_k}{\partial n} - \psi\right) K_\theta\, v\,ds +$$
$$+\int\limits_{l_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial \eta} - \chi\right) L_1 v\,d\eta + \int\limits_{l_2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi} - \omega\right) L_2 v\,d\xi = [u_k - u_0,\ v]_{\tilde{W}_2^1(\Omega)} \underset{k\to\infty}{\to} 0,$$

откуда на основании условий (78), (79) следует, что для любого $v \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$ справедливо также соотношение

$$\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\partial u_k}{\partial n} - \psi\right) K_\theta\, v\,ds + \int\limits_{l_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial \eta} - \chi\right) L_1 v\,d\eta +$$
$$+\int\limits_{l_2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi} - \omega\right) L_2 v\,d\xi \underset{k\to\infty}{\to} 0. \tag{81}$$

Утверждения (58), (59) вытекают непосредственно из условия (81), если воспользоваться леммой 3.

Действительно, согласно лемме 3, для любого гладкого элемента $\mathring{g}$, определенного на Ω, можно указать элемент $\mathring{v} \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$ такой, что выполняется равенство

$$K\mathring{v} = \mathring{g}.$$

Но, с другой стороны, на основании соотношений (11) имеем

$$\begin{gathered} K_\theta\, \mathring{v}\big|_\gamma = \sin\theta\cdot\cos\theta\, K\mathring{v}\big|_\gamma, \quad L_1\mathring{v}\big|_{l_1} = K\mathring{v}\big|_{l_1}, \\ -L_2\mathring{v}\big|_{l_2} = K\mathring{v}\big|_{l_2}. \end{gathered} \tag{82}$$

Пусть теперь заданы на Ω гладкие элементы u, v, w. Видоизменим их так, чтобы u обратился в нуль на участке границы l_1, $\overset{\circ}{l_2}$, а элементы v, w соответственно на γ_n, l_2 и γ_n, l_1. Полагая теперь g равным последовательно u, v, w и учитывая равенства (82), из условия (81) получим

$$\int_{\gamma_n}\left(\frac{\partial u_k}{\partial n}-\psi\right)\sin\theta\cdot\cos\theta\, u\,ds\underset{k\to\infty}{\to}0,$$

$$\int_{l_1}\left(\frac{\partial u_k}{\partial\eta}-\chi\right)v\,d\eta\underset{k\to\infty}{\to}0,\qquad\int_{l_2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial\xi}-\omega\right)w\,d\xi\underset{k\to\infty}{\to}0,\tag{83}$$

где u, v, w — элементы, видоизмененные в Ω указанным образом.

В соотношениях (83) существенны лишь значения элементов u, v, w соответственно на участках границы γ_n, l_1, l_2 и безразлично чему равны эти элементы на остальной части области Ω. Поэтому можем видоизменить u, v, w до первоначального значения, откуда получаем, что соотношения (83) имеют место для любых гладких элементов u, v, w.

Замечаем, что в случае гладкой границы области Γ соотношения (83) обозначают просто слабую сходимость соответствующих последовательностей $\{u_k\}$.

Таким образом, доказав справедливость соотношений (77), (64) и (83), мы установили тем самым, что для граничной задачи (55) существует единственное сильное решение $u_0\in W_2^{(1,1)}(\Omega)$, удовлетворяющее почти всюду исходному уравнению (55).

Покажем теперь, что задача (55) о колебаниях струны является корректной задачей.

Для этого воспользуемся результатом леммы 1 и соотношением (56) при $v=u_0$. Тогда на основании (26) и (56) можем написать

$$\|u_0\|^2_{W_2^1(\Omega)}=(f,\,Bu_0)\leqslant c\,\|f\|_{L_2(\Omega_\gamma^l)}\cdot\|u_0\|_{\tilde W_2^1(\Omega)},$$

откуда вытекает неравенство:

$$\|u_0\|_{\tilde W_2^1(\Omega)}\leqslant c\,\|f\|_{L_2(\Omega_\gamma^l)}\,.\tag{84}$$

Далее в силу равенства (77) и суммируемости с квадратом функции g (см. (15)), из (84) получаем окончательную оценку

$$\|u_0\|_{W_2^{(1,1)}(\Omega)}\leqslant c\,\|f\|_{L_2(\Omega_\gamma^l)}\,,\tag{85}$$

где норма в пространстве $\dot W_2^{(1,1)}(\Omega)$ определена соотношением (60), а норма в пространстве $L_2(\Omega_\gamma^l)$ — соотношением (15). Из линейности граничной задачи (55) и оценки (85) следует непосредственно корректность задачи. Теорема 3 тем самым доказана.

В заключение заметим, что из общей граничной задачи (55) следуют известные ранее частные задачи для уравнения колебаний струны, а именно: задача Коши (случай, когда $\xi_0=\eta_0=0$; $l_i^j=0$; $i, j=1, 2$, см. рис. 2), задача Гурса (равны нулю все участки границы Γ, за исключением l_1^1, ξ_0, η_2, которые отличны от нуля и образуют замкнутую область в виде прямоугольного треугольника с кривой диагональю), задача Дарбу (если равны нулю все участки границы Γ, за исключением ξ_0, η_0, ξ_2, η_2, которые отличны от нуля и образуют область в виде прямоугольника).

