Erforschen der Struktur des Collatzproblems anhand einer neuen Darstellungsform

Von Tobias Goltermann

Kurzfassung

Das Collatzproblem ist ein sehr bekanntes, ungelöstes Problem in der Mathematik. Ziel des Projektes ist es, mathematische Muster und Strukturen in dem Problem zu entdecken und zu erforschen. Dies geschieht auf Basis einer selbst entwickelten Darstellungsform, die es ermöglicht, die Struktur des Collatzproblems leichter zu verstehen, und so neue Ansätze für das Problem liefert. Diese verschiedenen Ansätze werden untersucht, sodass mögliche Strukturen aufgedeckt und so Erkenntnisse gewonnen werden. Die Vorgehensweise dient dazu, ein besseres Verständnis von der Mathematik des Collatzproblems zu erlangen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Das Collatzproblem beschäftigt die Mathematikerwelt schon seit vielen Jahren, weil es sehr einfach formuliert werden kann, eine Lösung jedoch noch nicht gefunden wurde.
Konkret handelt es sich um Folgendes: Man nehme eine beliebige natürlich Zahl. Falls sie gerade ist, wird sie durch zwei geteilt. Andernfalls wird die Zahl verdreifacht und um eins erhöht. Dieser Vorgang wird mit der neu gewonnenen Zahl wiederholt, sodass eine Zahlenfolge entsteht. Die Collatzvermutung besagt nun, dass jede dieser Collatz-Folgen im Zyklus 1, 4, 2, 1, … endet. Nun gibt es viele Überlegungen zum Collatzproblem. Einige formulieren es um, andere schätzen ab, wie viele Iterationen es braucht, um die Periode zu erreichen und es werden massenhaft Zahlen auf die Gültigkeit der Vermutung getestet. So stimmt die Vermutung für alle Zahlen bis $87 \cdot 2^{60}$ [Q1].

Da das Problem sehr leicht zu erfassen ist, gelingt der Einstieg in den mathematischen Zusammenhang sehr leicht. Ich habe zunächst mehrere Collatz-Folgen näher betrachtet. Dabei fällt auf, dass jede gerade Zahl das Doppelte einer möglicherweise ungerade Zahl ist und es somit unerheblich ist, welche der beiden Zahlen man als Startwert für die Folgen verwendet. So wird zum Beispiel die Zahl 14 eine Erweiterung der Folge der Zahl 7 ergeben, da der erste Schritt das Halbieren der 14 sein wird. Aufgrund dessen kann jeder ungeraden Zahl eine Menge an geraden Zahlen zugeordnet werden und jedes Element dieser Menge wird alleine durch Halbieren die ungerade Zahl erreichen. Beispielsweise ist

$M_1 = \{2, 4, 8, 16, 32, ...\}$
$M_3 = \{6, 12, 24, 48, 96, ...\}$
$M_5 = \{10, 20, 40, 80, 160\}$
$M_7 = \{14, 28, 56, 112, 224\}$
...

Als geeignete Darstellungsform dieser Mengen habe ich nun ein Zahlengitter gewählt. Jede Zeile beginnt mit einer ungeraden Zahl und es folgen die Elemente der zugehörigen Menge. Dabei können die Zahlen von links nach rechts und von oben nach unten aufsteigend sortiert werden.

1	2	4	8	16	32	64	128
3	6	12	24	48	96	192	384
5	10	20	40	80	160	320	640
7	14	28	56	112	224	448	896
9	18	36	72	144	288	576	1152
11	22	44	88	176	352	704	1408
13	26	52	104	208	416	832	1664
15	30	60	120	240	480	960	1920

Abbildung 1: Ausschnitt aus dem Collatz-Gitter

Anhand des erstellten Gitters kann das Collatzproblem nun umformuliert werden. Das Halbieren einer Zahl, was einer der Schritte einer Collatz-Iteration ist, kann nun als Schritt in das linke benachbarte Feld auf dem Gitter angesehen werden. Dieser Schritt soll nun als Abstieg bezeichnet werden. Am Ende des Abstiegs einer Reihe steht nun die ungerade Zahl ganz links. Ist man bei ihr angelangt folgt der nächste Schritt, der als Sprung bezeichnet wird: Gehe zu dem Feld, in dem das Dreifache der ungeraden Zahl um eins erhöht steht. Die Collatzvermutung lautet nun: Jede Folge erreicht die erste Zeile und damit 1 und den Zyklus 4, 2, 1.
Diese Umformulierung ermöglicht also eine visuelle Darstellung des Problems und ist übersichtlicher als die bloßen Zahlenfolgen von Berechnungen.

Meine Projektidee ist nun, mich näher mit den Abstiegen und Sprüngen auf dem Gitter und weiteren Auffälligkeiten zu beschäftigen. Das übergeordnete Ziel ist, das Verständnis des Collatzproblems zu erweitern und dabei weitere Strukturen und mathematische Muster zu entdecken.

2. Ansätze zum Finden neuer Strukturen

Ich habe zwei Ansätze zum Erforschen des Collatzproblems gefunden. Diese können zum Teil mehrere neue Wege aufzeigen. Im Folgenden möchte ich meine Ansätze erläutern.

