

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE
SÃO PAULO
CAMPUS SÃO PAULO - SP**

**ANA MARIA FAUSTA BONFIM SANTOS
LETÍCIA CARDOSO FURTADO
THIAGO GALVÃO FERREIRA**

CURVAS E SUPERFÍCIES POR PONTOS ESPECIFICADOS

**São Paulo
2025**

ANA MARIA FAUSTA BONFIM SANTOS

LETÍCIA CARDOSO FURTADO

THIAGO GALVÃO FERREIRA

CURVAS E SUPERFÍCIES POR PONTOS ESPECIFICADOS

Trabalho apresentado ao Programa do Curso de Bacharelado em Sistemas de Informação, do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus de São Paulo, como requisito parcial para aprovação na disciplina SPOMVAL – Vetores, geometria analítica e álgebra linear sob orientação da Professora Josceli Maria Tenorio

São Paulo

2025

Sumário

INTRODUÇÃO.....	4
1.Equação de uma curva 2D.....	5
1.1 Interpolação usando Sistema Linear.....	5
1.2 Teste 1 - Exemplo com 2 pontos (polinômio linear).....	5
2. Equação de uma superfície quadrática (3D).....	7
2.1. Determinação da equação.....	8
2.3. Resolução usando o código implementado.....	13
2.4. Exemplos de Aplicação.....	14
Aplicação em Faróis Automotivos.....	14
Aplicação em Antenas Parabólicas.....	15
REFERÊNCIAS.....	17

INTRODUÇÃO

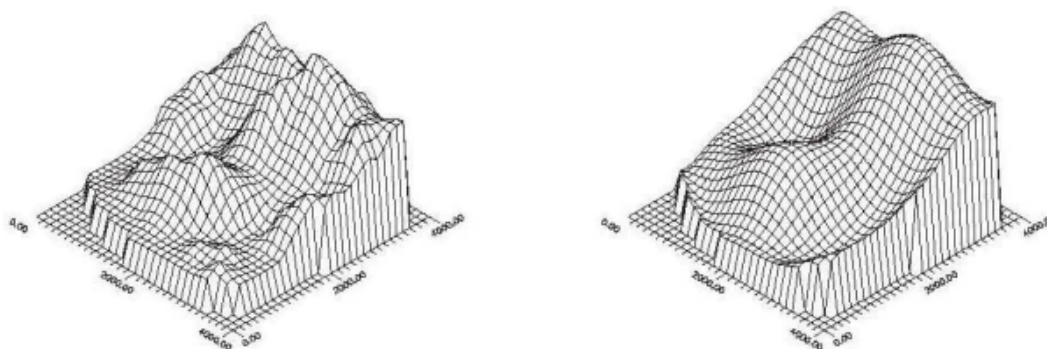
Curvas e superfícies são essenciais pois possuem aplicações em vários campos, como engenharia, computação gráfica e até em fenômenos científicos (Gattass et al.,sd). Uma curva pode ser representada como um conjunto de segmentos de retas, porém essa representação é limitada. Assim, se quisermos representar curvas mais complexas e eficientes, é necessário usarmos representações matemáticas mais complexas (Motta, sd).

As curvas podem ser representadas de duas maneiras principais. A primeira consiste em gerar uma curva que passa exatamente por todos os pontos fornecidos, garantindo que cada ponto seja parte da trajetória. A segunda forma corresponde à geração de uma curva que representa o conjunto de pontos sem necessariamente passar por cada um deles, apenas se aproximando de sua distribuição geral. Ambas as abordagens são utilizadas conforme a finalidade do modelo e o nível de precisão desejado na representação dos dados. (Motta,sd)

Assim como as curvas podem ser criadas ligando pontos por meio de segmentos ou funções matemáticas, as superfícies também podem ser geradas utilizando diferentes técnicas. Dependendo do método escolhido, é possível produzir superfícies distintas mesmo utilizando o mesmo conjunto de pontos, variando em suavidade, forma e comportamento (Motta et al,sd).

Por exemplo, a figura 1 representa 2 superfícies distintas, que utilizam o mesmo conjunto de pontos.

