

ÁRVORES AVL

Prof. Muriel Mazzetto
Estrutura de Dados

Balanceamento de ABB

2

- Consiste na redistribuição dos nós para manter a árvore balanceada.

Balanceamento de ABB

3

- Consiste na redistribuição dos nós para manter a árvore balanceada.
- Uma árvore balanceada é organizada para possuir a **menor altura** possível.
 - ▣ Se a diferença de altura entre as subárvores de qualquer nó é no máximo 1.
 - ▣ As *folhas* devem estar no *nível d ou $d-1$* , para uma árvore de *altura d* .

Balanceamento de ABB

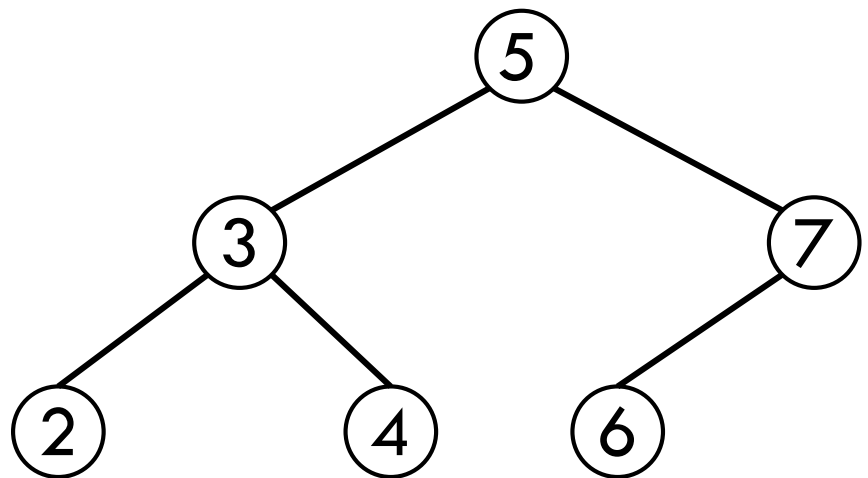
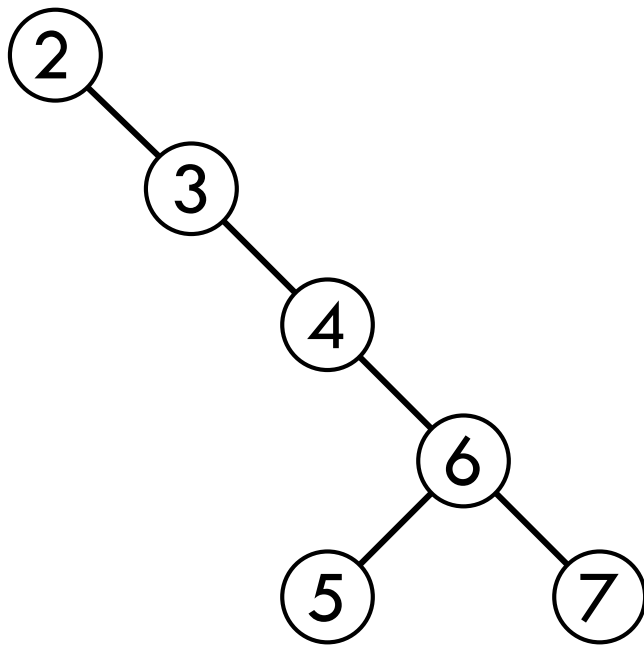
4

- Consiste na redistribuição dos nós para manter a árvore balanceada.
- Uma árvore balanceada é organizada para possuir a **menor altura** possível.
 - ▣ Se a diferença de altura entre as subárvores de qualquer nó é no máximo 1.
 - ▣ As *folhas* devem estar no *nível d ou $d-1$* , para uma árvore de *altura d* .
- Quanto menor a altura da árvore, mais rápida será a busca por seus dados.

Balanceamento de ABB

5

□ Exemplos de árvores: 2-3-4-5-6-7



Rebalanceamento de ABB

6

- ❑ O algoritmo de rebalanceamento de ABB realiza o balanceamento **após** as inserções e remoções.
- ❑ Quanto maior a taxa de inserção e remoção, mais vezes será realizado o rebalanceamento.
- ❑ Não compensa para árvores com muita modificação na estrutura.

Árvores balanceadas

7

- As árvores balanceadas são estruturas que possuem algoritmos de balanceamento **durante** a inserção e a remoção.
- A árvore balanceada mais conhecida se chama **árvore AVL**.
- Outras: árvores Red-Black e árvores 2-3-4.

Árvore AVL

8

- É uma **árvore binária de busca balanceada**.
- Nomeada pelos seus criadores *Adelson Velsky* e *Landis*.
- Primeira árvore binária balanceada criada.

Árvore AVL

9

- **Balanceamento:** a altura da subárvore *esquerda* e *direita* de cada nó diferem em no máximo uma unidade.
- **Fator de Balanceamento:** diferença de altura entre subárvore esquerda e subárvore direita.

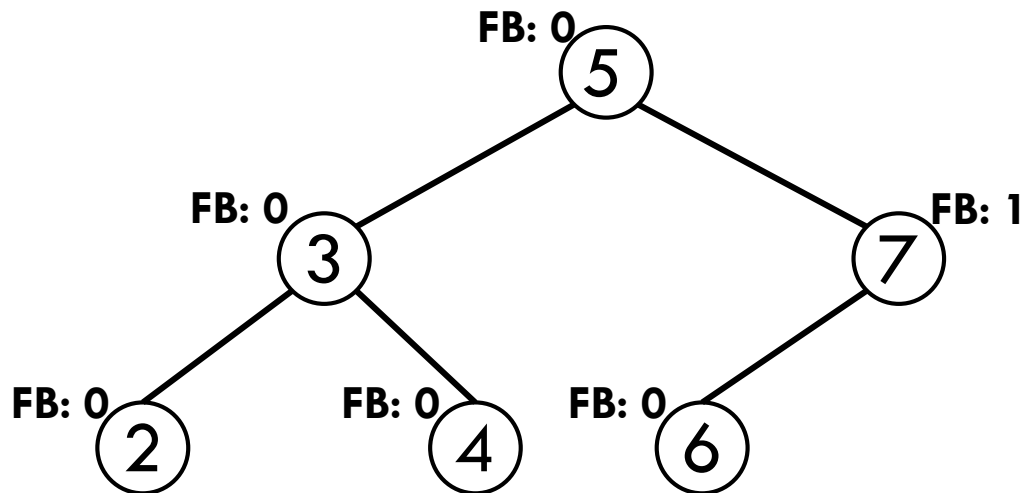
$$FB = \text{altura(Esquerda)} - \text{altura(Direita)}$$

Árvore AVL

10

- **Fator de Balanceamento:** diferença de altura entre subárvore esquerda e subárvore direita.

