Recorrências

Notas de aula

Prof. Dr. Yuri Kaszubowski Lopes

V. 20190820

1 Exponenciação

$$x^1 = x \tag{1}$$

$$x^0 = 1 \tag{2}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} \tag{3}$$

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a} \tag{4}$$

$$x^a x^b = x^{(a+b)} \tag{5}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{(a-b)} \tag{6}$$

$$(x^a)^b = x^{(ab)} \tag{7}$$

$$(xy)^a = x^a y^a \tag{8}$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m \tag{9}$$

2 Logaritmos

2.1 Definições

Logaritmos de números não positivos não são definidos!

$$k = log_b(a) \Leftrightarrow b^k = a \tag{10}$$

$$log_b(a) \Leftrightarrow log_b\ a \tag{11}$$

$$lg\ n = log_2\ n \tag{12}$$

$$ln\ n = log_e\ n \tag{13}$$

$$lg^k\ n = (lg\ n)^k \tag{14}$$

Que é diferente de:

$$lg^{(2)}\ n = lg\ lg\ n \tag{15}$$

$$lg^{(3)}\ n = lg\ lg\ lg\ n \tag{16}$$

2.2 Propriedades

$$log_b\ b = 1 \tag{17}$$

$$log_b\ n.m = log_b\ n + log_b\ m \tag{18}$$

$$log_b\ n^p = p.log_b n \tag{19}$$

$$log_b\ n = (log_c\ n)/(log_c\ b) \tag{20}$$

$$\sqrt[r]{X} = X^{\frac{1}{r}} \tag{21}$$

2.3 Exemplos

$$lg\ \sqrt[2]{n} \Leftrightarrow lg\ n^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} lg\ n \Leftrightarrow \frac{lg\ n}{2} \tag{22}$$

Passos: 21, 19

3 Complexidade de Algoritmos: Introdução

`Slides 2-12`

4 Crescimento de funções

4.1 Introdução

`Slides 13-19`

4.2 Funções comuns

(23)

5 Notação assintótica

`Slides 20 - 39`

$\mathcal{O}, \Omega, \Theta, o, \omega, \theta$

6 Recorrências

`Slides 40`

6.1 Recorrências lineares

Recorrências no formato:

$$T(n) = a_1\ T(n-1) + a_2\ T(n-2) + \ldots + a_d\ T(n-d) \tag{24}$$

6.1.1 Método Iteração/Expansão

Slides 41-43

6.1.2 Método Substituição

Slides 44-49

6.2 Recorrências do Dividir e Conquistar

Recorrências no formato:

$$T(n) = a\,T(\frac{n}{b}) + f(n) \tag{25}$$

$$T(1) = c \tag{26}$$

c é uma constante, e.g. 1.
Deve haver o critério de parada!

6.2.1 Exemplos

Recorrência do mergesort:
[4, 2, 7, 6, 8, 1, 3, 5]

Dividir:
[4, 2, 7, 6] [8, 1, 3, 5]
[4, 2] [7, 6] [8, 1] [3, 5]
[4] [2] [7] [6] [8] [1] [3] [5]

Combinar/Intercalar:
[4] [2] [7] [6] [8] [1] [3] [5]
[2, 4] [6, 7] [1, 8] [3, 5]
[2, 4, 6, 7] [1, 3, 5, 8]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{27}$$