Figura 1. Superfícies diferentes com mesmo conjunto de pontos



Fonte: Motta, Robson Carlos da

Quando o objetivo é determinar a equação exata de uma curva 2D ou de uma superfície 3D que deve passar por pontos previamente especificados, utiliza-se um procedimento baseado em álgebra linear. Primeiro, escolhe-se a forma geral da função que representará o objeto, um polinômio em 2D ou uma expressão multivariável em 3D. Em seguida, substitui-se nessa forma geral as coordenadas dos pontos fornecidos. Isso gera um sistema linear que relaciona os coeficientes

desconhecidos da função aos valores dos pontos. Ao resolver esse sistema, obtém-se uma equação que ajusta exatamente todos os pontos, representando assim a curva no plano ou a superfície no espaço.

1. Equação de uma curva 2D

Uma curva 2D é uma função matemática que descreve a relação entre duas variáveis, normalmente x e y, formando um desenho no plano cartesiano.

Segundo o material de Métodos Numéricos UFPR, 2007, quando queremos determinar a equação de uma curva que passa por pontos conhecidos, estamos fazendo o processo chamado de interpolação.

Na interpolação, buscamos uma função $f(x)$ tal que:

$$f(x_i) = y_i$$

A função mais comum na introdução de métodos numéricos é o polinômio interpolador, porque:

- sempre existe solução
- Ele passa exatamente nos pontos
- Pode ser determinado por sistemas lineares ou por fórmulas diretas

1.1 Interpolação usando Sistema Linear

Quando usamos n pontos, obtemos um polinômio de grau $n - 1$:

- 2 pontos → polinômio **linear**
- 3 pontos → polinômio **quadrático**
- 4 pontos → polinômio **cúbico**

A forma geral do polinômio é:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

1.2 Teste 1 - Exemplo com 2 pontos (polinômio linear)

Fazendo um teste com as coordenadas (0,1) e (1,-1) podemos obter a seguinte equação:

$$a_0 + a_1 \cdot 0 = 1$$

$$a_0 + a_1 \cdot 1 = -1$$

Isso gera a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para resolver essa matriz vamos utilizar o método de Gauss

O método da Eliminação de Gauss é uma técnica usada para resolver sistemas de equações lineares transformando o sistema original em outro equivalente, porém mais simples de resolver. Isso é feito deixando a matriz dos coeficientes em forma triangular superior por meio de operações que não alteram a solução: trocar linhas, multiplicar uma linha por um número e somar a uma linha um múltiplo de outra. Depois dessa transformação, o sistema fica organizado de modo que podemos encontrar as incógnitas começando da última equação e voltando para as anteriores, facilitando a obtenção da solução de maneira clara e direta (Almeida, 2021).

Portanto:

$$\mathbf{R2} \leftarrow \mathbf{R2} - 1 \cdot \mathbf{R1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Por meio de substituição podemos concluir que:

$$\text{Da segunda linha: } 1 \cdot a_1 = -2 \Rightarrow a_1 = -2$$

$$\text{Da primeira linha: } a_0 + 0 \cdot a_1 = 1 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$\boxed{P(x) = 1 - 2x}$$

Testando no código feito para confirmar se essa implementação está certa, utilizaremos os mesmos pontos fornecidos, ou seja, as coordenadas (0,1) e (1,-1):

