GILLIARD Tallulah

Licence 3 MIASHS

Avril 2016

Systèmes Dynamiques

Projet

►EXERCICE 1◄

On considère le système :

$$(P)\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=u(v-a)\\ \dfrac{dv}{dt}=v(b-u)\end{cases}$$

Où les paramètres a, b sont deux paramètres positifs constants.

1) Déterminer les états stationnaires à composantes positives ou nulles du système.

Déterminons les états stationnaires du système, c'est-à-dire les solutions de (P) lorsque u et v sont des solutions constantes. On a donc $u = U$ et $v = V$ avec U et V deux réels positifs ou nuls.

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=u(v-a)\\ \dfrac{dv}{dt}=v(b-u)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}U(V-a)=0\\ V(b-U)=0\end{cases}$$

► $U(V-a)=0 \quad \Leftrightarrow \quad U=0 \quad \text{ou} \quad V=a$

- Si $U = 0$ alors $V(b-0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad V=0 \qquad \rightarrow (U,V)=(0,0)$
  Donc $U = 0$ et $V = 0$ état stationnaire
- Si $V = a$ alors $a(b-U)=0 \quad \Leftrightarrow \quad U=b \qquad \rightarrow (U,V)=(b,a)$
  Donc $U = b$ et $V = a$ état stationnaire (a et b étant positifs ou nuls)

► $V(b-U)=0 \quad \Leftrightarrow \quad V=0 \quad \text{ou} \quad b-U=0$

- Si $V = 0$ alors $U = 0$ état stationnaire déjà trouvé
- Si $b - U = 0$ alors $U = b \quad \Leftrightarrow \quad b(V-a)=0 \;\Leftrightarrow\; V = a$ état stationnaire déjà trouvé

2) Etudier la stabilité locale de chaque état stationnaire.

$J(P)=\begin{pmatrix}v-a & u\\ -v & b-u\end{pmatrix}$

Module de stabilité = $\sup\{Re(\lambda_i)\}$ $\quad Re(-a)=a \quad Re(b)=b$ puisque positifs

En $(0;0)$

$\sup\{Re(-a); Re(b)\}=b>0$

$J(P,(0;0))=\begin{pmatrix}-a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$

Donc les valeurs sont $\lambda_1=-a$ et $\lambda_2=b$, l'orbite (0 ;0) du système (P) est localement stable si le module de stabilité de la Jacobienne de (P) en (0 ;0) est strictement positif. Donc ici, a et b sont strictement positifs et donc l'orbite stationnaire n'est pas stable.

Si $(a,b)=(0,0)$ les valeurs propres sont nulles et donc le système ne peut pas être décrit par des systèmes linéarisés.

En $(b;a)$

$J(P)(b;a)=\begin{pmatrix}0 & b\\ -a & 0\end{pmatrix}$

$\det(J(P)(b;a)-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda & b\\ -a & -\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+ab=0 \implies \lambda=i\sqrt{ab}$ ou $\lambda=-i\sqrt{ab}$

Or $Re(i\sqrt{ab})=0$ et $Re(-i\sqrt{ab})=0$ $\qquad$ ce n'est ni strictement négatif, ni strictement positif

Donc en $(b;a)$ on ne peut pas conclure.

3) Ce système admet-il des solutions périodiques ? Peut-on appliquer le Théorème de Hopf ou le Théorème de Bendixon-Dulac ?

Les solutions u et v sont périodiques si $u(t+h) = u(t)$ et $v(t+h') = v(t)$ avec h et h' les plus petits possibles.

Le système admet des solutions périodiques si u et v ont la même période en H_1,

$u(t+H)(v(t+H)-a) = u(t)(v(t)-a)$ et $v(t+H)\big(b-u(t+H)\big) = v(t)(b-u(t))$

Ce système admet des solutions périodiques c'est à dire des solutions qui sont représentées par des cycles linéaires si cette courbe fermée ne contient pas d'équilibre. Or il existe des solutions stationnaires, donc ce système n'as pas de solutions périodiques.

