Lógica para Computação

Professor André Luiz Marasca
UTFPR – Dois Vizinhos

Autor Slides: Marlon Marcon

PROPRIEDADES SEMÂNTICAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL

Tautologia

- Chama-se tautologia toda proposição composta, cuja última coluna de sua tabela-verdade encerra somente com o simbolo T (verdade)

- **Definição (tautologia):**
- H é uma tautologia, se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = T$

Tautologia

- Exemplo 1:

- ¬(P ∧ ¬P)

P	*¬P*	*P ∧ ¬P*	*¬(P ∧ ¬P)*
T	*F*	*F*	*T*
F	*T*	*F*	*T*

- **“Dizer que uma proposição não pode ser simultâneamente verdadeira e falsa é sempre verdadeiro”**

Tautologia

- Exemplo 2:

- P V ¬P

P	*¬P*	*P V ¬P*
T	*F*	*T*
F	*T*	*T*

- **“Dizer que uma proposição é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro”**

Tautologia

- Exemplo 3:

- $(P \lor (Q \land \neg Q)) \leftrightarrow P$

P	*Q*	*¬Q*	*Q ∧ ¬Q*	*P ∨ (Q ∧ ¬Q)*	*(P ∨ (Q ∧ ¬Q))↔ P*
T	*T*	*F*	*F*	*T*	*T*
T	*F*	*T*	*F*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*
F	*F*	*T*	*F*	*F*	*T*

Contingência

- Chama-se contingência toda proposição composta em cuja última coluna de sua tabela-verdade figuram os simbolos T e F cada um pelo menos uma vez.

- **Definição (contingência):**

- *H* é uma contingência, se, e somente se, existem duas interpretações I_1 e I_2, tais que $I_1[H] = T$ e $I_2[H] = F$

Contingência

- Exemplo 1:

- P → ¬P

P	***¬P***	***P → ¬P***
T	*F*	*F*
F	*T*	*T*

Contingência

- Exemplo 3:

- $(P \vee Q) \rightarrow P$

P	Q	P V Q	(P V Q) → P
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	F
F	F	F	T

Contradição

- Chama-se contradição toda a proposição composta cuja última coluna de sua tabela-verdade encerra somente com o simbolo F

- **Definição (contradição):**
- H é contraditória, se, e somente se, para toda interpretação I, $I[H] = F$

Contradição

- Exemplo 1:

- $P \ \wedge \ \neg P$

P	*¬P*	$\boxed{P \wedge \neg P}$
T	*F*	*F*
F	*T*	*F*

- **“Dizer que uma proposição pode ser simultâneamente verdadeira e falsa é sempre falso”**

Contradição

- Exemplo 2:

- $P \leftrightarrow \neg P$

P	$\neg P$	$P \leftrightarrow \neg P$
T	F	F
F	T	F

Contradição

- Exemplo 3:

- $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee Q)$

P	*Q*	*P ∧ Q*	*P V Q*	*¬(P V Q)*	*(P ∧ Q) ∧ ¬(P V Q)*
T	*T*	*T*	*T*	*F*	*F*
T	*F*	*F*	*T*	*F*	*F*
F	*T*	*F*	*T*	*F*	*F*
F	*F*	*F*	*F*	*T*	*F*

Implicação Semântica

- **Definição (implicação semântica):**

- *H* **implica semanticamente** *G*, ou G é uma **consequência lógica semântica** de *H,* se, e somente se, para toda interpretação *I,* se $I[H]=T$, então $I[G]=T$

Implicação Semântica

- Diz-se que uma fórmula H **implica logicamente** em outra fórmula G, se G é verdadeira **todas** as vezes que H é verdadeira.

$$H \Rightarrow G$$

- Em outros termos, uma fórmula H implica logicamente G, todas as vezes que nas respectivas tabelas-verdade dessas duas fórmulas não aparece T na última coluna de H e F na última coluna de G.

Implicação Semântica

- Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

- Uma fórmula H implica semanticamente outra G $(H \Rightarrow G)$, se e somente se a condicional $(H \rightarrow G)$ é tautológica

- **Nota!!!**
- Os simbolos $\rightarrow$ e $\Rightarrow$ são diferentes, o primeiro é de **operação lógica** e o segundo de **relação lógica**

Propriedades da implicação semântica

- **Reflexiva**
  - $H \Rightarrow H$

- **Transitiva**
  - Se $H \Rightarrow G$ e
  - $G \Rightarrow E$, então
  - $H \Rightarrow E$

Propriedades da implicação semântica

- **Dadas as tabelas-verdade das fórmulas** $P \wedge Q, P \vee Q, P \leftrightarrow Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$	$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T	T

Temos que:

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$$
$$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

As tabelas-verdade também demonstram as **regras de inferência:**

$$P \Rightarrow (P \vee Q) \; e \; Q \Rightarrow (P \vee Q) \text{ (Adição)}$$
$$(P \wedge Q) \Rightarrow P \; e \; (P \wedge Q) \Rightarrow Q \text{(Simplificação)}$$