2.1 Vollständigkeit der Darstellung

Bei jeder neuen Darstellung muss zunächst überprüft werden, ob diese auch den ganzen Bereich des Problems abdeckt. Konkret bedeutet das in diesem Fall, dass das Gitter auf das Beinhalten aller natürlichen Zahlen geprüft werden muss. Weiterhin muss das Gitter auf doppelte Einträge überprüft werden. Optimal ist natürlich das einmalige Auftreten jeder natürlichen Zahl, allerdings muss auch der andere Fall berücksichtigt werden. In diesem Fall sollten die Positionen der doppelten Einträge genauer untersucht werden.
Ein vielversprechender Ansatz dazu ist die Primfaktorzerlegung, die besagt, dass jede natürliche Zahl eindeutig als Produkt von Primzahlen geschrieben werden kann. Sollte jedes mögliche Produkt von Primzahlen, oder einfache Primzahlen, exakt einmal in dem Gitter zu finden sein, so beinhaltet das Gitter alle natürlichen Zahlen genau einmal.

2.2 Arbeiten mit dem Gitter

Der zweite Ansatz ist das eigentliche Arbeiten auf Grundlage des Collatz-Gitters. Zunächst einmal ist es vielversprechend, verschiedene Collatz-Folgen in dem Gitter zu markieren und somit ein Gefühl für die neue Darstellung zu bekommen. Dabei können dann Eigenschaften dieser Folgen visuell dargestellt werden. Beispielsweise die Länge und Richtung eines Sprungs von einer Reihe zur nächsten oder die Länge des Abstieges nach einem Sprung. Dadurch werden viele Informationen geschaffen, die bei der Erforschung des Problems helfen.

3. Ergebnisse

3.1 Das Gitter beinhaltet alle natürlichen Zahlen

Wie bereits erläutert, ist es für meine Zwecke optimal, dass das erstellte Gitter alle natürlichen Zahlen genau einmal enthält. Das bedeutet, dass jede Primfaktorzerlegung in dem Gitter genau einmal vorkommen soll.

Da das Gitter von links nach rechts aufgebaut wird, bietet es sich an, die linke Spalte, also die ungeraden Zahlen, als erstes zu betrachten. Bekannt ist, dass alle Primzahlen außer der 2 ungerade sind. Außerdem ist das Produkt zweier ungerader Zahlen stets eine ungerade Zahl.

Somit können folgende Schlüsse gezogen werden:

- Da alle ungeraden Zahlen in der Spalte vertreten sind, sind auch alle ungeraden Primzahlen in der Spalte vertreten.
- Jedes Produkt zweier ungerader Primzahlen kann durch eine ungerade Zahl dargestellt werden

Nun kann man die weiteren Spalten betrachten. Jede Zahl ist das Doppelte der Zahl links von ihr. Die Zahlen sind also gerade Zahlen. Die Primfaktorzerlegung für eine gerade Zahl lautet $2^x \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, wenn x eine natürliche Zahl und p_1 bis p_n ungerade Primzahlen sind. Da jedes Produkt ungerader Primzahlen eine ungerade Zahl ist, kann man dies verkürzen zu $2^x \cdot (2n+1)$. Hierbei sind x und n natürliche Zahlen. Die Zweierpotenz kann man auch in dem Collatz-Gitter wiederfinden, da jeder Schritt nach rechts dem Verdoppeln einer Zahl entspricht. Der zweite Faktor ist eine ungerade Zahl und damit in der ersten Spalte zu finden. x definiert also die Spalte und n die Zeile in dem Gitter. Da die Primfaktorzerlegung eindeutig definiert ist, kann jeder natürlichen Zahl genau ein Paar (x, n) zugeordnet werden. Da das Gitter alle möglichen Paare enthält, muss auch jede natürliche Zahl genau einmal enthalten sein.

Das bedeutet, dass das Collatz-Gitter in der Tat die Voraussetzung erfüllt und damit das Collatzproblem vollständig darstellt.

3.2 Das Collatz-Gitter enthüllt neue Erkenntnisse

Das Markieren und Verbinden von Zahlen im Collatz-Gitter soll hier beispielhaft gezeigt werden, da sich meine Ergebnisse darauf beziehen. Der einfache Start gelingt durch das Verbinden der ungeraden Zahlen mit dem jeweiligen Nachfolger in der Collatz-Folge.

1	2	4	8	16	32	64	128
3	6	12	24	48	96	192	384
5	10	20	40	80	160	320	640
7	14	28	56	112	224	448	896
9	18	36	72	144	288	576	1152
11	22	44	88	176	352	704	1408
13	26	52	104	208	416	832	1664
15	30	60	120	240	480	960	1920
17	34	68	136	272	544	1088	2176
19	38	76	152	304	608	1216	2432
21	42	84	168	336	672	1344	2688
23	46	92	184	368	736	1472	2944

Abbildung 2: Auswahl von Sprüngen im Collatz-Gitter

Anhand solcher Markierungen könne neue Erkenntnisse gewonnen werden.

3.2.1 Welche Zahlen zeigen auf welche Mengen?

Zunächst fällt auf, dass nicht jede Reihe das Ziel eines Sprunges ist. Beispielsweise finden sich in M_3 keine Endpunkte von Sprüngen. Das ist sehr einfach zu erklären und wenig überraschend, da der Term $3n+1$ immer eins mehr als ein Vielfaches von Drei ergibt. Deshalb können die Mengen eines Vielfachen von 3 (M_3, M_9, M_{15}, …) nicht durch ein Sprung erreicht werden.

