



# Lógica para Computação

Professor André Luiz Marasca  
UTFPR – Dois Vizinhos

Autor Slides: Marlon Marcon



# **PROPRIEDADES SEMÂNTICAS DA LÓGICA PROPOSICIONAL**

# Tautologia

- Chama-se tautologia toda proposição composta, cuja última coluna de sua tabela-verdade encerra somente com o símbolo T (verdade)
- **Definição (tautologia):**
- $H$  é uma tautologia, se, e somente se, para toda interpretação  $I$ ,  
 $I[H] = T$



# Tautologia

■ Exemplo 1:

■  $\neg(P \wedge \neg P)$

$P$	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$\neg(P \wedge \neg P)$
$T$	$F$	$F$	$T$
$F$	$T$	$F$	$T$

■ “Dizer que uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre verdadeiro”

# Tautologia

■ Exemplo 2:

■  $P \vee \neg P$

$P$	$\neg P$	$P \vee \neg P$
$T$	$F$	$T$
$F$	$T$	$T$

■ “Dizer que uma proposição é verdadeira ou é falsa é sempre verdadeiro”

# Tautologia

■ Exemplo 3:

■  $(P \vee (Q \wedge \neg Q)) \leftrightarrow P$

$P$	$Q$	$\neg Q$	$Q \wedge \neg Q$	$P \vee (Q \wedge \neg Q)$	$(P \vee (Q \wedge \neg Q)) \leftrightarrow P$
$T$	$T$	$F$	$F$	$T$	$T$
$T$	$F$	$T$	$F$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$	$F$	$F$	$T$
$F$	$F$	$T$	$F$	$F$	$T$

# Contingência

- Chama-se contingência toda proposição composta em cuja última coluna de sua tabela-verdade figuram os símbolos T e F cada um pelo menos uma vez.
- **Definição (contingência):**
- $H$  é uma contingência, se, e somente se, existem duas interpretações  $I_1$  e  $I_2$ , tais que  $I_1[H] = T$  e  $I_2[H] = F$

# Contingência

■ Exemplo 1:

■  $P \rightarrow \neg P$

$P$	$\neg P$	$P \rightarrow \neg P$
$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$



# Contingência

■ Exemplo 3:

■  $(P \vee Q) \rightarrow P$

$P$	$Q$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \rightarrow P$
$T$	$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$T$	$T$
$F$	$T$	$T$	$F$
$F$	$F$	$F$	$T$

# Contradição

- Chama-se contradição toda a proposição composta cuja última coluna de sua tabela-verdade encerra somente com o símbolo F
- **Definição (contradição):**
- $H$  é contraditória, se, e somente se, para toda interpretação  $I$ ,  $I[H] = F$

# Contradição

- Exemplo 1:

- $P \wedge \neg P$

$P$	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$

- “Dizer que uma proposição pode ser simultaneamente verdadeira e falsa é sempre falso”

# Contradição

■ Exemplo 2:

■  $P \leftrightarrow \neg P$

$P$	$\neg P$	$P \leftrightarrow \neg P$
$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$



# Contradição

▪ Exemplo 3:

▪  $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee Q)$

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee Q)$
$T$	$T$	$T$	$T$	$F$	$F$
$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$	$T$	$F$	$F$
$F$	$F$	$F$	$F$	$T$	$F$

# Implicação Semântica

- Definição (implicação semântica):
- $H$  implica semanticamente  $G$ , ou  $G$  é uma **consequência lógica semântica** de  $H$ , se, e somente se, para toda interpretação  $I$ , se  $I[H]=T$ , então  $I[G]=T$

# Implicação Semântica

- Diz-se que uma fórmula  $H$  **implica logicamente** em outra fórmula  $G$ , se  $G$  é verdadeira **todas** as vezes que  $H$  é verdadeira.

$$H \Rightarrow G$$

- Em outros termos, uma fórmula  $H$  implica logicamente  $G$ , todas as vezes que nas respectivas tabelas-verdade dessas duas fórmulas não aparece T na última coluna de  $H$  e F na última coluna de  $G$ .

# Implicação Semântica

- Em particular, toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.
- Uma fórmula  $H$  implica semanticamente outra  $G$  ( $H \Rightarrow G$ ), se e somente se a condicional ( $H \rightarrow G$ ) é tautológica
- **Nota!!!**
- Os símbolos  $\rightarrow$  e  $\Rightarrow$  são diferentes, o primeiro é de **operação lógica** e o segundo de **relação lógica**



# Propriedades da implicação semântica

- Reflexiva

- $H \Rightarrow H$

- Transitiva

- Se  $H \Rightarrow G$  e

- $G \Rightarrow E$ , então

- $H \Rightarrow E$

# Propriedades da implicação semântica

- Dadas as tabelas-verdade das fórmulas  $P \wedge Q, P \vee Q, P \leftrightarrow Q$

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \leftrightarrow Q$	$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$	$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T	T

Temos que:

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$$

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \leftrightarrow Q)$$

As tabelas-verdade também demonstram as **regras de inferência**:

$$P \Rightarrow (P \vee Q) \text{ e } Q \Rightarrow (P \vee Q) \text{ (Adição)}$$

$$(P \wedge Q) \Rightarrow P \text{ e } (P \wedge Q) \Rightarrow Q \text{ (Simplificação)}$$

