Generator sygnałów referencyjnych dla zadania podążania wzdłuż ścieżki w metodyce krzywych poziomicowych

Tomasz Gawron Maciej Marcin Michałek

27 października 2016

W odróżnieniu od zadania śledzenia trajektorii, w przypadku zadania podążania wzdłuż ścieżki chwilowy punkt referencyjny, względem którego obliczane są uchyby jest niezależny od czasu i zależy jedynie od konfiguracji $\boldsymbol{q}$ robota. Klasyczne podejście (patrz str. 82 skryptu) do zadania odtwarzania ścieżki polega na przyjęciu takiego chwilowego punktu referencyjnego leżącego na odtwarzanej ścieżce, który jest najbliższy aktualnej pozycji robota. Takie podejście posiada jednak istotne wady:

- Analityczne wyznaczenie punktu referencyjnego jest możliwe jedynie w przypadku niektórych nieskomplikowanych krzywych takich jak okrąg, czy prosta.
- Punkt referencyjny może zostać wyznaczony w sposób jednoznaczny jedynie w pewnym podzbiorze pozycji wokół ścieżki, którego rozmiar zależy od maksymalnej krzywizny tej ścieżki. Sterowniki oparte o tak wyznaczony punkt referencyjny są więc algorytmami lokalnymi.

Alternatywnym, wolnym od wyżej wymienionych wad podejściem jest metodyka tzw. *krzywych poziomicowych*, w której chwilowy punkt referencyjny nie jest wyznaczany. Zastępuje się go poprzez reprezentację odtwarzanej ścieżki jako zbiór

$$S_d \triangleq \left\{ \bar{\boldsymbol{q}} : F(\bar{\boldsymbol{q}}) \triangleq \sigma f(\bar{\boldsymbol{q}}) = 0 \right\}, \tag{1}$$

gdzie $f(\bar{\boldsymbol{q}}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest funkcją decydującą o kształcie odtwarzanej ścieżki, a $\sigma \in \mathbb{R} \setminus 0$ jest skalującym parametrem projektowym wpływającym na kierunek odtwarzania ścieżki (zgodny lub niezgodny z ruchem wskazówek zegara) oraz (pośrednio) na szybkość zbieżności do ścieżki. Jak widać z (1) ścieżka dana jest w sposób niejawny (uwikłany). Jest ona krzywą poziomicową (z ang. *level curve*) funkcji $F(\bar{\boldsymbol{q}})$, czyli gęstym zbiorem punktów, w których funkcja ta przyjmuje stałą, w tym przypadku zerową wartość. Funkcję $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ można intuicyjnie zwizualizować (patrz Rys. 1) jako pewną powierzchnię w przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której przekrój (tj. zbiór wspólny) z płaszczyzną $z = 0$ stanowi odtwarzaną ścieżkę. Taka reprezentacja ścieżki ma następujące pożądane właściwości:

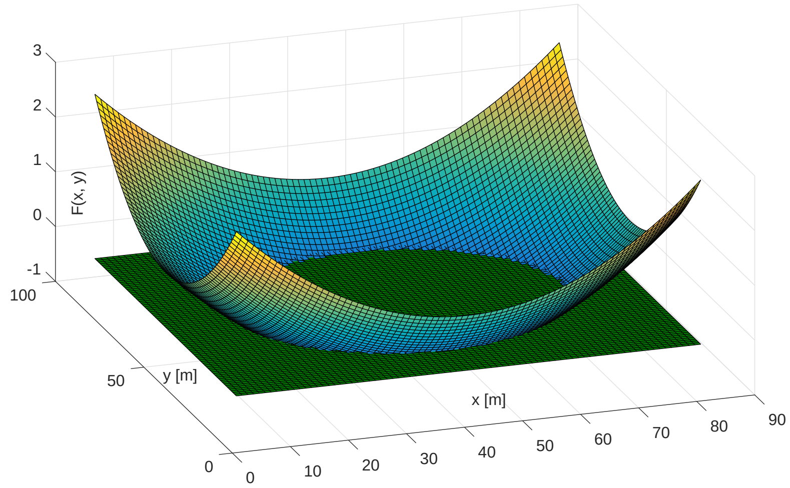
- Znak funkcji $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ zależny jest od tego po której stronie ścieżki znajduje sie robot, natomiast $|F(\bar{\boldsymbol{q}})|$ można interpretować jako pewną nieeuklidesową miarę odległości od ścieżki. Przyjmuje się zatem uchyb pozycyjny odtwarzania ścieżki $e_F = F(\bar{\boldsymbol{q}})$, do wyznaczenia którego nie jest potrzebny specyficzny punkt referencyjny leżący na niej.
- Oznaczmy gradient funkcji F przez ∇F. Wtedy dla $F = 0$ ∇F^T jest wektorem prostopadłym do odtwarzanej ścieżki. Podobnie, wektor normalny do ∇F^T jest styczny do odtwarzanej ścieżki.

Jako funkcję $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ można przyjąć dowolną funkcję spełniającą następujące założenia:

- $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ musi być klasy C^2 (tj. dwukrotnie różniczkowalna),
- gradient $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ musi być niezerowy i ograniczony, tj.

$$\forall \bar{\boldsymbol{q}} \quad ||\nabla F(\bar{\boldsymbol{q}})|| \in [\underline{m}, \bar{m}], \tag{2}$$

gdzie $0 < \underline{m} < \bar{m} < \infty$. Gwarantuje to m. in. brak lokalnych minimów funkcji F.



Rysunek 1: Powierzchnia reprezentująca funkcję F dla elipsy.

Ze względu na powyższe założenia, funkcję $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ definiuje się często dla pewnego podzioru pozycji $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ takiego, że ich spełnienie gwarantowane jest tylko gdy $\bar{\boldsymbol{q}} \in \mathcal{D}$. Oznacza to, że w ogólnym przypadku prawa sterowania wykorzystujące metodykę krzywych poziomicowych będą również miały charakter lokalny.

Przykłady ścieżek, które można reprezentować funkcją F:

- okrąg,
- linia prosta,
- krzywa S-kształtna: $y = A \tanh(Bx)$,
- superelipsa: $\left|\frac{x}{A}\right|^n + \left|\frac{x^4}{B^4}\right|^n = 1$

Krzywe nie będące krzywymi prostymi (tj. przecinające się ze sobą tak jak np. ósemka) nie mogą być reprezentowane funkcją F:

Zgodnie z powyższymi rozważaniami, wyjściem generatora sygnałów referencyjnych dla zadania odtwarzania ścieżki w metodyce krzywych poziomicowych nie jest wykorzystywana do tej pory konfiguracja referencyjna, lecz *wartość funkcji* $F(\bar{\boldsymbol{q}})$ wraz z jej pierwszymi i drugimi pochodnymi cząstkowymi. Można, więc zapisać następujący wektor sygnałów referencyjnych:

$$\boldsymbol{F}_r(\bar{\boldsymbol{q}}) \triangleq \begin{bmatrix} F(\bar{\boldsymbol{q}}) \\ F_x(\bar{\boldsymbol{q}}) \\ F_y(\bar{\boldsymbol{q}}) \\ F_{xx}(\bar{\boldsymbol{q}}) \\ F_{yy}(\bar{\boldsymbol{q}}) \\ F_{xy}(\bar{\boldsymbol{q}}) \\ F_{yx}(\bar{\boldsymbol{q}}) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$F_x \triangleq \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_y \triangleq \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{z_1 z_2} \triangleq \frac{\partial F}{\partial z_1 \partial z_2} \quad ,$$

przy czym $z_1, z_2 \in \{x, y\}$.