Interessanter ist jedoch die Tatsache, dass in den übrigen Reihen scheinbar nur jeder zweite Wert das Ziel eines Sprunges ist. Um zu überprüfen ob das generell gilt, kann man sich anschauen, welche Eigenschaften die Felder rechts von einem Zielfeld haben. Man kann also annehmen, dass es einen Wert $3n+1$ gibt, der das Ergebnis eines Sprunges ist. Nun wird der Wert verdoppelt, bis sich die Form $3m+1$ ergibt mit m als natürliche Zahl.

Verdoppeln: $(3n+1)\cdot 2=6n+2=6n+1+1=3(2n+\frac{1}{3})+1$

Vervierfachen: $(3n+1)\cdot 4=12n+4=12n+3+1=3(4n+1)+1$

Der Zweite Term liefert mit $m=4n+1$ eine natürliche Zahl. Die Zahl $4n+1$ springt also in die gleiche Reihe, wie *n*. Außerdem ist das Ergebnis des Sprunges von $4n+1$ viermal größer, als das Ergebnis des Sprunges von *n*. Das erklärt die Abstände der Sprungziele, da das Vierfache einer Zahl zwei Felder weiter rechts im Gitter steht.

Mit diesem Wissen können neue Mengen gebildet werden, die alle Zahlen enthalten, die auf eine bestimmte Zeile zeigen, indem man eine Folge definiert: $a_0=1 \, und \, a_n=4\cdot a_{n-1}+1$

Durch verändern von a_0 erhält man

$K_1=\{1,5,21,85\}$

$K_2=\{3,13,53,213\}$

...

Nach ausführlicher Internetrecherche bin ich auf die gleichen Mengen gestoßen, allerdings in andere Schreibweise. Dort wird K_1 so definiert: K_1 beinhaltet alle k_1-Zahlen, welche die Form $k_1=\frac{2^{x_1}-1}{3}$ haben, wobei x_1 eine gerade natürliche Zahl ist[Q2]. Man kann mithilfe vollständiger Induktion überprüfen, dass die Definitionen in der Tat identisch sind.

Induktionsbehauptung: $a_n=\frac{2^{x_1}-1}{3}$

Induktionsanfang: $a_0=1=\frac{2^2-1}{3}$

Induktionsbeweis:

$$a_n=4\cdot a_{n-1}+1=4\cdot\frac{2^{x_1}-1}{3}+1=\frac{2^{x_1+2}-4}{3}+\frac{3}{3}=\frac{2^{x_1+2}-1}{3}$$

Somit sind die Definitionen identisch.

Die erhaltenen Zahlen sind ungerade, da sie eins mehr als ein Vielfaches von Vier sind. Also ist jedes der Elemente aus K_1 das Anfangselement einer Reihe im Collatz-Gitter. Das heißt, das es weitere Mengen geben kann, deren Element alle auf die gleiche Reihe zeigen und darüber dann auf die erste Menge. Zum Beispiel zeigen alle Elemente aus K_2, die k_2-Zahlen, auf M_5, also die Zeile im Gitter, die am Anfang eine Fünf stehen hat.

$3\cdot 3+1=10=5\cdot 2 \;\; und \;\; 3\cdot 13+1=40=5\cdot 8 \;\; usw.$

Solche weiteren Mengen kann man dann konstruieren, x_2 ist dabei eine natürliche Zahl:

$k_1\cdot 2^{x_2}=3k_2+1$, da alle k_2-Zahlen zu einer Zeile im Gitter führen, an deren Anfang eine k_1-Zahl steht. Durch Umformen erhält man $k_2=\frac{k_1\cdot 2^{x_2}-1}{3}$.

Das kann man wiederum auf die k_2-Zahlen anwenden und so weitere Mengen konstruieren. Für das Collatzproblem bedeutet das: Sollte die Vermutung war sein, beinhalten die so konstruierten Mengen alle ungeraden Zahlen.

Die gesamten natürlichen Zahlen könnten dann also aus K_1 heraus gebildet werden.

3.2.2 Abstieg der Reihen

Eine weitere Eigenschaft des Collatz-Gitters fällt auf: Die Länge des Abstieges bis zur nächsten ungeraden Zahl nach einem *3n+1*-Sprung scheint einem bestimmtem Muster zu folgen. Zum Beispiel hat die Drei eine Abstiegslänge von Eins, da $3 \cdot 3+1=10=2 \cdot 5$, die neue Zahl, nur einmal halbiert werden muss. Das Gleiche passiert auch bei den Zahlen 7, 11, und 15, was vermuten lässt, dass dieses Verhalten bei jeder zweiten Reihe auftritt. Außerdem scheint die Hälfte der anderen Zahlen, also ein Viertel insgesamt, eine Abstiegslänge von Zwei zu haben und insgesamt ein Achtel der Zahlen eine Abstiegslänge von 3. Im Folgenden sind die Längen der Abstiege in Abhängigkeit von den ungeraden Zahlen zu sehen.