$$\text{FB} = \text{altura}(\text{Esquerda}) - \text{altura}(\text{Direita})$$

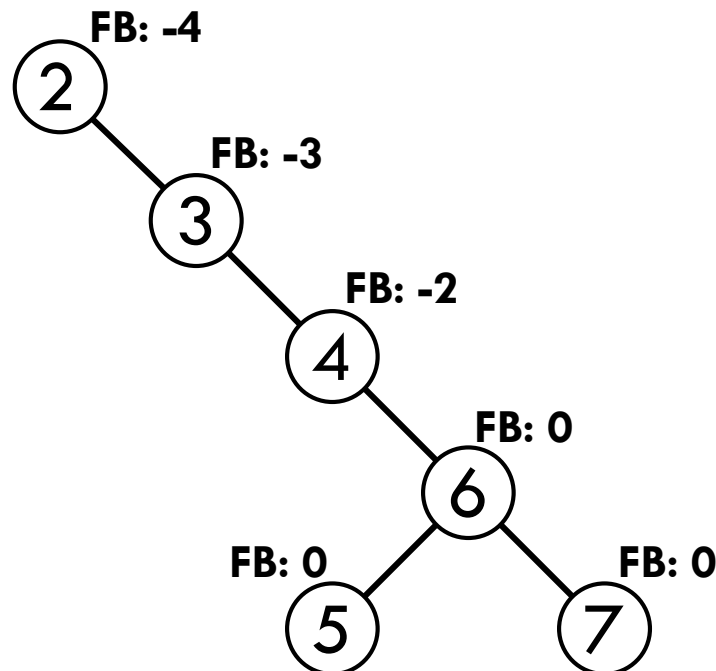


Árvore AVL

11

- **Fator de Balanceamento:** diferença de altura entre subárvore esquerda e subárvore direita.

$$\text{FB} = \text{altura}(\text{Esquerda}) - \text{altura}(\text{Direita})$$



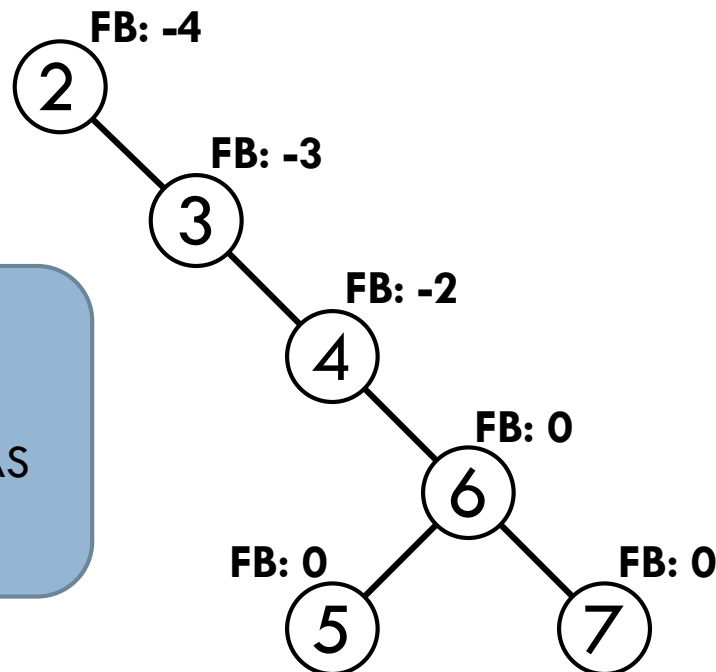
Árvore AVL

12

- **Fator de Balanceamento:** diferença de altura entre subárvore esquerda e subárvore direita.

$$\text{FB} = \text{altura}(\text{Esquerda}) - \text{altura}(\text{Direita})$$

SEMPRE COMECE O
CÁLCULO PELAS FOLHAS



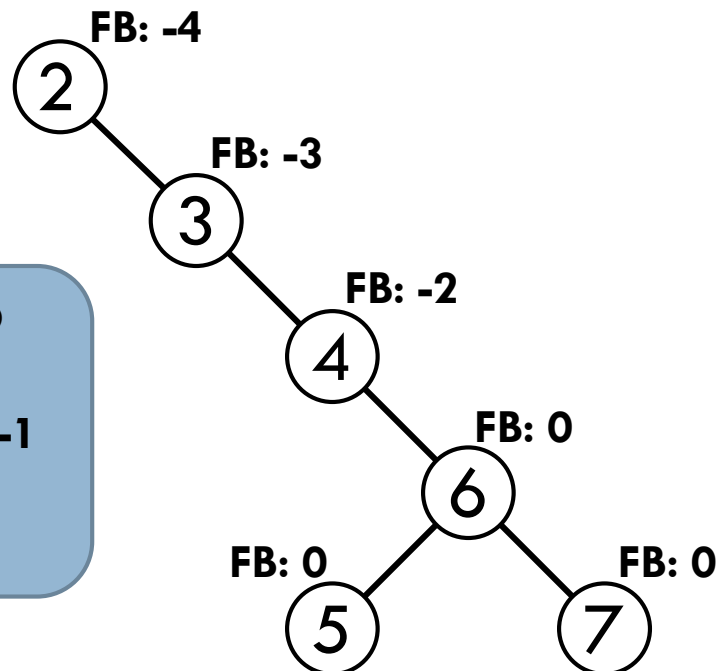
Árvore AVL

13

- **Fator de Balanceamento:** diferença de altura entre subárvore esquerda e subárvore direita.

$$\text{FB} = \text{altura}(\text{Esquerda}) - \text{altura}(\text{Direita})$$

BASTA ENCONTRAR O
PRIMEIRO VALOR
DIFERENTE DE 0, 1 OU -1
PARA CONSIDERAR
DESBALANCEADA



Árvore AVL

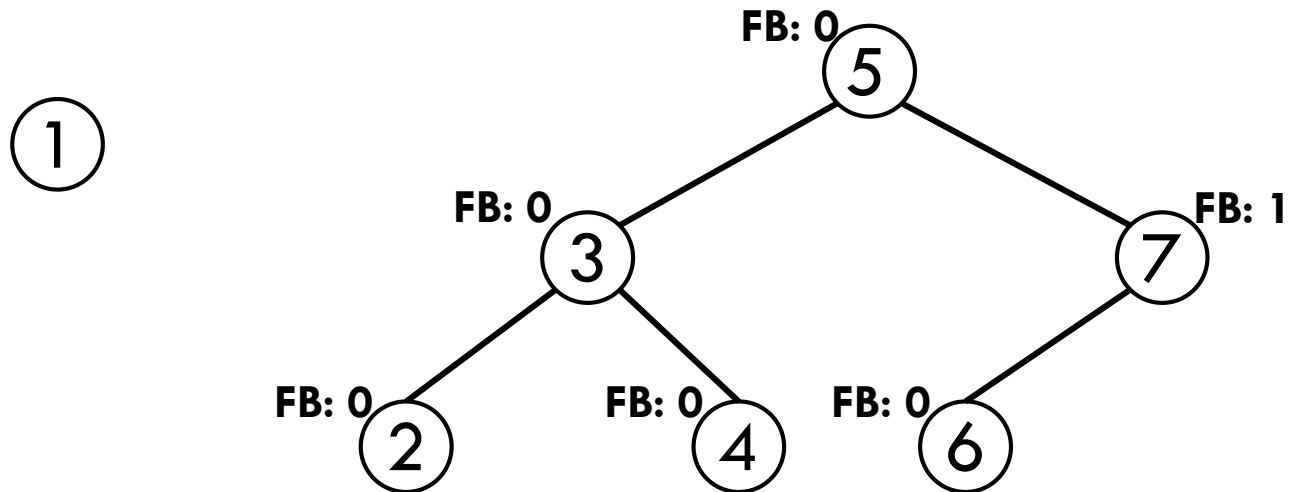
14

- A árvore AVL permite o rebalanceamento local:
 - ▣ Rebalanceamento apenas da parte afetada pela inserção ou remoção.
 - ▣ Faz uso de **rotações** simples ou duplas durante o rebalanceamento.
 - ▣ Busca o formato de uma **árvore binária quase completa**.

