Teoría y práctica de modelos DSGE
Universidad de los Andes
Taller No. 1
2009:2

August 14, 2009

1 Algebra matricial

1. Crear la siguiente matriz en Matlab
   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 6.5 & -9 \\ 1 & -4.67 & 4 \\ 7.6 & 2 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$
2. Crear una matriz cuadrada $\mathbf{B}$ de orden 3 compuesta por números aleatorios, cada uno de ellos, proveniente de la siguiente distribución de probabilidad:
   $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ con $\mu = 5$ y $\sigma^2 = 9$
3. Empleando las matrices creadas anteriormente:
   (a) Hallar la transpuesta de cada matriz
   (b) Hallar la inversa de cada matriz
   (c) Hallar los valores y vectores propios de cada matriz. ¿Son definidas positiva, negativa o indefinida?
   (d) Realizar las siguientes operaciones con cada matriz
      i. $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
      ii. $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
      iii. $\mathbf{B}/\mathbf{A}$
   (e) Obtener los siguientes elementos de cada una de las matrices
      i. la segunda columna de la matriz $\mathbf{A}$
      ii. la tercera fila de la matriz $\mathbf{B}$
      iii. el elemento $(2, 2)$ de $\mathbf{A}^{-1}$
      iv. el elemento $(3, 1)$ de la matriz $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$

2 Mínimos cuadrados ordinarios

Considere el problema de estimar una función de producción que expresa la relación entre el nivel de producto de un bien y la cantidad de insumos empleados en el proceso productivo. Usted cuenta con la información de la Table 1 on page 2 (Nota: Los puntos en que se requieran hacer cálculos puede usar el computador, Matlab, pero los resultados que obtenga deben ser puestos en un documento que es lo que se debe entregar):

Table 1: Muestra de insumo-producto

Insumo (x_i)	Producto (y_i)
1	0.58
2	1.10
3	1.20
4	1.30
5	1.95
6	2.55
7	2.60
8	2.90
9	3.45
10	3.50
11	3.60
12	4.10
13	4.35
14	4.40
15	4.50

1. Supongamos que los datos pueden ser descritos por el modelo de regresión lineal $\mathbf{y} = \mathbf{x}_1\beta_1 + \mathbf{x}_2\beta_2 + \epsilon$, donde el vector aleatorio $\epsilon \sim \left(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I}_N\right)$ y $x_{1i} = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 15$. Construya la matriz $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ y el vector $\mathbf{X}'\mathbf{y}$ correspondiente a los datos y determine la inversa de $\mathbf{X}'\mathbf{X}$. Con estos resultados, use el estimador de mínimos cuadrados ordinarios para estimar β_1 y β_2.
2. De una interpretación económica de los parámetros estimados en el punto anterior.
3. Calcule $\hat{\epsilon} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ y use el estimador insesgado visto en clase para estimar el parámetro de la varianza de los errores.
4. Dada la estimación de σ^2 en el ejercicio anterior y $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ del ejercicio 1, desarrolle el estimador de la matriz de varianzas y covarianzas de $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$. Interprete los resultados.
5. Suponga que los datos pueden ser descritos por la forma funcional $y_i = e^{\beta_1} x_{2i}^{\beta_2} \epsilon_i$. Escriba el modelo en forma lineal y use el estimador de mínimos cuadrados ordinarios para estimar β_1 y β_2.
6. Use los resultados de los puntos 1 y 5 para graficar las respectivas funciones de producción. Para cada forma funcional, ¿cuál sería el nivel de producto que se obtendría a partir de 8 unidades de insumo? Estime el error de predicción.

3 Series de tiempo

Suponga una economía cuyo producto (y) se obtiene a partir de capital (k) y (n). La tecnología con que cuenta la economía establece que en cada momento del tiempo $y_t = k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$. El capital y el trabajo de esta economía siguen procesos autoregresivos y sufren choques exógenos y aleatorios cada 25 períodos (siendo el primer choque en el período 1, es decir, en el período 0 no hay choque). Las ecuaciones que rigen las sendas de capital y de trabajo son:

$$\begin{aligned} k_t &= \bar{k} + \rho_k k_{t-1} + \epsilon_t^k \\ n_t &= \bar{n} + \rho_n n_{t-1} + \epsilon_t^n \end{aligned}$$

Si en el momento inicial ($t = 0$) el nivel de capital (k_0) es igual a $\bar{k}$ y el nivel de trabajo (n_0) es igual a $\bar{n}$, genere y grafíque las sendas de producto, y_t, capital, k_t, y trabajo, n_t, para un lapso de 50 períodos. Recuerde que tanto ϵ_t^k como ϵ_t^n toman valores aleatorios cada 25 períodos (empezando en el primero) siguiendo la siguiente distribución: $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ con $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 4$, para los demás períodos, las variables toman el valor de cero.

