

Relatividade e Cosmologia

Nelson J. Nunes

*Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa,
Departamento de Física,
Instituto de Astrofísica e Ciências do Espaço*

Contents

1	Introdução	2
2	O que é a Relatividade Geral?	3
3	Os princípios da Relatividade Geral	4
4	Princípio da equivalência	6
5	A luz sente a gravidade	9
6	Desvio para o vermelho gravitacional	10
7	A equação da geodésica	12
8	O limite Newtoniano ou limite do campo fraco	16
9	O desvio para o vermelho gravitacional revisitado	18
10	Vectores e tensores	19
10.1	Vector contravariante	19
10.2	Vector covariante	20
10.3	Tensores	20
11	Derivada covariante	22
12	Derivada total e o transporte paralelo	24
13	Curvatura	26
14	As identidades de Bianchi contraídas	29
15	O tensor energia-momento	30
16	As equações de Einstein	31
17	As soluções esfericamente simétricas	34
18	A solução de Schwarzschild	35
19	A equação de Binet na mecânica Newtoniana	36
20	A equação de Binet na Relatividade Geral	37
21	Precessão do periélio de Mercúrio	38

22	Deflexão dos raios luminosos	40
23	Atraso gravitacional de Shapiro	42
24	Singularidades da métrica de Schwarzschild	44
25	Partículas em queda livre radial	45
26	Fotões em queda livre radial	47
27	Coordenadas de Kruskal-Szekeres	49
28	Ponte de Einstein-Rosen ou buraco de verme	52
29	Diagrama de Penrose para Kruskal	54
30	A equação de desvio geodésico Newtoniano	56
31	A equação de desvio geodésico na Relatividade Geral	57
32	Ondas gravitacionais	59
33	Graus de liberdade das perturbações gravitacionais	62
34	Polarização das perturbações gravitacionais	64
35	Emissão de ondas gravitacionais	66
36	O princípio cosmológico	69
37	A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)	70
38	A equação de Friedmann	72
39	A equação da continuidade	73
40	A lei de Hubble-Lemaître	75
41	Formas de matéria	76
42	Desvio para o vermelho cosmológico	78
43	Os parâmetros cosmológicos	79
44	Universo dominado por matéria	80
44.1	Universo sem constante cosmológica	80
44.2	Universo com constante cosmológica negativa	82
44.3	Universo com constante cosmológica positiva	83

45 A idade do Universo	86
46 Distâncias em cosmologia	88
47 Distância luminosa e magnitude aparente	90
48 Horizontes em cosmologia	92
49 Densidades tensoriais	94
50 O determinante da métrica	95
51 Coordenadas geodésicas	97
52 O princípio variacional para a Relatividade Geral	98
53 O Lagrangiano de matéria	100
54 Tensor energia-momento do electromagnetismo	101
55 Tensor energia-momento para um campo escalar	102
56 O método de Palatini	104
57 Teorias $f(R)$	106
58 Teorias de $f(R)$ no formalismo de Palatini	108
59 Teorias escalares-tensoriais	111
60 O Lagrangiano de Horndeski	112
61 Derivada de Lie	113
62 Vectores de Killing	116
63 Soluções de Bianchi I no vazio	119

1 Introdução

“Eu nunca ensino nada aos meus alunos, eu só facilito as condições para que eles consigam aprender.”

A. Einstein

Estas notas resultam da compilação dos meus apontamentos para o curso de Relatividade e Cosmologia dado na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Curiosamente, o primeiro ano em que dei esta disciplina, 2015, celebrava-se o centenário do nascimento da teoria da Relatividade Geral. No ano seguinte celebrava-se o centenário da descoberta teórica das ondas gravitacionais, o mesmo ano em que foi anunciada a detecção da primeira onda gravitacional. Em 2017 celebrava-se o centenário da aplicação da relatividade geral à Cosmologia. Em 2018 vimos a primeira colisão de estrelas de neutrões e em 2019 a primeira imagem da sombra de um buraco negro. Em 2020 foi reconhecido o trabalho de Roger Penrose no tema das singularidades dos buracos negros ao receber o Prémio Nobel da Física nesse ano. Torna-se evidente assim que a Relatividade Geral continua uma área muito activa com aplicações no quotidiano e noutra áreas da Física e previsões ainda por confirmar.

A compilação destas notas foram-me um pouco forçadas, e deveram-se à pandemia da Covid-19 que obrigaram qualquer docente a reinventar os métodos de estudo habituais. O resultado foi uma reflexão maior sobre os meus apontamentos, melhorando-os, e permitindo que eu pudesse entender um pouco melhor o ”reino das ideias” geniais e elegantes da relatividade geral.

O objectivo é dar uma visão geral da Relatividade Geral com aplicações à cosmologia e também com o intuito de preparação para a disciplina de Universo Primitivo e Cosmologia Física. Tenta ser uma abordagem muito simples evitando quanto possível a introdução de nova matemática coisa que só é feita quando são necessárias novas ferramentas para que se possa progredir. E claro, não dispensa a leitura da biografia recomendada e na qual estas notas beberam muito [1–5].

Devo ainda agradecer as contribuições dos alunos Ana Ribeiro (cap. 58), Pedro Ruivo (caps. 61, 62), e Rafael Pastor e Beatriz Reis (cap. 63), para alguns dos capítulos da sebenta como resultado das suas respectivas apresentações sobre um tópico à escolha.

2 O que é a Relatividade Geral?

“Quando estás a cortejar uma bela jovem, uma hora parece um segundo. Quando te sentas numas brasas quentes e vermelhas, um segundo parece uma hora. Isso é a relatividade.”

A. Einstein

A Relatividade Geral é uma extensão das leis de Newton e da relatividade restrita na medida em que procura escrever as equações de forma que estas sejam independentes entre referenciais inerciais mas também entre referenciais acelerados.

Nesta procura, encontra-se uma teoria geométrica da gravitação que reinterpreta a gravidade como uma manifestação da curvatura do espaço tempo. Esta relaciona-se com a energia e o momento da matéria presente. A qualificação desta ligação está especificada num conjunto de equações diferenciais chamadas, as equações de Einstein.

A relatividade tem feito um número de previsões impressionante

1. Dilatação gravitacional do tempo (o tempo passa mais depressa perto de uma fonte gravitacional)
2. Lentes gravitacionais (curvatura da luz perto de uma fonte gravitacional)
3. Desvio para o vermelho gravitacional (a redução da frequência da luz ao abandonar um campo gravitacional)
4. Atraso do tempo gravitacional (efeito de a luz levar mais tempo a chegar quando a trajectória passa junto a um objecto massivo)
5. Ondas gravitacionais (a propagação das perturbações gravitacionais)
6. Buracos negros (objectos astrofísicos extramamente densos)
7. Cosmologia (a dinâmica e fases de evolução do Universo)

3 Os princípios da Relatividade Geral

[D'Inverno cap. 9]

“E foi quando me ocorreu a ideia mais feliz da minha vida na seguinte forma. O campo gravitacional só tem uma existência relativa... Porque para um observador em queda livre do telhado de uma casa não existe (pelo menos na sua vizinhança) campo gravitacional. De facto, se o observador deixar cair alguns corpos estes manter-se-ão relativamente a ele num estado estacionário ou em movimento uniforme, independentemente da sua natureza química ou física.”

A. Einstein

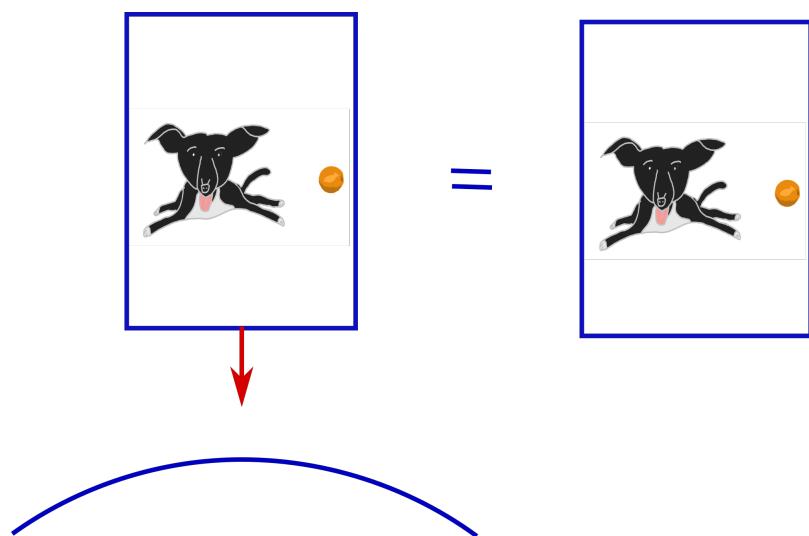
Quando Einstein se preparava para uma revisão da sua teoria da relatividade restrita pensou no facto que uma pessoa que salta do telhado de um prédio não sente o seu peso. Este pensamento que mais tarde descreveu como “A ideia mais feliz da minha vida”, foi a semente de onde nasceu a teoria da relatividade geral na qual podemos identificar os seguintes princípios:

1. Princípio da equivalência

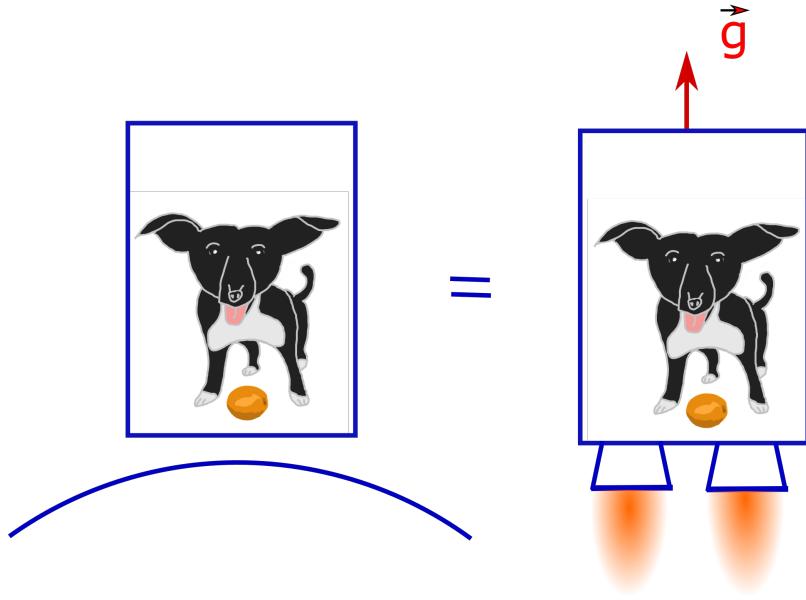
O movimento de uma partícula teste num campo gravitacional não depende da sua massa ou composição.

Daqui saem duas consequências.

- (a) Não há experiências locais que possam distinguir uma queda livre sem rotação num campo gravitacional de um movimento uniforme no espaço na ausência de campo gravitacional.



- (b) Um referencial acelerado relativamente a um referencial inercial em relatividade restrita, é idêntico a um referencial em repouso num campo gravitacional.



2. Princípio da covariância geral

Todos os observadores são equivalentes. Ou por outras palavras, as leis da física devem ter todas a mesma forma em todos os referências. Einstein acreditava que todos os observadores, inerciais ou não, devem ser capazes de descobrir as leis da física.

3. Princípio da correspondência

A relatividade geral deve concordar com a relatividade restrita na ausência de gravitação e com a gravitação Newtoniana no limite do campo fraco e pequenas velocidades.

4. Princípio do acoplamento mínimo

A fazer a transição da mecânica ou da relatividade restrita para a relatividade geral, as derivadas parciais tornam-se derivadas covariantes e nunca são adicionados termos que empreguem explicitamente o tensor de curvatura. Este explicaremos melhor mais tarde quando for necessário empregá-lo.

4 Princípio da equivalência

[D'Inverno cap. 9.3; Ferreira cap. 3; Hartle cap. 6.1]

“Não é que eu seja muito esperto, o que acontece é que eu permaneço com os problemas durante mais tempo.”

A. Einstein

O princípio da equivalência assenta na identificação da massa inercial com a massa gravitacional. Recordando a segunda lei de Newton e a lei da atracção universal de Newton, temos para a massa inercial

$$\vec{F} = m^I \vec{a}$$

e para a massa gravitacional

$$\vec{F} = -m^G \nabla \phi = m^G \vec{g}$$

onde ϕ é o campo gravitacional. Vamos assumir duas partículas de massas iniciais m_1^I e m_2^I e massas gravitacionais m_1^G e m_2^G , que são deixadas cair da mesma altura num campo gravitacional ϕ . Então temos

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= m_1^I \vec{a}_1 = m_1^G \vec{g} \\ \vec{F}_2 &= m_2^I \vec{a}_2 = m_2^G \vec{g}\end{aligned}$$

Se $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$, então tiramos que

$$\frac{m_1^I}{m_1^G} = \frac{m_2^I}{m_2^G}$$

e por uma escolha adequada de unidades, podemos dizer que $m^I = m^G$, ou seja, as massas inercial e gravitacional são idênticas. Alternativamente, se $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$, então a quantidade

$$\eta = 2 \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} = 2 \frac{m_1^G/m_1^I - m_2^G/m_2^I}{m_1^G/m_1^I + m_2^G/m_2^I}$$

não se nula. É precisamente este parâmetro que é medido (ou constrangido) pela experiência de Eotvös. Usando berílio e titânio para cada uma das massas no campo gravitacional da Terra, temos

$$\eta = (0.3 \pm 1.8) \times 10^{-13}$$

Usando o sistema Terra-Lua, no campo gravitacional do Sol, ficamos com

$$\eta = (-1.0 \pm 1.4) \times 10^{-13}$$

Os constrangimentos mais recentes com o satélite MICROSCOPE indicam

$$\eta = (-0.1 \pm 1.3) \times 10^{-14}$$

A formulação moderna do princípio da equivalência tem três versões.

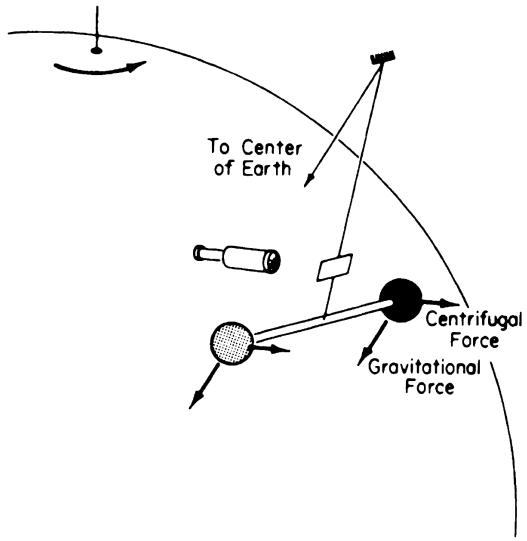


Figure 1. Idealização da experiência de Eötvos. Empréstamo de C. Will, “Was Einstein right?”

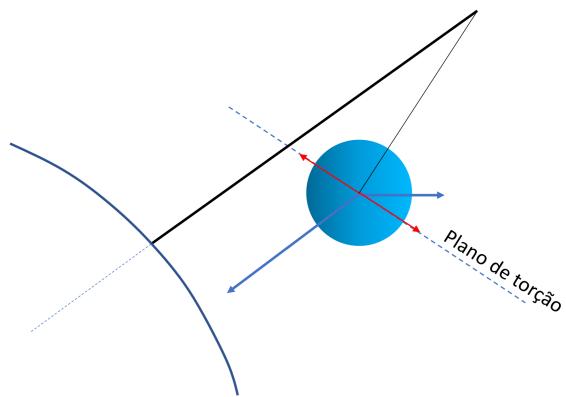


Figure 2. Vista de perfil do aparato mostrando as forças que actuam em cada uma das massas. Para que não haja torção, as componentes da força gravitacional e da força centrífuga no plano de torção têm de se anular. Isto só pode acontecer se m^G/m^I for igual para as duas massas. As componentes verticais são canceladas pela tensão no fio que liga à barra.

1. Princípio da equivalência fraco

Uma vez definidas a posição e velocidades iniciais, todas as partículas teste sem carga em queda livre, seguem as mesmas trajectórias.

2. Princípio da equivalência de Einstein

Extende o princípio de equivalência fraco a todos os referenciais em queda livre onde se deve recuperar as leis da relatividade restrita independentemente da posição e velocidades iniciais (localmente e sem contar com forças de maré).

Este princípio é testado por variações de parâmetros adimensionais (como a factor giromagnético do protão, a constante de estrutura fina) e razões entre massas (como a razão entre a massa do protão e do electrão).

3. Princípio da equivalência forte

O princípio de equivalência de Einstein é válido não só para partículas teste mas também para massas gravitacionais para qualquer referencial em queda livre (localmente e sem contar com forças de maré).

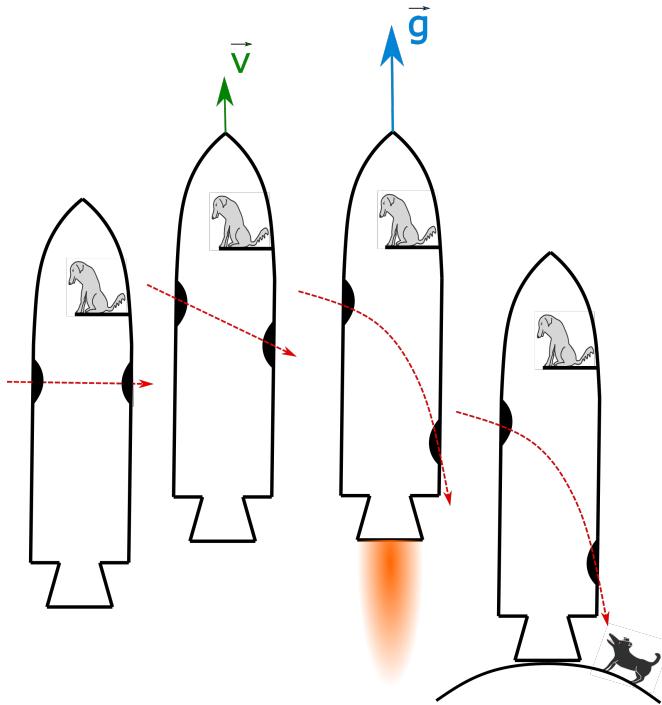
Este princípio é testado pela variação da constante gravitacional, ou de forma equivalente, na variação da massa das partículas.

5 A luz sente a gravidade

[Hartle cap. 6.2]

O poder do princípio da equivalência deve-se à sua afirmação que é válido para *todas* as leis da física. Por exemplo, temos de aceitar que também a luz cai num potencial gravitacional com a mesma aceleração com que cai um corpo material. Para compreender isto vamos imaginar que temos um fogetão no espaço longe de um campo gravitacional. Vamos admitir que um raio de luz entra no fogetão com uma velocidade perpendicular à velocidade do foguetão. Se o foguetão estiver parado, a luz entra por uma parede e sai na parede adjacente num local à mesma altura da entrada. Contudo, se o foguetão estiver em movimento uniforme, um observador no referencial do foguetão verá a luz descrever uma trajectória que ainda é uma recta mas o raio abandonará o foguetão num ponto mais baixo do que quando entrou. Se o foguetão tiver um movimento acelerado, a trajectória já será curva e o ponto de saída ficará muito mais abaixo do ponto de entrada. Do princípio de equivalência aprendemos que um referencial acelerado é equivalente a um referencial num campo gravitacional. Ou seja, quando o foguetão está em repouso num campo gravitacional uniforme, um observador no referencial do foguetão de facto vê a luz acelerar para baixo.

Então a luz curva num campo gravitacional? Sim, ou melhor a luz anda em linha recta, o espaço é que é curvo devido à presença de matéria. É a partir desta ideia que vamos construir a teoria da Relatividade Geral. Mas antes disso, vamos ver mais uma consequência do princípio da equivalência.



6 Desvio para o vermelho gravitacional

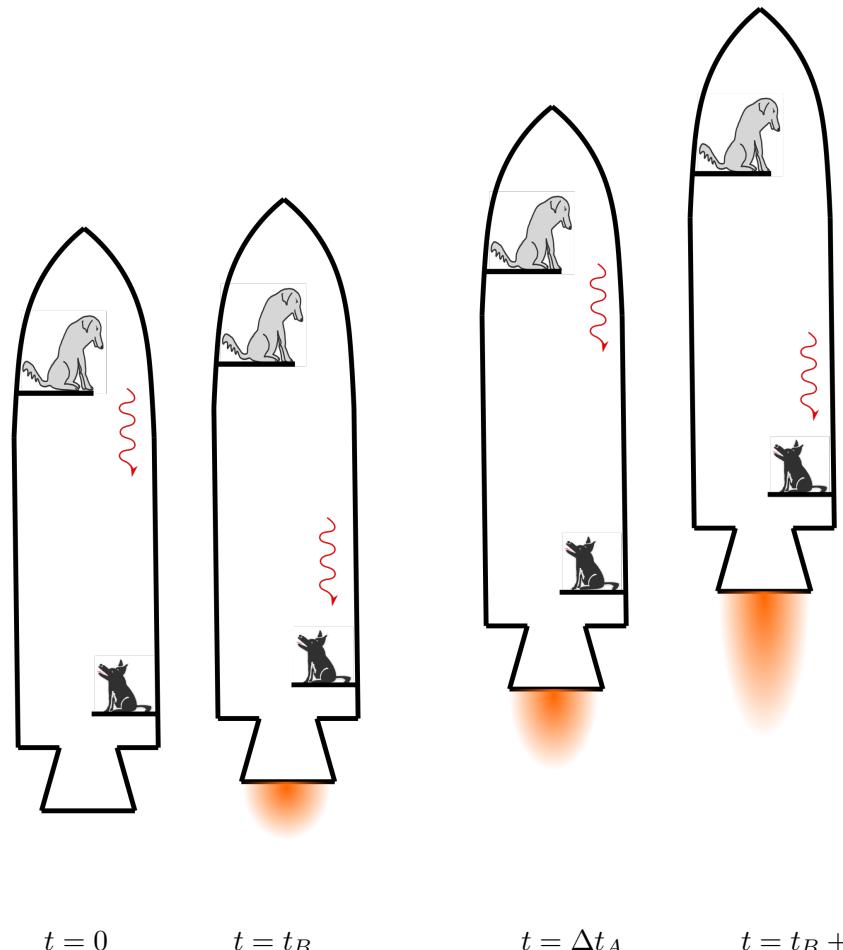
[Hartle cap. 6.3]

“O cientista não é aquele que oferece as melhores respostas, mas aquele que faz as perguntas certas.”

Claude Levi-Strauss

Já vimos que se as massas inerciais e gravitacional são iguais, qualquer partícula num campo gravitacional, sofre uma aceleração \vec{g} . Pelo princípio de equivalência, isto é equivalente a termos as partículas fora do campo gravitacional mas num referencial acelerado de \vec{g} . Vamos explorar esta identidade.

Consideremos dois observadores, A e B. O observador A está a uma altura h da superfície da Terra e B está à superfície. A emite um sinal em $t = t_A = 0$ e em Δt_A que é recebido em B em t_B e $t_B + \Delta t_B$. Isto tem de ser assim mesmo com $\Delta t_B < \Delta t_A$ porque pelo princípio da equivalência esta situação é equivalente a ser realizada longe de um campo gravitacional mas num referencial acelerado. Nesse caso, o segundo sinal chega a B mais rápido do que o primeiro sinal chegou uma vez que o fotão tem uma distância mais curta a percorrer.



$t = 0$

$t = t_B$

$t = \Delta t_A$

$t = t_B + \Delta t_B$

O sistema pode então ser descrito num meio sem gravidade mas a deslocar-se para cima com aceleração \vec{g} . Temos que nas posições A e B,

$$y_A(t) = \frac{1}{2}gt^2 + h, \quad y_B(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Temos então, para o primeiro sinal,

$$y_A(0) - y_B(t_B) = h - \frac{1}{2}gt_B^2 = ct_B$$

e para o segundo, desprezando termos em $(gh/c^2)^2$,

$$\begin{aligned} y_A(\Delta t_A) - y_B(t_B + \Delta t_B) &= h + \frac{1}{2}g\Delta t_A^2 - \frac{1}{2}g(t_B + \Delta t_B)^2 \\ &= h - \frac{1}{2}g(t_B^2 + 2t_B\Delta t_B) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= h - \frac{1}{2}gt_B^2 - gt_B\Delta t_B \\ &= ct_B - gt_B\Delta t_B \end{aligned}$$

Mas esta quantidade também tem de ser a distância percorrida pelo fotão entre os instantes Δt_A e $t_B + \Delta t_B$ ou seja,

$$\begin{aligned} ct_B - gt_B\Delta t_B &= c(t_B + \Delta t_B - \Delta t_A) \\ \Delta t_A &= \Delta t_B \left(1 + \frac{g}{c}t_B\right) \end{aligned}$$

e com $t_B \approx h/c$, (desprezando termos $(gh/c^2)^2$),

$$\boxed{\Delta t_A = \Delta t_B \left(1 + \frac{g}{c^2}h\right)}$$

que como se esperava é $\Delta t_A > \Delta t_B$. Podemos ainda escrever gh em termos da diferença de potencial em A e B, tal que $gh = \Phi_A - \Phi_B$ e então

$$\Delta t_A = \Delta t_B \left(1 + \frac{\Phi_A - \Phi_B}{c^2}\right)$$

ou em termos da frequência

$$\boxed{\nu_A = \nu_B \left(1 - \frac{\Phi_A - \Phi_B}{c^2}\right)}$$

Ou seja, $\nu_A < \nu_B$, a frequência é menor acima da superfície do que é à superfície. Um observador em B vê o tempo a passar mais depressa em A. Se fizermos as contas ao contrário, um observador em A, vê o tempo a passar mais lentamente em B.

7 A equação da geodésica

[Gibbons cap. 5; D'Inverno cap. 7.6; Ferreira cap. 4]

Pelo princípio da equivalência, a queda de dois corpos não depende da massa. Na relatividade geral, associamos a trajectória das partículas e corpos à curvatura do espaço tempo.

Vamos admitir que o elemento de linha é dado pela métrica g_{ab} tal que

$$ds^2 = g_{ab}(x)dx^a dx^b$$

Vamos também definir o tempo próprio, τ , de um relógio que se desloca ao longo de uma curva como

$$c\tau = \int d\lambda \sqrt{-g_{ab}\dot{x}^a \dot{x}^b}$$

onde λ é um chamado parâmetro afim que nos diz a posição na trajectória da partícula e $\dot{x}^a = dx^a/d\lambda$. E para uma partícula com massa define-se a acção

$$S = -mc^2\tau$$

Vamos tomar a métrica Minkowski como exemplo, temos então, $g_{ab} = \eta_{ab}$, $x^0 = ct$, $x^i = (x, y, z)$ e $x^0 = \lambda = ct$ e ficamos com

$$S = -mc^2\tau = -mc \int cdt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2} = -mc^2 \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

que é a acção na relatividade restrita como esperaríamos. Identifica-se então o Lagrangiano, L , com a expressão

$$L = \sqrt{-g_{ab}(x)\dot{x}^a \dot{x}^b}$$

e usamos as equações de Euler-Lagrange para obter as equações do movimento, tal que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^c} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^c} &= 0 \\ \frac{d}{d\lambda} \left(-\frac{1}{2L} g_{ab}(\dot{x}^b \delta_c^a + \dot{x}^a \delta_c^b) \right) + \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \dot{x}^a \dot{x}^b &= 0 \\ \frac{d}{d\lambda} \left(-\frac{1}{2L} 2g_{cb}\dot{x}^b \right) + \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \dot{x}^a \dot{x}^b &= 0 \end{aligned}$$

Agora note-se que se $\lambda = \tau$ então da definição de τ e de L , temos que $L = c$, e consequentemente temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(g_{cb}\dot{x}^b \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \dot{x}^a \dot{x}^b &= 0 \\ g_{cb}\ddot{x}^b + \frac{\partial g_{cb}}{\partial x^d} \dot{x}^d \dot{x}^b - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} \dot{x}^a \dot{x}^b &= 0 \end{aligned}$$

Mas o segundo termo pode ser dividido em dois permutando $b \leftrightarrow d$ porque são ambos índices mudos, e no último termo fazemos $a \rightarrow d$,

$$g_{cb}\dot{x}^b + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{cb}}{\partial x^d}\dot{x}^d\dot{x}^b + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b}\dot{x}^b\dot{x}^d - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{db}}{\partial x^c}\dot{x}^d\dot{x}^b = 0$$

Usando a definição de métrica inversa $g^{ab} = (g_{ab})^{-1} = g^{ba}$, temos, $g^{ca}g_{cb} = \delta_b^a$, e multiplicando a equação por g^{ca} temos

$$\ddot{x}^a + \frac{1}{2}g^{ca}\left(\frac{\partial g_{cb}}{\partial x^d} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{db}}{\partial x^c}\right)\dot{x}^b\dot{x}^d = 0$$

Esta é equação da geodésica que também se escreve como

$$\boxed{\ddot{x}^a + \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \ c \end{array} \right\} \dot{x}^b\dot{x}^c = 0}$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ b \ c \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{ad}\left(\frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} + \frac{\partial g_{dc}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d}\right)$$

são os chamados símbolos de Christoffel e que também se podem escrever como

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ b \ c \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d})$$

Este exercício pode ser reproduzido se tivéssemos trabalhado com $L^2 = g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b$ em vez de L e usando $S = \int d\lambda L^2$, o que torna o cálculo um pouco mais fácil porque se evita a raíz quadrada e a divisão por L . Note-se também que fizemos este exercício assumindo uma partícula massiva, $L = c$. Para fotões, $ds^2 = 0$ e consequentemente $L = 0$. Aqui as coisas mudam um pouco mas ainda assim é possível mostrar que a equação da geodésica se escreve da mesma maneira para os fotões.

Para geodésicas temporais, espaciais e nulas usamos respectivamente, os parâmetros afim $\lambda = \tau$, $\lambda = s$ e $\lambda = \sigma$ tal que,

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= -g_{ab}dx^adx^b = -ds^2 & \Rightarrow & L^2 = -\frac{ds^2}{d\tau^2} = -g_{ab}\frac{dx^a}{d\tau}\frac{dx^b}{d\tau} = c^2 \\ ds^2 &= g_{ab}dx^adx^b & \Rightarrow & L^2 = \frac{ds^2}{ds^2} = g_{ab}\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds} = 1 \\ ds^2 &= 0 & \Rightarrow & L^2 = g_{ab}\frac{dx^a}{d\sigma}\frac{dx^b}{d\sigma} = 0 \end{aligned}$$

para cada um dos casos, onde τ é tempo próprio e σ é um parâmetro afim que deixa a equação da geodésica como nós a derivámos. [Para saber mais, ver o D'Inverno pag. 100]. Ou seja, para partículas normais temos $L^2 = c^2$ e para os fotões temos $L^2 = 0$.

Uma consequência do que vimos acima é que o produto interno das velocidades são respectivamente

$$\begin{aligned} u^a u_a &= -c^2, \\ u^a u_a &= 1, \\ u^a u_a &= 0, \end{aligned}$$

para partículas mais lentas que a luz, partículas mais rápidas do que a luz e para os fotões.