Árvore AVL

15

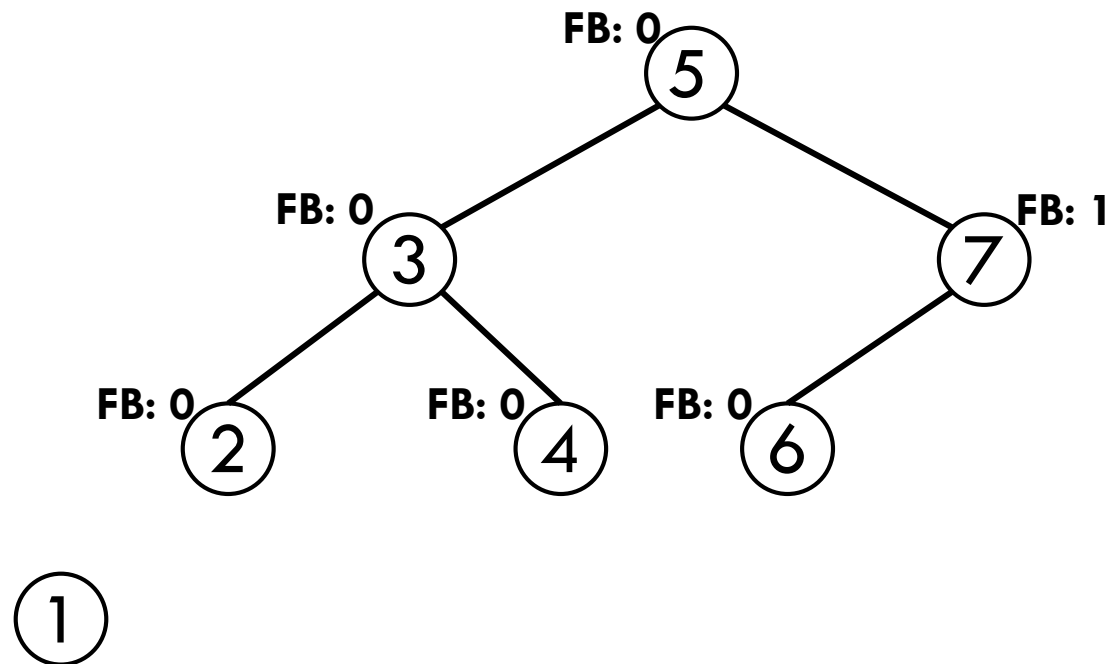
- Exemplo: inserção de um novo nó e recálculo do FB.



Árvore AVL

16

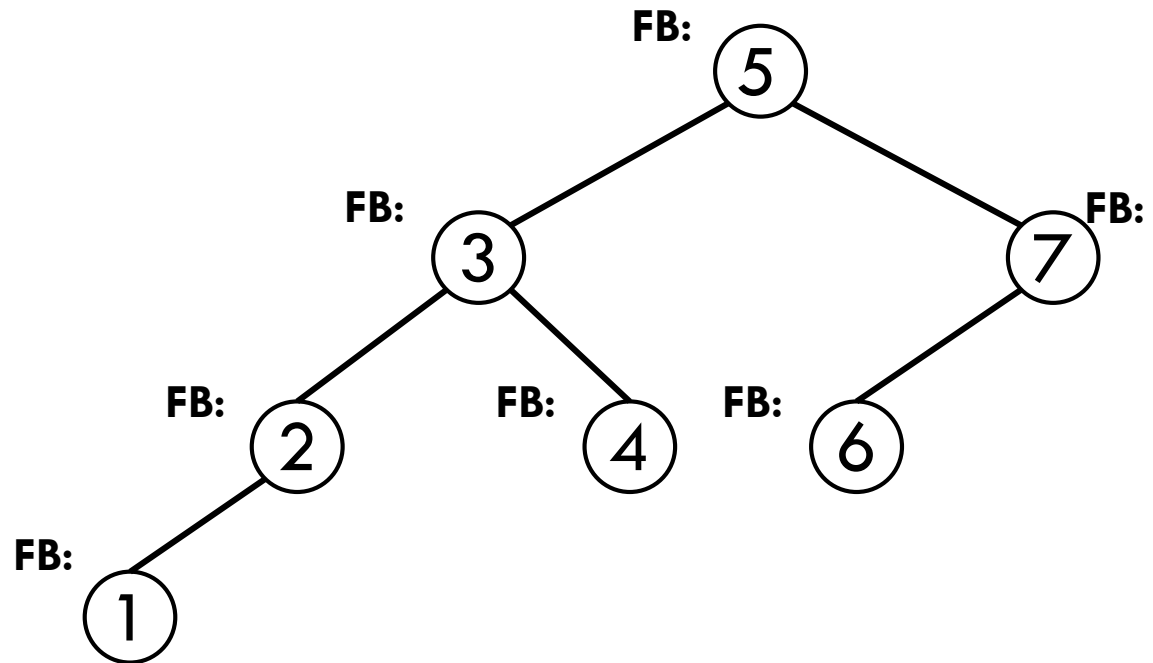
- Exemplo: inserção de um novo nó e recálculo do FB.



Árvore AVL

17

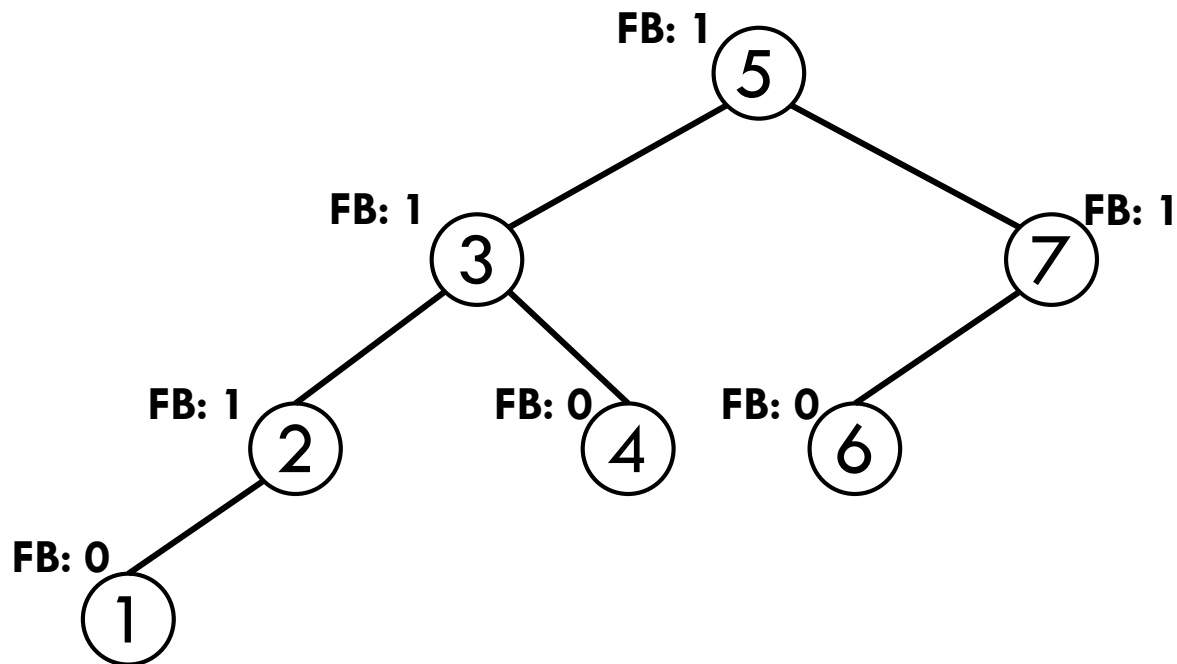
- Exemplo: inserção de um novo nó e recálculo do FB.



