

ÁRVORES B

Prof. Muriel Mazzetto
Estrutura de Dados

Árvores B

2

- ❑ Projetada para trabalhar em memória secundária.
- ❑ Tem a funcionalidade de minimizar operações de buscas no disco.
- ❑ Funciona como uma generalização das Árvores Binárias de Busca.

Árvores B

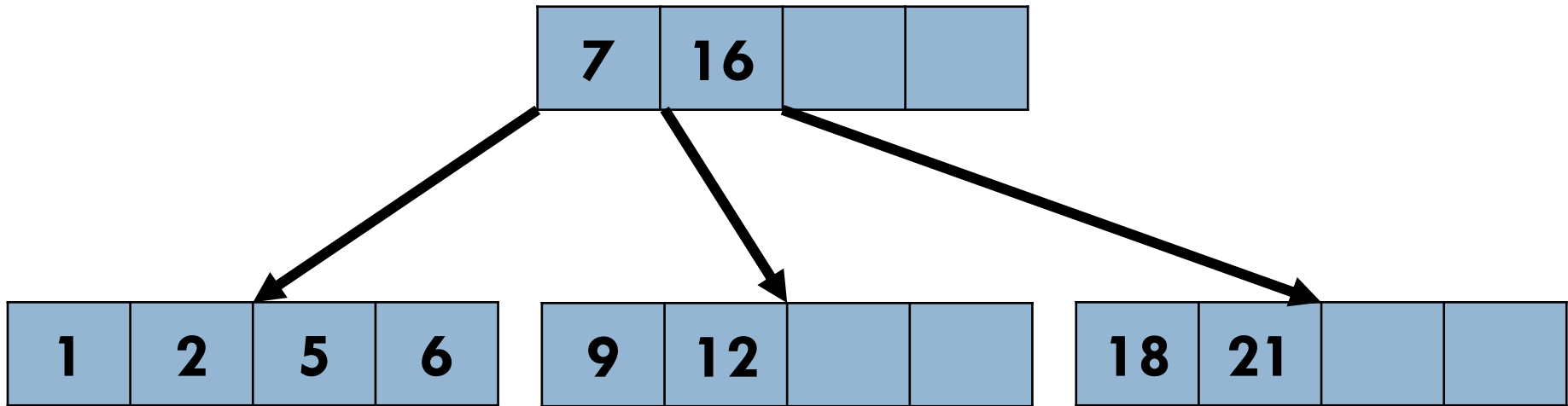
3

- Diferente das ABB, essa estrutura possui mais de uma chave por nó.
- Os **nós** são chamados de **páginas**, que podem armazenar diversos elementos.
- A quantidade de elementos por página é definida pela ordem m da árvore:
 - ▣ Mínimo m chaves por página (exceto para a raiz);
 - ▣ Máximo $2m$ chaves por página;

Árvores B

4

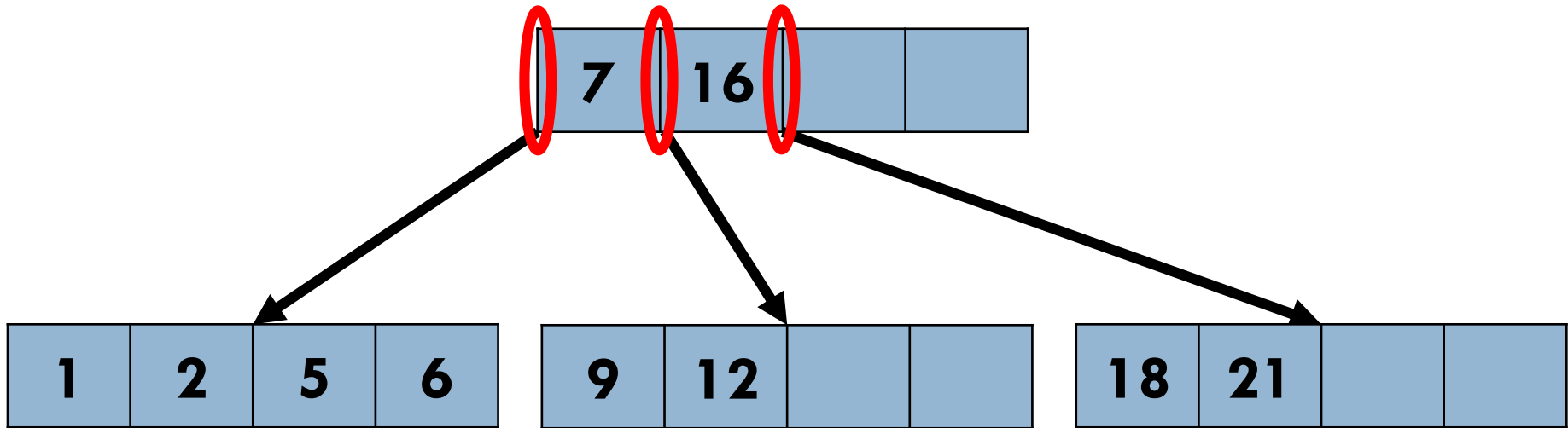
- Exemplo de Árvore B de ordem $m = 2$.



Árvores B

5

- Exemplo de Árvore B de ordem $m = 2$.

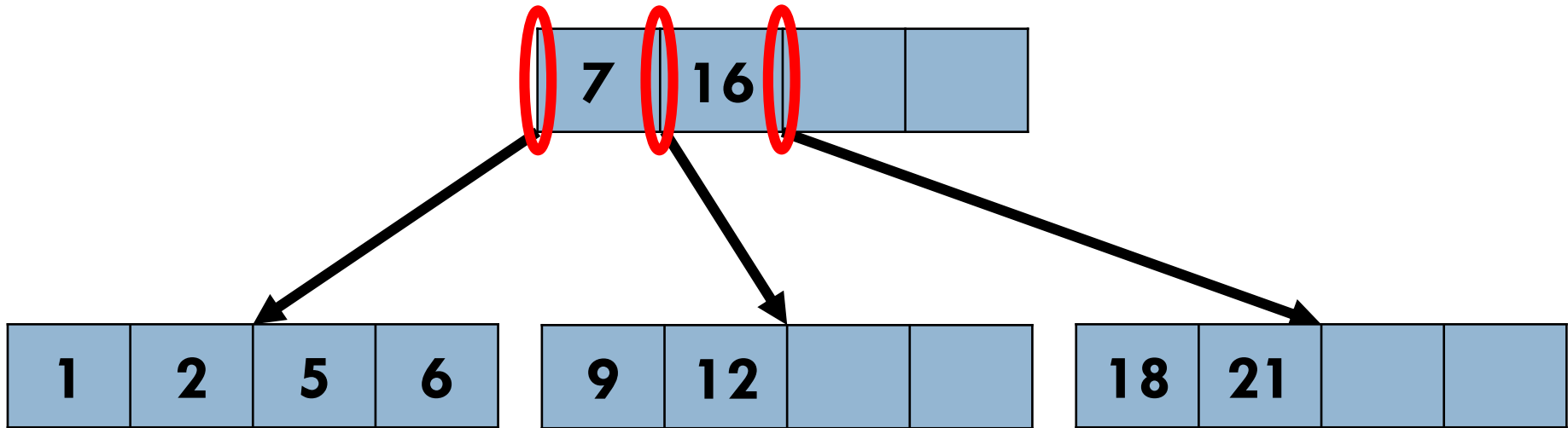


- CADA ELEMENTO POSSUI SEU FILHO DA ESQUERDA E O FILHO DA DIREITA.
- MANTEM A ORDEM DE UMA ABB.
- FILHOS PODEM SER COMPARTILHADOS.

Árvores B

6

- Exemplo de Árvore B de ordem $m = 2$.

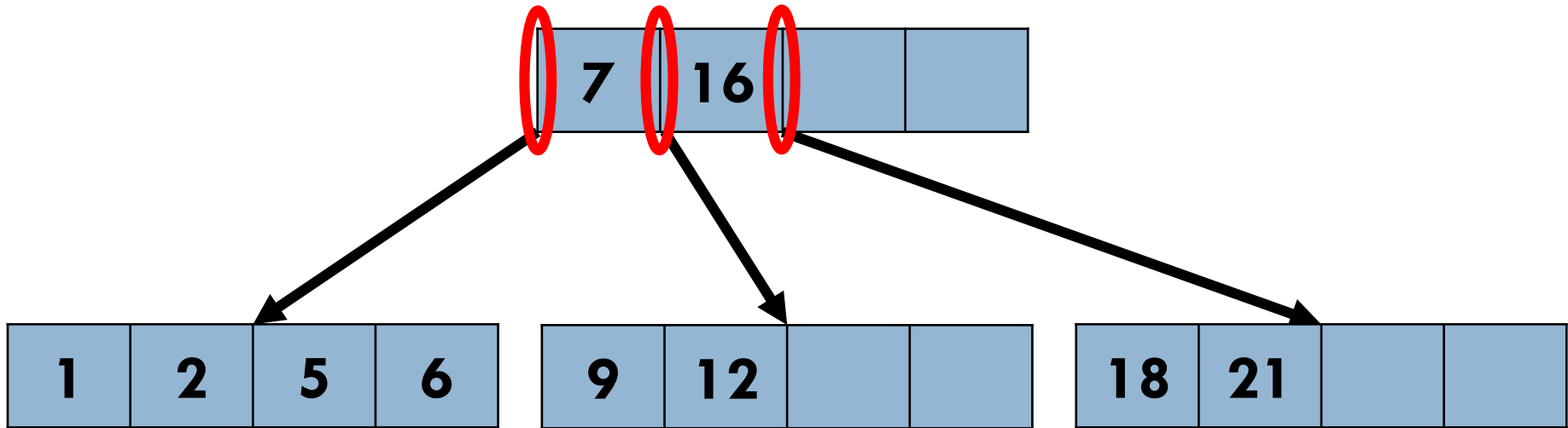


- CADA ELEMENTO POSSUI SEU FILHO DA ESQUERDA E O FILHO DA DIREITA.
- MANTEM A ORDEM DE UMA ABB.**
- FILHOS PODEM SER COMPARTILHADOS.

Árvores B

7

- Exemplo de Árvore B de ordem $m = 2$.

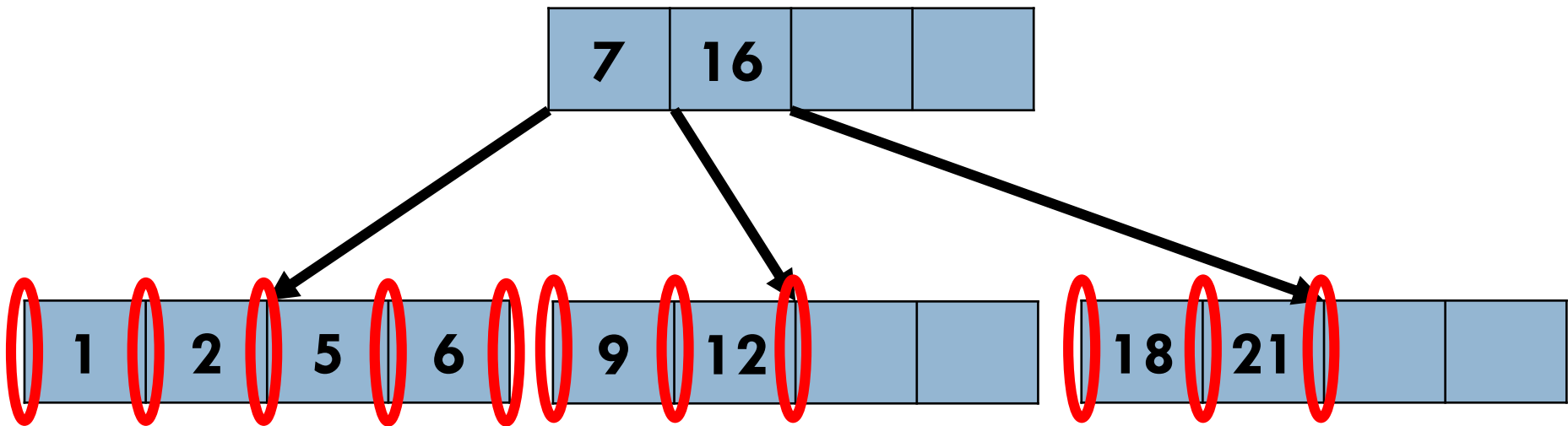


- CADA ELEMENTO POSSUI SEU FILHO DA ESQUERDA E O FILHO DA DIREITA.
- MANTEM A ORDEM DE UMA ABB.
- FILHOS PODEM SER COMPARTILHADOS.**

Árvores B

8

- Exemplo de Árvore B de ordem $m = 2$.

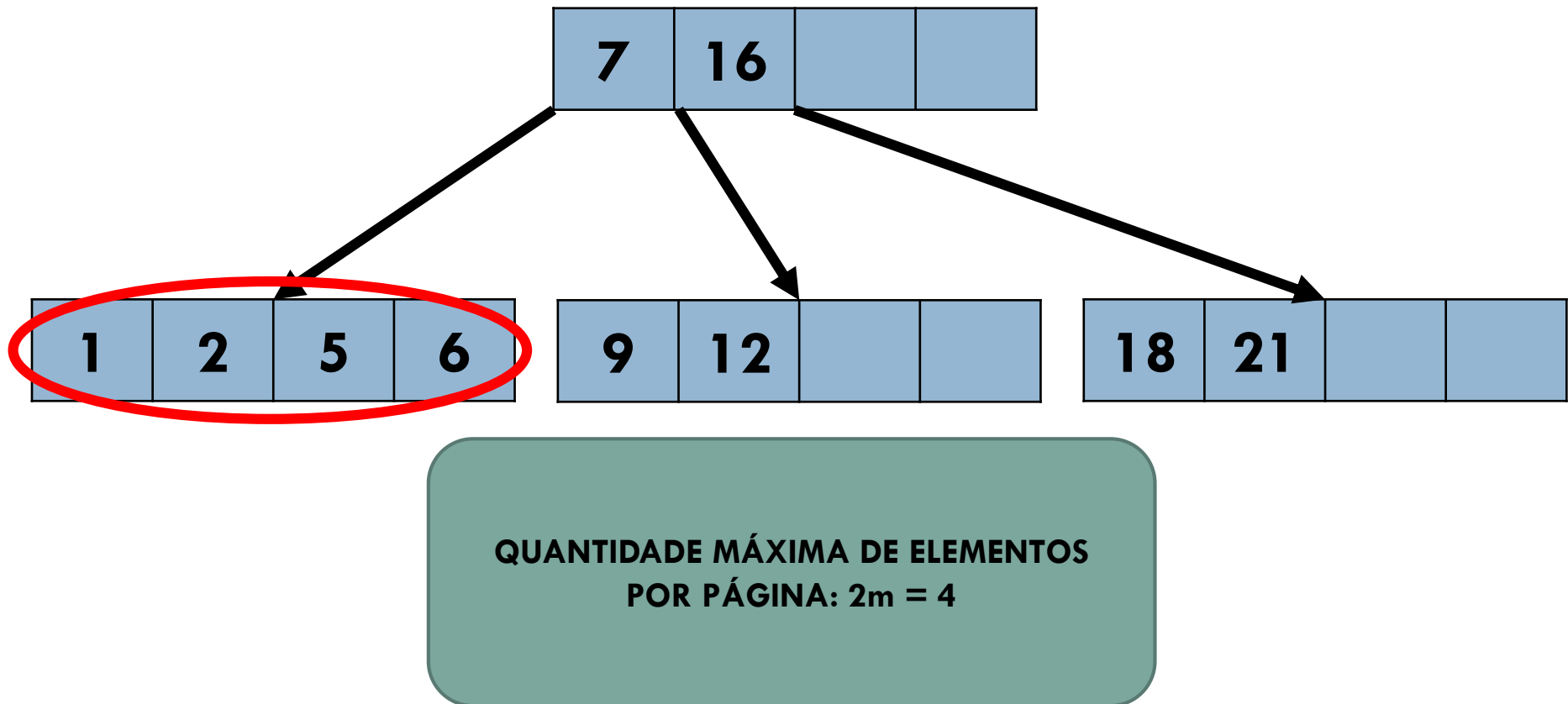


-NÓS SEM FILHO APONTAM PARA NULL.

Árvores B

9

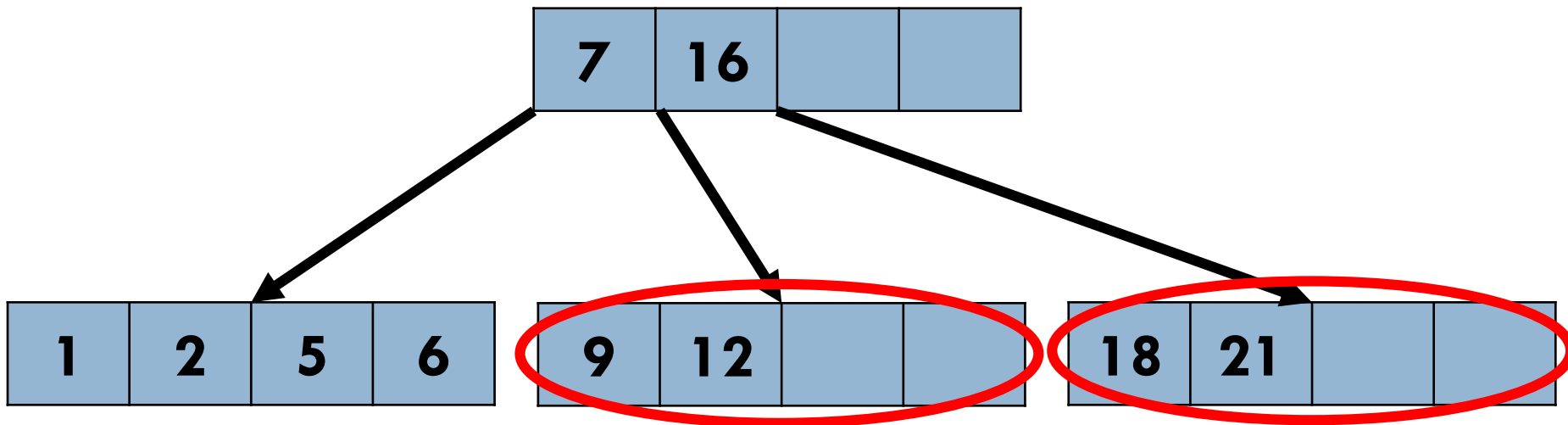
- Exemplo de Árvore B de ordem $m = 2$.



Árvores B

10

- Exemplo de Árvore B de ordem $m = 2$.

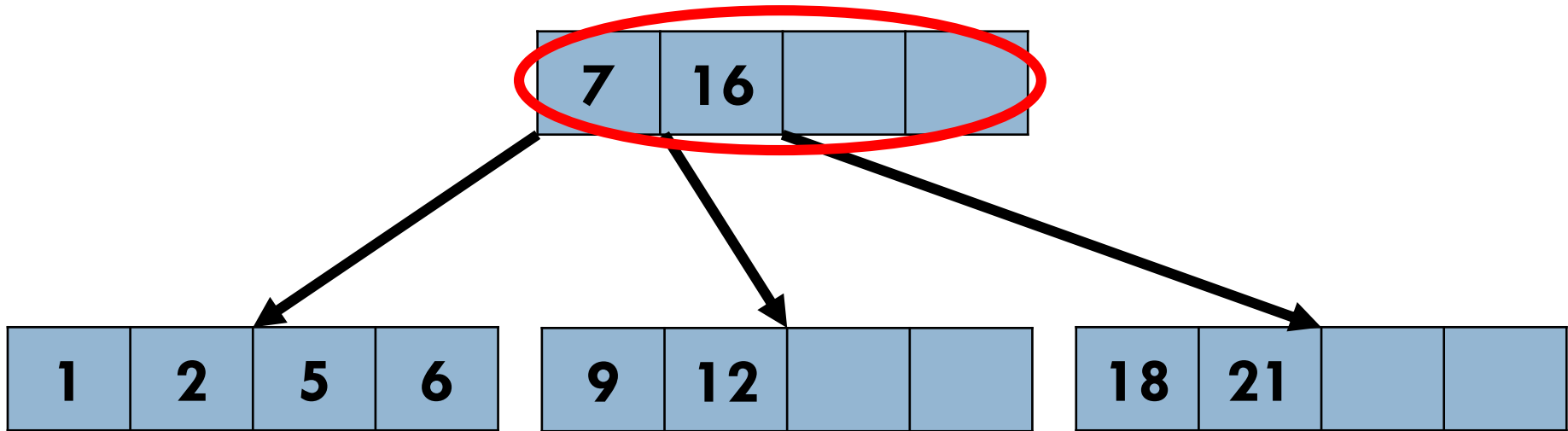


QUANTIDADE MÍNIMA DE ELEMENTOS POR
PÁGINA: $m = 2$

Árvores B

11

- Exemplo de Árvore B de ordem $m = 2$.

