Arquitetura de Computadores (AC22S)

Aritmética Binária

Gustavo Santos

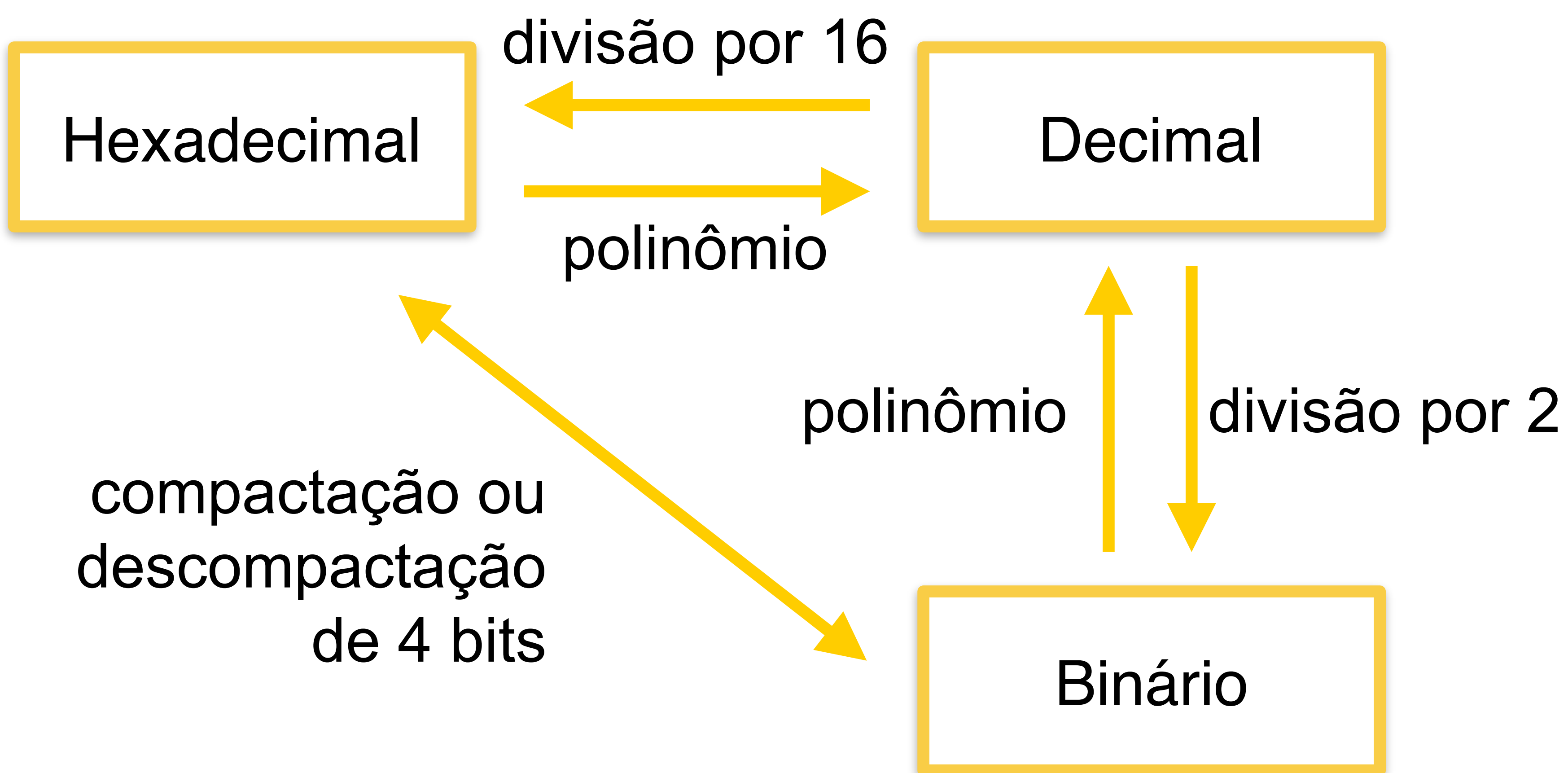
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ
CAMPUS DOIS VIZINHOS

Previously…

Sistemas de numeração: binário, decimal e hexadecimal

Em computação, trabalha-se normalmente com
a) Decimal para entrada e saída de dados
b) Binária para operações internas
c) Hexadecimal e Octal para representação compacta

Regras de Conversão



Representação de números negativos (2/2)

- Temos duas principais convenções
- **Representação em complemento de 2**
- **Passo 1:** Manter os bits da direita para esquerda até a ocorrência do primeiro bit igual a 1
- **Passo 2:** Inverter os bits restantes

$$(00101001)_2 = (41)_{10}$$

$$(11010111)_2 = (-41)_{10}$$

Limite de representação (4 bits)