Árvore AVL

18

- Exemplo: inserção de um novo nó e recálculo do FB.



Rotações

19

- As ferramentas da AVL para balancear uma árvore durante a inserção ou remoção são chamadas de **rotações**.

Rotações

20

- As ferramentas da AVL para balancear uma árvore durante a inserção ou remoção são chamadas de **rotações**.
- As rotações variam de acordo com o FB do nó.

Rotações

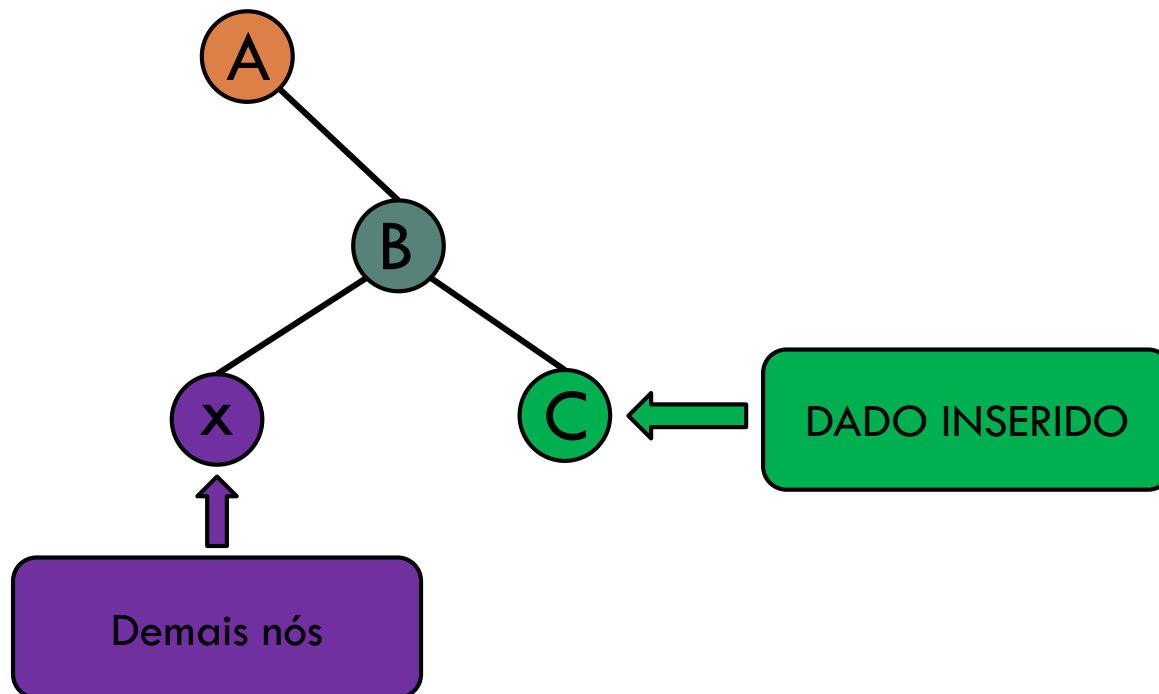
21

- As ferramentas da AVL para balancear uma árvore durante a inserção ou remoção são chamadas de **rotações**.
- As rotações variam de acordo com o FB do nó.
- Existem quatro tipos de rotações:
 - ▣ RR: Simples à esquerda;
 - ▣ LL: Simples à direita;
 - ▣ RL: Dupla à esquerda;
 - ▣ LR: Dupla à direita;

Rotações

22

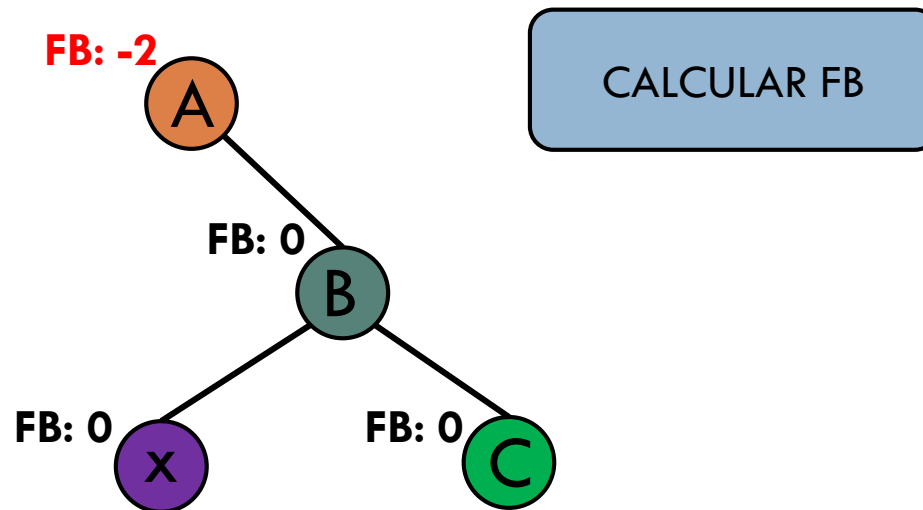
- **Rotação simples à esquerda.**
- Dado foi inserido em RR (direita – direita).



Rotações

23

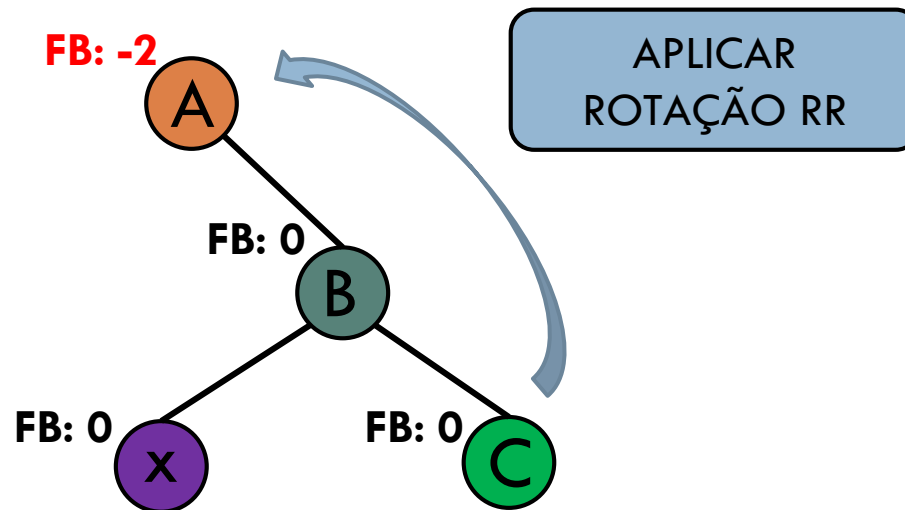
- **Rotação simples à esquerda.**
- Dado foi inserido em RR (direita – direita).