Exemplo

Vamos calcular os símbolos de Christoffel para a métrica da superfície de uma esfera de raio 1,

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

de forma que

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Seja $x^1 = \theta$ e $x^2 = \phi$. Isto permite escrevermos com $a = 1$,

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ b \ c \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{1d} (g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d})$$

Como a métrica é diagonal, temos que na soma que envolve g^{1d} , só a contribuição g^{11} não é nula, e ficamos com

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ b \ c \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} (g_{1b,c} + g_{1c,b} - g_{bc,1})$$

Como a única derivada da métrica que não se anula é

$$g_{\phi\phi,\theta} = g_{22,1} = 2 \sin \theta \cos \theta$$

temos que as componentes não nulas são para $b = c = 2$, e então

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \ 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{11} (-g_{bc,1}) = \frac{1}{2} (1) (-2 \sin \theta \cos \theta) = -\sin \theta \cos \theta$$

Da mesma forma, agora temos para $a = 2$,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ b \ c \end{array} \right\} &= \frac{1}{2} g^{2d} (g_{db,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}) \\ &= \frac{1}{2} g^{22} (g_{2b,c} + g_{2c,b} - g_{bc,2}) \end{aligned}$$

Agora as únicas possibilidades para o primeiro termo não se anular é que $b = 2$ e $c = 1$. A única possibilidade para o segundo termo não se anular é que $b = 1$ e $c = 2$. E finalmente, o terceiro termo anula-se sempre. Daqui resulta que

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \ 2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \ 1 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta} (2 \sin \theta \cos \theta) = \cot \theta$$

Importa agora verificar estas relações a partir do princípio variacional. Neste caso, como o elemento de linha é do género espaço, temos

$$L^2 = \frac{ds^2}{d\lambda^2} = \dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2$$

Da equação de Euler-Lagrange para θ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L^2}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L^2}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{d}{d\lambda} (2\dot{\theta}) - 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 &= 0 \\ \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2 &= 0 \end{aligned}$$

Comparando com a equação da geodésica, tiramos que

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\} = -\sin \theta \cos \theta$$

E agora considerando a equação de Euler-Lagrange para ϕ temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial L^2}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L^2}{\partial \phi} &= 0 \\ \frac{d}{d\lambda} (\sin^2 \theta \dot{\phi}) - 0 &= 0 \\ \ddot{\phi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

Note-se que no último termo estão duas contribuições contabilizadas. A $\dot{\theta}\dot{\phi}$ e $\dot{\phi}\dot{\theta}$, o que significa que

$$\left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right\} = \cot \theta, \quad \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right\} = \cot \theta$$

que são as expressões que obtivemos aplicando directamente a definição dos símbolos de Christoffel.

8 O limite Newtoniano ou limite do campo fraco

[Ferreira cap. 6]

A partir de agora vamos fazer $c = 1$ que só voltará a aparecer de forma artificial quando for preciso usar unidades naturais.

Vimos já que segundo o princípio da correspondência, a relatividade geral deve concordar com a relatividade restrita na ausência de gravitação e com a gravitação Newtoniana no limite do campo fraco e pequenas velocidades. Vamos então considerar um campo gravitacional fraco e estacionário e partículas não relativistas, portanto com velocidades $v \ll 1$. O último requerimento sugere que

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau} \approx 1$$

Então a equação da geodésica

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \ c \end{array} \right\} \frac{dx^b}{d\tau} \frac{dx^c}{d\tau} = 0$$

fica simplificada para

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \left\{ \begin{array}{c} a \\ 0 \ 0 \end{array} \right\} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0$$

Se o campo gravitacional é estacionário, então, $\partial g_{ab}/\partial t = 0$, e os símbolos de Christoffel são

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ 0 \ 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{0d,0} + g_{d0,0} - g_{00,d}) = -\frac{1}{2}g^{ad}g_{00,d}$$

Vamos agora considerar o campo fraco, ou seja, uma perturbação à métrica de Minkowski tal que

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$$

onde $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ e assumimos $|h_{ab}| \ll 1$. Podemos expandir os símbolos de Christoffel em primeira ordem e obtemos

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ 0 \ 0 \end{array} \right\} = -\frac{1}{2}\eta^{ad}h_{00,d} = -\frac{1}{2}h_{00}{}^a$$

Substituindo na equação da geodésica,

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h_{00}{}^a \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0$$

E como $x^0 = t$ e $dt/d\tau \approx 1$, temos

$$\frac{d^2x^a}{dt^2} = \frac{1}{2}h_{00}{}^a$$

que em notação vectorial se escreve como

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{2}\nabla h_{00}$$

Se nos lembarmos que da equação da aceleração de Newton, que a força é o gradiente de uma potencial

$$\vec{F} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi$$

podemos indentificar

$$h_{00} = -2\Phi$$

E então, $g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$, fica

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi)$$

Ou seja, na mecânica Newtoniana, na presençaa de um campo estacionário, podemos escrever o elemento de linha como

$$ds^2 = -(1 + \Phi)dt^2 + dx^i dx_i$$

9 O desvio para o vermelho gravitacional revisitado

[Ferreira cap. 6]

Consideremos o tempo próprio de uma partícula τ tal que,

$$ds^2 = -d\tau^2 = g_{00} dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$$

e vamos escolher um sistema estacionário tal que $dx^i = 0$, então temos usando o resultado do capítulo anterior

$$d\tau = \sqrt{-g_{00}} dt = \sqrt{1 + 2\Phi} dt \approx (1 + \Phi)dt$$

Comparemos agora os tempos em dois pontos distintos A e B, em que B está na superfície da Terra e A está acima da superfície,

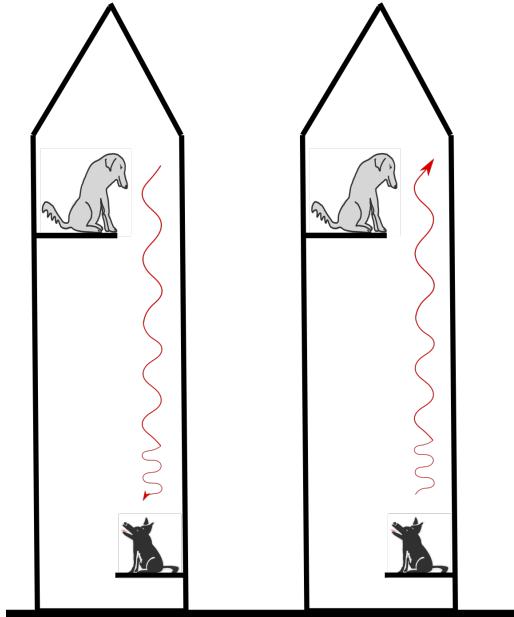
$$\frac{d\tau_A}{d\tau_B} = \sqrt{\frac{g_{00}^A}{g_{00}^B}} = \frac{1 + \Phi_A}{1 + \Phi_B} \approx (1 + \Phi_A)(1 - \Phi_B) \approx 1 + \Phi_A - \Phi_B$$

Ou em termos de frequências,

$$\nu_A = \nu_B (1 - (\Phi_A - \Phi_B))$$

que é mesmo resultado que obtivemos no capítulo 6 com $c = 1$. Como $\Phi = -GM/r$, temos $\Phi_A - \Phi_B > 0$ e resulta que $\nu_A < \nu_B$.

Esta diferença entre as frequências em A e em B, foi testada pela primeira vez na famosa experiência de Pound e Rebka em Harvard, com núcleos de ^{57}Fe .



10 Vectores e tensores

[Gibbons cap. 8; D'Inverno cap. 5]

Recordar que do princípio da covariância, devemos ser capazes de escrever as equações da física de forma a que são válidas para cada sistema de coordenadas. Dado um sistema de coordenadas x^a , podemos sempre passar para um novo sistema de coordenadas $\tilde{x}^a = \tilde{x}^a(x^a)$ e calcular a matriz Jacobiana

$$J_b^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b}$$

Dado um novo sistema de coordenadas $\bar{x}^a = \bar{x}^a(\tilde{x}^b)$ temos

$$\frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^b} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial \tilde{x}^c} \frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^b}$$

e se a transformação $x^a \rightarrow \tilde{x}^a$ é invertível,

$$\det \left(\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} \right) \neq 0$$

e temos

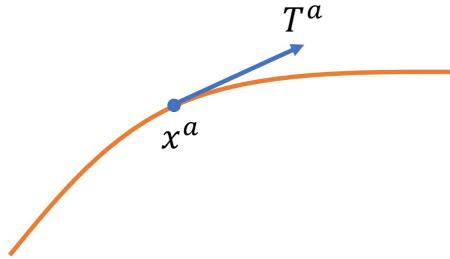
$$\frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^c} \frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^b} = \delta_b^a$$

10.1 Vector contravariante

Consideremos uma curva num espaço-tempo parametrizada por λ , tal que $x^a = x^a(\lambda)$. O vector tangente a esta curva é

$$T^a = \frac{dx^a}{d\lambda}$$

Nas coordenadas \tilde{x}^a temos



$$\tilde{T}^a = \frac{d\tilde{x}^a}{d\lambda}$$

Usando a regra da cadeia

$$\tilde{T}^a = \frac{d\tilde{x}^a}{d\lambda} = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} \frac{dx^b}{d\lambda}$$

ou seja, o vector tangente transforma-se como

$$\tilde{T}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} T^b$$

10.2 Vector covariante

Vamos agora ver os vectores que se transformam de forma oposta. Por exemplo, o gradiente de uma função f , é desta forma

$$F_a = \frac{\partial f}{\partial x^a} = \partial_a f$$

Agora usando a regra da cadeia temos

$$\tilde{F}_a = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^a} = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial f}{\partial x^b}$$

e então o vector covariante transforma-se como

$$\tilde{F}_a = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} F_b$$

A contracção de um vector contravariante com um vector covariante

$$\tilde{F}_a \tilde{T}^a = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^c} F_b T^c = \delta_c^b F_b T^c = F_b T^b$$

vemos que é um invariante, ou seja, é um escalar, não há índices livres.

10.3 Tensores

Podemos agora generalizar para um objecto com um número arbitrário de índices em cima e em baixo. Por exemplo, o tensor da métrica é um tensor de segunda ordem, com dois índices covariantes.

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = \tilde{g}_{cd} d\tilde{x}^c d\tilde{x}^d$$

mas como

$$dx^a = \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^c} d\tilde{x}^c$$

temos

$$\tilde{g}_{cd} = g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^c} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^d}$$

Em geral temos que um tensor $Q_{cd\dots}^{ab\dots}$ se transforma

$$\tilde{Q}_{cd\dots}^{ab\dots} = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^\beta} \dots \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^c} \frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^d} Q_{\gamma\delta\dots}^{\alpha\beta\dots}$$

Podemos ainda decompor um tensor numa parte simétrica e numa parte antisimétrica tal que

$$Q_{ab} = Q_{(ab)} + Q_{[ab]}$$

onde $Q_{(ab)}$ é a parte simétrica

$$Q_{(ab)} = \frac{1}{2} (Q_{ab} + Q_{ba}) = Q_{(ba)}$$

e $Q_{[ab]}$ é a parte antisimétrica

$$Q_{[ab]} = \frac{1}{2} (Q_{ab} - Q_{ba}) = -Q_{[ba]}$$

Também se pode definir o traço de um tensor como a contração dos seus índices e mostra-se facilmente que é um invariante.

$$\tilde{Q}_a^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^c} \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^a} Q_d^c = \delta_c^d Q_d^c = Q_c^c$$

11 Derivada covariante

[Gibbons cap. 9]

Vimos que $F_a = \partial_a f$ se transforma como um vector covariante. Mas a sua derivada já não se transforma como um vector covariante. Vejamos,

$$\frac{\partial \tilde{F}_a}{\partial \tilde{x}^b} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^b} \left(\frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^a} F_c \right) = \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^b} \frac{\partial F_c}{\partial x^d} + \frac{\partial^2 x^c}{\partial \tilde{x}^b \partial \tilde{x}^a} F_c$$

O primeiro termo é do género que nós estaríamos à espera, mas a presença do segundo termo impede que a deriva da seja um vector covariante. Portanto, a segunda derivada de um escalar, ou Hessiana, não é um tensor covariante.

Vamos então introduzir a definição de derivada covariante, ∇_a , tal que:

1. A derivada covariante de um escalar é igual à derivada parcial,

$$\nabla_a f = \partial_a f$$

2. Obedece à regra de Leibnitz, ou seja, para os tensores genéricos M e N ,

$$\nabla_a(MN) = (\nabla_a M)N + M(\nabla_a N)$$

onde se omitiram os índices.

3. Comuta com contracções entre índices,

$$\nabla_a \nabla^a = \nabla^a \nabla_a$$

4. Aplicada a um vector contravariante temos

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \Gamma_{ac}^b V^c$$

5. Aplicada a um vector covariante fica

$$\nabla_a U_b = \partial_a U_b - \Gamma_{ab}^c U_c$$

Estas quantidades Γ_{bc}^a são chamadas de conexões afim. Estas não são tensores. Na verdade, debaixo de uma transformação de coordenadas, impondo que a derivada covariante se transforma como um tensor,

$$\tilde{\nabla}_a \tilde{V}_b = \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^b} \nabla_c V_d$$

então as conexões afim transforma-se na forma

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^e} \frac{\partial x^g}{\partial \tilde{x}^b} \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^c} \Gamma_{gd}^e + \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^e} \frac{\partial^2 x^e}{\partial \tilde{x}^b \partial \tilde{x}^c}$$

que fica como exercício mostrar.

Para tensores mais gerais temos

$$\begin{aligned}\nabla_a M_{bc} &= \partial_a M_{bc} - \Gamma_{ab}^d M_{dc} - \Gamma_{ac}^d M_{bd} \\ \nabla_a N^{bc} &= \partial_a N^{bc} + \Gamma_{ad}^b N^{dc} + \Gamma_{ad}^c N^{bd} \\ \nabla_a O_c^b &= \partial_a O_c^b + \Gamma_{ad}^b O_c^d - \Gamma_{ac}^d O_d^b\end{aligned}$$

Define-se ainda o tensor de torção como

$$T_{ac}^b = \Gamma_{ac}^b - \Gamma_{ca}^b$$

que é portanto, um tensor antisimétrico, $T_{ac}^b = -T_{ca}^b = 2\Gamma_{[ac]}^b$. Podemos deduzir, a partir da transformação de Γ_{ac}^b , que

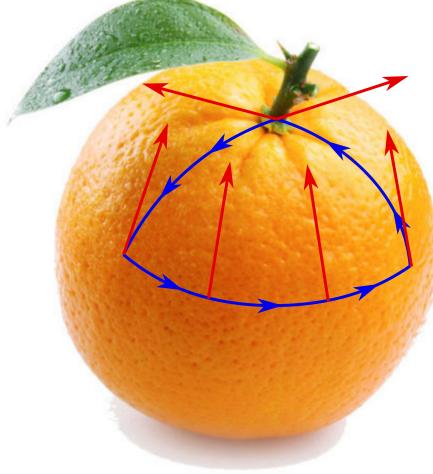
$$\tilde{\Gamma}_{[ac]}^b = \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^e} \frac{\partial x^g}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^c} \Gamma_{gd}^e = \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^e} \frac{\partial x^{[g}}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial x^{d]}}{\partial \tilde{x}^c} \Gamma_{gd}^e = \frac{\partial \tilde{x}^b}{\partial x^e} \frac{\partial x^g}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^c} \Gamma_{[gd]}^e$$

o que mostra que de facto se transforma como um tensor.

12 Derivada total e o transporte paralelo

[Gibbons cap. 10]

Num espaço plano, o transporte paralelo de um vector não depende do caminho. Num espaço curvo, um vector transportado paralelamente já depende do caminho.



Se $T^a = \frac{dx^a}{d\lambda}$ é o vector tangente a uma curva $x^c(\lambda)$, definimos a derivada absoluta de um vector por

$$\boxed{\frac{DV^a}{D\lambda} = T^b \nabla_b V^a} \quad (12.1)$$

ou seja,

$$\frac{DV^a}{D\lambda} = T^b \left(\partial_b V^a + \Gamma_{bd}^a V^d \right) = \frac{dV^a}{d\lambda} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\lambda} V^c.$$

Dizemos que um vector é transportado paralelamente ao longo de uma curva se

$$\boxed{\frac{DV^a}{D\lambda} = 0} \quad (12.2)$$

ou seja,

$$\frac{dV^a}{d\lambda} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\lambda} V^c = 0. \quad (12.3)$$

Quando a equação de transporte paralelo é aplicada ao vector tangente T^a , temos

$$\begin{aligned} \frac{DT^a}{D\lambda} &= 0 \\ \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^a}{d\lambda} \right) + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\lambda} \frac{dx^c}{d\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d^2x^a}{d\lambda^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\lambda} \frac{dx^c}{d\lambda} = 0} \quad (12.4)$$

Esta é a equação da geodésica que já tínhamos visto com $\Gamma_{bc}^a = \left\{ \begin{array}{c} a \\ b \ c \end{array} \right\}$. Quando não existe torção as conexões assim são simétricas $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$, e escrevem-se

$$\boxed{\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d})} \quad (12.5)$$

e passamos a chamar-lhes conexões da métrica. Esta definição leva à igualdade que fica para exercício

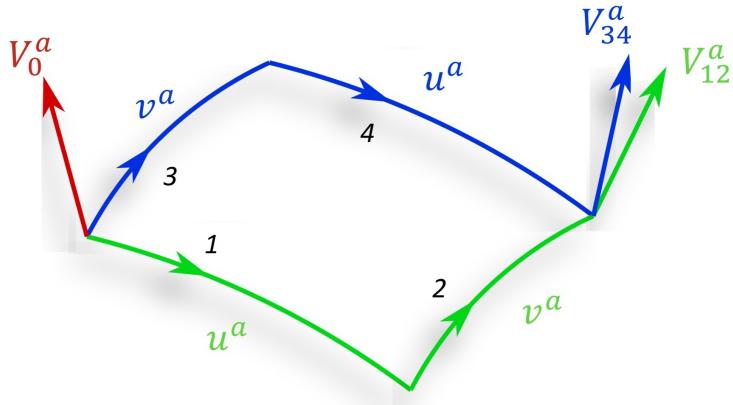
$$\boxed{\nabla_c g_{ab} = 0} \quad (12.6)$$

chamada de metricidade.

13 Curvatura

[Ferreira cap. 10, D'Inverno cap. 6.7]

Já vimos que um vector transportado paralelamente tem componentes diferentes dependendo do caminho. Para quantizar isto vendo a mudança de um vector V_0^a ao longo de dois caminhos diferentes num paralelogramo. O primeiro caminho assinalado com etapas 1 e 2 e, o outro caminho com etapas 3 e 4 na figura. O desvio em cada caso é u^a ou v^a .



Da definição de transporte paralelo temos que da Eq.(12.3)

$$\frac{dV^a}{d\lambda} = -\Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\lambda} V^c \quad \Rightarrow \quad \delta V^a = -\Gamma_{bc}^a V^a \delta x^c$$

Então, a mudança no vector ao seguir um dos caminhos é dada por

$$\begin{aligned} V_{12}^a &= V_0^a - \Gamma_{bc}^a(x) V^b(x) u^c - \Gamma_{bc}^a(x+u) V^b(x+u) v^c \\ V_{34}^a &= V_0^a - \Gamma_{bc}^a(x) V^b(x) v^c - \Gamma_{bc}^a(x+v) V^b(x+v) u^c \end{aligned}$$

Podemos expandir em série de Taylor os termos $\Gamma(x+u)V$, tal que

$$\begin{aligned} \Gamma_{bc}^a(x+u) V^b(x+u) v^c &\approx \Gamma_{bc}^a V^b v^c + \frac{\partial(\Gamma_{bc}^a V^a)}{\partial x^d} u^d v^c \\ \Gamma_{bc}^a(x+v) V^b(x+v) u^c &\approx \Gamma_{bc}^a V^b u^c + \frac{\partial(\Gamma_{bc}^a V^b)}{\partial x^d} u^c v^d \end{aligned}$$

Temos então que a diferença entre os caminhos é

$$\begin{aligned} \delta V^a &= V_{12}^a - V_{34}^a = -\Gamma_{bc}^a V^b u^c - \Gamma_{bc}^a V^b v^c - \partial_d(\Gamma_{bc}^a V^b) u^d v^c \\ &\quad + \Gamma_{bc}^a V^b v^c + \Gamma_{bc}^a V^b u^c + \partial_d(\Gamma_{bc}^a V^b) u^c v^d \\ &= \left[-\partial_c(\Gamma_{bd}^a V^b) + \partial_d(\Gamma_{bc}^a V^b) \right] u^c v^d \\ &= \left[\partial_d \Gamma_{bc}^a V^b + \Gamma_{bc}^a \partial_d V^b - \partial_c \Gamma_{bd}^a V^b - \Gamma_{bd}^a \partial_c V^b \right] u^c v^d \end{aligned}$$

Mas também já sabemos da equação de transporte paralelo que

$$\frac{dV^b}{dx^d} = -\Gamma_{de}^b V^e$$

E então, a mudança do vector fica

$$\delta V^a = \left[\partial_d \Gamma_{bc}^a V^b - \Gamma_{bc}^a \Gamma_{de}^b V^e - \partial_c \Gamma_{bd}^a V^b + \Gamma_{bd}^a \Gamma_{ce}^b V^e \right] u^c v^d$$

Vamos fazer uma última mudança de índices $e \leftrightarrow b$ no segundo e no quarto termo, para ficarmos com

$$\begin{aligned} \delta V^a &= [\partial_d \Gamma_{bc}^a - \Gamma_{ec}^a \Gamma_{db}^e - \partial_c \Gamma_{bd}^a + \Gamma_{ed}^a \Gamma_{cb}^e] V^b u^c v^d \\ &= -R_{bcd}^a V^b u^c v^d \end{aligned}$$

onde se definiu

$$R_{bcd}^a = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{ec}^a \Gamma_{db}^e - \Gamma_{ed}^a \Gamma_{cb}^e$$

como o tensor de curvatura de Riemann. Este quantifica a curvatura do espaço tempo. Se não houvesse curvatura, $\delta V^a = 0$. O tensor de Riemann é um tensor de grau 4 e depende de segundas derivadas da métrica g_{ab} . Também podemos definir o tensor de Riemann em termos da derivada covariante tal que,

$$(\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b) V^a = R_{dbc}^a V^d$$

Fica para exercício mostrar isto.

O tensor de Riemann satisfaz as seguintes propriedades:

$$R_{bcd}^a = -R_{bdc}^a \quad (13.1)$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd} \quad (13.2)$$

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (13.3)$$

$$R_{bcd}^a + R_{cab}^a + R_{dbc}^a = 0 \quad (13.4)$$

onde $R_{abcd} = g_{ae} R_{bcd}^e$. Também temos a identidade de Bianchi

$$\nabla_e R_{bcd}^a + \nabla_d R_{bec}^a + \nabla_c R_{bde}^a = 0. \quad (13.5)$$

Define-se ainda o tensor de Ricci

$$R_{ab} \equiv R_{acb}^c. \quad (13.6)$$

e o escalar de Ricci

$$R = g^{ab} R_{ab}. \quad (13.7)$$

Exemplo

Para uma métrica

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Calculámos $\Gamma_{22}^1 = -\sin \theta \cos \theta$, $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cot \theta$. E agora calculamos o tensor de Riemann,

$$R_{dab}^c = \partial_a \Gamma_{bd}^c - \partial_b \Gamma_{ad}^c + \Gamma_{ae}^c \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{be}^c \Gamma_{ad}^e$$

Relembrar que $R_{dab}^c = -R_{dba}^c$ e $R_{cdab} = R_{abcd}$. Então podemos começar pela coordenada 1, e fazemos $c = 1$ e temos,

$$R_{dab}^1 = \partial_a \Gamma_{bd}^1 - \partial_b \Gamma_{ad}^1 + \Gamma_{ae}^1 \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{be}^1 \Gamma_{ad}^e$$

Do lado direito, as componentes não nulas no primeiro termo são para $b = d = 2$, no segundo termo para $a = d = 2$. Para o terceiro termo consideremos primeiro Γ_{ae}^1 . Tira-se que $a = e = 2$. O que significa que de Γ_{bd}^e as possibilidades são, $b = 1, d = 2$, ou alternativamente $b = 2, d = 1$. Para o quarto termo o raciocínio é semelhante. De Γ_{be}^1 tira-se que $b = e = 2$, e consequentemente de Γ_{ad}^e só podemos ter como não nulas as componentes com $a = 1, d = 2$, ou alternativamente $a = 2, d = 1$. Escolhamos então a primeira possibilidade, $b = d = 2$, e portanto, $a = 1$, o que dá

$$\begin{aligned} R_{212}^1 &= \partial_1 \Gamma_{22}^1 - 0 + 0 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 \\ &= \partial_\theta (-\sin \theta \cos \theta) - (-\sin \theta \cos \theta) \cot \theta \\ &= -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Podemos agora proceder de igual forma para calcular R_{dab}^2 . Alternativamente, podemos usar as simetrias do tensor de Riemann para obter as restantes componentes. Comecemos por exemplo por R_{121}^2 ,

$$\begin{aligned} R_{121}^2 &= g^{2a} R_{a121} = g^{22} R_{2121} = g^{22} R_{1212} \\ &= g^{22} g_{1a} R_{212}^a = g^{22} g_{11} R_{212}^1 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot 1 \cdot \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

E então temos ainda para o tensor de Ricci,

$$\begin{aligned} R_{ab} &= R_{acb}^c \\ R_{11} &= R_{1c1}^c = R_{111+}^1 R_{121}^2 = 1 \\ R_{12} &= R_{1c2}^c = R_{112}^1 + R_{122}^2 = 0 \\ R_{22} &= R_{2c2}^c = R_{212}^1 + R_{222}^2 = \sin^2 \theta \end{aligned}$$

e para o escalar de Ricci,

$$R = g^{ab} R_{ab} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + 0 = 1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \sin^2 \theta = 2.$$

14 As identidades de Bianchi contraídas

[Gibbons cap. 11.4]

Já vimos as identidades de Bianchi na Eq. (13.5) que reescrevemos aqui

$$\nabla_e R_{cab}^d + \nabla_b R_{cea}^d + \nabla_a R_{cbe}^d = 0 \quad (14.1)$$

trocando os índices e e a no segundo termo e depois contraíndo os índices d e a temos

$$\nabla_e R_{cb} - \nabla_b R_{ce} + \nabla_d R_{cbe}^d = 0$$

Vamos agora contrair com o tensor inverso da métrica g^{ce} (que é uma maneira elegante de dizer que vamos multiplicar por g^{ce}), e não esquecer que $\nabla_a g^{bc} = 0$ (metricidade). Então temos

$$\begin{aligned} \nabla_e (g^{ce} R_{cb}) - \nabla_b (g^{ce} R_{ce}) + \nabla_d (g^{ce} R_{cbe}^d) &= 0 \\ \nabla_e R_b^e - \nabla_b R + \nabla_d (g^{ce} R_{cbe}^d) &= 0 \end{aligned}$$

Agora note-se que

$$g^{ce} R_{cbe}^d = g^{ce} g^{df} R_{fcbe} = g^{ce} g^{df} R_{cfcb} = g^{df} R_{feb}^e = g^{df} R_{fb} = R_b^d,$$

o que nos permite escrever as identidades de Bianchi como

$$\begin{aligned} \nabla_e R_b^e - \nabla_b R + \nabla_d R_b^d &= 0 \\ 2\nabla_e R_b^e - \nabla_b R &= 0 \end{aligned}$$

e multiplicando por g^{ab} , ficamos com

$$\nabla_e R^{ea} - \frac{1}{2} g^{ab} \nabla_b R = 0$$

e ainda

$$\boxed{\nabla_b \left(R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R \right) = 0} \quad (14.2)$$

Também se define o tensor de Einstein como

$$\boxed{G^{ab} = R^{ab} - \frac{1}{2} g^{ab} R} \quad \text{com} \quad \boxed{\nabla_b G^{ab} = 0} \quad (14.3)$$

Exemplo

Voltamos à nossa métrica preferida, $g_{ab} = \text{diag}(1, \sin^2 \theta)$, e temos

$$\begin{aligned} G_{11} &= R_{11} - \frac{1}{2} g_{11} R = 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 0 \\ G_{12} &= R_{12} - \frac{1}{2} g_{12} R = 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 2 = 0 \\ G_{21} &= R_{21} - \frac{1}{2} g_{21} R = 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 2 = 0 \\ G_{22} &= R_{22} - \frac{1}{2} g_{22} R = \sin^2 \theta - \frac{1}{2} \cdot \sin^2 \theta \cdot 2 = 0 \end{aligned}$$

15 O tensor energia-momento

[Ferreira cap. 12]

Procuramos agora compreender como é que as formas de energia/massa actuam como fontes de campo gravitacional. Na gravitação de Newton temos a equação de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ e sabemos que temos de recuperar isto mesmo em Relatividade Geral. Vamos utilizar o tensor energia-momento como termo de fonte na equação de campo. Por exemplo, para $u^i \ll c = 1$ e para poeira, temos que

$$T^{ab} = \rho u^a u^b \quad (15.1)$$

e temos $u^a = (1, \vec{u})$.

Vamos mostrar que

$$\partial_a T^{ab} = 0$$

corresponde a duas leis de conservação conhecidas. Vamos olhar primeiro para as componentes com $b = 0$.

$$\begin{aligned} \partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) &= 0 \end{aligned}$$

A que chamamos equação da continuidade. Agora consideremos as componentes com $b = i$,

$$\begin{aligned} \partial_0 T^{0i} + \partial_j T^{ji} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u^i)}{\partial t} + \partial_j(\rho u^i u^j) &= 0 \\ u^i \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_j(\rho u^j) \right) + \rho \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + u^j \partial_j u^i \right) &= 0 \end{aligned}$$

Mas pela equação da continuidade, o primeiro termo anula-se e ficamos com

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = 0$$

e a esta chamamos equação de Navier-Stokes. E temos, pelo Princípio do Acoplamento Mínimo que mencionámos no Cap. 3 que diz que em Relatividade Geral, as derivadas parciais são substituídas por derivadas covariantes [D'Inverno cap. 9.6]. Então em Relatividade Geral as equações da conservação generalizam-se para

$$\nabla_b T^{ab} = 0 \quad (15.2)$$

16 As equações de Einstein

[Ferreira cap. 13]

“O espaço-tempo diz à matéria como se mover e a matéria diz ao espaço-tempo como curvar.”

John Wheeler

Já vimos que o tensor da métrica, o tensor de Einstein e o tensor energia-momento são três quantidades que se conservam, tal que, $\nabla_b g^{ab} = \nabla_b G^{ab} = \nabla_b T^{ab} = 0$. É então concebível que estas três quantidades sejam proporcionais entre si. Em particular, vamos procurar uma solução tal que

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = AT_{ab} \quad (16.1)$$

e vamos olhar para o limite do campo fraco para determinar o valor de A . Nesse limite, já vimos, perturbamos o tensor da métrica

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$$

onde $|h_{ab}| \ll 1$. Vamos considerar poeira, com $u^i \ll 1$, $u^0 = 1$, portanto, $T^{00} = \rho$ e $T^{ij} \approx 0$. Em primeira ordem em h_{ab} , temos que as conexões da métrica ficam,

$$\Gamma_{bc}^a \approx \frac{1}{2}\eta^{ad}(h_{dc,b} + h_{db,c} - h_{bc,d})$$

O tensor de Riemann escreve-se em primeira ordem como

$$\begin{aligned} R_{dab}^c &= \partial_a \Gamma_{bd}^c - \partial_b \Gamma_{ad}^c + \mathcal{O}(h^2). \\ &= \partial_a \left[\frac{1}{2}\eta^{ce}(h_{eb,d} + h_{ed,b} - h_{bd,e}) \right] - \partial_b \left[\frac{1}{2}\eta^{ce}(h_{ea,d} + h_{ed,a} - h_{ad,e}) \right] \\ &= \frac{1}{2}\eta^{ce}[h_{eb,ad} + h_{ed,ab} - h_{bd,ae} - h_{ea,bd} - h_{ed,ba} + h_{ad,be}] \\ &= \frac{1}{2}\eta^{ce}[h_{eb,ad} - h_{bd,ae} - h_{ea,bd} + h_{ad,be}] \end{aligned}$$

e o tensor de Ricci fica

$$R_{db} = R_{dc}^c = \frac{1}{2}\eta^{ce}[h_{eb,cd} - h_{bd,ce} - h_{ec,bd} + h_{cd,be}] .$$

Vamos primeiro calcular a componente R_{00} .

$$R_{00} = \frac{1}{2}\eta^{ce}[h_{e0,c0} - h_{00,ce} - h_{ec,00} + h_{c0,0e}] .$$

Tínhamos visto que no limite de campo fraco também considerávamos um campo estático, ou seja, $\partial g_{ab}/\partial t = 0$, e portanto, $h_{ab,0} = 0$, o que nos simplifica o tensor de Ricci para

$$R_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ce}h_{00,ce} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} .$$

E como também já aprendemos que $h_{00} = -2\Phi$,

$$R_{00} = \nabla^2 \Phi.$$

Para calcular o escalar de Ricci fazemos

$$R = g^{db} R_{db} \approx \eta^{db} R_{db} = -R_{00} + \eta^{ij} R_{ij}$$

E agora temos de calcular estes R_{ij} . Para continuar o cálculo há agora três métodos que passamos a analisar.