On ne peut pas appliquer le Théorème de Hopf car il n'y a pas de solutions périodiques.

Pour appliquer Bendixon-Dulac, il faudrait déterminer s'il existe une fonction B de classe C^1 telle que : $\frac{\partial}{\partial u}\big(Bu(v-a)\big) + \frac{\partial}{\partial v}(Bv(b-u)) > 0$. De plus pour appliquer Bendixon-Dulac, il faudrait que les solutions soient non periodiques, or ce n'est pas le cas, on ne peut pas appliquer ce théorème.

4) Etudier le système discret $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n(v_n - a_1)}$; $\boldsymbol{v_{n+1} = v_n(b_1 - u_n)}$. Où $\boldsymbol{a_1, b_1}$ sont deux paramètres constants. On précisera les points fixes ainsi que leur stabilité.

$u_{n+1} = u_n(v_n - a_1) \quad u_n(v_n - a_1) = 0 \Leftrightarrow u_n = 0 \text{ ou } v_n = a_1 + 1$

$v_{n+1} = v_n(b_1 - u_n) \quad v_n(b_1 - u_n) = 0 \Leftrightarrow v_n = 0 \text{ ou } u_n = b_1 - 1$

$v_n = 0$ et $u_n = 0$ point fixe $(u_n, v_n) = (0,0)$

$u_n = b_1$ et $v_n = a_1$ point fixe $(u_n, v_n) = (b_1, a_1)$

5) Quel lien existe-t-il entre le système continu et le système discret ?

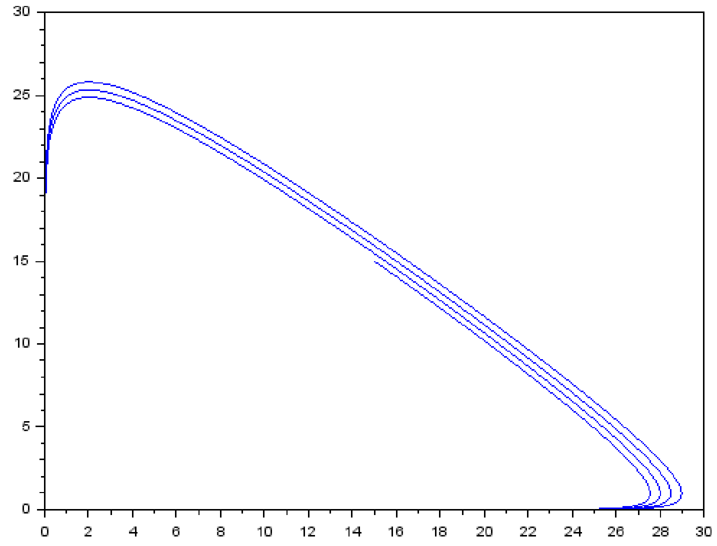
Les systèmes continus et discrets sont définis par les mêmes fonctions f_1 et f_2 (même endomorphisme)

6) En utilisant scilab, tracer quelques orbites du système dynamique pour des valeurs des paramètres que vous aurez choisis au préalable.

Valeurs #1 :

```
///// VARIABLES /////
a1=1
b1=2
U(1)=15
V(1)=15

T=50      // durée de la simulation
N=50000   // nombre de points voulus
dt=T/N    // pas

///// FONCTIONS & BOUCLES /////

for i=1:N
   U(i+1)=dt*(U(i)*(V(i)-a1))+U(i)
   V(i+1)=dt*(V(i)*(b1-U(i)))+V(i)
end

plot(U,V)
```