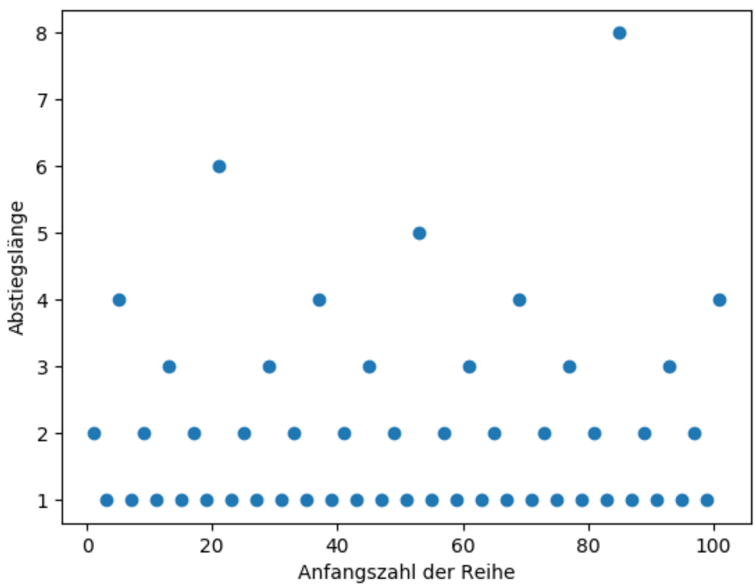

Abbildung 3: Abstiegslängen für die Sprünge der ersten 50 Reihen

Es scheint also immer die Hälfte der übrigen Zahlen eine um Eins vergrößerte Abstiegslänge zu haben. Zur generellen Überprüfung kann man den *3n+1*-Schritt mit einer geraden Zahl gleichsetzen und schauen, welche *n* diese Bedingung erfüllen. Durch das Teilen des Terms durch 2 führt man nun den Abstieg durch. Nun kann man den Term wieder mit einer geraden Zahl gleichsetzen und überprüfen, welche Zahlen die Bedingung erfüllen. Somit filtert man also alle Zahlen aus und erhält die Verhältnisse, die man in den Abstiegslängen wiederfindet.

Sprung: $3 \cdot n+1=2 \cdot x \Leftrightarrow \frac{3n+1}{2}=x$ 1. Schritt des Abstieges (x ist gerade): $\frac{3n+1}{2}=2 \cdot y$

Da immer neue Variablen benötigt werden, werde ich x_i verwenden. Da ich auch *n* durch einen anderen Ausdruck ersetzen werde, werde ich für die Ausdrücke n_i verwenden. Außerdem soll gelten: $x_i=\frac{x}{2^i}$ und x, x_i und n_i sollen natürliche Zahlen sein. Außerdem darf n_i auch gleich Null sein. Nun können die Abstiegslängen genauer untersucht werden.

Sprung: $3n_0+1=x_0=x$ gilt für alle n_0.

1. Schritt des Abstieges: $\frac{3n_0+1}{2}=\frac{x_0}{2}=x_1 \Leftrightarrow 3n_0+1=2x_1$

Durch diese Umformung fallen die Brüche weg. Weiterhin gilt die Formel nur für ungerade n_0. Die Formel kann also umgeschrieben werden zu $3(2n_1+1)+1=6n_1+4=2(3n_1+2)=2x_1$ Das bestätigt noch einmal, dass jeder Sprung zu einer geraden Zahl führt, da diese nur von ungeraden Zahlen aus gehen. Das Vorgehen wird nun auch für die nächsten Abstiegslängen angewendet, um neue Regelmäßigkeiten zu finden. Die bisherigen Erkenntnisse sind schließlich nicht neu, bestätigen aber somit die Methode.

2. Schritt des Abstieges: $\frac{2(3n_1+2)}{2}=2\frac{x_1}{2} \Leftrightarrow 3n_1+2=2x_2$ Gilt nur bei geraden n_1, da nur dann das Ergebnis die Form $2x_2$ hat: $3(2n_2)+2=6n_2+2=2(3n_2+1)=2x_2$

3. Schritt des Abstieges: $\frac{2(3n_2+1)}{2}=2\frac{x_2}{2} \Leftrightarrow 2(3n_2+1)=4x_3 \Leftrightarrow 3n_2+1=2x_3$

Die letzte Gleichung hat dieselbe Form wie die erste, was bedeutet, dass sich die Merkmale der Zahlen wiederholen. Die Startzahl n_0 wird in den Gleichungen immer weiter ersetzt durch neue Ausdrücke. Die neuen Ausdrücke für die nächsten Schritte haben dabei die Formen für gerade oder ungerade Zahlen, n_i wird also ersetzt durch $2n_{i+1}$ oder $2n_{i+1}+1$. Alle n_i der jeweils anderen Form haben dann keinen weiteren Abstieg, da das Ergebnis dann schon eine ungerade Zahl ist. Es wechseln sich gerade und ungerade Zahlen in der Verfeinerung des Ausdrucks ab, sodass jeweils die Hälfte der Zahlen ans Ende gelangt, was auch die Verteilung der Abstiegslängen erklärt.

Hier sind die ersten Terme und die zugehörigen Abstiegslängen aufgelistet, die durch die Verfeinerung entstehen. Die rechte, ausmultiplizierte Form wird dabei immer als Basis für die faktorisierte Form auf der linken Seite verwendet.

