Transformações lineares

Álgebra Linear e Geometria Analítica – Prof. Aline Paliga

Introdução

Estudaremos um tipo especial de função, onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variável dependentes são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas *funções vetoriais* ou *transformações vetoriais*.

Para dizer que T é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, escreve-se $T:V\rightarrow W$. Sendo T uma função, cada vetor $v \in V$ tem um só vetor imagem $w \in W$, que será indicado por $w=T(v)$.

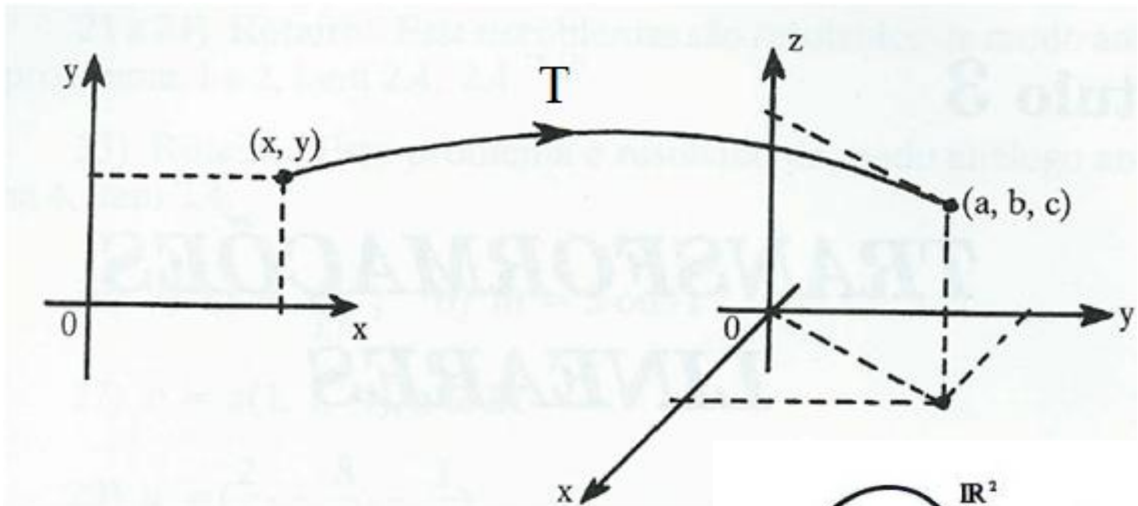
Vamos exemplificar, considerando $V=\mathbb{R}^2$ e $W=\mathbb{R}^3$

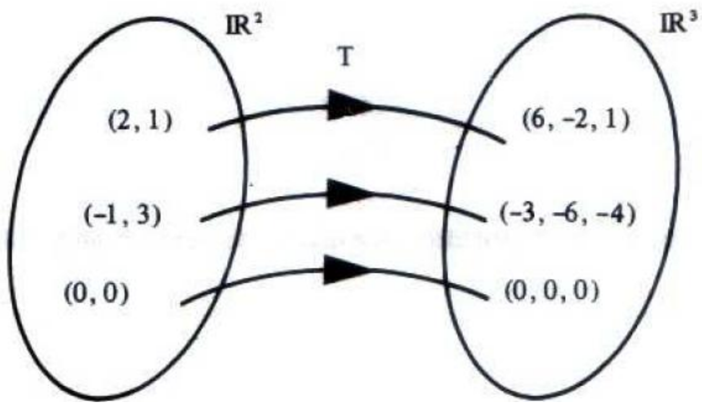
Uma transformação $T:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$ associa vetores $v=(x,y)\in \mathbb{R}^2$ com vetores $w=(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Se a lei que define a transformação T for:

$$T(x, y) = (3x, -2y, x - y)$$

Por exemplo, para calcular T(2,1), tem-se x=2 e y=1, e daí:

$$T(x, y) = (3\times 2, -2\times 1, 2-1) = (6, -2, 1)$$





10.1 Definição

Sejam V e W espaços vetoriais. Uma aplicação T:V→W é chamada *transformada linear* de V em W se:

$$I)\, T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$II)\, T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

$para\ \forall u, v \in V\ e\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Uma transformação linear de V em V (é o caso de V=W) é chamada de operador linear sobre V.