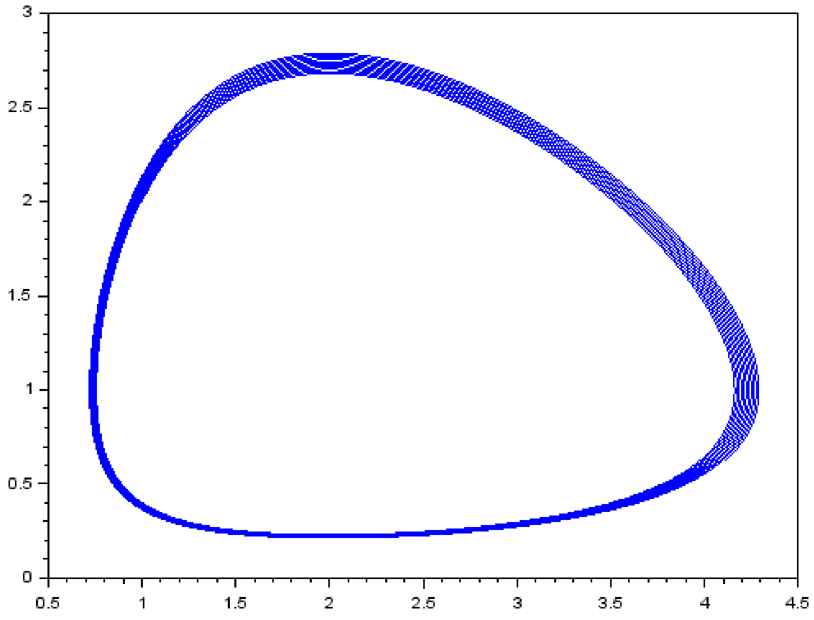
Graphique #1 :



Valeurs #2 :

```
///// VARIABLES /////
a1=1
b1=2
U(1)=15
V(1)=15

T=50      // durée de la simulation
N=50000   // nombre de points voulus
dt=T/N    // pas

///// FONCTIONS & BOUCLES /////

for i=1:N
   U(i+1)=dt*(U(i)*(V(i)-a1))+U(i)
   V(i+1)=dt*(V(i)*(b1-U(i)))+V(i)
end

plot(U,V)
```

Graphique #2 :



Valeurs #3 :

Graphique #3 :

►EXERCICE 2◄

On considère le système de FitzHugh-Nagumo sur $[0, +\infty[$

$$(\boldsymbol{S}) \begin{cases} \boldsymbol{v'(t) = \lambda v(v-a)(1-v) - \beta w} \\ \boldsymbol{w'(t) = b(v - \gamma w)} \\ \boldsymbol{v(0) = v_0, \ \ w(0) = \ v_0 \in [0,1]} \end{cases}$$

Où les paramètres $\boldsymbol{a, b, \lambda, \beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ sont tous positifs.

a) Que représente ce système.

Ce système représente l'évolution des ondes dans un système biologique.

v correspond au potentiel transmembranaire (capacité à traverser les cellules qui dépends du milieu)

w correspond à l'excitabilité de la cellule

b) Résoudre explicitement l'équation en v quand $\boldsymbol{\beta = 0}$

On a $v'(t) = \lambda v(v-a)(1-v) - \beta w$

Lorsque $\beta = 0$ l'équation devient $v'(t) = \lambda v(v-a)(1-v) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \lambda v(v-a)(1-v)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v(v-a)(1-v)} dv = \lambda dt$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(v-a)(1-v)} &= \frac{A}{v} + \frac{B}{(v-a)} + \frac{C}{(1-v)} \\ &= \frac{A(v-a)(1-v) + Bv(1-v) + Cv(v-a)}{v(v-a)(1-v)} \\ &= \frac{Av - Av^2 - aA + aAv + Bv - Bv^2 + Cv^2 - aCv}{v(v-a)(1-v)} \\ &= \frac{(-A - B + C)v^2 + (A + aA + B - aC)v - aA}{v(v-a)(1-v)} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -A - B + C = 0 \\ A + aA + B - aC = 0 \\ -aA = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-1}{a} \\ -B + C = \frac{-1}{a} \\ B - ac = \frac{1}{a} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-1}{a} \\ (1-a)C = 1 \\ B = C + \frac{1}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{-1}{a} \\ C = \frac{1}{1-a} \\ B = \frac{1}{1-a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a(1-a)} \end{cases}$$