1. Método "às três pancadas"

Voltamos à expressão do tensor de Ricci e tomamos

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{1}{2} \eta^{ce} [h_{ei,cj} - h_{ij,ce} - h_{ec,ij} + h_{cj,ie}] \\ &= \frac{1}{2} \eta^{00} [h_{0i,0j} - h_{ij,00} - h_{00,ij} + h_{0j,0i}] + \frac{1}{2} \eta^{kl} [h_{ki,lj} - h_{ij,kl} - h_{kl,ij} + h_{lj,ik}] \end{aligned}$$

Então temos

$$\begin{aligned} \eta^{ij} R_{ij} &= -\frac{1}{2} \eta^{ij} \eta^{00} h_{00,ij} + \frac{1}{2} \eta^{ij} \eta^{kl} [h_{ki,lj} - h_{ij,kl} - h_{kl,ij} + h_{lj,ik}] \\ &= \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} + \frac{1}{2} [h_{k,j}^j - h_{j,k}^j - h_{k,j}^k + h_{j,k}^k] \\ &= \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00} + (h_{k,j}^j - h_{j,k}^j) \end{aligned}$$

Para já vamos tomar $h_i^j = 0$ para $i \neq j$ e $h_i^j = -2\Psi$ para $i = j$. Isto não é evidente e só se torna um pouco mais claro quando estudarmos buracos negros. Neste caso a igualdade pode ser simplificada para

$$\begin{aligned} \eta^{ij} R_{ij} &= -\nabla^2 \Phi + (h_1^1{}_1 + h_2^2{}_2 + h_3^3{}_3 - \nabla^2(h_1^1 + h_2^2 + h_3^3)) \\ &= -\nabla^2 \Phi + (-2\nabla^2 \Psi + 6\nabla^2 \Psi) \\ &= -\nabla^2 \Phi + 4\nabla^2 \Psi \end{aligned}$$

Então o escalar de Ricci escreve-se como

$$R = -R_{00} + \eta^{ij} R_{ij} = -\nabla^2 \Phi - \nabla^2 \Phi + 4\nabla^2 \Psi = -2\nabla^2 \Phi + 4\nabla^2 \Psi$$

Nos casos em que temos um sistema isotrópico, $\Psi = \Phi$, e nesse caso

$$R = 2\nabla^2 \Phi$$

Lembrando agora que $T_{00} = g_{0a} g_{0b} T^{ab} = g_{00} g_{00} T^{00} = \rho$, então para a primeira componente nas equações de Einstein fica

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R &= A T_{00} \\ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{2} g_{00} 2\nabla^2 \Phi &= A\rho \\ \nabla^2 \Phi &= \frac{1}{2} A\rho \end{aligned}$$

E como pela equação de Poisson, $\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$, temos que $A = 8\pi G$.

2. Método "Chico esperto"

Como $T^{ij} \approx 0$ temos que $G^{ij} \approx 0$ e então,

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R &\approx 0 \\ R_{ij} &\approx \frac{1}{2}\eta_{ij}R \end{aligned}$$

Que uma vez substituído na expressão para R temos

$$R = -R_{00} + \eta^{ij}R_{ij} = -R_{00} + \frac{3}{2}R \quad \Rightarrow \quad R = 2R_{00} = 2\nabla^2\Phi$$

E depois o resto segue como no método anterior.

3. Método "cabecinha pensadora"

Outra forma é ainda é usar a contracção da equação de Einstein com g^{ab} , ficando

$$\begin{aligned} g^{ab}R_{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}g_{ab}R &= Ag^{ab}T_{ab} \\ R - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot R &= AT \\ -R &= AT \end{aligned}$$

Substituindo agora na equação de Einstein

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}(-AT) &= AT_{ab} \\ R_{ab} &= A \left(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T \right) \end{aligned}$$

Como $T^{ab} = \rho u^a u^b$ então $T = \rho u^a u_a = -\rho$. Voltando à equação de Einstein com componentes 00,

$$\begin{aligned} R_{00} &= A \left(T_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}(-\rho) \right) \\ \nabla^2\Phi &= A \left(\rho - \frac{1}{2}\rho \right) = \frac{1}{2}A\rho \quad \Rightarrow \quad A = 8\pi G \end{aligned}$$

como tínhamos encontrado antes.

As equações de Einstein escrevem-se então como

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = 8\pi GT_{ab}$$

Mais tarde o Einstein acabou por adicionar o termo que envolve o tensor da métrica com um termo multiplicativo que se passou a chamar de constante cosmológica Λ ,

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi GT_{ab}$$

(16.2)

Este termo foi invocado para permitir que o Universo fosse estático. Esta equação juntamente com a equação da geodésica são o ponto de partida para a famosa frase de John Wheeler.

17 As soluções esfericamente simétricas

[Barbosa Henriques cap 5.1]

Vamos considerar soluções esfericamente simétricas e estáticas tal que o elemento de linha ds^2 deva ser construído a partir dos elementos invariantes rotacionais, $dt^2, dr^2, r^2dr^2, dt dr, d\Omega$, onde $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, de forma que temos

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + 2rE(r)dt dr + r^2D(r)dr^2 + C(r)(dr^2 + r^2d\Omega)$$

Primeiro que tudo vamos mostrar que é possível eliminar o termo $dt dr$. Seja uma nova variável tempo $\tilde{t} = t + h(r)$, onde $h(r)$ é arbitrária e pode ser

$$\frac{dh}{dr} = -r\frac{E}{F}$$

então

$$\begin{aligned} d\tilde{t} &= dt + dh \\ dt^2 &= dt^2 + dh^2 + 2dtdh \\ dt^2 &= d\tilde{t}^2 - dh^2 - 2dtdh = d\tilde{t}^2 - \left(r\frac{E}{F}\right)^2 dr^2 + 2r\frac{E}{F}dtdr \end{aligned}$$

e substituindo no elemento de linha

$$\begin{aligned} ds^2 &= -Fd\tilde{t}^2 + r^2\frac{E^2}{F}dr^2 + r^2Ddr^2 + C(dr^2 + r^2d\Omega) \\ &= -Fd\tilde{t}^2 + Gdr^2 + C(dr^2 + r^2d\Omega) \end{aligned}$$

com

$$G = r^2 \left(D + \frac{E^2}{F}\right)$$

Vamos agora livrar-nos daquele C a multiplicar o ângulo sólido. Para isso redefinimos r de tal forma que $\tilde{r} = \sqrt{C}r$. Então,

$$\begin{aligned} d\tilde{r} &= \left(\frac{r}{2}\frac{C'}{\sqrt{C}} + \sqrt{C}\right) dr \\ d\tilde{r}^2 &= C \left(1 + \frac{r}{2}\frac{C'}{C}\right)^2 dr^2 \end{aligned}$$

onde $C' = dC/dr$, e substituindo no elemento de linha

$$ds^2 = -Fd\tilde{t}^2 + \frac{G}{C} \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{2}\frac{C'}{C}\right)^2} d\tilde{r}^2 + \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{2}\frac{C'}{C}\right)^2} d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega$$

e agora definindo,

$$\begin{aligned} f(\tilde{r}) &= F(r), & g(\tilde{r}) &= \left(1 + \frac{G}{C}\right) \left(1 + \frac{r}{2}\frac{C'}{C}\right)^{-2}, \\ \tilde{r} &\rightarrow r, & \tilde{t} &\rightarrow t \end{aligned}$$

Temos a versão simplificada

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + g(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

(17.1)

18 A solução de Schwarzschild

[Ferreira cap. 14]

“Como vê, a guerra tem sido simpática para mim permitindo-me, apesar do som das armas a curta distância, caminhar nessa sua terra de ideias.” K. Schwarzschild

Vamos agora resolver a equação de Einstein no vazio onde $T_{ab} = 0$. Da solução esfericamente simétrica temos que $g_{tt} = -f(r)$, $g_{rr} = g(r)$, $g_{\theta\theta} = r^2$, $g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta$. As componentes do tensor de Ricci não nulas ficam então

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{1}{2} \frac{f''}{g} - \frac{1}{4} \frac{f'}{g} \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{1}{r} \frac{f'}{g} \\ R_{rr} &= -\frac{1}{2} \frac{f''}{f} + \frac{1}{4} \frac{f'}{f} \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{1}{r} \frac{g'}{g} \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{1}{g} - \frac{r}{2} \frac{1}{g} \left(\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} \right) \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \end{aligned}$$

Aplicando agora as equações de Einstein, que já vimos podem ser escritas como

$$R_{ab} = 8\pi G \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right)$$

E consequentemente, no vazio, ficamos com $R_{tt} = R_{rr} = R_{\theta\theta} = 0$. O que quer dizer que das duas primeiras expressões temos

$$gR_{tt} + fR_{rr} = \frac{f}{r} \left(\frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \right) = 0$$

Ou seja,

$$\frac{f'}{f} = -\frac{g'}{g} \quad \Rightarrow \quad fg = \alpha = \text{constante}$$

Na solução de Minkowski, $f \rightarrow 1$, $g \rightarrow 1$, então faz sentido estabelecer $\alpha = 1$. Usando agora a expressão para $R_{\theta\theta}$ com $g = 1/f$, temos

$$f + rf' = 1 \quad \Rightarrow \quad (rf)' = 1$$

que depois de integrada dá

$$f = 1 + \frac{B}{r}$$

No caso particular do limite do campo fraco vimos que

$$f = -g_{tt} = 1 + 2\Phi = 1 - 2\frac{GM}{r}$$

O que nos diz que a solução de esfericamente simétrica e estática no vácuo ou solução de Schwarzschild é

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (18.1)$$

19 A equação de Binet na mecânica Newtoniana

[Ferreira cap. 2]

Consideremos o sistema a dois corpos tais como o Sol (com massa m_A) e um planeta (com massa m_B). O Lagrangiano é

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + G\frac{\mu M}{r}$$

onde $r = |\vec{r}| = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$, $M = m_A + m_B$ e $\mu = m_A m_B / M$. Escrevendo o Lagrangiano em coordenadas esféricas temos

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) + G\frac{\mu M}{r}.$$

Vamos assumir que $\theta = \pi/2$. Então as equações de Euler-Lagrange ficam

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= -G\frac{M}{r^2} \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}) &= 0\end{aligned}$$

daqui tiramos que $r^2\dot{\phi} = h = \text{constante}$, que nós interpretamos como a conservação do momento angular.

Façamos agora uma transformação de coordenadas tal que $u = 1/r$. Então

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}\dot{\phi} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}hu^2 = -h\frac{du}{d\phi} \\ \ddot{r} &= -\frac{d}{dt}\left(h\frac{du}{d\phi}\right) = -h\frac{d^2u}{d\phi^2}\dot{\phi} = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\phi^2}\end{aligned}$$

Então a equação do movimento para r pode ser escrita como

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2}}$$

Esta é a chamada equação de Binet e é a equação de um oscilador harmônico simples com uma fonte constante. A solução é dada por

$$\boxed{u = \frac{GM}{h^2}[1 + e \cos(\phi - \phi_0)]} \quad (19.1)$$

onde e é a elipticidade. Corresponde a órbitas fechadas na forma de elipses.

20 A equação de Binet na Relatividade Geral

[Gibbons cap. 16.1; D'Inverno cap. 15.3, Ferreira cap. 7]

Agora para a Relatividade Geral, já vimos que podemos construir o Lagrangiano a partir da métrica de Schwarzschild

$$L^2 = -\frac{ds^2}{d\lambda^2} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2)$$

Novamente, fazemos $\theta = \pi/2$, e temos

$$L^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2$$

Das equações de Euler-Lagrange temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left[\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} \right] &= 0 & \Rightarrow & \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = E \\ \frac{d}{d\lambda} (r^2 \dot{\phi}) &= 0 & \Rightarrow & r^2 \dot{\phi} = h \end{aligned}$$

Da primeira relação temos a conservação da energia e da segunda a conservação do momento angular. Vamos agora substituir \dot{t} no Lagrangiano e temos

$$\boxed{\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(L^2 + \frac{h^2}{r^2}\right)} \quad (20.1)$$

Usando agora $\dot{r} = (dr/d\phi) \dot{\phi}$ e substituindo $\dot{\phi} = h/r^2$,

$$\frac{h^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(L^2 + \frac{h^2}{r^2}\right)$$

e como $r = 1/u$,

$$\frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\phi}$$

ficamos com

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{2} u^2 = \frac{E^2}{2h^2} - (1 - 2GMu) \frac{L^2}{2h^2} + GMu^3.$$

Fazendo mais uma derivada em ordem a ϕ temos a equação do movimento

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{h^2} L^2 + 3GMu^2} \quad (20.2)$$

Esta é a equação de Binet da Relatividade Geral que se reduz à da mecânica Newtoniana com $L^2 = 1$ e o termo em u^2 é a correção da Relatividade Geral.

21 Precessão do periélio de Mercúrio

[Ferreira cap.7]

“Durante alguns dias estive fora de mim com uma feliz excitação.”

A. Einstein

Vamos agora usar a equação de Binet da Relatividade Geral e ainda a pensar na órbita de um planeta em torno do Sol, fazemos $L^2 = 1$. Procuramos, uma solução perturbativa tal que

$$u = u_0 + \epsilon u_1 ,$$

com u_0 dado pela solução (19.1), $u_0 = (GM/h^2)(1 + e \cos \phi)$. Substituindo esta solução teste na equação de Binet, temos para u_1 ,

$$u_1'' + u_1 = \frac{3GM}{\epsilon} u_0^2$$

e por análise dimensional $3GM/\epsilon \sim 1/u_0$, e consequentemente define-se

$$\epsilon = \frac{3G^2 M^2}{h^2} .$$

Para o planeta Mercúrio, $\epsilon \approx 10^{-7}$. E agora tentamos encontrar a solução de u_1 .

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &= \frac{GM}{h^2}(1 + e \cos \phi)^2 \\ &= \frac{GM}{h^2}(1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi) \\ &= \frac{GM}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} + 2e \cos \phi + \frac{e^2}{2} \cos 2\phi \right) \end{aligned}$$

onde no último passo se usou a identidade $\cos^2 \phi = (1 + \cos 2\phi)/2$. Podemos tentar uma solução da forma

$$u_1 = A + B\phi \sin \phi + C \cos 2\phi$$

e vamos à procura dos coeficientes A , B , C . Como

$$\begin{aligned} u_1' &= B \sin \phi + B\phi \cos \phi - 2C \sin 2\phi \\ u_1'' &= 2B \cos \phi - B\phi \sin \phi - 4C \cos 2\phi \end{aligned}$$

Substituindo na equação do movimento temos

$$\begin{aligned} 2B \cos \phi - B\phi \sin \phi - 4C \cos 2\phi + A + B\phi \sin \phi + C \cos 2\phi &= \\ \frac{GM}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + \frac{2GM}{h^2} e \cos \phi + \frac{GM}{2h^2} e^2 \cos 2\phi & \end{aligned}$$

tira-se que

$$A = \frac{GM}{h^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right), \quad B = \frac{GM e}{h^2}, \quad C = -\frac{GM e^2}{6h^2}$$

Ficando a solução como

$$u = u_0 + \epsilon \frac{GM}{h^2} \left[1 + \frac{e^2}{2} + e\phi \sin \phi - \frac{e^2}{6} \cos 2\phi \right].$$

Após algumas revoluções, o termo $\phi \sin \phi$ torna-se o mais importante, então, substituindo u_0

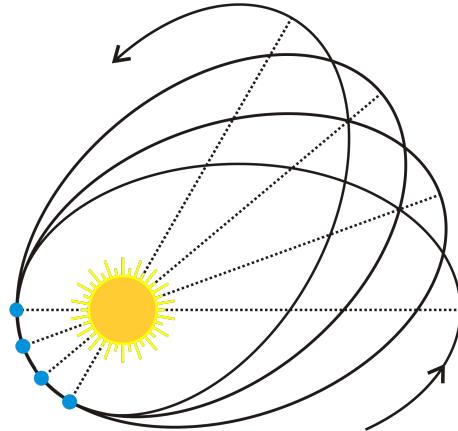
$$u = \frac{GM}{h^2} (1 + e \cos \phi + e\epsilon \phi \sin \phi)$$

Mas note-se que da identidade $\cos(\phi - \epsilon\phi) = \cos \phi \cos(\epsilon\phi) + \sin \phi \sin(\epsilon\phi) \approx \cos \phi + \epsilon\phi \sin \phi$, o que significa que a solução aproximada é

$$u = \frac{GM}{h^2} [1 + e \cos((1 - \epsilon)\phi)]$$

(21.1)

Ou seja, ao contrário do que acontece na solução da mecânica Newtoniana, em que o período é 2π , agora a solução volta ao mesmo ponto quando $\phi = 2\pi/(1 - \epsilon)$. Ou seja, a órbita não se fecha sobre si mesma.



Para o sistema Sol-Mercúrio, temos $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ Kg, $T = 88$ dias, $r = 5.8 \times 10^{10}$ m. Portanto o efeito da precessão do periélio de Mercúrio é de

$$\Delta\phi = 2\pi\epsilon = 42.98''/\text{sec}.$$

Esse efeito da precessão foi detectado por Verrier no século XIX. A precessão dos equinócios contribui com $5025''/\text{séc}$. Os outros planetas com $531''/\text{séc}$. O Sol tem um quadrupolo que contribui com $0.025''/\text{séc}$. Tirando todos estes efeitos, ainda resta uma precessão intrínseca de

$$\Delta\phi = 42.969'' \pm 0.0052''/\text{sec}.$$

22 Deflexão dos raios luminosos

[Gibbons cap. 16.1.2; Ferreira cap. 8]

“Estrelas não estão onde deviam estar, mas ninguém precisa de se preocupar.” New York Times, 6 Novembro 1919

Vamos agora procurar uma solução da equação de Binet da Relatividade Geral mas para a luz, ou seja, quando $L^2 = 0$, e vamos aplicá-la a deflexão dos raios de luz quando estes passam junto a um campo gravitacional. Por outras palavras, vamos calcular o desvio na trajectória da luz emitida por uma estrela quando passa rasante ao Sol. A equação fica simplesmente

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3GMu^2.$$

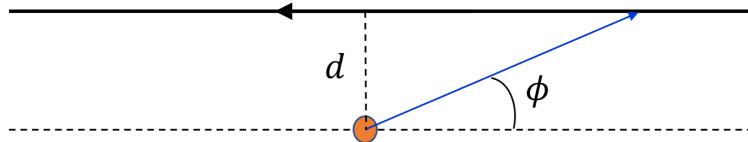
Vamos procurar uma solução $u = u_0 + u_1$ onde u_0 é a solução da equação homogénea, ou seja

$$\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + u_0 = 0,$$

e cujo resultado é

$$u_0 = \frac{\sin \phi}{d}, \quad r = \frac{d}{\sin \phi}$$

e que descreve uma linha recta, de tal forma que quando $\phi \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ e quando $\phi \rightarrow \pi/2$, $r \rightarrow d$ e quando $\phi \rightarrow \pi$, $r \rightarrow \infty$, novamente. É portanto, uma recta com parâmetro de impacto $r = d$, a distância mais curta ao ponto de referência.



Agora substituimos u_0 na equação de Binet e procuramos a solução de u_1

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 &= 3GMu_0^2 \\ &= 3GM \frac{\sin^2 \phi}{d^2} = \frac{3GM}{2d^2} (1 - \cos 2\phi) \end{aligned}$$

que tem solução (sem demonstração)

$$u = \frac{\sin \phi}{d} + \frac{3GM}{2d^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2\phi \right)$$

que é a perturbação a uma recta. As constantes de integração foram escolhidas de forma que haja uma simetria em torno de $\phi = \pi/2$. Queremos agora saber para que valores de ϕ temos as trajectória a ir para infinito, $r \rightarrow \infty$ ou $u \rightarrow 0$. Com $\cos 2\phi \approx 1$, esses serão então,

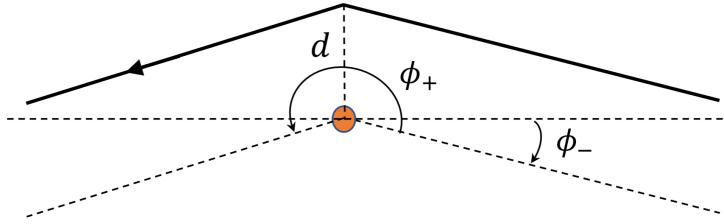
$$\sin \phi = -\frac{2GM}{d}$$

ou seja, quando

$$\phi_- = -\frac{2GM}{d}, \quad \phi_+ = \pi + \frac{2GM}{d}$$

e então o desvio total é $\Delta\phi_{GR} = |\phi_-| + |\phi_+ - \pi|$

$$\boxed{\Delta\phi_{GR} = \frac{4GM}{d}}$$



Para raios de luz rasantes ao Sol, $d = 6.96340 \times 10^8$ m, esta deflexão é de $\Delta\phi \approx 1.75''$. Isto foi medido pela primeira vez por Eddington por ocasião do eclipse do Sol de 1919. Hoje o limite observational é

$$\Delta\phi = (0.99992 \pm 0.00023) \times 1.75''$$

Importa aqui verificar como isto se compara com a previsão da mecânica de Newton. Vamos admitir que podíamos escrever o momento angular por unidade de massa do fotão como, $h = L/m = mdv/m = d$, porque $v = c = 1$. Então da equação de Binet da mecânica Newtoniana, teríamos

$$u'' + u = \frac{GM}{d^2}$$

cuja solução é

$$u = \frac{\sin \phi}{d} + \frac{GM}{d^2}$$

e então o desvio seria apenas

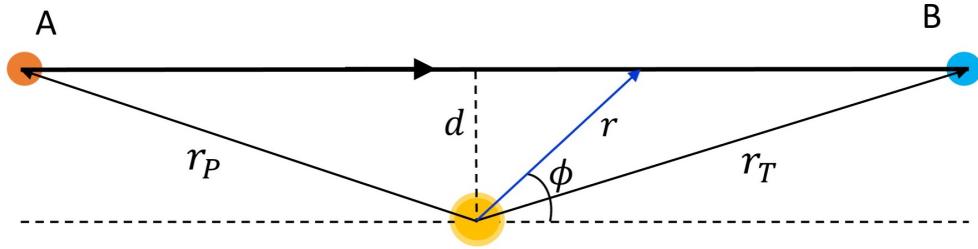
$$\Delta\phi_N = \frac{2GM}{d}$$

ou seja, apenas metade daquilo que é previsto pela Relatividade Geral.

23 Atraso gravitacional de Shapiro

[Ferreira cap. 8]

Quando um sinal de radar passa rasante a um objecto massivo, leva mais tempo a chegar ao alvo do que o tempo que levaria caso o objecto massivo não estivesse na trajectória. Por exemplo, o intervalo de tempo entre a emissão de um sinal de radar que passa junto ao sol e o sinal recebido depois que é reflectido na superfície de um planeta tem um atraso que se deve à curvatura do espaço-tempo.



Primeiro que tudo temos de calcular o tempo que a luz percorre na viagem entre a Terra e o planeta, Δt . E depois comparar com o tempo que decorreu na Terra, $\Delta\tau$. Vamos calcular primeiro Δt e partimos da métrica de Schwarzschild para uma onda electromagnética, i.e., com $ds^2 = 0$.

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\phi^2 = 0$$

Na verdade é possível simplificar escrevendo $d\phi$ como função de dr . Para isso, vamos tomar a solução em primeira ordem para a equação de Binet relativista aplicada aos raios luminosos, ou seja, a equação da recta

$$r = \frac{d}{\sin\phi}$$

que nos dá diferenciando

$$dr = -d\frac{\cos\phi}{\sin^2\phi}d\phi = -\frac{1}{d}r^2\cos\phi d\phi$$

e consequentemente

$$r^2d\phi^2 = \left(\frac{d}{\cos\phi}\frac{dr}{r}\right)^2 = \tan^2\phi dr^2 = \frac{d^2}{r^2-d^2}dr^2$$

Substituindo na métrica temos

$$dt^2 = \left[\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\frac{d^2}{r^2-d^2}\right]dr^2$$

Expandindo em primeira ordem em GM/r ,

$$\begin{aligned} dt^2 &\approx \left[1 + \frac{4GM}{r} + \left(1 + \frac{2GM}{r} \right) \frac{d^2}{r^2 - d^2} \right] dr^2 \\ &= \frac{1}{r^2 - d^2} \left[\left(1 + \frac{4GM}{r} \right) (r^2 - d^2) + \left(1 + \frac{2GM}{r} \right) d^2 \right] dr^2 \\ &= \frac{r^2}{r^2 - d^2} \left[1 + \frac{4GM}{r} - \frac{2GM}{r^3} d^2 \right] dr^2 \end{aligned}$$

ou seja,

$$dt \approx \pm \frac{r}{\sqrt{r^2 - d^2}} \left[1 + \frac{2GM}{r} - \frac{GM}{r^3} d^2 \right] dr$$

Integrando entre os pontos A e B temos

$$\boxed{\Delta t = \pm \left[\sqrt{r^2 - d^2} \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) + 2GM \ln \left(\sqrt{\frac{r^2}{d^2} - 1} + \frac{r}{d} \right) \right]_A^B} \quad (23.1)$$

Vamos agora calcular o tempo, $\Delta\tau$ que passou na Terra, onde τ é o tempo próprio assumindo uma órbita circular de modo que $dr = d\theta = 0$ mas $d\phi \neq 0$. Podemos relacionar o tempo t com τ usando o elemento de linha percorrido pela Terra

$$ds^2 = -dt^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r_T} \right) dt^2 - r_T^2 d\phi^2$$

onde r_T é o raio da órbita da Terra. Simplificando ficamos com

$$d\tau = \left(1 - \frac{2GM}{r_T} - r_T^2 \dot{\phi}^2 \right)^{1/2} dt \approx \left(1 - \frac{GM}{r_T} - \frac{1}{2} r_T^2 \dot{\phi}^2 \right) dt$$

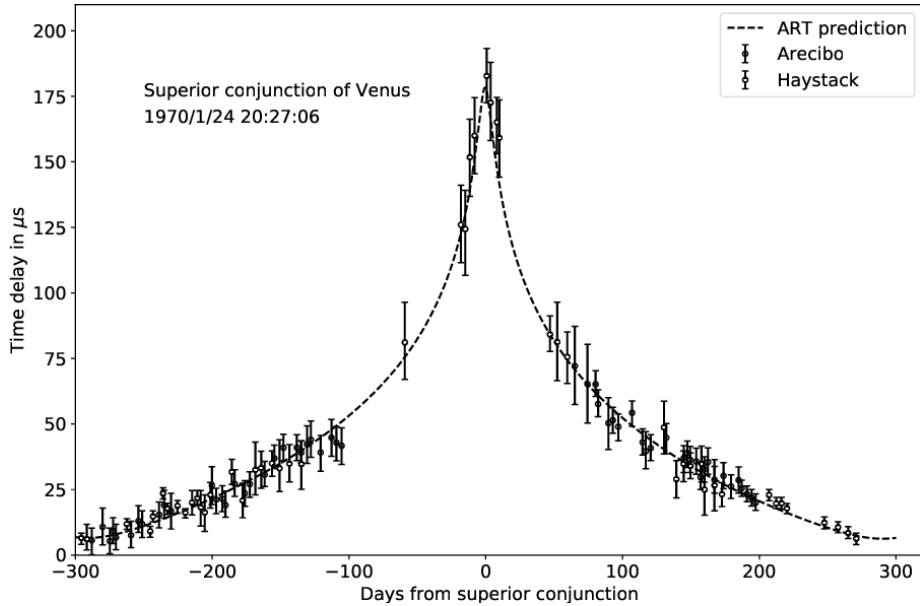
Podemos fazer esta aproximação para um campo gravitacional fraco e para uma momento angular pequeno. Como para uma órbita circular com $\dot{\phi} = \text{constante}$ temos a compensação entre a força centrífuga e a força gravitacional tal que $mr\dot{\phi}^2 = GmM/r^2$ então,

$$d\tau = \left(1 - \frac{GM}{r_T} - \frac{1}{2} \frac{GM}{r_T} \right) dt$$

e integrando

$$\boxed{\Delta\tau = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{GM}{r_T} \right) \Delta t} \quad (23.2)$$

Então concluímos que $\Delta\tau < \Delta t$. Também devemos notar que tomando $r \gg d$, quando d é muito pequeno, o termo logarítmico em (23.1) diverge, ou seja, quando o raio passa muito próximo da fonte do campo gravitacional, o atraso torna-se extremamente grande. Este efeito pode de facto ser testado ao seguir o pulso de um sinal electromagnético à medida que passa por detrás de um corpo massivo e verifica-se um pico durante o trânsito. Foi isto que foi proposto por Shapiro em 1960. A experiência consistia em enviar sinais de radar regulares para Vénus e esperar pelo eco na Terra. Quando a Terra e Vénus estão alinhados com o Sol, confirma-se um efeito de milisegundos. Este efeito também se observou com as sondas Mariner 6 e 7 em Marte e Landers 1 e 2. Também se verifica com binários de estrelas.



24 Singularidades da métrica de Schwarzschild

[D'Inverno cap. 16.2; Barbosa Henriques cap. 8.1]

Só para ficar bem assente, estamos a falar desta métrica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

que tem três singularidades que passamos a enumerar

$\theta = 0, \pi$: O elemento de linha passa a ser degenerado, ou seja, o valor de ϕ pode ser qualquer. É uma singularidade removível porque podemos eliminá-la introduzindo coordenadas cartesianas.

$r = r_S = 2GM$: Este é o raio de Schwarzschild. Esta singularidade também pode ser removida. Note-se que quando $r \rightarrow r_S$ temos $g_{00} \rightarrow 0$ e $g_{rr} \rightarrow \infty$, todavia, $R_{abcd}R^{abcd} = 48(GM)^2/r_S^6$ que é finito. Ou seja, não há nenhuma singularidade na curvatura a acontecer.

$r = 0$: Esta singularidade de facto não pode ser removida. É uma singularidade física.