# Propriedades da implicação semântica

- Dadas as tabelas-verdade das fórmulas  $P \leftrightarrow Q, P \rightarrow Q, Q \rightarrow P$

$P$	$Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$	$(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow P)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T

Temos que:

$$(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$$

$$(P \leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \rightarrow P)$$

# Propriedades da implicação semântica

- Dadas as tabelas-verdade das fórmulas  $(P \vee Q) \wedge \neg P$

$P$	$Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$(P \vee Q) \wedge \neg P$	$((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q$
T	T	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

Temos que:

$$((P \vee Q) \wedge \neg P) \Rightarrow Q \text{ (Regra do silogismo disjuntivo)}$$

Analogamente temos:

$$((P \vee Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow P$$



# Propriedades da implicação semântica

- Outras regras

$((P \rightarrow Q) \wedge P) \Rightarrow Q$  (Regra Modus ponens)

$((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg P$  (Regra Modus tollens)

Prove se as regras são verdadeiras

# Regra Modus ponens

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

# Regra Modus tollens

$P$	$Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T

# Propriedades da implicação semântica

- A fórmula  $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$  é tautológica, logo, subsiste a **implicação lógica**:

$$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \Rightarrow (P \rightarrow R)$$

**Transitividade**



# Equivalência Semântica

- Definição (equivalência semântica):

Diz-se que uma fórmula  $H$  é semanticamente equivalente à outra  $G$ , se as tabelas-verdade destas são idênticas.

$$H \Leftrightarrow G$$

Em particular, se  $H$  e  $G$  são ambas **tautologias** ou ambas **contradições**, então são **equivalentes**.

# Propriedades da Equivalência Semântica

- Reflexiva

- $H \Leftrightarrow H$

- Transitiva

- Se  $H \Leftrightarrow G$  e

- $G \Leftrightarrow E$ , então

- $H \Leftrightarrow E$

- Simétrica

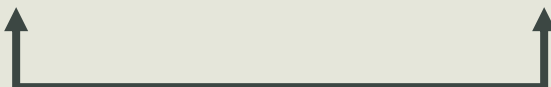
- Se  $H \Leftrightarrow G$  então

- $G \Leftrightarrow H$

# Propriedades da Equivalência Semântica

- As fórmulas  $\neg\neg P$  e  $P$  são equivalentes.

$P$	$\neg P$	$\neg\neg P$
T	F	T
F	T	F




É chamada **regra da dupla negação**

Portanto, a **dupla negação equivale à afirmação**

# Propriedades da Equivalência Semântica

- As fórmulas  $\neg P \rightarrow P$  e  $P$  são equivalentes.

$P$	$\neg P$	$\neg P \rightarrow P$
T	F	T
F	T	F



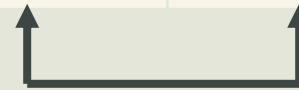
É chamada **regra de CLAVIUS**

Dizer “Se não chove então chove” é o mesmo que dizer “chove”

# Propriedades da Equivalência Semântica

- As fórmulas  $P \rightarrow (P \wedge Q)$  e  $P \rightarrow Q$  são equivalentes.

$P$	$Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow (P \wedge Q)$	$P \rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	F	T	T
F	F	F	T	T



É chamada **regra da absorção**

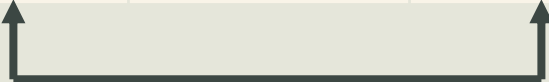
Dizer “Se chove então chove e a rua está molhada” é o mesmo que dizer “Se chove então a rua está molhada”



# Propriedades da Equivalência Semântica

- As fórmulas  $P \rightarrow Q$  e  $\neg P \vee Q$  são equivalentes.

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T



É chamada **regra da eliminação da condicional**

Dizer “Se você não almoçar então não come sobremesa” é o mesmo que dizer “Você almoça ou não come sobremesa”.

# Propriedades da Equivalência Semântica

- Outros exemplos:

$$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P))$$

$$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$$

- Prove se os exemplos estão corretos.

# Propriedades da Equivalência Semântica

- Uma fórmula  $H$  é equivalente semanticamente à outra  $G$  ( $H \Leftrightarrow G$ ), se e somente se a bicondicional  $H \leftrightarrow G$  é tautológica.
- **Nota!!!**
- Os símbolos  $\leftrightarrow$  e  $\Leftrightarrow$  são diferentes, o primeiro é de **operação lógica** e o segundo de **relação lógica**

# Propriedades da Equivalência Semântica

- A fórmula  $((P \wedge Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$  é tautológica, logo, são equivalentes:

$$((P \wedge Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$$

Dizer “Se José estuda e tem boa memória então vai bem na prova” é o mesmo que dizer “Se José estuda então, se Jose tem boa memória então irá bem na prova”.

$$((P \wedge Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$$

$P$	$Q$	$R$	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	$(Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T
F	T	F	F	T	F	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T





# Propriedades da Equivalência Semântica

- Dada a condicional  $P \rightarrow Q$ , chamam-se proposições associadas a  $P \rightarrow Q$  as seguintes proposições que contém  $P$  e  $Q$ .
  - Proposição recíproca de  $P \rightarrow Q$ :  $Q \rightarrow P$
  - Proposição contrária de  $P \rightarrow Q$ :  $\neg P \rightarrow \neg Q$
  - Proposição contrapositiva de  $P \rightarrow Q$ :  $\neg Q \rightarrow \neg P$

$P$	$Q$	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$\neg P \rightarrow \neg Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T