Alle Zahlen der Form $1(2n_1+1)=2n_1+1$ haben eine minimale Abstiegslänge von Eins.
Alle Zahlen der Form $2(2n_2)+1=4n_2+1$ haben eine minimale Abstiegslänge von Zwei.
Alle Zahlen der Form $4(2n_3+1)+1=8n_3+5$ haben eine minimale Abstiegslänge von Drei.
Alle Zahlen der Form $8(2n_4)+5=16n_4+5$ haben eine minimale Abstiegslänge von Vier.
Alle Zahlen der Form $16(2n_5+1)+5=32n_5+21$ haben eine minimale Abstiegslänge von Fünf.
Dieses Muster wird fortgeführt in den gesamten natürlichen Zahlen.

Interessanterweise sind die Konstanten am Ende einer Zahlenform k_1-Zahlen (vgl. S. 9). Das liegt an dem Umstand, dass die Faktoren in der faktorisierten Form aufsteigend alle Zweierpotenzen für natürliche Exponenten sind, da dieser immer mit $2n_i$ bzw. $2n_i+1$

multipliziert wird. Außerdem wird in jeder zweiten Verfeinerung n_i durch $2n_{i+1}+1$ ersetzt und dadurch ändert sich die Konstante in der ausmultiplizierten Form (1, 5, 21, ...). Der Vorfaktor in der faktorisierten Form ist dabei immer eine Viererpotenz (1, 4, 16, …), weil jede zweite Zweierpotenz auch eine Viererpotenz ist: $2^{2x}=4^x$
Es entsteht also ein Term der folgenden Form: $4^x(2n_i+1)+c_j$ Dabei ist c_j die Konstante der vorigen, ausmultiplizierten Form.

$$4^x(2n_i+1)+c_j=4^x\cdot 2n_i+4^x+c_j$$

Es wird also immer eine Viererpotenz zu der Konstanten addiert, was man an den ersten Konstanten schon gut nachvollziehen kann: $1=1$, $5=4+1$, $21=16+4+1$, ...
Die Konstante am Ende jeder Form kann also geschrieben werden als $c_j=4^0+4^1+...+4^j$.
Das kann jedoch auch anders ausgedrückt werden:

$$c_j=4^0+4^1+...\,4^j=4^0+4\left(4^0+4^1+...+4^{j-1}\right)=4\left(4^0+4^1+...+4^{x-j}\right)+1=4c_{j-1}+1$$

Da man $c_0=1$ definieren kann, weil Eins die erste Konstante ist, ist das die gleiche Folge wie $a_0=1 und\, a_n=4\cdot a_{n-1}+1$. Da die letzte Folge die k_1-Zahlen definiert hat (vgl. S. 9), müssen auch alle Konstanten am Ende einer Form k_1-Zahlen sein.

3.2.3 Regelmäßigkeiten in Sprüngen

Im Collatz-Gitter fällt auf, dass nur jeder zweite Sprung von einer ungeraden Zahl aus zu einer Reihe mit höherer Anfangszahl und damit weiter nach unten führt. Diese Sprünge führen zudem immer in die zweite Spalte, die Zahl hat also die Abstiegslänge Eins.
Man kann die Anfangszahlen der Reihen auch grafisch darstellen. Dabei liegen auf der X-Achse alle ungeraden natürlichen Zahlen und auf der Y-Achse die jeweils nächste Anfangszahl nach einem Sprung. Wenn man die Punkte verbindet, erhält man einen Grafen mit vielen Zacken, wobei die Spitze jedes zweiten Zackens oberhalb der Funktion f(x)=x liegt, also die nächste Anfangszahl größer als die vorige ist (Abbildung 4).