Rotações

24

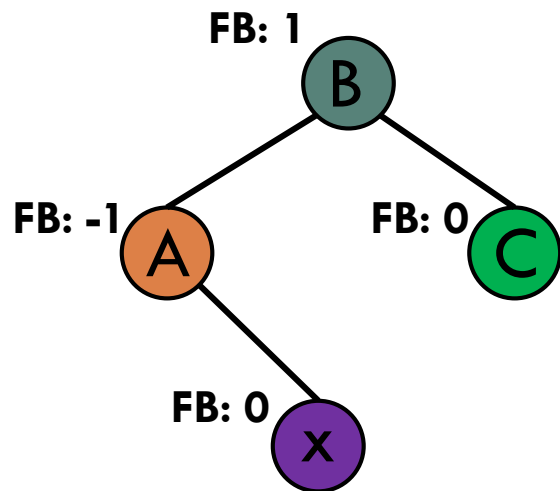
- **Rotação simples à esquerda.**
- Dado foi inserido em RR (direita – direita).



Rotações

25

- **Rotação simples à esquerda.**
- Dado foi inserido em RR (direita – direita).



ÁRVORE
BALANCEADA

Rotações

26

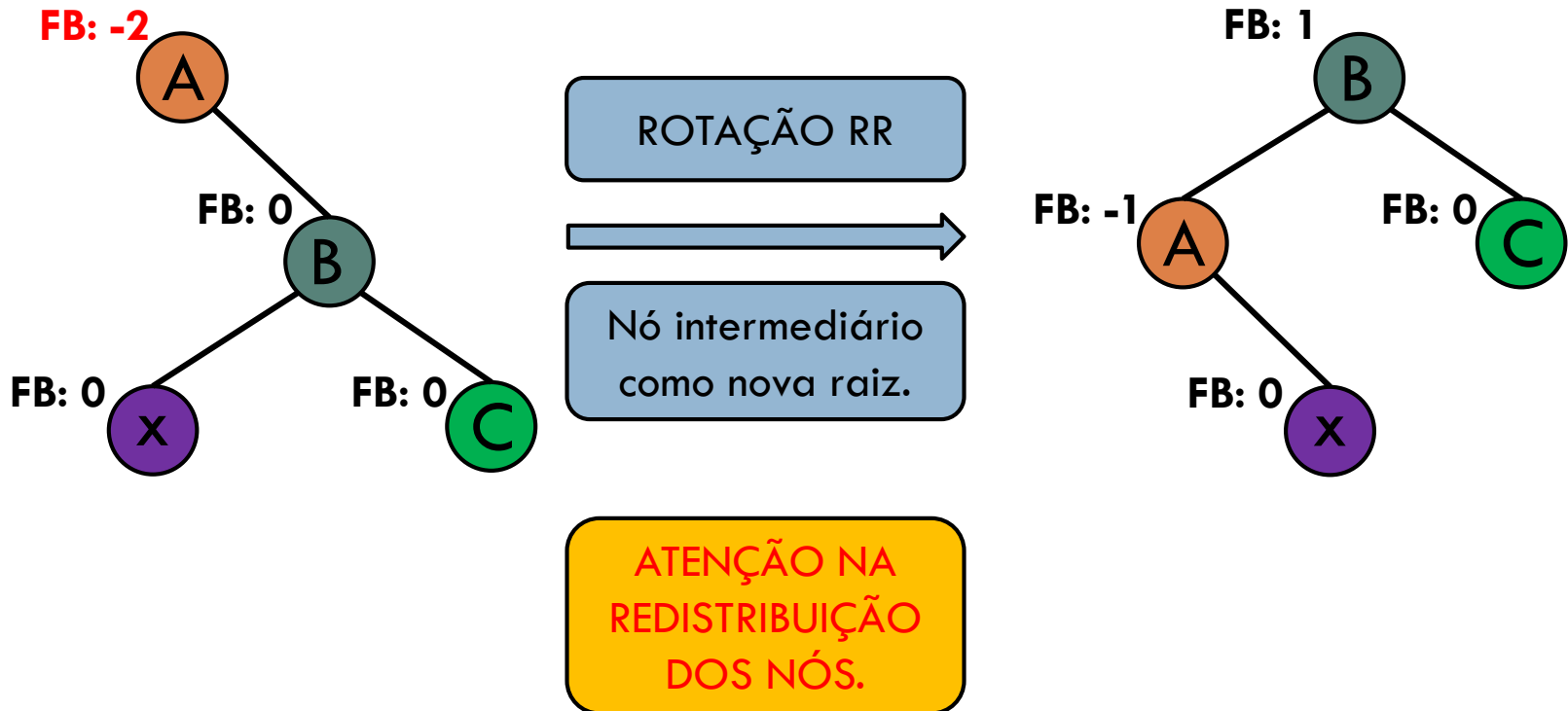
- **Rotação simples à esquerda.**
- Dado foi inserido em RR (direita – direita).



Rotações

27

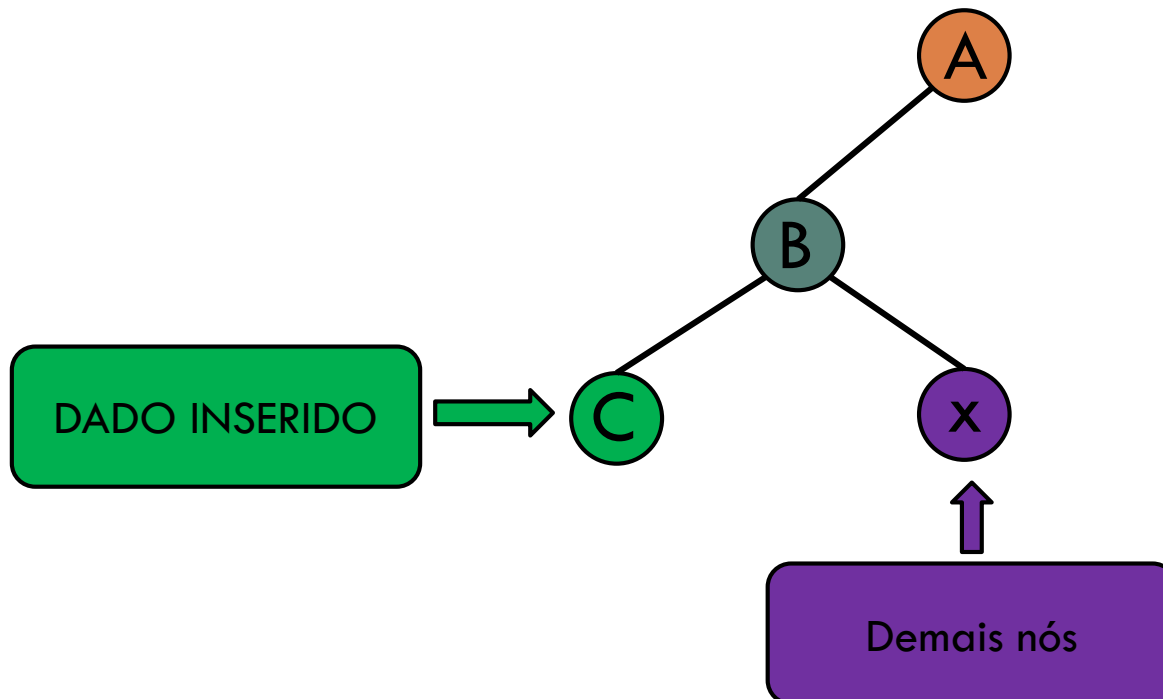
- Rotação simples à esquerda.
- Dado foi inserido em RR (direita – direita).