Figura 2 - Resultado do código equação de uma curva

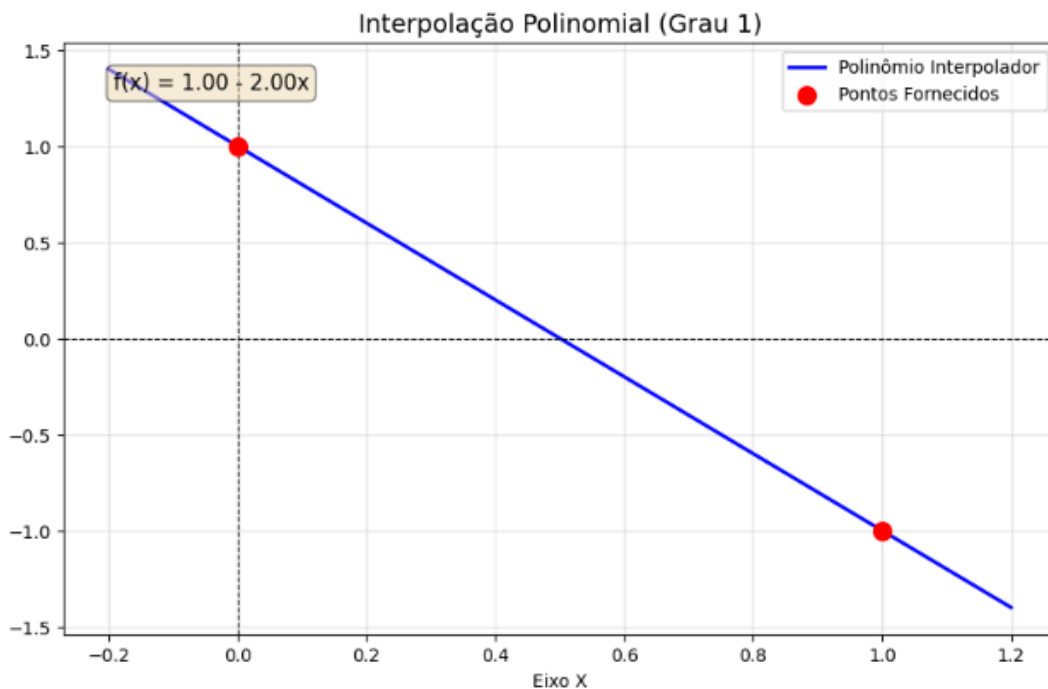
```

=== Curvas e superfícies por pontos especificados: SISTEMA DE INTERPOLAÇÃO ===
1 - Curva 2D
2 - Superfície 3D
Escolha: 1
Quantidade de pontos: 2
Ponto 1
X: 0
Y: 1
Ponto 2
X: 1
Y: -1

```

Fonte: Os autores

Figura 3 - Gráfico de uma equação de uma curva



Fonte: Os autores

O mesmo resultado esperado.

2. Equação de uma superfície quadrática (3D)

Uma superfície quadrática em três dimensões, também chamada de quádrlica, é definida como qualquer subconjunto do espaço E^3 que possa ser descrito por uma equação de segundo grau nas coordenadas cartesianas (X), (Y) e (Z). A forma geral dessa equação é:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

onde os coeficientes $(A, B, C, D, E, F, G, H, I, J)$ são valores reais, sendo necessário que pelo menos um entre (A, B, C, D, E, F) seja diferente de zero para que a equação descreva de fato uma superfície quadrática (Silva, 2018).

Essa equação é extremamente versátil, podendo representar os seis tipos básicos de superfícies quádricas: elipsóide, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico e cone elíptico. Além disso, existem casos degenerativos, como um ponto, uma reta, um plano ou a união de dois planos, que também são classificados como quádrica (Silva, 2018).

O grau e o sinal dos termos da equação, bem como a presença ou ausência de termos mistos, são determinantes para identificar qual tipo de superfície quadrática está representada. Para estudo gráfico, é comum analisar as interseções da superfície com os planos coordenados (xy) , (xz) e (yz) , obtidas ao fixar uma das variáveis como zero. Assim, a equação de superfície quadrática fornece uma descrição matemática completa e geral de uma vasta gama de formas geométricas tridimensionais (Silva, 2018).

2.1. Determinação da equação

Para determinar a equação de uma superfície quadrática a partir de pontos específicos no espaço, utiliza-se uma forma mais prática em função de (x) e (y) , dada por:

$$f(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy$$

onde $(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$ são coeficientes a serem determinados. Cada ponto (x_i, y_i, z_i) que pertence à superfície deve satisfazer a equação:

$$\alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i + \alpha_4 x_i^2 + \alpha_5 y_i^2 + \alpha_6 x_i y_i = z_i$$

Como cada ponto fornece uma equação, é necessário ter pelo menos seis pontos para resolver o sistema linear resultante e determinar todos os coeficientes. Esse sistema pode ser resolvido, por exemplo, pelo método de eliminação de Gauss, garantindo que a superfície interpolada passe exatamente pelos pontos fornecidos. Dessa forma, a teoria das quádricas se conecta diretamente à aplicação prática de modelagem e visualização de superfícies suaves em 3D. Isso forma um sistema linear nas incógnitas $(\alpha_1, \dots, \alpha_6)$, resolvido pelo método de Gauss no código.