L'équation devient :

$$\left(\frac{-1}{av} + \frac{1}{(1-a)(v-a)} + \frac{1}{a(1-a)(1-v)}\right) dv = \lambda dt$$

$$-\frac{1}{a}\ln|v| + \frac{1}{1-a}\ln|v-a| + \frac{1}{a(1-a)}\ln(1-v) = \lambda t + cte$$

$$-\ln v^{-\frac{1}{a}} + \ln(v-a)^{\frac{1}{1-a}} + \ln(1-v)^{\frac{1}{a(1-a)}} = \lambda t + cte$$

$$\ln \frac{(v-a)^{\frac{1}{1-a}}(1-v)^{\frac{1}{a(1-a)}}}{v^{\frac{1}{a}}} = \lambda t + cte$$

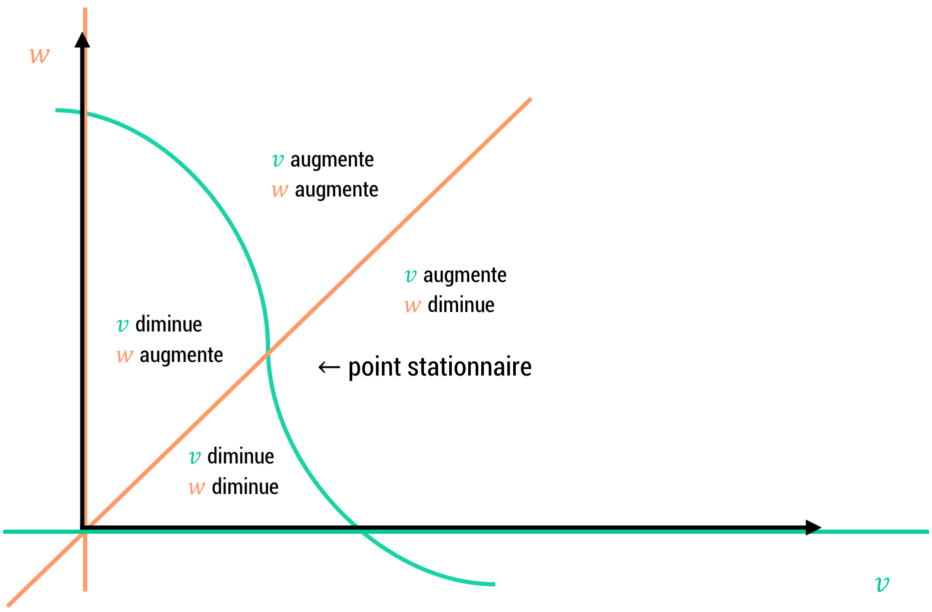
$$v^{-\frac{1}{a}}(v-a)^{\frac{1}{1-a}}(1-v) = e^{\lambda t+cte}$$
$$v^{-(1-a)}(v-a)^{a}(1-v) = e^{(\lambda t+cte)a(1-a)}$$
$$v^{a-1}(v-a)^{a}(1-v) = e^{(\lambda t+cte)a(1-a)}$$
$$\frac{v^{a}(v-a)^{a}(1-v)}{v} = e^{(\lambda t+cte)a(1-a)}$$

c) Tracer les isoclines du modèle.