Decimal	Binário com sinal	Compl. de 2
-8	—	1000
-7	1111	1001
-6	1110	1010
-5	1101	1011
-4	1100	1100
-3	1011	1101
-2	1010	1110
-1	1001	1111
0	0000 / 1000	0000
1	0001	0001
2	0010	0010
3	0011	0011
4	0100	0100
5	0101	0101
6	0110	0110
7	0111	0111

Adição

Utiliza as mesmas regras da soma em decimal

a	b	a+b	carry
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

“vai-um”

Adição no sistema binário

- Segue o mesmo mecanismo da soma convencional, da direita para a esquerda, contando vai-um quando necessário

$$
\begin{array}{r}
1\;0\;1\;0\;0\;1 \\
+\;0\;1\;1\;1\;0\;0 \\
\hline
\end{array}
$$

Adição no sistema binário

- Segue o mesmo mecanismo da soma convencional, da direita para a esquerda, contando vai-um quando necessário

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 1 & & & & \\
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
+ & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

podemos ter um bit a mais

Adição no sistema binário

- Caso especial: soma de dois bits 1 com carry

$$\begin{array}{rcc} & 1 & 1 \\ & & 1 \\ + & & 1 \\ \hline & 1 & 1 \end{array}$$

$= (3)_{10}$

Adição no sistema binário

- $(16)_{10} + (34)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 1:** representar operandos em binário. como?

Adição no sistema binário

- $(16)_{10} + (34)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 1:** representar operandos em binário, pelas divisões sucessivas por 2

preencher com zeros à esquerda

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Adição no sistema binário

- $(16)_{10} + (34)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 2:** realizar somas bit a bit, segundo a tabela

$$
\begin{array}{r}
0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
+\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Adição no sistema binário

- $(16)_{10} + (34)_{10}$, com <u>7 bits de representação</u>
- **Passo 2:** realizar somas bit a bit, segundo a tabela

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Adição no sistema binário

- $(16)_{10} + (34)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 3:** obter o equivalente em decimal. como?

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Adição no sistema binário

- $(16)_{10} + (34)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 3:** obter o equivalente em decimal, usando o polinômio de formatação

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
+ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

$$0*2^6 + 1*2^5 + 1*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0$$
$$32 + 16 + 2 = (50)_{10}$$

Exercício de fixação

Realizar a soma $(14)_{10} + (7)_{10}$ em um sistema binário com 4 bits de representação

Exercício de fixação

Realizar a soma $(13)_{10} + (11)_{10}$ em um sistema binário com 6 bits de representação

Subtração

Basta calcular o complemento de 2 do subtraendo e realizar uma adição.

Ou seja, `a – b` equivale a `a + (–b)`

Subtração no sistema binário

- **Dica 1:** para converter um número negativo em complemento de 2, segue a mesma regra:

- Manter os bits da direita para esquerda até a ocorrência do primeiro bit igual a 1, inverter os bits restantes

- $(-7)_{10} = (11001)_{c2,\ 5\ bits}$
- $(+7)_{10} = (?????)_{c2,\ 5\ bits}$

Subtração no sistema binário

- **Dica 1:** para converter um número negativo em complemento de 2, segue a mesma regra:

- Manter os bits da direita para esquerda até a ocorrência do primeiro bit igual a 1, inverter os bits restantes

- $(-7)_{10} = (11001)_{c2,\ 5\ bits}$
- $(+7)_{10} = (00111)_{c2,\ 5\ bits}$

Subtração no sistema binário

- **Dica 2:** numa representação com **n** bits, os bits excedentes são descartados

- Com 8 bits de representação:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
+ & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
\mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Subtração no sistema binário

- **Dica 3:** representando números em complemento de 2, o primeiro bit representa o sinal do resultado

1	1	1	1	1	1	1	1	
	1	0	1	1	0	1	1	1
+	1	1	0	0	1	1	0	1
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

número negativo

Subtração no sistema binário

- **Dica 4:** obtendo um número negativo, como sabemos o representante dele em decimal?

1 0 0 1 1 0 0 0

número negativo

Subtração no sistema binário

- **Dica 4:** obtendo um número negativo, como sabemos o representante dele em decimal?

- Segue a mesma regra: Manter os bits da direita para esquerda até a ocorrência do primeiro bit igual a 1, inverter os bits restantes

```
1 0 0 1 1 0 0 0
0 1 1 0 1 0 0 0
```

aplicando a regra, este é o representante positivo

Subtração no sistema binário

- **Dica 4:** obtendo um número negativo, como sabemos o representante dele em decimal?