25 Partículas em queda livre radial

[D'Inverno cap. 16.5; Ferreira cap. 14]

Consideremos o caso de uma partícula com massa ($L^2 = 1$) em queda radial ($d\theta = d\phi = 0$) na métrica de Schwarzschild

$$L^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 1$$

E da equação do movimento para t temos

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} = E \quad (25.1)$$

Vamos escolher $E = 1$, de maneira a que a partícula no infinito ($r \rightarrow \infty$) tem velocidade nula ($\dot{r} \rightarrow 0$). Substituindo então em L^2 ,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 &= 1 \\ 1 - \dot{r}^2 &= 1 - \frac{2GM}{r} \\ \dot{r}^2 &= \frac{2GM}{r} \\ \dot{r} &= \pm \sqrt{\frac{2GM}{r}} \end{aligned}$$

Como estamos em queda (e não a subir) escolhemos a raíz negativa, e temos

$$d\tau = -\sqrt{\frac{r}{2GM}} dr$$

e integrando

$$\tau - \tau_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2GM}} \left(r_0^{3/2} - r^{3/2}\right)$$

e com $r_S = 2GM$, reescrevemos na forma

$$\boxed{\tau - \tau_0 = \frac{2}{3} r_S \left[\left(\frac{r_0}{r_S}\right)^{3/2} - \left(\frac{r}{r_S}\right)^{3/2} \right]}$$

Isto significa que a partícula pode passar pela singularidade $r = 2GM$ continuamente até $r = 0$ num tempo próprio finito. Nada de especial acontece em $r = 2GM$. Vamos agora ver o que acontece do ponto de vista do observador no infinito, ou seja num espaço Euclidiano. Partimos da Eq. (25.1) e comparemos com a equação para \dot{r} ,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} = -\frac{1}{1 - \frac{2GM}{r}} \frac{1}{\sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$

e ou seja

$$t - t_0 = -\frac{1}{\sqrt{2GM}} \int \frac{r^{3/2}}{r - 2GM} dr$$

que tem solução

$$t - t_0 = \left[-\frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2GM}} \left(r^{3/2} + 6GMr^{1/2} \right) + 2GM \ln \left(\frac{r^{1/2} + \sqrt{2GM}}{r^{1/2} - \sqrt{2GM}} \right) \right]_{r_0}^r$$

com $r_S = 2GM$, reescrevemos como

$$t - t_0 = r_S \left[-\sqrt{\frac{r}{r_S}} \left(2 + \frac{2}{3} \frac{r}{r_S} \right) + \ln \left(\frac{r^{1/2} + r_S^{1/2}}{r^{1/2} - r_S^{1/2}} \right) \right]_{r_0}^r$$

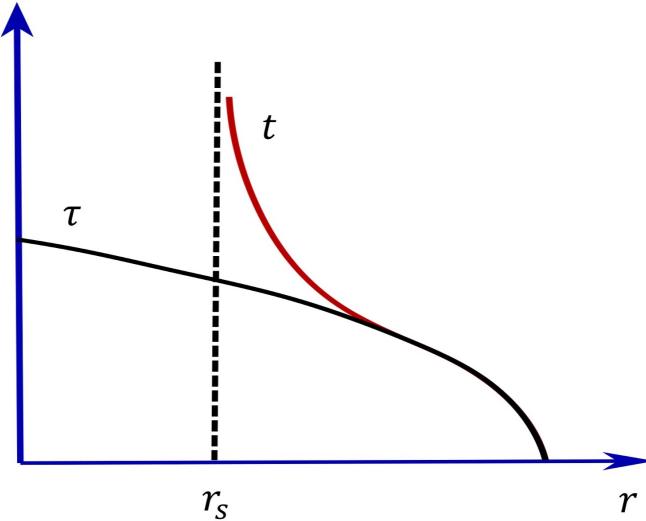
Quando $r \gg r_S$, a solução é simplesmente

$$t - t_0 \approx \frac{2}{3} r_S \left[\left(\frac{r_0}{r_S} \right)^{3/2} - \left(\frac{r}{r_S} \right)^{3/2} \right]$$

que é a solução que tínhamos antes para τ . Ou seja, t e τ decorrem de forma semelhante. Mas quando $r \rightarrow r_S$, o termo no logaritmo predomina e temos

$$t - t_0 \approx -r_S \ln \left(\left(\frac{r}{r_S} \right)^{1/2} - 1 \right)$$

ou seja, $t \rightarrow \infty$. A partícula leva um tempo infinito a atingir a superfície com $r = r_S$, embora leve um tempo finito quando este é medido por um relógio no referencial da partícula em queda.



26 Fotões em queda livre radial

[D'Inverno cap 16.3-16.4]

Agora olhamos para o caso de um raio de luz em queda livre radial ($L^2 = 0$). Directamente do Lagrangiano temos a equação para o tempo

$$L^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 = 0$$

e consequentemente,

$$dt = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr = \pm \frac{r}{r - r_S} dr$$

que tem solução

$$t - t_0 = \pm \left[r + r_S \ln \left| \frac{r}{r_S} - 1 \right| \right]_{r_0}^r$$

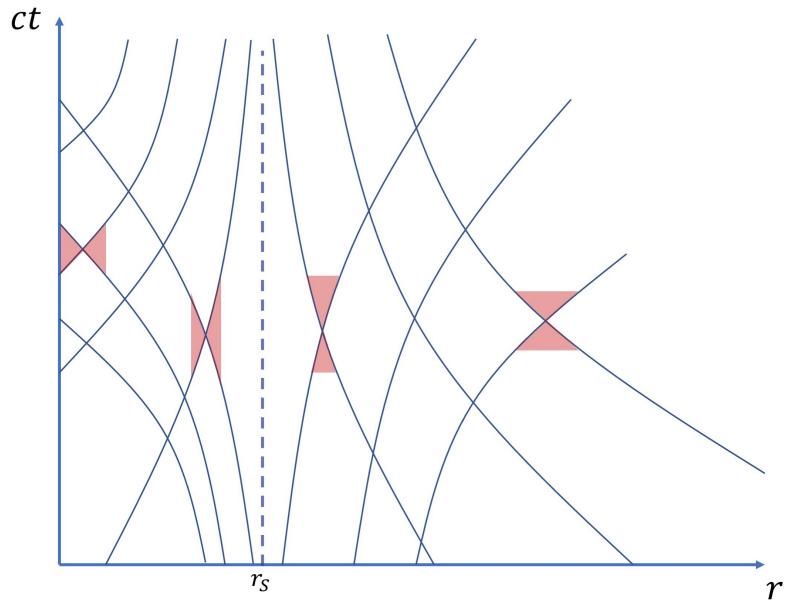
Quando $r \gg r_S$ a solução para t é simplesmente

$$t \approx \pm r \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{dr} = \pm 1$$

Por outro lado, quando $r \approx r_S$, $t \rightarrow \infty$. E quando $r \ll r_S$,

$$t \approx \mp \frac{r^2}{2r_S} \quad \text{ou} \quad \frac{dt}{dr} = \mp \frac{r}{r_S}$$

Uma partícula na região $r > r_S$ seria vista a levar um tempo infinito a chegar a $r = r_S$. Para $r < r_S$ os cones de luz dobram porque as coordenadas tempo e espaço trocam de papel. Uma partícula nesta região não pode estar em repouso mas é forçada a mover-se para $r = 0$. Causalmente, não é possível sair de dentro do raio de Schwarzschild que funciona como um horizonte a partir do qual não podemos ver nada. É um horizonte de acontecimentos. Qualquer raio de luz emitido de $r \lesssim r_S$ sofre um desvio para o vermelho para o infinito porque $g_{00} \rightarrow 0$ (lembrar que $\nu_1/\nu_2 = \sqrt{g_{00}(r_2)/g_{00}(r_1)}$), o que significa que deixamos de ver a superfície da fonte de luz. Um objecto que tem um horizonte de acontecimentos chama-se um buraco negro. Desenhamos então o diagrama de espaço tempo em coordenadas de Schwarzschild.



27 Coordenadas de Kruskal-Szekeres

[Barbosa Henriques cap. 8.2]

Já vimos que as coordenadas de Schwarzschild apresentam inconvenientes devido à presença de vários tipos de singularidades. Também a coordenada t afasta-se da coordenada τ quando uma partícula se aproxima do horizonte. Existem várias alternativas estudadas ao longo dos anos: coordenadas Eddington-Finkelstein; coordenadas Eddington-Finkelstein avançadas; coordenadas Eddington-Finkelstein retardadas; coordenadas Kruskal-Szekeres que vamos passar a estudar. Estas são definidas pelas expressões

$$V = e^{r/2r_S} \sqrt{r - r_S} \sinh\left(\frac{t}{2r_S}\right), \quad U = e^{r/2r_S} \sqrt{r - r_S} \cosh\left(\frac{t}{2r_S}\right)$$

para $r > r_S$, e

$$V = e^{r/2r_S} \sqrt{r_S - r} \cosh\left(\frac{t}{2r_S}\right), \quad U = e^{r/2r_S} \sqrt{r_S - r} \sinh\left(\frac{t}{2r_S}\right)$$

para $r < r_S$. Existe ainda a solução de substituir $V \rightarrow -V$ e $U \rightarrow -U$, nos dois casos. Pode-se verificar que o elemento de linha fica então

$$ds^2 = 4 \frac{r_S^2}{r} e^{-r/r_S} (dV^2 - dU^2) + r^2 d\Omega^2$$

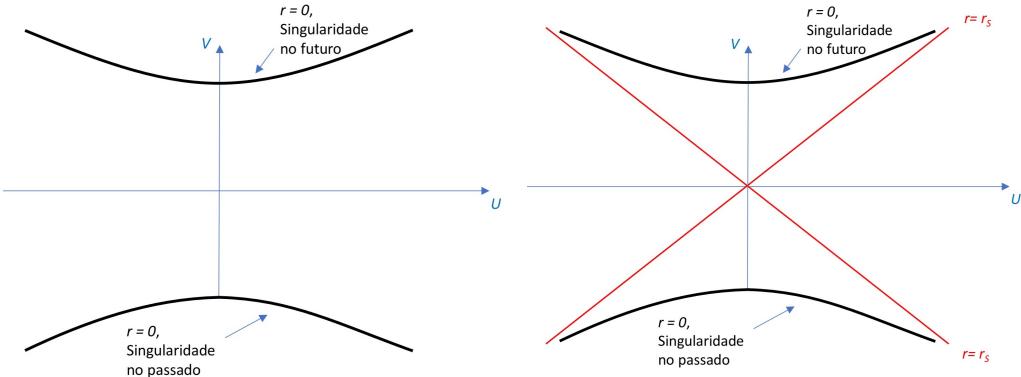
Mais uma vez, verifica-se que nada de especial acontece em $r = r_S$ mas que persiste a singularidade em $r = 0$. Das definições temos que

$$V^2 - U^2 = -e^{r/r_S} (r - r_S)$$

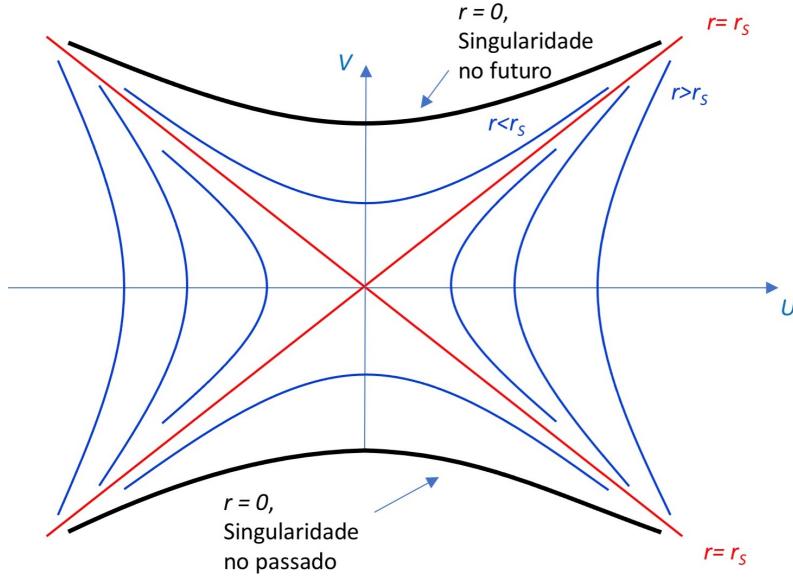
e para $r = 0$, fica

$$V^2 - U^2 = r_S$$

que define duas hipérboles.



Agora em $r = r_S$, temos $V^2 = U^2$, ou seja, $V = \pm U$, e esta superfície é então representada por duas rectas



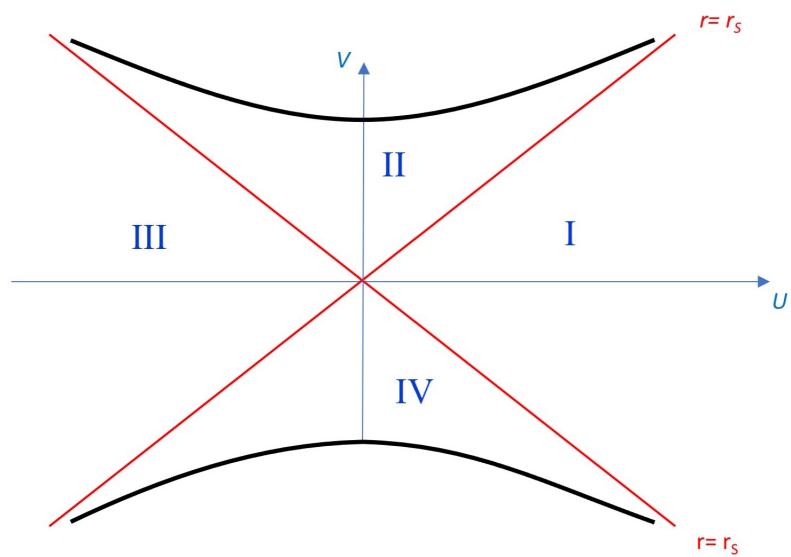
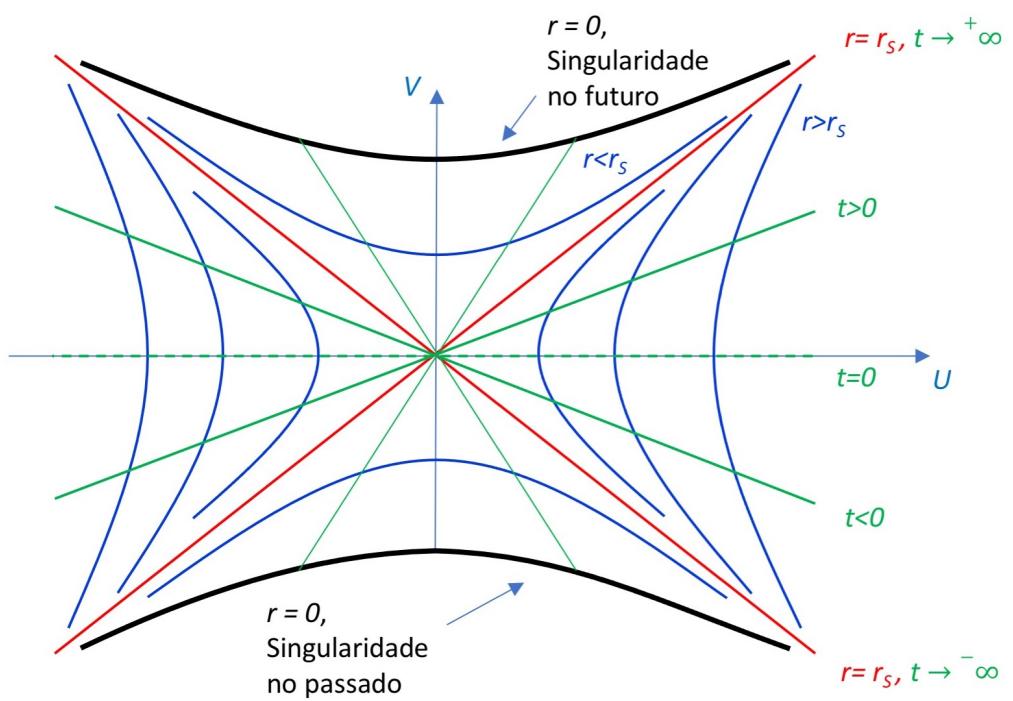
Para $r > r_S$, as respectivas curvas são hipérboles assintóticas às rectas $V = \pm U$.

Curvas que correspondem a valores de t constantes são representadas por linhas rectas tais que

$$\frac{V}{U} = \tanh\left(\frac{t}{2r_S}\right) = \text{constante}$$

Em particular, $t = 0$ corresponde à linha $V = 0$. E para $t \rightarrow \pm\infty$, correspondem as rectas $V = \pm U$, ou seja, as mesmas curvas em que $r = r_S$.

Uma geodésica radial nula ($ds^2 = 0, d\theta = d\phi = 0$), é definida por $dV^2 = dU^2$, ou seja, $dV = \pm dU$, e os cones de luz são sempre limitados por curvas de 45° com os eixos das coordenadas (U, V) como são em Minkowski. Identificamos assim as quatro regiões: I - solução de Schwarzschild com $r > r_S$; II - buraco negro; III - outra solução de Schwarzschild com $r > r_S$; IV - buraco branco. Geodésicas que saem de $r < r_S$ para $r > r_S$. Não são conhecidos objectos astrofísicos deste género.



28 Ponte de Einstein-Rosen ou buraco de verme

[D'Inverno cap. 17.3]

Também conhecido por *wormhole* pelos anglo-saxónicos, ou *buraco de minhoca* pelos brasileiros. Já vimos que podemos escrever a relação entre as coordenadas de Kruskal-Szekeres

$$U^2 = V^2 + (r - r_S)e^{r/r_S} \quad (28.1)$$

Em particular, se $V = 0$, temos que r nunca pode ser menor que r_S e temos na verdade duas soluções

$$U = \pm \sqrt{r - r_S} e^{r/2r_S}$$

Daqui podemos calcular dU e verifica-se que fica

$$dU^2 = \frac{1}{4r_S^2} e^{r/r_S} \frac{r^2}{r - r_S} dr^2$$

que uma vez colocado na métrica com $\theta = \pi/2$, ficamos com

$$ds^2 = \frac{r}{r - r_S} dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Isto é equivalente a uma métrica de uma figura de revolução descrita por uma curva $z(r)$ rodada em torno do eixo do z onde r é a coordenada radial no plano $x - y$ (ver folha de problemas), em que o elemento de linha é

$$ds^2 = (1 + z'^2)dr^2 + r^2 d\phi^2$$

Neste caso, calcula-se que

$$\begin{aligned} 1 + z'^2 &= \frac{r}{r - r_S} \\ z'^2 &= \frac{r_S}{r - r_S} \\ z' &= \pm \frac{\sqrt{r_S}}{\sqrt{r - r_S}} \end{aligned}$$

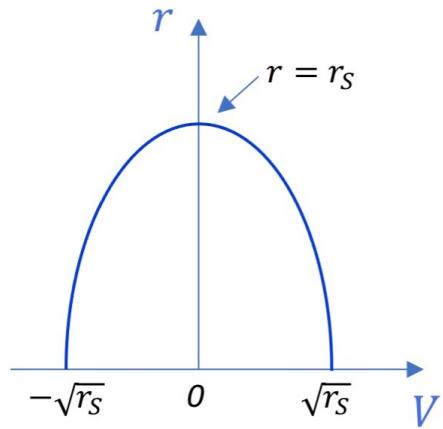
e integrando

$$z = \pm 2\sqrt{r_S} \sqrt{r - r_S}$$

Então temos uma superfície bidimensional com este elemento de linha embebido num espaço plano 3-dimensional.

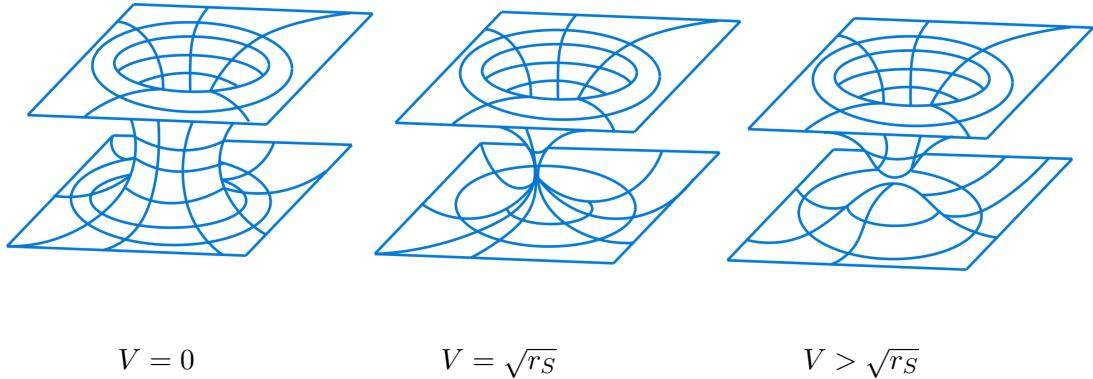
Agora pensemos no caso em que $V > 0$. A figura é semelhante mas a garganta é mais estreita. Na verdade podemos procurar o valor de r para um dado U e V resolvendo em r a equação (28.1), e a resposta é

$$r = r_S + r_S W_0 \left(\frac{U^2 - V^2}{r_S e} \right)$$



onde W_0 é a função de LambertW. Se quisermos saber para que valor de r é que U^2 se anula, então temos a figura

Ou seja, quando $V = \sqrt{r_s}$, a garganta é tão estreita que se anula em $r = 0$. Quando $V > \sqrt{r_s}$, não há solução para r , o que significa que acabamos por ter duas superfícies disjuntas e perdemos o buraco de verme por completo.



$$V = 0$$

$$V = \sqrt{r_s}$$

$$V > \sqrt{r_s}$$

29 Diagrama de Penrose para Kruskal

[D'Inverno cap. 17.5]

O diagrama de espaço tempo que vimos para as coordenadas de Kruskal-Szekeres estende-se até ao infinito o que o torna pouco atraente. Seria melhor termos uma versão onde pudéssemos trazer pontos no infinito para valores finitos. Podemos de facto proceder a uma compactificação conforme da solução de Kruskal definindo as variáveis

$$V = \frac{1}{2}(v + u), \quad U = \frac{1}{2}(v - u)$$

para ficarmos com o elemento de linha

$$ds^2 = -4\frac{r_S^2}{r}e^{-r/r_S}dudv + r^2d\Omega.$$

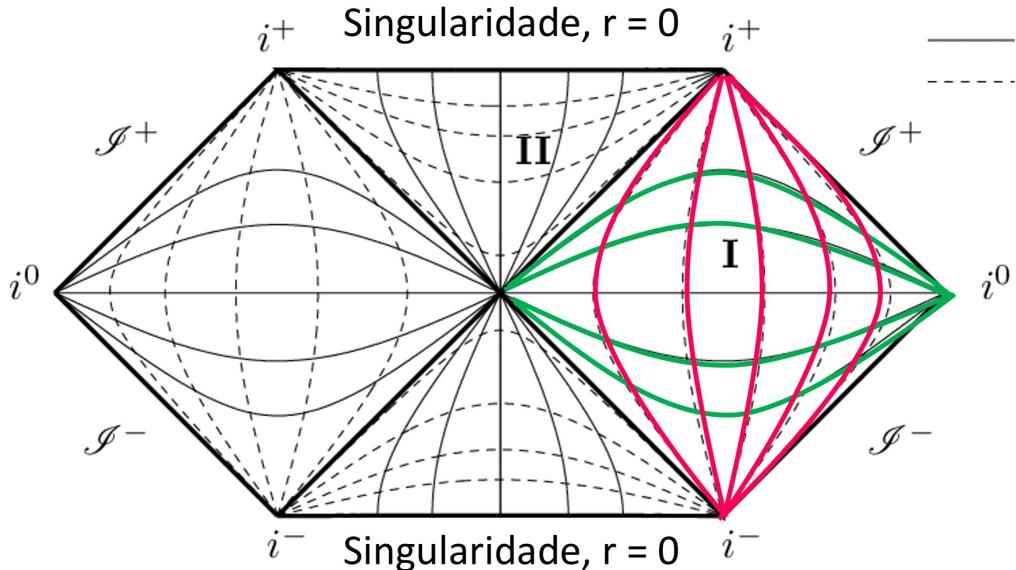
E agora definindo

$$\tilde{v} = \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{r_S}}\right), \quad \tilde{u} = \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{r_S}}\right)$$

temos os limites

$$-\frac{\pi}{2} < \tilde{v} < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \tilde{u} < \frac{\pi}{2}, \quad -\pi < \tilde{v} + \tilde{u} < \pi$$

Então desenhamos o diagrama de Penrose



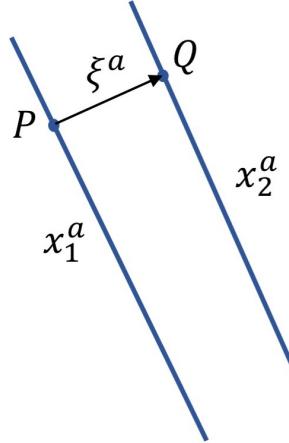
$t = \text{const}, r = \text{const}$

Considere-se qualquer ponto com $r > r_S$, uma geodésica nula radial que se dirige para fora termina algures na linha a Nordeste, que é o infinito, mas uma geodésica dirigida para dentro acaba na singularidade futura, a linha ondulada a Norte. Para qualquer ponto com $r < r_S$, quer uma geodésica dirigida para dentro ou para fora, termina na singularidade futura.



30 A equação de desvio geodésico Newtoniano

Considere-se uma partícula em P num campo gravitacional com uma trajectória $x_1^a = x_1^a(t)$, e uma outra partícula vizinha em Q com trajectória $x_2^a = x_1^a(t) + \xi^a(t)$.



Então tiramos que a equação do movimento para a partícula 1 é

$$\ddot{x}_1^a = -(\partial^a \phi)_P$$

e para a partícula 2 é

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2^a &= \ddot{x}_1^a + \ddot{\xi}^a = -(\partial^a \phi)_Q \\ &= -(\partial^a \phi)_P - (\partial_b \partial^a \phi)_P \xi^b + \dots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\ddot{\xi}^a = -(\partial_b \partial^a \phi)_P \xi^b$$

Que também se escreve como

$$\boxed{\ddot{\xi}^a + K_b^a \xi^b = 0}$$

onde $K_b^a = \partial_b \partial^a \phi$, é chamado o tensor de maré.

31 A equação de desvio geodésico na Relatividade Geral

[Barbosa Henriques cap. 3.8]

Lembremo-nos da experiência com as maçãs dentro do elevador em queda livre num campo gravitacional. Uma forma de percebermos que o elevador está em queda livre é notar que as maçãs acabam por se aproximar uma da outra. Agora partimos da equação da geodésica

$$\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c = 0$$

onde agora a derivada é em relação ao parâmetro afim λ e a trajectória de duas partículas são respectivamente $x^a(\lambda)$ e $x^a(\lambda) + \xi^a(\lambda)$. Primeiro que tudo expandimos as conexões

$$\Gamma_{bc}^a|_{x+\xi} = \Gamma_{bc}^a|_x + \partial_d \Gamma_{bc}^a|_x \xi^d$$

Substituindo na equação da geodésica

$$\ddot{x}^a + \ddot{\xi}^a + (\Gamma_{bc}^a + \partial_d \Gamma_{bc}^a \xi^d)(\dot{x}^b + \dot{\xi}^b)(\dot{x}^c + \dot{\xi}^c) = 0$$

e desprezando termos $O(\xi^2)$, temos

$$\ddot{\xi}^a + \partial_d \Gamma_{bc}^a \xi^d \dot{x}^b \dot{x}^c + 2\Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{\xi}^c = 0$$

Sejamos francos, esta equação não é muito bonita. Gostaríamos de a escrever como a equação do desvio geodésico Newtoniano. Para esse efeito vamos usar a derivada absoluta que definimos anteriormente no capítulo do transporte paralelo.

$$\frac{D\xi^a}{D\lambda} = \dot{\xi}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \xi^c$$

e vamos aplicar $D/D\lambda$ outra vez a esta equação

$$\begin{aligned} \frac{D}{D\lambda} \frac{D\xi^a}{D\lambda} &= \frac{d}{d\lambda} \left(\dot{\xi}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \xi^c \right) + \Gamma_{de}^a \dot{x}^d \left(\dot{\xi}^e + \Gamma_{bc}^e \dot{x}^b \xi^c \right) \\ &= \ddot{\xi}^a + \partial_d \Gamma_{bc}^a \dot{x}^d \dot{x}^b \xi^c + \Gamma_{bc}^a \ddot{x}^b \xi^c + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{\xi}^c + \Gamma_{de}^a \dot{x}^d \dot{\xi}^e + \Gamma_{de}^a \Gamma_{bc}^e \dot{x}^d \dot{x}^b \xi^c \end{aligned}$$

Agora podemos substituir $\ddot{\xi}^a$ pela equação do desvio geodésico e \dot{x}^b pela equação da geodésica e temos

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \xi^a}{D\lambda^2} &= -\partial_d \Gamma_{bc}^a \xi^d \dot{x}^b \dot{x}^c - 2\Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{\xi}^c \\ &\quad + \partial_d \Gamma_{bc}^a \dot{x}^d \dot{x}^b \xi^c \\ &\quad - \Gamma_{bc}^a \left(\Gamma_{de}^b \dot{x}^d \dot{x}^e \right) \xi^c \\ &\quad + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{\xi}^c + \Gamma_{de}^a \dot{x}^d \dot{\xi}^e + \Gamma_{de}^a \Gamma_{bc}^e \dot{x}^d \dot{x}^b \xi^c \\ &= [\partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{ce}^a \Gamma_{bd}^e - \Gamma_{ed}^a \Gamma_{cb}^e] \dot{x}^b \dot{x}^c \xi^d \end{aligned}$$

ou seja, temos a equação do desvio geodésico dada por

$$\boxed{\frac{D^2\xi^a}{D\lambda^2} = R_{bcd}^a \dot{x}^b \dot{x}^c \xi^d} \quad (31.1)$$

que é da forma

$$\frac{D^2\xi^a}{D\lambda^2} = K_d^a \xi^d$$

onde o tensor de maré é $K_d^a = R_{bcd}^a \dot{x}^b \dot{x}^c$.

Próximo de um buraco negro, temos nas várias componentes

$$\frac{D^2\xi^r}{D\lambda^2} = \frac{r_S}{r^3} \xi^r, \quad \frac{D^2\xi^\theta}{D\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{r_S}{r^3} \xi^\theta, \quad \frac{D^2\xi^\phi}{D\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{r_S}{r^3} \xi^\phi$$

o que quer dizer que na direção radial duas partículas tendem a afastar-se, e nas duas direções angulares, duas partículas tendem a aproximar-se. O efeito é mais dominate quanto mais próximo o observador estiver do buraco negro. A este efeito chama-se esparguetificação.

32 Ondas gravitacionais

[D'Inverno cap. 20.1; Barbosa Henriques cap. 9.1]

Vamos agora expandir as equações de Einstein começando por assumir que a métrica se afasta ligeiramente da métrica de Minkowski,

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$$

onde $|h_{ab}| \ll 1$ e $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. De $g_{ac}g^{cb} = \delta_a^b$, resulta que o inverso da métrica se expande com

$$g^{ab} = \eta^{ab} - h^{ab} + \mathcal{O}(h^2)$$

onde

$$h^{ab} \equiv \eta^{ac}\eta^{bd}h_{cd}$$

e vamos admitir que no infinito, o espaço é assimptoticamente plano, i.e.,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_{ab} = 0.$$

Como η_{ab} não tem componentes que dependem das coordenadas, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_{bc}^a &= \frac{1}{2}g^{ad}(g_{dc,b} + g_{db,c} - g_{bc,d}) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{ad}(h_{dc,b} + h_{db,c} - h_{bc,d}) \\ &= \frac{1}{2}(h_{c,b}^a + h_{b,c}^a - h_{bc}^a) \end{aligned}$$

O tensor de Riemann fica então

$$R_{abcd} = \frac{1}{2}(h_{ad,bc} + h_{bc,ad} - h_{ac,bd} - h_{bd,ac})$$

O tensor de Ricci resulta

$$R_{ab} = \eta^{cd}R_{cadb} = \frac{1}{2}(h_{a,bc}^c + h_{b,ac}^c - \square h_{ab} - h_{,ab})$$

onde definimos o traço de h_{ab} e o d'Alambertiano respectivamente

$$h \equiv \eta^{ab}h_{ab} = h_c^c, \quad \square \equiv \eta^{ab}\partial_a\partial_b = \partial^a\partial_a = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

O escalar de Ricci fica agora

$$R = h_{,ab}^{ab} - \square h$$

Finalmente, para o tensor de Einstein

$$G_{ab} = \frac{1}{2}\left(h_{a,bc}^c + h_{b,ac}^c - \square h_{ab} - h_{,ab} - \eta_{ab}(h_{,cd}^{cd} - \square h)\right)$$

Estas expressões podem ser simplificadas se introduzirmos uma nova variável

$$\bar{h}_{ab} \equiv h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h$$

e de forma equivalente

$$\bar{h}^{ab} \equiv h^{ab} - \frac{1}{2}\eta^{ab}h$$

O tensor de Einstein escreve-se agora na forma

$$G_{ab} = \frac{1}{2} \left(\bar{h}_{a,bc}^c + \bar{h}_{b,ac}^c - \square \bar{h}_{ab} - \eta_{ab} \bar{h}_{cd}^{cd} \right)$$

Pronto, está bem, parece que não adiantou muito. Mas se podermos impor a igualdade

$$\bar{h}_{,a}^{ab} = 0$$

então temos imediatamente que

$$G_{ab} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{ab}$$

o que já é mais animador. Aquela igualdade é conhecida como condição ou norma de Einstein. Também é conhecida como condição de Donder, de Hilbert ou de Fock. Vamos mostrar agora que é sempre possível impor esta condição.