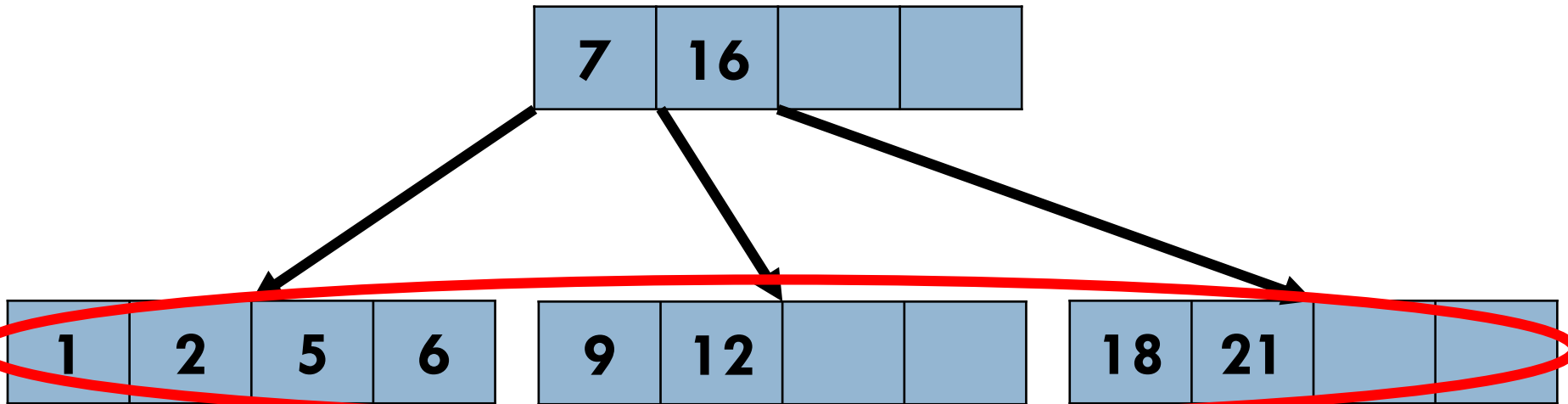


**RAIZ PODE TER QUANTIDADE MENOR QUE m
DE ELEMENTOS.**

Árvores B

12

- Exemplo de Árvore B de ordem $m = 2$.



**TODAS AS PÁGINAS FOLHAS ESTÃO NO
MESMO NÍVEL.**

Estrutura da página

13

- Cada página é estruturada da seguinte forma:

N	P0	C0D0	P1	C1D1	P2	...	Pn	CnDn
----------	-----------	-------------	-----------	-------------	-----------	------------	-----------	-------------

- ▣ N: número de elementos na página.
 - ▣ Ci: chave (id) do elemento.
 - ▣ Di: dado (ponteiro para uma struct).
 - ▣ Pi: ponteiro para o filho.
- Cada página é uma lista de dados:
 - ▣ Dinâmica: busca sequencial.
 - ▣ Estática: busca binária.

Inserção em Árvore B

14

- Algoritmo de inserção de um elemento:
 - ▣ Percorrer como em uma ABB até encontrar página com espaço.
 - ▣ Se o valor já existe, avise e descarte.
 - ▣ Se não existe e a página possui **menos de $2m$ elementos**, insere ordenado na lista.
 - ▣ Se não existe e a **página está cheia**:
 - Insere ordenado na lista;
 - Promove elemento do meio da lista (subir para página pai).

Exemplo de Inserção: $m = 2$

15



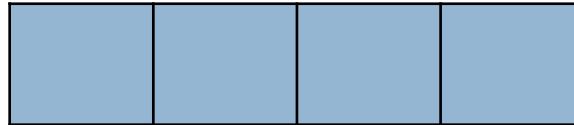
PÁGINA RAIZ VAZIA.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

16

7

raiz

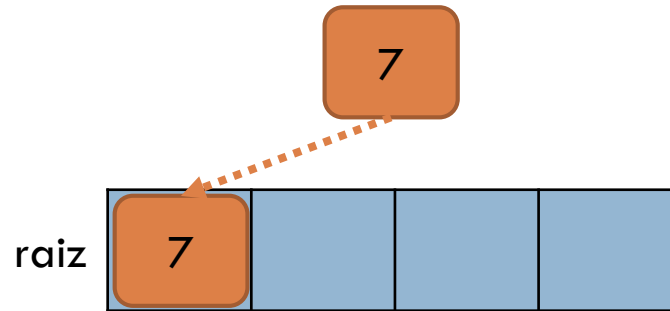


PÁGINA RAIZ VAZIA.

INSERIR VALOR NOVO.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

17



PÁGINA RAIZ VAZIA.

INSERIR VALOR NOVO.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

18



PÁGINA RAIZ COM 1 ELEMENTO.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

19

2

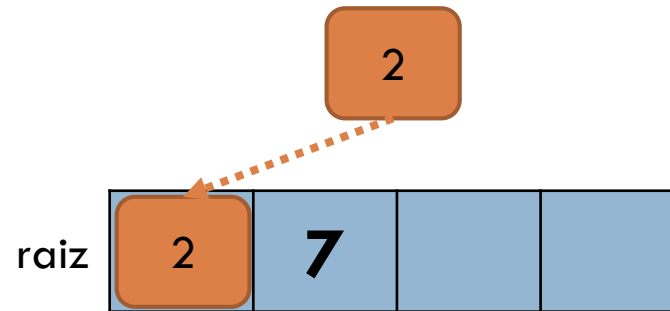
raiz

7

INSERIR VALOR NOVO.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

20



**INSERIR VALOR NOVO MANTENDO A
ORDEM NA LISTA.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

21



PÁGINA RAIZ COM 2 ELEMENTOS.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

22

5

raiz

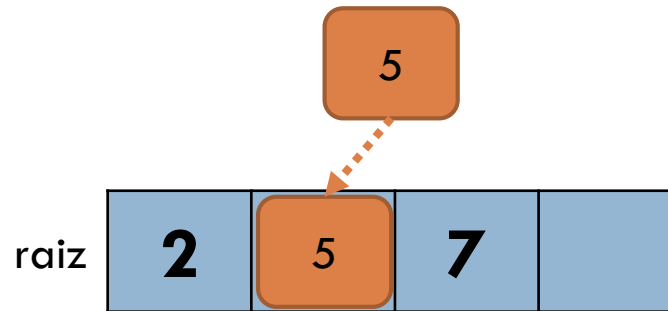
2

7

INSERIR VALOR NOVO.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

23



**INSERIR VALOR NOVO MANTENDO A
ORDEM NA LISTA.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

24



PÁGINA RAIZ COM 3 ELEMENTOS.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

25

12

raiz

2

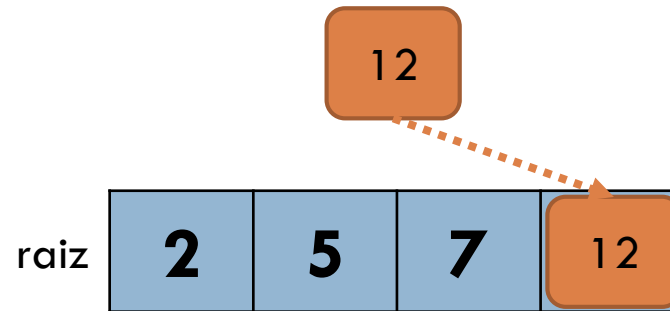
5

7

INSERIR VALOR NOVO.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

26



**INSERIR VALOR NOVO MANTENDO A
ORDEM NA LISTA.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

27

raiz

2	5	7	12
----------	----------	----------	-----------

PÁGINA RAIZ COM 4 ELEMENTOS.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

28

9

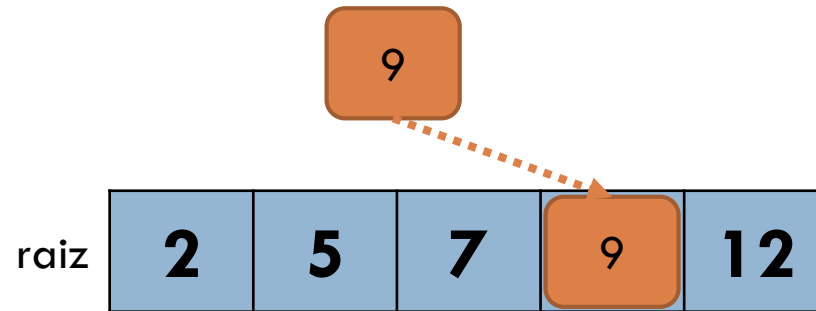
raiz

2	5	7	12
---	---	---	----

INSERIR VALOR NOVO.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

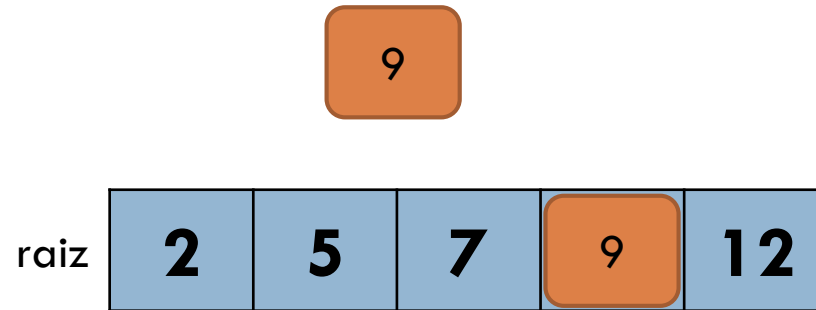
29



**INSERIR VALOR NOVO MANTENDO A
ORDEM NA LISTA.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

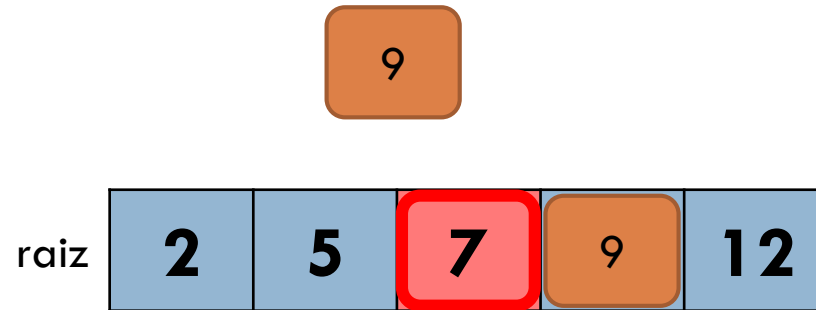
30



**QUANTIDADE DE ELEMENTOS MAIOR QUE
O LIMITE DA ORDEM.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

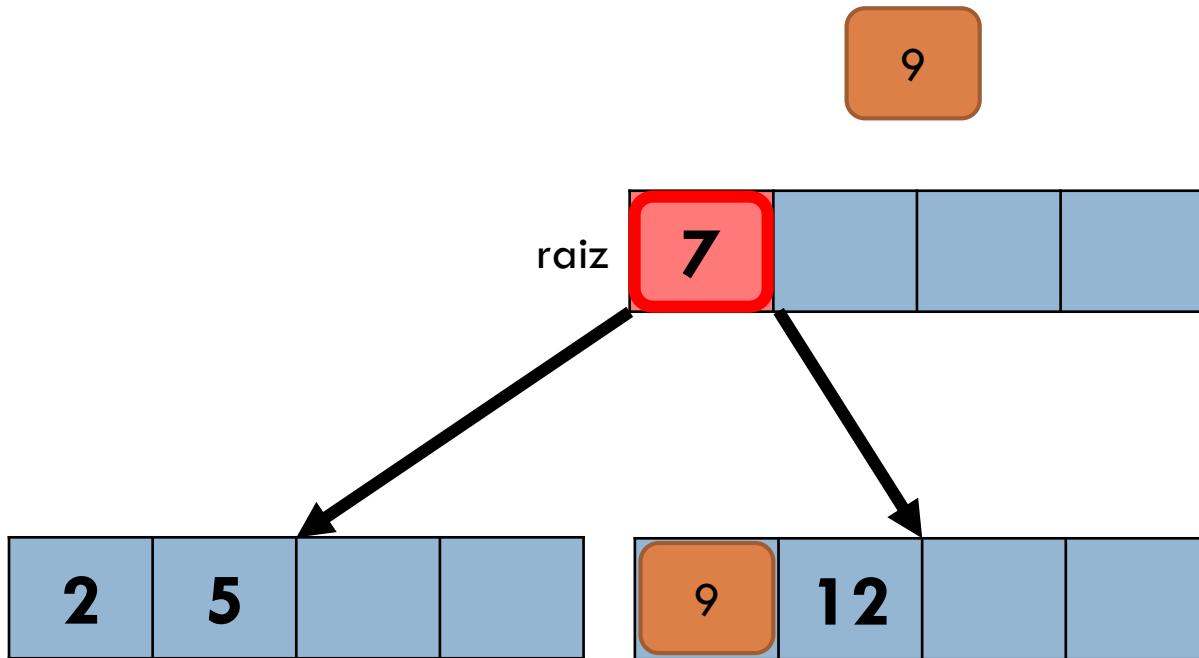
31



**SELECIONAR ELEMENTO DO MEIO DA LISTA
PARA SER PAI DOS DEMAIS.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

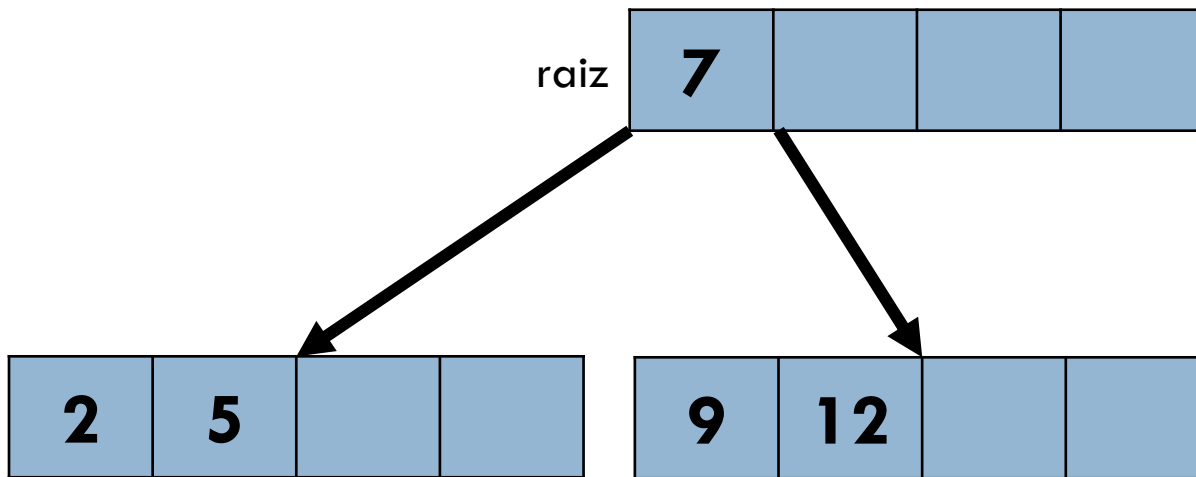
32



**PROMOVER O ELEMENTO CENTRAL PARA
UMA PÁGINA PAI.
DIVIDIR ELEMENTOS EM DUAS NOVAS
PAGINAS FILHO.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