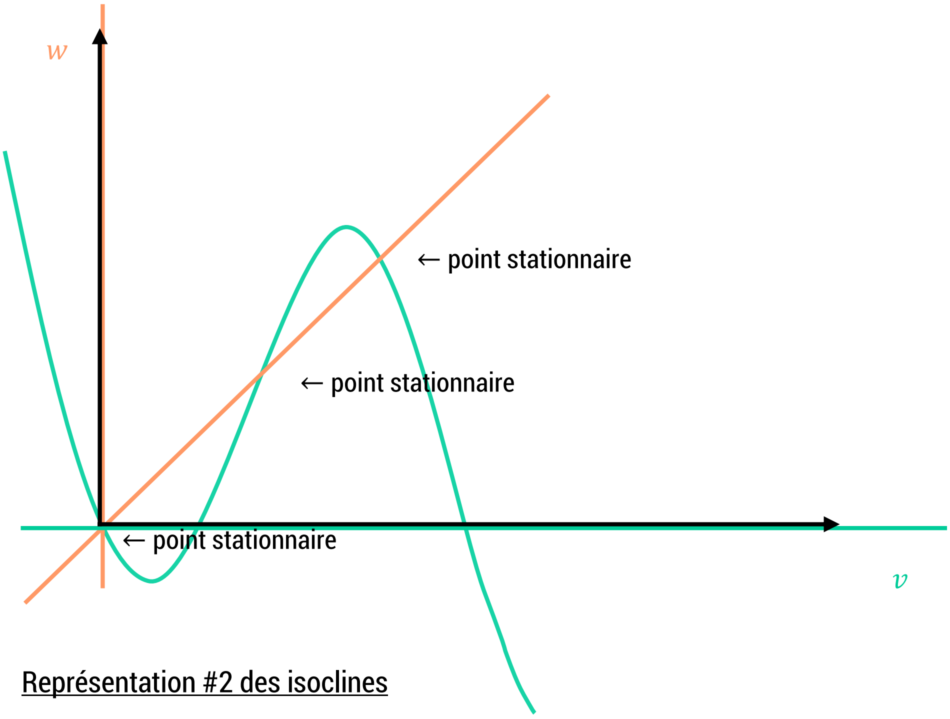
Trace des isoclines

- $\boldsymbol{v' = 0}$ $\quad\Longrightarrow\quad \lambda v(v-a)(1-v) - \beta w = 0$
  D'où $w = \frac{\lambda}{\beta} v(v-a)(1-v)$
  $\Longrightarrow$ fonction décroissante polynôme de degrés 3

- $\boldsymbol{w' = 0}$ $\quad\Longrightarrow\quad b(v - \gamma w) = 0$
  D'où $w = \frac{v}{\gamma}$
  $\Longrightarrow$ fonction linéaire croissante passant par l'origine



Représentation #1 des isoclines



Représentation #2 des isoclines

d) Déterminer les solutions stationnaires (indépendantes du temps) du système différentiel.

$$\begin{cases} \lambda v(v-a)(1-v) - \beta w = 0 & \text{(1) isocline verticale} \\ b(v-\gamma w) = 0 & \text{(2) isocline horizontale} \end{cases}$$

$$\begin{cases} w = \dfrac{\lambda}{\beta} v(v-a)(1-v) \\ w = \dfrac{v}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\beta} v(v-a)(1-v) = \dfrac{v}{\gamma} \\ w = w \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\beta} v(v-a)(1-v) - \frac{v}{\gamma} = 0$$

$$v\left(\frac{\lambda}{\beta} v(v-a)(1-v) - \frac{1}{\gamma}\right) = 0$$

$v = 0 \Rightarrow w = 0$

$$\frac{\lambda}{\beta} v(v-a)(1-v) - \frac{1}{\gamma} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\lambda}{\beta} v^2 + \left(\frac{\lambda}{\beta} + a\right) v - \frac{a\lambda}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\lambda}{\beta} + a\right)^2 - 4\left(-\frac{\lambda}{\beta}\right)\left(-\frac{a\lambda}{\beta} - \frac{1}{\gamma}\right)$$

$$= \frac{\lambda^2}{\beta^2} + a^2 + \frac{2a\lambda}{\beta} - \frac{4a\lambda^2}{\beta^2} - \frac{4\lambda}{\beta\gamma}$$

Négatif → pas de solution

⇒ Un seul point stationnaire en (0 ; 0)

On pourrait vérifier en étudiant les trois cas : $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$

e) Etudier la stabilité des point d'équilibre du système dans le cas $a = 0.13$, $b = 0.013$, $\lambda = 0.26$, $\beta = 0.1$, $\gamma = 1$

On remplace ces valeurs dans le discriminant :

$$\Delta = \frac{\lambda^2}{\beta^2} + a^2 + \frac{2a\lambda}{\beta} - \frac{4a\lambda^2}{\beta^2} - \frac{4\lambda}{\beta\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = \frac{(0{,}26)^2}{(0{,}013)^2} + (0{,}13)^2 + \frac{2(0{,}13)(0{,}26)}{(0{,}013)} - \frac{4(0{,}13)(0{,}26)^2}{(0{,}013)^2} - \frac{4(0{,}26)}{(0{,}013) * 1}$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 400 + 0{,}0169 + 5{,}2 - 2{,}8 - 80 = 322{,}4169$$

La solution stationnaire est (0,0) si $\Delta < 0$

f) Proposer un schéma numérique pour résoudre le système sur ordinateur.