Consideremos uma transformação de coordenadas dada por

$$x^a \rightarrow \tilde{x}^a = x^a + \xi^a$$

onde ξ^a é uma perturbação. Já vimos que a métrica se transforma com a relação

$$\tilde{g}_{cd} = g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^c} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^d}$$

mas como

$$\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} = \delta_b^a + \xi_{,b}^a$$

temos ao substituir na métrica

$$\begin{aligned} \eta_{cd} + \tilde{h}_{cd} &= (\eta_{ab} + h_{ab})(\delta_c^a - \xi_{,c}^a)(\delta_d^b - \xi_{,d}^b) \\ &= \eta_{cd} - \xi_{d,c} - \xi_{c,d} + h_{cd} \\ \tilde{h}_{cd} &= h_{cd} - \xi_{d,c} - \xi_{c,d} \end{aligned}$$

ou trocando de índices

$$\tilde{h}_{ab} = h_{ab} - \xi_{a,b} - \xi_{b,a} \quad (32.1)$$

E agora como se transforma o \bar{h}_{ab} ? Da expressão anterior deduzimos que debaixo de uma transformação de coordenadas temos

$$\begin{aligned}\bar{h}_{ab} \rightarrow \tilde{\bar{h}}_{ab} &= \bar{h}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\tilde{h} \\ &= h_{ab} - \xi_{a,b} - \xi_{b,a} - \frac{1}{2}\eta_{ab}(h - 2\xi_{,c}^c) \\ &= \bar{h}_{ab} - \xi_{a,b} - \xi_{b,a} + \eta_{ab}\xi_{,c}^c\end{aligned}$$

E subindo um índice

$$\tilde{\bar{h}}_b^a = \bar{h}_b^a - \xi_{,b}^a - \xi_b^{,a} + \delta_b^a \xi_c^c$$

E se agora fizermos a derivada em relação a x^a ,

$$\tilde{\bar{h}}_{b,a}^a = \bar{h}_{b,a}^a - \xi_{,ba}^a - \xi_{b,a}^{,a} + \xi_{,cb}^c$$

ou seja,

$$\tilde{\bar{h}}_{b,a}^a = \bar{h}_{b,a}^a - \square \xi_b^a$$

Portanto se impusermos uma transformação de coordenadas específico (diz-se transformação de "gauge" no inglês ou de "calibre" no português) tal que ξ^a satisfaz a condição

$$\square \xi_b^a = \bar{h}_{b,a}^a$$

então temos de $\tilde{\bar{h}}_{b,a}^a = 0$ como queríamos e a Eq. (32.1) aplica-se. No vazio, $T_{ab} = 0$, temos então que

$$\square \bar{h}_{ab} = 0 \tag{32.2}$$

Mas podemos ir mais longe. Se fizermos o traço desta equação temos

$$\begin{aligned}\square \left(h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h \right) &= 0 \\ \square \left(h - \frac{1}{2}4h \right) &= 0. \\ \square h &= 0\end{aligned}$$

Substituindo este resultado de volta em (32.2), temos

$$\boxed{\square h_{ab} = 0} \tag{32.3}$$

desde que $\bar{h}_{b,a}^a = 0$, ou seja, na gauge de Einstein, que é como quem diz

$$\boxed{h_{b,a}^a - \frac{1}{2}h_{,b}^a = 0} \tag{32.4}$$

Note-se que (32.3) é a equação de onda de uma perturbação no espaço-tempo de Minkowski que se propaga à velocidade da luz. É portanto, uma onda gravitacional.

33 Graus de liberdade das perturbações gravitacionais

[D'Inverno cap. 20.3 (embora em espaço real)]

Já vimos que a equação de onda para as ondas gravitacionais é dada por (32.3),

$$\square h_{ab} = 0$$

que tem solução

$$h_{ab} = \epsilon_{ab} e^{ik_c x^c}$$

onde ϵ_{ab} são as amplitudes das várias componentes e k^c é o 4-vector número de onda com $k^2 = k_c k^c = 0$ porque é um vector nulo. Resulta então de (32.3) que

$$k^2 \epsilon_{ab} = 0$$

Substituindo a solução na condição de Einstein (32.4)

$$\begin{aligned} h_{b,a}^a - \frac{1}{2} h_{,b} &= 0 \\ ik_a \epsilon_b^a - \frac{1}{2} i \epsilon_a^a k_b &= 0 \\ k_a \epsilon_b^a &= \frac{1}{2} \epsilon_a^a k_b \\ k^a \epsilon_{ab} &= \frac{1}{2} \epsilon_a^a k_b \end{aligned}$$

Há aqui quatro condições. Vamos agora admitir que a propagação da perturbação se faz na direcção z e definimos o número de onda $k^a = (1, 0, 0, 1)$, e consequentemente, $k_a = \eta_{ab} k^b = (-1, 0, 0, 1)$. Substituindo $b = 0, 1, 2, 3$ temos as condições escritas como

$$\epsilon_{00} + \epsilon_{30} = -\frac{1}{2} \epsilon_a^a \quad (33.1)$$

$$\epsilon_{01} + \epsilon_{31} = 0 \quad (33.2)$$

$$\epsilon_{02} + \epsilon_{32} = 0 \quad (33.3)$$

$$\epsilon_{03} + \epsilon_{33} = \frac{1}{2} \epsilon_a^a \quad (33.4)$$

onde $\epsilon_a^a = \eta^{ab} \epsilon_{ab} = -\epsilon_{00} + \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$. Somando as equações (33.1) e (33.4) temos

$$\epsilon_{00} + 2\epsilon_{03} + \epsilon_{33} = 0, \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{03} = -\frac{1}{2}(\epsilon_{00} + \epsilon_{33})$$

Subtraindo essas mesmas equações temos

$$\begin{aligned} \epsilon_{00} + \epsilon_{30} - \epsilon_{03} - \epsilon_{33} &= -\epsilon_a^a \\ &= \epsilon_{00} - \epsilon_{11} - \epsilon_{22} - \epsilon_{33} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{11} = -\epsilon_{22} \end{aligned}$$

Das equações (33.3) e (33.4) temos respectivamente

$$\epsilon_{01} = -\epsilon_{31}$$

$$\epsilon_{02} = -\epsilon_{32}$$

Então para já temos

$$(\epsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} \epsilon_{00} & \epsilon_{01} & \epsilon_{02} & -\frac{1}{2}(\epsilon_{00} + \epsilon_{33}) \\ \epsilon_{01} & \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & -\epsilon_{01} \\ \epsilon_{02} & \epsilon_{12} & -\epsilon_{11} & -\epsilon_{02} \\ -\frac{1}{2}(\epsilon_{00} + \epsilon_{33}) & -\epsilon_{01} & -\epsilon_{02} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Vamos ainda mostrar que é possível usar a liberdade de gauge para impor $\epsilon_{00} = \epsilon_{01} = \epsilon_{02} = \epsilon_{33} = 0$.

Vimos que debaixo de uma transformação de coordenadas, h_{ab} se transforma como (32.1)

$$\tilde{h}_{ab} = h_{ab} - \xi_{a,b} - \xi_{b,a}$$

Se admitirmos que ξ_a tem soluções

$$\xi_a = v_a e^{ik_c x^c}$$

então, as amplitudes ϵ_{ab} transforma-se com

$$\tilde{\epsilon}_{ab} = \epsilon_{ab} - iv_a k_b - iv_b k_a$$

Vamos usar esta propriedade para reduzir ainda mais os graus de liberdade e impor $\tilde{\epsilon}_{00} = \tilde{\epsilon}_{01} = \tilde{\epsilon}_{02} = \tilde{\epsilon}_{33} = 0$ à custa de fixar as amplitudes v_a . Temos então o sistema de equações

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{00} &= \epsilon_{00} - 2iv_0 k_0 = \epsilon_{00} + 2iv_0 = 0 \\ \tilde{\epsilon}_{01} &= \epsilon_{01} - iv_0 k_1 - iv_1 k_0 = \epsilon_{01} + iv_1 = 0 \\ \tilde{\epsilon}_{02} &= \epsilon_{02} - iv_0 k_2 - iv_2 k_0 = \epsilon_{02} + iv_2 = 0 \\ \tilde{\epsilon}_{33} &= \epsilon_{33} - 2iv_3 k_3 = \epsilon_{33} - 2iv_3 = 0 \end{aligned}$$

Então com as identidades

$$v_0 = \frac{i}{2}\epsilon_{00}, \quad v_1 = i\epsilon_{01}, \quad v_2 = i\epsilon_{02}, \quad v_3 = -\frac{i}{2}\epsilon_{33}$$

podemos de facto anular mais quatro componentes e chegamos ao número de graus de liberdade total de apenas 2, e temos

$$(h_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{11} & h_{12} & 0 \\ 0 & h_{12} & -h_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poderíamos ter feito, claro, outras escolhas. Resumindo, a métrica tem 16 entradas mas como é simétrica, ficamos com 10 graus de liberdade. Aplicando a gauge de Einstein, subtraímos mais 4 graus de liberdade, e pela lei de transformação das perturbações da métrica, tiramos outros 4 graus de liberdade, restando apenas 2.

Note-se que o traço de h_b^a se anula, $h_a^a = 0$, e que as direcções de oscilação são ortogonais à direcção de propagação. Chama-se a esta gauge, transversa e sem traço.

34 Polarização das perturbações gravitacionais

[Barbosa Henriques cap. 9.3]

Já vimos que uma onda gravitacional pode ser descrita pelas duas componentes h_{11} e h_{12} na gauge transversa e sem traço. Agora vamos ver qual é o efeito da passagem de uma onda gravitacional sobre duas partículas próximas uma da outra. Seja ξ^a o vetor que liga as geodésicas de duas partículas. Sabemos da equação do desvio geodésico (31.1) que

$$\frac{D^2 \xi^a}{D\tau^2} = R_{bcd}^a \dot{x}^b \dot{x}^c \xi^d$$

Se as partículas estão inicialmente em repouso temos, $\dot{x}^a = (1, 0, 0, 0)$. Qualquer perturbação em \dot{x}^a será pequena e vamos ignorá-la. As componentes do tensor de Riemann que não se anulam são

$$R_{010}^1 = -\frac{1}{2}\ddot{h}_1^1, \quad R_{020}^2 = \frac{1}{2}\ddot{h}_1^1, \quad R_{010}^2 = -\frac{1}{2}\ddot{h}_1^2, \quad R_{020}^1 = -\frac{1}{2}\ddot{h}_2^1.$$

Suponhamos primeiro que as partículas estão no eixo dos x , separadas de

$$\xi^a(\tau = 0) = (0, \delta, 0, 0)$$

A equação do desvio geodésico dá-nos

$$\ddot{\xi}^1 \approx R_{001}^1 \dot{x}^0 \dot{x}^0 \xi^1 = -R_{010}^1 \delta = \frac{1}{2}\ddot{h}_1^1 \delta \quad (34.1)$$

$$\ddot{\xi}^2 \approx R_{001}^2 \dot{x}^0 \dot{x}^0 \xi^1 = -R_{010}^2 \delta = \frac{1}{2}\ddot{h}_1^2 \delta \quad (34.2)$$

Agora vamos assumir que as partículas estão no eixo dos y separadas de δ tal que,

$$\xi^a(\tau = 0) = (0, 0, \delta, 0)$$

Da equação do desvio geodésico temos agora,

$$\ddot{\xi}^1 \approx R_{002}^1 \dot{x}^0 \dot{x}^0 \xi^2 = -R_{020}^1 \delta = \frac{1}{2}\ddot{h}_2^1 \delta \quad (34.3)$$

$$\ddot{\xi}^2 \approx R_{002}^2 \dot{x}^0 \dot{x}^0 \xi^2 = -R_{020}^2 \delta = -\frac{1}{2}\ddot{h}_2^1 \delta \quad (34.4)$$

Estamos agora em condições de vermos o efeito das duas polarizações em separado num círculo de partículas de raio δ .

- (a) Polarização (+): $h_1^1 = -h_2^2 \neq 0$ e $h_2^1 = 0$.

O movimento das partículas alinhadas no eixo dos x é descrito pela Eq. (34.1), $\ddot{\xi}^1 = \ddot{h}_1^1 \delta / 2$, enquanto que o movimento das partículas alinhadas no eixo dos y é descrito pela Eq. (34.4), $\ddot{\xi}^2 = -\ddot{h}_1^1 \delta / 2$, ou seja, as oscilações das duas direcções estão em oposição de fase.

- (b) Polarização (\times): $h_1^1 = -h_2^2 = 0$ e $h_2^1 \neq 0$.

Neste caso, as partículas no eixo dos x são descritas pela Eq. (34.2), $\ddot{\xi}^2 = \ddot{h}_1^2 \delta / 2$, enquanto que o movimento das partículas alinhadas no eixo dos y é descrito pela Eq. (34.3), $\ddot{\xi}^1 = \ddot{h}_2^1 \delta / 2$, e assim, as oscilações das duas direcções estão em fase.

Estes dois casos diferem por uma rotação dos eixos de 45° . No caso geral, existe um sobreposição dos dois tipos de polarização (+) e (\times).

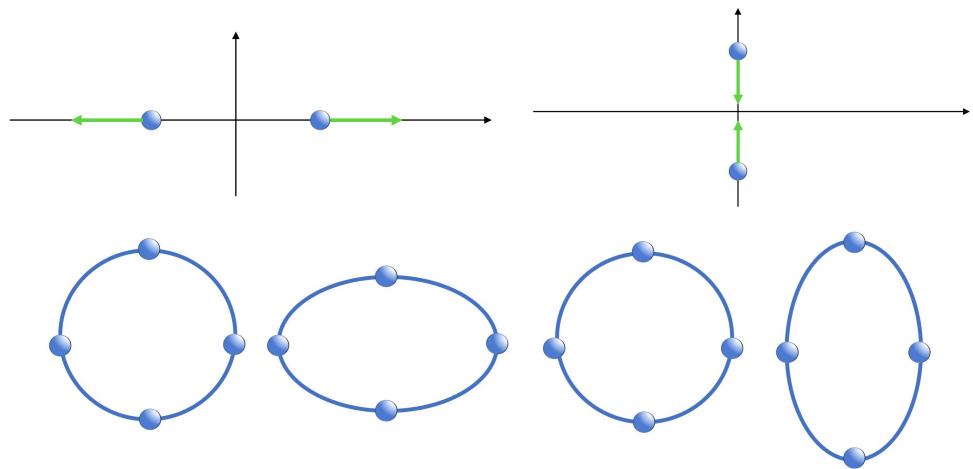


Figure 3. Polarização (+).

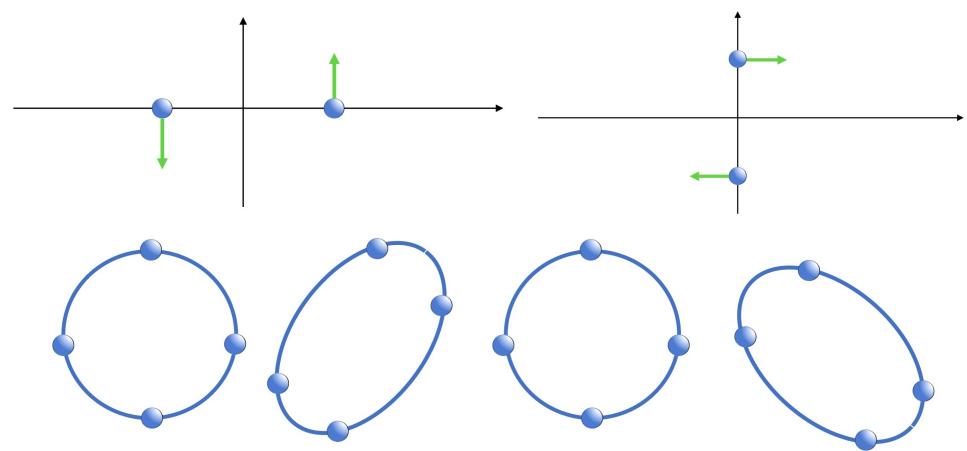


Figure 4. Polarização (\times).

35 Emissão de ondas gravitacionais

[Barbosa Henriques, cap. 9.4]

Já vimos que no vácuo a equação do movimento das ondas gravitacionais, na gauge de Einstein, é $\square h_{ab} = 0$, mas na presença de matéria temos

$$G_{ab} = -\frac{1}{2}\square \bar{h}_{ab} = 8\pi G T_{ab}$$

e portanto,

$$\square \bar{h}_{ab} = -16\pi G T_{ab}$$

Vamos agora, primeiro que tudo, considerar este T_{ab} como a fonte das ondas gravitacionais e admitir que a fonte está a oscilar com uma frequência ω constante. Isto é valido porque podemos sempre fazer uma decomposição de Fourier nos vários modos de um sinal mais complexo.

Vamos também supor que a região do espaço onde $T_{ab} \neq 0$, é pequena em comparação com $\lambda = 2\pi/\omega$. Isto significa ainda que as velocidades típicas da fonte são não-relativistas (se $\omega \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda \rightarrow 0$, e seria mais difícil satisfazer aquela condição).

Vamos então representar a fonte por uma distribuição de massa diferente de zero no interior de uma esfera de raio $R \ll \lambda = 2\pi/\omega$. Ou seja, $R\omega \ll 2\pi$.

Vamos separar o tensor energia-momento na sua parte temporar e na parte espacial tal que,

$$T_{ab} = C_{ab}(x^k) e^{i\omega t}$$

onde $x^k = (r, \theta, \phi)$, e dadas as equações de Einstein, procuramos uma solução genérica interior do tipo,

$$\bar{h}_{ab}^{\text{int}} = B_{ab}(x^k) e^{i\omega t}$$

Fora da fonte procuramos uma solução que decaia com a distância tal como acontece com o dipolo oscilante no electromagnetismo, então façamos,

$$\bar{h}_{ab}^{\text{ext}} = A_{ab}(x^k) \frac{e^{i\omega(t-r)}}{r}$$

tal que a onda se expande a partir da fonte.

Substituindo $\bar{h}_{ab}^{\text{int}}$ na equação de Einstein, temos

$$(\omega^2 + \nabla^2) B_{ab}(x^k) = -16\pi G C_{ab}(x^k)$$

Mas como no primeiro termo

$$\int d^3x \omega^2 B_{ab}(x^k) \leq \omega^2 |B_{ab}|_{\max} \frac{4\pi}{3} R^3 \ll \frac{16\pi^3}{3} R |B_{ab}|_{\max}$$

onde no último passo usámos que $\omega R \ll 2\pi$. E como faremos $R \rightarrow 0$, desprezamos este termo.

Agora o segundo termo, usando o teorema de Gauss, resulta,

$$\begin{aligned}
\int d^3x \nabla \cdot \nabla B_{ab} &= \int_S dS \vec{n} \cdot \nabla \left(A_{ab} \frac{e^{-i\omega r}}{r} \right) \\
&= \int_S d\theta d\phi \sin \theta r^2 \frac{d}{dr} \left(A_{ab} \frac{e^{-i\omega r}}{r} \right) \\
&= 4\pi (-A_{ab} e^{-i\omega R} - i\omega R A_{ab} e^{-i\omega R}) \\
&\approx -4\pi A_{ab}
\end{aligned}$$

onde se usou $e^{-i\omega R} \approx 1$. Então temos

$$A_{ab}(x^k) = 4G \int d^3x C_{ab}(x^k)$$

e substituindo na solução exterior ficamos com

$$\bar{h}_{ab}^{\text{ext}} = 4G \left(\int d^3x C_{ab}(x^k) \right) \frac{e^{i\omega(t-r)}}{r}$$

O problema é que nós não sabemos T_{kl} , e quanto muito sabemos T_{00} . Usamos agora um truque para escrever esta relação em termos de T_{00} usando a conservação do tensor energia-momento, que para o efeito podemos aplicar só derivadas parciais, $\partial_b T^{ab} = 0$, tal que

$$\partial_0 T^{a0} = -\partial_k T^{ak}$$

e integrando sobre o volume que tem a fonte no seu interior

$$\int d^3x \partial_0 T^{a0} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^{a0} = - \int d^3x \partial_k T^{ak} = - \int_S dS T^{ak} = 0$$

onde nos últimos passos se usou o teorema de Gauss e o facto de na superfície exterior à fonte, $T^{ab} = 0$. Ou seja, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^{a0} = 0$$

que implica que

$$\partial_0 T^{a0} = i\omega C^{a0} e^{i\omega t} = 0$$

e portanto $C^{a0} = 0$, e consequentemente $\bar{h}^{a0} = 0$.

Agora olhemos em particular para a componente $a = 0$. Temos a condição

$$\partial_0 T^{00} = -\partial_k T^{0k}$$

Façamos novamente uma derivada em ordem ao tempo

$$\partial_0^2 T^{00} = -\partial_0 \partial_k T^{0k}$$

Vamos agora multiplicar por $x^l x^m$ e integrar em volume que contenha a fonte no interior,

$$\begin{aligned}
\int d^3x \partial_0^2 T^{00} x^l x^m &= - \int d^3x \partial_0 \partial_k T^{0k} x^l x^m \\
&= - \int d^3x \partial_k \partial_0 T^{0k} x^l x^m \\
&= + \int d^3x \partial_k \partial_n T^{nk} x^l x^m \\
&= \int d^3x T^{nk} \partial_k \partial_n (x^l x^m) + \text{termos de superficie} \\
&= 2 \int d^3x T^{lm} \\
-\omega^2 e^{i\omega t} \left(\int d^3x C^{00} x^l x^m \right) &= 2 \left(\int d^3x C^{lm} \right) e^{i\omega t}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int d^3x C^{lm} = -\frac{\omega^2}{2} \int d^3x C^{00} x^l x^m$$

e depois de substituirmos na solução exterior temos

$\bar{h}_{\text{ext}}^{lm} = -2\omega^2 G I^{lm} \frac{e^{i\omega(t-r)}}{r}$

onde

$$I^{lm} = \int d^3x C^{00} x^l x^m$$

representa o momento quadripolar da distribuição de massa da fonte.

36 O princípio cosmológico

[Ferreira cap. 15]

Dadas as observações independentes do Universo em grande escala, afirma-se o princípio cosmológico que diz que “Para escalas suficientemente grandes, o Universo é homogéneo e isotrópico”. Importa então diferenciar estas duas propriedades.

Isotropia: Não há direcção preferencial no Universo. O Universo aparenta o mesmo independentemente da direcção de observação;

Homogeneidade: O Universo aparenta exactamente o mesmo em qualquer ponto do espaço.

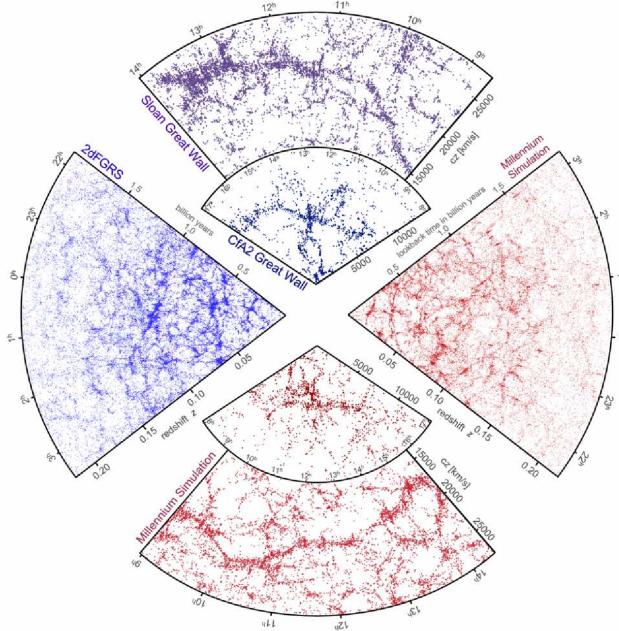
Homogéneo, não isotrópico



Isotrópico, não homegáneo



Se o Universo é isotrópico em todos os pontos do espaço, então é homogéneo.



37 A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

[Ferreira cap. 18]

Como o Universo é homogéneo, a métrica tem de ser democrática nas direcções espaciais, e portanto só pode depender do tempo

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 dl^2$$

onde $a(t)$ é o factor de escala do Universo. Para uma geometria plana, o elemento de linha espacial escrito em coordenadas cartesianas e em coordenadas esféricas é simplesmente,

$$\begin{aligned} dl^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned}$$

Vamos agora pensar num Universo de curvatura positiva. Para perceber melhor, descrevemos a superfície 3-dimensional de uma hiperesfera embebida num espaço fictício de 4 dimensões descrito por coordenadas X, Y, Z, W , pela equação

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + W^2 = R^2.$$

Podemos agora usar as coordenadas hiperesféricas

$$X = R \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \quad Y = R \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \quad Z = R \sin \chi \cos \theta, \quad W = R \cos \chi$$

para escrever o elemento de linha na superfície desta hiperesfera,

$$\begin{aligned} dl^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \\ &= R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \end{aligned}$$

Para compararmos com a métrica da geometria plana fazemos $r = R \sin \chi$ e temos $dr = R \cos \chi d\chi$, e

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{R^2 \cos^2 \chi} = \frac{dr^2}{R^2(1 - \sin^2 \chi)} = \frac{dr^2}{R^2 - r^2}$$

que uma vez substituído no elemento de linha fica

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Podemos agora voltar a fazer este exercício mas para um Universo de curvatura negativa. Agora consideraremos uma superfície 3-dimensional de uma hiper-hipérbole que é descrita por

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - W^2 = -R^2$$

Usemos agora as coordenadas

$$X = R \sinh \chi \sin \theta \cos \phi, \quad Y = R \sinh \chi \sin \theta \sin \phi, \quad Z = R \sinh \chi \cos \theta, \quad W = R \cosh \chi$$

Temos então o elemento de linha

$$\begin{aligned} dl^2 &= dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \\ &= R^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] \end{aligned}$$

Fazendo agora $r = R \sinh \chi$, temos $dr = R \cosh \chi d\chi$, e consequentemente

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{R^2 \cosh^2 \chi} = \frac{dr^2}{R^2(1 + \sinh^2 \chi)} = \frac{dr^2}{R^2 + r^2}$$

que uma vez substituído no elemento de linha fica

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/R^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Em geral podemos descrever as métricas homogéneas e isotrópicas como

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

(37.1)

onde

$$k = \begin{cases} 1/R^2, & \text{geometria de curvatura positiva} \\ 0, & \text{geometria plana} \\ -1/R^2, & \text{geometria de curvatura negativa} \end{cases}$$

Esta é a chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Esta métrica preserva isotropia, $g_{0i} = 0$ e $a = a(t)$.

38 A equação de Friedmann

[Ferreira cap. 15]

Consideremos um universo permeado por um fluido perfeito

$$T_{ab} = (\rho + p)u_a u_b + p g_{ab}$$

temos no referêncial do fluido, $u^a = (1, 0, 0, 0)$,

$$T_{00} = \rho, \quad T_{ij} = a^2 p \delta_{ij}$$

ou em forma matricial

$$(T_b^a) = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \Gamma_{j0}^i &= \Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i, & \Gamma_{ij}^0 &= a \dot{a} \delta_{ij} \\ R_{00} &= -3 \frac{\ddot{a}}{a}, & R &= -6 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 12 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 6 \frac{k}{a^2} \\ G_0^0 &= -3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - 3 \frac{k}{a^2}, & G_j^i &= - \left(2 \frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right) \delta_{ij}, & G_i^0 &= 0 \end{aligned}$$

Usando agora as equações de Einstein $G_b^a = 8\pi G T_b^a$, temos a chamada equação de Friedmann

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}} \quad (38.1)$$

e a equação de Raychaudhuri

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)} \quad (38.2)$$

Note-se que a primeira equação depende da curvatura do universo, enquanto a segunda é independente da curvatura.

39 A equação da continuidade

[Barbosa Henriques, cap. 7.1.1]

Da conservação do tensor energia-momento para um fluido perfeito com quadrivector u^a

$$T^{ab} = (\rho + p)u^a u^b + pg^{ab}$$

temos

$$\begin{aligned}\nabla_a T^{ab} &= 0 \\ \nabla_a \rho u^a u^b + \nabla_a p u^a u^b + (\rho + p) \nabla_a (u^a u^b) + g^{ab} \nabla_a p &= 0\end{aligned}$$

multiplicando por u_b e lembrando que $u_b u^b = -1$, ficamos com

$$\begin{aligned}u_b \nabla_a T^{ab} &= 0 \\ -\nabla_a \rho u^a - \nabla_a p u^a + (\rho + p) u_b \nabla_a (u^a u^b) + u^a \nabla_a p &= 0 \\ -u^a \nabla_a \rho - (\rho + p) \nabla_a u^a + (\rho + p) u_b u^a \nabla_a u^b &= 0\end{aligned}$$

Mas nós já sabemos que o quadrivector velocidade se transporta paralelamente, i.e.

$$\frac{Du^a}{D\lambda} = u^a \nabla_a u^b = 0$$

Foi daqui afinal, que nós obtivémos a equação da geodésica. Segue a equação da continuidade

$$u^a \nabla_a \rho + (\rho + p) \nabla_a u^a = 0$$

ou ainda com $u^a = (1, 0, 0, 0)$, ou seja, no referência do fluido,

$$\dot{\rho} + (\rho + p) \Gamma_{ab}^a = 0$$

Para a métrica FLRW temos então

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0$$

É curioso que esta equação se pode obter facilmente da primeira lei da Termodinâmica

$$dU + pdV = TdS$$

Num universo homogéneo todas as quantidades físicas são independentes da posição espacial, ou seja, não há derivadas espaciais, em particular, não há gradientes de temperatura. Isto significa que não há transporte de calor e a energia total deve manter-se constante. Escrito de forma matemática,

$$dU = -pdV \quad \Rightarrow \quad dS = 0,$$

ou seja, a evolução do universo é um processo adiabático. Se dividirmos tudo por dt e com $V \sim a^3$ e consequentemente $U \sim \rho a^3$, temos

$$\begin{aligned}\frac{dU}{dt} + p \frac{dV}{dt} &= 0 \\ \frac{d(\rho a^3)}{dt} + p \frac{da^3}{dt} &= 0 \\ \dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) &= 0\end{aligned}$$

como tínhamos pela conservação do tensor energia-momento.

40 A lei de Hubble-Lemaître

[Ferreira cap. 16]

Sejam duas partículas (ou mesmo galáxias que para os cosmólogos dá no mesmo) separadas de

$$d(t) = a(t)x(t)$$

onde $x(t)$ é uma coordenada e $a(t)$ nos dá a distância física entre as partículas, $d(t)$. As velocidade relativa entre elas é

$$v = \dot{d} = \frac{d(ax)}{dt} = \frac{\dot{a}}{a} a x + a \dot{x} = \frac{\dot{a}}{a} d + a \dot{x}$$

Se desprezarmos as chamadas velocidades peculiares \dot{x} , temos

$$v = Hd$$

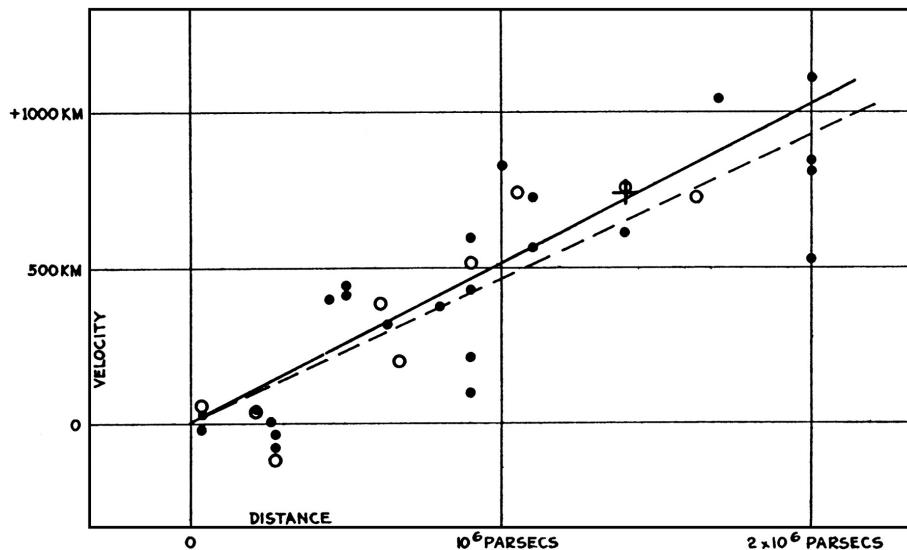
com $H = \dot{a}/a$. Esta equação aplicada ao presente com $H(a = a_0) = H_0$, fica

$$\boxed{v = H_0 d} \quad (40.1)$$

onde H_0 é a constante de Hubble

$$H = 100h \text{Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$$

e $h \sim 0.7$ segundo as observações actuais.