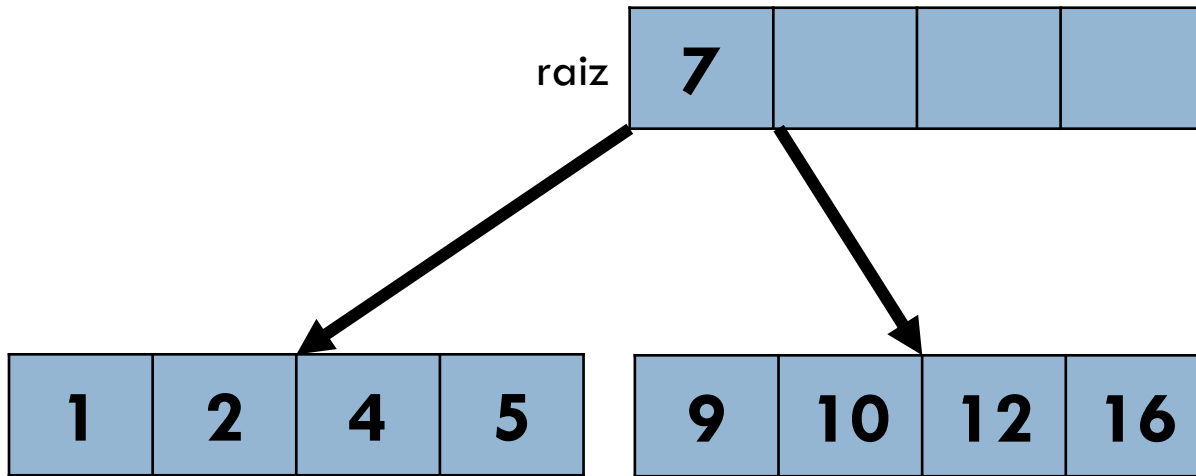
33



**ÁRVORE B DENTRO DOS LIMITES
ESPECIFICADOS PELA ORDEM.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

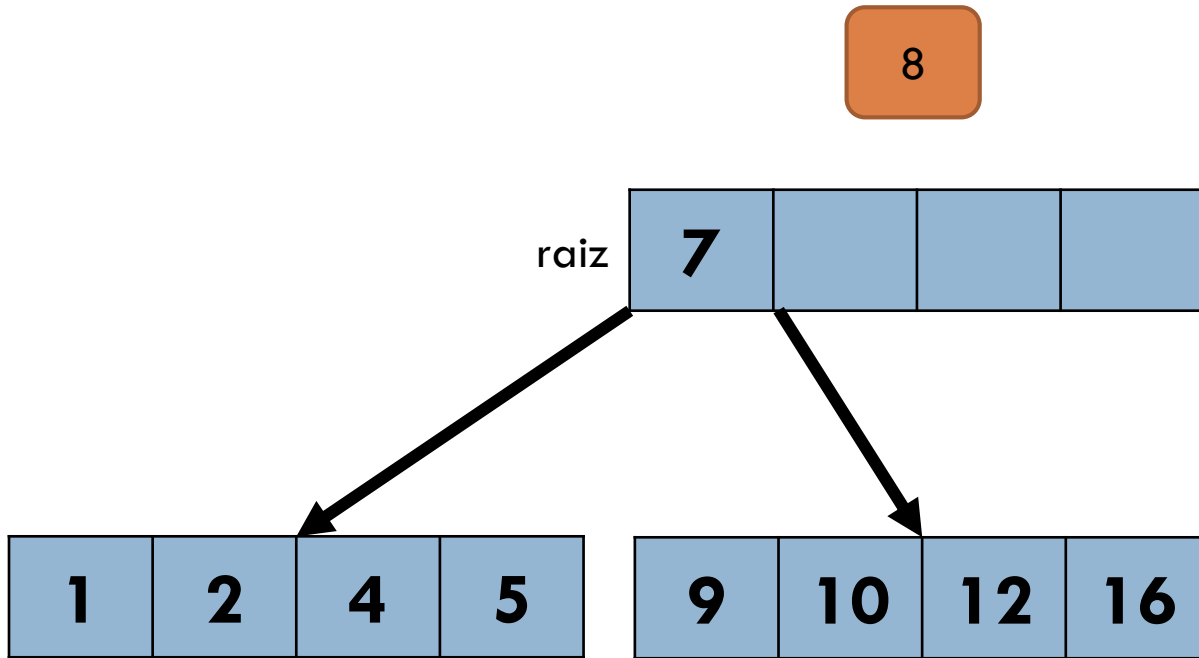
34



APÓS ALGUMAS INSERÇÕES.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

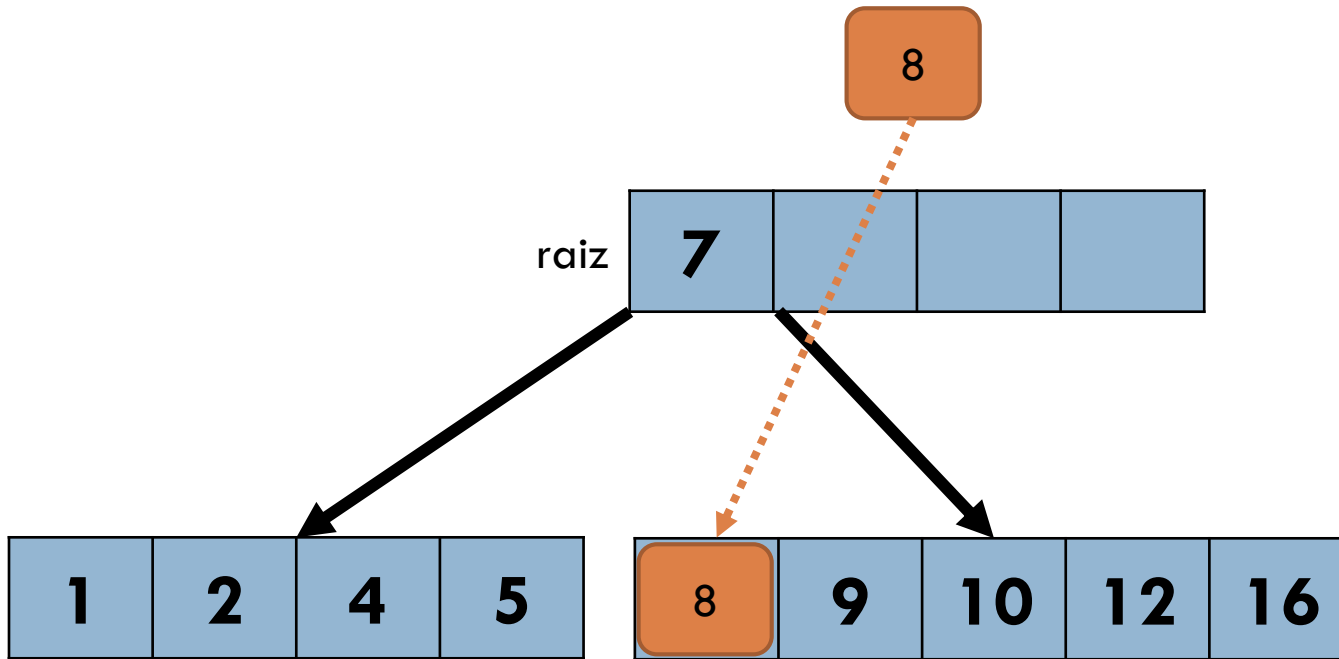
35



INSERIR VALOR NOVO.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

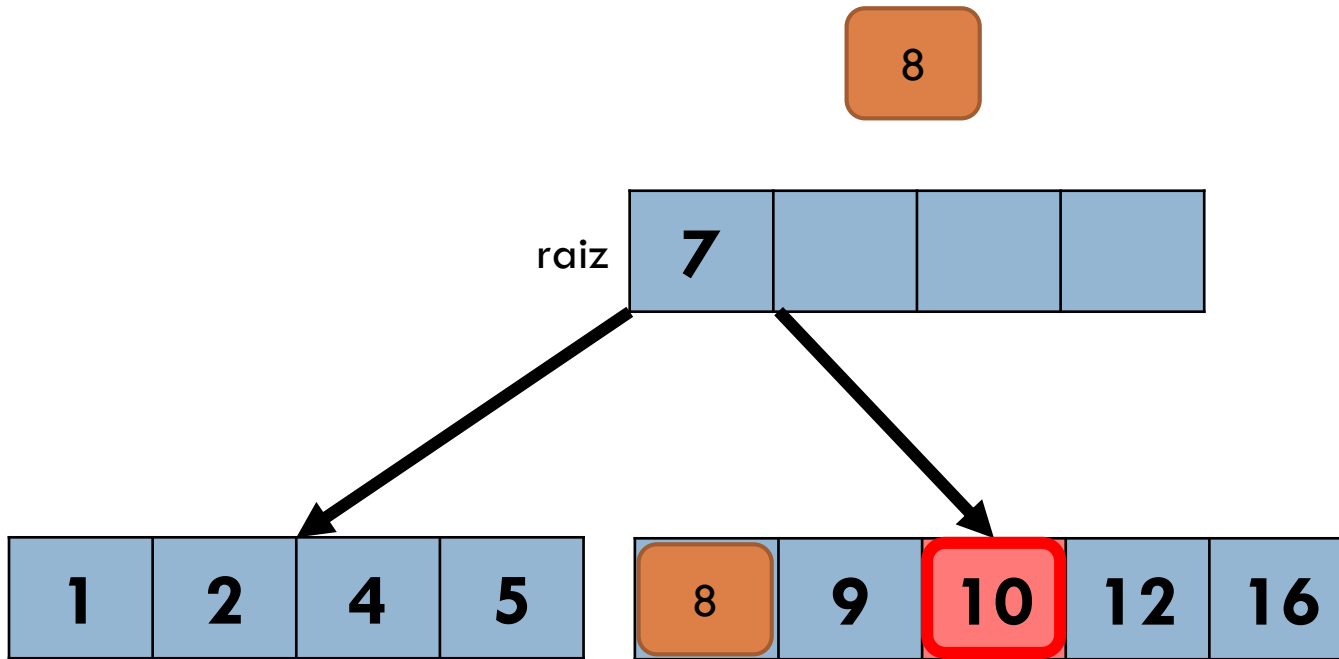
36



**INSERIR VALOR NOVO MANTENDO A
ORDEM NA LISTA.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

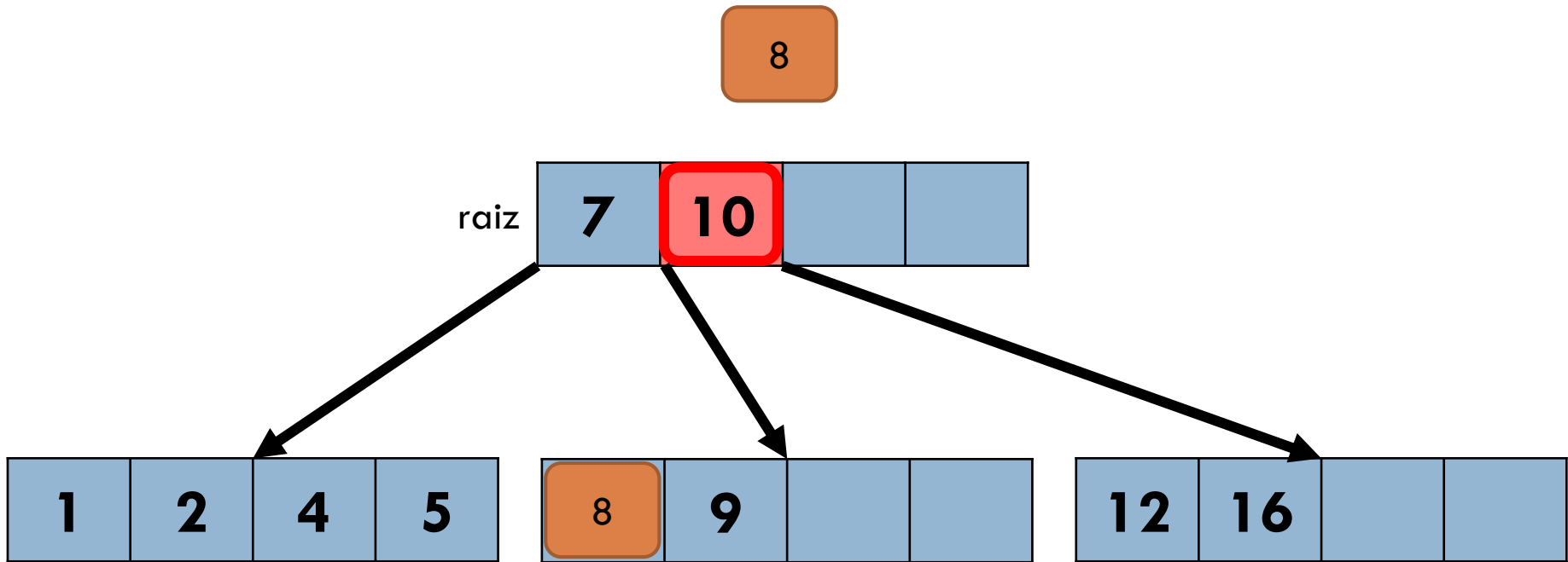
37



**SELECIONAR ELEMENTO DO MEIO DA LISTA
PARA SER PAI DOS DEMAIS.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

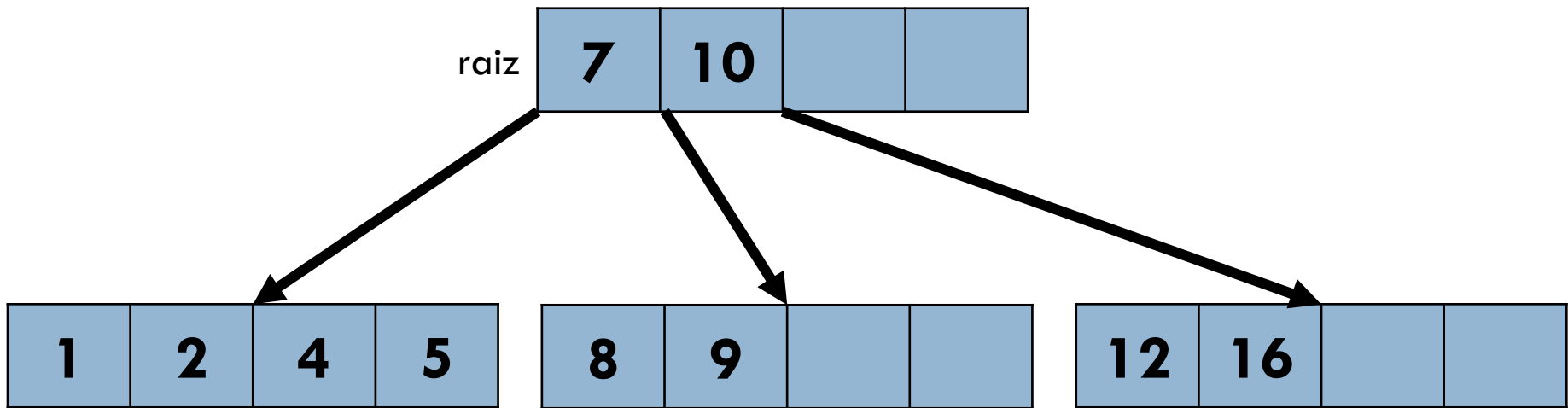
38



**PROMOVER O ELEMENTO CENTRAL PARA
UMA PÁGINA PAI.
DIVIDIR ELEMENTOS EM DUAS NOVAS
PAGINAS FILHO.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

39



**ÁRVORE B DENTRO DOS LIMITES
ESPECIFICADOS PELA ORDEM.**

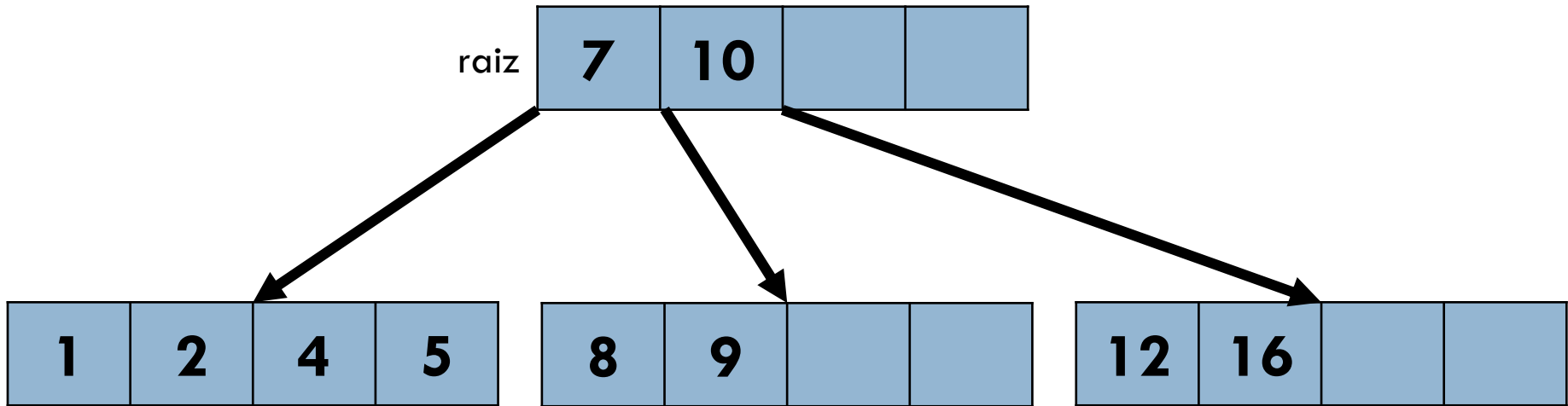
Remoção em Árvore B

40

- Algoritmo de remoção de um elemento:
 - ▣ Percorrer como em uma ABB até encontrar posição.
 - ▣ Se o valor não existe, retornar aviso.
 - ▣ Se estiver em uma **página folha**:
 - Se $N > m$, apenas remove o elemento.
 - Se $N == m$:
 - Emprestar do irmão esquerdo ou direito (trocar com o pai).
 - Concatenar páginas irmãs e elemento pai, **caso não mantenham a ordem m** da árvore B.
 - ▣ Se for intermediário:
 - Substituir pelo **menor da subárvore direita** ou **maior da subárvore esquerda**. Concluir removendo o substituto.

