1. Формула Эйлера

Для любой многогранной картинки на поверхности сферы:

$$\text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2,$$

где В — число вершин, Р — число ребер, а Г — число граней.

Доказательство проводится следующим методом. Рассматривается произвольная картинка, которая состоит из плоских лоскутков. Метод доказательства заключается в упрощении картинки и одновременном слежением за выражением $\text{В} - \text{Р} + \text{Г}$.

Один из лоскутков берется за основу (рис. 1). Существует два способа упростить картинку. Первый заключается в том, что нужно стереть одну его вершину вместе со всеми исходящими из нее ребрами (рис. 2).

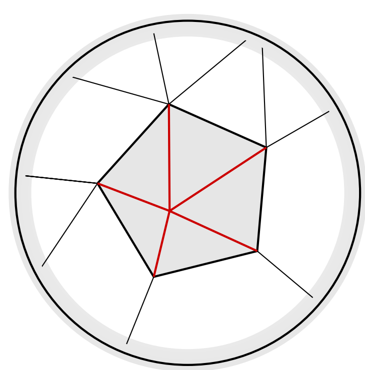

Рис. 1

В результате теряется 1 вершина и 5 ребер:

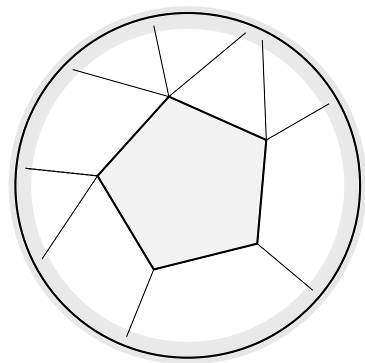

Рис. 2

Так как из 5 граней получилась одна большая грань, количество граней уменьшилось на 4.

$$(\text{В}-1)-(\text{Р}-\mathbf{5})+(\Gamma-\mathbf{4})=\text{В}-\text{Р}+\Gamma.$$

Выражение не изменилось.

Второй способ упрощения картинки заключается в стирании одной из границ:

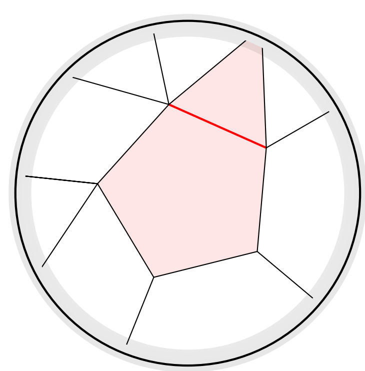

Рис. 3

Количество вершин в таком случае не меняется, количество ребер уменьшилось на 1, количество граней — тоже на 1:

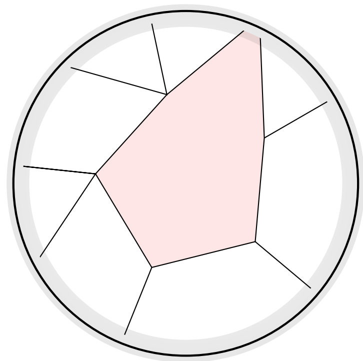

Рис. 4

В этом случае выражение $В - Р + Г$ также остается неизменным.

Продолжаем упрощение картинки. Важно производить упрощение картинки таким образом, чтобы она всегда состояла из нескольких плоских лоскутков. Выражение $В - Р + Г$ при этом не будет меняться.

Таким образом, для любой многогранной картинки на поверхности сферы, это выражение будет совпадать с выражением в случае, если эту картинку последовательно упрощать до предела. После такого упрощения картинка будет представлять из себя две грани, которые в качестве своей границы имеют один и тот же многогранник:

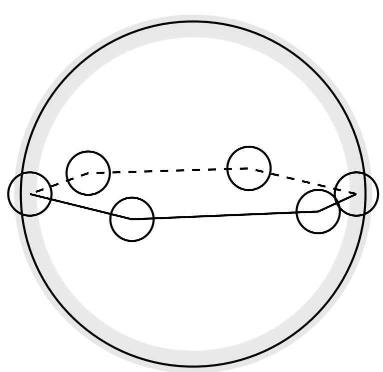

Рис. 5

В этом случае на картинке будет две грани, а количество вершин и ребер будет совпадать. Это связано с тем, что у любого многоугольника количество ребер в точности совпадает с количеством вершин.

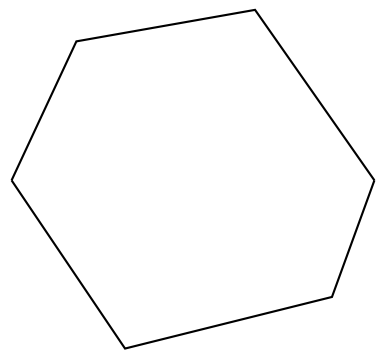

Рис. 6. Пример произвольного многогранника.

Для упрощенной картинки очевидно, что $\text{В} - \text{Р} + \Gamma = 2$, а следовательно это же выражение верно и для исходной сколь угодно сложной картины. Таким образом, можно сказать, что был найден дискретный инвариант сферы. Для тора этот же инвариант будет равен 0, что доказывается тем же методом.