Exemplos:

1) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x,y) = (3x, -2y, x-y)$ é linear, pois sejam $u = (x_1, y_1)\ e\ v = (x_2, y_2)$ vetores genéricos de $\mathbb{R}^2$, então:

$$I)\, T(u+v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$= (3(x_1 + x_2), -2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$$

$$= (3x_1 + 3x_2, -2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$$

$$T(x,y)=(3x,-2y,x-y)$$

$$=(3x_1+3x_2,-2y_1-2y_2,x_1+x_2-y_1-y_2)$$

$$=(3x_1,-2y_1,x_1-y_1)+(3x_2,-2y_2,x_2-y_2)$$

$$T(u+v)=T(u)+T(v)$$

$$II)T(\alpha u)=T(\alpha x_1,\alpha y_1)$$

$$=(3\alpha x_1,-2\alpha y_1,\alpha x_1-\alpha y_1)$$

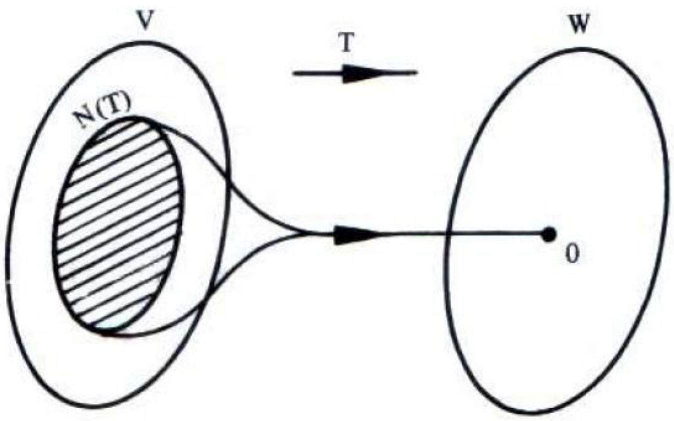
$$=\alpha(3x_1,-2y_1,x_1-y_1)$$

$$T(\alpha u)=\alpha T(u)$$

10.2 Núcleo de uma transformação linear

Chama-se *núcleo* de uma transformação linear T:V → W ao conjunto de todos os vetores v ∈ V que são transformados em 0 ∈ W. Indica-se esse conjunto por N(T) ou ker(T):

$$N(T) = \{v \in V \,/\, T(v) = 0\}$$



Observemos que N(T)⊂V e

N(T)≠ϕ, pois 0 ∈ N(T).

Exemplos:

1) O núcleo da transformação linear

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T(x,y)=(x+y, 2x-y) é o conjunto:

$N(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, T(x, y) = (0, 0)\}$ o que implica

(x+y, 2x-y)=(0,0) ou $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

sistema cuja solução é:

x=0 e y=0 logo:

N(T)={(0,0)}

2) Seja $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por:

T(x,y,z)=(x-y+4z, 3x+y+8z)

neste caso, temos:

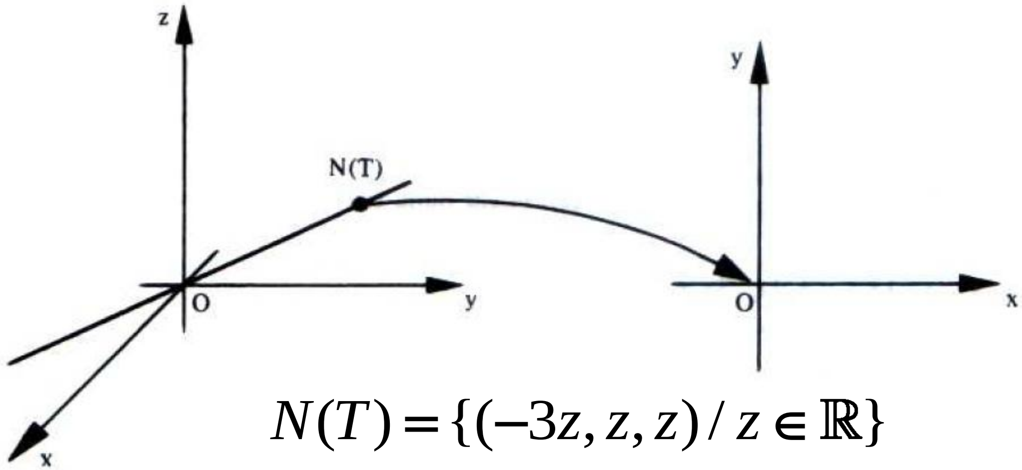
$$N(T)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / T(x,y,z)=(0,0)\}$$

isto é, um vetor (x,y,z) ∈ $\mathbb{R}^3$ se, e somente se:

(x-y+4z, 3x+y+8z)=(0,0) ou $\begin{cases} x-y+4z=0 \\ 3x+y+8z=0 \end{cases}$

sistema homogêneo de solução x=-3z e y=z.