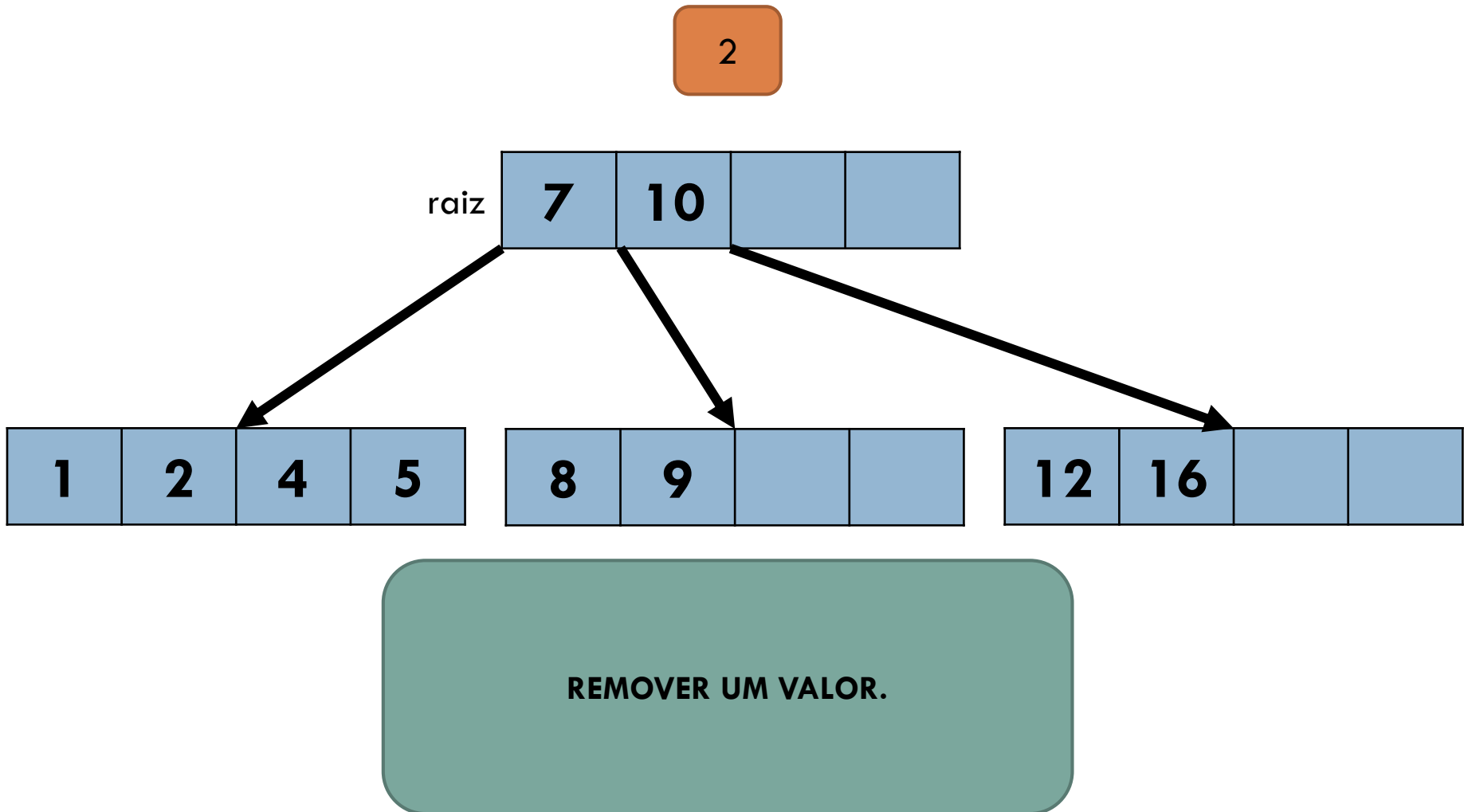
Exemplo de Inserção: $m = 2$

41



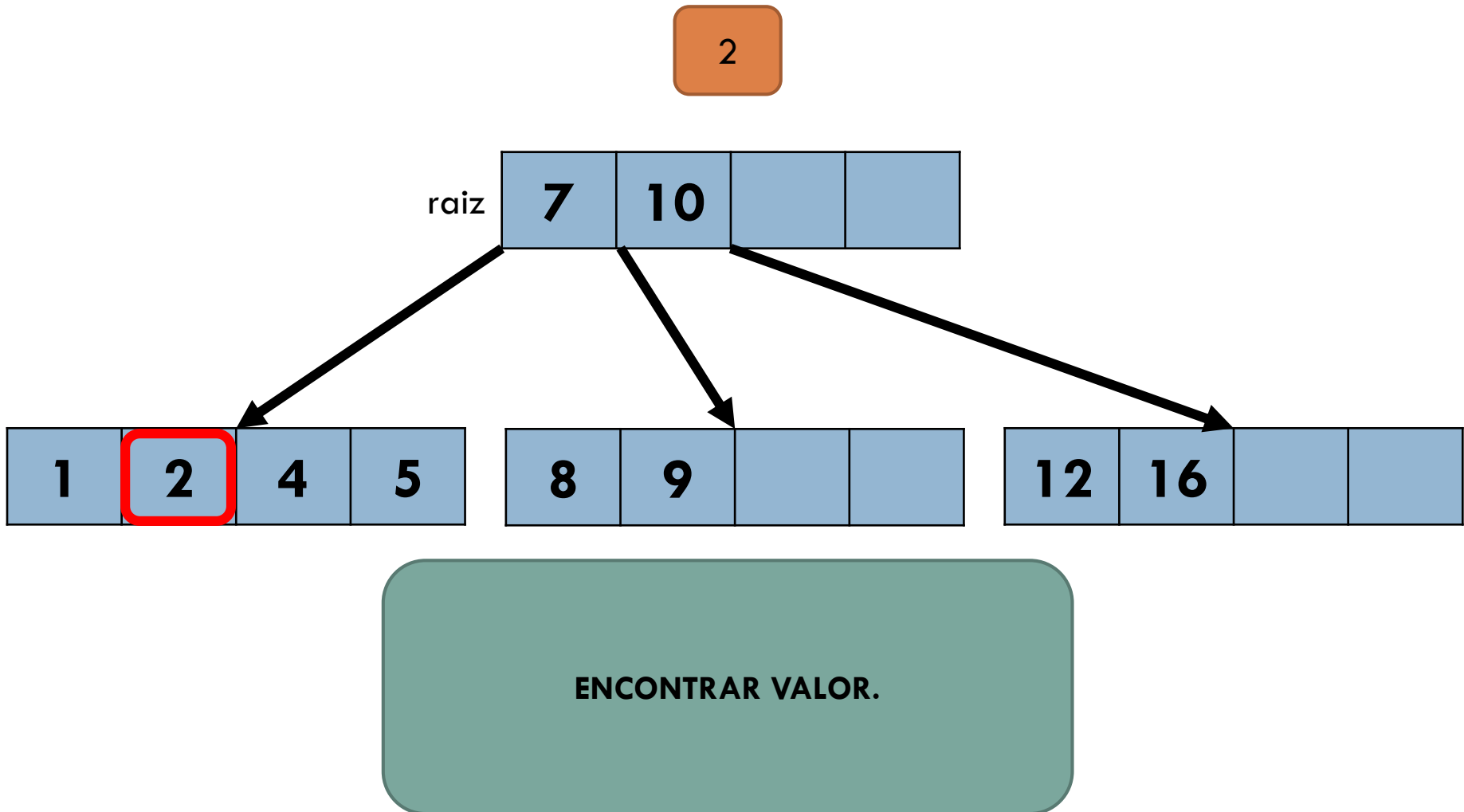
Exemplo de Inserção: $m = 2$

42



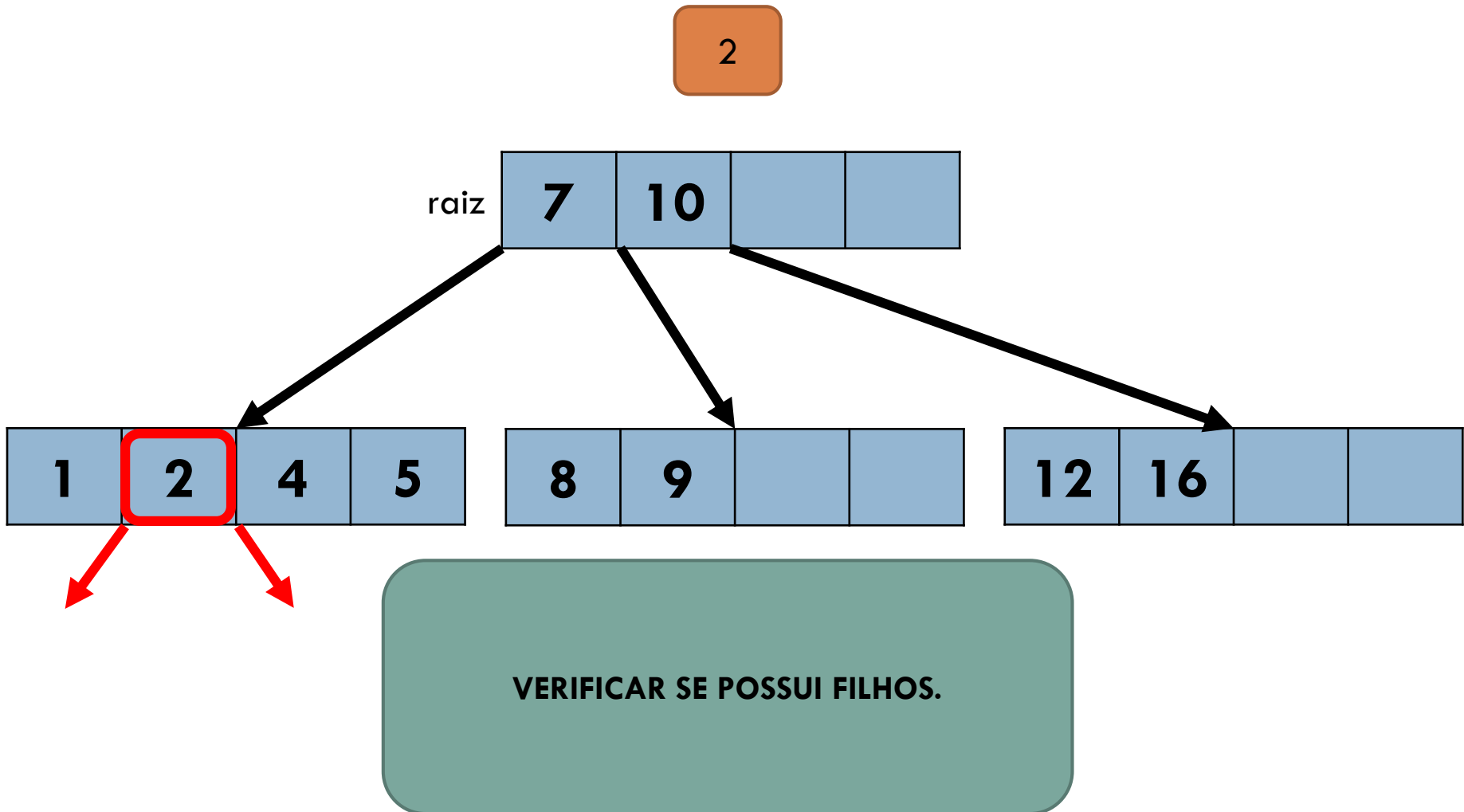
Exemplo de Inserção: $m = 2$

43



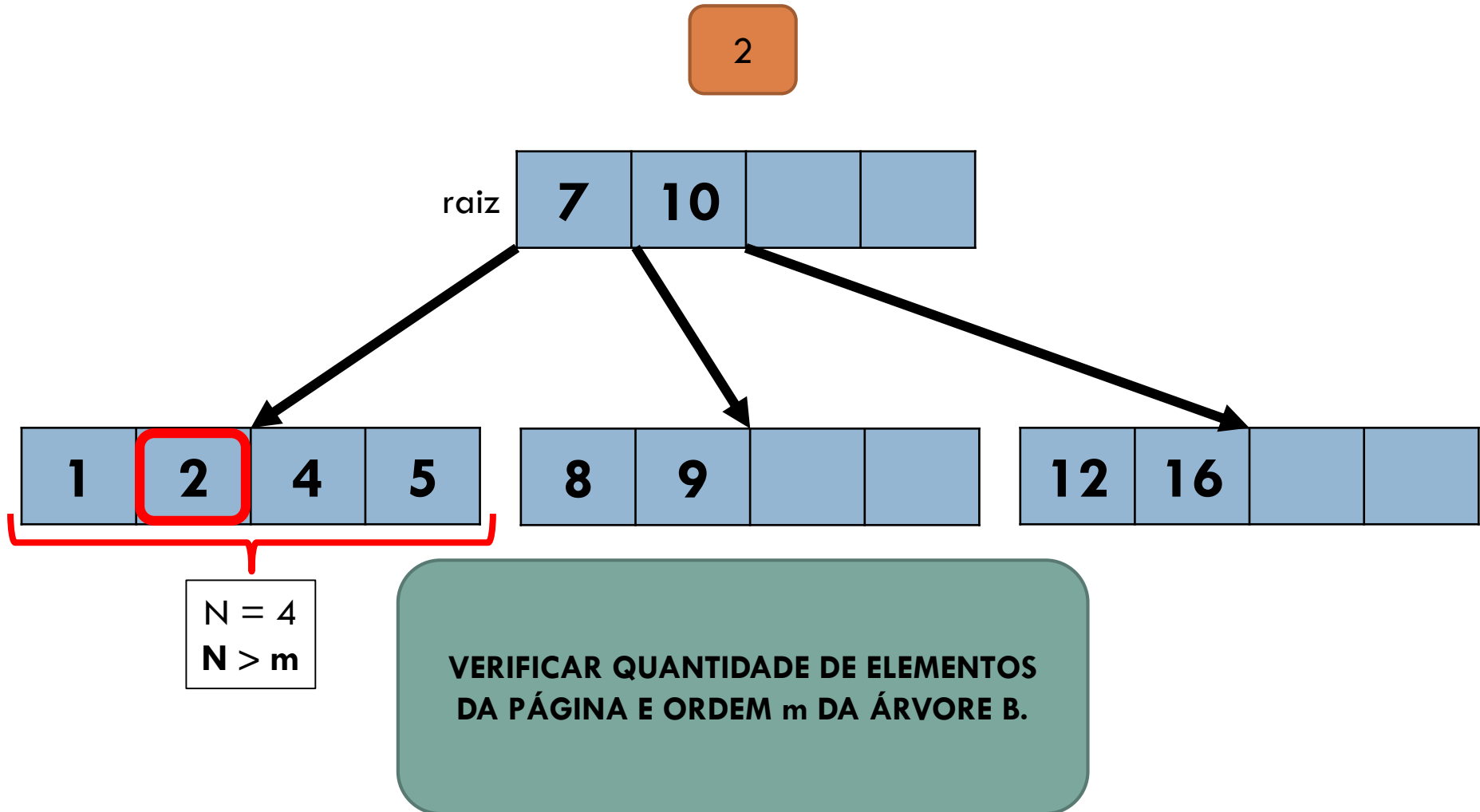
Exemplo de Inserção: $m = 2$

44



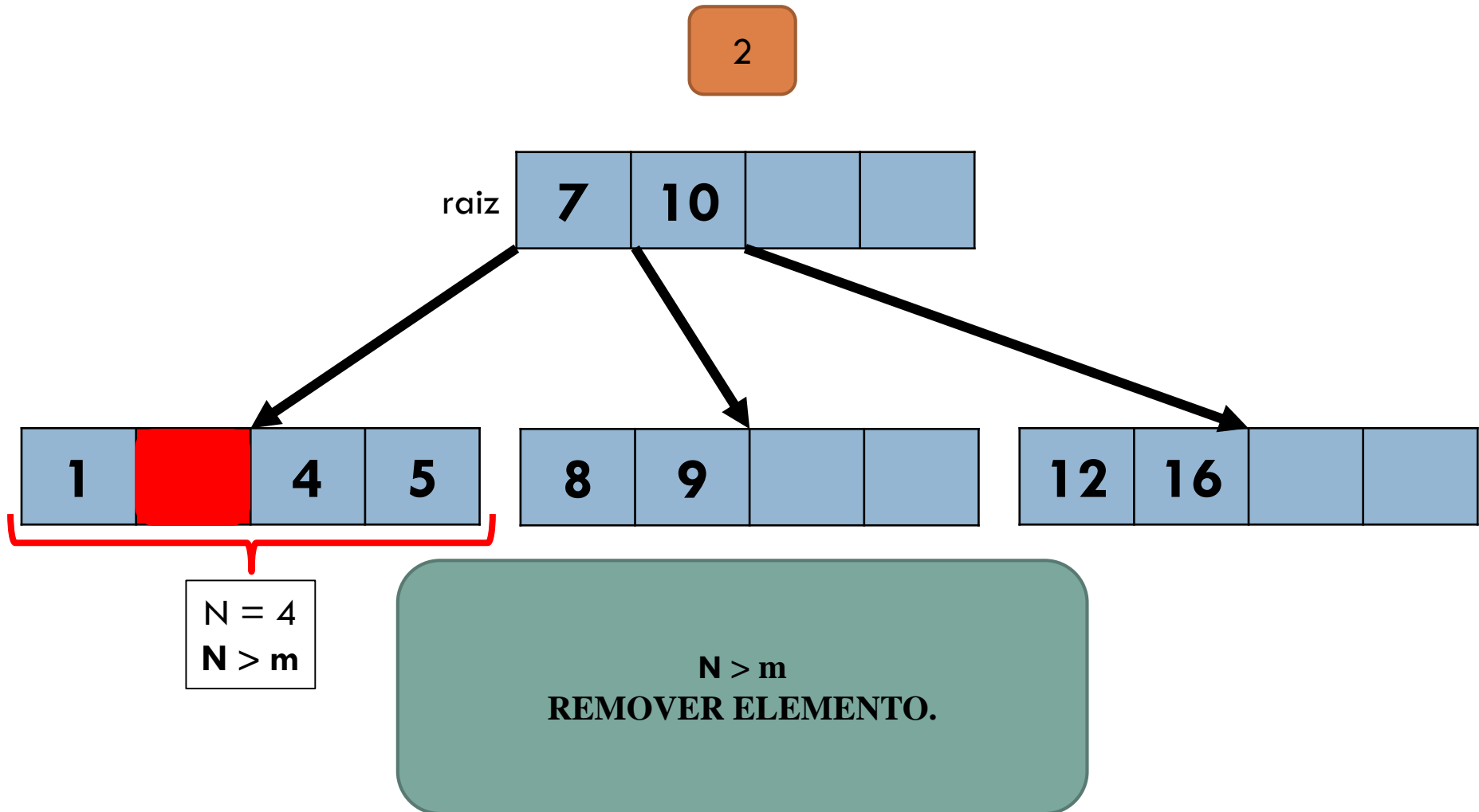
Exemplo de Inserção: $m = 2$

45



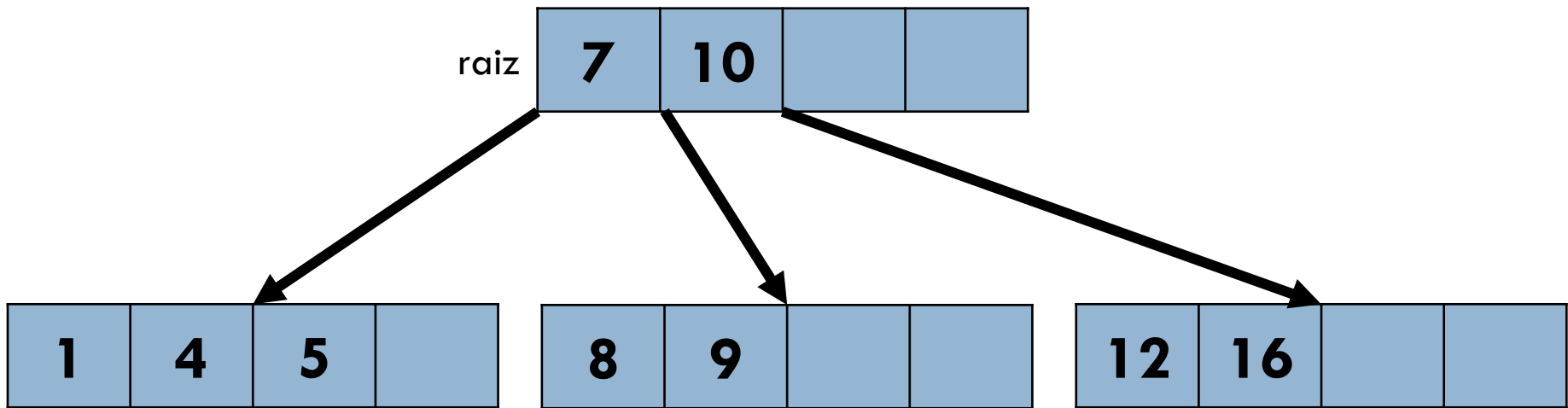
Exemplo de Inserção: $m = 2$

46



Exemplo de Inserção: $m = 2$

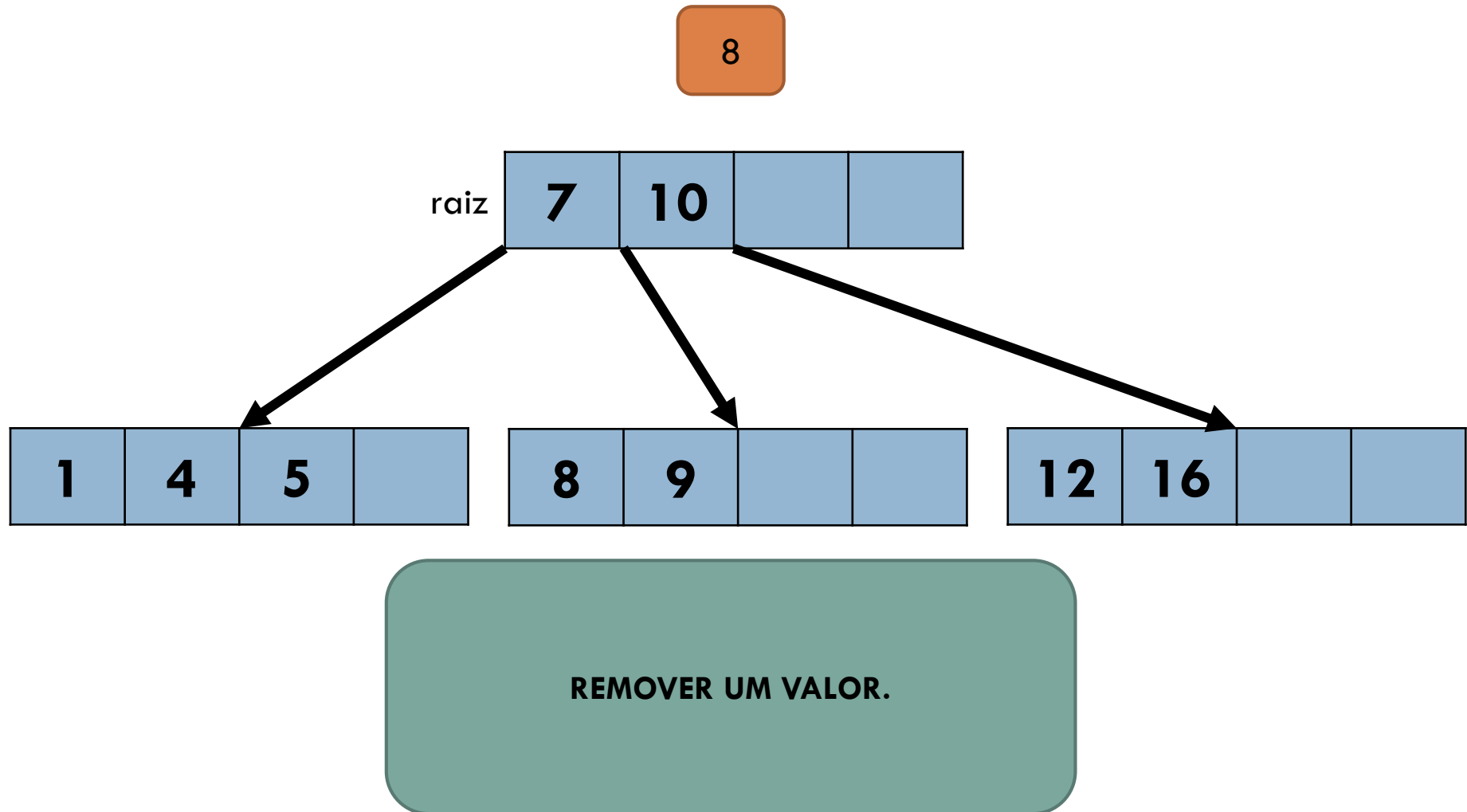
47



**ÁRVORE B DENTRO DOS LIMITES
ESPECIFICADOS PELA ORDEM.**