- Segue a mesma regra: Manter os bits da direita para esquerda até a ocorrência do primeiro bit igual a 1, inverter os bits restantes

1 0 0 1 1 0 0 0

0 1 1 0 1 0 0 0

$$1*2^6 + 1*2^5 + 1*2^3 = (104)_{10}$$

ou seja, $(10011000)_{c2,8bits} = (-104)_{10}$

Subtração no sistema binário

- $(34)_{10} - (16)_{10}$, com 7 bits de representação

Subtração no sistema binário

- $(34)_{10} - (16)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 1:** representar operandos em binário, através de divisões sucessivas por 2

Subtração no sistema binário

- $(34)_{10} - (16)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 1:** representar operandos em binário, através de divisões sucessivas por 2

preencher com zeros à esquerda

0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0

Subtração no sistema binário

- $(34)_{10} - (16)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 2:** representar subtraendo em negativo com complemento de 2

0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0

Subtração no sistema binário

- $(34)_{10} - (16)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 2:** representar subtraendo em negativo com complemento de 2

```
0 1 0 0 0 1 0
1 1 1 0 0 0 0
```

$= (-16)_{10}$

Subtração no sistema binário

- $(34)_{10} - (16)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 3:** realizar somas bit a bit, segundo a tabela

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
+ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Subtração no sistema binário

- $(34)_{10} - (16)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 3:** realizar somas bit a bit, segundo a tabela

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & & & & & & \\
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
+ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\color{red}{\mathbf{1}} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

descarto o bit excedente

Subtração no sistema binário

- $(34)_{10} - (16)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 4:** obter o equivalente em decimal

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
+ & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Subtração no sistema binário

- $(34)_{10} - (16)_{10}$, com 7 bits de representação
- **Passo 4:** obter o equivalente em decimal

$$
\begin{array}{r}
0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
+\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
\hline
0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0
\end{array}
$$

número positivo

$$1*2^4 + 1*2^1 = (18)_{10}$$

Exercício de fixação

Realizar a subtração $(14)_{10} - (7)_{10}$ em um sistema binário com 5 bits de representação

Exercício de fixação

Realizar a subtração $(9)_{10} - (28)_{10}$ em um sistema binário com 6 bits de representação

Estouro de representação

- A representação de números é limitada
- Quanto maior o número de dígitos (bits) disponíveis, maior a faixa de representação; porém, essa faixa sempre será <u>finita</u>
- Ao realizar a soma de dois números, o resultado pode sair da faixa de representação do sistema
- Chamamos esse fenômeno de *overflow*, ou estouro de representação

Limite de representação (4 bits)

Decimal	Binário com sinal	Compl. de 2
-8	—	1000
-7	1111	1001
-6	1110	1010
-5	1101	1011
-4	1100	1100
-3	1011	1101
-2	1010	1110
-1	1001	1111
0	0000 / 1000	0000
1	0001	0001
2	0010	0010
3	0011	0011
4	0100	0100
5	0101	0101
6	0110	0110
7	0111	0111

Estouro de representação

- A representação de números é limitada
- Por exemplo, para números binários de quatro bits em complemento de 2, temos:

em binário	equivalente em decimal
1000 + 0001 = 1001	-8 + 1 = -7
1000 + 1111 = 0111	-8 + -1 = 7
0111 + 1111 = 0110	7 + -1 = 6
0111 + 0011 = 1010	7 + 3 = -6

Estouro de representação

- A representação de números é limitada
- Por exemplo, para números binários de quatro bits em complemento de 2, temos:

em binário	equivalente em decimal
1000 + 0001 = 1001	-8 + 1 = -7
1000 + 1111 = 0111	**-8 + -1 = 7**
0111 + 1111 = 0110	7 + -1 = 6
0111 + 0011 = 1010	**7 + 3 = -6**

Estouro de representação

- **Regra do overflow:** dois números, ambos positivos ou ambos negativos, são somados e o resultado obtido tem o sinal oposto

em binário	equivalente em decimal
1000 + 0001 = 1001	-8 + 1 = -7
1000 + 1111 = 0111	**-8 + -1 = 7**
0111 + 1111 = 0110	7 + -1 = 6
0111 + 0011 = 1010	**7 + 3 = -6**

Bibliografia

STALLINGS, William. **Arquitetura e organização de computadores**. 8. ed. São Paulo, SP: Prentice-Hall, 2010. 624 p. ISBN 9788576055648.

(Capítulo 9.3, disponível no Moodle)

Próxima Aula

- Representação de números reais
- Ponto fixo e ponto flutuante