Rotações

28

- ❑ **Rotação simples à direita.**
- ❑ Dado foi inserido em LL (esquerda – esquerda).

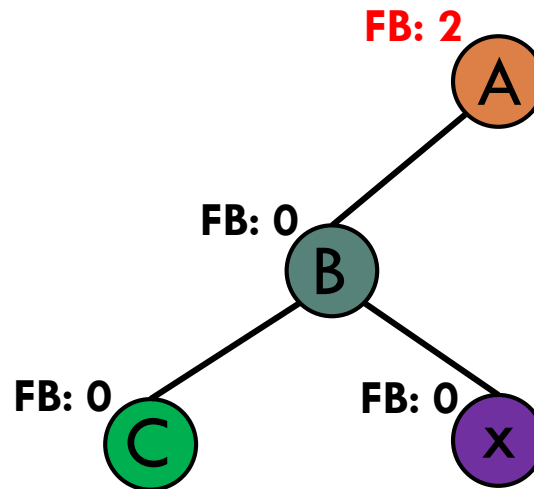


Rotações

29

- **Rotação simples à direita.**
- Dado foi inserido em LL (esquerda – esquerda).

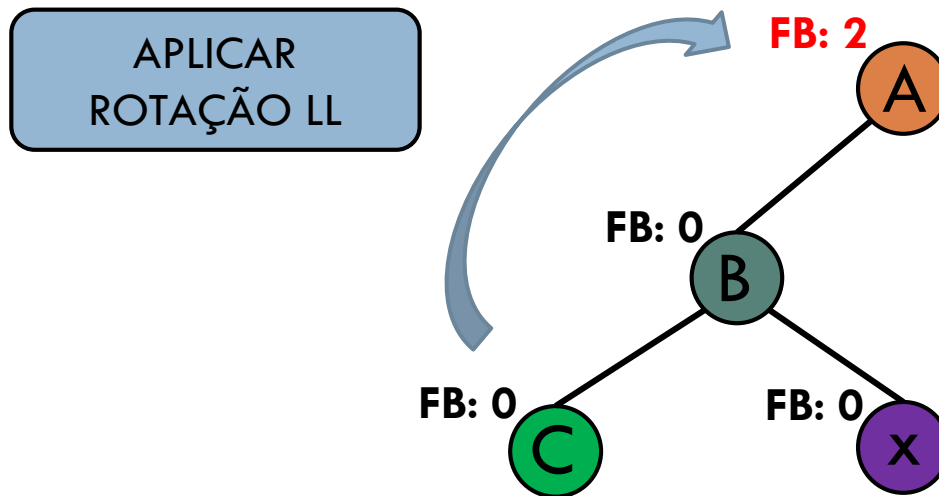
CALCULAR FB



Rotações

30

- **Rotação simples à direita.**
- Dado foi inserido em LL (esquerda – esquerda).

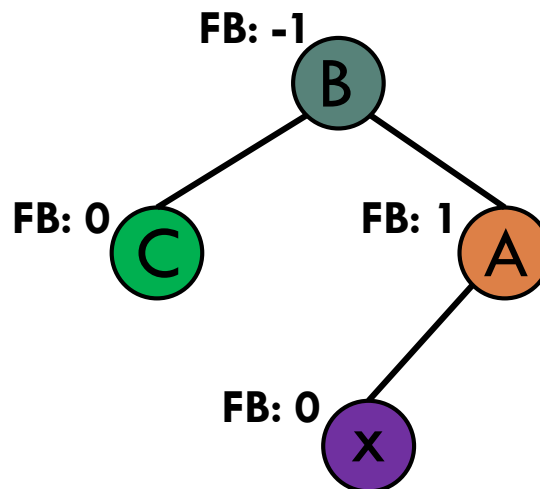


Rotações

31

- **Rotação simples à direita.**
- Dado foi inserido em LL (esquerda – esquerda).

ÁRVORE
BALANCEADA



Rotações

32

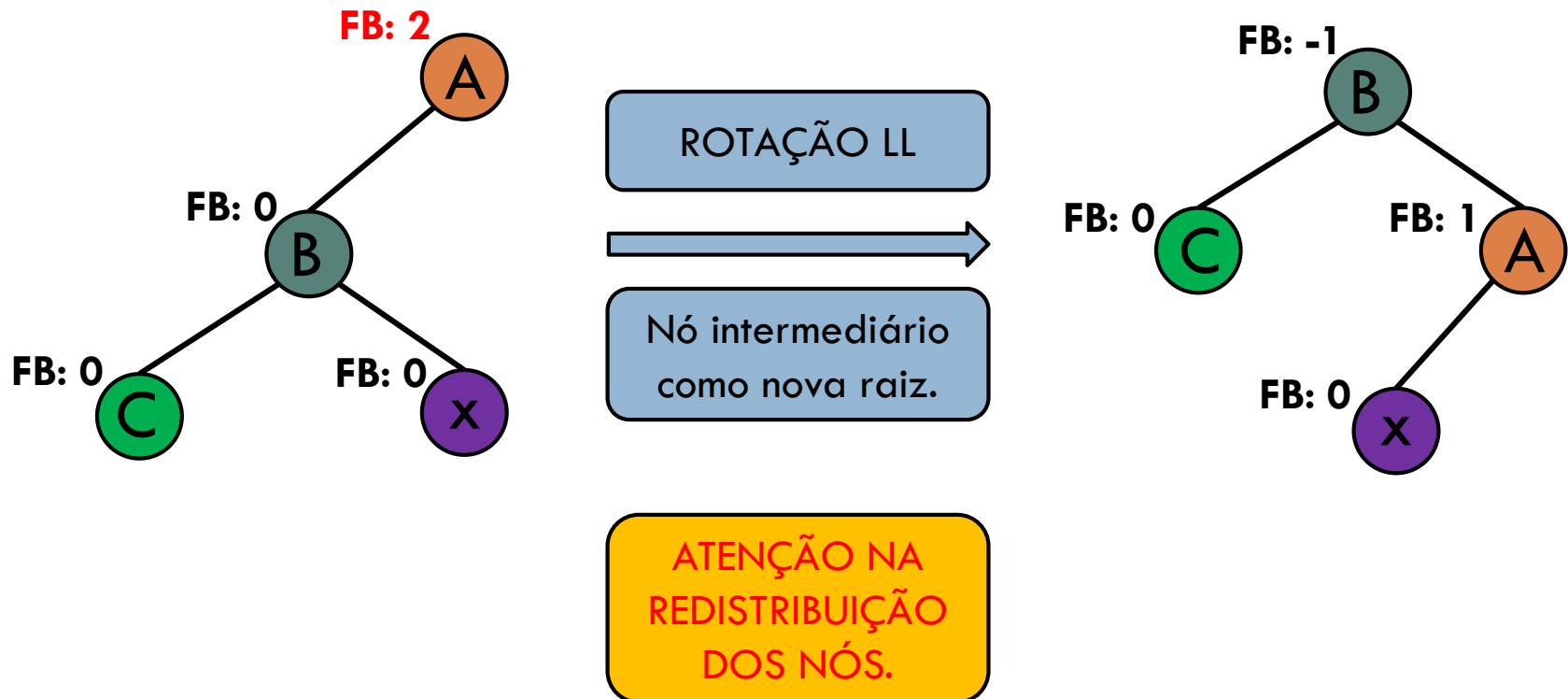
- **Rotação simples à direita.**
- Dado foi inserido em LL (esquerda – esquerda).