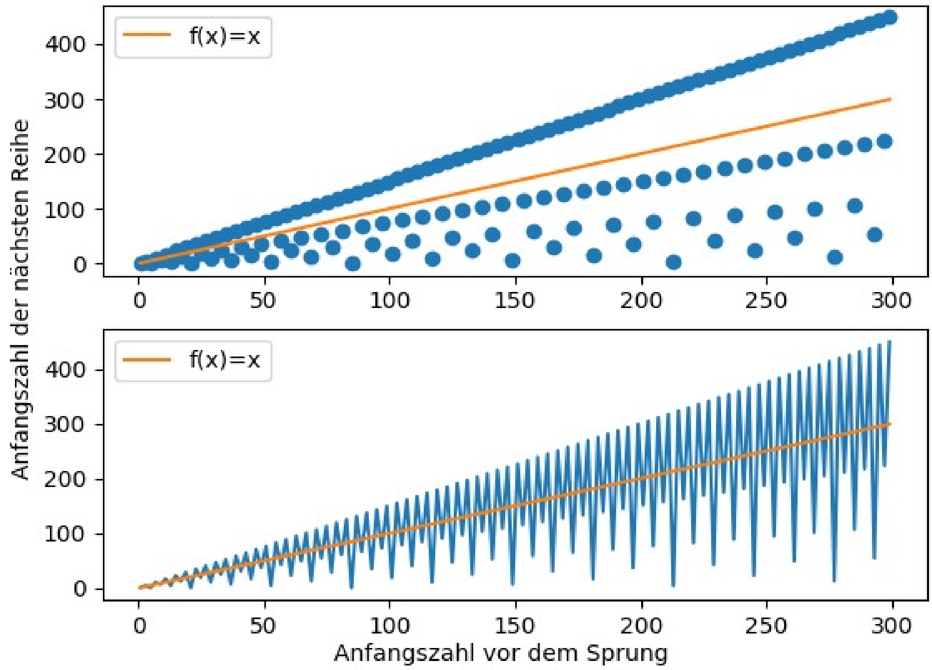

Abbildung 4: Anfangszahlen der nächsten Reihen

Das ist leicht zu erklären, da die neue Anfangszahl der Reihe mit dem Term $\frac{3n+1}{2^x}$ erklärt werden kann, wobei x der Abstiegslänge entspricht. Bei $x=1$ ergibt das $\frac{3n+1}{2}=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}>n$, bei $x=2$ ergibt das $\frac{3n+1}{4}=\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}<n \text{ } f\ddot{u}r \text{ } n>1$. Da für weitere Abstiegslängen nur durch Zwei geteilt wird, kann der Wert nicht mehr wachsen, sodass ein Sprung in die dritte Spalte oder weite immer eine Reihe mit kleinerer Anfangszahl erreicht. Bei einem Sprung in die zweite Spalte jedoch steigt die Anfangszahl.

Außerdem fällt auf, dass die Sprunglängen bei gleichen Abstiegslängen immer größer werden. So führt ein Sprung von der Zahl Drei auf M_5, also eine Reihe weiter. Die nächste Zahl mit gleicher Abstiegslänge ist Sieben und führt zwei Reihen weiter auf M_9.
Man kann die Sprunglängen für eine Abstiegslänge berechnen. Da jede ungerade Zahl als $2n_1+1$ ausgedrückt werden kann, ist der Abstand zweier Zeilen die Differenz der jeweiligen n_1 ihrer Anfangszahlen. n_1 wird hierbei wie bei der Berechnung der Abstiegslänge eingesetzt, allerdings muss es nicht durch weitere n_i ersetzt werden. Nun werde ich die Sprunglängen für Zahlen mit Abstiegslänge Eins berechnen.

Dann ist $\frac{3(2n_1+1)+1}{2}=\frac{6n_1+4}{2}$ also die Anfangszahl der nächsten Reihe und $\frac{\frac{6n_1+4}{2}-1}{2}$ das n_1 der neuen Reihe. Nun ist die Sprunglänge also

$$\frac{\frac{6n_1+4}{2}-1}{2}-n_1=\frac{3n_1+1}{2}-n_1=\frac{1}{2}n_1+\frac{1}{2} \quad .$$

Möchte man nun wissen, wie viele Reihen weiter ein Sprung führt, setzt man einfach die Anfangszahl in die Gleichung ein. Beispielsweise führt die Zahl Drei in die Menge M_5, also eine Zeile weiter im Collatz-Gitter. Die Formel ergibt $3=2*1+1 \Rightarrow n_1=1 \, und \, \frac{1}{2}*1+\frac{1}{2}=1$

Ein weiterer Aspekt der Sprunglänge ist, wie sie mit den Reihen steigt oder sinkt. Um die Veränderung der Sprunglänge zu errechnen, muss man die Sprunglänge der niedrigeren Reihe von der Sprunglänge der höheren Reihe subtrahieren. Da jede zweite Reihe eine Abstiegslänge von Eins hat, kann man Folgendes rechnen:

$$\frac{1}{2}*(n_1+2)+\frac{1}{2}-(\frac{1}{2}*n_1+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}*2=1$$

Das bedeutet, dass die Sprunglänge einer Reihe mit Abstiegslänge Eins, pro Reihe um Eins länger wird. Damit erklärt sich die Sprunglänge von Zwei für den Sprung von Sieben auf M_{11}.

Dieses Vorgehen kann auch für die anderen Abstiegslängen angewendet werden. Der allgemeine Term für eine Sprunglänge ist

$$\frac{\frac{6n_1+4}{2^x}-1}{2}-n_1=\frac{\frac{6n_1+4-2^x}{2^x}}{2}-n_1=\frac{6n_1+4-2^x}{2^{x+1}}-n_1=\frac{(6-2^{x+1})n_1+4-2^x}{2^{x+1}}$$

. Nun kann auch die Veränderung der Sprunglänge allgemein beschrieben werden. Denn es ist aus dem Abstieg der Reihen bekannt, dass jede zweite Zahl die Abstiegslänge Eins hat, jede vierte Zahl die Abstiegslänge Zwei, jede dritte die Länge Vier usw. Es kommen Zahlen mit der Abstiegslänge x alle 2^x Reihen vor. Also ist der Term für die allgemeine Veränderung der Sprunglänge

$$\frac{(6-2^{x+1})(n_1+2^x)+4-2^x}{2^{x+1}}-\frac{(6-2^{x+1})n_1+4-2^x}{2^{x+1}}$$

$$=\frac{(6-2^{x+1})(n_1+2^x)}{2^{x+1}}+\frac{4-2^x}{2^{x+1}}-\frac{(6-2^{x+1})n_1}{2^{x+1}}-\frac{4-2^x}{2^{x+1}}$$

$$=\frac{(6-2^{x+1})n_1}{2^{x+1}}+\frac{(6-2^{x+1})2^x}{2^{x+1}}-\frac{(6-2^{x+1})n_1}{2^{x+1}}=\frac{(6-2^{x+1})2^x}{2^{x+1}}=\frac{6-2^{x+1}}{2}=3-2^x$$