41 Formas de matéria

[Ferreira cap. 17]

Existem vários tipos de matéria no nosso Universo que se comportam de formas diversas e por isso afectam a evolução do Universo de forma diferente.

- Radiação

À medida que o universo se expande o comprimento de onda de um fotão sofre desvio para o vermelho porque $\nu \propto a^{-1}$ (ver capítulo seguinte). A energia de um fotão é $E = h\nu \propto a^{-1}$ e a densidade de energia será $\rho \propto E/V \sim a^{-4}$. Também podemos chegar a esta conclusão usando a equação da continuidade. Já vimos dos exercícios que para o electromagnetismo $T = -\rho + 3p = 0$, ou seja, a pressão e a densidade de energia relacionam-se com $p = \rho/3$. Colocando esta relação na equação da continuidade ficamos com

$$\dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0,$$

que se integra para dar

$$\rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4.$$

Substituindo na equação de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \frac{1}{a^4},$$

o que dá a dependência do factor de escala com o tempo, $a \propto t^{1/2}$.

Note-se que a densidade de energia de um corpo negro é dada pela lei de Stefan-Boltzmann

$$\rho = 4\sigma T^4$$

onde $\sigma = 2\pi^5 k_B^4 / 15c^2 h^3 = 5.7 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ é a constante de Stefan-Boltzmann. Isto quer dizer que o factor de escala e a temperatura dos fotões se relaciona com

$$T = T_0 \frac{a_0}{a}$$

- Poeira

Para a poeira já vimos que, $p = 0$, e então substituindo na equação da continuidade agora temos,

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0,$$

que se integra para dar

$$\rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3.$$

Substituindo na equação de Friedmann,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \frac{1}{a^3},$$

que neste caso indica, $a \propto t^{2/3}$.

- Constante cosmológica

Observações de supernovas distantes, as chamadas SnIa, indicam que o Universo está hoje numa fase de expansão acelerada. Para o Universo acelerar temos de ter $\ddot{a} > 0$ o que implica, da equação de Raychaudhuri que $p < -\rho/3$. O exemplo de um género de matéria assim é a energia de vácuo ou de uma constante cosmológica (dependendo de que lado da equação de Einstein é colocada essa contribuição),

$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi G T_{ab},$	constante cosmológica
$G_{ab} = 8\pi G \left(T_{ab} - \frac{\Lambda}{8\pi G} g_{ab} \right),$	energia de vácuo

onde se define $T_{ab}^\Lambda \equiv -g_{ab} \Lambda / 8\pi G$. Consequentemente, $\rho_\Lambda = T_{00} = \Lambda / 8\pi G$, e $p = a^{-2} T_{11} = -\rho_\Lambda$. Substituindo na equação de Friedmann, resulta que $a \propto e^{\sqrt{\Lambda}t}$.

42 Desvio para o vermelho cosmológico

Superfícies espaciais podem-se expandir ou contrair controladas pelo factor de escala $a(t)$. Isto leva ao desvio para o vermelho (redshift) ou para o azul (blueshift) dos fotões que se propagam pelo espaço-tempo.

Considere-se um sinal de luz emitida em r_e no instante t_e e outro emitido no instante $t_e + dt_e$ e recebidos em $r_0 = 0$ respectivamente nos instantes t_0 e $t_0 + dt_0$. Para os fotões, $ds^2 = 0$, então, da métrica de FLRW (37.1) com $d\theta = d\phi = 0$ temos

$$\frac{dt}{a} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$

A distância comóvel entre a fonte e o observador (voltaremos a esta definição mais tarde) é

$$\chi = \int_{r_e}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_{t_e+dt_e}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a} = \text{constante}.$$

Vamos agora dividir as várias partes dos integrais

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{dt}{a} + \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_{t_e+dt_e}^{t_0} \frac{dt}{a} + \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a}$$

mas como o segundo integral do lado esquerdo cancela com o primeiro integral do lado direito da equação ficamos com

$$\int_{t_e}^{t_e+dt_e} \frac{dt}{a} = \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{a}$$

Podemos admitir que entre t_e e $t_e + dt_e$, o factor de escala se manteve constante em $a = a_e$ e o mesmo em entre t_0 e $t_0 + dt_0$ em $a = a_0$ de tal forma que podemos escrever

$$\frac{1}{a_e} \int_{t_e}^{t_e+dt_e} dt = \frac{1}{a_0} \int_{t_0}^{t_0+dt_0} dt$$

que se reduz a

$$\frac{dt_e}{a_e} = \frac{dt_0}{a_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt_0}{dt_e} = \frac{a_0}{a_e}$$

Como $dt = 1/\nu$ é o período de uma onda de luz de frequência ν define-se então o desvio para o vermelho como a razão entre a frequência emitida e a observada e relaciona-se na proporção inversa como o factor de escala.

$1 + z \equiv \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a_0}{a_e}$

43 Os parâmetros cosmológicos

[Ferreira cap. 18]

Voltando à equação de Friedmann (38.1) com a definição $H = \dot{a}/a$,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}$$

e dividindo tudo por H^2 , também se pode escrever

$$1 = \Sigma_i \Omega_i + \Omega_k$$

onde se definiram as abundâncias

$$\Omega_i = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_i, \quad \Omega_k = -\frac{k}{H^2a^2}.$$

Para um Universo composto de radiação, matéria sem pressão e uma constante cosmológica, a equação de Friedmann escreve-se da seguinte forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_{m0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \rho_{r0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \rho_{\Lambda0} \right] - \frac{k}{a^2}.$$

Dividindo ambos os termos por H_0^2 e usando a relação entre redshift e o factor de escala, bem como as definições para as abundâncias, temos

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{k0}(1+z)^2 \right],$$

onde $\Omega_{k0} \equiv -k/a_0^2 H_0^2$. A partir de agora vamos definir as abundâncias no presente como Ω_m , Ω_r , Ω_Λ e Ω_k e quando nos queremos referir a estas quantidades no passado a um tempo t ou redshift z , usaremos $\Omega_m(z)$, $\Omega_r(z)$, $\Omega_\Lambda(z)$ e $\Omega_k(z)$.

A constante de Hubble, já vimos escreve-se como

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}, \quad (43.1)$$

e os melhores constrangimentos actuais indicam que a matéria se desdobra em bariões e matéria escura e que, pelo menos durante parte da história do Universo, a radiação se desdobra em fotões e neutrinos. Estes parâmetros têm aproximadamente os seguintes valores segundo o Planck e Oscilações Acústicas Bariónicas:

$$\begin{aligned} h &= 0.677 \pm 0.004, \\ \Omega_\gamma h^2 &= 2.47 \times 10^{-5}, \\ \Omega_b h^2 &= 0.0242 \pm 0.00014, \\ \Omega_{dm} h^2 &= 0.1193 \pm 0.0009, \\ \Omega_\Lambda &= 0.689 \pm 0.006, \end{aligned}$$

onde “b” significa bariões e “dm” representa matéria escura (dark matter) e γ representa fotões.

44 Universo dominado por matéria

[D'Inverno cap. 23.1–23.3]

- O universo de Einstein é um universo com matéria mas sem movimento.*
- O universo de de Sitter, é um universo sem matéria mas com movimento.*

Vamos agora estudar a evolução do universo para casos particulares de uma forma qualitativa. Para esse usamos um conjunto de regras que nos auxiliam na construção de diagramas de densidades e assim avaliar em que situações é possível ter um universo viável

- (i) Os diagramas têm eixos $\ln \rho$ vs $\ln a$;
- (ii) Componentes com $\rho > 0$ são desenhadas com linhas a cheio, e componentes com $\rho < 0$, são desenhadas a tracejado;
- (iii) Como, $H^2 > 0$, só intervalos do factor de escala em que as componentes positivas são dominantes, correspondem a uma cosmologia consistente.
- (iv) No ponto onde uma linha que corresponde a uma componente dominante positiva intersecta uma linha de uma componente dominante negativa, $\dot{a} \approx 0$ e o universo tem um "bounce" (ou um "boing") se $\ddot{a} > 0$ ou um "turn around" (também conhecido como "toing") se $\ddot{a} < 0$.

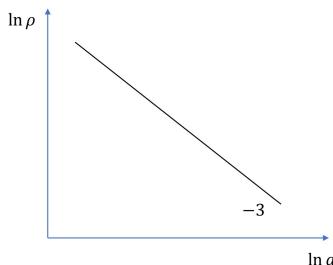
44.1 Universo sem constante cosmológica

A equação de Friedmann é simplesmente

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{C}{a^3} - \frac{k}{a^2}$$

- (a) Espaço Euclideano ($k = 0$)

$$\dot{a}^2 = \frac{C}{a} \quad \Rightarrow \quad a \propto t^{2/3}$$

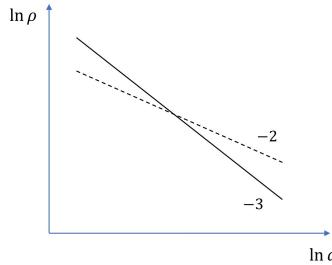


Este é chamado o universo de Einstein-de Sitter.

(b) Modelo elíptico ($k = +1$)

A equação de Friedmann fica

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{C}{a^3} - \frac{1}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{C}{a} - 1$$



Neste caso há um valor máximo para o factor de escala, $a_{\max} = C$, onde $\dot{a} = 0$. O universo muda de um comportamento de expansão para contracção. O universo tem um "toing". Resolvemos a equação fazendo

$$a = C \sin^2 \theta, \quad \Rightarrow \quad \dot{a} = 2C \sin \theta \cos \theta \dot{\theta}$$

e substituindo na equação de Friedmann temos

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^2 4C^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta &= \frac{C}{C \sin^2 \theta} - 1 \\ \dot{\theta}^2 2C \sin^2 \theta &= 1 \\ dt &= 2C \sin^2 \theta d\theta \\ t &= C \int (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ t &= C \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \end{aligned}$$

que é equivalente a escrever

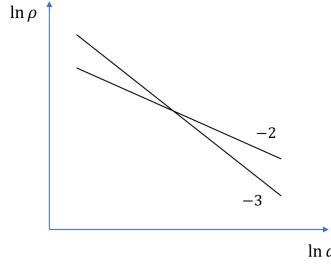
$$t = C(\theta - \cos \theta \sin \theta)$$

O Big-Crunch é atingido quando $\theta = \pi$ em $t = \pi C$. Note-se que para $\theta \ll 1$, ou seja, para factores de escala pequenos, temos

$$t \approx C\theta \left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \right) = C \frac{\theta^3}{2} \quad \Rightarrow \quad a \propto t^{2/3},$$

como esperaríamos.

(c) Modelo hiperbólico ($k = -1$)



Agora temos

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{C}{a^3} + \frac{1}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{C}{a} + 1$$

O factor de escala cresce sempre. Também podemos escrever a solução

$$a = \sinh^2 \chi$$

$$t = C(\cosh \chi \sinh \chi - \chi)$$

e podemos verificar que quando o factor de escala é pequeno, $\chi \ll 1$, recuperamos $a \propto t^{2/3}$ mais uma vez.

44.2 Universo com constante cosmológica negativa

Agora temos uma equação de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{C}{a^3} - \frac{|\Lambda|}{3} - \frac{k}{a^2}$$

e temos as seguintes situações

- (a) Espaço Euclideano ($k = 0$)

O universo tem um toing e acaba num Big-Crunch.

- (b) Espaço elíptico ($k = +1$)

O universo tem um toing e acaba num Big-Crunch.

- (c) Espaço hiperbólico ($k = -1$)

O universo tem um toing e acaba num Big-Crunch.

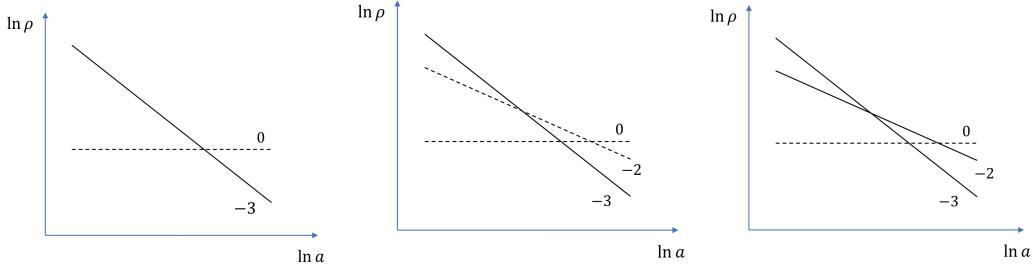


Figure 5. Diagramas $\ln \rho$ vs $\ln a$ para um universo com constante cosmológica negativa com $k = 0, 1, -1$, respectivamente.

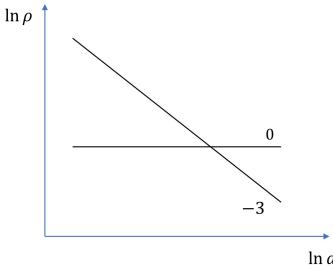


Figure 6. Modelo com constante cosmológica positiva e curvatura nula.

44.3 Universo com constante cosmológica positiva

A equação de Friedmann escreve-se agora como

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{C}{a^3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}$$

e temos as seguintes situações

(a) Espaço Euclideano ($k = 0$)

O universo expande-se para sempre.

(b) Espaço elíptico ($k = +1$)

Existe um valor crítico $\Lambda_c = 4/9C^2$ e um ponto crítico $a_c = 3C/2$ tal que para estes valores $\dot{a}_c = 0$. Temos então três situações possíveis

(i) $\Lambda > \Lambda_c$

Modelo de Lemaître. O Universo expande-se para sempre.

(ii) $\Lambda = \Lambda_c$

Aqui temos várias possibilidades:

- Modelo estático de Einstein.

- Modelo em que o universo começa com $a < a_c$, se expande e se aproxima de Einstein estático assimptoticamente.

- Modelo em que o universo começa com $a > a_c$, se expande e torna-se de Sitter, Eddington-Lemaître.

E claro que também podemos considerar os casos em que o universo contrai num Big-Crunch e em que o universo contrai e se aproxima de Einstein estático asymptoticamente. Mas estes casos são semelhantes aos anteriores revertendo a seta do tempo.

(iii) $0 < \Lambda < \Lambda_c$

- O universo tem um toing e termina num Big-Crunch
- O universo contrai, tem um boing, e expande-se para sempre.

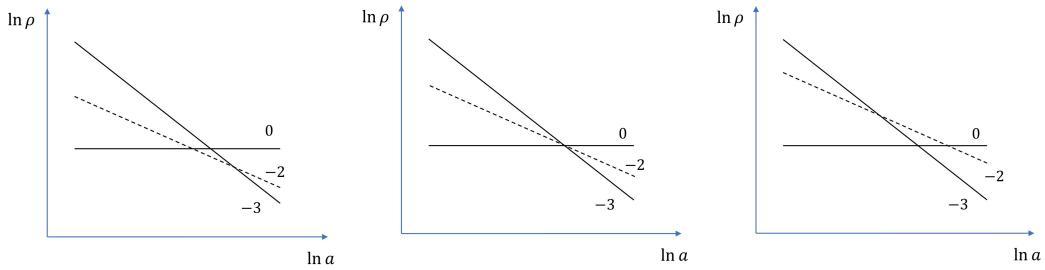


Figure 7. Diagrama $\ln \rho$ vs $\ln a$ para um universo com constante cosmológica positiva com $\Lambda > \Lambda_c$, $\Lambda = \Lambda_c$, e $\Lambda < \Lambda_c$, respectivamente.

(c) Espaço hiperbólico ($k = -1$)

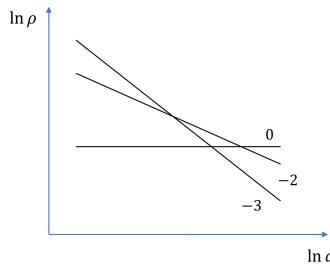
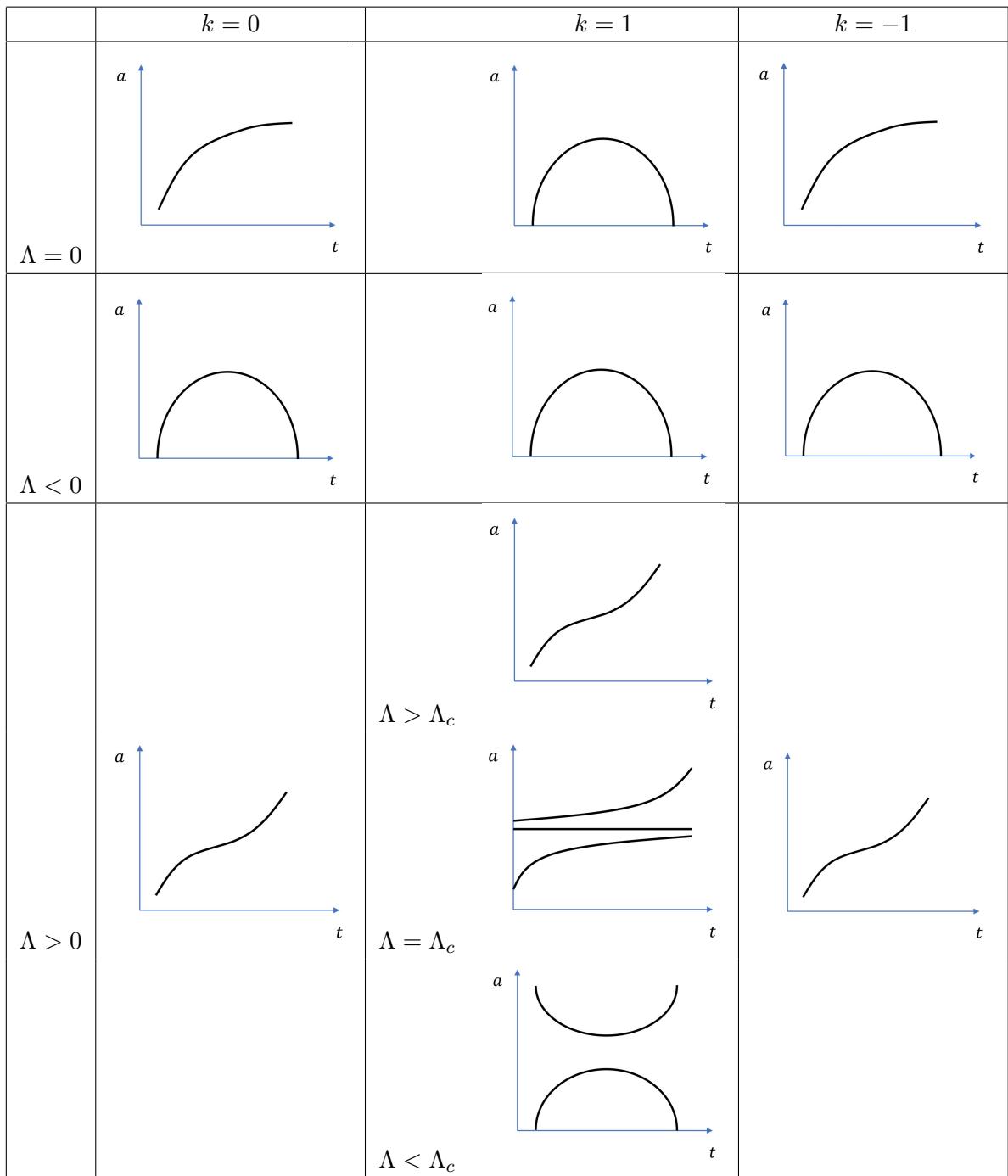


Figure 8. Modelo com constante cosmológicas positiva e curvatura negativa.

O universo expande-se para sempre.

Resumindo, temos a seguinte tabela com a classificação dos modelos de Friedmann com todas as situações possíveis (para um universo com poeira apenas).



45 A idade do Universo

Uma constante cosmológica entra num bar. O empregado grita "Constantes cosmológicas não são permitidas neste bar". A constante cosmológica responde tristemente "É sempre a mesma coisa em todo o lado!"

A idade do Universo pode ser calculada a partir da equação de Friedmann. Temos

$$t = \int_0^t dt = \int_0^a \frac{dt}{da} da = \int_0^a \frac{1}{\dot{a}} \frac{da}{a} = \int_0^a \frac{1}{H} \frac{da}{a}$$

Mas como

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z} \quad \Rightarrow \quad \frac{da}{a} = -\frac{dz}{1+z}$$

e então ficamos com

$$t = - \int_{\infty}^z \frac{1}{H} \frac{dz}{1+z} = \frac{1}{H_0} \int_z^{\infty} \frac{dz}{(1+z)E(z)}$$

onde se usou a definição

$$E(z)^2 \equiv \frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2$$

Vamos considerar três possibilidades. Se admitirmos que o Universo é dominado por radiação até à altura em que acontece a equivalência entre a radiação e a matéria em $z_{\text{eq}} \approx 3400$ (exercício), então

$$E(z) = \sqrt{\Omega_r}(1+z)^2$$

e a idade do Universo calcula-se como

$$t_{\text{eq}} \approx \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_r}} \int_{z_{\text{eq}}}^{\infty} \frac{dz}{(1+z)^3} = \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_r}} \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(1+z)^2} \right]_{z_{\text{eq}}}^{\infty} = \frac{1}{2} \frac{1}{H_0 \sqrt{\Omega_r}} \frac{1}{(1+z_{\text{eq}})^2}$$

escrevendo a taxa de expansão de Hubble em anos e calculando Ω_r que deve incluir tanto os fotões como os neutrinos,

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_0} &\approx 10 \times 10^9 h^{-1} \text{anos}, \\ \Omega_r &= \Omega_\gamma + \Omega_\nu = \Omega_\gamma \left(1 + 3 \times \frac{7}{8} \times \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \right) = 4.07 \times 10^{-5} h^{-2} \end{aligned}$$

temos

$$t_{\text{eq}} \approx 10 \times 10^9 h^{-1} \text{anos} \frac{1}{(4.07 \times 10^{-5} h^{-2})^{1/2}} \frac{1}{2} \frac{1}{3400^2} \approx 6.8 \times 10^4 \text{anos}.$$

A partir dessa época o Universo é dominado por matéria. Se admitirmos por agora que a matéria é tudo o que temos num universo plano, $\Omega_m = 1$, então, $E(z) = (1+z)^{3/2}$ e ficamos com

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^{z_{\text{eq}}} \frac{dz}{(1+z)^{5/2}} = \frac{1}{H_0} \left[\frac{2}{3} \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right]_{z_{\text{eq}}}^0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \approx 9 \times 10^9 \text{ anos}.$$

Vemos então que a idade do Universo é essencialmente dada pelo período em que a matéria é dominante. Mas também sabemos que deve existir algo como uma constante cosmológica que acelera o Universo e que deve ter começado a dominar a evolução muito tarde. Desprezando a contribuição da radiação temos então

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{(1+z)(\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda)^{1/2}} \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \frac{1}{\sqrt{1-\Omega_m}} \operatorname{arcsinh} \left[\left(\frac{1-\Omega_m}{\Omega_m} \right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Para $\Omega_m \approx 0.3$ e $h \approx 0.7$ resulta que

$$t_0 \approx 13.8 \times 10^9 \text{ anos}.$$

Isto quer dizer que a constante cosmológica faz o Universo um pouco mais velho do que se só considerássemos matéria.

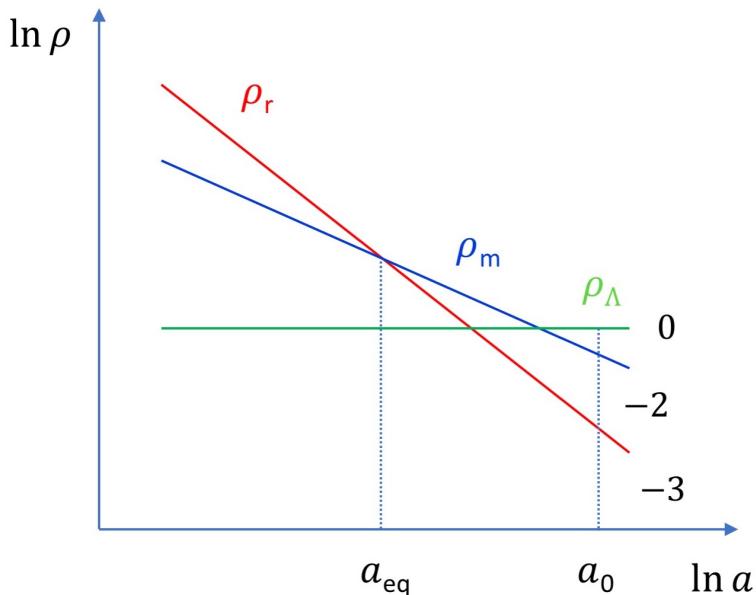


Figure 9. A evolução das várias densidades de energia do Universo.

46 Distâncias em cosmologia

[Ferreira cap. 19]

Já vimos que podemos escrever a métrica de FLRW como

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

ou de forma equivalente como

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 [d\chi^2 + r^2 d\Omega^2]$$

onde temos

$$r = \begin{cases} R \sin \chi, & \text{curvatura positiva} \\ \chi, & \text{geometria plana} \\ R \sinh \chi, & \text{curvatura negativa} \end{cases}$$

1. Distância comóvel

Define a distância no espaço das coordenadas χ que um fotão viaja entre um objecto distante e nós.

$$\boxed{\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a}}$$

2. Distância própria

Define a distância percorrida, r_p , no espaço das coordenadas r .

$$\begin{aligned} \chi &= - \int_{r_p}^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^{r_p} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|k|}} \arcsin \left(\sqrt{|k|} r_p \right), & \text{curvatura positiva} \\ r_p, & \text{geometria plana} \\ \frac{1}{\sqrt{|k|}} \operatorname{arsinh} \left(\sqrt{|k|} r_p \right), & \text{curvatura negativa} \end{cases} \end{aligned}$$

Invertendo esta expressão e notando que

$$\Omega_k = -\frac{k}{a_0 H_0^2} \quad \Rightarrow \quad |k| = |\Omega_k| H_0^2$$

onde se fez $a_0 = 1$, ficamos com a relação entre χ e r_p ,

$$r_p = \begin{cases} \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left(H_0 \sqrt{|\Omega_k|} \chi \right), & \text{curvatura positiva} \\ \chi, & \text{geometria plana} \\ \frac{1}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left(H_0 \sqrt{|\Omega_k|} \chi \right), & \text{curvatura negativa} \end{cases}$$

3. Distância angular

É a distância subentendida pela razão entre o tamanho l de um objecto que é transversal à nossa linha de observação e a abertura angular desse objecto.

$$d_A = \frac{l}{\theta}$$

Da métrica de FLRW sabemos que a distância própria correspondente ao ângulo θ é $dl^2 = a^2 r^2 d\theta^2$, ou seja, $l = ar_p \theta$, o que significa que escrevemos a distância angular como

$$d_A = \frac{ar_p \theta}{\theta} = ar_p$$

ou melhor ainda

$$d_A = \frac{r_p}{1+z}$$

4. Distância luminosa

Podemos também definir uma distância associada à luminosidade absoluta, L , de um objecto. O fluxo da luz de um objecto a essa distância é

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}$$

onde d_L é a distância luminosa. A luminosidade absoluta escreve-se como

$$L = \frac{(\text{fotões emitidos}) \times (\text{energia dos fotões})}{\text{intervalo de tempo}} = \frac{N_\gamma E_e}{dt_e}$$

Para o observador que está a uma distância própria r_p da fonte, os fotões difundem-se numa área $A = 4\pi a_0^2 r_p^2 = 4\pi r_p^2$. O fluxo observado num intervalo dt_0 é então

$$F = \frac{N_\gamma E_0}{dt_0 A}$$

O número de fotões é conservado mas a sua energia é menor devido ao desvio para o vermelho cosmológico $E_0 = E_e/(1+z)$. Por outro lado, o intervalo de tempo também sofre uma dilatação porque já vimos que $dt_0 = dt_e(1+z)$. Colocando tudo junto na expressão para o fluxo medido temos

$$F = \frac{N_\gamma E_e}{dt_e(1+z)^2 4\pi r_p^2} = \frac{L}{4\pi(1+z)^2 r_p^2}$$

e daí tiramos que a distância luminosa é

$$d_L = (1+z)r_p$$

e que se relaciona com a distância angular com

$$d_L = (1+z)^2 d_A .$$

47 Distância luminosa e magnitude aparente

Vimos no capítulo anterior a definição de distância comóvel, χ . Esta pode ser escrita na forma

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_a^{a_0} \frac{dt}{da} \frac{da}{a} = \int_a^{a_0} \frac{1}{\dot{a}} \frac{da}{a} = \int_a^{a_0} \frac{1}{H} \frac{da}{a^2} = - \int_z^0 \frac{1}{H} dz$$

E finalmente usando a definição de $E(z) = H/H_0$, temos

$$\boxed{\chi = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}}$$

E ficamos então com a expressão para a distância luminosa

$$d_L = \begin{cases} (1+z) \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sin \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right), & \text{curvatura positiva} \\ (1+z) \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}, & \text{geometria plana} \\ (1+z) \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_k|}} \sinh \left(\sqrt{|\Omega_k|} \int_0^z \frac{dz}{E(z)} \right), & \text{curvatura negativa} \end{cases}$$

onde se colocou a velocidade da luz no vácuo, c , explicitamente.

O astrónomo grego Hiparco inventou uma escala de magnitudes que descrevia o brilho de cada estrela no céu. Às estrelas mais brilhantes atribuiu-lhes um valor de $m = 1$ e às mais fracas o valor de $m = 6$. A estas corresponde um brilho aparente que é 100 vezes mais fraco que o das estrelas do primeiro grupo. Podemos estender esta relação para magnitudes fora deste intervalo e convencionou-se comparar com o brilho aparente de um objecto a 10 parsec a que corresponde uma magnitude bolométrica M . Como o fluxo, que mede o brilho aparente, depende da distância luminosa com d_L^{-2} , temos

$$\frac{F(d=10\text{pc})}{F(d_L)} = \left(\frac{d_L}{10\text{pc}} \right)^2 = 100^{\frac{m-M}{5}}$$

Mas em cosmologia a unidade de distância mais comum é o Mega parsec, fazendo o logaritmo, podemos escrever esta relação como

$$\boxed{m = M + 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right) + 25}$$

Para as supernovas do tipo Ia, a magnitude bolométrica é aproximadamente $M = -19.5$. Hoje fazemos o diagrama de Hubble usando magnitudes versus o desvio para o vermelho. De certa forma, estamos a colocar as distâncias no eixo dos y e as velocidades no eixo dos x . Na figura podemos ver o diagrama de Hubble como determinado por supernovas de baixo redshift mais 42 supernovas de alto redshift em 1998.

Hoje temos análises que incluem muito mais supernovas e a precisão é portanto muito maior. Podemos inclusivé considerar que a aceleração do Universo é causada por uma componente geral, energia escura, com parâmetro de equação de estado w . Acontece que os dados actuais sugerem que $w = -1$, ou seja, a energia escura é mesmo uma constante cosmológica ou algo muito próximo de o ser.