Parámetro	Valor
α	$\frac{1}{3}$
$\bar{k}$	10
$\bar{n}$	15
ρ_k	$\frac{4}{5}$
ρ_n	$\frac{1}{2}$

4 Funciones

Nota: Los ejercicios son tomados del capitulo 4 del libro "Economía Matemática en Matlab" de Gómez et al. Les recomiendo revisarlo.

1. Dos funciones utilizadas con frecuencia en economía son la función CRRA (Constant Relative Risk Aversion) y CARA (Constant Absolute Risk Aversion), definidas como:

$$\begin{aligned} CRRA:\ U\left(c_t\right) &= \begin{cases} \frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} & \gamma > 0, \gamma \neq 1 \\ \ln c_t & \gamma = 1 \end{cases} \\ CARA:\ U\left(c_t\right) &= -\left(\frac{1}{\alpha}\right) e^{-\alpha c_t} \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

En estas funciones, el Coeficiente de Aversión Absoluta al Riesgo está dado por $-\frac{U''(c_t)}{U'(c_t)}$, y el de Aversión Relativa al Riesgo por $-\frac{U''(c_t)c_t}{U'(c_t)}$. Para cada función:

(a) Cálcule matemáticamente U' y U''

(b) Grafique las funciones U, U' y U'', con $\gamma = \alpha = 0.8$

(c) Grafique los coeficientes de aversión absoluta y relativa al riesgo, con los mismos valores de los parámetros

(d) Simule el comportamiento de U, U' y U'' para diferentes valores de γ, $\alpha \in (0,1]$. Interprete económicamente los cambios de la función a partir de la definición de los coeficientes de aversión al riesgo.

2. La función de elasticidad constante recibe este nombre, porque su elasticidad de sustitución $\left(\sigma = \frac{1}{1-\rho}\right)$ depende solo del parámetro ρ.

   (a) Construya la función CES de producción tal que dependa del capital, el trabajo y la elasticidad de sustitución (σ).

   (b) Por medio de simulaciones numéricas, determine los valores límite de σcon los que se obtienen las funciones lineal, mínimo y Cobb-Douglas. Interprete sus resultados a partir de la definición de σ y de la sustituibilidad entre los bienes.

5 Optimización

1. Considere el siguiente modelo no lineal:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 \exp(\beta_3 x_i) + \epsilon_i$$

   con $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ y $x_i \sim \mathcal{N}(-3,16)$

   (a) Genere una serie para ϵ y una para x con $n = 100$.

   (b) A partir de las series de ϵ y x, y asumiendo $\beta = [1,-2,3]$ genere una serie para y utilizando la especicación del modelo.

   (c) Estime β por máxima verosimilitud[1]

      i. Realice un archivo .m con la función de log-verosimilitud.

      ii. Utilizando la herramienta fminsearch obtenga el valor de β que maximiza la función de log-verosimilitud.

      iii. Realice un archivo con el gradiente de la función de log-verosimilitud.

      iv. Utilizando la herramienta fsolve obtenga el valor de que maximiza la función de verosimilitud.

2. Considere el siguiente modelo no lineal

$$y_i = \left[\alpha x_i^\beta + (1-\alpha) z_i^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}} + \epsilon_i$$

   con $\epsilon_i \sim 0\mathcal{N}(0,1)$, $x_i \sim \mathcal{N}(100,16)$ y $z_i \sim \mathcal{N}(10,2)$

   (a) Genere una serie para ϵ, una para x y una para z con $n = 100$.

   (b) A partir de las series de ϵ, x y z, y asumiendo $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.3$ genere una serie para y utilizando la especicación del modelo.

   (c) Estime α y β por máxima verosimilitud[2]

      i. Realice un archivo con la función de verosimilitud logarítimica.

      ii. Utilizando la herramienta fminsearch obtenga el valor de α y β que maximiza la función de verosimilitud.

[1] Utilice como valores iniciales $\beta = [1,-2,3]$

[2] Utilice como valores iniciales $\alpha = 0.5$ y $\beta = 0.3$