Logo: $N(T)=\{(-3z,z,z) / z\in\mathbb{R}\}$



$$N(T) = \{(-3z, z, z) \,/\, z \in \mathbb{R}\}$$

Observemos que esse conjunto representa uma reta no $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e que todos os seus pontos têm por imagem a origem do $\mathbb{R}^2$.

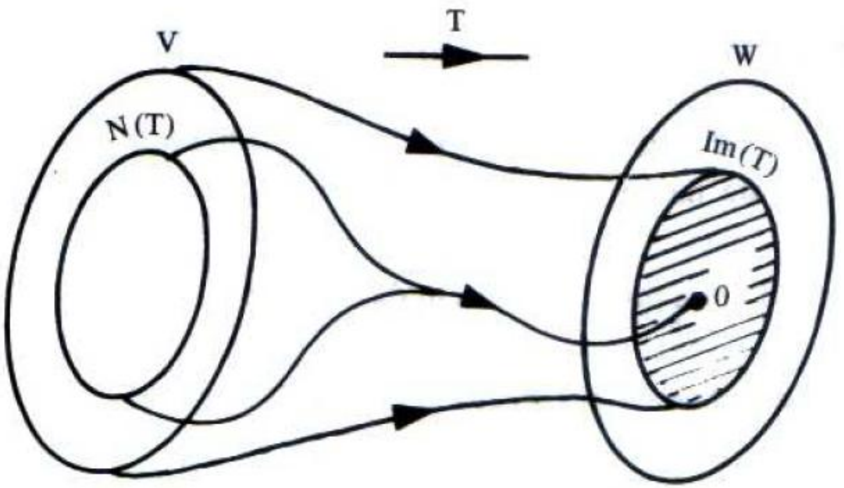
Todo núcleo de uma TL é um *subespaço* vetorial de V.

Uma TL é *injetora* se, e se somente se, N(T)={0}.

10.3 Imagem

Chama-se *imagem* de uma transformação linear $T:V \rightarrow W$ ao conjunto de $w \in W$ que são imagens dos vetores $v \in V$. Indica-se esse conjunto por Im(T) ou T(V):

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W \,/\, T(v) = w \text{ para algum } v \in V\}$$



Se Im(T)=W, diz-se *sobrejetora.*

10.4 Propriedades das Transformações lineares

I) Se T(0)≠0, a transformação não é linear.

Exemplo:

$$T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x,y,z) = (2x+3, 3x+4z)$$

não é linear pois T(0,0,0) =(3,0)≠0

II)Se $T:V \to W$ é uma transformação linear, tem-se:

$$T(a_1v_1 + a_2v_2) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2)$$

para $\forall v_1, v_2 \in V \ e \ \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, isto é, a imagem de uma combinação linear de vetores v_1 e v_2 é uma combinação linear das imagens $T(v_1) \ e \ T(v_2)$ com os mesmos coeficientes $a_1 \ e \ a_2$. De modo geral:

$$T(a_1v_1 + \ldots + a_nv_n) = a_1T(v_1) + \ldots + a_nT(v_n)$$

Se $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ é uma base de V, para todo v ∈ V, existe $a_1,\dots,a_n$ ∈ ℝ, tal que:

$$v=a_1v_1+\dots+a_nv_n$$

e portanto:

$$T(v)=a_1T(v_1)+\dots+a_nT(v_n)$$

isto é, dado v ∈ V, o vetor T(v) estará determinado se forem conhecidas as imagens dos vetores de B. Em outras palavras, sempre que forem dados $T(v_1),\dots,T(v_n)$ onde $\{v_1,\dots,v_n\}$ é a base do domínio V, a transformação linear T está perfeitamente definida.

10.5 Matriz canônica de uma transformação linear

$$[T(v)] = [T][v]$$

matriz canônica de T

Exemplo:

1) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, T(x,y)=(3x-2y,4x+y,x)

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T(x,y)=(x,-y)

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3) $T:\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, T(x,y,z)=(2x+3y+4z,x-2y)

$$[T]=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

10.6 Autovalores e autovetores

Seja T:V → V um operador linear. Um vetor v ∈ V , v≠0, é um autovetor (ou vetor característico, ou vetor próprio) do operador T se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que:

$$T(v) = \lambda v$$

O número real λ tal que $T(v) = \lambda v$ é denominado autovalor (ou valor característico, ou valor próprio) de T associado ao autovetor v. Como se vê pela definição, um vetor v≠0 é um autovetor se a imagem T(v) for um múltiplo de v.