Отметим еще новую задачу для гиперболического уравнения (1), которая следует из задачи (55) и вида области Ω (рис. 2). Эта задача соответствует случаю, когда участки границы $\xi_1 = \xi_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0$ и область Ω расположена строго внутри угла, образованного характеристиками ξ, η и „повешенного" сверху на область Ω (рис. 2), т. е. Ω расположена внутри характеристик ξ, η, касающихся области Ω только в одной точке, именно в точке Γ_0, в которой пересекаются ξ, η.

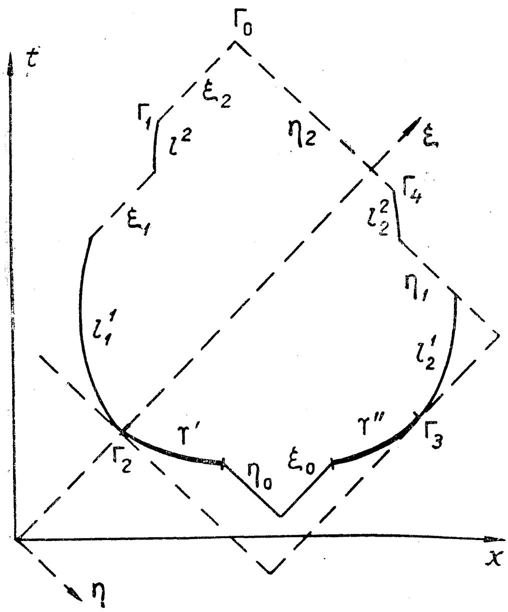

Рис. 2

Для такой задачи по всей границе области задаются граничные условия u, $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u}{\partial \eta}$. Согласно теореме 3, такая задача будет корректно поставленной.

С других позиций смешанная задача для гиперболических уравнений исследовалась в работах О. А. Ладыженской [10], В. А. Ильина [5] и других авторов. Для случая двух переменных оценка (85) более точна, чем аналогичная оценка у О. А. Ладыженской (см. [10], стр. 77). Впервые общий функциональный подход к исследованию гиперболических уравнений дал С. Л. Соболев [1]. Корректная задача для гиперболического уравнения с данными на всей границе также была впервые рассмотрена С. Л. Соболевым [19].

В заключение автор пользуется случаем искренне поблагодарить академика С. Л. Соболева за привлечение внимания к данной задаче, поблагодарить своего научного руководителя профессора Л. Д. Кудрявцева за неизменное внимание и помощь в работе, а также кандидата физико-математических наук Г. Н. Яковлева, сделавшего автору ряд ценных замечаний.

Литература

1. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. ЛГУ, 1950.
2. Friedrichs K. Communications on Pure and Applied Mathematics, **11**, №3, 1956.
3. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой, околозвуковой газовой динамики. М., ИЛ, 1961.
4. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, **61**, 1961.
5. Ильин В. А. УМН, т. XV, вып. 2 (92), 97—154, 1960.
6. Кондрашов В. И. К теории краевых проблем и задач о собственных значениях в областях с вырожденным контуром для вариационных и дифференциальных уравнений (докт. дис.). МИАН СССР, 1948.

7. Крылов Н. М. Избранные труды. Киев, Изд-во АН УССР, **1**, 1961, стр. 262.
8. Кудрявцев Л. Д. Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационных задач методом эллиптических уравнений. Тр. МИАН СССР, т. LV, 1959.
9. Кудрявцев Л. Д. ДАН СССР, **108**, № 1, 16—19, 1956.
10. Ладыженская О. А. Смешанные задачи для гиперболического уравнения. М., 1953.
11. Ляшко А. Д. Автореферат диссертации канд. физ-матем. наук Казанского гос. ун-та, 1959.
12. Мартыюк А. Е. ДАН СССР, **117**, № 3, 374—377, 1957.
13. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Физматгиз, 1950.
14. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. ГИТТЛ, 1952.
15. Morawetz C. S. Communications on Pure and Applied Mathematics, **11**, № 3, 1958.
16. Никольский С. М. ДАН СССР, **38**, № 3, 409—411, 1953.
17. Petryshyn W. V. Trans. Am. Math. Soc., 105, 1, 1962.
18. Смирнов В. И. Курс высшей математики, V, М., 1959.
19. Соболев С. Л. ДАН СССР, № 109, 707—709, 1956.
20. Соболевский П. Е. ДАН СССР, **116**, № 5, 754—757, 1957.
21. Friedrichs K. Math. Ann. Bd. 109, H. 4—5, 1934.
22. Шалов В. М. ДАН СССР, **151**, № 2, 292—294, 1963.
23. Шалов В. М. ДАН СССР, **151**, № 3, 511—512, 1963.
24. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка. Математика, период. сб. пер. иностр. статей, 7 : 6, 1963.
25. Яковлев Г. Н. Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. LX, 1961, стр. 325—349.
26. Petryshyn W. V. AEC Computing and Applied Matematics Center, Courant Institute of Mathematical Sciences January, 15, 1963.

Поступила в редакцию 29 апреля 1965 г.

Центральный аэрогидродинамический институт им. Н. Е. Жуковского