On utilise le schéma d'Euler explicite

Définition mathématique de la dérivée: $H'(t) = \frac{H(t+dt)-H(t)}{dt}$

Si on fait une approximation avec un temps discret :

$H'(ti) = \frac{H(ti+1)-H(ti)}{dt}$ avec $dt = ti + 1 - ti$ et dt pas de temps utilisé

On a donc d'après les équations données, on a pour v :

$$\frac{v(ti+1) - v(ti)}{dt} = \lambda(v(ti))(v(ti) - a)\big(1 - v(ti)\big) - \beta(w(ti))$$

$$v(ti+1) = dt.\lambda(v(ti))(v(ti) - a)\big(1 - v(ti)\big) - \beta(w(ti)) + v(ti)$$

De même pour w :

$$\frac{w(ti+1) - w(ti)}{dt} = b(v(ti) - \gamma(w(ti)))$$

$$w(ti+1) = dt.\lambda b(v(ti) - \gamma(w(ti))) + w(ti)$$

On a une double relation de récurrence entre v et w. Connaissant v_0 et w_0 on peut tous les connaitre. Il faut donc calculer v et w en même temps comme elles dépendent l'une de l'autre à l'instant t. Ces deux relations sont des approximations. Si on veut une courbe proche de la réalité il faut au moins (?) points environ. L'erreur s'amplifie à chaque fois que le terme suivant est recalculé.

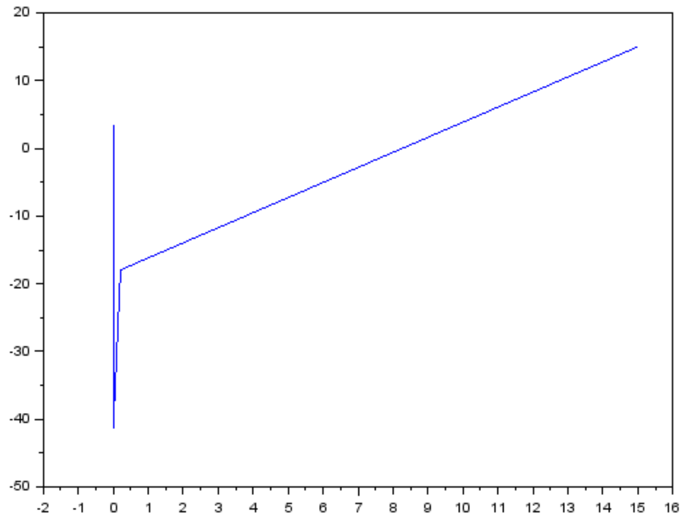
g) En utilisant scilab, tracer quelques orbites du système dynamique.

Voyons ce qu'on obtient avec différentes valeurs des paramètres. Ci-dessous, pour chaque cas, le code scilab dans la console puis le graphique qui en est issu suivant les paramètres.

Valeurs #1 :

```
///// VARIABLES /////
lam=1
bet=2
gam=3
a=1
b=1
U(1)=15
W(1)=15

T=50       // durée de la simulation
N=50000    // nombre de points voulus
dt=T/N     // pas

///// FONCTIONS & BOUCLES /////

for i=1:N
   V(i+1)=dt*lam*V(i)*((V(i))-a)*(1-(V(i)))-bet*(W(i))+V(i)
   W(i+1)=dt*b*((V(i))-gam*(W(i)))+(W(i))
end

plot(U,V)
```