Exemplos:

1) O vetor v=(5,2) é um autovetor do operador linear

$T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, T(x,y)=(4x+5y,2x+y)

associado ao autovalor $\lambda = 6$, pois:

$$T(5,2)=(4\times 5+5\times 2, 2\times 5+2)=(30,12)=6(5,2)=6v$$

Já o vetor v=(2,1) não é um autovetor deste operador T, pois:

$T(x,y)=(4x+5y,2x+y)$

$T(2,1)=(4\times 2+5\times 1,2\times 2+1)=(13,5)\neq \lambda(2,1)$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

10.6.1 Determinação dos autovalores e autovetores

1)Determinação dos autovalores

Seja o operador linear $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja matriz canônica é:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

isto é:

$$A=[T]$$

Se v e λ são respectivamente, autovetor e autovalor do operador T, tem-se:

$$A.v=\lambda v$$ (v é matriz-coluna 3x1)

ou:

$$Av-\lambda v=0$$

Tendo em vista que v=Iv (I é a matriz-identidade), pode-se escrever:

$$Av-\lambda Iv=0$$

ou:

$$(A-\lambda I)v=0$$

Para que esse sistema homogêneo admita soluções não-nulas, isto é:

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

deve-se ter:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

ou:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{bmatrix}=0$$

A equação $\det(A-\lambda I)=0$ é denominada *equação característica* do operado T ou da matriz A, e suas raízes são os autovalores do operador T ou da matriz A. O determinante é um polinômio em λ denominado *polinômio característico.*

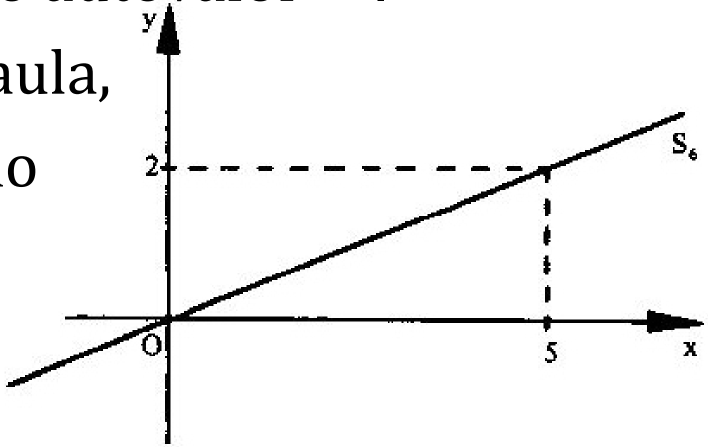
2)Determinação dos autovetores

A substituição de λ pelos seus valores no sistema homogêneo $(A-\lambda I)v=0$ de equações lineares permite determinar os autovetores.

10.6.2PROPRIEDADES

I)Se λ é um autovalor de um operador linear T, o conjunto S de todos os vetores v ∈ V é um subespaço vetorial, chamado *subespaço vetorial associado* ao autovalor λ.

Por exemplo, no exercício 1 de aula, vimos que λ=6 correspondia ao autovetor v=x(5,2), assim o subespaço representa uma reta que passa pela origem.



II) Autovetores associados a autovalores distintos de um operador linear são LI.

III)Se $T:V \to V$ é um operador linear, dim V=n e T possui n autovalores distintos, o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, formado pelos correspondentes autovetores, é uma base de V.

10.7 Diagonalização

Muitos problemas que envolvem o cálculo de autovalores, se tornam bem simples quando temos matrizes diagonais. Nesses casos os autovalores aparecem de forma evidente. Seria interessante, portanto, obter uma transformação para uma matriz qualquer, de forma a obter outra que seja diagonal e que preserve os autovalores.

Uma matriz A n x n é **diagonalizável** se existe uma matriz diagonal D, tal que A é semelhante a D, ou seja, se existe uma matriz P n x n inversível tal que $P^{-1}AP = D$.

Se A e D são semelhantes escrevemos A~D.

P é a matriz cujas colunas são os autovetores do operador linear T. Diz-se que P diagonaliza A ou que P é a matriz diagonalizadora.

A matriz D é a mais simples representante do operador linear T na base P dos autovetores.

Exemplo: Considere a matriz *A*, a seguir.
Esta matriz é diagonalizável, pois:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix};P=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2/5 & 3/5\\ 1/5 & -1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$