6.2.2 Árvore de recursão

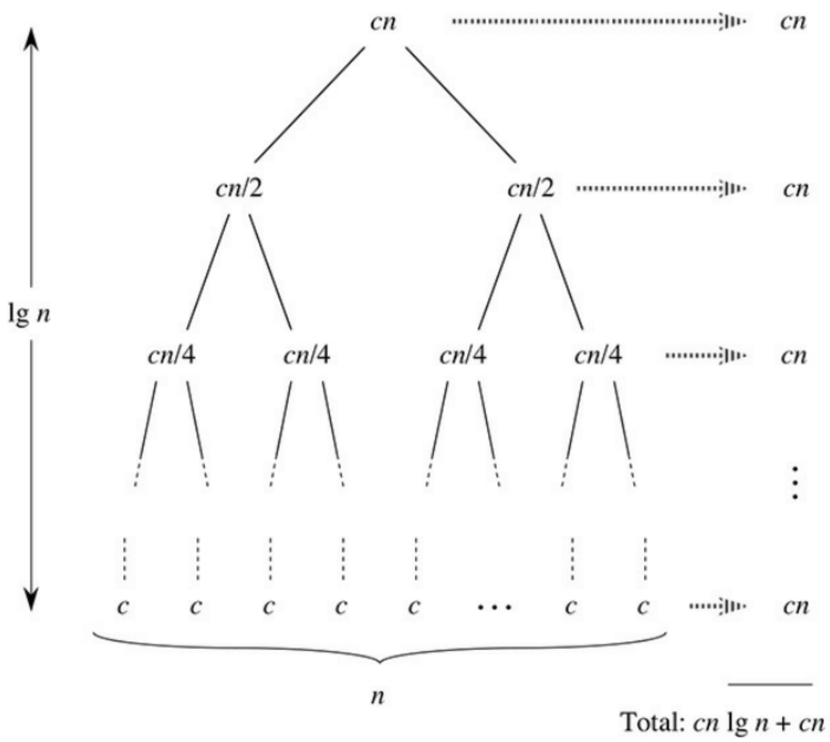

Figura 1: Árvore de recursão para o mergesort. `Fonte: Cormen(2009), Introduction to Algorithms Third Edition.`

6.2.3 Teorema Mestre

`Slides 50-51`

Se $a \geq 1$ E $b > 1$, então temos os três casos abaixo:

1. Se $f(n) = O(n^{log_b a - \epsilon})$ para uma constante $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{log_b a})$.
2. Se $f(n) = \Theta(n^{log_b a})$ então $T(n) = \Theta(n^{log_b a}\ lg\ n)$.
3. Se $f(n) = \Omega(n^{log_b a + \epsilon})$ para uma constante $\epsilon > 0$, E se $a\ f(n/b) \leq c\ f(n)$ para uma constante $c < 1$ e todo n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$.

6.2.4 Teorema Mestre: Exemplos

- $T(n) = 9T(n/3) + n$

  $a = 9$, $b = 3$ e $f(n) = n$

  $n^{log_3 9} = \Theta(n^2)$.
  $f(n) = n^{(log_3 9)-1}$, $\epsilon = 1$, então caso 1 e $T(n) = \Theta(n^2)$

- $T(n) = T(2\ n/3) + 1$

  $a = 1$, $b = 3/2$ e $f(n) = 1$

  $n^{log_{3/2} 1} = n^0 = 1$.

  Caso 2, $T(n) = n^{log_{3/2} 1}\ lg\ n \rightarrow T(n) = 1\ lg\ n \rightarrow T(n) = \Theta(lgn)$

- $T(n) = 3T(n/4) + n\ lg\ n$

  $a = 3$, $b = 4$ e $f(n) = n\ lg\ n$

$n^{log_4 3} = O(n^{0.793})$.

Como $f(n) = \Theta(n^{(log_4 3)+\epsilon})$, com $\epsilon \approx 0.2$

Ou seja $f(n) = n\ lg\ n > n^1$.

Caso 3, $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\ lg\ n)$

- $T(n) = 2T(n/2) + n\ lg\ n$

  Aparenta caso 3, já que $n\ lg\ n > n^{log_2 2} = n$

  Porém, não é polinomialmente maior

  $f(n)/(n^{log_b}\ a) = (n\ lg\ n)/n = lg\ n$ é assintoticamente menor que n^ϵ.

  Fica no intervalo entre caso 2 e caso 3.

7 Teorema mestre estendido

Recorrências no formato:

$$T(n) = a\ T(\frac{n}{b}) + f(n) \tag{28}$$
$$T(1) = c \tag{29}$$

com:

$$f(n) = \Theta(n^k\ lg^p\ n) \tag{30}$$

Se $a \geq 1$ E $b > 1$, então temos os três casos abaixo:

1. Se $log_b\ a > k$ (ou $a > b^k$) então: $\Theta(n^{log_b\ a})$
2. Se $log_b\ a = k$ (ou $a = b^k$) então:
   (a) Se $p > -1$: $\Theta(n^k\ lg^{p+1}\ n)$
   (b) Se $p = -1$: $\Theta(n^k\ lg\ lg\ n)$
   (c) Se $p < -1$: $\Theta(n^k)$
3. Se $log_b\ a < k$ (ou $a < b^k$) então:
   (a) Se $p \geq 0$: $\Theta(n^k\ lg^p\ n)$
   (b) Se $p < 0$: $\Theta(n^k)$