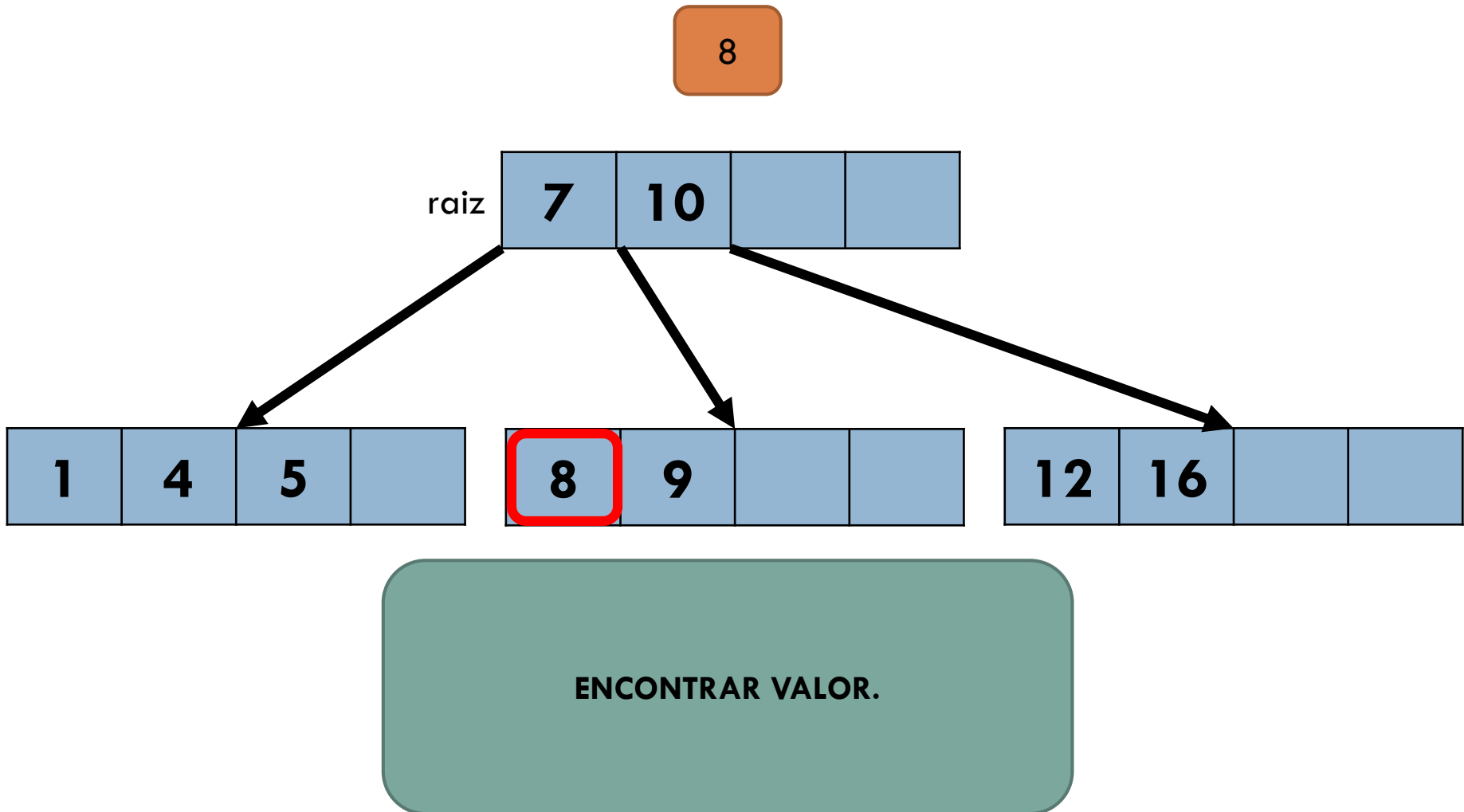
Exemplo de Inserção: $m = 2$

48



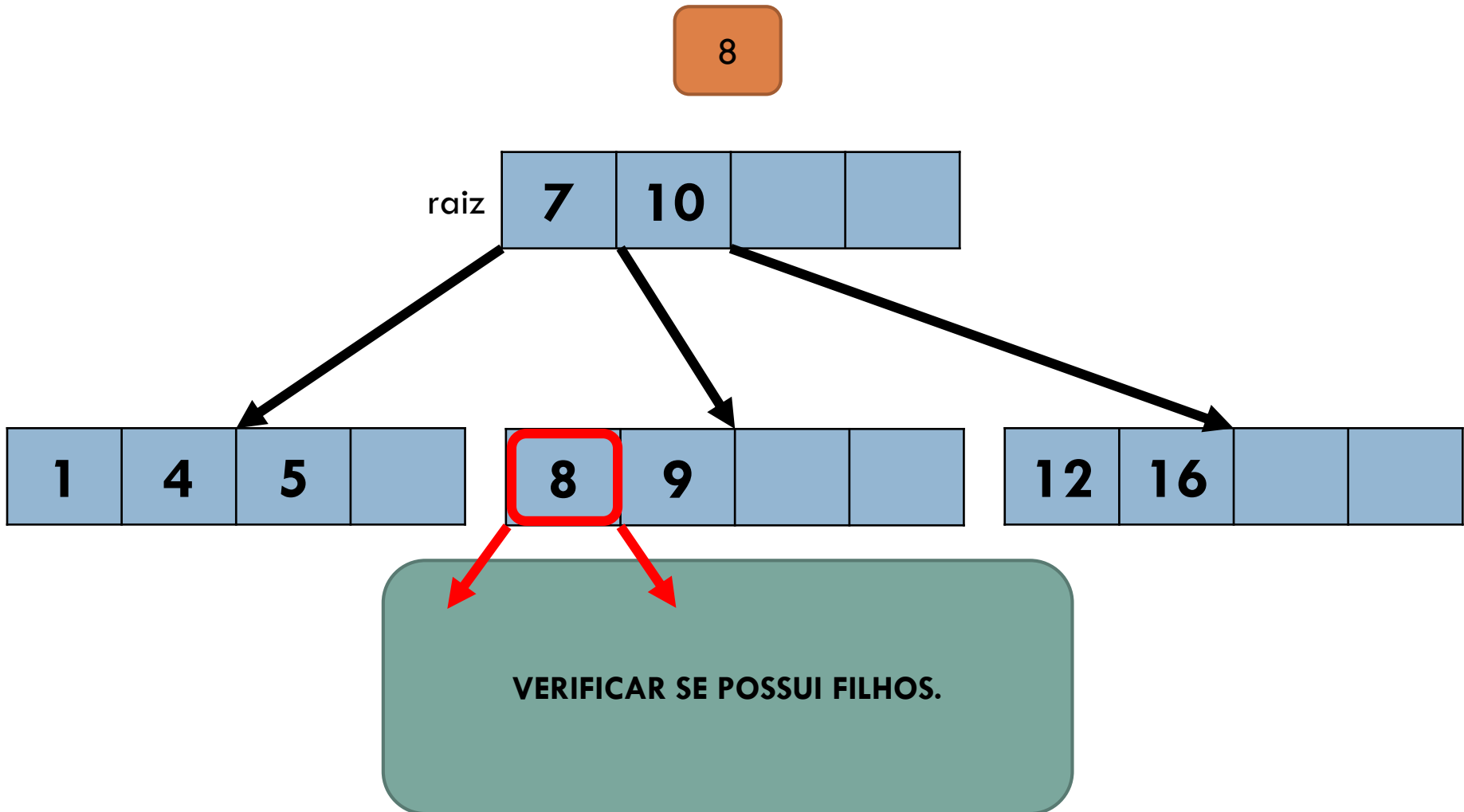
Exemplo de Inserção: $m = 2$

49



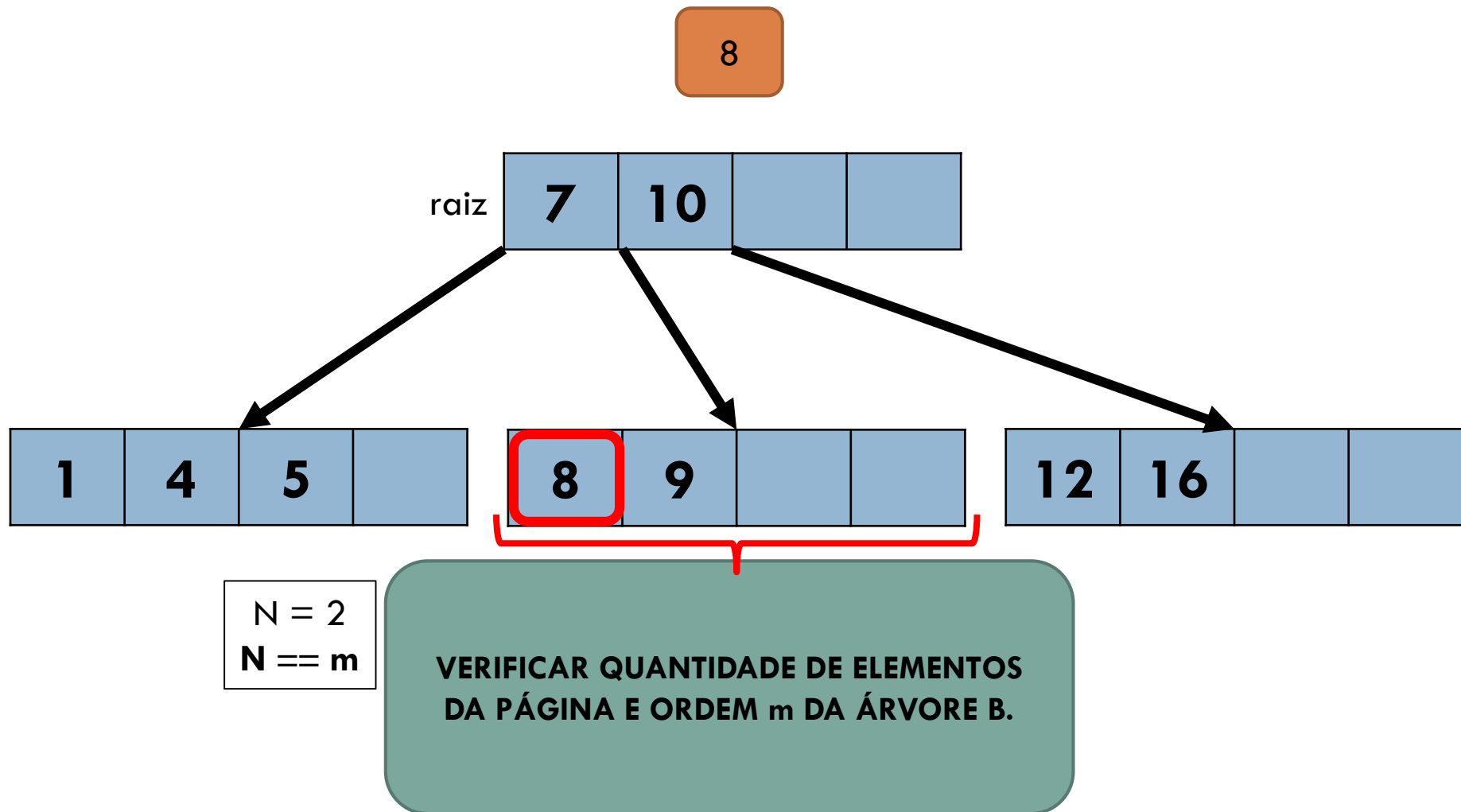
Exemplo de Inserção: $m = 2$

50



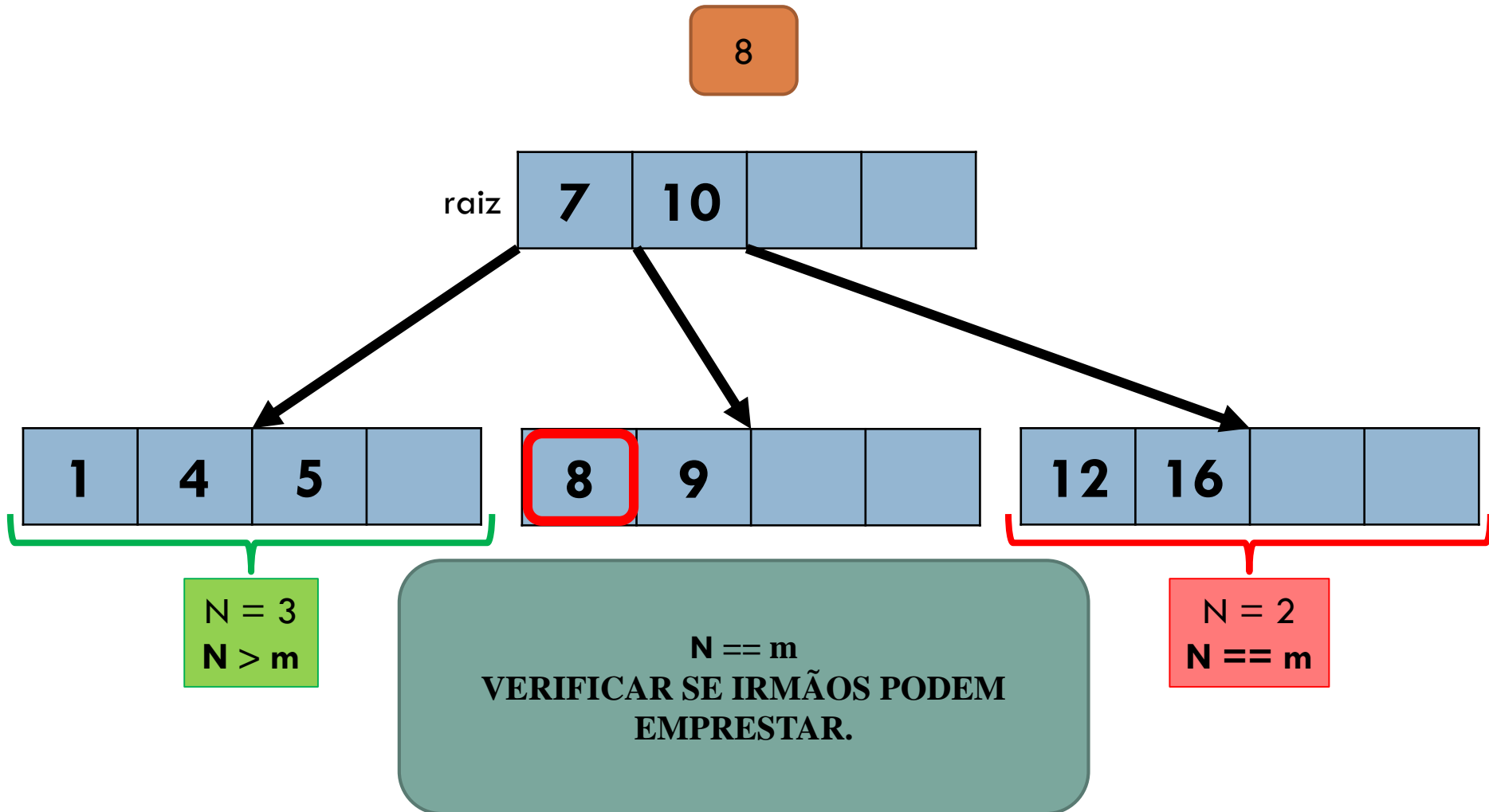
Exemplo de Inserção: $m = 2$

51



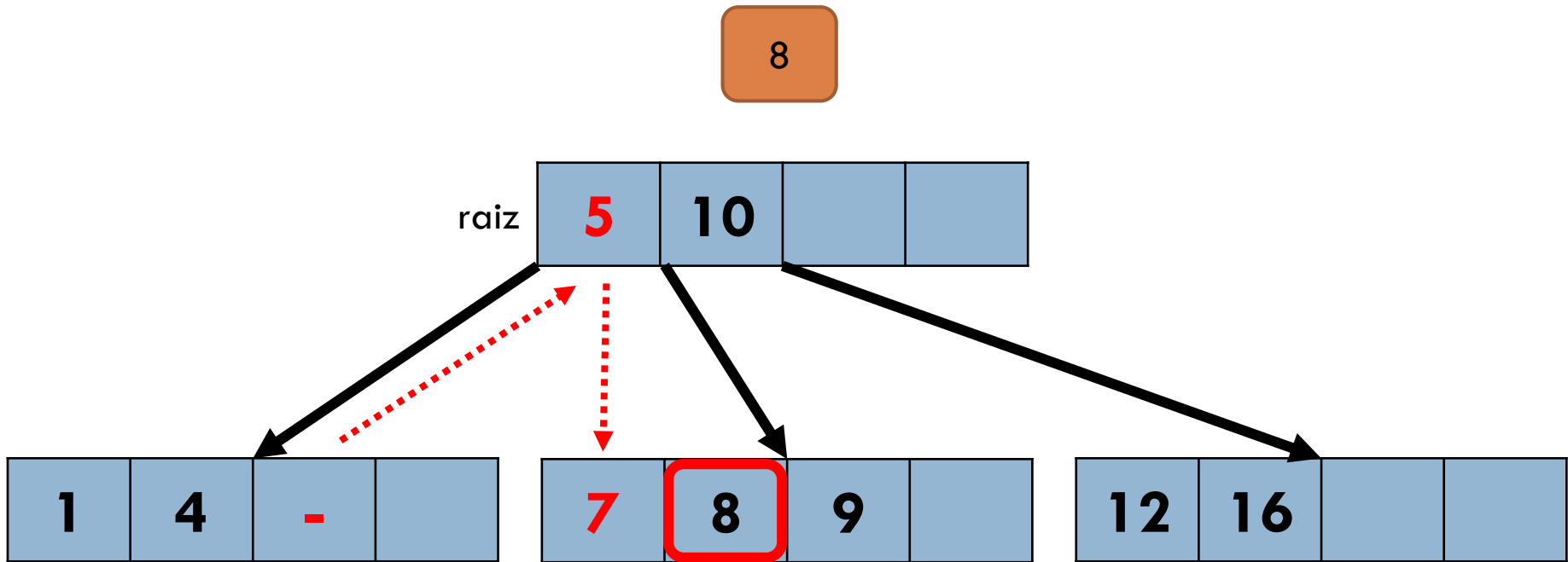
Exemplo de Inserção: $m = 2$

52



Exemplo de Inserção: $m = 2$

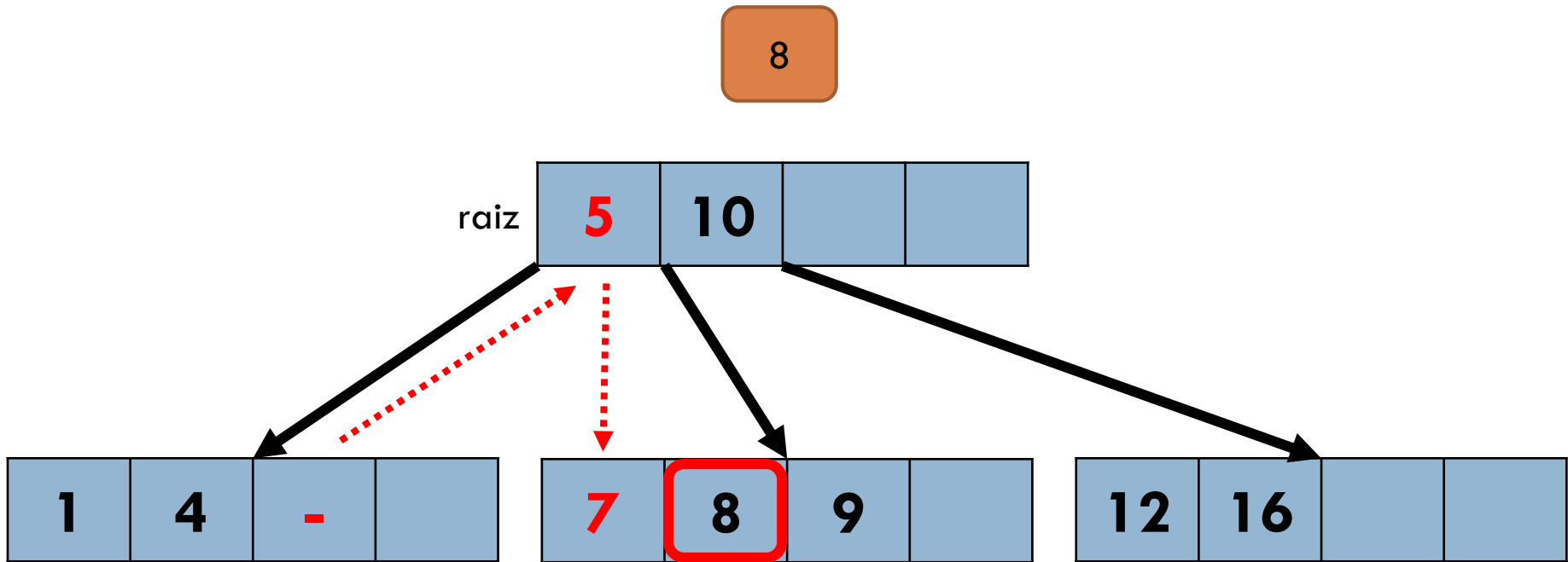
53



***MAIOR DA ESQUERDA TOMA LUGAR DO
ELEMENTO PAI.
PAI DESCE PARA PÁGINA DA REMOÇÃO,
MANTENDO ORDEM NA LISTA.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