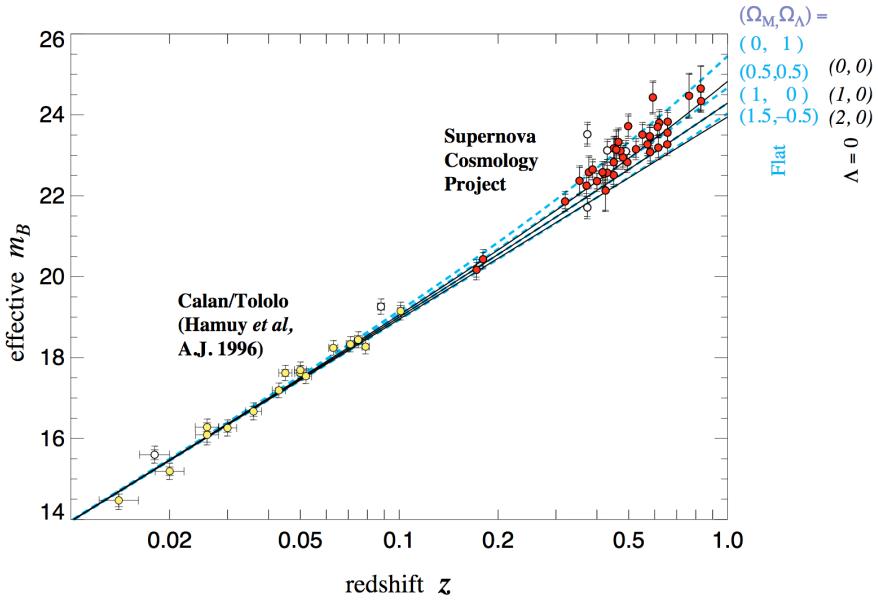


Figure 10. O diagrama de Hubble a partir de 42 supernovas a redshift elevado. Figura de Perlmutter et al. ApJ, 1999.

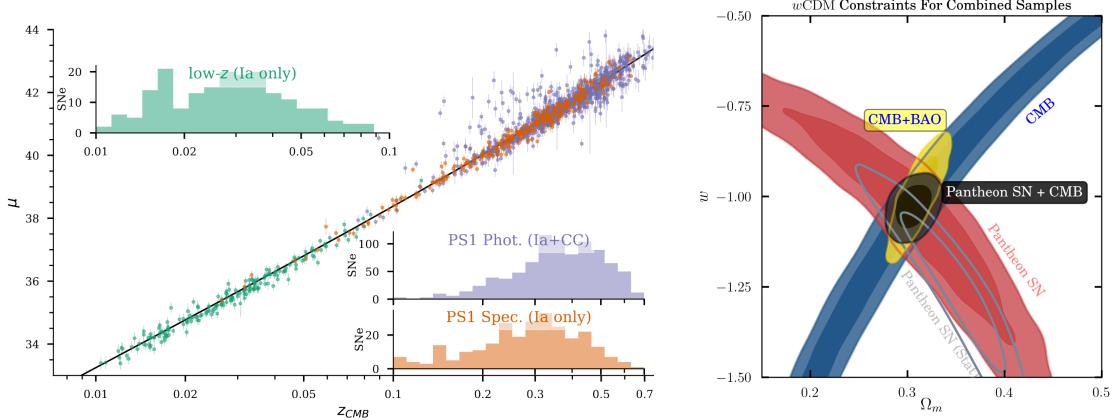


Figure 11. O diagrama de Hubble a partir da compilação Pantheon e limites ao parâmetro da equação de estado w . Figuras de Jones et al. ApJ, 2018, Scolnic et al. ApJ 2018.

48 Horizontes em cosmologia

[Barbosa Henriques cap. 7.3]

Já vimos que da métrica de Friedmann para um fotão ($ds^2 = 0$) com $d\theta = d\phi = 0$, emitido em r_1 no instante t_1 é recebido pelo observador em $r_0 = 0$ no instante genérico t_2 , percorreu

$$\chi = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{a}$$

Para uma evolução do factor de escala $a = (t/t_0)^n$, com $n < 1$, temos

$$\chi = \frac{t_0}{1-n} \left[\left(\frac{t_2}{t_0} \right)^{1-n} - \left(\frac{t_1}{t_0} \right)^{1-n} \right] = \frac{n}{1-n} \frac{1}{H_0} \left[a_2^{(1-n)/n} - a_1^{(1-n)/n} \right],$$

e no caso de uma constante cosmológica, a evolução do factor de escala satisfaz $a = e^{H(t-t_0)}$, e temos

$$\chi = \frac{1}{H} \left(e^{-H(t_1-t_0)} - e^{-H(t_2-t_0)} \right) = \frac{1}{H} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right)$$

1. Horizonte de partículas

Se à medida que $t_1 \rightarrow 0$, e $t_2 \rightarrow t_0$, ou seja, o fotão foi emitido no passado longínquo e recebido hoje, o integral diverge, significa que o observador pode receber informação de qualquer ponto do passado, desde que essa informação tenha sido emitida suficientemente cedo.

Por outro lado, se o integral é finito, significa que o observador só pode receber informação de partículas em posições $r < r_1 = r_H(t)$, o chamado, horizonte de partículas.

Para radiação e poeira (com $n = 1/2$ ou $n = 2/3$, respectivamente) temos

$$\chi = \frac{t_0}{1-n} = \frac{n}{1-n} \frac{1}{H_0}$$

o que significa que há um horizonte, mas que ele aumenta à medida que t_0 cresce.
Para um universo com uma constante cosmológica, temos,

$$\chi = \frac{1}{Ha_1} \left(1 - \frac{a_1}{a_0} \right)$$

Aqui também há um horizonte, e mesmo que esperemos muito tempo, há eventos no passado que nunca vemos.

2. Horizonte de acontecimentos

Da mesma forma agora podemos averiguar se há acontecimentos de que nunca nos poderemos aperceber no futuro. No caso em que $t_2 \rightarrow \infty$, e o integral diverge, significa que no futuro poderemos ter conhecimento de qualquer acontecimento desde

que esperemos tempo suficiente. Por outro lado, se o integral é finito, significa que há acontecimentos que nunca veremos. Existe um horizonte de acontecimentos. No caso em que há um Big-Crunch, devemos considerar antes $t_2 \rightarrow t_{\max} < \infty$.

Voltemos ao nosso exemplo de um universo com radiação ou poeira. O integral fica

$$\chi \rightarrow \infty$$

o que significa que podemos tomar conhecimento de qualquer acontecimento desde que esperemos o tempo suficiente. E para uma constante cosmológica,

$$\chi \rightarrow \frac{1}{Ha_1}$$

e temos um claro horizonte de acontecimentos.

Como a velocidade da luz marca uma região onde se pode trocar informação, estes horizontes são interpretados como regiões causais no universo.

49 Densidades tensoriais

[D'Inverno cap.7]

De seguida vamos utilizar um método mais robusto de determinar as equações de Einstein que consiste na abordagem pelo princípio variacional. Ou seja, vamos construir uma acção cujas equações do movimento são as equações de Einstein. Esta ferramenta é muito poderosa na procura de extensões à Relatividade Geral e por isso muito popular. Para prosseguirmos teremos de nos apetrechar com algumas ferramentas matemáticas como o conceito de densidade tensorial. Esta é uma grandeza que se transforma de maneira semelhante a um tensor mas com um factor adicional de J^w , onde w é o peso da densidade tensorial e J , o Jacobiano,

$$J = \left| \frac{\partial x^a}{\partial \tilde{x}^b} \right|.$$

Temos então de uma forma geral,

$$\tilde{\mathcal{T}}_{b...}^{a...} = J^w \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^\mu} \cdots \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^b} \cdots \mathcal{T}_{\nu...}^{\mu...}.$$

O produto de duas densidades tensoriais de pesos w_1 e w_2 é uma densidade tensorial de peso $w_1 + w_2$. Para a derivada covariante podemos adoptar

$$\nabla_c \mathcal{T}_{b...}^{a...} = \partial_c \mathcal{T}_{b...}^{a...} + \Gamma_{dc}^a \mathcal{T}_{b...}^{d...} + \dots - \Gamma_{bc}^d \mathcal{T}_{d...}^{a...} - \dots - w \Gamma_{cd}^d \mathcal{T}_{b...}^{a...}.$$

Por exemplo, para um vector,

$$\nabla_c \mathcal{T}^a = \partial_c \mathcal{T}^a + \Gamma_{bc}^a \mathcal{T}^b - w \Gamma_{bc}^b \mathcal{T}^a$$

Se $w = 1$ e $c = a$, então

$$\nabla_a \mathcal{T}^a = \partial_a \mathcal{T}^a + \Gamma_{ba}^a \mathcal{T}^b - \Gamma_{ba}^b \mathcal{T}^a = \partial_a \mathcal{T}^a \quad (49.1)$$

e a derivada covariante é igual à derivada parcial.

50 O determinante da métrica

[D'Inverno cap. 7]

Já vimos que a métrica $g_{ab}(x)$, se transforma como

$$\tilde{g}_{ab}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^a} \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^b} g_{cd}(x)$$

porque é um tensor covariante de segunda ordem. O determinante, $g = \det(g_{ab})$ transforma-se como:

$$\tilde{g} = J^2 g$$

ou seja, o determinante é uma densidade tensorial de peso $w = 2$.

Para métricas de assinatura negativa escrevemos antes:

$$(-\tilde{g}) = J^2(-g), \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-\tilde{g}} = J\sqrt{-g}$$

onde agora $\sqrt{-g}$ é uma densidade tensorial de peso $w = 1$.

Vamos agora calcular a derivada covariante do tensor da métrica. Primeiro tomemos uma matriz genérica (a_{ij}) , cujo determinante $a = \det(a_{ij})$, é

$$a = \sum_{j=1}^n a_{ij} A^{ij}$$

onde A^{ij} é a matriz dos cofactores transposta. Diferenciado em relação a a_{ij} resulta

$$\frac{\partial a}{\partial a_{ij}} = A^{ij}$$

Como $a = a(a_{ij}(x)) = a(x)$, podemos fazer

$$\frac{\partial a}{\partial x^c} = \frac{\partial a}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^c} = A^{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^c}$$

Mas a matriz transposta relaciona-se com a inversa de a_{ij} , a matriz a^{ji} como

$$A^{ij} = a(a^{ji})$$

então

$$\frac{\partial a}{\partial x^c} = a(a^{ji}) \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^c}$$

Vamos agora aplicar isto à nossa métrica e seu determinante, e atendendo que $g^{ba} = g^{ab}$

$\partial_c g = gg^{ab} \partial_c g_{ab}$

(50.1)

mas atenção que porque $g_{ab}g^{ac} = \delta_b^c$, temos que

$$\partial_d (g_{ab}g^{ac}) = 0, \quad \Rightarrow \quad g^{ac} \partial_d g_{ab} = -g_{ab} \partial_d g^{ac}$$

e então

$$\boxed{\partial_c g = -g g_{ab} \partial_c g^{ab}} \quad (50.2)$$

Por outro lado, como a derivada covariante do tensor da métrica se anula, temos

$$\nabla_c g_{ab} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_c g_{ab} = \Gamma_{ac}^d g_{db} + \Gamma_{bc}^d g_{ad} \quad (50.3)$$

e usando esta relação em (50.1) temos

$$\partial_c g = g g^{ab} \left(\Gamma_{ac}^d g_{db} + \Gamma_{bc}^d g_{ad} \right) = g \Gamma_{ac}^a + g \Gamma_{bc}^b$$

ou seja,

$$\boxed{\partial_c g = 2g \Gamma_{ac}^a}$$

Mas como g é uma densidade escalar de peso $w = 2$, também sabemos que

$$\nabla_c g = \partial_c g - 2\Gamma_{ac}^a g$$

que usando o resultado anterior significa que

$$\boxed{\nabla_c g = 0}$$

O mesmo acontece com $\sqrt{-g}$. Temos das equações (50.1) e (50.2), respectivamente,

$$\boxed{\partial_c \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ab} \partial_c g_{ab} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \partial_c g^{ab}}$$

Usando a condição de metricidade (50.3) na primeira igualdade, temos

$$\boxed{\partial_c \sqrt{-g} = \sqrt{-g} \Gamma_{ac}^a}$$

Mas como $\sqrt{-g}$ é densidade escalar de peso $w = 1$,

$$\nabla_c \sqrt{-g} = \partial_c \sqrt{-g} - \Gamma_{ac}^a \sqrt{-g}$$

então temos de ter

$$\boxed{\nabla_c \sqrt{-g} = 0}$$

Dado um tensor T^a , então $(\sqrt{-g} T^a)$ é uma densidade tensorial de peso $w = 1$. Então da identidade (49.1) podemos dizer imediatamente que

$$\nabla_a (\sqrt{-g} T^a) = \partial_a (\sqrt{-g} T^a)$$

o que pode ser facilmente verificado a partir das relações acima.

51 Coordenadas geodésicas

[D'Inverno cap 6.6; Gibbons cap 11.1]

Por vezes é útil definir um sistema de coordenadas na vizinhança de um ponto P tal que nesse pontos as componentes das conexões da métrica se anulam

$$(\Gamma_{bc}^a)_P = 0$$

Vamos mostrar que é possível fazer uma transformação de coordenadas de maneira a que isto possa ser feito. Vamos tomar, sem perda de generalidade, o ponto P como a origem das coordenadas, $x_P^a = 0$. Consideremos agora a transformação de coordenadas

$$x^a \rightarrow \tilde{x}^a = x^a + \frac{1}{2}Q_{bc}^a x^b x^c$$

e determinemos os coefficients Q_{bc}^a de forma a que $(\tilde{\Gamma}_{bc}^a)_P = 0$. Vamos assumir que $Q_{bc}^a = Q_{cb}^a$. Já vimos a lei de transformação das conexões da métrica

$$(\tilde{\Gamma}_{bc}^a)_P = \left(\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^e}{\partial \tilde{x}^b} \frac{\partial x^f}{\partial \tilde{x}^c} \Gamma_{ef}^d \right)_P - \left(\frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^b} \frac{\partial x^e}{\partial \tilde{x}^c} \frac{\partial^2 \tilde{x}^a}{\partial x^d \partial x^e} \right)_P$$

Calculando as derivadas que entram na transformação usando $x_P^a = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^d} &= \delta_d^a + Q_{bd}^a x^b, & \Rightarrow & \left(\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^d} \right)_P = \delta_d^a \\ \frac{\partial^2 \tilde{x}^a}{\partial x^d \partial x^e} &= Q_{de}^a, & \Rightarrow & \left(\frac{\partial^2 \tilde{x}^a}{\partial x^d \partial x^e} \right)_P = Q_{de}^a \end{aligned}$$

temos que

$$(\tilde{\Gamma}_{bc}^a)_P = (\Gamma_{bc}^a)_P - Q_{bc}^a.$$

Ou seja, se escolhermos os coefficients $Q_{bc}^a = (\Gamma_{bc}^a)_P$, então $(\tilde{\Gamma}_{bc}^a)_P = 0$, neste sistema de coordenadas. Note-se que as derivadas de $\tilde{\Gamma}_{bc}^a$ podem não se anular, todavia. Este resultado pode facilitar muitas vezes os cálculos porque as derivadas covariantes passam a ser iguais às derivadas parciais. Para além disso, mostra que numa vizinhança suficientemente pequena podemos admitir a geometria como plana. Lembrar o princípio de equivalência, na relatividade geral e a ideia de que um observador em queda livre anula a força da gravidade na sua vizinhança, mas só na vizinhança imediata.

52 O princípio variacional para a Relatividade Geral

[D'Inverno cap. 11.5]

Vamos considerar a acção para o campo gravitacional escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} R$$

onde $R = g^{ab}R_{ab}$ é o tensor de Ricci. Queremos mostrar que as equações de campo são as equações de Einstein. Vamos fazer a variação da acção para escrever

$$\delta S = \int d^4x \left[\delta \left(\sqrt{-g} g^{ab} \right) R_{ab} + \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} \right] = 0.$$

Olhemos primeiro para o segundo termo. Se trabalharmos em coordenadas geodésicas $(\Gamma_{bc}^a)_P = 0$, e variarmos o tensor de Ricci temos

$$\delta R_{ab} = \partial_c \delta \Gamma_{ab}^c - \partial_b \delta \Gamma_{ac}^c$$

uma vez que termos do género $\Gamma \delta \Gamma$ são nulos nestas coordenadas. Para além disso, nestas coordenadas, as derivadas covariantes são iguais às derivadas parciais, e podemos escrever $\partial_c = \nabla_c$, e resulta a chamada identidade de Palatini

$$\delta R_{ab} = \nabla_c (\delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_b (\delta \Gamma_{ad}^d)$$

Usando esta identidade resulta

$$g^{ab} \delta R_{ab} = g^{ab} \left(\nabla_c (\delta \Gamma_{ab}^c) - \nabla_b (\delta \Gamma_{ad}^d) \right)$$

e como $\nabla_c g^{ab} = 0$,

$$g^{ab} \delta R_{ab} = \nabla_c \left(g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c - \delta_b^c g^{ab} \delta \Gamma_{ad}^d \right)$$

e também $\nabla_c \sqrt{-g} = 0$,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} &= \nabla_c \left[\sqrt{-g} \left(g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c - \delta_b^c g^{ab} \delta \Gamma_{ad}^d \right) \right] \\ &= \partial_c \left[\sqrt{-g} \left(g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c - \delta_b^c g^{ab} \delta \Gamma_{ad}^d \right) \right] \end{aligned}$$

onde no último passo se usou o facto de a quantidade dentro do parêntesis recto ser uma densidade tensorial de peso $w = 1$. Esta quantidade é uma derivada total de maneira que pelo teorema de Gauss

$$\int_V dV \partial_c X = \int_{\partial V} dS X$$

e como fazemos em mecânica clássica que nas fronteiras $\delta \Gamma = 0$, este termo, portanto, anula-se.

Voltamos agora ao primeiro termo

$$\delta \left(\sqrt{-g} g^{ab} \right) R_{ab} = \sqrt{-g} \delta g^{ab} R_{ab} + \delta \sqrt{-g} R$$

mas já vimos antes que $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}$, podemos escrever

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \delta g^{ab} = 0$$

o que significa que para perturbações não nulas temos de ter

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 0$$

que de facto é a parte puramente geométrica das equações de Einstein.

53 O Lagrangiano de matéria

[D'Inverno cap. 11.8]

Vamos agora ver como o Lagrangiano gravitacional encaixa com o Lagrangiano para os campos de matéria. Escreve-se tipicamente

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m$$

Variando a acção temos

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g}R)}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} + \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{ab}} \delta g^{ab} \\ &= \int d^4x \left[\frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) + \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{ab}} \right] \delta g^{ab} = 0 \end{aligned}$$

Daqui tiramos que

$$\begin{aligned} R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R &= -16\pi G \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{ab}} \\ &= 8\pi G T_{ab} \end{aligned}$$

E então relacionamos o tensor energia-momento com a derivada funcional do Lagrangiano como

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{ab}}$$

e pode-se mostrar que também se pode escrever

$$T^{ab} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{ab}}$$

54 Tensor energia-momento do electromagnetismo

[D'Inverno cap.12.6]

A acção para o campo electromagnético escreve-se como

$$S_{em} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{ab} F^{ab}$$

onde o tensor F^{ab} se relaciona com os campos eléctrico e magnético em coordenadas cartesianas segundo a matriz

$$F^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

E também pode ser escrito em termos de um potencial vector A_a tal que $F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$. Usando este resultado e as simetrias do tensor de Riemann, mostra-se que

$$\nabla_c F_{ab} + \nabla_a F_{bc} + \nabla_b F_{ca} = 0 \quad (54.1)$$

Notemos que neste caso temos para a densidade Lagrangiana

$$\sqrt{-g} \mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} F_{ab} F^{ab} = -\frac{1}{4} \sqrt{-g} g^{ac} g^{bd} F_{ab} F_{cd}$$

usando $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}$, temos a derivada

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_{em})}{\delta g^{ef}} &= -\frac{1}{4} \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{ef} F_{ab} F^{ab} + 2g^{bd} F_{eb} F_{fd} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{ef} F_{ab} F^{ab} + 2F_e{}^d F_{fd} \right] \end{aligned}$$

e então o tensor energia-momento que se relaciona com a densidade Lagrangiana

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{ab}}$$

escreve-se simplesmente como

$$T_{ab} = F_a{}^d F_{bd} - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd}$$

Usando a conservação do tensor energia-momento temos que

$$\nabla_b F^{ab} = 0. \quad (54.2)$$

As equações (54.1) e (54.2) são a versão covariante das equações de Maxwell.

55 Tensor energia-momento para um campo escalar

[Amendola cap. 7.1]

$$S_\phi = - \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} \partial^a \phi \partial_a \phi + V(\phi) \right)$$

onde temos portanto,

$$\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi = -\sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + V(\phi) \right)$$

e ficamos com a derivada funcional

$$\frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ab} \left(\frac{1}{2} \partial^c \phi \partial_c \phi + V(\phi) \right) - \sqrt{-g} \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial_b \phi$$

de onde resulta o tensor energia-momento

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - g_{ab} \left(\frac{1}{2} \partial^c \phi \partial_c \phi + V(\phi) \right)$$

Comparando com o tensor energia-momento para um fluido perfeito

$$T_{ab} = (\rho + p) u_a u_b + g_{ab} p$$

retiramos imediatamente que a pressão para um campo escalar se escreve como

$$p = -\frac{1}{2} \partial^c \phi \partial_c \phi - V(\phi)$$

Para identificar a densidade de energia vamos lembrar que para um fluido perfeito $T_a^a = -\rho + 3p$. Temos da definição

$$T_b^a = \partial^a \phi \partial_b \phi - g_b^a \left(\frac{1}{2} \partial^c \phi \partial_c \phi + V(\phi) \right)$$

e consequentemente

$$T = T_a^a = -\rho + 3p = -\partial^a \phi \partial_a \phi - 4V(\phi)$$

e que susbtituindo p e resolvendo para ρ obtemos

$$\rho = -\frac{1}{2} \partial^c \phi \partial_c \phi + V(\phi)$$

Ou seja, comparando os tensores energia-momento do fluido perfeito e do campo escalar, temos a igualdade

$$\begin{aligned} (\rho + p) u_a u_b &= \partial_a \phi \partial_b \phi \\ -\partial^c \phi \partial_c \phi u_a u_b &= \partial_a \phi \partial_b \phi \end{aligned}$$

e então podemos identificar o 4-vector velocidade como

$$u_a = -\frac{\partial_a \phi}{\sqrt{-\partial^c \phi \partial_c \phi}}$$

e note-se que de facto se mantém $u^a u_a = -1$ como vimos antes.

Agora que temos o tensor energia momento e definimos pressão e densidade de energia, podemos usar a equação da continuidade derivada para FLRW para obter a equação do movimento para o campo

$$\boxed{\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0} \quad (55.1)$$

Também podemos obter este resultado a partir das equações de Euler-Lagrange agora que temos o Lagrangiano. Tomamos então

$$\partial_a \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_a \phi)} - \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial \phi} = 0$$

onde

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_a \phi)} = -\sqrt{-g}\partial^a \phi$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \partial_a \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_a \phi)} &= -\partial_a(\sqrt{-g}\partial^a \phi) = -\sqrt{-g}\partial_a \partial^a \phi - \partial_a \sqrt{-g}\partial^a \phi \\ &= -\sqrt{-g}\partial_a \partial^a \phi - \sqrt{-g}\Gamma_{ca}^c \partial^a \phi \end{aligned}$$

onde se usou $\partial_a \sqrt{-g} = \sqrt{-g} \Gamma_{ca}^c$, e para o outro termo

$$\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial \phi} = -\sqrt{-g} \frac{\partial V}{\partial \phi}$$

e a equação do movimento fica

$$\boxed{-\partial_a \partial^a \phi - \Gamma_{ca}^c \partial^a \phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0}$$

que para um espaço de FLRW, $\partial_0 \phi = \dot{\phi}$, $\partial^0 = -\dot{\phi}$, $\Gamma_{i0}^i = 3\dot{a}/a$ resulta a equação do movimento (55.1).

56 O método de Palatini

[D'Inverno cap. 11.7]

O método de Palatini prende-se na ideia de tratar a métrica e as conexões de forma separada como variáveis dinâmicas. Partimos da acção

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_G + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m$$

onde o Lagrangiano da gravidade é

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} \mathcal{L}_G &= \mathcal{L}_G \left(\sqrt{-g} g^{ab}, \Gamma_{bc}^a, \Gamma_{bc,d}^a \right) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} g^{ab} R_{ab}\end{aligned}$$

O cálculo variacional do Lagrangiano resulta

$$\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}) = \frac{1}{16\pi G} R_{ab} \delta(\sqrt{-g} g^{ab}) + \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) + \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} = 0$$

ou seja,

$$\frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} \left(R_{ab} \delta g^{ab} - \frac{1}{2} R g_{cd} \delta g^{cd} \right) + \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) + \frac{1}{16\pi G} \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} = 0$$

e usando a definição do tensor energia momento

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{ab}}$$

temos que

$$\sqrt{-g} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R - 8\pi G T_{ab} \right) \delta g^{ab} + \sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} = 0$$

Como não sabemos se R_{ab} é simétrico ou não porque as conexões não estão definidas, podemos escrever R_{ab} com uma parte simétrica e outra anti-simétrica tal que

$$R_{ab} = R_{(ab)} + R_{[ab]}$$

e como g^{ab} é simétrico, então $R_{[ab]} \delta g^{ab} = 0$, e o cálculo variacional em relação à métrica g^{ab} resulta

$$R_{(ab)} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi G T_{ab}$$

Ainda não acabou. Agora precisamos de aplicar o método variacional em relação a Γ_{bc}^a . Temos, usando a identidade de Palatini,

$$\begin{aligned}\sqrt{-g} g^{ab} \delta R_{ab} &= \sqrt{-g} g^{ab} [\nabla_c \delta \Gamma_{ab}^c - \nabla_b \delta \Gamma_{ac}^c] \\ &= \nabla_b (\sqrt{-g} g^{ab}) \delta \Gamma_{ac}^c - \nabla_c (\sqrt{-g} g^{ab}) \delta \Gamma_{ab}^c + \\ &\quad \nabla_c [\sqrt{-g} g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c] - \nabla_b [\sqrt{-g} g^{ab} \delta \Gamma_{ac}^c]\end{aligned}$$

Os dois últimos termos são derivadas totais, portanto, darão contribuições nulas na acção e (fazendo $b \rightarrow d$) ficamos com

$$\sqrt{-g}g^{ab}\delta R_{ab} = \left[\delta_c^b \nabla_d (\sqrt{-g}g^{ad}) - \nabla_c (\sqrt{-g}g^{ab}) \right] \delta \Gamma_{ab}^c$$

Agora lembre-se que quando temos tensores tais que (tensor anti-simétrico) \times (tensor simétrico) = 0. Como as perturbações das conexões da métrica são simétricas, a parte anti-simétrica do termo entre parêntesis rectos vezes aquela anula-se imediatamente. Então só temos de impôr que a parte simétrica em $a - b$ da quantidade entre parêntesis se tem de anular. Ou seja

$$\frac{1}{2} \delta_c^b \nabla_d (\sqrt{-g}g^{ad}) + \frac{1}{2} \delta_c^a \nabla_d (\sqrt{-g}g^{bd}) - \nabla_c (\sqrt{-g}g^{ab}) = 0 \quad (56.1)$$

Fazendo $c = b$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_b^b \nabla_d (\sqrt{-g}g^{ad}) + \frac{1}{2} \delta_b^a \nabla_d (\sqrt{-g}g^{bd}) - \nabla_b (\sqrt{-g}g^{ab}) &= 0 \\ \frac{1}{2} (4+1) \nabla_d (\sqrt{-g}g^{ad}) - \nabla_b (\sqrt{-g}g^{ab}) &= 0 \end{aligned}$$

ou seja, $\nabla_d (\sqrt{-g}g^{ad}) = 0$, que substituindo na equação (56.1) implica

$$\nabla_c (\sqrt{-g}g^{ab}) = 0$$

Deste resultado podemos ainda mostrar (também é um bom exercício) que $\nabla_c \sqrt{-g} = 0$, que $\nabla_c g^{ab} = 0$, e consequentemente

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{bd,c} + g_{cd,b} - g_{bc,d})$$

e de facto obtemos exactamente as mesmas equações de campo e as mesmas relações entre a métrica e as conexões pelo método de Palatini. Isso já não é verdade nas teorias de $f(R)$.

57 Teorias $f(R)$

As teorias $f(R)$ são uma extensão da teoria da relatividade geral onde se considera uma função geral do escalar de Ricci na ação

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R)$$

Pelo princípio variacional

$$\begin{aligned} 16\pi G \delta S &= \int d^4x [\delta(\sqrt{-g})f(R) + \sqrt{-g}\delta f(R)] \\ &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\sqrt{-g}f(R)g_{ab}\delta g^{ab} + \sqrt{-g}\delta f(g^{ab}R_{ab}) \right] \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \left[f'(R)R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}f(R) \right] \delta g^{ab} + f'(R)g^{ab}\delta R_{ab} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Já vimos que

$$\sqrt{-g}g^{ab}\delta R_{ab} = \partial_c \left[\sqrt{-g} \left(g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c - \delta_b^c g^{ab}\delta\Gamma_{ad}^d \right) \right]$$

No nosso caso temos

$$\sqrt{-g}f'(R)g^{ab}\delta R_{ab} = f'(R)\partial_c \left[\sqrt{-g} \left(g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c - \delta_b^c g^{ab}\delta\Gamma_{ad}^d \right) \right]$$

Quando $f(R) = R$, temos uma derivada total e portanto este termo não aparece nas equações de campo. Aqui já não é o caso e precisamos de calculá-lo com cuidado. Temos então que

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}f'(R)g^{ab}\delta R_{ab} &= \partial_c \left[f'(R)\sqrt{-g} \left(g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c - \delta_b^c g^{ab}\delta\Gamma_{ad}^d \right) \right] - \\ &\quad \partial_c f'(R)\sqrt{-g} \left(g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c - \delta_b^c g^{ab}\delta\Gamma_{ad}^d \right) \end{aligned}$$

O primeiro termo é uma derivada total e não irá contribuir para as equações de campo.