Bei $x\geq 2$ ergibt sich daraus eine negative Zahl. Das bedeutet, dass die Sprunglänge zurückgeht. Sollte eine Sprunglänge negativ sein, bedeutet dies lediglich, dass die Anfangszahl der nächsten Reihe kleiner ist, im Collatz-Gitter entspricht das einem Sprung nach oben. Wenn nun eine Sprunglänge positiv beginnt und dann sinkt, könnte es sein, dass die Sprunglänge gleich Null wird und ein weiterer Kreis, neben dem bekannten, entsteht. Damit wäre die Collatzvermutung widerlegt. Dafür müsste der allgemeine Term für die Sprunglänge größer oder gleich Null sein, wobei das x größer oder gleich Zwei ist, da erst dann die Änderung der Sprunglänge negativ wird.

$$\frac{(6-2^{x+1})n_1+4-2^x}{2^{x+1}} \geq 0 \Leftrightarrow (6-2^{x+1})n_1+4-2^x \geq 0 \Leftrightarrow (6-2^{x+1})n_1 \geq 2^x-4$$

$$\Leftrightarrow n_1 \geq \frac{2^x-4}{6-2^{x+1}} \quad falls \quad 6-2^{x+1}>0 \quad und \quad n_1 \leq \frac{2^x-4}{6-2^{x+1}} \quad falls \quad 6-2^{x+1}<0$$

Da n_1 eine nichtnegative ganze Zahl ist, kann man leicht überprüfen, ob es eine Lösung für die Gleichung gibt. Man kann den Bruch in die Funktionen $f(x)=6-2^{x+1}$ und $g(x)=2^x-4$ aufteilen. Grafisch dargestellt sehen sie so aus:

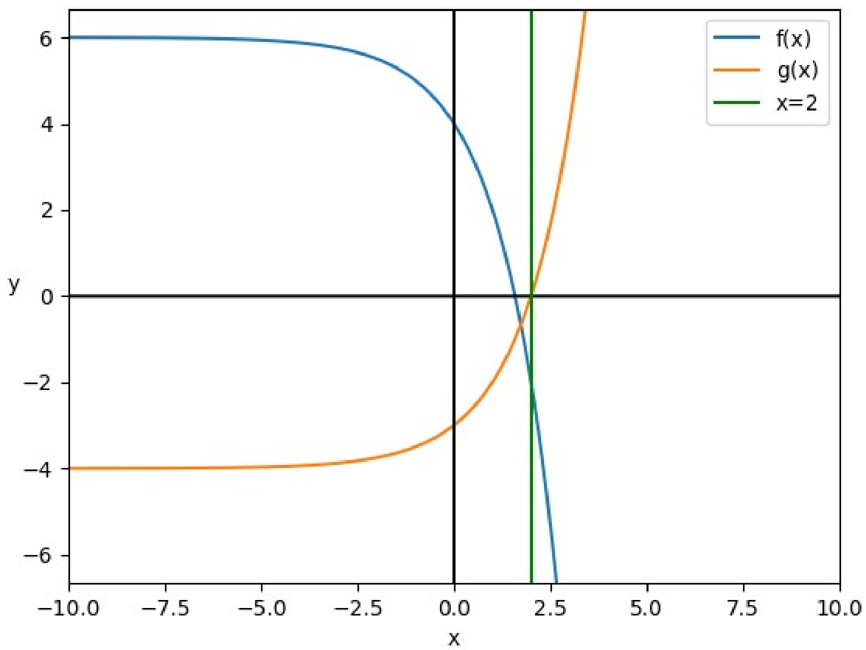

Abbildung 5: Die Funktionen im Koordinatensystem

Da x größer oder gleich Zwei sein soll, ist der Bereich rechts von der grünen Linie interessant. Die Funktion $f(x)$ ist dort kleiner als Null, weshalb der zweite Fall der Lösung verwendet werden muss. Allerdings ist die Funktion $g(x)$ größer als Null. Da aber eine positive Zahl geteilt durch eine negative Zahl immer eine negative Zahl ergibt, kann $\frac{2^x-4}{6-2^{x+1}}$ nur eine negative Zahl ergeben. Also kann $n_1 \leq \frac{2^x-4}{6-2^{x+1}}$ dort keine Lösung haben, da eine natürliche Zahl immer positiv ist. Allerdings muss man die grüne Linie, also den Fall $x=2$, auch noch betrachten. $f(2)$ ist eindeutig negativ. $g(2)=2^2-4=0$, also ist der Bruch auch Null. Das ist eine mögliche Lösung, da n_1 auch Null sein darf. Die Sprunglänge ist dann

$\frac{(6-2^{x+1})n_1+4-2^x}{2^{x+1}}=\frac{(6-2^{2+1})*0+4-2^2}{2^{2+1}}=0$. Die ungerade Zahl, für die das gilt ist $2*0+1=1$, aber der Zyklus, in dem die Eins steht, ist schon bekannt und essentiell für die Collatzvermutung. Das bedeutet, dass es keine weitere Zahl mit Sprunglänge Null gibt und damit keinen weiteren Kreis innerhalb einer Reihe.