54

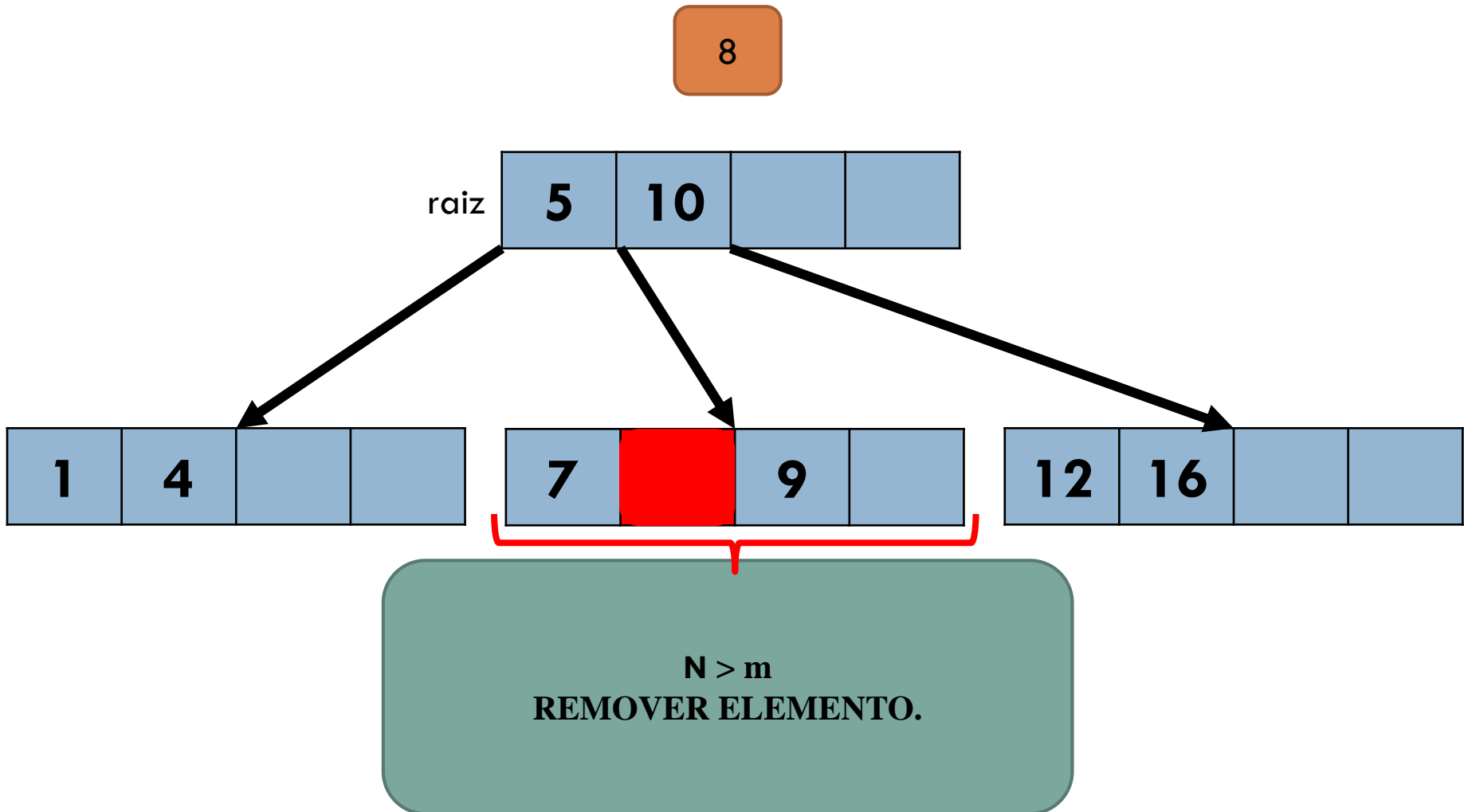


***MAIOR DA ESQUERDA TOMA LUGAR DO ELEMENTO PAI.
PAI DESCE PARA PÁGINA DA REMOÇÃO,
MANTENDO ORDEM NA LISTA.**

***MENOR DA DIREITA, CASO
SUBSTITUTO
ESTEJA NO
IRMÃO DA
DIREITA.**

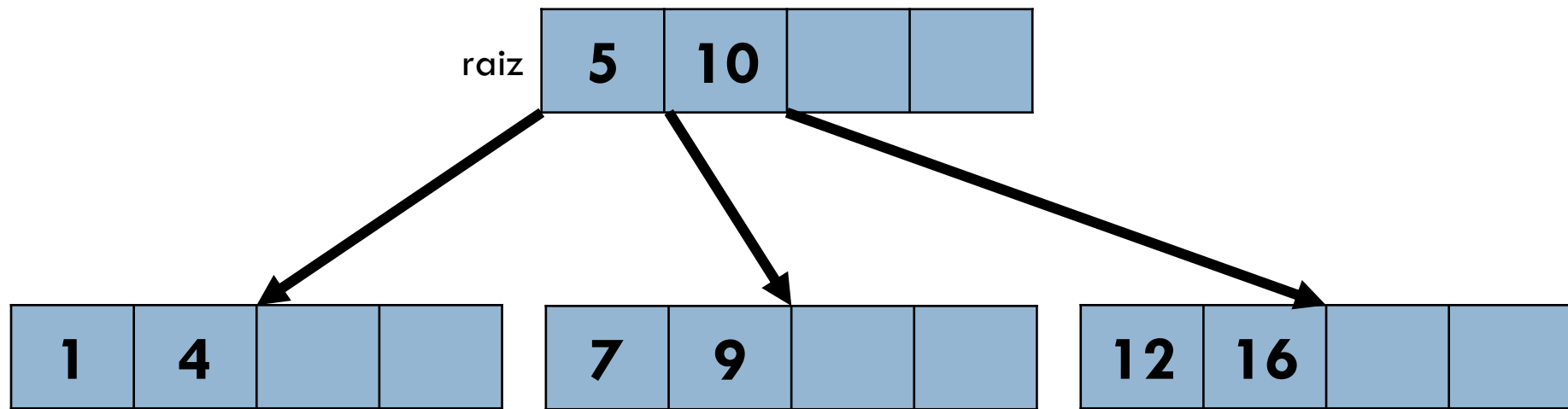
Exemplo de Inserção: $m = 2$

55



Exemplo de Inserção: $m = 2$

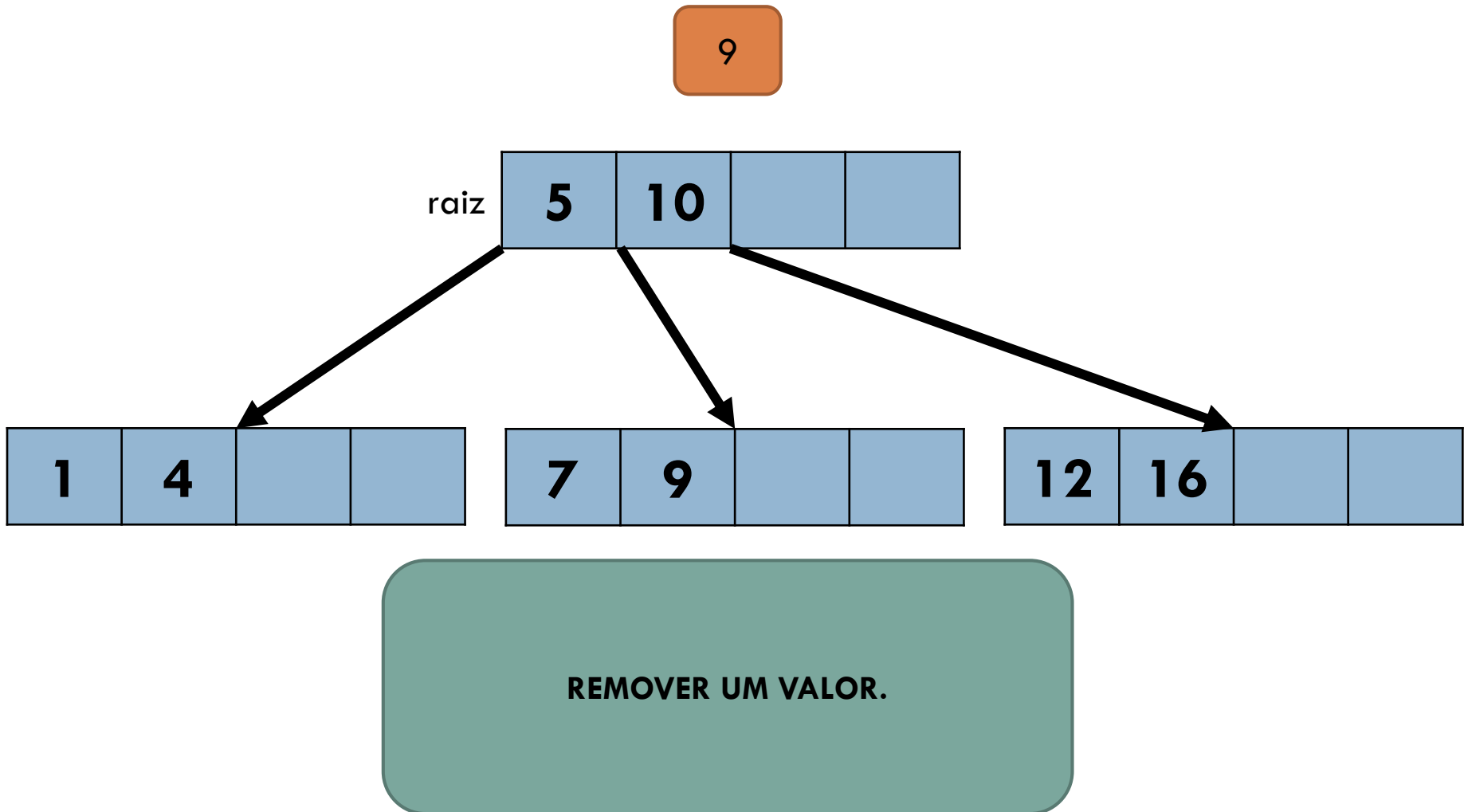
56



**ÁRVORE B DENTRO DOS LIMITES
ESPECIFICADOS PELA ORDEM.**

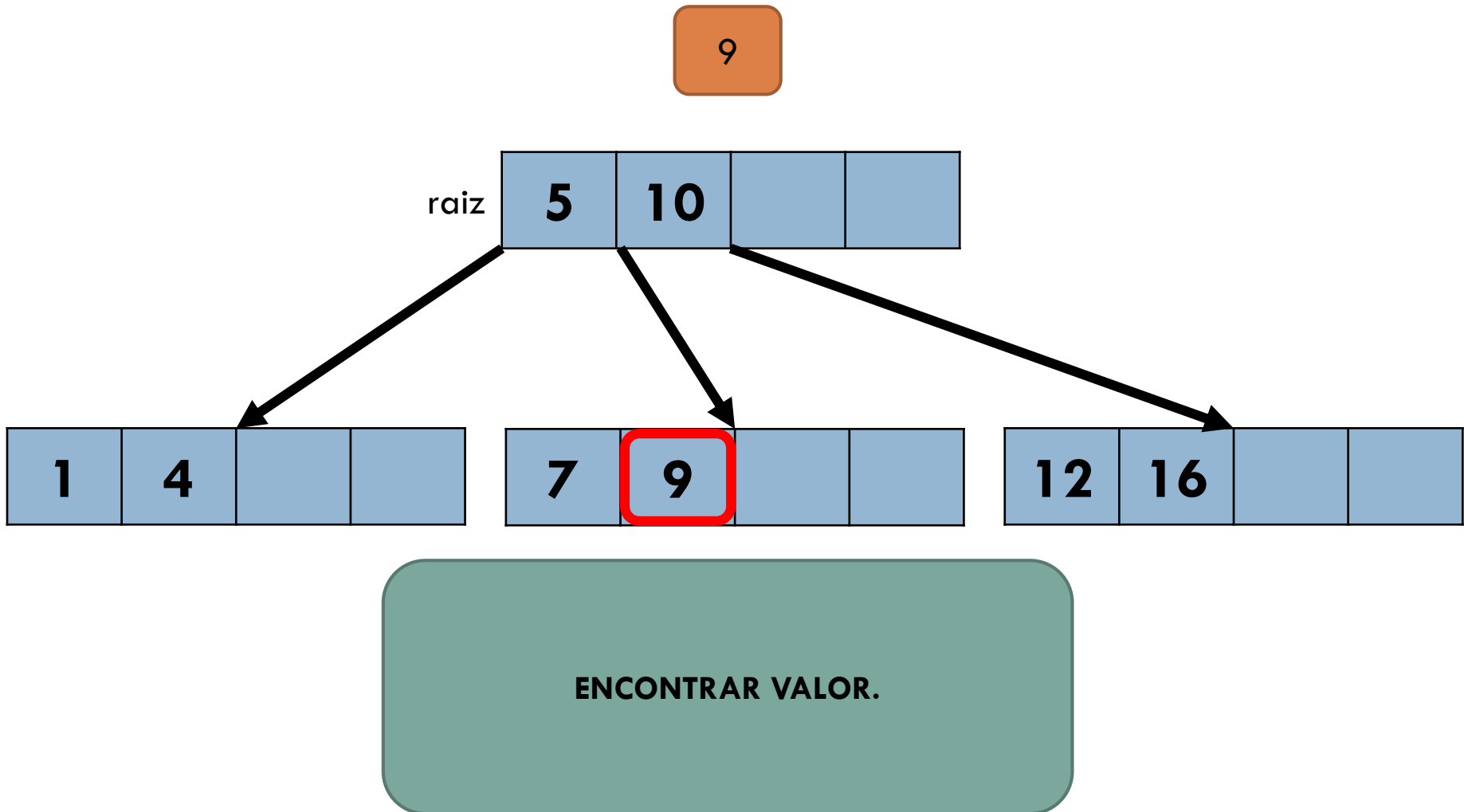
Exemplo de Inserção: $m = 2$

57



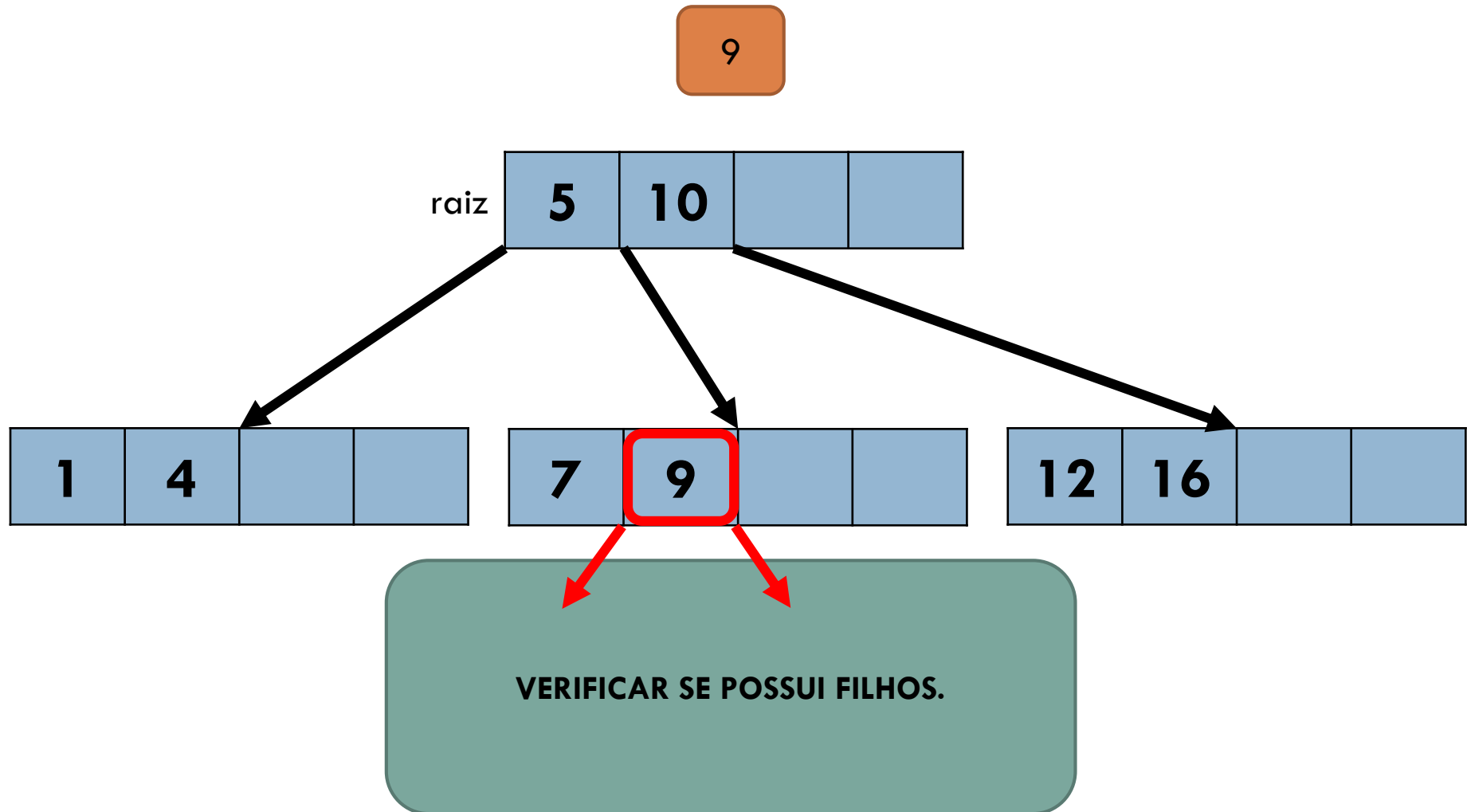
Exemplo de Inserção: $m = 2$

58



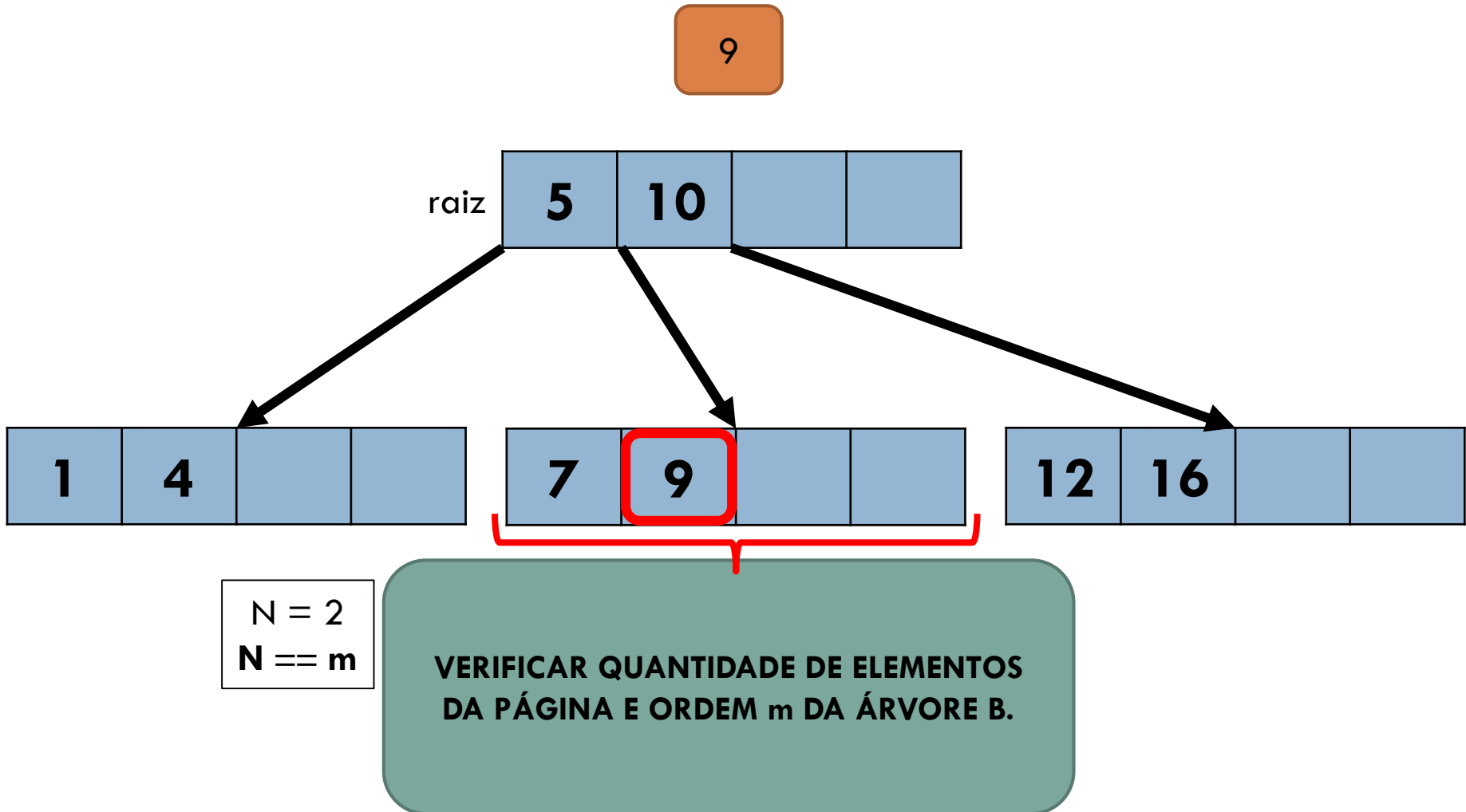
Exemplo de Inserção: $m = 2$

59



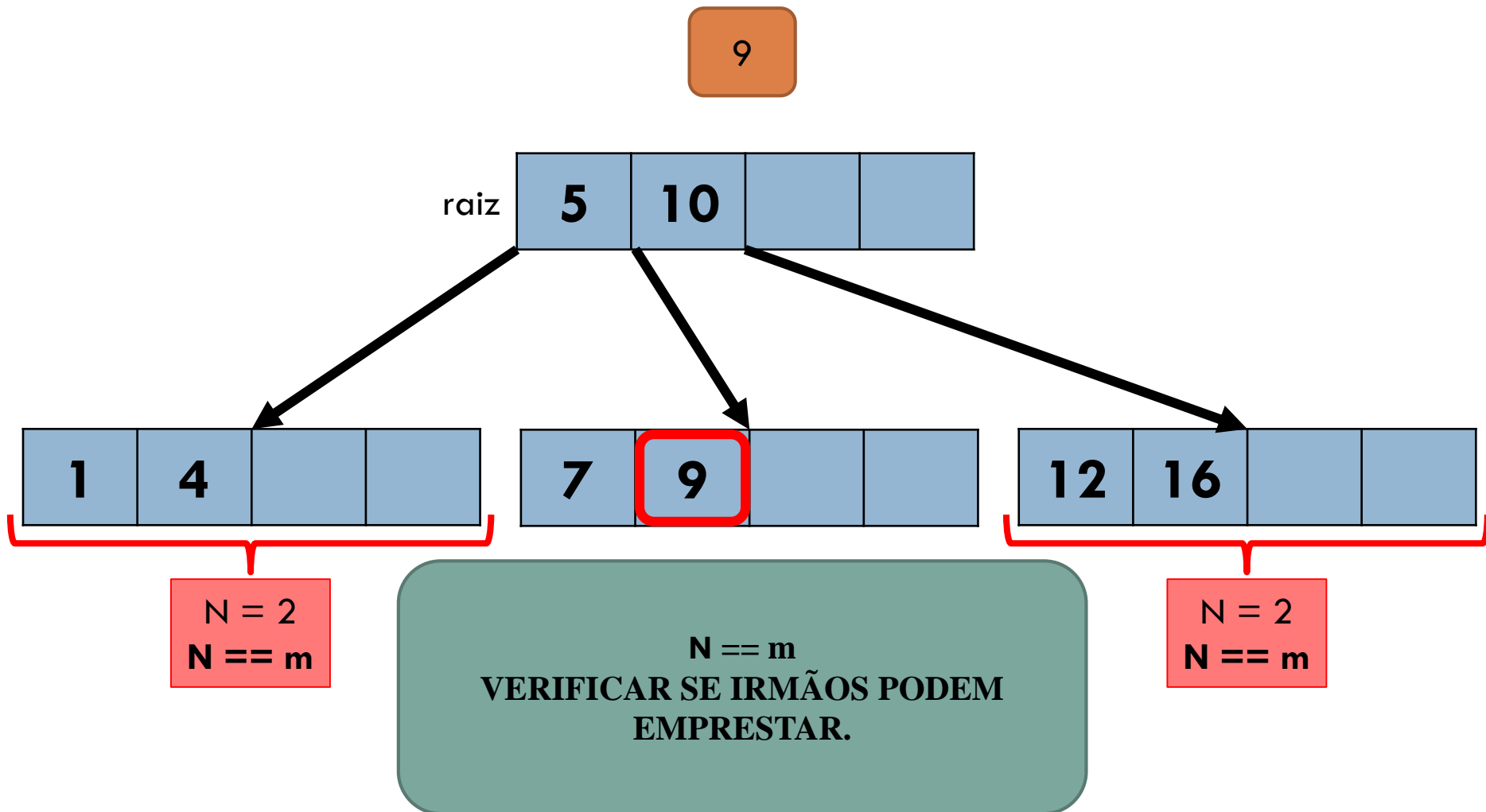
Exemplo de Inserção: $m = 2$

60



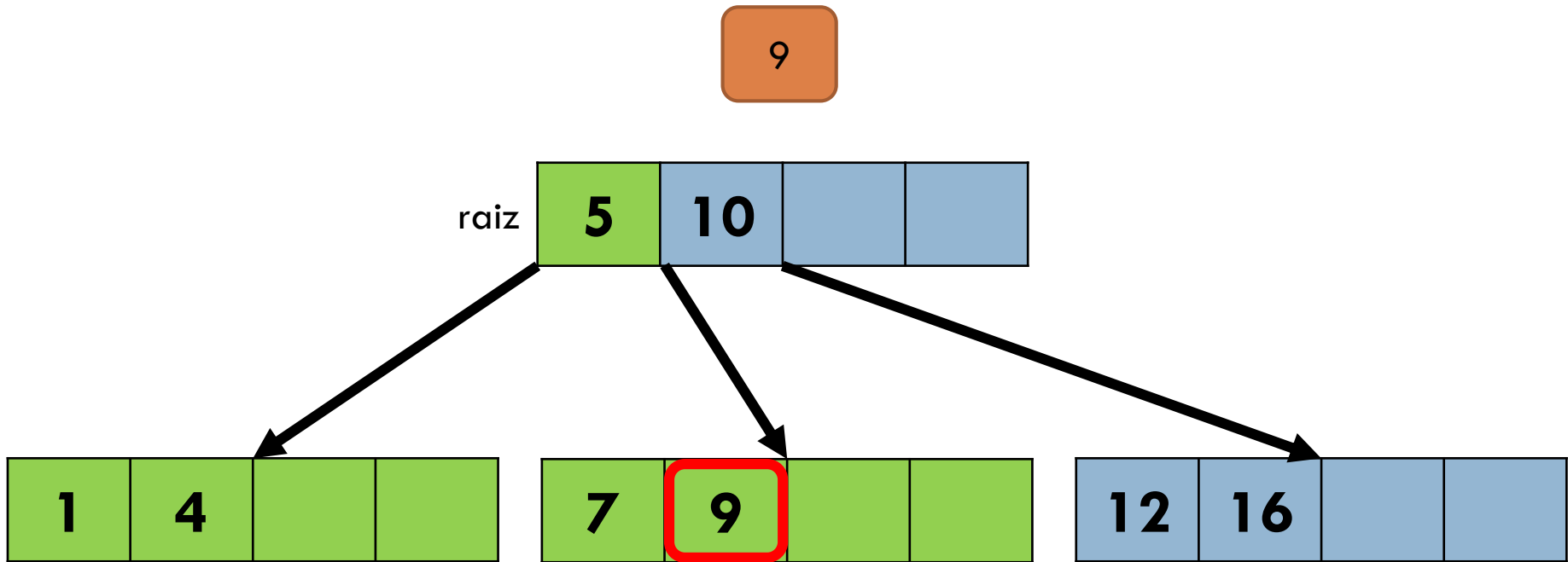
Exemplo de Inserção: $m = 2$

61



Exemplo de Inserção: $m = 2$

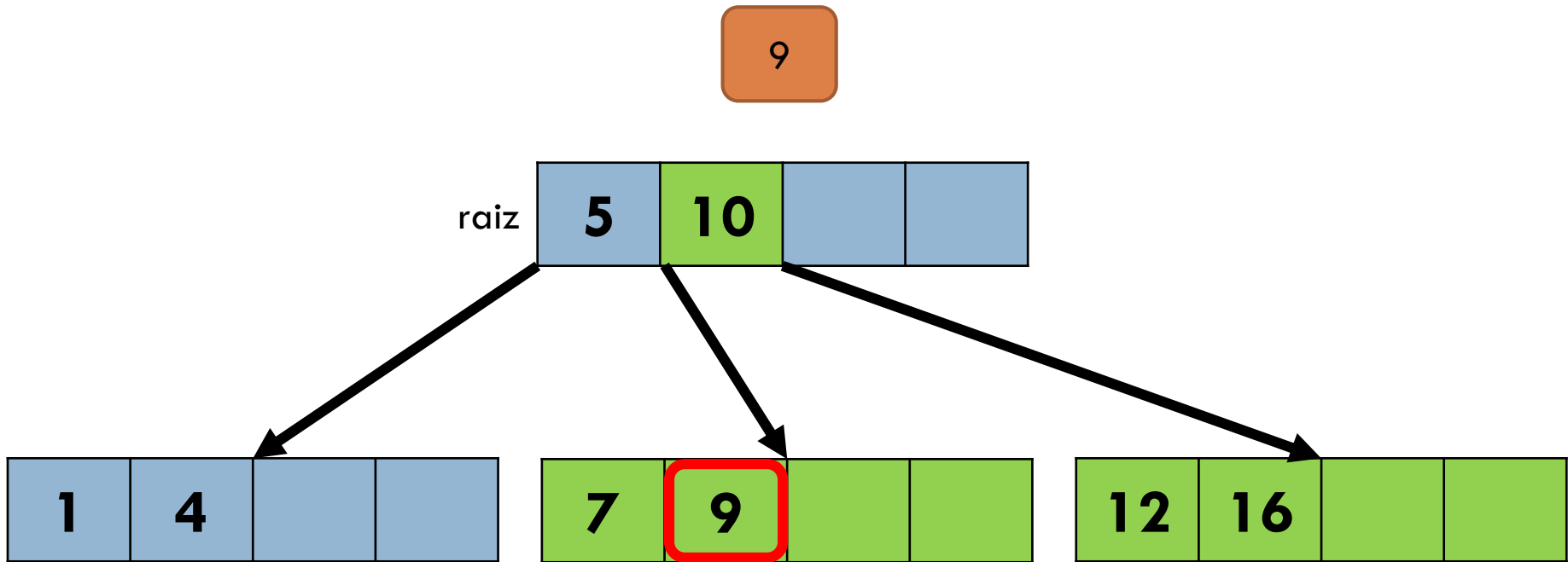
62



NENHUM PODE EMPRESTAR.
***CONCATENAR PÁGINA DA REMOÇÃO, PAI**
E PÁGINA IRMÃ.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