Rotações

33

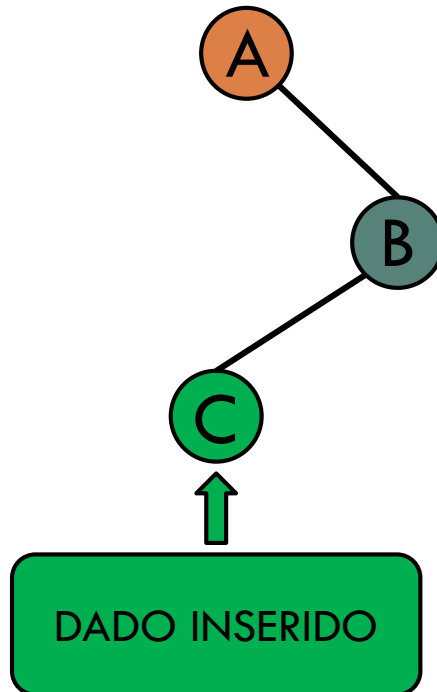
- **Rotação simples à direita.**
- Dado foi inserido em LL (esquerda – esquerda).



Rotações

34

- ❑ **Rotação DUPLA à esquerda.**
- ❑ Dado foi inserido em RL (direita – esquerda).

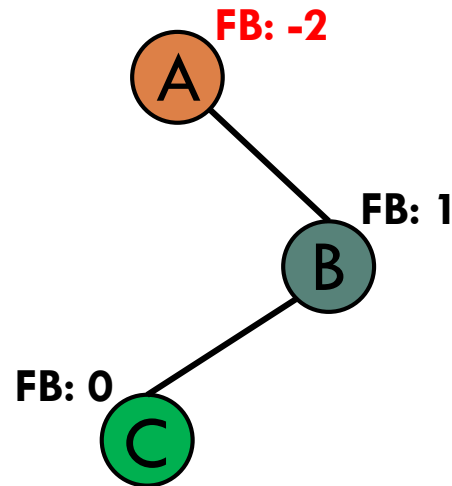


Rotações

35

- ❑ **Rotação DUPLA à esquerda.**
- ❑ Dado foi inserido em RL (direita – esquerda).

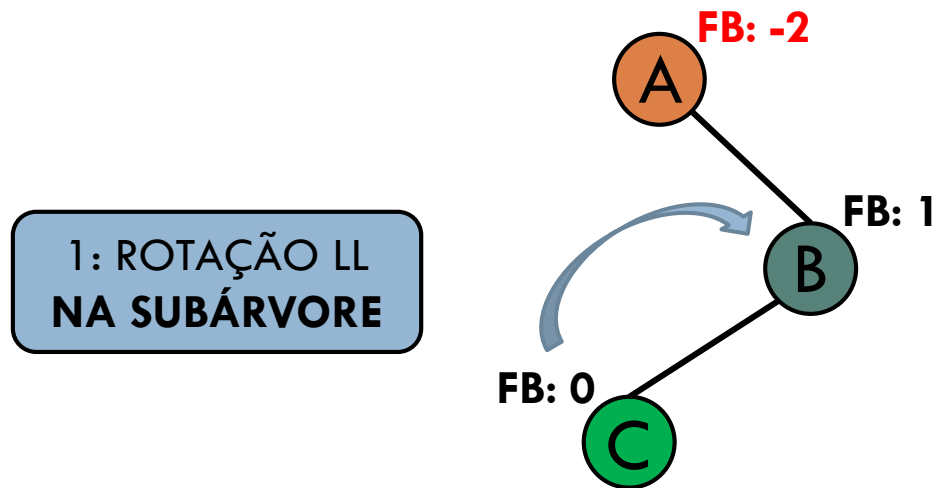
CALCULAR FB



Rotações

36

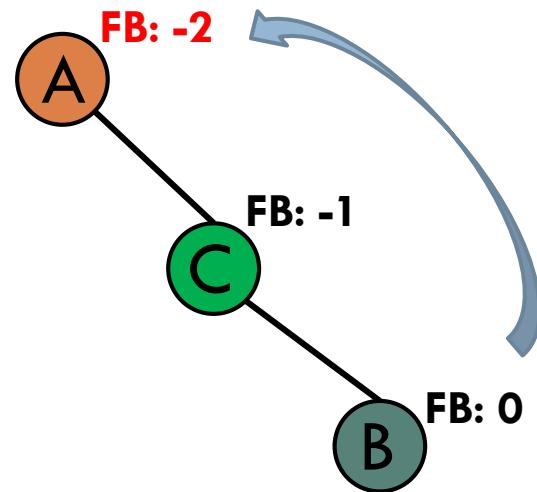
- **Rotação DUPLA à esquerda.**
- Dado foi inserido em RL (direita – esquerda).



Rotações

37

- **Rotação DUPLA à esquerda.**
- Dado foi inserido em RL (direita – esquerda).

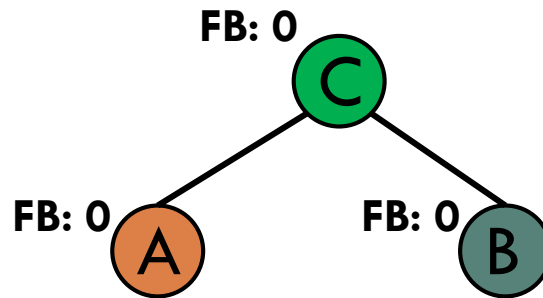


2: ROTAÇÃO RR

Rotações

38

- **Rotação DUPLA à esquerda.**
- Dado foi inserido em RL (direita – esquerda).