Propriedades da implicação semântica

- **Dadas as tabelas-verdade das fórmulas** $P \leftrightarrow Q, P \rightarrow Q, Q \rightarrow P$

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$	$(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow P)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Temos que:

$$(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$$
$$(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow P)$$

Propriedades da implicação semântica

- **Dadas as tabelas-verdade das fórmulas** $(P \vee Q) \wedge \neg P$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P$	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

Temos que:

$$((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q \ (\textbf{Regra do silogismo disjuntivo})$$

Analogamente temos:

$$((P \vee Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow P$$

Propriedades da implicação semântica

- **Outras regras**

$$((P \rightarrow Q) \land P) \Rightarrow Q \text{ (Regra Modus ponens)}$$

$$((P \rightarrow Q) \land \neg Q) \Rightarrow \neg P \text{ (Regra Modus tollens)}$$

Prove se as regras são verdadeiras

Regra Modus ponens

P	Q	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \land P$	$((P \rightarrow Q) \land P) \rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Regra Modus tollens

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$\big((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q\big) \rightarrow \neg P$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

Propriedades da implicação semântica

- A fórmula $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ é tautológica, logo, subsiste a **implicação lógica:**

$$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \Rightarrow (P \rightarrow R)$$

Transitividade

Equivalência Semântica

- **Definição (equivalência semântica):**

Diz-se que uma fórmula H é semanticamente equivalente à outra G, se as tabelas-verdade destas são idênticas.

$$H \Leftrightarrow G$$

Em particular, se H e G são ambas **tautologias** ou ambas **contradições**, então são **equivalentes**.

Propriedades da Equivalência Semântica

- **Reflexiva**
  - $H \Leftrightarrow H$
- **Transitiva**
  - Se $H \Leftrightarrow G$ e
  - $G \Leftrightarrow E$, então
  - $H \Leftrightarrow E$
- **Simétrica**
  - Se $H \Leftrightarrow G$ então
  - $G \Leftrightarrow H$

Propriedades da Equivalência Semântica

- **As fórmulas $\neg\neg P$ e P são equivalentes.**

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
T	F	T
F	T	F

É chamada **regra da dupla negação**

Portanto, a **dupla negação equivale** à **afirmação**

Propriedades da Equivalência Semântica

- **As fórmulas $\neg P \rightarrow P$ e P são equivalentes.**

P	$\neg P$	$\neg P \rightarrow P$
T	F	T
F	T	F

É chamada **regra de CLAVIUS**

Dizer “Se não chove então chove” é o mesmo que dizer “chove”

Propriedades da Equivalência Semântica

- **As fórmulas** $P \rightarrow (P \wedge Q)$ e $P \rightarrow Q$ **são equivalentes.**

P	*Q*	*P ∧ Q*	*P → (P ∧ Q)*	*P → Q*
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T

É chamada **regra da absorção**

Dizer “Se chove então chove e a rua está molhada” é o mesmo que dizer “Se chove então a rua está molhada”

Propriedades da Equivalência Semântica

- **As fórmulas** $P \rightarrow Q$ e $\neg P \vee Q$ **são equivalentes.**

P	*Q*	*P → Q*	*¬P*	*¬P v Q*
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

É chamada **regra da eliminação da condicional**

Dizer “Se você não almoçar então não come sobremesa” é o mesmo que dizer “Você almoça ou não come sobremesa”.

Propriedades da Equivalência Semântica

- Outros exemplos:

$$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$$

$$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$$

- Prove se os exemplos estão corretos.

Propriedades da Equivalência Semântica

- Uma fórmula H é equivalente semanticamente à outra G ($H \Leftrightarrow G$), se e somente se a bicondicional $H \longleftrightarrow G$ é tautológica.

- **Nota!!!**
- Os simbolos $\longleftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ são diferentes, o primeiro é de **operação lógica** e o segundo de **relação lógica**

Propriedades da Equivalência Semântica

- A fórmula $((P \wedge Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ é tautológica, logo, são equivalentes:

$$((P \wedge Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$$

Dizer “Se José estuda e tem boa memória então vai bem na prova” é o mesmo que dizer “Se José estuda então, se Jose tem boa memória então irá bem na prova”.

$$((P \wedge Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$$

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$(Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T

Propriedades da Equivalência Semântica

- Dada a condicional $P \rightarrow Q$, chamam-se proposições associadas a $P \rightarrow Q$ as seguintes proposições que contém P e Q.
  - **Proposição recíproca de $P \rightarrow Q$: $Q \rightarrow P$**
  - **Proposição contrária de $P \rightarrow Q$: $\neg P \rightarrow \neg Q$**
  - **Proposição contrapositiva de $P \rightarrow Q$:$\neg Q \rightarrow \neg P$**

P	*Q*	*P → Q*	*Q → P*	*¬P → ¬Q*	*¬Q → ¬P*
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T