63

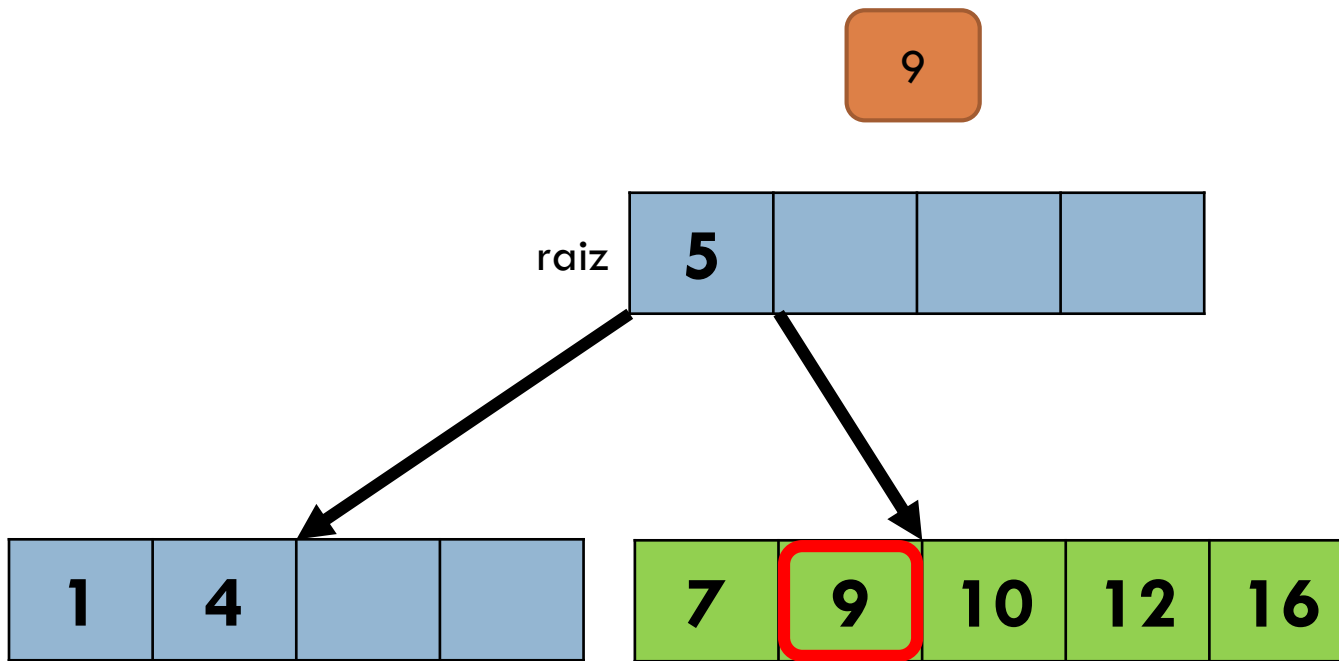


NENHUM PODE EMPRESTAR.
***CONCATENAR PÁGINA DA REMOÇÃO, PAI**
E PÁGINA IRMÃ.

***MANTER**
ORDEM DE
SELEÇÃO DE
QUAL IRÁ
CONCATENAR.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

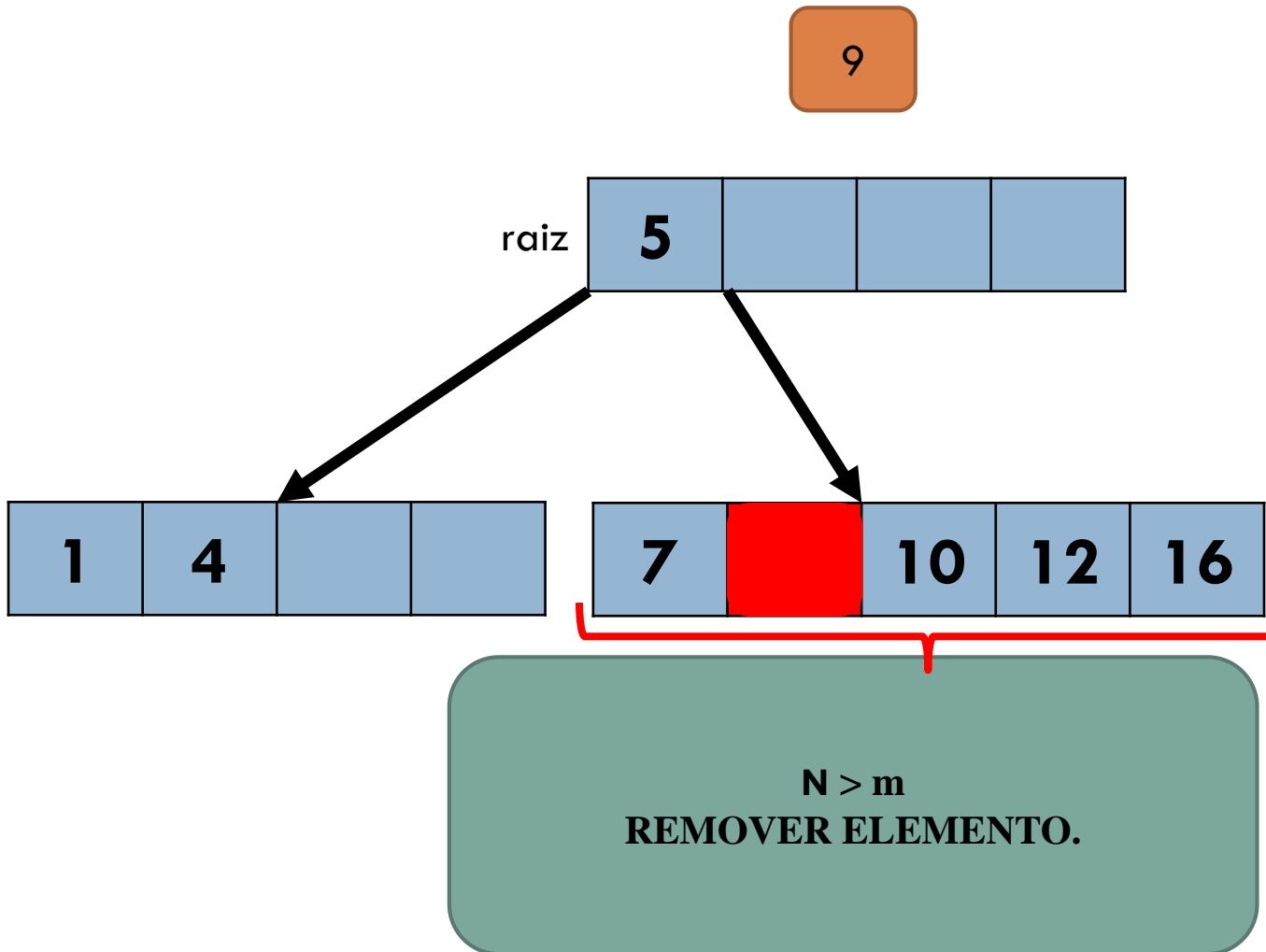
64



**NENHUM PODE EMPRESTAR.
CONCATENAR PÁGINA DA REMOÇÃO, PAI
E PÁGINA IRMÃ.**

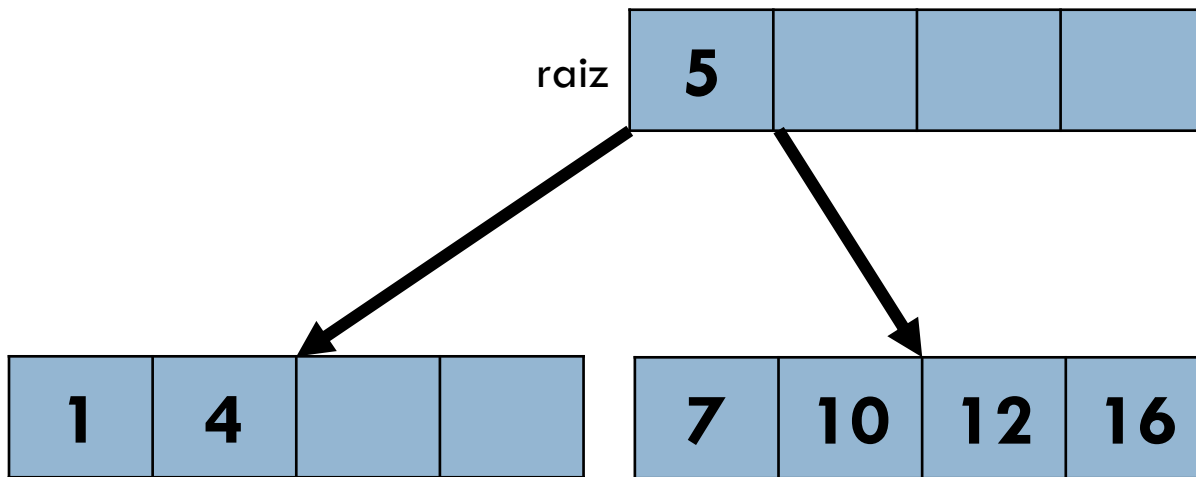
Exemplo de Inserção: $m = 2$

65



Exemplo de Inserção: $m = 2$

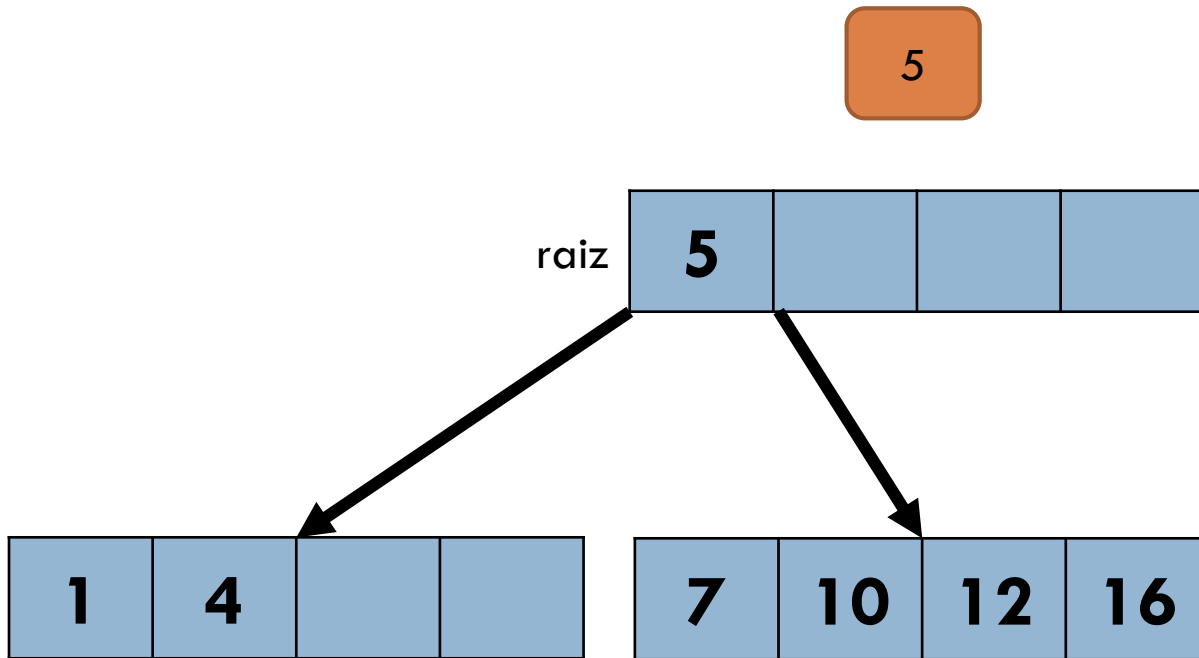
66



**ÁRVORE B DENTRO DOS LIMITES
ESPECIFICADOS PELA ORDEM.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

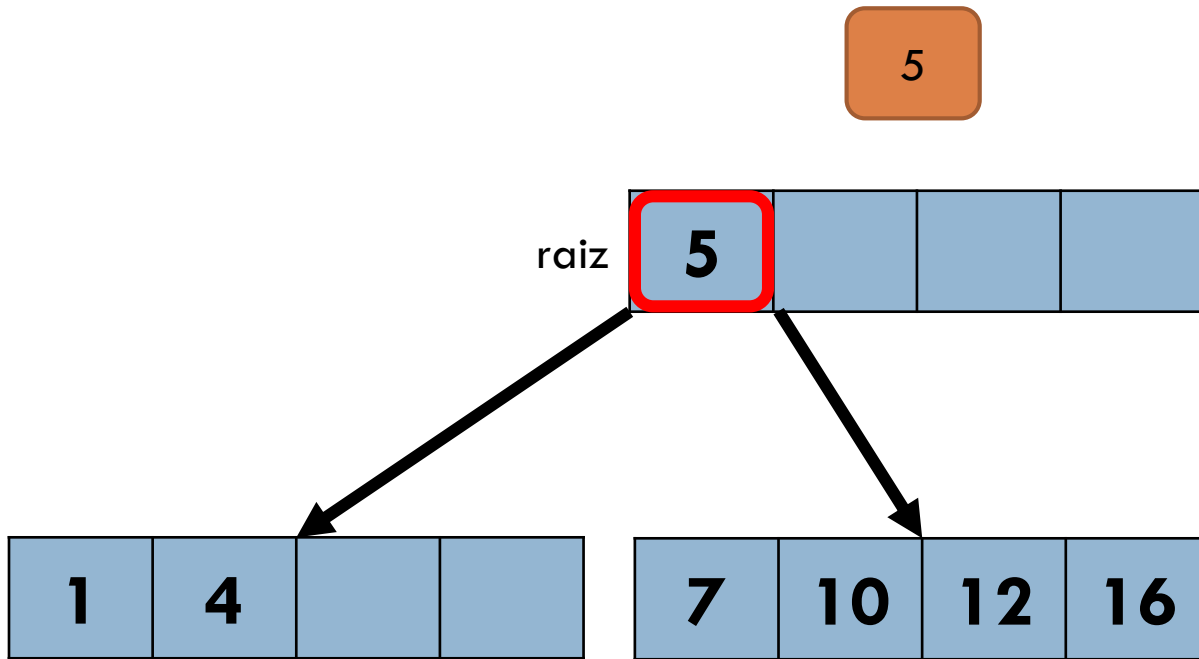
67



REMOVER UM VALOR.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

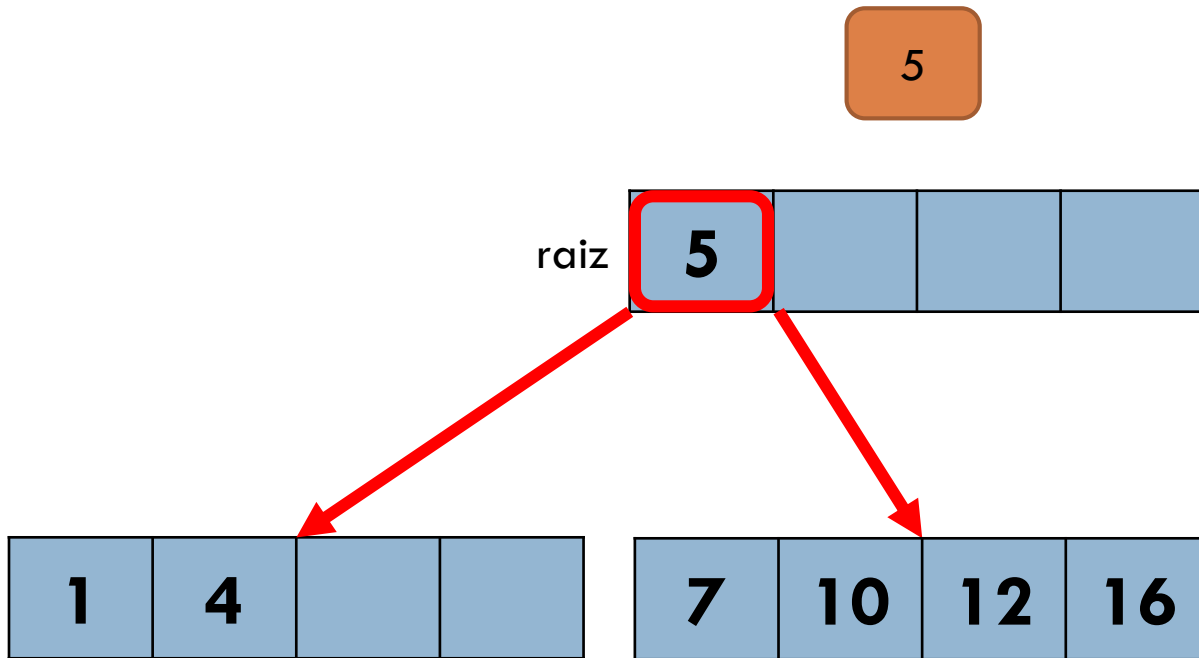
68



ENCONTRAR VALOR.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

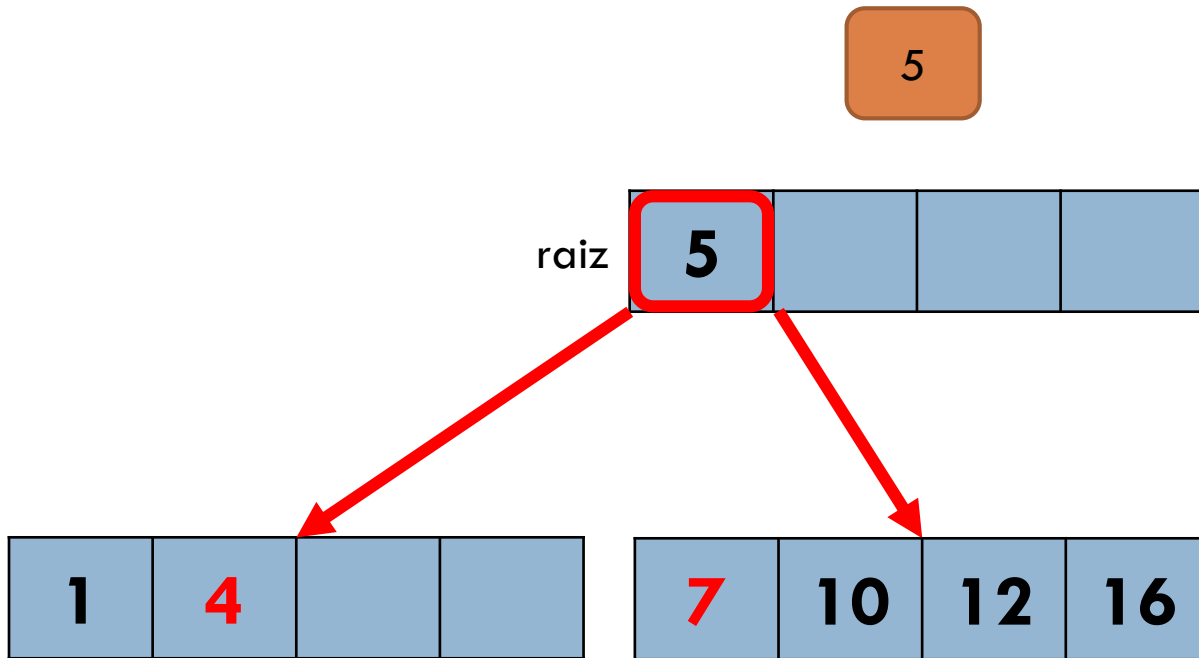
69



VERIFICAR SE POSSUI FILHOS.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

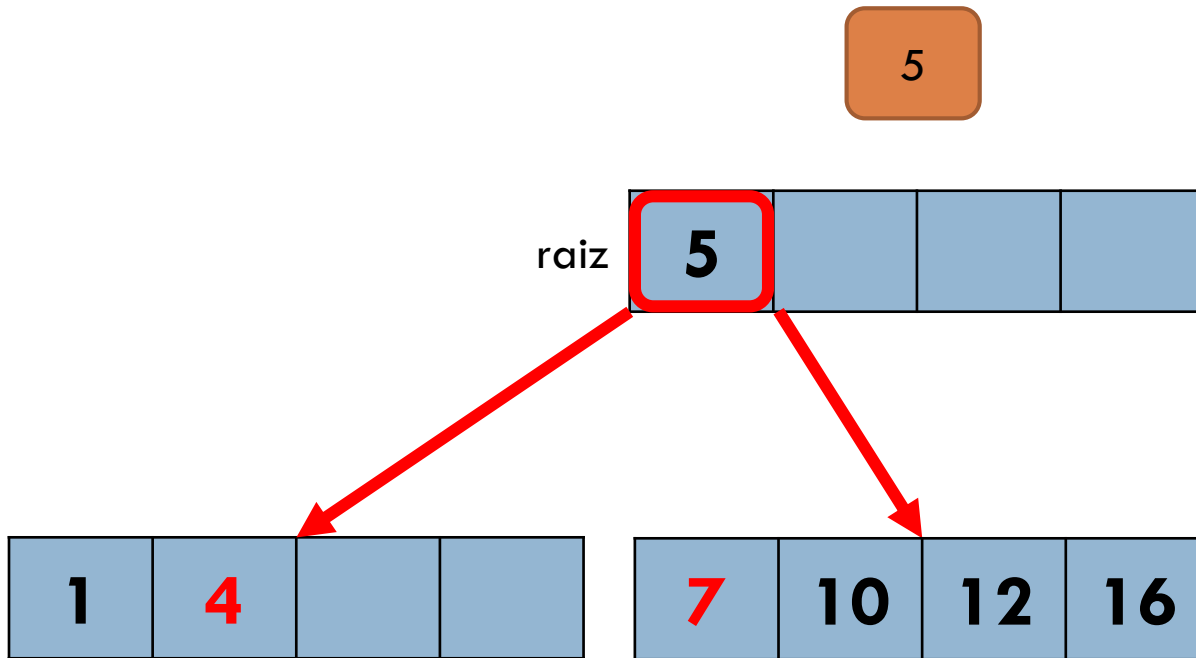
70



NÓ INTERMEDIÁRIO.
***SUBSTITUIR PELO MAIOR DA ESQUERDA**
OU SUBSTITUIR PELO MENOR DA DIREITA.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