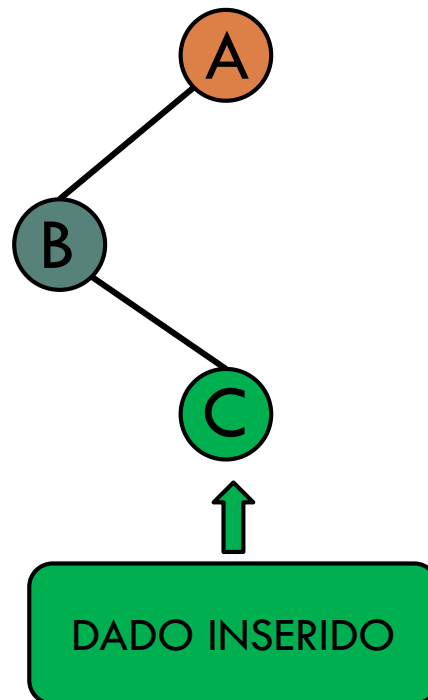


ÁRVORE
BALANCEADA

Rotações

39

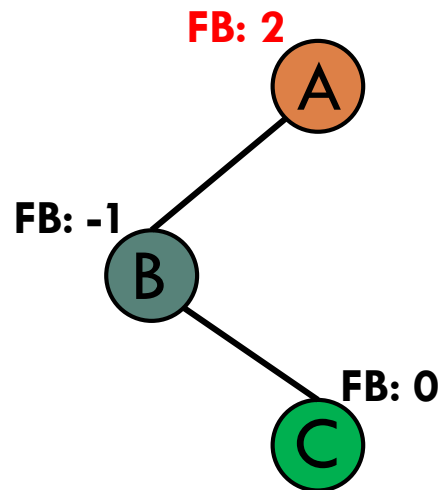
- ❑ **Rotação DUPLA à direita.**
- ❑ Dado foi inserido em LR (esquerda – direita).



Rotações

40

- **Rotação DUPLA à direita.**
- Dado foi inserido em LR (esquerda – direita).

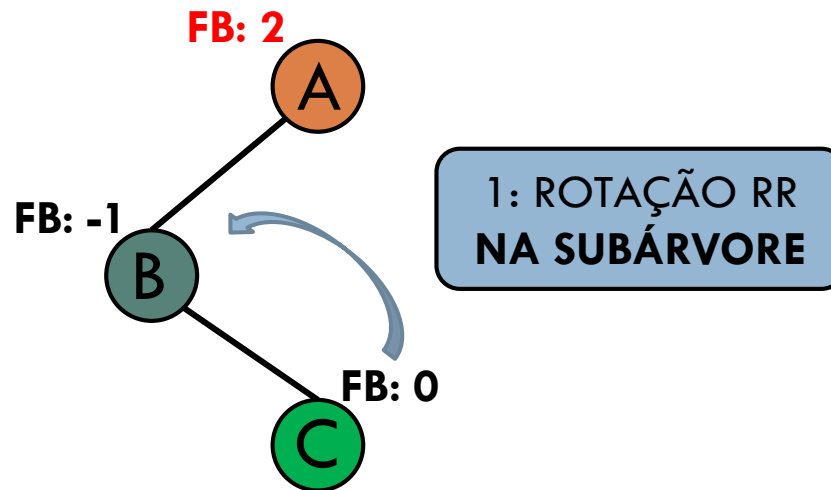


CALCULAR FB

Rotações

41

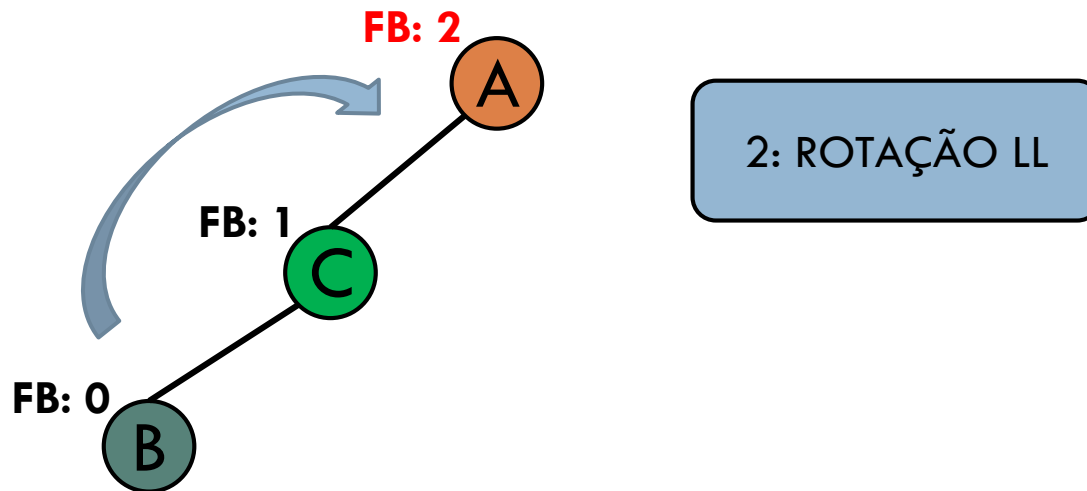
- **Rotação DUPLA à direita.**
- Dado foi inserido em LR (esquerda – direita).



Rotações

42

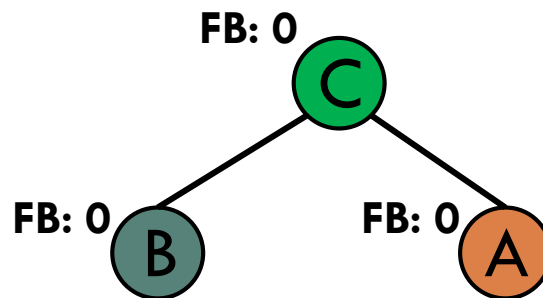
- **Rotação DUPLA à direita.**
- Dado foi inserido em LR (esquerda – direita).



Rotações

43

- **Rotação DUPLA à direita.**
- Dado foi inserido em LR (esquerda – direita).



ÁRVORE
BALANCEADA

Seleção das Rotações

44

- Baseado no FB dos nós:
 - ▣ Se $-1 \leq \text{FB} \leq 1$: árvore está balanceada.
 - ▣ Se $\text{FB} = 2$:
 - Se FB da esquerda igual a -1 : **dupla direita (LR)**.
 - Senão: **simples direita (LL)**.
 - ▣ Se $\text{FB} = -2$:
 - Se FB da direita igual a 1 : **dupla esquerda (RL)**.
 - Senão: **simples esquerda (RR)**.

Operações

45

- As operações de inserção, remoção e busca são iguais as de uma ABB.
- Após Inserir/Remover um elemento:
 - ▣ Calcular FB;
 - ▣ Realizar rotações;
 - ▣ Calcular FB e verificar necessidade de novas rotações.

Exercício

46

- Faça as seguintes operações em uma AVL:
 - ▣ Inserir 15-29-40-8-65-10-9-87-28-14;
 - ▣ Remover 29;
 - ▣ Remover 28;

Exercício

47

- Faça as seguintes operações em uma AVL:
 - ▣ Inserir 15-25-47-10-8-64-53-9-13-19-14;
 - ▣ Remover 47;
 - ▣ Remover 25;

Implementação

48

- As operações de inserção e remoção incluem a verificação do FB, que chamam as rotações quando necessário.
- As operações de rotação consistem em simples trocas de ponteiros.
 - ▣ São mais rápidas que o algoritmo de rebalanceamento de ABB.

Tarefa

49

- **Entregue desenhado em folha** um exemplo de inserção e outro de remoção em AVL.
- **Siga o código** disponível no Moodle.
- Você deve usar pelo menos **uma rotação simples** e **uma rotação dupla** nos seus casos de teste.
- Em dupla.