2.2 Teste com entrada e saída esperada

Pontos de entrada:

1: (0, 0, 5)

2: (1, 0, 8)

3: (-1, 0, 4)

4: (0, 1, 3)

5: (0, -1, 9)

6: (1, 1, 4)

Nesta fase, acontece a substituição dos valores para a equação geral em cada ponto :

- Ponto 1 (0, 0, 5):

$$\alpha_1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 5 \Rightarrow \alpha_1 = 5$$

- Ponto 2 (1, 0, 8):

$$f(1, 0) = \alpha_1 + \alpha_2 * 1 + \alpha_3 * 0 + \alpha_4 * 1^2 + \alpha_5 * 0^2 + \alpha_6 * 1 * 0$$

$$f(1, 0) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 8$$

$$5 + \alpha_2 + \alpha_4 = 8$$

$$\alpha_2 + \alpha_4 = 3; \text{ Alcançando a Equação A}$$

- Ponto 3 (-1, 0, 4):

$$f(-1, 0) = \alpha_1 + \alpha_2 * (-1) + \alpha_3 * 0 + \alpha_4 * (1) + \alpha_5 * (0) + \alpha_6 * (-1) * 0$$

$$f(-1, 0) = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4$$

$$5 - \alpha_2 + \alpha_4 = 4$$

$$-\alpha_2 + \alpha_4 = -1; \text{ Alcançando a Equação B}$$

- Ponto 4 (0, 1, 3):

$$f(0, 1) = \alpha_1 + \alpha_2 * 0 + \alpha_3 * 1 + \alpha_4 * 0 + \alpha_5 * (1) + \alpha_6 * 0$$

$$f(0, 1) = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5$$

$$5 + \alpha_3 + \alpha_5 = 3$$

$$\alpha_3 + \alpha_5 = -2; \text{ Alcançando a Equação C}$$

- Ponto 5 (0, -1, 9):

$$f(0, -1) = \alpha_1 + \alpha_3 * (-1) + \alpha_5 * (1)$$

$$5 - \alpha_3 + \alpha_5 = 9$$

$$-\alpha_3 + \alpha_5 = 4; \text{ Alcançando a Equação D}$$

- Ponto 6 (1, 1, 4):

$$f(1, 1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$$

$$5 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 4$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = -1; \text{ Alcançando a Equação E}$$

Resolução de cada equação por meio de sistema Linear

Por a equação conter 5 incógnitas foi resolvido de forma separada para facilitar a resolução e entendimento

- Primeira Parte:

$$\alpha_2 + \alpha_4 = 3$$

$$-\alpha_2 + \alpha_4 = -1$$

Matriz formada:

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \end{array} \right|$$

Operação:

$$L1: \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$L2: \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$R \rightarrow L2 = L1 + L2$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \end{array} \right|$$

$$L1: \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

$$L2: \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$R \rightarrow L2 = L1 + L2$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \end{array} \right|$$

Resultado:

$$\alpha_2 = 2$$

$$\alpha_4 = 1$$

- **Segunda Parte**

$$\alpha_3 + \alpha_5 = -2$$

$$-\alpha_3 + \alpha_5 = 4$$

Matriz formada:

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \end{array} \right|$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 4 \end{array} \right|$$

Operação:

$$L2 \leftarrow L1 + L2$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \end{array} \right|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & \end{vmatrix}$$

$$L2 \leftarrow (1/2) \cdot L2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \end{vmatrix}$$

Resultado

$$\alpha_3 = -3$$

$$\alpha_5 = 1$$

- **Terceira Parte:**

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = -1$$

Com os valores que já foram encontrados, os utiliza para substituir na fórmula:

$$2 + (-3) + 1 + 1 + \alpha_6 = -1$$

$$1 + \alpha_6 = -1$$

$$\alpha_6 = -2$$

Resultado Final:

Dessa forma obtemos todos os valores dos coeficientes, sendo:

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6] = [5, 2, -3, 1, 1, -2]$$

Com a equação da superfície:

$$f(x, y) = 5 + 2x - 3y + x^2 + y^2 - 2xy$$

2.3. Resolução usando o código implementado

Para essa resolução, utilizamos os mesmos 6 pontos dados na Seção 2.2 “Teste com entrada e saída esperada”, sendo eles:

1: (0, 0, 5)

2: (1, 0, 8)

3: (-1, 0, 4)

4: (0, 1, 3)

5: (0, -1, 9)