Vamos então calcular o termo que sobra. Como

$$\Gamma_{ad}^c = \frac{1}{2}g^{ce}(g_{ae,d} + g_{de,a} - g_{ad,e})$$

a sua variação fica

$$\delta\Gamma_{ad}^c = \frac{1}{2}\delta g^{ce}(g_{ae,d} + g_{de,a} - g_{ad,e}) + \frac{1}{2}g^{ce}(\partial_d\delta g_{ae} + \partial_a\delta g_{de} - \partial_e\delta g_{ad})$$

Em coordenadas geodésicas $\partial_c g^{ab} = \nabla_c g^{ab} = 0$, e então, só o segundo termo realmente conta, e ficamos com

$$\delta\Gamma_{ad}^c = \frac{1}{2}g^{ce}(\partial_d\delta g_{ae} + \partial_a\delta g_{de} - \partial_e\delta g_{ad})$$

Calculemos o primeiro termo (em que $d = b$), temos

$$g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{ab}g^{ce}(\partial_b\delta g_{ae} + \partial_a\delta g_{be} - \partial_e\delta g_{ab})$$

Como em coordenadas geodésicas $\partial_c g^{ab} = 0$, podemos incluir os tensores da métrica dentro das derivadas e ficamos então com

$$g^{ab} \delta \Gamma_{ab}^c = \partial^a (g^{ce} \delta g_{ae}) - \frac{1}{2} \partial^c (g^{ab} \delta g_{ab})$$

Para calcular o segundo termo contraímos os índices d e c ,

$$\delta \Gamma_{ad}^d = \frac{1}{2} g^{de} (\partial_d \delta g_{ae} + \partial_a \delta g_{de} - \partial_e \delta g_{ad})$$

Mais uma vez, como as derivadas parciais da métrica são nulas em coordenadas geodésicas, podemos levantar o índice d no primeiro termo e o índice e no terceiro e vemos que eles se anulam, resultando,

$$\delta \Gamma_{ad}^d = \frac{1}{2} \partial_a (g^{de} \delta g_{de})$$

e ainda

$$\delta_b^c g^{ab} \delta \Gamma_{ad}^d = \frac{1}{2} \partial^c (g^{de} \delta g_{de})$$

Colocando tudo junto, temos,

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} f'(R) g^{ab} \delta R_{ab} &= \partial_c f'(R) \sqrt{-g} \left[\partial^a (g^{ce} \delta g_{ae}) - \frac{1}{2} \partial^c (g^{ab} \delta g_{ab}) - \frac{1}{2} \partial^c (g^{de} \delta g_{de}) \right] \\ &= \partial_c f'(R) \sqrt{-g} \left[\partial^a (g^{ce} \delta g_{ae}) - \partial^c (g^{ab} \delta g_{ab}) \right] \\ &= \partial_c f'(R) \sqrt{-g} \left[\partial^a (g^{cb} \delta g_{ab}) - \partial^c (g^{ab} \delta g_{ab}) \right] \end{aligned}$$

que a menos de derivadas totais fica

$$\sqrt{-g} f'(R) g^{ab} \delta R_{ab} = -g^{cb} \delta g_{ab} \partial^a [\sqrt{-g} \partial_c f'(R)] + g^{ab} \delta g_{ab} \partial^c [\sqrt{-g} \partial_c f'(R)]$$

como $g^{ab} \delta g_{bc} = -g_{bc} \delta g^{ab}$,

$$\sqrt{-g} f'(R) g^{ab} \delta R_{ab} = \{g_{cb} \partial_a \partial^c [\sqrt{-g} f'(R)] - g_{ab} \partial^c \partial_c [\sqrt{-g} f'(R)]\} \delta g^{ab}$$

Então na acção total temos a equação de Einstein modificada

$$\sqrt{-g} \left(f'(R) R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) \right) - g_{cb} \partial_a \partial^c [\sqrt{-g} f'(R)] + g_{ab} \partial^c \partial_c [\sqrt{-g} f'(R)] = 0$$

Como para coordenadas geodésicas $\partial_a \sqrt{-g} = \nabla_a \sqrt{-g} = 0$,

$$f'(R) R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) + (g_{ab} \square - \nabla_a \nabla_b) f'(R) = 0$$

Podemos facilmente incluir o tensor energia-momento para a matéria

$$f'(R) R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} f(R) + (g_{ab} \square - \nabla_a \nabla_b) f'(R) = 8\pi G T_{ab}^{\text{materia}}$$

ou então escrever em termos de um tensor energia-momento efectivo para a curvatura

$$R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi G \left(T_{ab}^{\text{curvatura}} + \frac{1}{f'(R)} T_{ab}^{\text{materia}} \right)$$

onde

$$T_{ab}^{\text{curvatura}} \equiv \frac{1}{8\pi G f'(R)} \left[(\nabla_a \nabla_b - g_{ab} \square) f'(R) + \frac{1}{2} g_{ab} (f(R) - f'(R) R) \right]$$

58 Teorias de $f(R)$ no formalismo de Palatini

[T. Sotiriou cap. 3.4]

As teorias $f(R)$ são uma extensão da teoria da relatividade geral onde se considera uma função do escalar de Ricci na ação. No formalismo de Palatini, trata-se a métrica e as conexões de forma separada como variáveis dinâmicas independentes. Partimos da ação

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(\tilde{R}) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m$$

com um Lagrangiano gravitacional dependente de $f(\tilde{R})$, em que $\tilde{R} = g^{ab} \tilde{R}_{ab}$ e \tilde{R}_{ab} é o tensor de Ricci construído para uma conexão independente, e uma ação na matéria independente da conexão. Pelo princípio variacional

$$\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) = \frac{1}{16\pi G} \left(\sqrt{-g} \delta f(\tilde{R}) + \delta \sqrt{-g} f(\tilde{R}) \right) + \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) = 0$$

ou seja

$$\frac{1}{16\pi G} \left(\sqrt{-g} f'(\tilde{R}) \tilde{R}_{ab} \delta g^{ab} + \sqrt{-g} f'(\tilde{R}) g^{ab} \delta \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} f(\tilde{R}) g_{ab} \delta g^{ab} \right) + \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) = 0$$

e usando a definição de tensor energia-momento temos

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{ab}}$$

ficamos com

$$\sqrt{-g} \left(f'(\tilde{R}) \tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2} f(\tilde{R}) g_{ab} - 8\pi G T_{ab} \right) \delta g^{ab} + \sqrt{-g} f'(\tilde{R}) g^{ab} \delta \tilde{R}_{ab} = 0 \quad (58.1)$$

Como as conexões não são definidas no formalismo de Palatini, não se sabe se \tilde{R}_{ab} é simétrico. No entanto, pode ser escrito com uma parte simétrica e outra anti-simétrica, $\tilde{R}_{ab} = \tilde{R}_{(ab)} + \tilde{R}_{[ab]}$. Assim, para o primeiro termo da última equação escrevemos

$$\sqrt{-g} f'(\tilde{R}) \tilde{R}_{ab} \delta g^{ab} = \sqrt{-g} f'(\tilde{R}) \left(\tilde{R}_{(ab)} + \tilde{R}_{[ab]} \right) \delta g^{ab}$$

Como g^{ab} é simétrico, $\tilde{R}_{[ab]} \delta g^{ab} = 0$, e então

$$\sqrt{-g} f'(\tilde{R}) \tilde{R}_{ab} \delta g^{ab} = \sqrt{-g} f'(\tilde{R}) \tilde{R}_{(ab)} \delta g^{ab}$$

Substituindo esta relação na anterior, do cálculo variacional em relação à métrica g^{ab} , obtemos a equação

$$f'(\tilde{R}) \tilde{R}_{(ab)} - \frac{1}{2} f(\tilde{R}) g_{ab} = 8\pi G T_{ab} \quad (58.2)$$

que permite generalizar as equações de campo de Einstein-Hilbert. Fazendo ainda o traço desta equação, vem

$$f'(\tilde{R}) \tilde{R} - 2f(\tilde{R}) = 8\pi G T \quad (58.3)$$

Agora vamos aplicar o método variacional em relação a Γ_{bc}^a , correspondente ao último termo da equação de campo (58.1). Primeiro, usando a identidade de Palatini,

$$\delta\tilde{R}_{ab} = \bar{\nabla}_c(\delta\Gamma_{ab}^c) - \bar{\nabla}_b(\delta\Gamma_{ac}^c)$$

em que $\bar{\nabla}_c$ corresponde à derivada covariante definida com a conexão independente. Temos

$$\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\delta\tilde{R}_{ab} = \sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}[\bar{\nabla}_c(\delta\Gamma_{ab}^c) - \bar{\nabla}_b(\delta\Gamma_{ac}^c)]$$

Usando a definição de derivada covariante do produto, temos que

$$\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\bar{\nabla}_c(\delta\Gamma_{ab}^c) = \bar{\nabla}_c\left[\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c\right] - \bar{\nabla}_c\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\right)\delta\Gamma_{ab}^c$$

Fazendo o mesmo para o segundo termo temos

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\delta\tilde{R}_{ab} &= \bar{\nabla}_c\left[\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\delta\Gamma_{ab}^c\right] - \bar{\nabla}_b\left[\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\delta\Gamma_{ac}^c\right] \\ &\quad - \bar{\nabla}_c\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\right)\delta\Gamma_{ab}^c + \bar{\nabla}_b\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\right)\delta\Gamma_{ac}^c\end{aligned}$$

Os dois primeiros termos são derivadas totais e por isso a sua contribuição na acção é nula, pelo que resulta

$$\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\delta\tilde{R}_{ab} = -\bar{\nabla}_c\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\right)\delta\Gamma_{ab}^c + \bar{\nabla}_b\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\right)\delta\Gamma_{ac}^c$$

Fazendo, no segundo termo, o índice mudo $b \rightarrow d$ e $\delta\Gamma_{ac}^c = \delta_c^b\delta\Gamma_{ab}^c$

$$\begin{aligned}\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\delta\tilde{R}_{ab} &= -\bar{\nabla}_c\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\right)\delta\Gamma_{ab}^c + \bar{\nabla}_d\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ad}\right)\delta_c^b\delta\Gamma_{ab}^c \\ &= \left[-\bar{\nabla}_c\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\right) + \bar{\nabla}_d\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ad}\right)\delta_c^b\right]\delta\Gamma_{ab}^c\end{aligned}$$

Assim, o cálculo variacional em relação às conexões dá

$$-\bar{\nabla}_c\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\right) + \bar{\nabla}_d\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{d(a)}\right)\delta_c^{b)} = 0 \quad (58.4)$$

onde se usou que a parte anti-simétrica do segundo termo, multiplicada por $\delta\Gamma_{ab}^c$, que é simétrico porque não estamos a considerar torção, se anula, i.e.,

$$\bar{\nabla}_d\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{d[a}]\right)\delta_c^{b]}\delta\Gamma_{ab}^c = 0$$

Contraindo $b = c$ em (58.4) obtém-se que

$$\bar{\nabla}_d\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{da}\right) = 0$$

e consequentemente

$$\bar{\nabla}_c\left(\sqrt{-g}f'(\tilde{R})g^{ab}\right) = 0 \quad (58.5)$$

Definindo uma métrica \tilde{g}_{ab} conforme a g_{ab} tal que

$$\tilde{g}_{ab} = f'(\tilde{R})g_{ab}$$

e a sua inversa \tilde{g}^{ab} tal que

$$\tilde{g}^{ab} = \frac{1}{f'(\tilde{R})} g^{ab}$$

e sendo $\tilde{g} = \det(\tilde{g}_{ab})$ e $g = \det(g_{ab})$, então $\tilde{g} = g(f'(\tilde{R}))^4$. Substituindo na equação (58.5), obtém-se:

$$\bar{\nabla}_c \left(\sqrt{-\tilde{g}} f'(\tilde{R}) g^{ab} \right) = \bar{\nabla}_c \left(\frac{\sqrt{-\tilde{g}}}{(f'(\tilde{R}))^2} f'(\tilde{R}) f'(\tilde{R}) \tilde{g}^{ab} \right) = \bar{\nabla}_c \left(\sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{ab} \right) = 0$$

O que significa que as conexões Γ_{ab}^c são as conexões de Levi-Civita para a métrica \tilde{g}_{ab} , ou seja,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab}^c &= \tilde{g}^{cd} (\partial_a \tilde{g}_{bd} + \partial_b \tilde{g}_{ad} - \partial_d \tilde{g}_{ab}) \\ &= \frac{1}{f'(\tilde{R})} g^{cd} [\partial_a (f'(\tilde{R}) g_{bd}) + \partial_b (f'(\tilde{R}) g_{ad}) - \partial_d (f'(\tilde{R}) g_{ab})] \end{aligned}$$

Dado que a equação (58.3) pode ser resolvida para escrevermos \tilde{R} em termos de T . Isto quer dizer que os termos $f'(\tilde{R})$ na equação da conexão podem ser expressos como derivadas de T e podemos escrever as equações de campo em termos da métrica g_{ab} e dos campos de matéria sem precisarmos das conexões. Usando as relações para as transformações conformes, podemos escrever o tensor de Ricci como

$$\tilde{R}_{ab} = R_{ab} + \frac{3}{2} \frac{1}{(f'(\tilde{R}))^2} (\nabla_a f'(\tilde{R})) (\nabla_b f'(\tilde{R})) - \frac{1}{f'(\tilde{R})} \left[\nabla_a \nabla_b - \frac{1}{2} g_{ab} \square \right] f'(\tilde{R})$$

Calculando o traço de \tilde{R}_{ab} ,

$$\tilde{R} = R + \frac{3}{2} \frac{1}{(f'(\tilde{R}))^2} (\nabla_a f'(\tilde{R})) (\nabla^a f'(\tilde{R})) + \frac{3}{f'(\tilde{R})} \square f'(\tilde{R})$$

Substituindo estas expressões nas equações de campo (58.2) e usando a definição de tensor de Einstein, $G_{ab} = R_{ab} - g_{ab}R/2$, temos

$$\begin{aligned} G_{ab} &= \frac{8\pi G}{f'(\tilde{R})} T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \left(\tilde{R} - \frac{f(\tilde{R})}{f'(\tilde{R})} \right) + \frac{1}{f'(\tilde{R})} (\nabla_a \nabla_b - g_{ab} \square) f'(\tilde{R}) \\ &\quad - \frac{3}{2(f'(\tilde{R}))^2} \left[(\nabla_a f'(\tilde{R})) (\nabla_b f'(\tilde{R})) - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla f'(\tilde{R}))^2 \right] \end{aligned}$$

Se $f(\tilde{R}) = \tilde{R}$, a teoria reduz-se à Relatividade Geral. Por outro lado, para campos de matéria em que $T = 0$, no vácuo, e assumindo que $\tilde{R} = \tilde{R}(T)$, então \tilde{R} e, consequentemente, $f(\tilde{R})$ e $f'(\tilde{R})$ são constantes e a teoria reduz-se à Relatividade Geral com uma constante cosmológica

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left(\tilde{R}_0 - \frac{f(\tilde{R}_0)}{f'(\tilde{R}_0)} \right) = \frac{\tilde{R}_0}{4}$$

onde se usou (58.3), e uma constante de acoplamento modificada, $G_{\text{eff}} = G/f'(\tilde{R}_0)$.

59 Teorias escalares-tensoriais

A acção destas teorias é dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}f(\varphi, R) - \frac{1}{2}\zeta(\varphi)\partial^a\varphi\partial_a\varphi \right] + S_m(g_{ab}, \Psi_m)$$

onde $f(R)$ corresponde à escolha $f(\varphi, R) = f(R)$ e $\zeta(\varphi) = 0$. Aqui, Ψ_m são campos de matéria.

Se reescrevermos esta teoria com as definições $\phi = \phi(\varphi)$, tal que,

$$\begin{aligned} f(\varphi, R) &= F(\phi)R - 2U(\phi) \\ F(\phi) &= e^{-2Q\phi} \\ \zeta(\phi) &= (1 - 6Q^2)F \left(\frac{d\phi}{d\varphi} \right)^2 \end{aligned}$$

temos a acção

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}F(\phi)R - \frac{1}{2}(1 - 6Q^2)F(\phi)\partial^a\phi\partial_a\phi - U(\phi) \right] + S_m(g_{ab}, \Psi_m)$$

Podemos ainda tomar a definição $\psi = F(\phi) = e^{-2Q\phi}$, ou $\phi = -\ln\psi/2Q$ e ficamos com

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}\psi R - \frac{\omega_{BD}}{2\psi}\partial^a\psi\partial_a\psi - U(\psi) \right] + S_m(g_{ab}, \Psi_m)$$

que é a chamada teoria de Brans-Dicke, com parâmetro ω_{BD} definido por

$$3 + 2\omega_{BD} = \frac{1}{2Q^2}$$

Na relatividade geral, $Q = 0$, e $\omega_{BD} = \infty$. Em teorias $f(R)$, $Q^2 = 1/6$, e então, $\omega_{BD} = 0$. Acontece que os constrangimentos dos testes do sistema solar impõem $\omega_{BD} > 40000$, o que põe as teorias em aparente dificuldade. Existe todavia um mecanismo chamado, *camaleão*, que esconde os efeitos da teoria para objectos de grande densidade contornando assim os constrangimentos do sistema solar.

60 O Lagrangiano de Horndeski

Esta é uma generalização das teorias escalares-tensoriais. É a teoria mais geral com um campo escalar, ϕ , que em quatro dimensões leva a equações do movimento de segunda ordem. Ou seja, que evita instabilidades nas equações. Foi encontrado por Horndeski em 1975, e redescoberto por Deffayet et al. em 2011. Inclui os modelos que já encontrámos, e ainda outros como k-essence e Galileon. O Lagrangiano escreve-se como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi G}R + \sum_i \mathcal{L}_i + \mathcal{L}_m$$

onde os termos individuais são

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= K(\phi, X) \\ \mathcal{L}_3 &= -G_3(\phi, X)\square\phi \\ \mathcal{L}_4 &= G_4(\phi, X)R + G_{4,X}[(\square\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi)] \\ \mathcal{L}_5 &= G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) - \\ &\quad \frac{1}{6}G_{5,X}[(\square\phi)^3 - 3(\square\phi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\phi) + \\ &\quad 2(\nabla^\mu\nabla_\alpha\phi)(\nabla^\alpha\nabla_\beta\phi)(\nabla^\beta\nabla_\mu\phi)]\end{aligned}$$

As funções $K(\phi, X)$, $G_3(\phi, X)$, $G_4(\phi, X)$ e $G_5(\phi, X)$ são à partida arbitrárias. Mas o evento de fusão de estrelas de neutrões que envolveu uma contrapartida no óptico coloca a velocidade dos fotões e a velocidade das ondas gravitacionais essencialmente idêntica, ou seja, a velocidade da luz, e consequentemente as funções são tais que $G_5 = 0$, $G_{4,X} = 0$, o que limita severamente este Lagrangiano.



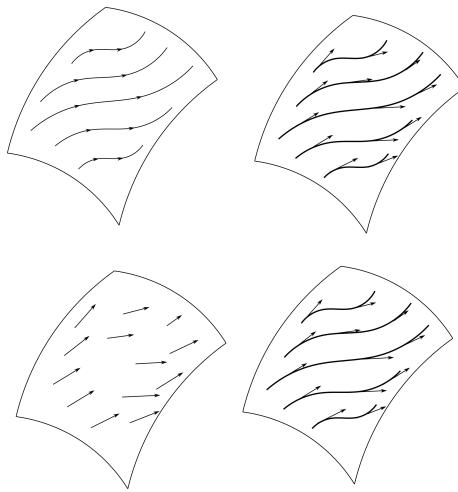
61 Derivada de Lie

[D'Inverno, cap. 6.2]

Vamos considerar um conjunto de curvas de forma que apenas uma curva passa por cada um dos pontos do espaço-tempo onde residem. Podemos considerar um vetor $X^a(x)$ tangente a cada ponto tal que

$$X^a(x(\lambda)) = \frac{dx^a}{d\lambda}$$

Reciprocamente, podemos considerar que no espaço-tempo está definido o campo vectorial X^a e com ele contruímos, usando a equação diferencial acima para construir um conjunto de curvas.



Vamos agora definir uma derivada de um vetor V^b usando o campo vectorial X^a . Vamos definir uma derivada direccional ou derivada de Lie que corresponde à mudança de V^b vista por um observador que vai de P com coordenada x^a para Q com coordenada $\tilde{x}^a = x^a + X^a d\lambda$. A isto chama-se "arrastar" o vetor V^b .



Então temos que

$$\frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} = \delta_b^a + \partial_b X^a d\lambda$$

Temos da lei de transformação de um vector contravariante que

$$\begin{aligned}\tilde{V}^a(\tilde{x}) &= \frac{\partial \tilde{x}^c}{\partial x^b} V^b(x) \\ &= (\delta_b^a + \partial_b X^a d\lambda) V^b(x) \\ &= V^a(x) + \partial_b X^a V^b d\lambda\end{aligned}$$

E usando a série de Taylor temos ainda que

$$\begin{aligned}V^a(\tilde{x}) &= V^a(x) + \frac{\partial V^a}{\partial \lambda} d\lambda \\ &= V^a(x) + \partial_b V^a X^b d\lambda\end{aligned}$$

ou seja,

$$V^a(x) = V^a(\tilde{x}) - \partial_b V^a X^b d\lambda$$

e então substituindo em $\tilde{V}^a(\tilde{x})$, temos

$$\tilde{V}^a(\tilde{x}) = V^a(x) - \partial_b V^a X^b d\lambda + \partial_b X^a V^b d\lambda$$

Definindo a derivada de Lie de V^a em relação a X^b como

$$\mathcal{L}_X V^a \equiv \lim_{d\lambda \rightarrow 0} \frac{V^a(\tilde{x}) - \tilde{V}^a(\tilde{x})}{d\lambda}$$

resulta

$$\mathcal{L}_X V^a = X^b \partial_b V^a - V^b \partial_b X^a$$

que não é uma expressão covariante, mas mostra-se facilmente que é equivalente a

$$\boxed{\mathcal{L}_X V^a = X^b \nabla_b V^a - V^b \nabla_b X^a}$$

e na verdade, isto aplica-se sempre na derivada de Lie: as derivadas parciais podem ser substituídas por derivadas covariantes.

A derivada de Lie tem as seguintes propriedades:

1. A derivada de Lie de um tensor ainda é um tensor do mesmo tipo;
2. É linear, ou seja,

$$\mathcal{L}_X(\lambda Y^a + \mu Z^a) = \lambda \mathcal{L}_X Y^a + \mu \mathcal{L}_X Z^a$$

3. Satisfaz a regra de Leibniz

$$\mathcal{L}_X(Y^a Z^b) = Z^b \mathcal{L}_X Y^a + Y^a \mathcal{L}_X Z^b$$

4. Comuta com a contração de tensores, i.e.,

$$\mathcal{L}_X(Y^a Z_a) = Z_a \mathcal{L}_X Y^a + Y^a \mathcal{L}_X Z_a$$

5. Para uma função escalar

$$\mathcal{L}_X f = \frac{df}{d\lambda} = X^a \partial_a f$$

6. Para um vector covariante temos

$$\mathcal{L}_X Y_a = X^b \nabla_b Y_a + Y_b \nabla_a X^b$$

7. E então podemos generalizar para um tensor arbitrário

$$\mathcal{L}_X T_{b...}^{a...} = X^c \nabla_c T_{b...}^{a...} - T_{b...}^{c...} \nabla_c X^a - \dots + T_{c...}^{a...} \nabla_b X^c + \dots$$

62 Vectores de Killing

Diz-se que um tensor $T_{b\dots}^a$ é transportado de Lie ao longo do vector tangente X^a à curva γ se $\mathcal{L}_X T_{b\dots}^a = 0$. Suponhamos que se escolhem coordenadas tal que

$$X^a = (0, \dots, 1, \dots, 0) = \delta_i^a$$

tal que $\partial_b X^a = 0$. E ficamos com

$$\mathcal{L}_X T_{b\dots}^a = X^c \partial_c T_{b\dots}^a = \delta_i^c \partial_c T_{b\dots}^a = \partial_i T_{b\dots}^a = 0$$

O que significa que nestas coordenadas o tensor $T_{b\dots}^a$ é constante ao ser arrastado ao longo da curva γ . Vemos assim que a derivada de Lie nos dá uma forma covariante (i.e., independente das coordenadas) de descrever simetrias de um tensor.

Admitamos agora que esse tensor é a própria métrica g_{ab} , e que há um vector ξ^a tal que,

$$\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$$

Então da definição de derivada de Lie temos

$$\xi^c \nabla_c g_{ab} + g_{cb} \nabla_a \xi^c + g_{ac} \nabla_b \xi^c = 0$$

e usando metricidade, resulta que

$$\boxed{\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0}$$

Esta é a chamada equação de Killing e o vector ξ^a é o vector de Killing e descreve uma simetria do espaço-tempo. Podemos obter uma descrição de todas as simetrias de uma métrica encontrando os seus vectores de Killing independentes e explorando as propriedades desses vectores.

Exemplo

Considere-se a métrica de Minkowski, $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ para a qual as conexões de métrica se anulam, $\Gamma_{bc}^a = 0$, a derivada covariante será então apenas a derivada parcial e a equação de Killing é dada por

$$\partial_b \xi_a + \partial_a \xi_b = 0$$

e se voltarmos a derivar, ficamos com

$$\partial_c \partial_b \xi_a + \partial_c \partial_a \xi_b = 0$$

Comutando os índices $a \rightarrow c$, $c \rightarrow b$, $b \rightarrow a$ temos a equação equivalente

$$\partial_b \partial_a \xi_c + \partial_b \partial_c \xi_a = 0$$

e com $c \rightarrow b$, $b \rightarrow a$, $a \rightarrow c$, temos alternativamente

$$\partial_a \partial_c \xi_b + \partial_a \partial_b \xi_c = 0$$

Somando as duas primeiras equações e subtraindo a última temos

$$\begin{aligned}\partial_c \partial_b \xi_a + \partial_c \partial_a \xi_b + \partial_b \partial_a \xi_c + \partial_b \partial_c \xi_a - \partial_a \partial_c \xi_b - \partial_a \partial_b \xi_c &= 0 \\ \partial_c \partial_b \xi_a &= 0\end{aligned}$$

Obtém-se então que ξ_a linear e podemos escrever

$$\xi_a = c_a + \epsilon_{ab} x^b$$

onde c_a e ϵ_{ab} são constantes de integração. Substituindo nas equações de Killing temos que $\epsilon_{ab} = -\epsilon_{ba}$, ou que ϵ_{ab} é anti-simétrico. Em forma matricial,

$$(\epsilon_{ab}) = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{01} & \epsilon_{02} & \epsilon_{03} \\ -\epsilon_{01} & 0 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ -\epsilon_{02} & -\epsilon_{12} & 0 & \epsilon_{23} \\ -\epsilon_{03} & -\epsilon_{13} & -\epsilon_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

ou seja, tem 6 componentes independentes, ou 6 graus de liberdade. E para c_a temos quatro possibilidades diferentes. Temos portanto um conjunto de 10 vectores independentes ξ_a . Para obter todos os vectores de Killing, consideremos cada uma destas constantes c_a e ϵ_{ab} a que atribuímos o valor de 1 uma a uma e 0 às restantes componentes. Primeiro escolhemos $\epsilon_{ab} = 0$ e $c_a = 1$, tal que temos $\xi_a = c_a$, o que leva às seguintes possibilidades.

$$\begin{aligned}T_a &= (1, 0, 0, 0) \\ X_a &= (0, 1, 0, 0) \\ Y_a &= (0, 0, 1, 0) \\ Z_a &= (0, 0, 0, 1)\end{aligned}$$

Escreve-se $X = X^a \partial_a$ onde $\{\partial_a\}$, são a base de um espaço vectorial. Então reconhecemos os vectores geradores das translações

$$T = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X = \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z},$$

Façamos agora $\epsilon_{ij} = 1 = -\epsilon_{ji}$ e todos os outros iguais a zero. Temos então $\xi_i = \epsilon_{ij} x^j$. Com $\epsilon_{12} = -1$, temos

$$(J_z)_a = (0, -y, x, 0)$$

com $\epsilon_{13} = 1$ temos

$$(J_y)_a = (0, z, 0, -x)$$

e com $\epsilon_{23} = -1$, resulta

$$(J_x)_a = (0, 0, -z, y)$$

que então levam aos geradores das rotações respectivamente

$$\begin{aligned} J_z &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \\ J_y &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \\ J_x &= y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

E para finalizar temos ainda os casos $\epsilon_{0i} = -1 = \epsilon_{i0}$, e ficamos com

$$\begin{aligned} (B_x)_a &= (-x, t, 0, 0) \\ (B_y)_a &= (-y, 0, t, 0) \\ (B_z)_a &= (-z, 0, 0, t) \end{aligned}$$

ou seja, os geradores dos *boosts* segundo cada um dos eixos espaciais são

$$\begin{aligned} B_x &= -x \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x} \\ B_y &= -y \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial y} \\ B_z &= -z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Note-se que

$$\begin{aligned} [J_x, J_y] &= (y \partial_z - z \partial_y)(z \partial_x - x \partial_z) - (z \partial_x - x \partial_z)(y \partial_z - z \partial_y) \\ &= y \partial_x - x \partial_y = -J_z \end{aligned}$$

De igual forma se mostra que

$$[J_x, J_z] = J_y, \quad [J_y, J_z] = -J_x$$

De uma forma geral, quando um espaço-tempo tem três vectores de Killing J_1, J_2, J_3 , que satisfazem a relação

$$[J_i, J_j] = -\epsilon_{ij}^k J_k$$

diz-se que o espaço-tempo tem simetria esférica. Para Minkowski temos ainda que

$$[J_x, Y] = -Z, \quad [J_y, Z] = -X, \quad [J_z, X] = Y$$

De igual forma, dizemos que um espaço-tempo com três rotações J_1, J_2, J_3 e três translações π_1, π_2, π_3 , que satisfazem a relação

$$[J_i, \pi_j] = -\epsilon_{ij}^k \pi_k$$

diz-se que é homogéneo e isotrópico.

63 Soluções de Bianchi I no vazio

[Al-Haysah, Hasmani, International Journal of Computer Applications (0975 - 8887) Volume 177 - No.45, March 2020]

Vamos agora estudar uma classe de soluções espacialmente homogéneas e anisotrópicas, sendo usadas para descrever hiper-superfícies de curvatura plana, isto é, com $k = 0$. As soluções de Kasner são um caso particular das soluções de Bianchi I, uma vez que consideramos soluções no vácuo, isto é, com tensor energia-momento, $T_{ab} = 0$. As soluções de Bianchi I no vácuo têm a seguinte métrica a elas associada

$$ds^2 = -dt^2 + \sum_{i=1}^3 a_i(t)^2 dx_i^2$$

onde $a_i(t)$ com $i = 1, 2, 3$, são fatores de escala correspondentes a cada direção espacial. Note-se que, se $a_1 = a_2 = a_3 = a$, esta métrica transforma-se na métrica de FLRW com $k = 0$. Sejam $H_i = \dot{a}_i/a_i$ e $\theta = H_1 + H_2 + H_3$, com H_i as taxas de Hubble nas três direções espaciais. As componentes do tensor de Ricci que não se anulam são

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\dot{\theta} - (H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) \\ R_{11} &= a_1^2(\dot{H}_1 + \theta H_1) \\ R_{22} &= a_2^2(\dot{H}_2 + \theta H_2) \\ R_{33} &= a_3^2(\dot{H}_3 + \theta H_3) \end{aligned}$$

O escalar de Ricci fica portanto,

$$\begin{aligned} R = g^{ab}R_{ab} &= \dot{\theta} + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + (H_1 + H_2 + H_3)\theta \\ &= 2\dot{\theta} + 2(H_1^2 + H_2^2 + H_3^2) + 2(H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3) \end{aligned}$$

Usando a componente (00) das equações de Einstein, obtemos que

$$\begin{aligned} R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R &= 0 \\ H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_1 H_3 &= 0 \end{aligned}$$

Como consequência, da definição de θ obtemos que

$$\theta^2 = (H_1 + H_2 + H_3)^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$$

Assim, substituindo em R_{00} , obtém-se

$$R_{00} = -\dot{\theta} - \theta^2$$

Se $\theta = 0$, significa que $H_1 = H_2 = H_3 = 0$, ou seja, a_1, a_2, a_3 são constantes. Daqui obtemos o espaço-tempo de *Minkowski*. Se por outro lado $\theta \neq 0$, da relação $R_{00} = 0$, dá-nos que

$$\theta = \frac{1}{t}$$

Onde se fez uma escolha conveniente da origem $t_0 = 0$. Assim, de $R_{11} = 0$, obtemos

$$H_1 = \frac{p_1}{t}$$

sendo p_1 uma constante. Do mesmo modo para $R_{22} = 0$ e $R_{33} = 0$, obtemos, respetivamente,

$$H_2 = \frac{p_2}{t}, \quad H_3 = \frac{p_3}{t}$$

Das expressões para θ e θ^2 implica que

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{t} = H_1 + H_2 + H_3 = \frac{p_1}{t} + \frac{p_2}{t} + \frac{p_3}{t} \\ \theta^2 &= \frac{1}{t^2} = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = \frac{p_1^2}{t^2} + \frac{p_2^2}{t^2} + \frac{p_3^2}{t^2}\end{aligned}$$

e resulta que

$$\sum_{i=1}^3 p_i = \sum_{i=1}^3 p_i^2 = 1$$

Estas são as chamadas relações de Kasner. De $H_1 = \dot{a}_1/a_1$, vem que $a_1 \propto t^{p_1}$ e o mesmo acontece para a_2 e a_3 . Podemos escrever a métrica de Kasner como

$$ds^2 = dt^2 - \sum_{i=1}^3 t^{2p_i} dx_i^2$$

A métrica de Kasner é uma solução para as equações de Einstein no vácuo, pelo que os tensores de Ricci e o escalar de Ricci anulam-se para qualquer escolha de expoente p_i , desde que satisfaçam as condições de Kasner (hiper-superfície plana no vazio, homogénea e anisotrópica). O tensor de Riemann anula-se se e só um dos $p_i = 1$, com $i = 1, 2, 3$ e todos os outros se anulam, e neste caso o espaço é plano.

References

- [1] R. A. D'Inverno, Introducing Einstein's relativity. 1992.
- [2] J. B. Hartle, Gravity : an introduction to Einstein's general relativity. 2003.
- [3] A. Barbosa Henriques, Uma Introdução à Relatividade Geral. 2009.
- [4] P. Ferreira,
Lectures on General Relativity and Cosmology, <http://www-astro.physics.ox.ac.uk/pgf/B3..pdf>.
2006.
- [5] G. Gibbons,
Part II General relativity, <http://www.damtp.cam.ac.uk/research/gr/members/gibbons/partiipublic-2006.pdf>.
2006.