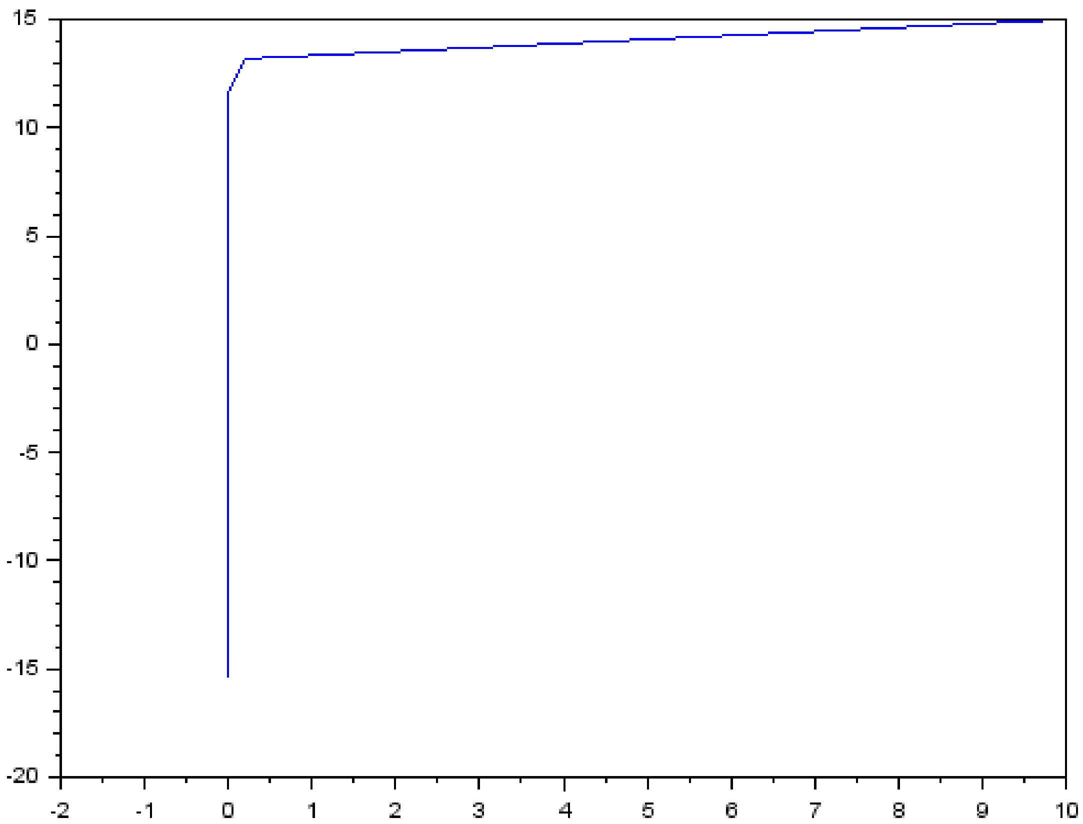
Graphique #1 :



Valeurs #2 :

```
///// VARIABLES /////
lam=0.26
bet=0.1
gam=1
a=0.13
b=0.013
U(1)=10
W(1)=10

T=50      // durée de la simulation
N=50000   // nombre de points voulus
dt=T/N    // pas

///// FONCTIONS & BOUCLES /////

for i=1:N
   V(i+1)=dt*lam*V(i)*((V(i))-a)*(1-(V(i)))-bet*(W(i))+V(i)
   W(i+1)=dt*b*((V(i))-gam*(W(i)))+(W(i))
end

plot(U,V)
```

Graphique #2 :



Valeurs #3 :

```
///// VARIABLES /////
lam=0.26
bet=0.1
gam=1
a=0.13
b=0.013
U(1)=5
W(1)=5

T=50       // durée de la simulation
N=50000    // nombre de points voulus
dt=T/N     // pas

///// FONCTIONS & BOUCLES /////

for i=1:N
   V(i+1)=dt*lam*V(i)*((V(i))-a)*(1-(V(i)))-bet*(W(i))+V(i)
   W(i+1)=dt*b*((V(i))-gam*(W(i)))+(W(i))
end

plot(U,V)
```

Graphique #2 :