6: (1, 1, 4)

Figura 4 - Prompt do Código

```
=== Curvas e superfícies por pontos especificados: SISTEMA DE INTERPOLAÇÃO ===
1 - Curva 2D
2 - Superfície 3D
Escolha: 2
Quantidade de pontos (mínimo 6): 6
Ponto 1
X: 0
Y: 0
Z: 5
Ponto 2
X: 1
Y: 0
Z: 8
Ponto 3
X: -1
Y: 0
Z: 4
Ponto 4
X: 0
Y: 1
Z: 3
Ponto 5
X: 0
Y: -1
Z: 9
Ponto 6
X: 1
Y: 1
Z: 4

Equação encontrada:

$$f(x, y) = 5.00 + 2.00x + -3.00y + 1.00x^2 + 1.00y^2 + -2.00xy$$

```

Fonte: Os autores

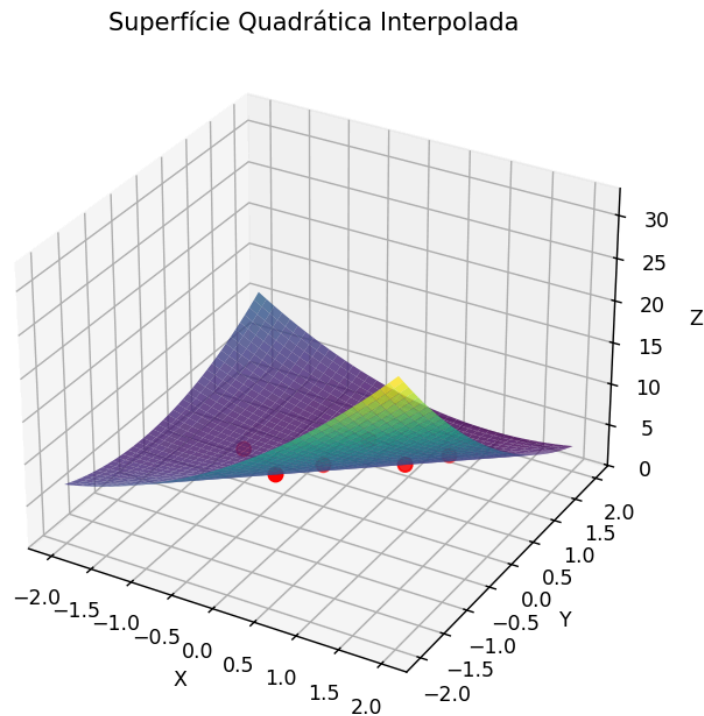
Assim, como ilustrado na Figura 4, o código implementa as funções necessárias para determinar a superfície a partir dos pontos fornecidos. O programa solicita ao usuário a quantidade de pontos, que deve ser maior que seis, e, em seguida, pede a descrição das coordenadas de cada ponto. Depois disso, caso o

sistema formado seja solucionável, o código calcula os coeficientes da superfície, apresenta a equação resultante e exibe o gráfico correspondente

Neste caso, o resultado encontrado é o mesmo da solução da Seção 2.2:

$$f(x, y) = 5 + 2x - 3y + x^2 + y^2 - 2xy$$

Figura 5 - Gráfico gerado da Superfície Quadrática Interpolada



Fonte: Os autores

Na figura 5, apresenta de forma visual o gráfico da superfície quadrática em 3D dos pontos dados

2.4. Exemplos de Aplicação

Aplicação em Faróis Automotivos

Nos faróis automotivos, a superfície interna responsável pela reflexão da luz também é projetada a partir de uma superfície quadrática tridimensional, majoritariamente um parabólico. A escolha desse formato é estratégica: a geometria da parábola, quando estendida ao espaço tridimensional, garante que a luz emitida por uma fonte colocada próxima ao foco seja direcionada de forma ordenada, criando um feixe luminoso que mantém paralelismo e alcance adequado. O controle

dessa superfície depende da parametrização da curvatura por meio de equações quadráticas que descrevem seu comportamento no espaço. (Silva, 2018)