71

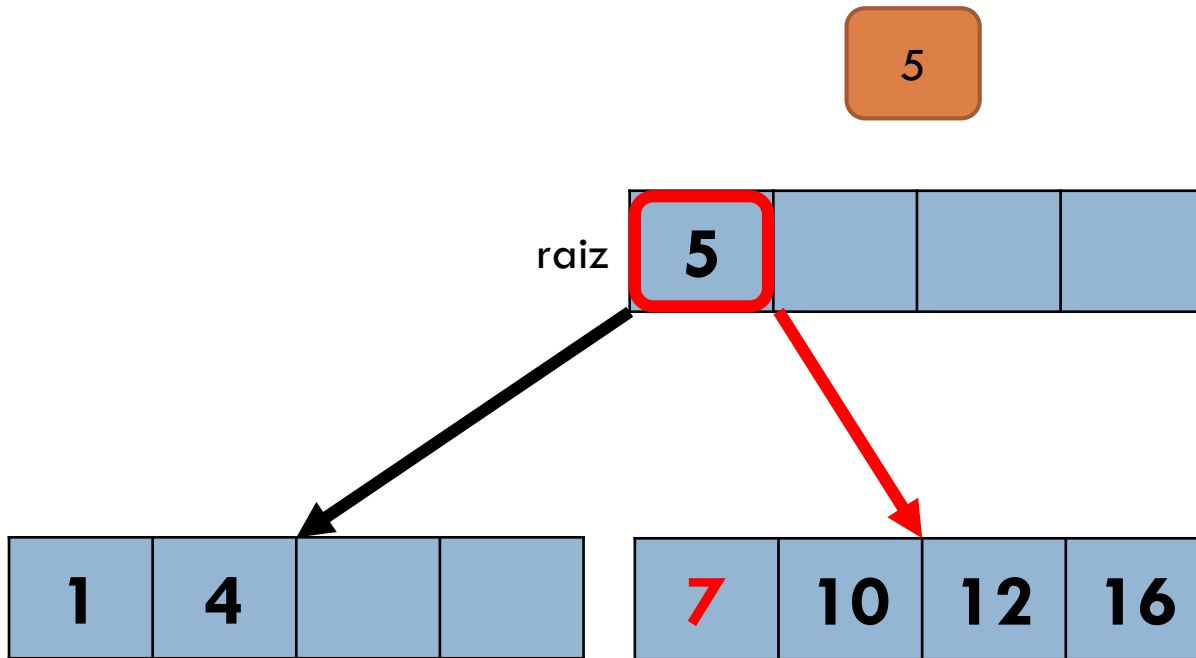


NÓ INTERMEDIÁRIO.
***SUBSTITUIR PELO MAIOR DA ESQUERDA**
OU SUBSTITUIR PELO MENOR DA DIREITA.

***SEMPRE SEGUIR
O MESMO
ALGORITMO
SELECIONADO.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

72

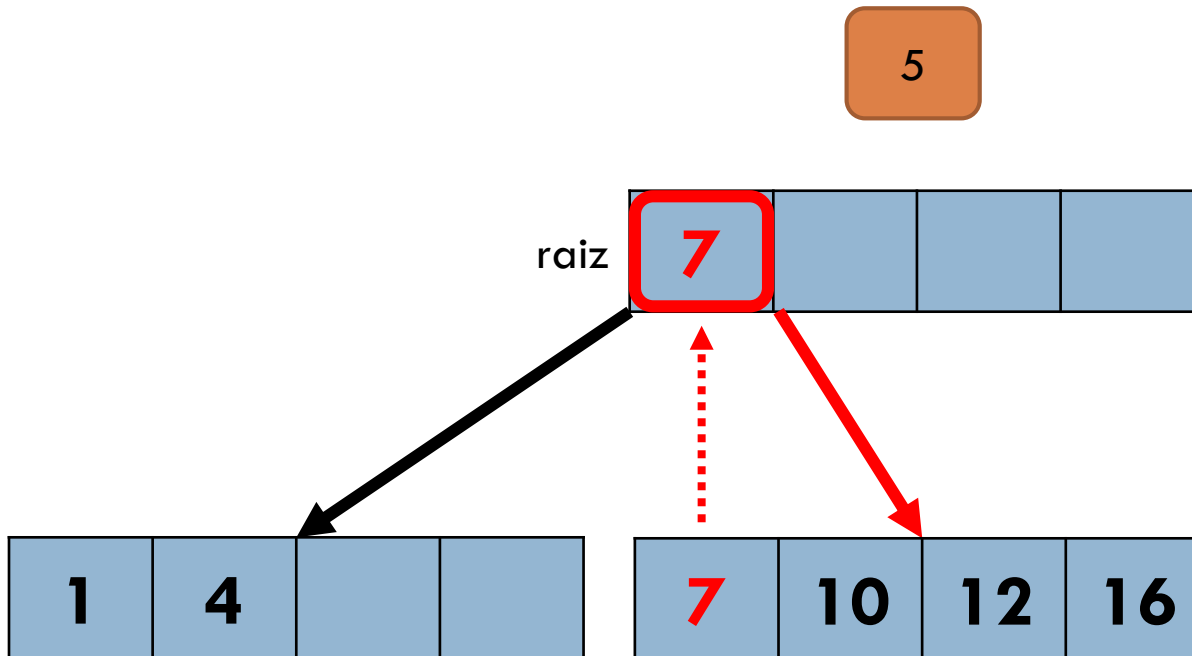


NÓ INTERMEDIÁRIO.
***SUBSTITUIR PELO MAIOR DA ESQUERDA**
OU SUBSTITUIR PELO MENOR DA DIREITA.

***SEMPRE SEGUIR
O MESMO
ALGORITMO
SELECIONADO.**

Exemplo de Inserção: $m = 2$

73



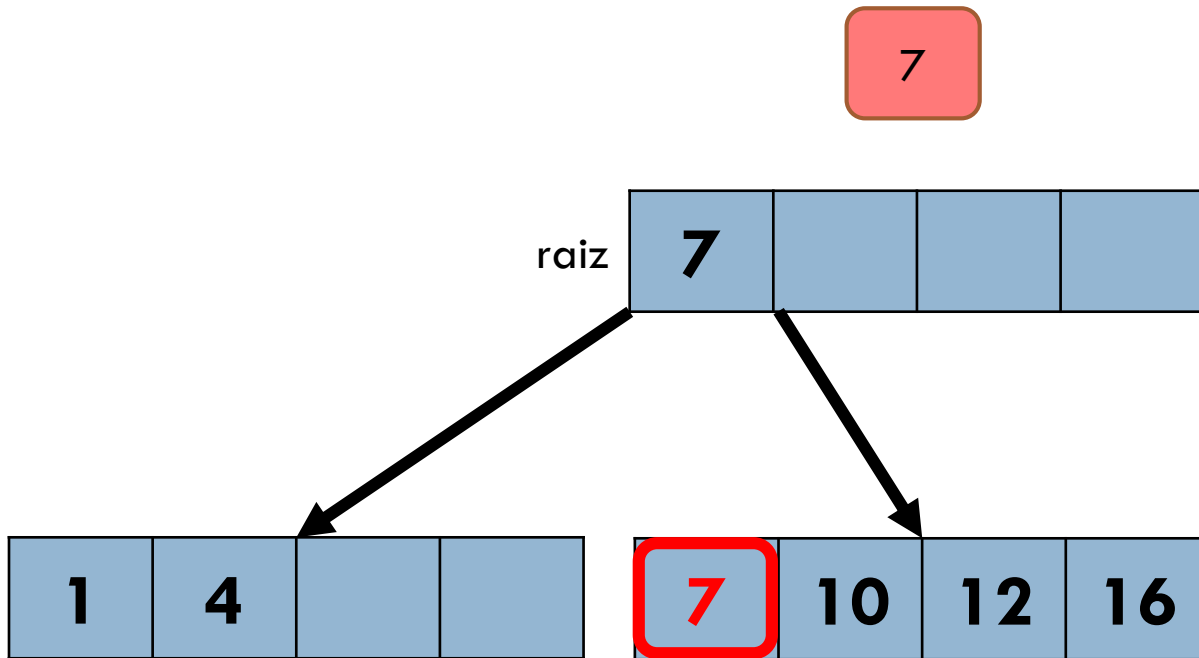
AO SUBSTITUIR,
O ELEMENTO É
SOBRESCRITO
NA MEMÓRIA.

NÓ INTERMEDIÁRIO.
*SUBSTITUIR PELO MAIOR DA ESQUERDA
OU SUBSTITUIR PELO MENOR DA DIREITA.

*SEMPRE SEGUIR
O MESMO
ALGORITMO
SELECIONADO.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

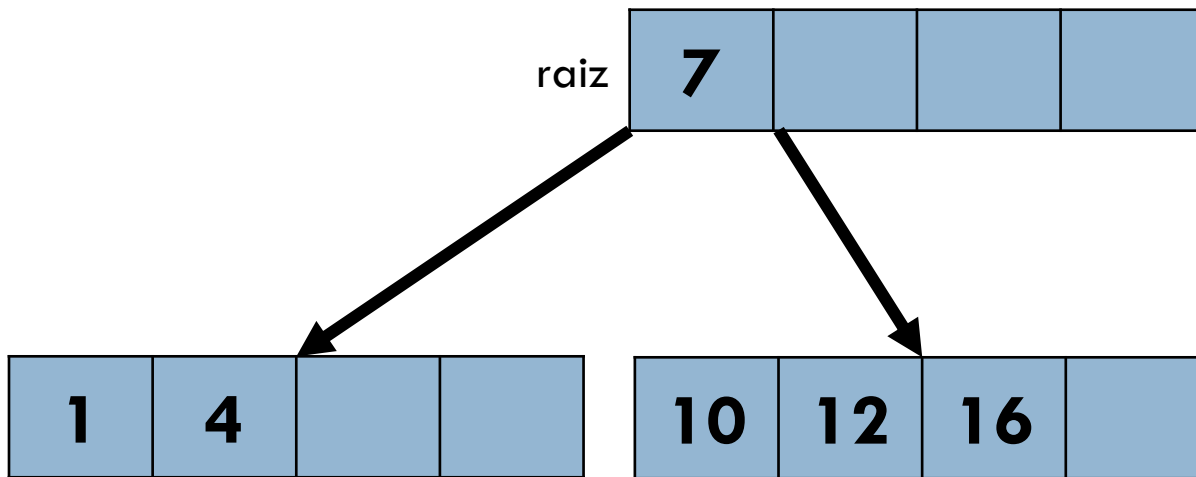
74



REMOVER O ELEMENTO SUBSTITUTO.
OBSERVAR OS CASOS DE REMOÇÃO.

Exemplo de Inserção: $m = 2$

75



**ÁRVORE B DENTRO DOS LIMITES
ESPECIFICADOS PELA ORDEM.**

Variações das Árvores B

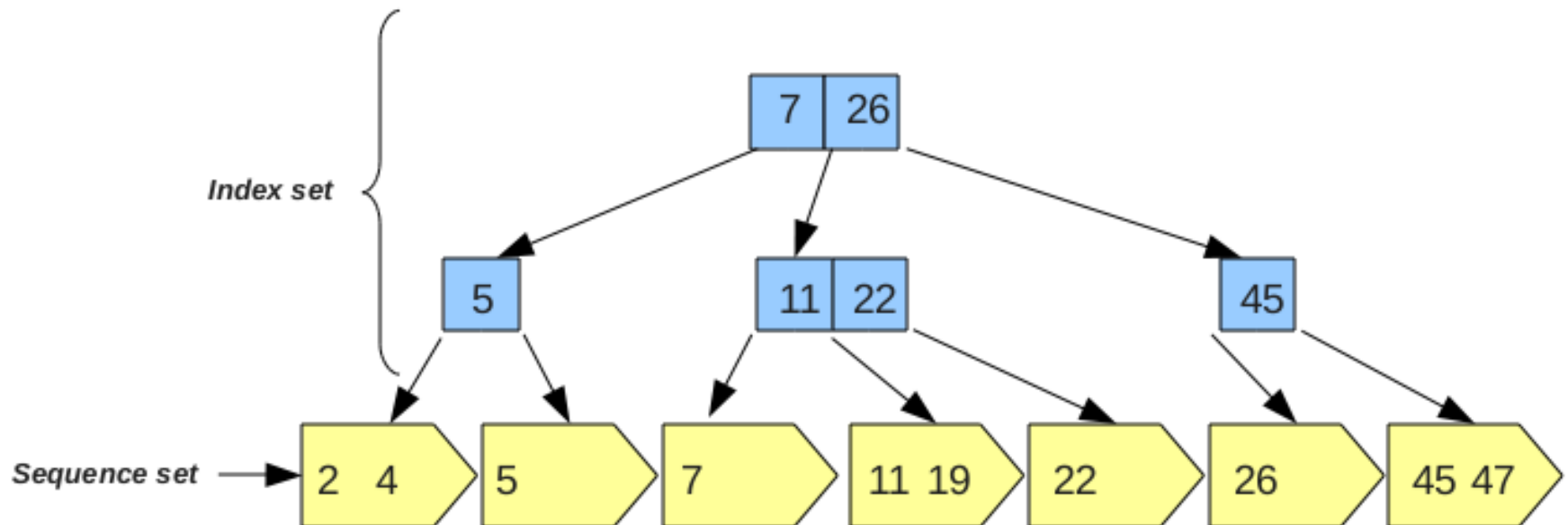
76

- **Árvore B+:**
 - ▣ Mantem todos os dados nas páginas folhas.
 - ▣ Páginas intermediárias são apenas indexadores.
 - ▣ Possibilita acesso sequencial nas páginas de dados.

Variações das Árvores B

77

- **Árvore B+:**
 - Mantem todos os dados nas páginas folhas.
 - Páginas intermediárias são apenas indexadores.
 - Possibilita acesso sequencial nas páginas de dados.



Variações das Árvores B

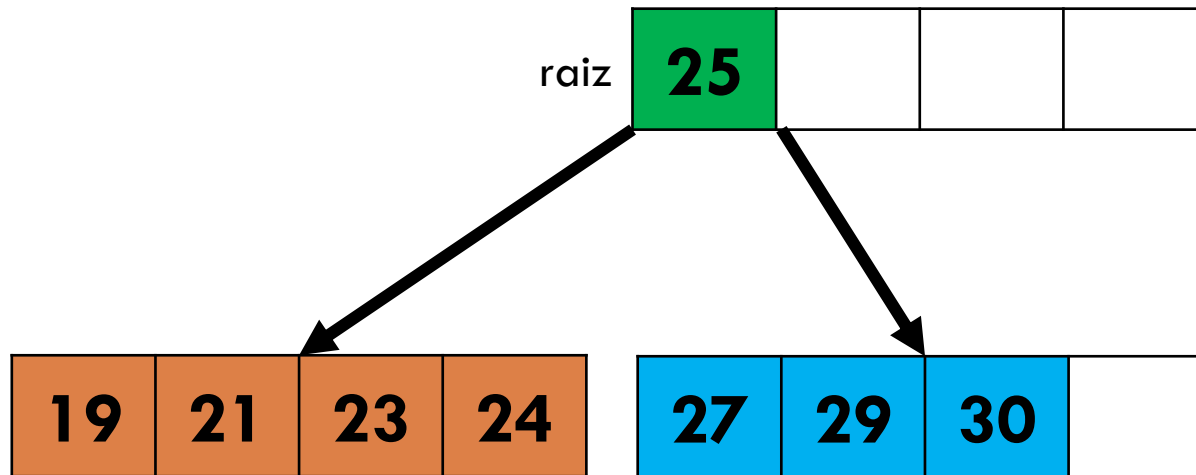
78

- **Árvore B*:**
 - ▣ Realiza redistribuição entre páginas até que duas páginas irmãs fiquem cheias.
 - ▣ Divide o conteúdo das duas em 3 páginas.
 - ▣ Otimiza o gerenciamento de espaço.

Variações das Árvores B

79

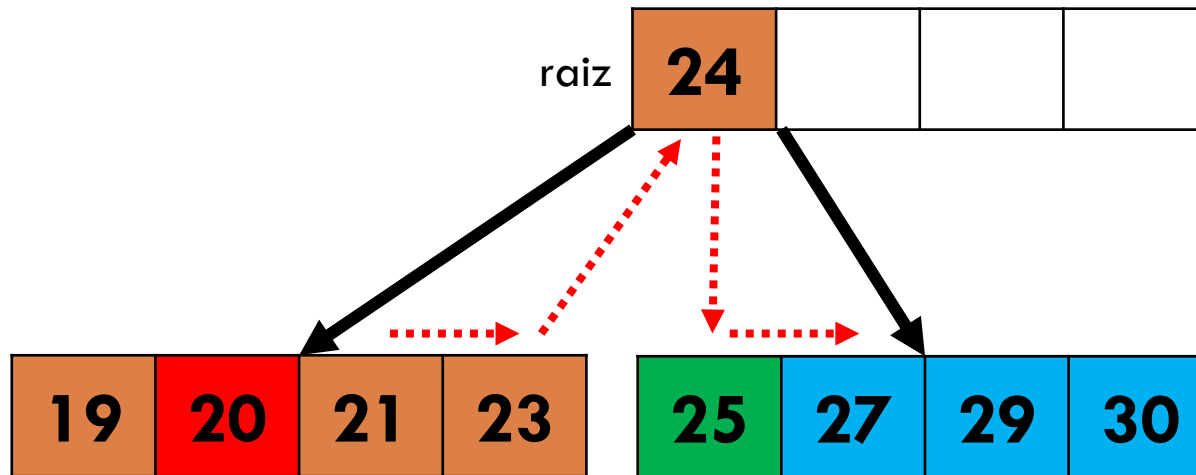
- Exemplo de Árvore B*: Original.



Variações das Árvores B

80

- Exemplo de Árvore B*: Após inserir 20.

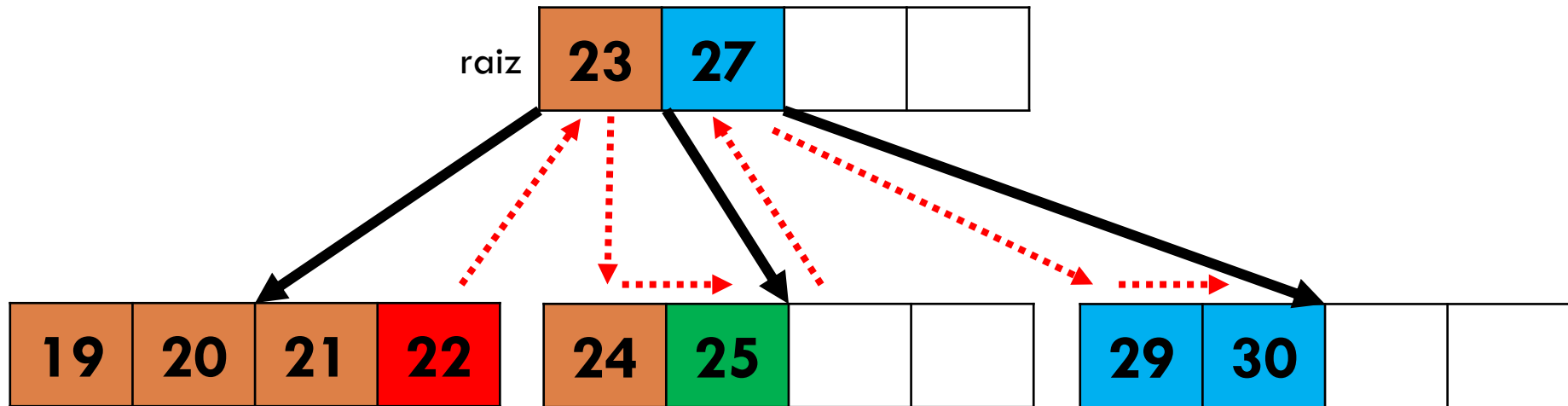


DESLOCOU OS ELEMENTOS PARA A DIREITA.

Variações das Árvores B

81

- Exemplo de Árvore B*: Após inserir 22.



DESLOCOU OS ELEMENTOS PARA A
DIREITA.
EXTRAPOLOU ORDEM E CRIA NOVA
PÁGINA.

Exercício

82

- Faça as seguintes operações em uma Árvore B:
 - ▣ Inserir 15-25-47-10-8-64-53-9-13-19-14;
 - ▣ Remover 47;
 - ▣ Remover 25;