4. Ergebnisdiskussion

Die gesammelten Ergebnisse sind sehr interessant. Zunächst einmal ist es gelungen, dass Collatz-Gitter als Darstellungsform zu überprüfen und somit die Grundlage für die Untersuchung der Strukturen zu legen. Bisher ist vor allem der Collatz-Graph[Q4] bekannt, der jedoch nur die einzelnen Zahlen zeigt, aber keine Muster darstellen kann. Außerdem sind im hier dargestellten Ansatz Ergebnisse, die Muster im Collatzproblem beschreiben, dabei herausgekommen. Sehr interessant sind dabei die immer wiederkehrenden Strukturen durch unterschiedliche Ansätze und Ideen. So treten in meinen Ergebnissen mehrfach die Zahlen aus K_1 auf, während auch bei Veröffentlichungen im Internet diese Zahlen eine wichtige Rolle spielen[Q2]. Weiterhin sind bei genauerer Betrachtung auch die Abstiegslängen in anderen Resultaten zu finden. Allerdings wird dort von einer „endlichen Stoppzeit“[Q3] gesprochen. Das zeigt, dass die eigene Idee häufig nicht die erste ihrer Art ist. Jedoch kamen diese Ergebnisse auf unterschiedliche Arten zustande und konzentrieren sich auch auf andere Aspekte. Weiterhin ist durch das Collatz-Gitter eine einfachere Darstellung dieser Sachverhalte möglich.

Dennoch gibt es auch weitere Möglichkeiten zur Forschung an der Struktur: Die jetzigen Ergebnisse können als Basis weiterer Forschung dienen, die so noch komplexere Strukturen in der Collatzvermutung finden. So kann man die Ausdrücke für natürliche Zahlen mit bestimmter Abstiegslänge für verschiedene n_i ausrechnen und dort weitere Muster entdecken. Außerdem sind die Sprunglängen weiterhin sehr interessant, sodass es sich lohnen könnte, einen weiteren Blick darauf zu werfen. Vielleicht könnte man die Sprunglängen von verschiedenen Zahlen auch über unterschiedliche Abstiegslängen hinweg untersuchen.

Generell ist es schwierig, vielversprechende Ansätze zu entwickeln. Das liegt daran, dass man nicht genau weiß, welche Erkenntnisse sich aus den Ansätzen entwickeln lassen, weil diese nicht direkt sichtbar sind. Außerdem kann man auf ein Problem stoßen, bei dem man nicht in der Lage ist, dieses zu lösen. Dabei gibt es allerdings keine physikalischen Grenzen, sodass man nach einiger Zeit eine gute Idee bekommen und das Problem lösen kann.

Aus diesem Grund habe ich verschiedene Ideen aufgeschrieben und dann zunächst diejenigen verfolgt, die ich selbst am interessantesten fand.

Natürlich stellt sich auch die Frage, welchen Nutzen das Projekt weiterhin hat. Zunächst einmal ist das gesamte Collatzproblem rein mathematischer Natur. Dadurch hat es keinen klaren Bezug zur Realität. Allerdings gibt es immer wieder Fälle, in denen mathematische Ideen durch Physiker aufgegriffen und genutzt wurden. Beispielsweise werden komplexe Zahlen in der Elektrotechnik verwendet, aber zunächst rein mathematisch entwickelt. Anwendungsfälle für das Collatzproblem sind also nicht gänzlich ausgeschlossen.

Die Arbeit am Collatzproblem ist also noch nicht abgeschlossen, da es immer interessante Ideen gibt, die es sich lohnt zu verfolgen.

5. Zusammenfassung

Das Collatzproblem ist ein sehr einfach formulierbares Problem, hat aber insgesamt eine große Komplexität. Dieses große Problem kann mithilfe des Collatz-Gitters einfacher visualisiert werden, wodurch die Strukturen schneller erfasst werden können.

Es ist mir gelungen, die Regelmäßigkeiten in Abstiegs- und Sprunglängen im Gitter zu erklären und Zahlen, die in die gleiche Reihe führen, in Mengen einzuordnen. Die erhaltenen Terme lassen weitere Vorhersagen über bestimmte Zahlen zu und helfen somit, das Collatzproblem verständlich zu machen.

Die Idee, anhand der neuen Darstellungsform die Struktur des Collatzproblems zu erforschen, lässt jedoch noch weitere Ansätze auch auf Basis der jetzigen Ergebnisse zu. Es gibt also weiterhin Forschungsmöglichkeiten am Collatzproblem, die es verständlicher machen können.

6. Quellen- und Literaturverzeichnis

Q1. https://de.wikipedia.org/wiki/Collatz-Problem aufgerufen am 25.12.2019 um 11:39 Uhr

Q2. https://matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1459 aufgerufen am 25.10.2019 um 14:05 Uhr

Q3. http://home.mathematik.uni-freiburg.de/didaktik/material_download/collatzproblem.pdf aufgerufen am 04.01.2019 um 15:84 Uhr

Q4. https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Collatz-graph-all-30-no27-loop.svg aufgerufen am 04.01.2019 um 18:28 Uhr

7. Unterstützer

- Dr. Ansgar Striethorst und Kai Crystalla – Betreuer der Jugend-Forscht-AG