Durante o desenvolvimento do farol, pontos tridimensionais são definidos para representar o contorno ideal do refletor. A partir deles, obtém-se a equação quadrática que expressa a superfície final. Essa equação não serve apenas como representação matemática, mas como ferramenta de análise que permite simular a trajetória dos raios luminosos e prever como o feixe se comportará em diferentes condições. A precisão dessa modelagem é essencial para assegurar a distribuição uniforme da luz, cumprimento das normas de iluminação e desempenho visual adequado. Assim, o emprego de superfícies quadráticas ajustadas a pontos se torna parte integrante do processo de otimização de sistemas ópticos automotivos. (Silva, 2018)

Aplicação em Antenas Parabólicas

A construção de antenas parabólicas utiliza diretamente as propriedades matemáticas das superfícies quadráticas do tipo parabolóide de revolução. Essa superfície é descrita por uma equação do segundo grau em três variáveis, cuja forma geral permite controlar a curvatura e a profundidade da antena a partir de pontos selecionados no espaço. O parabolóide apresenta uma característica fundamental: todos os raios paralelos ao seu eixo de simetria são refletidos exatamente para o foco. Essa propriedade, demonstrada pela geometria analítica e pelo estudo do comportamento das normais à superfície, é explorada na engenharia para maximizar a eficiência na captação de ondas eletromagnéticas (Silva, 2018).

Na prática, a etapa de modelagem envolve a definição de coordenadas tridimensionais que representam pontos da superfície desejada. Esses pontos alimentam algoritmos que ajustam a superfície a uma equação quadrática específica. Com essa equação, torna-se possível verificar se o formato final respeita às condições geométricas exigidas, permitindo identificar desvios, otimizar a concentração do sinal e avaliar o desempenho previsto antes da fabricação. Dessa forma, o estudo das superfícies quadráticas e sua determinação via pontos serve como base teórica e operacional para a construção de antenas de alta precisão (Silva, 2018).

3. Conclusão

O desenvolvimento deste trabalho permitiu compreender, de forma prática, como curvas 2D e superfícies 3D podem ser determinadas a partir de pontos especificados, passando por todo o processo matemático necessário para chegar às equações finais. A partir da definição dos modelos de polinômios no caso das curvas e superfícies quadráticas para os pontos no espaço foi possível montar sistemas lineares que representam exatamente as condições impostas pelos pontos fornecidos.

O método de eliminação de Gauss foi essencial nesse processo, já que possibilitou a resolução sistemática dos sistemas e permitiu obter os coeficientes das equações com precisão. Para as curvas, isso resultou na determinação de polinômios que passam exatamente pelos pontos analisados. Para as superfícies, os testes realizados mostraram que é possível gerar equações tridimensionais coerentes, ajustadas aos valores de entrada.

A implementação do código validou os resultados obtidos, onde automatizou a resolução dos sistemas, como também garantiu consistência nos cálculos, permitiu testar diferentes conjuntos de pontos e possibilitou visualizar as curvas e superfícies obtidas. Assim, o trabalho apresentou de forma clara e estruturada todo o caminho necessário para transformar um conjunto de pontos em curvas e superfícies bem definidas, passando pela modelagem, formação dos sistemas, resolução numérica e validação computacional dos resultados.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Paulo. Método da Eliminação de Gauss. 2021. Disponível em: <https://prl Almeida.com.br/ci202-2021-01/Aula11.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2025.

GATTASS, Marcelo; PEREIRA, André. Curvas e Superfícies. Material baseado em conteúdos de Marcelo Gattass (Depto. de Informática – PUC-Rio) e André Maués Brabo Pereira (Depto. de Eng. Civil – UFF), adaptado por Luiz Fernando Martha para a disciplina CIV2802 – Sistemas Gráficos para Engenharia. [s.l.: s.n.], [s.d.].

MOTTA, Robson Carlos da. Curvas e Superfícies. Disciplina: Computação Gráfica. Disponível em: http://wiki.icmc.usp.br/images/b/b7/Rosane_CG_Pos_RobsonMotta_CurvasSuperficies.pdf. Acesso em: 01 dez. 2025.

SANCHES, Ionildo José; FURLAN, Diógenes Cogo. CI-202 – Métodos Numéricos. Universidade Federal do Paraná, Departamento de Informática. Curitiba, 2007. Disponível em: <http://www.ionildo.cjb.net/metodos/>. Acesso em: 01 dez. 2025.

SILVA, Edilaine Cláudia Lima da. Estudo de cônicas e quádricas: construções com o uso do Geogebra. 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2018.